

**T.C.
PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI
DOKTORA TEZİ**

ORTAOKUL MATEMATİK ÖĞRETMENİ ADAYLARININ İSPAT

ŞEMALARI

Emine Gaye ÇONTAY

Danışman

Prof. Dr. Asuman DUATEPE PAKSU

Bu çalışma Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi (BAP) tarafından 2016-EĞBE-001 nolu Doktora tez projesi olarak desteklenmiştir.

DOKTORA TEZİ JÜRİ ONAY FORMU

Bu çalışma, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda 28 /04 / 2017 tarihinde yapılan tez savunma sınavında jürimiz tarafından Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

JÜRİ

ÜYE :Prof. Dr. Asuman DUATEPE PAKSU
(TEZ DANIŞMANI)



ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Sibel KAZAK
(Jüri Başkanı)



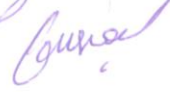
ÜYE :Yrd. Doç. Dr. İbrahim TUNCEL



ÜYE : Doç. Dr. Işıkhan UĞUREL

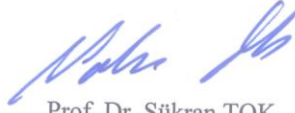


ÜYE :Yrd. Doç. Dr. Burçak BOZ YAMAN



ONAY

Bu tez Pamukkale Üniversitesi Lisansüstü Eğitim - Öğretim Yönetmeliğinin ilgili maddeleri gereğince yukarıdaki jüri tarafından uygun bulunmuş ve Eğitim Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 12 / 05 / 2017 tarih ve 15 / 10 sayılı kararıyla onaylanmıştır.



Prof. Dr. Şükran TOK

Enstitü Müdürü

ETİK BEYANNAMESİ

Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversitede veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı beyan ederim.


İmza .

Emine Gaye ÇONTAY

TEŞEKKÜRLER SAYFASI

Bu çalışmada ortaokul matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları ispat şemalarının neler olduğunu ortaya koyarak bu ispat şemalarının ne gibi farklılıklar gösterdiği belirlenmeye çalışılmıştır. Bu amaçla durum çalışması olarak yürütülen çalışmada nitel analiz yöntemleriyle bu şemalar ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bu çalışmanın gerçekleştirilmesindeki tüm süreçlerde yanımda olan; yüksek enerjisi, pozitif ve çözüm odaklı yaklaşımıyla yanımda olarak bana destek olan çok sevgili danışmanım Prof. Dr. Asuman DUATEPE PAKSU'ya tüm kalbimle teşekkürlerimi sunarım. Araştırma süreci boyunca sorduğum tüm sorulara tüm enerjileriyle yanıt veren değerli hocalarım Doç. Dr. Tolga KABACA'ya, Yrd. Doç. Dr. İbrahim TUNCEL'e ve Yrd. Doç. Dr. Sibel KAZAK'a ve çalışmamı sonlandırma aşamalarımnda hoşgörüsü, sabrı ve desteği için Anabilim Dalı Başkanım Doç. Dr. Necdet GÜNER'e çok teşekkür ederim. Çalışmamın veri analizi kısmında ve sonrasında tüm bilgi birikimleri ve enerjileriyle yanımda olan, içtenlikleriyle her türlü durumda çalışmaya gönüllü olan sevgili arkadaşlarım Ar. Gör. Aytuğ ÖZALTUN ÇELİK'e, Esra İYMEN'e ve Gülcan BAYRAM'a teşekkür ederim. Tez çalışmamı sonlandırırken desteklerini esirgemeyen sevgili arkadaşlarım Dr. Eda ASLAN'a ve Yrd. Doç. Dr. Tayfun TANYERİ'ne teşekkür ederim. Eğitim yaşamımın her aşamasında her zaman destekleriyle yanımda olan anneme ve babama teşekkürlerimi sunarım. Lisans üstü eğitimlerimde yanımda olan eşime teşekkür ederim.

Mayıs 2017

Emine Gaye ÇONTAY

(Araştırma Görevlisi)

ÖZET

Ortaokul Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Şemaları

Emine Gaye ÇONTAY

Bu araştırmanın amacı ortaokul matematik öğretmeni adaylarının sayılar alanında kullandıkları ispat şemalarının neler olduğunu, bu şemaları nasıl ortaya koyduklarını inceleyerek ispat şemalarının ne gibi farklılıklar gösterdiğini belirlemektir. Çalışma, Denizli ilinde bulunan Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda dördüncü sınıfta öğrenim gören üç öğretmen adayıyla yürütülmüştür. Çalışmada amaçlı örnekleme çeşitlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile içeriğinde sayılar alanında ispat uygulamaları bulunan "Elemanter Sayı Kuramı" dersini almış olma ölçütüne ve bu derse ilişkin yüksek, orta ve düşük başarı düzeylerinde olma ölçütlerine göre örneklem seçimine gidilmiştir. Öğretmen adaylarıyla klinik yöntem kullanılarak görev temelli görüşmeler ve klinik görüşmeler yapılmıştır. Çalışma iç içe geçmiş çoklu durum çalışması olarak tanımlanmıştır.

Çalışmada tek bir oturumda farklı veri toplama araçları kullanılarak veri toplanmıştır. Veri toplama araçları iki ana bölümden oluşmuştur. İlk bölüm Görev Temelli Görüşme Formu'ndan (Task Based Interview Questions Form); ikinci bölüm ise İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu'ndan oluşmuştur. Öğretmen adaylarıyla yapılan görev temelli görüşmeler İspat Soruları Formu (İSF), İspat Süreçlerine İlişkin Görüşme Formu (İSGF) ve Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu (GİGF) ile gerçekleştirilmiştir. Görev temelli görüşmelerin sonunda öğretmen adaylarına ikinci bölümde yer alan İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu (İDGF) uygulanmıştır.

Öğretmen adaylarının ispat şemalarının ortaya çıkarılması için Görev Temelli Görüşme Soruları Formu'na ve İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu'na verdikleri yanıtlar içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat şemaları Sowder ve Harel'in (1998) ispat şeması sınıflandırmasına göre sınıflandırılmıştır.

Öğretmen adaylarının tüm sorulara ilişkin cevapları incelendiğinde dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç ana kategorideki ispat şemalarının ortaya çıktığı görülmüştür. Bunun yanında öğretmen adaylarının analitik aksiyomatik ispat şeması haricindeki tüm alt gruplarındaki ispat şemalarının hepsini ortaya koyan özellikler sergiledikleri belirlenmiştir.

Öğretmen adayları aynı anda birden çok ispat şemasını ortaya çıkaracak özellikleri bir arada bulundurmışlardır. Öğretmen adaylarının hem görev temelli görüşmeler boyunca hem de ispatın doğasına ilişkin görüşmeler boyunca en çok dışsal ispat şemalarını daha sonra analitik ispat şemalarını en az sıklıkla ise deneysel ispat şemalarını ortaya çıkaran tepkiler gösterdikleri görülmüştür. Bunun yanında görev temelli görüşmeler boyunca bir öğretmen adayının iki farklı ispat şemasına ilişkin tepkileri aynı anda ortaya koydukları durumların hepsinde ispat şemalarından birinin dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olduğu görülmüştür. Başka deyişle bir öğretmen adayı bir durumda eğer iki farklı ispat şemasına ilişkin özellikler gösterdilerse bunlardan birinin dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olduğu tespit edilmiştir. Analitik ispat şemalarının kullanımında sadece analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan özellikler sergilenmiştir. Çalışmada daha yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının kendi aralarında ispat şemalarını ortaya koyan tepkilerinin benzer olduğu ve daha yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının analitik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterme ihtimallerinin daha düşük başarı düzeyindeki öğretmen adaylarına göre daha yüksek olduğu belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatın doğası hakkındaki fikirlerinin dışsal kaynaklı olduğu; dışsal kaynaklı fikirlerinin büyük çoğunluğunun dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması özellikleri gösterdiği belirlenmiştir. Görev temelli görüşmeler boyunca öğretmen adaylarının tümdengelmisel çıkarımlar yaparak ispatlarını doğru yapamamalarının kaynağının çoğunlukla onların dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarını ortaya çıkaran özellikler geliştirmiş olmalarından kaynaklanabileceği belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel fikirleri ile onların ispatı yapılandırırken dönüşüm yapmalarına engel olan fikirlerinin ilişkili olabileceği belirlenmiştir.

Öğretmen adaylarının kullandıkları yöntem hakkında bilgi eksikliklerinin ispat yapılandırmalarını yanlış biçimde oluşturmalarına sebep olabileceği belirlenmiştir. Bu durumun öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal ispat şemalarını ortaya çıkaran tepkilerin yoğun olması bulgusu ile ilişkili olabileceği belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: ispat şeması, ispatın doğası, ortaokul matematik öğretmeni adayları, sayılar, görev temelli görüşmeler, klinik yöntem.

ABSTRACT

The Proof Schemes of Preservice Middle School Mathematics Teachers

Emine Gaye ÇONTAY

The aim of this study is to investigate what kinds of proof schemes are used by preservice middle school mathematics teachers in the field of numbers and identify the differences of these schemes by examining how they presented them. This study was carried out with three female preservice mathematics teachers who were seniors at Pamukkale University in Faculty of Education in Department of Mathematics Education.

Among purposive sampling methods, in the present study criterion sampling was applied. The sampling from that method was gathered on the basis of the fact that pre-service teachers took the course “elementary number theory” and ranged from low to high level achievements. Clinical interviews and task based interviews were conducted with the participants by using the clinical method. The study was defined as embedded multiple case study.

The data were collected by using different instruments in a single session. The data collection instruments comprised of two main parts. The first part consists of The Task Based Interview Questions Form and the second part consists of Interview Questions Form about the Nature of Proof. Task based interviews were conducted by using Proof Questions Form, Interview Questions Form about the Proof Processes, and Interview Questions Form about the Observed Proof Scheme. After completing the task based interviews, Interview Questions Form about the Nature of Proof were applied to the participants.

To reveal the proof schemes of preservice teachers, the responses of participants to Task Based Interview Questions Form and Interview Questions Form about the Nature of Proof were analyzed by content analysis method. Sowder and Harel’s (1998) framework was applied to classify the proof schemes of preservice teachers.

The results of the study showed that the preservice teachers displayed three basic categories of the proof schemes which are external, empirical and analytic. Besides, it was found that they showed properties about all of the sub-categories of proof schemes except for analytic axiomatic one. The preservice teachers exhibited properties in which they can show more than one proof scheme at the same time. During both task based interviews and

interviews about the nature of proof, preservice teachers used external proof schemes more frequently than analytic proof schemes, and they used empirical proof schemes less often. In the cases that preservice teachers exhibited two proof scheme properties at the same time, one of the proof schemes was found to be external ritual proof scheme. In other words, if a preservice teacher showed properties of two proof schemes at the same time, the external ritual proof scheme was one of them in every case. When preservice teachers were using analytic proof schemes, they only exhibited the properties of analytic transformational proof scheme.

It was found that the preservice teachers with higher level achievements showed responses reflecting similar proof schemes. The results also showed that the possibility of showing responses on analytical proof schemes was higher in those teachers when compared to the ones with lower level achievements. It was found that the opinions of the preservice teachers about the nature of proof was external based and a great majority of these external based opinions were found to include characteristics of external based proof scheme. The source of the failures of the preservice teachers about the correctness of their proof during the task based interviews was found to be the probability of the preservice teachers' properties about the external ritual proof schemes. It was also noticed that there could be a relationship between already acquired opinions which were memorized and superficial and the ones which block transforming ideas while making proofs.

It was seen that preservice teachers' lack of knowledge about the methods they had used could result in making wrong proof constructions. It was concluded that such kind of a situation could be related to the fact that responses revealing preservice teachers' external based proof schemes were frequent.

Key Words: proof scheme, nature of proof, preservice middle school mathematics teachers, numbers, task based interviews, clinical method.

İÇİNDEKİLER

DOKTORA TEZİ ONAY FORMU.....	iii
ETİK BEYANNAMESİ.....	iv
TEŞEKKÜRLER SAYFASI.....	v
ÖZET.....	vi
ABSTRACT.....	viii
İÇİNDEKİLER.....	x
TABLolar LİSTESİ.....	xvi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xvii
BİRİNCİ BÖLÜM: GİRİŞ.....	1
1.1. Problem Durumu.....	1
1.2. Problem Cümlesi.....	2
1.3. Alt Problemler.....	3
1.4. Araştırmanın Amacı.....	3
1.5. Araştırmanın Önemi.....	3
1.6. Araştırmanın Sınırlılıkları.....	6
1.7. Sayıtlar.....	6
1.8. Tanımlar.....	6
İKİNCİ BÖLÜM: ALANYAZIN TARAMASI.....	8
2.1. Kavramsal Çerçeve.....	8
2.1.1. Tarihsel Süreç İçerisinde İspat Kavramı ve İspatın Doğası.....	9
2.1.2. Formel ve İnförmel İspatların Doğası.....	11
2.1.2.1. Formel İspatlar ve Formel İspatların Doğası.....	12
2.1.2.2. Matematik Eğitiminde İspatın Doğası ve Formel İspatın Matematik Eğitimindeki Uygulama Zorlukları.....	13
2.1.2.3. İnförmel İspatlar ve İnförmel İspatların Doğası.....	21
2.1.3. İspat Şeması.....	25
2.1.3.1. İspat Şemalarının Sınıflandırılması.....	35
2.1.3.1.1. Dışsal İspat Şemaları (Externally Based Proof Schemes).....	35
2.1.3.1.1.1. Otoriter İspat Şeması (The Authoritarian Proof Scheme).....	36
2.1.3.1.1.2. Alışkanlık Edinilmiş İspat Şeması (The Ritual Proof Scheme).....	36
2.1.3.1.1.3. Sembolik İspat Şeması (The Symbolic Proof Scheme)...	36
2.1.3.1.2. Deneysel İspat Şemaları (Empirical Proof Schemes).....	37
2.1.3.1.2.1. Algısal İspat Şeması (The Perceptual Proof Scheme).....	37

2.1.3.1.2.2. Temel Örnekler İspat Şeması (The Examples-Based Proof Scheme).....	37
2.1.3.1.3. Analitik İspat Şemaları (Analytical Proof Schemes).....	37
2.1.3.1.3.1. Dönüşümsel İspat Şeması (The Transformational Proof Scheme).....	37
2.1.3.1.3.2. Aksiyomatik İspat Şeması (The Axiomatic Proof Scheme).....	38
2.1.3.2. İspat Şemalarının Özellikleri.....	39
2.2. İlgili Araştırmalar.....	40
2.2.1. Sonuçlarında İspat Şemalarına Yer Veren Araştırmalar.....	41
2.2.1.1. Sonuçlarında İspat Şemalarının Özelliklerini Barındıran Deneysel Olmayan Araştırmalar.....	41
2.2.1.1.1. Öğrencilerin ve Öğretmen Adaylarının İspat Şemalarını Belirlemeye Yönelik Yapılan Araştırmalar.....	41
2.2.1.1.2. Üniversite ve Lise Öğrencilerinin İspat Şemalarının Gelişimini İnceleyen Boylamsal Araştırmalar.....	58
2.2.1.1.3. İspat Şemalarını Farklı Değişkenlerle İlişkileriyle Beraber İnceleyen Araştırmalar.....	64
2.2.1.2. Sonuçlarında İspat Şemalarının Özelliklerini Barındıran Deneysel Araştırmalar.....	70
2.2.2. İspat Şemalarına Sonuçlarında Değınmeyen Fakat İspat Şemalarının Bazı Özelliklerini Ele Alan Araştırmalar.....	77
2.2.3. Sonuçlarında İspat Şemalarına Yer Veren veya İspat Şemalarının Bazı Özelliklerini Ele Alan Araştırmalara İlişkin Özet.....	103
2.2.4. İspatın Doğasına İlişkin Araştırmalar.....	105
2.2.4.1. Öğretmenlerin veya Öğretmen Adaylarının İspat Kavramına İlişkin Görüşlerini İnceleyen Araştırmalar.....	106
2.2.4.2. Öğrencilerin veya Öğretmen Adaylarının İspat Bilgilerini veya İspat Süreçlerini İnceleyen Araştırmalar.....	112
2.2.4.3. İspatın Doğasına İlişkin Öğretim Uygulamalarının Değerlendirilmesini Kapsayan Araştırmalar.....	114
2.2.5. İspatın Doğasına İlişkin Araştırmaların Özeti.....	116
2.2.6. İlgili Alanyazın Taraması Özeti.....	119
ÜÇÜNCÜ BÖLÜM: YÖNTEM.....	122
3.1. Araştırmanın Deseni.....	122
3.2. Çalışma Grubu.....	127

3.3. Veri Toplama Araçları.....	128
3.3.1. Görev Temelli Görüşme Soruları Formu.....	128
3.3.1.1. İspat Soruları Formu (İSF).....	129
3.3.1.2. İspat Süreçlerine İlişkin Görüşme Formu (İSGF).....	134
3.3.1.3. Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu (GİGF).....	135
3.3.2. İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu (İDGF).....	135
3.4. Pilot Uygulama.....	136
3.4.1. Pilot Uygulama Verilerinin Analizi.....	137
3.5. Veri Toplama Süreci.....	139
3.5.1. Uygulama.....	139
3.6. Verilerin Analizi.....	139
3.7. Geçerlik ve Güvenirlilik Çalışmaları.....	143
3.7.1. Geçerlik.....	143
3.7.1.1. İç Geçerlik.....	144
3.7.1.2. Dış Geçerlik.....	146
3.7.2. Güvenirlilik.....	147
3.7.2.1. Dış Güvenirlilik.....	147
3.7.2.2. İç Güvenirlilik.....	148
3.8. Araştırmacının Rolü.....	149
DÖRDÜNCÜ BÖLÜM: BULGULAR VE YORUM.....	153
4.1. Görev Temelli Görüşmelere Ait Bulgular ve Yorum.....	153
4.1.1. Görev Temelli Görüşmelerde Öğretmen Adaylarının Dışsal İspat Şemalarını Ortaya Koyan Yanıtları.....	154
4.1.1.1. Öğretmen Adaylarının Dışsal Otoriter İspat Şemalarını Ortaya Koyan Yanıtları.....	155
4.1.1.1.1. Öğretmen Adaylarının İzledikleri Yol Hakkında Derslerden Öğrendiklerine Atıf Yaparak Açıklama Yaptıkları Durumlar.....	155
4.1.1.2. Öğretmen Adaylarının Dışsal Sembolik İspat Şemalarını Ortaya Koyan Yanıtları.....	157
4.1.1.2.1. Öğretmen Adayının İspatı Yapılandırırken Sembolleri Anlamsızca Manipüle Ettiği Durumlar.....	158
4.1.1.3. Öğretmen Adaylarının Dışsal Alışkanlık Edinilmiş İspat Şemalarını Ortaya Koyan Yanıtları.....	158
4.1.1.3.1. Öğretmen Adaylarının İşlemlerini Önceki Öğrenmelerine Benzer Formatta Dönüşüm Yapmadan Yarım Bırakarak İspatlarını Yapılandırmaya Çalıştıkları Durumlar.....	159

4.1.1.3.2. Öğretmen Adaylarının Sınırlı Bağlantılarla Önceki Öğrenmelerine Benzer İspat Süreçleri Arayarak İspatlarını Yapılandırmaya Çalıştıkları Durumlar.....	162
4.1.1.3.3. Öğretmen Adaylarının İspatlarını Yapılandırırken Sık Kullanılan Sembolik Gösterimleri Anlamlandırmadan Kullandıkları Durumlar.....	171
4.1.1.3.4. Öğretmen Adaylarının Kullandıkları Yöntem Hakkında Yanlış Bilgiyle İspatlarını Yapılandırdıkları Durumlar.....	174
4.1.1.3.5. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğruluğunu İspatın Görünümünden Etkilenerek Yargıladıkları Durumlar.....	176
4.1.1.3.6. Öğretmen Adaylarının İspatlarını Yapılandırırken Genel İfadelerle Yüzeysel Deliller Sundukları Durumlar.....	178
4.1.1.4. Öğretmen Adaylarının Alt Sınıflamalara Dahil Edilemeyecek Nitelikte Yalnızca Dışsal İspat Şemalarını Ortaya Koyan Yanıtları.....	179
4.1.1.4.1. Öğretmen Adaylarının İspat Problemlerini Çözmek İçin Sadece İşlemleri Takip Ettikleri Durumlar.....	179
4.1.2. Görev Temelli Görüşmelerde Öğretmen Adaylarının Deneysel İspat Şemalarını Ortaya Koyan Yanıtları.....	181
4.1.2.1. Öğretmen Adaylarının Deneysel Algısal İspat Şemalarını Ortaya Koyan Yanıtları.....	182
4.1.2.1.1. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğruluğunu Hislerine Dayanarak Göstermeye Çalıştıkları Durumlar.....	182
4.1.2.1.2. Öğretmen Adaylarının Sadece Özel Bir Durum İçin İnceleme Yaparak Nedensel İlişkileri Belirleyemedikleri Durumlar.....	183
4.1.2.2. Öğretmen Adaylarının Deneysel Temel Örnekler İspat Şemalarını Ortaya Koyan Yanıtları.....	184
4.1.2.2.1. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğruluğunu Belirli Sayı Değerleri Üzerinden Göstermeye Çalıştıkları Durumlar.....	184
4.1.3. Görev Temelli Görüşmelerde Öğretmen Adaylarının Analitik İspat Şemalarını Ortaya Koyan Yanıtları.....	188
4.1.3.1. Öğretmen Adaylarının Analitik Dönüşümsel İspat Şemalarını Ortaya Koyan Yanıtları.....	189
4.1.3.1.1. Öğretmen Adaylarının İspatlarını Doğru Akıl Yürütme İle Dönüşüm Yaparak Yapılandırdıkları Durumlar.....	189
4.1.3.1.2. Öğretmen Adaylarının İspatlarında Ana Meseleyi Belirleyerek Tutarlı Basamaklar Yapılandırdıkları Durumlar.....	197

4.1.3.1.3. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğruluğunu Mantıksal Çıkarımlarla Destekleyerek Açıkladıkları Durumlar.....	199
4.1.3.2. Öğretmen Adaylarının Alt Sınıflamalara Dahil Edilemeyecek Nitelikte Analitik İspat Şemalarını Ortaya Koyan Yanıtları.....	201
4.1.4. Görev Temelli Görüşmelerde Öğretmen Adaylarının Ortaya Koydukları İspat Şemalarına ve Göstergelerine İlişkin Özete Ait Bulgular ve Yorum.....	203
4.1.4.1. Öğretmen Adaylarının Ortaya Koydukları Dışsal Otoriter İspat Şemasına ve Göstergelerine İlişkin Özet.....	205
4.1.4.2. Öğretmen Adaylarının Ortaya Koydukları Dışsal Sembolik İspat Şemasına ve Göstergelerine İlişkin Özet.....	205
4.1.4.3. Öğretmen Adaylarının Ortaya Koydukları Dışsal Alışkanlık Edinilmiş İspat Şemasına ve Göstergelerine İlişkin Özet.....	205
4.1.4.4. Öğretmen Adaylarının Ortaya Koydukları Deneysel Algısal İspat Şemasına ve Göstergelerine İlişkin Özet.....	208
4.1.4.5. Öğretmen Adaylarının Ortaya Koydukları Deneysel Temel Örnekler İspat Şemasına ve Göstergelerine İlişkin Özet.....	209
4.1.4.6. Öğretmen Adaylarının Ortaya Koydukları Analitik Dönüşümsel İspat Şemasına ve Göstergelerine İlişkin Özet.....	209
4.1.5. Görev Temelli Görüşmelerde Öğretmen Adaylarının İspat Şemalarının Genel Değerlendirilmesine İlişkin Bulgular ve Yorum.....	212
4.2. İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelere Ait Bulgular ve Yorum.....	215
4.2.1. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelere Verdikleri Yanıtlarda Dışsal İspat Şemalarını Ortaya Koyan İfadeleri.....	216
4.2.1.1. Öğretmen Adaylarının Dışsal Alışkanlık Edinilmiş İspat Şemalarını Ortaya Koyan İfadeleri.....	216
4.2.1.1.1. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğruluğunu İspatın Görüntüsünden Etkilenerek Göstermeye Çalıştıkları Durumlar.....	216
4.2.1.1.2. Öğretmen Adaylarının İspatı Daha Önceden Edinilmiş Ezbere ve Yüzeysel Bilgilerle Açıklamaya Çalıştıkları Durumlar.....	218
4.2.2. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelere Verdikleri Yanıtlarda Deneysel İspat Şemalarını Ortaya Koyan İfadeleri.....	221
4.2.2.1. Öğretmen Adaylarının Deneysel Temel Örnekler İspat Şemalarını Ortaya Koyan İfadeleri.....	221
4.2.2.1.1. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğruluğunu Belirli Değerler Üzerinden Göstermeye Çalıştıkları Durumlar.....	221

4.2.3. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerde Analitik İspat Şemalarını Ortaya Koyan İfadeleri.....	222
4.2.3.1. Öğretmen Adaylarının Analitik Dönüşümsel İspat Şemalarını Ortaya Koyan İfadeleri.....	223
4.2.3.1.1. Öğretmen Adaylarının İspatlarını Diğerlerini Mantıksal Akıl Yürütme ile İkna Edecek İfadelerde Buldukları Durumlar.....	223
4.2.3.2. Öğretmen Adaylarının Alt Sınıflamalara Dahil Edilemeyecek Nitelikte Yalnızca Analitik İspat Şemalarını Ortaya Koyan İfadeleri.....	224
4.2.3.2.1. Öğretmen Adaylarının İfadelerinde Doğru Akıl Yürütmeye İlişkin İpuçları Taşıdıkları Durumlar.....	224
4.2.4. İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerde Öğretmen Adaylarının İspat Şemalarının Genel Değerlendirilmesine İlişkin Bulgular ve Yorum.....	225
4.3. Görev Temelli Görüşmelerde ve İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerde Öğretmen Adaylarının İspat Şemalarını Ortaya Koyan Düşüncelerin Beraber Değerlendirilmesine İlişkin Bulgular ve Yorum.....	228
BEŞİNCİ BÖLÜM: TARTIŞMA VE ÖNERİLER.....	231
5.1. Tartışma.....	231
5.2. Öneriler.....	243
KAYNAKLAR.....	248
EKLER.....	259
EK 1:İspat Soruları Formu (İSF, Pilot Uygulama Versiyonu).....	260
EK 2: İspat Soruları Formu (İSF).....	269
EK 3: İspat Süreçlerine İlişkin Görüşme Formu (İSGF).....	277
EK 4: Gözlemlenen İspat Süreçlerine İlişkin Görüşme Formu (GİGF).....	278
EK 5: İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu (İDGF).....	279
EK 6: Pilot Uygulama Boyunca İzlenen Adımlar.....	280
EK 7: Uygulama Boyunca İzlenen Adımlar.....	281
EK 8: Özgeçmiş Formu.....	282

TABLolar LİSTESİ

Tablo 2.1. Harel ve Sowder'ın (1998) İspat Şemalarının Özeti.....	39
Tablo 3.1. İspat Şemalarının Pilot Uygulamaya İlişkin Göstergeleri.....	138
Tablo 3.2. İspat Şemalarının Uygulamaya İlişkin Göstergeleri.....	142
Tablo 4.1. Öğretmen Adaylarının Görev Temelli Görüşmelerde Sergiledikleri Tepkilerin Dışsal İspat Şemalarının Göstergelerine İlişkin Dağılımları.....	154
Tablo 4.2. Öğretmen Adaylarının Görev Temelli Görüşmelerde Sergiledikleri Tepkilerin Deneysel İspat Şemalarının Göstergelerine İlişkin Dağılımları.....	181
Tablo 4.3. Öğretmen Adaylarının Görev Temelli Görüşmelerde Sergiledikleri Tepkilerin Analitik İspat Şemalarının Göstergelerine İlişkin Dağılımları.....	189
Tablo 4.4. Görev Temelli Görüşmelerde İspat Şemalarının Göstergeleri ve Öğretmen Adaylarının Bu Göstergelere İlişkin Dağılımları.....	204
Tablo 4.5. Öğretmen Adaylarının Görev Temelli Görüşmelerdeki İspat Şemaları Dağılımları..	212
Tablo 4.6. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerde Ortaya Koydukları İfadelerin Dışsal İspat Şemalarının Göstergelerine İlişkin Dağılımları.....	216
Tablo 4.7. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerde Ortaya Koydukları İfadelerin Deneysel İspat Şemalarının Göstergelerine İlişkin Dağılımları.....	221
Tablo 4.8. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerde Ortaya Koydukları İfadelerin Analitik İspat Şemalarının Göstergelerine İlişkin Dağılımları.....	223
Tablo 4.9. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerdeki İspat Şemaları Dağılımları.....	225
Tablo 4.10. İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerde İspat Şemalarının Göstergeleri ve Öğretmen Adaylarının Bu Göstergelere İlişkin Dağılımları.....	227

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. Veri Toplama Araçları.....	128
Şekil 3.2. Sowder ve Harel'in (1998) ispat şeması sınıflandırması.....	143
Şekil 4.1. Hamra'nın İSF'nin birinci sorusuna ilişkin yanıtı.....	156
Şekil 4.2. Semiha'nın İSF'nin birinci sorusuna ilişkin yanıtı/1.....	159
Şekil 4.3. Semiha'nın İSF'nin birinci sorusuna ilişkin yanıtı/2.....	160
Şekil 4.4. Derya'nın İSF'nin birinci sorusuna ilişkin yanıtı/1.....	162
Şekil 4.5. Derya'nın İSF'nin üçüncü sorusuna ilişkin yanıtı	164
Şekil 4.6. Hamra'nın İSF'nin dördüncü sorusuna ilişkin yanıtı.....	165
Şekil 4.7. Semiha'nın İSF'nin üçüncü sorusuna ilişkin yanıtı/1	174
Şekil 4.8. Hamra'nın İSF'nin altıncı sorusuna ilişkin yanıtı.....	183
Şekil 4.9. Hamra'nın İSF'nin üçüncü sorusuna ilişkin yanıtı/1	185
Şekil 4.10. Hamra'nın İSF'nin üçüncü sorusuna ilişkin yanıtı/2	185
Şekil 4.11. Derya'nın İSF'nin birinci sorusuna ilişkin yanıtı/2.....	190
Şekil 4.12. Semiha'nın İSF'nin dördüncü sorusuna ilişkin yanıtı.....	192
Şekil 4.13. Derya'nın İSF'nin dördüncü sorusuna ilişkin yanıtı.....	193
Şekil 4.14. Semiha'nın İSF'nin altıncı sorusuna ilişkin yanıtı	195
Şekil 4.15. Derya'nın İSF'nin altıncı sorusuna ilişkin yanıtı.....	196
Şekil 4.16. Hamra'nın İSF'nin ikinci sorusuna ilişkin yanıtı.....	197
Şekil 4.17. Semiha'nın İSF'nin üçüncü sorusuna ilişkin yanıtı/2	198

BİRİNCİ BÖLÜM: GİRİŞ

1.1.Problem Durumu

Akıl yürütme ve ispat matematiğin ayrılmaz parçasıdır ve okul öncesi çağdan en ileri düzeye kadar öğrencilere kazandırılması gereklidir. Öğrenciler sonuçları gerekçelendirerek ve tüm sınıf düzeylerinde matematiksel varsayımlar kullanarak matematiğin anlamlı olduğunu görmelidirler (NCTM, 2000; Common Core, 2010). Son dönemlerde ispat anlayışının gelişimi matematik eğitiminin önemli bir amacı haline gelmiştir ve ispat temasını öğretim programlarına dâhil etmek için genel bir eğilim oluşmuştur (Mariotti, 2006). Ortak Temel Standartlarda (Common Core Standards) (2010) Matematiksel Uygulama için Standartları (Standards for Mathematical Practice) ile matematik eğitimcilerinin tüm düzeylerde öğrencilerde geliştirmeleri gereken uzmanlıkları ve uygulamaları vurgulanmıştır. Bu uygulamalar matematik eğitiminde önemi olan belirli süreçlere ve yeterliklere dayanmaktadır ve akıl yürütme ve ispat NCTM'in (2000) süreç standartları ile bu yeterliklere vurgu yapmaktadır. Nitekim Ortak Temel Standartlarda (2010) öğrencilerin ilkokul ve ortaokuldan itibaren geometri deneyimleri biçimlendirdiklerini ve lise çağlarında daha kesin tanımlar kullanarak ispatlar yapılandırmaya başladıklarını belirtilmektedir. NCTM (2000) ispatın öğretim programlarına sadece belirli ünitelerde dâhil edilen bir konu olmadığını, tüm konularda sınıf tartışmalarının doğal bir parçası haline gelmesi gerektiğini vurgulamıştır. Ülkemizde de Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2013) genel amaçları tanımlanırken matematik öğrenmenin aktif bir süreç olarak ele alınarak öğrencilere matematiksel ilişkileri keşfetme ve ispatlama deneyimleri olanaklarının sunulması gerektiği belirtilmiştir. Matematiksel akıl yürütme ve ispat yapma, matematiksel süreç becerileri içerisinde programın öğrencilere kazandırmayı hedeflediği matematiksel yeterlik ve becerilere dâhil edilmiştir. Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2013) öğrencilerin matematik öğrenme sürecinde akıl yürütme becerilerinin geliştirilmesi gerektiğini vurgulayarak bu becerilerin geliştirilmesi adına hedeflenen kazanımları tanımlamış ve bu becerilerin öğrencilerin hem okul hayatını hem de okul dışındaki hayatını kolaylaştırmada büyük önem taşıdığını belirtmiştir.

Nitekim Tall da (2014) ispatın matematiksel olarak gelişiminin erken çocukluk döneminde başlayarak küçük çocukların algı ve eylemleriyle beraber zamanla ardışık düzeylerde gelişerek devam edeceğini söylemiştir. Bu yüzden ispatın başlı başına

matematiğin önemli bir parçası olduğu (CadwalladerOlsker, 2007; Hanna, 2000) ve tüm sınıf düzeylerinde yer almasının gerekli olduğu söylenebilir.

Eğitim sistemi içerisinde önemi vurgulanan ispatlama kavramı, Harel ve Sowder (1998) tarafından “*bir gözlemin doğruluğu hakkındaki şüpheleri oluşturmak ya da ortadan kaldırmak için birey tarafından ortaya konan süreç*” (s. 241) olarak tanımlanmıştır. Harel ve Sowder (1998), ispatlama sürecini informel (sosyal) ispatlar açısından irdeleyerek bu sürecin “aslını anlama” ve “ikna etme” olmak üzere 2 alt süreç içerdiğini belirtmiştir. Harel ve Sowder (1998) aslını anlamayı, “*Bireyin bir gözlemin doğruluğu hakkında kendi şüphelerini ortadan kaldırmak için ortaya koyduğu bir süreç*” (s. 241) olarak tanımlarlarken, ikna etmeyi “*Bir gözlemin doğruluğu hakkında diğerlerinin şüphelerini ortadan kaldırmak için ortaya koyduğu bir süreç*” (s.241) olarak tanımlamışlardır. Buradan hareketle ispat şeması kavramını ortaya koymuşlardır: “*Bir bireyin ispat şeması o birey için aslını öğrenme ve ikna etmeyi oluşturan şeyleri içerir*” (Harel ve Sowder, 1998, s.244). Dolayısıyla, bireylerin ispat şemalarının incelenmesinin onların kendilerini ve başkalarını nasıl ikna ettiklerinin bir yolu olduğu sonucuna ulaşılabilir. Nitekim Stylinou, Chae ve Blanton (2006) görüşmeler yaparak öğrencilerin yaptıkları ispatları inceledikleri çalışmalarında, öğrencilerin ispat anlayışlarını derinlemesine kavrayabilmek için her öğrencinin tanımlanmış ispat şemalarının belirlenmesi gerektiğini söylemişlerdir.

Öğretmen adaylarının geleceğin öğretmenleri olduğu ve öğretmenlerin ise öğrencilerin ispat deneyimlerinin ana kaynağı olduğu düşünüldüğünde, bazı diğer araştırmaların da (Martin ve Harel, 1989; NCTM, 2000; Ortak Temel Standartlar, 2010) belirttiği gibi öğrencilerin ispat deneyimlerinin okul hayatlarının her basamağında yer alabilmesi gereklidir. Bunun için öğretmen adayların ispat hakkında gelişmeleri ve ispat deneyimlerini uygulamaları gerektiği (Riley, 2003; NCTM, 2000) söylenebilir. Bu çalışmada ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları ve bu ispat şemalarını hangi göstergeler altında ortaya koydukları belirlenmeye çalışılmıştır. Öğretmen adaylarının ispat şemalarının belirlenmesinin, onların ispat süreçlerini anlamada ve bu bağlamda öneriler geliştirerek ilgili alanyazına katkı sağlamada etkili bir yol olabileceği düşünülmüştür.

1.2. Problem Cümlesi

Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını irdelemeyi amaçlayan bu çalışmanın problem cümlesi “Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ortaya

koydukları ispat şemaları nelerdir ve bu şemaları nasıl ortaya koymaktadırlar?” olarak belirlenmiştir.

1.3. Alt Problemler

Araştırmanın birinci problemine bağlı olarak aşağıdaki alt problemlere yanıt aranmıştır:

1) Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının sayılar alanında ispat yaparken ve ispatları incelerken ortaya koydukları ispat şemaları nelerdir ve bu ispat şemalarını nasıl ortaya koymaktadırlar?

2) Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşlerini açıklarken ortaya koydukları ispat şemaları nelerdir ve bu ispat şemalarını nasıl ortaya koymaktadırlar?

3) Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının sayılar alanında ispat yaparken ve ispatları incelerken ortaya koydukları ispat şemaları ile ispatın doğasına ilişkin görüşlerini açıklarken ortaya koydukları ispat şemaları arasında nasıl bir ilişki vardır?

1.4. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı farklı başarı düzeyindeki ortaokul matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları ispat şemalarının neler olduğunu ve bu şemaları nasıl ortaya koyduklarını inceleyerek bu ispat şemalarının ne gibi farklılıklar gösterdiklerini ortaya koymaktır. Bunun için öğretmen adaylarıyla hem ispat yaptıkları ve ispatlamalarını nasıl yaptıklarını anlattıkları hem de ispatın doğası hakkındaki görüşlerini ortaya koydukları klinik görüşmeler yapılmıştır.

1.5. Araştırmanın Önemi

“*Matematiksel ispat belirli akıl yürütme ve gerekçelendirme biçimlerini sergilemenin formel bir yoludur*“ (NCTM, 2000, s. 56). Akıl yürütme becerisi matematiği anlamının temelini teşkil eder ve öğrencilerin tüm içerik alanlarında sonuçları gerekçelendirirken, matematiksel varsayımlar kullanırken ve fikirler üretirken akla uygun çıkarımlar yapabilmeleri beklenir. Ortak Temel Standartlar’ın (2010) (Common Core Standards, 2010) standartlarından biri “Soyut ve Niceliksel Akıl Yürütme” olarak tanımlanmıştır ve buna göre matematiksel yeterliği olan öğrenciler akıl yürüterek niceliklerin ve bu niceliklerin problem durumlarıyla ilişkilerinin anlamını kavrarlar ve böylelikle sadece bu nicelikleri hesaplamakla kalmayıp aynı zamanda işlem ve objelerin

farklı özelliklerini kullanma ve bilmede deneyim sahibi olurlar. Öğrencilerin doğrulama ve ispat ile deneyimlerinin, daha özel olarak ispatlama ve akıl yürütme becerisinin öğretimi ile ispatlama ve akıl yürütme becerisindeki gelişimlerinin öğretmenlere bağlı olduğu (Altıparmak ve Öziş, 2005; Martin ve Harel, 1989; Riley, 2003) düşünüldüğünde öğretmenlerin, öğrencilerin okula getirdikleri akıl yürütme becerilerinin üzerine yenilerini ilave ederek gelişmelerine katkı sağlayabileceği söylenebilir. Bunun için “*Akıl yürütme ve ispat öğrencilerin okul öncesinden itibaren matematik deneyimlerinin bir parçası haline gelmelidir*” (NCTM, 2000, s. 56).

Öğretmenlerin çoğunun matematiksel ispat hakkındaki bilgileri sınırlıdır (Knuth, 2002a) ve eğitim reformlarının tavsiye ettiği yolla matematiksel ispatları öğretmek için yetiştirilmemişlerdir (Yoo, 2008). Öğretmenler ispata ilişkin uygun olmayan pedagojik görüşe ve matematiksel argümanları geçerli kılacak sınırlı beceriye sahiptirler (Yoo, 2008). Dolayısıyla öğretmenler, öğrencilerin sınıf içindeki matematiksel etkinliklere seyrek olarak katılabildikleri geleneksel yaklaşımlarla derslerini yürütmekte ve yeniliklere uyum sağlayamamaktadırlar (Knuth, 2002a; Yoo, 2008). Çalışmalar öğretmen ve öğrencilerin ispatı anlamalarında yetersizlikleri ve kavram yanılgıları olduğunu göstermektedir (Güner, 2012; Knuth, 2002a; Moralı ve diğerleri, 2006; Norby, 2013; Riley, 2003). Öğretmen adayları, Ortak Temel Standartlar (2010) (Common Core Standards, 2010) ve NCTM (2000) standartları ve ülkemizde Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (MEB, 2013) tarafından önerilen alanlarda ispat ve akıl yürütmeyi anlayabilmeli ve öğretebilmelidir. Norby’e (2013) göre öğretmen adayları ispatın, akıl yürütmenin ve argümantasyonun önemini anlamalıdır. Öğretmen adayları bu sayede hem bu konuları öğretmek üzere hazırlanmış olarak kendi bilgilerini geliştirmiş olurlar hem de öğrencilerin ispat, akıl yürütme ve argümantasyon becerilerini değerlendirmek ve öğrenci argümanlarını geliştirmek için fırsat yakalarlar (Norby, 2013).

Öğretmenlere verilen hizmet içi eğitimler yoğun olsa da kısa ve yetersizdir. Geleneksel öğretim yöntemlerine sahip, sınırlı hizmet içi eğitim almış ve ağır öğretim yüküne sahip öğretmenlerden matematik eğitimindeki yenilik çabalarına yönelmelerini beklemek yerine ispatı öne ve merkeze alan matematik öğretimi yaklaşımına daha tanıdık olan geleceğin öğretmenlerine odaklanmanın daha verimli olacağı söylenebilir. Üniversite öğretmen yetiştirme programları matematiksel yenilikleri uygulamada uygun bir yere sahiptir (Varghese, 2007). Bu yüzden bu araştırmada geleceğin öğretmenleri olan ortaokul matematik öğretmen adaylarıyla çalışılmıştır.

Matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarının belirlenmesi, ileride öğretmen olacak bu adayların öğrencilere vereceği ispat eğitimi hakkında bilgiler verebilir, öğretmen adaylarının ispat hakkındaki bilgi eksikliklerinin tespit edilmesi için ve konuyla ilgili öneriler sunulması için ortam sağlayabilir.

İlgili alanyazın incelendiğinde; üniversite öğrencilerinin ispat şemalarının gelişimini inceleyen boylamsal araştırmalara (CadwalladerOlsker, 2007; Haverhals, 2011; Martin, Soucy McCrone, Wallece Bower, ve Dindyal, 2005; Recio ve Godino, 2001; Soucy Mccrone ve Martin, 2004; Sowder ve Harel, 2003); ispat şemalarını farklı değişkenlerle ilişkileriyle beraber inceleyen çalışmalara (Housman ve Porter, 2003; Ören, 2007; Plaxco, 2011; Stylinou, Chae, ve Blanton, 2006; Uygan, Tanışlı, ve Köse, 2014); bulgularında ispat şemalarını ve özelliklerini barındıran deneysel araştırmalara (Grigoriadou, 2012; Ellis, 2007; Harel ve Rabin, 2010; Harel, 2001; Soto, 2010) rastlanmıştır. Bu çalışmaların hiçbiri ispat şemalarını kendi özellikleriyle doğrudan betimsel olarak ortaya koymamıştır. İspat şemalarını kendi özellikleri açısından inceleyen çalışmalara (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Güner, 2012; Flores, 2006; Gholamazad, Liljedahl, ve Zazkis, 2004; Heinze ve Reiss, 2003; İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu, Baki, ve İskenderoğlu, 2010; Koichu, 2009; Liu ve Manouchehri, 2013; Oflaz, Bulut, ve Akcakin, 2016; Sarı, Altun, ve Aşkar, 2007; Sen ve Güler, 2015; Şengül ve Güner, 2013; Weber, 2010) bakıldığında bu çalışmaların çok azının (İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu, Baki, ve İskenderoğlu, 2010; Sarı, Altun, ve Aşkar, 2007) ispat şemalarını deneysel olmayan bir yaklaşımla başka değişkenler olmadan matematik öğretmeni adayları üzerinde incelediği görülebilir. İspat şemalarını deneysel olmayan bir yaklaşımla başka değişkenler olmadan matematik öğretmeni adayları üzerinde inceleyen bu çalışmalardan ikisi (İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu, Baki, ve İskenderoğlu, 2010) klinik görüşmeler kullandıklarını belirtirken, diğeri (Sarı, Altun, ve Aşkar, 2007) sadece görüşmeler kullandıklarını belirtmişlerdir. Ancak bu çalışmalardan hiçbiri matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını görev temelli görüşmeler yardımıyla belirleme yoluna gitmemiştir. Yurtdışında ise matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını bu bağlamda inceleyen çalışmaya rastlanmamıştır.

Bu yüzden bu çalışmanın hem ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını başka değişkenlerle ilişkilendirmeden deneysel olmayan bir yaklaşımla belirlemede; hem de bu belirleme durumunu görev temelli görüşmeler yardımıyla yapmada

özgün bir çalışma niteliği taşıdığı düşünülmektedir. Dolayısıyla bu çalışmanın ilgili alanyazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

1.6. Araştırmanın Sınırlılıkları

1. Araştırma, öğretmen adaylarının ispat şemalarının belirlenmesinde veri toplama araçlarındaki maddelerle sınırlıdır.
2. Araştırma örneklemini, Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nin Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda öğrenim gören üç öğretmen adayı ile sınırlıdır.
3. Araştırma, 2015-2016 eğitim öğretim yılı içerisindeki bulgularla sınırlıdır.
4. Araştırma, "Bölünebilme" ve "Asal Sayılar" konuları ile "Karmaşık Sayılar" konusu ile sınırlıdır.
5. Araştırmada ortaya çıkarılan ispat şemaları Sowder ve Harel'in (1998) ispat şeması çerçevesi ile sınırlıdır.

1.7. Sayıtlar

1. Görüşme yapılan öğretmen adayları kendilerine yöneltilen sorulara içtenlikle cevap vermişlerdir.

1.8. Tanımlar

Akıl Yürütme: *"Eldeki bilgilerden hareketle matematiğin kendine özgü araç (semboller, tanımlar, ilişkiler, vb.) ve düşünme tekniklerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, vb.) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci"* (MEB, 2013, s. 5).

Argümantasyon: *"Argüman oluşturma süreci, diğer bir ifadeyle, akıl yürütme zincirine dayalı olarak sonuca varma işlemi"* (Umland ve Sriraman, 2014, s. 44).

İspat: *"Bir ifadenin neden doğru olduğunu; diğer matematiksel sonuçları değerlendirerek ve/veya ifadedeki matematiksel yapının iç yüzünü anlayarak gösteren tümdengelimsel argüman"* (Knuth, 2002b, s.86).

İspatlama: *"Bireyin bir gözlemin doğruluğu hakkında şüphelerini ortaya çıkarmak veya ortadan kaldırmak için ortaya koyduğu süreç"* (Harel ve Sowder, 1998, s. 241).

İspat şeması: *Bir bireyin ispat şeması o birey için aslını öğrenme ve ikna etmeyi oluşturan şeyleri içerir. "* (Harel ve Sowder, 1998, s. 244).

Doğrulama: “*Bir varsayımın doğruluğunu denetlemek için deney ve mantıksal tanıtlama yoluyla yapılan işlemlerin bütünü*” (Türk Dil Kurumu, 2017).

İspatın Doğası: “*Katılımcılar tarafından paylaşılan ispatın matematiksel kültürünün belirli bir biçimidir. Geçerlik sürecinin küresel, zaman zaman felsefi, veya daha fazla pedagojik bakış açısıyla bağlantılı olabilir*” (Cyr, 2004, s. 571).

Görev Temelli Görüşme: Görüşmecinin ve katılımcının açık ya da örtük normlar, değerler ve kurallar tarafından düzenlenen bir görev üzerinde etkileşim içerisinde bulunduğu bir görüşme türü. (Koichu ve Harel, 2007).



İKİNCİ BÖLÜM: ALANYAZIN TARAMASI

Bu çalışmanın Alanyazın Taraması Bölümü “Kavramsal Çerçeve” ve “İlgili Araştırmalar” olmak üzere iki temel başlıkta incelenmiştir. Bu temel başlıklara ait olan alt başlıklar aşağıda detaylandırılmıştır:

2.1.Kavramsal Çerçeve

Bu çalışmanın Kavramsal Çerçeve Bölümü “Tarihsel Süreç İçerisinde İspat Kavramı ve İspatın Doğası”, “İspatın Doğası: Formel ve İnformel İspatlar” ve “İspat Şeması” olmak üzere temel üç başlık altında sunulmuştur. Bu çalışmada Harel ve Sowder (1998) ve Sowder ve Harel’in (1998) ispat şeması sınıflandırması kullanılmıştır. Harel ve Sowder (2007) bu çatıyı oluştururken öncelikle ispatın ne olduğu sorusuna cevap verdiklerini ve verilen cevabın bilişsel, matematiksel, epistemolojik-tarihsel ve sosyal birçok faktöre bağlı olduğunu belirtmişlerdir. Harel ve Sowder (2007) ispat şeması kavramına; ispatın ne olduğu sorusuyla başlayarak yani ispatın doğasını inceleyerek ve alanyazındaki çalışmaların bulgularını da ekleyerek ulaştıklarını belirtmişlerdir. Çalışmanın bu bölümünde Harel ve Sowder’in (2007) yaklaşımına uygun bir bakış açısıyla ispatın tarihsel süreç içerisindeki yeri, ispatın doğası, eğitimdeki uygulama zorluklarından bahsedilerek ve alanyazındaki bulgular da eklenerek ispat şeması kavramı açıklanmaya çalışılmıştır. Aşağıda bu bölüme ilişkin alt başlıklar paragraflar halinde kısaca özetlenmiştir:

Bu bölümde ispat kavramı öncelikle tarihsel süreçte incelenerek ispatın doğasının bu tarihsel süreç içerisinde nasıl bir değişime uğrayarak günümüzdeki eğitim uygulamalarında yerini aldığı hakkında bilgiler verilmiştir. Cyr (2004) ispatın doğasını, ispatın matematiksel kültürünün belirli bir biçimi olarak tanımlamıştır ve ispatın doğasının süreç içerisindeki küresel, zaman zaman felsefi veya pedagojik bakış açısıyla bağlantılı olabileceğini belirtmiştir. Dolayısıyla ispatın doğasının geçmişteki yansımalarının günümüze nasıl ışık tuttuğunun belirlenerek eğitim uygulamalarındaki yerini nasıl aldığı hakkında bilgi verilmesi yararlı görülmüştür.

İspat kavramı tarihsel süreç içerisinde incelendikten sonra ispatın doğası formel ve informel ispatlar bağlamında incelenmiştir. Öncelikle ispatın bilimsel kullanımındaki “matematiğin temelleri” alanındaki kullanımları irdelenerek formel ispatın doğası hakkında bilgi verilmiştir. Günümüz eğitim uygulamalarında formel ispatın doğası hakkındaki yaşanan zorluklar dikkate alınarak uygulama zorlukları hakkında bilgi verildikten sonra ise

yaygın matematik alanında kullanılan ve matematik eğitiminde günümüzde sınıf uygulamalarında önerilen informel (sosyal) ispatın doğasına ilişkin açıklamalar yapılmıştır.

İspatın doğasının formel ve informel açıdan incelenmesinden sonra; bu çalışmanın analiz birimini oluşturan ispat şemaları hakkında bilgi verilmiş; bu ispat şemaları anılan informel ispatlar bağlamında incelenerek Harel ve Sowder'in (1998) ve Sowder ve Harel'in (1998) ispat şeması sınıflandırmasına ilişkin çatısı, bu çatı oluştururken temel alınan diğer taksonomiler ile ilişkisi açıklanmıştır. Bu ilişkiler açıklanırken hem Harel ve Sowder'in (1998) bu çatıyı oluştururken yararlandıkları ispata ilişkin bağlamlar ve çalışmalara değinilmiş; hem de bu çatının oluşmasına katkı sağlayan araştırmalar araştırmacı tarafından ispatın doğasına yaklaşımlarıyla ilişkili olarak ortaya koyulmaya çalışılmıştır. Böylelikle bu çalışmada Harel ve Sowder (1998) ile Sowder ve Harel'in (1998) ispat şeması sınıflandırılmasının kullanılma nedenleri ve bu sınıflandırmanın farklı bağlamlar açısından incelenmesi hakkında bilgi verilmiştir. Son olarak ispat şemalarının sınıflandırılmaları, temel ispat şeması ve alt şemaları tanımlanarak açıklanmış ve bu şemaların genel özellikleri betimlenmiştir.

2.1.1. Tarihsel Süreç İçerisinde İspat Kavramı ve İspatın Doğası

Matematik tarihi boyunca, eski Yunanlılardan beri, ispat uygulamaları hiçbir zaman tek biçimli olmamıştır ve ispat geleneğinin gelişimi günümüze kadar düzensiz biçimde birleşerek bugünkü haline gelmiştir (Almeida, 2003). İspat kavramı ilk defa Yunanlılar tarafından ortaya atılmıştır (Grabiner, 2012; Kleiner, 1991; Reid ve Knipping, 2010) ve açıkça belirlenmiş postülatlardan çıkarım yapma olarak tanımlanmıştır (Kleiner, 1991). 16. ve 17. yüzyıllarda Yunanlılar'ın aksiyomatik yöntemi bir kenara bırakılmış ve sembolik gösterim (symbolic notation) Viète, Descartes ve Leibniz tarafından ispatlarda güçlü bir yöntem olarak ortaya atılmıştır (Grabiner, 2012; Kleiner, 1991). 17. yüzyılda matematiğin temelleri hakkındaki arayışlar artmış ve Cauchy ile limit, süreklilik, yakınsama, türev ve integral gibi Analizin (Calculus) önemli kavramları bu dönemde gelişmiştir. Fakat 18. yüzyılın kesinlik yetersizliği Cauchy'nin çözümlerinde yeni problemler oluşturmuştur. Cauchy cebirsel olarak temel unsurları formüle etmiş olsa da, analizlerinde bazı sezgisel geometrik argümanları kullanmaya başlamıştır. 19. yüzyılla beraber aksiyomatik yöntem tekrar oluşturulmaya başlanmış, cebir, aritmetik ve geometri bu süreçte dikkatlice incelenmiştir. Bunun yanında Boole ile matematiksel mantık ortaya atılmıştır (Kleiner, 1991). Öklit geometrisinin temelleri tekrar incelenerek Öklit dışı geometriler ortaya çıkmış ve böylece aksiyomatik sistemler yeniden ortaya çıkmıştır (Kleiner, 1991; Reid ve

Knipping, 2010). 20. Yüzyıla beraber aksiyomatik sistem matematiğin temel alanlarında kurulmuştur. 20. yüzyılın başlarında matematiğin üç felsefi akımı ortaya çıkmıştır: Biçimselcilik (formalism), mantıkçılık (logicism) ve sezgicilik (intuitionism). Böylelikle matematiğin doğası, anlamı ve yöntemi ile ilgilenilmiş ve köklerini 19. yüzyılda atan matematikte kesinlik ve ispat anlayışları öne çıkmıştır. Böylelikle matematiksel fikirler duysal ve deneysel anlayıştan daha entelektüel ve soyut bir biçime geçmiştir. Mantıkçılar, matematiğin, mantığın bir parçası olduğunu; matematiksel kavramların mantıksal kavramlarla ifade edildiğini ve matematiksel teoremlerin gereksiz tekrarlar (totolojiler) olduğunu ortaya koymuşlardır. Mantıkçıların savunması felsefi olarak önemli görülmüştür, fakat matematiksel topluluk tarafından benimsenmemiştir. Bunun nedeni ise mantıkçıların matematiğin mantıksal kavramlar dışında bir gerçekliği olduğunu onaylamayan görüşleri olmuştur.

Matematiksel topluluk tarafından benimsenmeyen başka bir durum ise biçimselci ve sezgicilerin arasındaki düşünce farklılıklarıdır (Kleiner, 1991). En önemli örneği Hilbert olan biçimselcilerin savı matematiği aksiyomatik sistemlerin bir çalışması olarak görmeleridir. Bu tür bir sistemdeki öncüller ve aksiyomların anlam içermeyen sembollerden ibaret olduğu düşünülmüştür (Kleiner, 1991; Reid ve Knipping, 2010). Hilbert'in aksiyomatik yöntemi daha çok analiz, küme teorisi, aritmetik ve matematiksel mantık gibi alanlarda benimsenmiştir. Biçimselciler matematiğin anlamını yok etmekle ve matematiği sembol manipülasyonuna indirgemekle suçlanmışlardır. Fakat Hilbert'in amacı matematikçinin günlük uygulamaları ile değil matematiğin temelleri ile uğraşmak olmuştur. Hilbert'in büyük tasarımı Gödel tarafından elimine edildikten sonra "İspat nedir?" sorusu net biçimde ortaya atılmıştır. Bunun üzerine Brouwer tarafından ortaya atılan sezgicilik akımıyla aksiyomatik sistemlerin formel analizine gerek olmadığı ileri sürülmüştür. Bu düşünceye göre matematikçinin sezgilerinin çelişkilerini engellemede ona rehberlik edeceği düşünülmüştür. Bu bağlamda tanımlar ve ispat yöntemleri önem kazanmıştır. Biçimciler ile sezgiciler arasındaki bu düşünce farklılıkları matematikçileri ilk defa ispatı nelerin oluşturduğuyla ilgili olarak fikir ayrılıklarına düşürmüştür (Kleiner, 1991).

20. yüzyıla kadar belirli problemlerle uğraşmaya daha çok önem verilirken, 20. yüzyılın başlarından itibaren matematikçiler genel yöntemlerin ve soyut teorilerin formülleştirilmesiyle ilgilenmeye başlamışlardır. Bu dönemde bilgisayarlar bu gelişimde önemli rol oynayarak yeni matematiksel alanların gelişimine (kombinasyonlar, iyileştirme

kuramı) ve varsayımlar oluşturma, test etme ve reddetmede yeni gelişimlere kaynak olmuştur. Bu gelişmelerin içerisinde kesinlik içeren ispatlar ya da aksiyomatik yöntem önemli bir yere sahip olmamıştır. Bu değişimler, bilgisayar ile farklı yapılandırmaların doğrulanmasını gerektirerek matematik içerisinde ispatın rolü ve anlamının yeniden düşünülmesine olanak vermiştir. Böylelikle matematiksel ispatın yeni bir felsefesi ortaya çıkarak sosyal ispat, yarı deneyselci ispat ve sosyal süreç olarak ispat gibi kavramlar belirlemiştir. Bu kavramlar ispatın mutlak doğru, yanılmaz olduğu varsayımını reddetmişlerdir. Bu dönemin araştırmacılarından Lakatos da matematiğin yanılabilir olduğunu ve matematiksel teoremlerin sabit olmayıp sürekli bir incelemeye ve karşı örnekler ile olası reddetmelere bağlı olduğunu söyleyerek (Kleiner, 1991) ispatın standart görüşünü değiştirecek fikirleri ortaya atmıştır (Reid ve Knipping, 2010). Dolayısıyla “sosyal ispat” okullardaki ispat öğretiminde yerini almaya başlamıştır. Aşağıdaki bölümlerde ispat ve ispatlama terimleri günümüzdeki kullanımları açısından değerlendirilerek ortaya konulmuştur.

2.1.2. Formel ve İformel İspatların Doğası

Tarihsel süreç içerisinde ispat ve ispat kavramlarının değişimiyle beraber, günümüzde de bu kavramlar farklı kullanım biçimleri ile ortaya çıkmaktadır. Günümüzde bu kavramlar günlük kullanımda, bilimsel kullanımda ve matematiksel kullanımda farklı şekillerde ele alınmaktadır. İspat ve ispatlamanın günlük kullanımda ikna etme ve test etme gibi işlevleri vardır. *İspat* ve *ispatlamanın* bilimsel kullanımdaki ikna etme durumu delillerin özel biçimleri temelinde ortaya çıkmaktadır. Bilim adamları herhangi bir şeyi ispatlarken ikna edici deliller öne sürerler ve bu deliller bilime uygun olan özel bir biçimde ortaya atılır. Matematiksel kullanımda *ispat* ve *ispatlama* ise matematiğin “matematiğin temelleri” ve “yaygın (profesyonel) matematik” olmak üzere iki farklı alanında farklı biçimde ele alınır (Reid ve Knipping, 2010).

Matematiğin temelleri alanında çalışan matematikçiler ispatlarını *formel ispat* olarak ele alırken; yaygın matematik alanındaki ispatları kısmen formel (semi-formal) olan *informel (sosyal) ispat* olarak görürler (Reid ve Knipping, 2010). Bundan sonraki bölümlerde; formel ve informel (sosyal) ispatlar tanımlanarak bu iki ispat biçiminin doğası ayrıntılı biçimde ele alınmaktadır.

2.1.2.1. Formel ispatlar ve formel ispatların doğası.

Matematiğin temelleri alanında bir teoremin doğruluğu, ispatta kullanılan mantık kurallarının geçerliği üzerine kuruludur ve teorem, öncüllerin mantıksal ve gerekli bir sonucu olarak ortaya çıkararak evrensel geçerliğe sahipse kabul edilebilir olmaktadır (Godino ve Recio, 1997; Fischbein ve Kadem, 1982, akt: Reid, 2001, Reid, 2005). Buradaki geçerlik sürecinin amacı ise matematiksel önermeler sisteminin doğruluğunu maksimum düzeyde garanti ederek gerekçelendirmektir. Bu anlamda minimal düzeyde bağımsız ve çelişki içermeyen bir aksiyomlar setinin aranması gereklidir (Godino ve Recio, 1997).

Hilbert açısından biçimselci yaklaşımla bakıldığında formel ispat, “*En sonuncusunun ispatlanan teorem olduğu ve her birinin birer aksiyom ya da dizi içerisindeki önceki formüllere çıkarım kurallarının uygulanması sonucu olduğu bir iddialar dizisidir*” (Dawson, 2006, s.270). Lakatos’un (1978) formel ispat anlayışı da biçimselci yaklaşıma sahiptir (Reid ve Knipping, 2010): “*Formel ispatların en göze çarpan özelliklerinden biri öne sürülen bir ispatın gerçekten ispat olup olmadığına mekanik olarak karar verilmesidir*” (Lakatos, 1978, s. 62).

Hanna’ya göre (2014) matematiksel ispat verilen bir önermenin aksiyomlardan, çıkarımın kabul edilmiş kurallarına uyarak mantıksal olarak türetilmesidir. Formel bir ispatta ise formel gösterimler, söz dizim ve çıkarım kuralları bulunmaktadır, dolayısıyla bu ispatlar yüksek derecede güvenilir sayılmaktadır. Hanna (1990) bir önermenin formel ispatını “*İlk önermenin aksiyom, takip eden her bir önermenin aksiyom ya da çıkarım kuralları uygulanan önceki önermeler ve son önermenin ispatlanacak olan önerme olarak ele alındığı önermelerin sonlu dizisi*” (s. 6) olarak tanımlamıştır. Bu ispat da Hilbertçi (biçimselci) bir yaklaşıma sahiptir ve öğrenciler tümdengelimsel ispat kavramını tanıdıklarında bu yaklaşımla karşılaşılır (Weber, 2014).

Yıldırım da (2012a) ispatı formel açıdan değerlendirerek, mantıksal ispatın bir önermeyi başka önermelerin zorunlu sonucu yapan ilişkiyi kurmak olduğunu belirtmiş, ispatın önermelerden herhangi birinin doğru olduğunu göstermek olmadığını vurgulamıştır. Yıldırım (2012b) “*ispat*” kavramını: “*Bir önermenin doğruluk değerini (doğru veya yanlış olduğunu) belirlememize yarayan olgu, belge veya bunları ifade eden önerme*” (s. 250) olarak tanımlarken; formel ispat tanımı yapmış; bunun yanında “*Formel sistemlerde, teoremlerin aksiyomlardan mantıksal olarak çıkarılması*” eylemini de “*ispatlama*” (s. 250) olarak tanımlamıştır. Tall ve diğerleri’ne (2012) göre formel ispat Hilbert tarafından

belirlenen kesin mantıksal biçimde veya matematikçilerin dergi makalelerinde veya kendi aralarındaki görüşmelerde iletişim kurdukları ispat biçiminde ortaya çıkmaktadır.

2.1.2.2. Matematik eğitiminde ispatın doğası ve formel ispatın matematik eğitimindeki uygulama zorlukları.

Yukarıda bahsedilen formel ispatın biçimselci doğası, ispatı, matematiksel sistemlere uygun olarak tamamen tümdengelimsel olarak dar bir anlamda tanıtmaktadır (Hanna ve Jahnke, 1993). Günümüzde matematik eğitiminin sınıf uygulamalarında ispatın ne olduğu ve bu kavramın yeterli anlayışı tatmin edici biçimde dikkate alınmamakta; ispat genellikle öğrencilerin takip etmekte zorlanacağı, öğrencilerin kabul etmesi için hazırlanmış bir sonuca ulaşan sembolik manipülasyonlar dizisi biçiminde tanıtılmaktadır. Buna göre ispat açıkça formüle edilmiş tanım ve ifadeler ile bir ifadeden diğerine doğruluğu üretecek, kabul edilmiş prosedürler gerektirmektedir. Fakat matematik eğitimindeki deneyimler, formel tanımların matematik öğretiminde uygun bir yol olmadığını göstermekte (Tall, 1989) ve ispatı matematik öğretim programının en anlaşılmayan konularından biri (Healy ve Hoyles, 2000; Schoenfeld, 1994) haline getirmektedir. Bu anlamda matematiksel düşünmeden eksik olarak hazırlanan matematiksel ispatın formel yaklaşımına ilişkin öğretimsel uygulamalar, içerik yerine biçime vurgu yapacak biçimde hazırlanarak (Schoenfeld, 1994) öğrencilerin ispata bir matematikçiden ziyade bir bilim insanı gibi yaklaşmasına yön vermektedir ve böylece formel anlamdaki ispat sürecinin doğası, öğrencilere ispatlamanın üretimsel bir çaba yerine içinde bulunacakları bir ritüel olarak tanıtılarak (Schoenfeld, 1994) varsayımlar üretme, verilen özellik ve yapılardan soyutlama yapma ve mantıksal argümanlar üretme gibi birçok karmaşık öğrenci yeterliği gerektiren yapılar içermektedir; bu da öğrencilerin kavrayışı için çok güç olmaktadır (Healy ve Hoyles, 2000; Tall, 1989). Bu karmaşıklıklar ispat teriminin muğlak doğası ile artmaktadır. Matematikçiler arasında bile ispatın rolü ve fonksiyonlarının ne olduğu ve ispatın matematiğin ne derecede anlaşılır kıldığı konusunda birçok görüş farklılıkları mevcutken (Healy ve Hoyles, 2000), öğrencilerin formel ispatın doğasını anlamada güçlük çekmeleri beklenen bir durumdur. Nitekim bir çok araştırma öğrencilerin bir ispatı nelerin oluşturduğunu (Healy ve Hoyles, 2000; Soucy McCrone, ve Martin, 2004; Patkin, 2012) ve ispatın rolünü (Healy ve Hoyles, 2000) anlamada ve formel tümdengelimsel argümanları yapılandırmada ya da onları takip etmede veya bunları deneysel sonuçlardan ayırmada (Balacheff, 1988; Chazan, 1993; Harel ve Sowder, 1998) zorluklar yaşadıklarını göstermektedir. Dolayısıyla matematiğin tamamen formelleşmiş

olduğu ve ispatın da bu yönde ilerleyerek kitaplarda ve sınıflarda öğretilen kısmının uygun olduğu fikri öğretim uygulamalarında yararsız görülmeye başlanmıştır (Davis, 1986) ve bir çok matematikçi ve matematik eğitimcisi matematiğin en önemli yönünün tümdengelsel akıl yürütme ile sonuçlandığı inancına meydan okuyarak, matematiksel uygulamaların gerçekliğini fark ederek matematiğin formel sistemlerden çok daha fazlasını kapsadığına işaret etmiştir. Matematikçiler farklı formel geçerlilik düzeylerindeki ispatlarının aynı kabul düzeyinde olabileceğini ve ispatın içeriğine bakılmadan sadece görünümüyle geçerli kılındığında konusunun anlaşılmasına çok az katkıda bulunabileceğine ve ikna ediciliğinin düşük olacağına katılmışlardır. Bu bağlamda ispatın, ikna ediciliği sağladığı takdirde, bir çok farklı biçimde ele alınabilecek ve bir durumu geçerli kılmada gerekli olan bir argüman olduğu kabul edilmiştir (Hanna, 2002). Matematikte ispatın sosyal bir süreç olarak ele alınmasını ve matematik eğitiminde ispatın formel ispat kavramının ötesinde anlamları olduğu düşüncesi bir çok araştırma tarafından (Davis, 1986; Hanna, 2002; Kitcher, 1984; Lakatos, 1976; Tymoczko, 1986,) ortaya konmuştur. Bu çalışmaların matematiğin doğasına ve ispatın sosyal sürecine ilişkin yaklaşımları aşağıda kısaca özetlenmiştir:

Hanna (2002), Davis'e (1986) ve Tymoczko'ya (1986) göre biçimselcilik, sezgicilik ve mantıkçılık gibi geleneksel felsefelerin ideal matematiği tanımladığını fakat matematiğin, sosyal bir kuramı gerektiren sosyal bir etkinlik olduğunu belirtmiştir. Lakatos (1976) matematiğin doğası gereği yanılabilir olduğunu ve biçimselciliğin ve mantıkçılığın da bu yanılabilir doğadan etkilendiğini belirtmiştir. Lakatos'a (1976) göre matematik deneysel bilimlerden değildir fakat yöntemleri deneysel bilimlerin yöntemlerine benzemektedir ve bu yüzden yarı deneysel sayılabilir. Bu anlamda ispat bir sonuç değildir ve formel kriterlerin uygulanmasından ziyade anlamın sosyal sürecine işaret etmektedir. Kitcher (1984) ise matematiksel bilginin, ispat temeline dayanmadığını, matematiksel uygulamaların başarılı nitelendirilmeleriyle ortaya çıktığını belirterek matematikçilerin akıl yürütmenin yöntemlerini, ilkelerini, akıl yürütmeye ilişkin yeni kavramları ve soruları içeren uygulamaların elemanlarını yenilemeleri ve dönüştürmeleri gerekliliğini vurgulamıştır. Davis (1986) ispatın rollerinin ispatın sosyal sürecine işaret etmekte önemli olduğuna değinmiştir. Davis'e (1986) göre ispatın doğrulama, keşif, formelleştirme, ritüelleştirme ve hatadan arındırma gibi pek çok amacı vardır. Bir ifade ya da karmaşık bir durumun doğrulanması matematiğin doğruluğunun sağlanmasında yararlıdır ve ispat, yeni matematiğin keşfine neden olduğu için keşif anlamına da gelmektedir.

Matematik eğitiminde ispatın formel ispat kavramının ötesinde anlamları olduğunun kabul edilmesiyle birlikte sınıflarda matematiksel uygulamaların ispat kavramını içermesi ve ispatın bir kavram olarak sınıflarda kabul edilmesi gerektiği bir çok araştırmacı (Balacheff, 2010; Bell, 1976; Hanna, 2002; Hanna ve Jahnke, 1993; Herbst ve Balacheff, 2009; Knuth, 2002a; Schoenfeld, 1994; Tall, 1989) tarafından belirtilmiştir. Bu araştırmacılar matematik eğitiminde ispatın sosyal bir süreç olarak ele alınmasını öngörerek ispatın sınıflarda kabul edilebilirliği için ispatın doğasını açıklama çabası içerisine girmişlerdir. Aşağıda bununla ilgili ayrıntılar yer almaktadır:

Bell (1976) sınıflarda ispatın kabul edilebilirliği için ispatın doğasını açıklarken matematiksel anlama odaklanmıştır. Buna göre ispatın matematiksel anlamı üç ana başlıkta incelenebilir. Bunlardan ilki, bir önermenin doğruluğuyla ilgili olan doğrulamadır. İkincisi iyi bir ispatın, önermenin neden doğru olduğuna ilişkin bir anlayış geliştirme ile ilgili olan aydınlatmadır. Üçüncüsü ise aksiyom ve teoremlerin tümdengelimsel sistemin içerisindeki sonuçlarının organizasyonu ile ilgili olan sistemleştirmedir. Bu bağlamda ispat sosyal bir etkinlik olsa da genellenin gelişiminin yanında yer alan kabul veya reddetme durumlarının içsel olarak test edilmesinden ortaya çıkmaktadır. Fakat çocuklar formel ispatı, onun sosyal doğrulamasını ve amacını anlayana kadar kullanamazlar. Bu yüzden Bell (1976) sınıflarda bu amaca ulaşmak için işbirlikli ve araştırma biçimli öğretimin uygulanmasının yararlı olacağını belirtmiştir. Bu anlayışa göre bir durum farklı öğrencilerle farklı varsayımlarla araştırılarak argümanlara ve kanıtlara ilişkin çelişkiler çözümlenebilir. Bell (1976) sınıf uygulamalarında formel ritüeller yerine anlama odaklanmanın ispatın gerçek doğasının değerlendirilmesini önleyebilme tehlikesi olduğunu belirtmiştir. O yüzden ispatı formel bir ispatı takip etmekten daha farklı anlamları olarak içsel olarak yürütülen ve iknaya ulaşmayı takip eden bir sosyal etkinlik olarak tanımlamıştır.

Davis (1986) sınıflarda ispatın anlaşılması ve kabul edilmesi için matematik felsefesinin önemli bir rol oynadığını belirtmiştir. Matematik felsefesi sembollere anlam yüklemeye gereklidir. Semboller, bir kağıt üzerine yazıldığında ya da bilgisayar ekranında görüldüklerinde tek başına anlam ifade etmeyen formel soyut şeylerdir. Bu sembollerin ise dış realiteyle ilişkilendirilmesi matematik felsefesi ile mümkündür. Matematik eğitiminde biçimcilik ya da idealizm gibi özel kuramlar keşfe sebep olmaz ve bu yüzden bu kuramlar matematik felsefesi yardımı ile yerini toplumsal kuramlara bırakmaktadır. Matematiksel topluluk toplumsal kuramlarla yeni üyeler kazanır ve bu şekilde yeni oluşan prosedürler ile

öğretim uygulamaları belirlenir. Öğretim uygulamaları yeni kurulan rotanın izlenen yolun yapısıyla temsil edilir ve bu bağlamda öğretim ilerler. Matematiğin toplumsal kuralları keşfe sebep olarak öğretimlerin kavramlara ve kavramların değerlerine odaklanmasını sağlar ve öğretilen şeyler de bu kavramların üzerine yerleştirilir. Bu anlamda Davis'in (1986) bakış açısının özel kuramlardan toplumsal kuramlara ilerlemeye yarayacak matematik felsefesinin matematik eğitiminde kurulması gerekliliğini yansıttığı söylenebilir.

Tymoczko da (1986) Davis'e (1986) benzer düşüncelerle matematik eğitiminde ispatın kabul edilebilirliğini özel ve toplumsal kuramlar bağlamında açıklamaya çalışmış, öğretimi geleneksel olarak matematik felsefesinin temel konusu olarak ele alarak matematiksel ispatın doğasının bu felsefenin temel konusu olduğunu belirtmiştir. Bu anlayışa göre matematik eğitiminde matematiksel topluluğa ait ispatların özel matematikçilerin formel ispatlarından farklı olarak nitelendirilmesi gerektiğini belirtmiştir. Tymoczko'ya (1986) göre matematikçilerin özel kuramları bir matematikçinin tek başına bir durum üzerinde çalıştığı durumlarda ortaya çıkarken, toplumsal kuramlar matematikçilerin toplum içerisinde var oldukları olgusunu dikkate alırlar ve gelenekler bizi özel kuramları seçmeye yönlendirse de toplumsal kuramlar matematik felsefesinde önemli bir alternatiftir. Dolayısıyla sınıflarda matematiksel bilgiyi doğrulamak ve teoremleri ispatlamak, matematik topluluğu içinde yapılan ve matematiksel topluluğu tanıyan bir epistemoloji tarafından anlaşılabilen etkinliklerdir. Fakat Tymoczko'ya (1986) göre matematiksel gerekçelendirmenin toplum etkinliği olduğunu söylemek bu topluluk içerisindeki bireyin bir teoremi kendi başına ispatlayabileceği anlamına da gelmemektedir. Matematiksel gerekçelendirme matematiksel dili konuşabilme ve kullanabilme ile anlam kazanır. Matematiksel dil toplumsal bir dildir ve matematiksel gerekçelendirme de toplum tarafından uygulanan sosyal bir sanattır.

Hanna ve Jahnke de (1993) ispatın matematik eğitiminde kabul edilebilirliği için ispatın tamamen formel anlamına karşı çıkmışlar, teorik kavramlar için içine girdiğinde sisteme daha geniş açıdan bakmak gerektiğini belirtmişlerdir. Buna göre ispatın, ispatlanan durumu yeni bir bağlama yerleştiren ve durumlar arasında ilişkiler kuran bir bağlamda incelenmesi gerekmektedir. Hanna ve Jahnke (1993) araştırmacı matematikçilerin uygulama alanını göz ardı ederek ispatın tamamiyle tümdengelimsel anlamına odaklanmakta olduğunu, bu yüzden eğitimde ispatın gerçeği anlamamızdaki katkısının göz önüne alınarak değerlendirilmesi gerektiğini belirtmiştir. Buna göre, pedagojik açıdan

bakıldığında, temel matematik ile okulda öğretilen matematik arasındaki temel farklılıkların giderilmesi için ispatın matematiğin gerçekte olan ilişkisini dikkate alarak öğretilmesi gerektiğini belirtmişlerdir. Hanna ve Jahnke'ye göre (1993) matematik eğitiminde öğrencilerin ispatı anlamaya çalışırken yaşadıkları karmaşık durumlar, onlara Hilbertçi modern aksiyomları tanıtarak aşılamaz. Bunun yerine tümdengelmisel akıl yürütme veya sembol manipülasyonu ile bunların uygulamaları arasındaki ilişkiler her bir durum için bireysel olarak geliştirilmelidir.

Schoenfeld (1994) ise ispatın sınıflardaki kabul edilebilirliğini açıklamak için ispatın doğasını açıklarken matematikçilerin ispata bakış açısını açıklama yoluna gitmiştir ve bu bakış açısını sınıf sistemlerine uyarlamaya çalışmıştır. O'na göre matematikçiler bir şeyin doğru olduğunu ve bunun nedenini bilmek isterlerse sezgiler geliştirmek için örnekler ararlar ve daha sonra sonucu ispatlamaya çalışırlar. Bu anlamda ispat üretmek bir anlamda yapıyı keşfetme çabasıdır. O sonuca oluşma yolunu ve içindeki parçaların bu yola uyuma sebebini araştırırlar. İspat üretme sürecinde bu çalışma altındaki konuları nelerin oluşturduğu araştırılır ve bu bağlamda ispatlama ya da reddetme çabası keşfin bir biçimi haline gelir. Dolayısıyla Schoenfeld (1994) ispatın kabul edilebilirliği için ispatın matematikten ayrılmaz bir parça olarak görülerek matematiği kaydetmenin, iletişim kurmanın ve matematik yapmanın önemli bir bileşeni olarak öğretim programlarında tüm düzeylerde yer alması gerektiğini söylemiştir. İspatlama bir şeyin özel olduğunu açıklamaktan ziyade neden öyle olduğunun net bir açıklaması olarak iyi bir düşüncenin kodlanmasıdır. Bu yüzden öğrencilerin ispatın matematiğin doğal bir parçası olduğunu görmeleri için, enine boyuna düşünmenin, söylemin ve ikna etmenin matematikle yakından ilişkili olan önemli parçalar olduğu düşünülen bir matematiksel kültür içerisinde gelişmeleri gereklidir. Böylelikle öğrenciler ispatı suni bir çabayla ortaya koymazlar ve durumların doğruluğunu araştırırken nedenleri sorgularlar (Schoenfeld, 1994).

Herbst ve Balacheff (2009) ispatın sınıflardaki kabul edilebilirliği için üç anlam içerisinde ele alınması gerektiğini belirtmiştir. Bu bağlamda matematik sınıflarındaki sosyal etkinlikler epistemolojiyi; bilmenin belirli bir biçimini bünyesinde barındırmalıdır. Öğretim programlarının, pedagojinin ve değerlendirmenin gelişimi hakkında bilgi vermek için ise bu epistemolojiyi anlamak çok önemlidir. Herbst ve Balacheff'e (2009) göre ispat bir sosyal performans olarak ele alınmaktadır ve sınıf gözlemcisinin ispat olarak nitelendirebileceği çeşitli performansları belirlemek için ispatın bu üç farklı anlamından ilki "ispat etmek" ve "ispat" gibi kelimelerin sınıf söylemi içerisindeki alışılmış

kullanımlarına ve bilginin sınıf içinde geçerli kılındığı ve organize edildiği geleneksel yollara bağlıdır. İspatın anlamına ilişkin ikinci kavram C-ispata olarak adlandırılmaktadır ve problemler ile çözümleri arasındaki uyumu belirli kavramlarla kontrol edebilen sınıflardaki belirli yollara tabidir. Buradaki C harfi türkçe karşılığı “kavram” anlamına gelen “Concept” kelimesi için kullanılmıştır. Üçüncü anlam ise yeni şeyler öğrenmede ispatın olası rolüne işaret eden K-ispata olarak adlandırılmaktadır. Bu ispat da sınıf tarafından önceden bilinen bir kavramın yeni kavram üzerine metaforik olarak nasıl şekilleneceği tanımlanarak yeni kavram hakkındaki olası bilgiler sağlanmaktadır. Buradaki K harfi türkçe karşılığı “Bilgi” anlamına gelen “Knowledge” kelimesi için kullanılmıştır.

Balacheff (2010) ispatın sınıflardaki kabul edilebilirliği için matematiksel ispatı öğretme ile matematiksel içeriği öğretmenin birbirinden ayrı tutulmaması gerektiğini vurgulamıştır. Böylelikle matematiğin kendi doğası içinde var olan ispatın özel karakterler arasında bir metnin formel biçimine sahip, sözdizimsel olarak doğru, itirazsız kabul edilmiş bir sağlamlıkla özel bir düzenleme biçimi gibi sosyal olarak benimsenmeyen niteliklerinin içerikle anlam kazanması mümkün olmaktadır. Balacheff (2010) matematiksel ispatın bu niteliklerin matematik ile diğer disiplinler arasında bir kırılma oluşturmakta olduğunu ve eğitimin ilk yıllarında matematiksel öğretimin yollarını böldüğünü belirterek anlama karşı kesinlik, matematiğin uygulama yönelimli gelişimine karşı içsel gelişim, deneyim temelli deneysel kanıta karşı sembolik temsillerle tanımlanmış kusursuz amaçlar gibi epistemolojik ve eğitici problemler içeren durumlarla karşılaştığını vurgulamıştır. Balacheff’e (2010) göre bu problemlerin giderilmesi için sınıf uygulamalarında argümantasyonun doğasının anlaşılmasına ve argümantasyon içeren uygulamalara ağırlık verilmesi gereklidir. Argümantasyonun bir argüman oluşturma süreci ve akıl yürütme zinciri oluşturularak sonuca varma işlemi (Umland ve Sriraman, 2014) olduğu düşünüldüğünde, Balacheff’in (2010) argüman oluşturma süreçlerinin ve akıl yürütme zincirine dayalı olarak sonuca varma işlemlerinin yer aldığı sınıf uygulamalarına odaklanılmasına önem verdiği söylenebilir.

Tüm bu çalışmalara bakıldığında; matematiksel ispatın sınıf içi uygulamalarında ispatın sadece formel biçimine yönelinmemesi gerektiği, ispatın özel kuramlardan çok toplumsal kuramlar bağlamında ele alınarak sosyal bir süreç olarak yapılandırılması gerektiği söylenebilir. Fakat buradan çıkarılan sonuç matematik eğitiminde sınıf uygulamalarında ispatın tamamen formellikten uzak olması anlamına gelmemektedir. Tall’a (1989) göre ispat her ne kadar sosyal bir süreç olarak ele alınsa da, gücü ve

genellemesiyle geniş bir bağlamda ele alınmalıdır. Bell (1976) sınıf uygulamalarında formel ritüeller yerine tamamen anlamın öne çıkarılmasının ispatın gerçek doğasının değerlendirmesini önleyebilme tehlikesi olduğunu belirtmiştir. Bu tehlikeden korunmak için Tall (1989) sınıf uygulamalarında tüm varsayımların düzenli ve net biçimde, çıkarımların kesin bir sırayla ortaya koyulmasının ve öğrencilerin anlamlı durumlarla ikna edici argümanlar yapmaya teşvik edilmesinin gerekli olduğunu belirtmiştir. Buradan sınıf uygulamalarında ispatın tamamen biçimsel ya da tamamen anlamsal yönüne odaklanılmaması gerektiği sonucu çıkarılabilir. Bu bağlamda Raman'ın (2002) çalışması matematik eğitiminde ispatın hangi görünümüne odaklanması gerektiği sorusuna cevap verebilir. Raman (2002) üniversite öğrencileri ile onların öğretmenlerinin (profesörlerin) ispat görüşlerinin incelemiştir. Çalışmanın sonuçlarına göre öğrencilerin ispatlamayı zor buldukları ve hiçbirisinin tam bir ispat yapılandıramadıkları belirlenmiştir. Raman (2002) bu zorlukların nedenlerini irdelemiş ve öğretmen ve öğrencilerin anlayışları arası farklılıkların ispatın üretimi ve değerlendirmesi için bir çatı oluşturduğunu ortaya koymuştur. Raman'ın (2002) çatısı matematik eğitiminde ispatın doğasını anlamamıza yarayan bir kaynak olabilecek niteliktedir. Bu çatıya göre ispat, özel ve genel görünümüne odaklanan fikirlerden oluşmaktadır. İspatın özel yönü anlamaya neden olan ve anlamayı ortaya çıkaran argümanlar içerirken genel yönü belirli bir matematiksel topluluk için gerekli kesinliği oluşturmaktadır. Çalışma ispatın genel ve özel yönünü üç farklı fikirle ortaya koymuştur: “Sezgisel fikirler” (heuristic ideas), “işlemsel fikirler” (procedural ideas) ve “anahtar fikirler” (key ideas). Sezgisel fikirler deneysel veri ve resimle temsile ilişkin informel anlayışa dayalı fikir verici fakat direk formel ispata götürmeyen fikirlerdir. Anlama hissi verirler fakat ikna etmezler. Bu fikirdeki öğrencilerin akıl yürütmeleri, temel iddianın doğru olması gerektiği duygusunu vermekle beraber formel ispata götürecek yolu göstermez. Raman (2002) bu fikirlerin ispatın özel yönünü temsil ettiğini belirtmiştir. İşlemsel fikirler ise ispatın genel yönünü tanımlayan informel anlayış ile bağlantı olmadan formel ispata götüren manipülasyon ve mantığa dayalı fikirlerdir. İkna duygusu verirler fakat anlayış duygusu vermezler. Bu fikre sahip öğrenciler bir şeyin doğru olduğunu gösteren argümanlar üretirler ve kurnazlıkla prosedürleri takip ederek ispat yapmaya çalışırlar. Buraya kadar olan fikirler ispatın özel ve genel yönünü tanımlayan kavramlardır. Raman (2002) ispatın genel ve özel yönleri arasındaki bağı sağlayan ve sezgisel fikirleri uygun kesinlik duygusuyla formel ispata götüren fikirleri anahtar fikirler olarak tanımlamıştır. Anahtar fikirler hem genel hem özel alanlarla bağlantı kurduğu için anlayış ve ikna duygusu veren fikirlerdir ve belirli bir

iddianın neden doğru olduğunu açıklarlar. Raman'ın (2002) çalışmasında öğrencilerin öğretmenleri olan profesörler anahtar fikirlerle çalışmışlardır. Öğrenciler ise çalışma boyunca anahtar fikirlere sahip olmamışlardır. Çalışmada öğrenciler örneklere bakarak informel yaklaşımlar denemiş ve formal argümana ulaşamamışlardır. Öğretmenler ise informel argümanları, formal argümana götüren bir zemin olarak görmüşlerdir. Öğretmenler için ispatın en önemli özelliği içerdiği anahtar fikir olurken, öğrenciler ispatın en önemli özelliklerinin ise, “bu yüzden”, “böylelikle” gibi argümanlar içerisindeki kalıplaşmış dil içeren ifadelerin; sembolizm ve uzunluk olduğu belirtilmiştir. Raman (2002) ispatın doğasının anlaşılması ve öğrencilerin ispat uygulamalarında başarılı olmaları için ispatın hem genel hem özel yönlerine odaklanmaları gerektiğini söylemiştir. Öğrencilerin formel ve informel argümanlar arasındaki bağları kuvvetlendirmelerinin onların ispata ilişkin daha doğru görüşler geliştirmelerine ve matematiği daha derinden anlayabilmelerine olanak sağlayacağını belirtmiştir.

Matematik eğitimi uygulamalarında ispatın sınıflarda kabul edilebilirliğini, ispat uygulamalarının nasıl olması gerektiğini ve ispatın doğasını açığa çıkaracak en önemli çalışmalardan birinin Harold Fawcett tarafından 1932 yılında yapılan ve 1938 yılında NCTM Yearbook'ta yayınlanan “İspatın Doğası” adlı çalışma olduğu söylenebilir. Fawcett (1932) öğrencilere geometri öğretilmesinin en önemli nedeninin, onlara ispatın doğasıyla ilişkili olan belirli fikirleri kazandırmak ve varsayımsal düşüncelerini sağlamak olduğunu belirtmiştir. Buna göre öğrenciler sınıflarda geometri hakkında kendi yollarıyla akıl yürütmeye fırsat verilmelidirler ve yapılan çalışmaların bilişsel süreçleri öğretmen değil öğrenciler tarafından yönetilmelidir. Raman'ın (2002) ispatın hangi yönlerine odaklanması gerektiği sorusuna cevap vermeye çalıştığı sınıf uygulamalarının doğasına ilişkin çalışmayı bundan 64 yıl önce Fawcett yapmıştır. Fawcett (1938) çalışmasında geliştirdiği ve öğrettiği bir geometri dersini ayrıntılarıyla tanıtmıştır ve geometri ve ispat uygulamalarının kullanılabilirliğini, ve geometrideki bu tür geniş çaplı bir çalışmanın fikirlerin yeterli ve başarılı bir transferine izin vereceği ve düşünme süreçlerinin sınıf dışındaki dünya ile ilişki kurabileceğini test etmiştir (Lane, 2004). Dersin temel amaçları öğrencilerin geometri çalışması kanalıyla matematiksel ispat kavramının derin anlayışını geliştirmeleri ve bu anlayışları ve içerdiği akıl yürütme süreçlerini gerçek dünyadaki tümdengelimsel akıl yürütmeye ilişkilendirmeleri olarak tanımlanmıştır (Schoenfeld, 2002). Matematik eğitiminde öğretimin doğası dikkatlice tanımlanarak okuyucuların sınıf söylevi, sınıf tartışmalarının soru çeşitleri ve argümanların akışı hakkında anlayış

kazanmaları sağlanmıştır (Schoenfeld, 2002). Fawcett (1938) çalışma sonucunda sınıf uygulamalarında öğrencilerin ispatın doğasına ilişkin yaklaşımlarının nasıl olması gerektiğine ve ispatın sınıflarda kabul edilebilirliğine işaret eden belirli çıkarımlar için izlenen prosedürleri ortaya koymuştur. Bu prosedürler; sınıfta genel bir metnin kullanılmadığı, öğrencilerin kendi metinlerini kendi yollarıyla geliştirdikleri, tanımsız terimlerin ve tanımına ihtiyaç olunan terimlerin öğrenciler tarafından seçildiği, tanımların öğrenciler tarafından yapılarak yine eleştiriler ışığında öğrenciler tarafından geliştirildiği, öğrencilere açık gelen önermelerin varsayım olarak kabul edildiği, varsayımların öğrencilerin kendi düşüncelerine dayanılarak ortaya koyulduğu ve bu varsayımların sayısının en aza indirilmeye çalışılmadığı, öğrencilere ispatlanacak hiçbir ifadenin verilmediği, öğrencilerin varsayılan belirli özelliklerin çıkarımları hakkında düşünme imkânı olmadan genel bir ifadeye ulaşmadıkları gibi sınıf uygulamalarına işaret etmiştir (Fawcett, 1938).

Matematik eğitiminde ispatın doğası ve formel ispatın matematik eğitimindeki uygulama zorlukları kısaca özetlenecek olursa; matematik eğitiminde ispat uygulamalarının tamamen formelleşmiş biçiminin günümüzde işe yaramadığı, matematik eğitiminde ispatın sadece biçimsel ya da anlamsal yönüne odaklanılmaması gerektiği; bunun yerine öğrencilerin ispatın doğasını anlayarak informel argümanlar ve informel ispatlar yapmalarının teşvik edilerek tümdengelsel yapıya sahip olan ikna edici ispatlar yapabilecekleri söylenebilir. Bundan sonraki bölümde; matematik eğitiminde sınıf uygulamalarında önerilen informel ispatın doğasına ilişkin açıklamalar yapılmıştır.

2.1.2.3. İformel ispatlar ve informel ispatların doğası.

İspatın doğası, bir şeyin doğru olduğunu ve bunun nedenini bilmek için sezgiler geliştirerek örnekler aramayı ve daha sonra sonucu ispatlamaya çalışmayı içermektedir. İspat üretmek bir anlamda yapıyı keşfetme çabası, sonucun oluşma yolunu ve yapı içindeki parçaların bu yola uyuşma sebebinin araştırılmasıdır. İspat üretme sürecinde bu çalışma altındaki konuları nelerin oluşturduğu araştırılır ve bu bağlamda ispatlama ya da reddetme çabası keşfin bir biçimi haline gelir. Dolayısıyla ispat matematikten ayrılmaz bir parça olarak matematiği kaydetmenin, iletişim kurmanın ve matematik yapmanın önemli bir bileşeni olarak öğretim programlarında tüm düzeylerde yer almalıdır. İspatlama bir şeyin özel olduğunu açıklamaktan ziyade neden öyle olduğunu net bir açıklaması olarak iyi bir düşüncenin kodlanmasıdır. Bu yüzden öğrenciler enine boyuna düşünmenin, söylevin ve

ikna etmenin matematikle yakından ilişkili olan önemli parçalar olduğu düşünülen bir matematiksel kültür içerisinde gelişirler. Dolayısıyla ispatı suni bir çabayla ortaya koymadan, matematiğinin doğal bir parçası olarak görerek durumların doğruluğunu araştırırken nedenleri sorgularlar (Schoenfeld, 1994). Öğrencilerin matematik eğitiminde ispatı nedenleri sorgulayarak ortaya koyma biçimleri informel ispatların farklı tanımları olarak aşağıda açıklanmaktadır:

Lakatos (1978) ispatı ispat-öncesi (pre-formel) ispatlar, formel ispatlar ve ispat sonrası (post-formal) ispatlar olmak üzere üçe ayırmıştır. Buna göre ispat öncesi ve ispat sonrası ispatlar informel ispatlar sınıflandırmasına girmektedir. Lakatos'a göre (1978) informel ispatlar bazı mantıkçılar tarafından informel kuramlarla açıklanmaktadır. Onlara göre informel ispatlar mantıksal çıkarım kuralları ile mantıksal aksiyomları ortadan kaldırarak belirli postülatların her türlü kullanımına işaret etmektedir. O halde bu tanıma göre informel ispatlar, “*Aksiyomatize edilmiş matematiksel kuram içerisindeki kuramsal-tümdengelimsel sistemin biçimini alan fakat onun temel mantığını belirsiz bırakan bir ispattan başka bir şey değildir*” (Lakatos, 1978, s. 62-63). Fakat informel ispatlamanın bu çeşit sınıflanması eksik bir bakış açısına işaret etmektedir. Onun yerine informel ispatlar yarı formel ispat (quasi formal) ya da eksik formel ispat (formal proof with gaps) olarak tanımlanabilir. Çünkü informel ispatların tamamlanmamış formel ispat biçiminde ifade edilmesi bir çocuğun tamamen bir yetişkinin minyatürü olarak görülmesi ya da yetişkin bireyin davranışlarıyla mukayese edilmesi anlamına gelmektedir. Bu anlamda çocuğun davranışları ispat öncesi ispatlar olarak görülebilir (Lakatos, 1978). Reid ve Knipping (2010) Lakatos'un informel ispat anlayışını; formel olmayan ve matematikçiler tarafından ikna edici bulunan ispatlar olarak tanımlamıştır.

İspat öncesi ispatlar çalışma notları ya da konuşmalar olarak informel dil, benzetmeler ya da gizli varsayımlar kullanılarak ortaya çıkabilir (Reid, 2001). Lakatos'un (1978) ispat sonrası ispatları ise formel ispatlar hakkındadır. Örneğin izdüşümsel geometrideki ikililik prensipinde; izdüşümsel geometri tamamen aksiyomatize edilmiş bir sistem olmasına rağmen ikililik prensibini ispat edecek tüm aksiyom ve kurallar belirlenemeyeceğinden, içerdiği meta teorinin informel olduğu düşünülmektedir (Reid ve Knipping, 2010).

Wittman (Wittman/Müller, 1988, akt. Blum ve Kirsh, 1991) ise ispatı; deneysel ispatlar (experimental proofs), sezgisel ispatlar (inhaltlich-anschaulich, intuitional proofs) ve formel ispatlar (formal (scientific) proofs) olmak üzere üç biçimde incelemiştir.

Sezgisel ispatlar, genel ve kesin doğruları kurmakta fakat postülatlardan duyu deneyimiyle gerektiğinde yardım almaktadırlar. Bu tür ispatlar kurallara uyarak doğruluğu kendi bağımsız temellerinde bulmaktadırlar (Branford, 1908, s.97, akt, Blum ve Kirsch, 1991). Wittman'ın görüşüne göre ispatlar arasındaki sınır sezgisel ve formel ispatlar arasında değil daha çok deneysel (sonlu sayıdaki örneklerin gerekçelendirilmesi) ve sezgisel (formal olmayan temelde kurulan argümantasyon) ispatlar arasında kurulmuştur (Blum ve Kirsch, 1991). Wittman (1989) (akt. Blum ve Kirsch, 1991) sezgisel ispatların öğretmen yetiştirmede ve okullarda kullanılabileceğini vurgulamıştır. Blum ve Kirsch (1991) formel ispatın uygulanamaz oluşunu ve anılan ispat sınıflamalarını göz önüne almış ve Lakatos'a (1978) benzer olarak informel ispatlar içerisinde yer alan ispat öncesi ispat kavramını açıklamıştır. “İspat öncesi ispatlar geçerli ve formel olmayan öncüllere işaret eden, doğru fakat formel olarak temsil edilmemiş sonuçlar zinciridir” (Blum ve Kirsch, 1991, s. 187). Buradaki öncüller gerçek objeler, geometrik-sezgisel unsurlar, gerçekliğe yönelik temel fikirler veya ortak olarak anlaşılır olan ya da psikolojik olarak aşikar durumlar olabilir. Bahsedilen sonuçlar ise somut bir durumdan direkt olarak genellenebilir olmalıdır (Blum ve Kirsch, 1991).

Reid ve Knipping de (2010) informel ispatların yarı-ispat (semi-formel) olarak görülebileceğini belirterek *informel ispatların*, postülatlar ya da çok iyi tanımlanmış temel mantıkla altı çizilmiş olmasa bile matematikçiler tarafından kabul edilebilir olarak görülmekte olduğunu belirtmiştir. Sınıflarda informel ya da yarı formel ispatlar doğal bir dille sunulmaktadır (Hersh, 1993).

Hanna (1990) son birkaç yüzyıldır matematikçilerin ve matematik eğitimcilerinin aksiyomatik yapıların ve formel ispatların rollerini tekrar değerlendirdiklerini belirterek, ispatların farklı formel geçerlik düzeylerinde aynı kabul edilebilirlik düzeyine sahip olabileceklerini belirtmiştir. Buradan hareketle *kabul edilebilir ispat* kavramını ortaya atmış ve okullarda öğretilebilecek ispatın ya da ideal ispatın ne olabileceği üzerinde durmuştur. Hanna'nın (1990) ortaya atmış olduğu *kabul edilebilir ispat* kavramının informel ispatlara örnek teşkil ettiği söylenebilir. Weber'e (2014) göre sıradan matematiksel uygulamalarda birçok *informel ispat* ispatlamanın uygun bir standardı olarak görülebilmektedir. Tall da (2002) benzer şekilde ispat tanımını informel ispatlar açısından ortaya koymuştur. Tall (2002) matematiksel ispatı bir problem çözme etkinliği olarak fikirlerin kesinleştiği etkinliklerin son basamağı olarak nitelendirmiştir. Tall'a (2000) göre her matematiksel düşünme bir matematiksel gerekçelendirme düzeyindeki aşamalardan,

hamleler ve yorumlamalardan oluşmaktadır. Fakat, başlangıç düzeyindeki matematiksel düşünmede formel soyutlama süreci ve son kesinleşme aşaması bulunmamaktadır.

Mason, Burton ve Stacey de (2010) informel ispatları farklı bir bakış açısıyla ele alarak ispatlamayı “*Kendini ikna et, bir arkadaşını ikna et, bir düşmanını ikna et*” (s. 87) olmak üzere üç aşamalı şekilde tanımlamıştır. Bu süreçte ilk aşamada birey kendini ikna ettikten sonra; bir arkadaşını ikna etmek adına kendisi için belli olan şeyleri açık bir şekilde ifade etmek ve dışa vurmak için kendisini zorlamaktadır. Böylelikle bireye doğru gelen şeyler için ikna edici olan sebepler ortaya konmuş olmaktadır. Birey arkadaşını ikna etse de, bu yeterli olmayabilir. Çünkü bireyin ortaya attığı her ifade hakkındaki soru ve şüphelerin ortadan kaldırılması için bir diğerini ikna etmesi gerekmektedir. Bu yüzden burada bahsedilen “bir diğeri” ifadesi bir “düşmanı” betimlemektedir (Mason ve diğerleri, 2010).

Yaygın (profesyonel) matematik alanında yapılan informel ispatlar yukarıda anıldığı gibi farklı isimlerle farklı araştırmacılar tarafından yorumlanmıştır. Fakat anılan informel ispatların ortak özelliğinin tümdengelimsel bir yapıya sahip olması gerektiği söylenebilir. Bu ispatlar sembolik ifadelerle tamamlanan günlük bir dille ifade edilir ve bu matematiksel ispatları sistemleştirmek için genel olarak kabul edilmiş bir kesinlik düzeyi bulunmamaktadır. Dolayısıyla, matematiksel teoremler bu yolla mutlak gerekli doğruluk niteliklerini kaybederek daha sosyal, bilinen ve geçici nitelikteki uygulanabilir matematiğin özelliklerini alırlar (Godino ve Recio, 1997). Böylelikle gerçek matematiksel uygulamada bu ispat biçimi, yani informel ispat “*Yetkin yargılarla yargılanan ikna edici bir argüman*” olarak tanımlanabilir (Hersh, 1993, s. 389).

Harel ve Sowder (2007) da ispata bakış açılarının subjektif bir yapıya sahip olduğunu söylemektedirler. “*İspat terimi matematikçiler tarafından kısmen kesinlik taşıyan bir argümantasyon olarak ifade edilse de, bizim perspektifimizde ispat bir birey ya da topluluk tarafından doğruluğu neyin oluşturduğudur*” (Harel ve Sowder, 2007, s. 3). Bu açıklamalar ispatın okul öncesinden itibaren tüm matematik öğretim programlarına yayılan bir etkinlik olduğuna işaret etmektedir. İspatın bahsedilen subjektif yapısı ise bu çalışmada irdelenen ispat şeması teriminin temel karakterini oluşturmaktadır (Harel ve Sowder, 2007). Harel ve Sowder (1998) ispatı “tümdengelimsel bir süreç”, ispatlamayı ise “*Bireyin bir gözlemin doğruluğu hakkında şüphelerini ortaya çıkarmak veya ortadan kaldırmak için ortaya koyduğu süreç*” (Harel ve Sowder, 1998, s. 241) olarak ortaya koymuşlar ve öğrencilerin informel ispatlarla uğraşırken akıl yürütme süreçlerini incelemişlerdir.

Harel ve Sowder (1998), öğrencilerin informel ispatlarını, kendilerini ve başkalarını ikna ederek oluşturdukları bir süreç olarak ele alarak bu iki süreçteki akıl yürütme biçimlerini “ispat şeması” terimiyle ortaya atarak kavramsallaştırmışlardır. Buradaki amaç ise öğrencilerin matematikteki gerekçelendirmeleri nelerin oluşturduğu hakkındaki algılarını geliştirerek informel ispatlarını farklı bir çerçeveye sunmaktır (Harel ve Sowder, 1998). Bu çalışmada öğrencilerin yukarıdaki bölümlerde tanımlanan informel ispatları, “ispat şeması” özelinde irdelenmiştir. Aşağıdaki bölümlerde ispat şemasına ilişkin ayrıntılar sunulmaktadır:

2.1.3. İspat Şeması

Bu bölümde, bu çalışmada kullanılan Harel ve Sowder’ın (1998) ve Sowder ve Harel’in (1998) ispat şeması sınıflandırmasına ilişkin çatısı, bu çatı oluşturulurken temel alınan diğer taksonomiler ile ilişkisi açıklanmıştır. İspat şemasının Harel ve Sowder (1998) tarafından yapılan işe vuruk tanımı açıklanmış ve daha sonra öğrencilerin ispat yapma davranışlarını ölçen ve ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek yapıya sahip diğer çalışmalar tanıtılmıştır. Böylelikle bu çalışmada Harel ve Sowder (1998) ile Sowder ve Harel’in (1998) ispat şemasının kullanılma sebepleri ortaya konmuştur. Daha sonra ispat şemalarının sınıflandırılması ve ispat şemalarının özellikleri ayrıntılandırılmıştır.

Harel ve Sowder (1998) ispatı bir “süreç” olarak değerlendirirken öğrencilerin ispat yaparken ne yazdıklarına değil ne düşündüklerine odaklanarak *ispat şeması* terimini ortaya atarak kavramsallaştırmışlardır. Harel ve Sowder (1998) ve Sowder ve Harel (1998) çalışmalarında ispat şemalarını gruplandırarak yeni bir teorik çatı ortaya atmışlardır. Bu teorik çatı daha sonra Harel (2007) tarafından revize edilmiştir. Bu çalışmada Sowder ve Harel’in (1998) ispat şeması gruplandırması kullanılmıştır.

Harel ve Sowder (2007), ispat şeması sınıflandırmasını yapabilmek için öncelikle ispatın ne olduğu sorusuna geniş bir perspektifle yaklaştıklarını ve bu soruya cevap verirken birçok önemli faktörü göz önüne aldıklarını belirtmişlerdir. Bu yeni sınıflandırmanın birdenbire değil, hali hazırda olan birçok bilgiyle beraber şekil alarak ortaya çıktığını söylemişlerdir. Harel ve Sowder (2007) öncelikle öğrenciyi öğrenen olarak ele almışlar ve her öğrencinin ispat kavramındaki bilişsel görünümler ile ilgilenmişlerdir. İkinci olarak ispatın tarih boyunca kurulduğundan emin olduklarının bilinmesi gerekliliğini vurgulamışlar ve son olarak ispat sürecinin sosyal doğasının göz önünde bulundurulması gerektiğini belirtmişlerdir. Dolayısıyla ispat nedir sorusuna verilen cevabın bilişsel,

matematiksel, epistemolojik-tarihsel, ve sosyal bir çok faktöre bağlı olduğunu ve ispat şeması kavramına; ispatın ne olduğu sorusuyla başlayarak ve alanyazındaki çalışmaların bulgularını da ekleyerek ulaştıklarını belirtmişlerdir. Bu anlamda Harel ve Sowder'ın (1998) ve Sowder ve Harel'in (1998) ispatı hem öğrencilerin bilişsel süreçlerini ele alan hem de toplumsal kuramlarla şekil alan bir süreç olarak nitelendirdikleri söylenebilir. Bu yaklaşımın Raman'ın (2002) ortaya attığı ispatın özel ve genel görünümünü bir arada dikkate alan bir yapıyla oluşturulmuş olduğu sonucuna varılabilir.

Harel ve Sowder (1998) ve Sowder ve Harel (1998), oluşturdukları kavramsal çatının hem üç yıllık boylamsal çalışmanın ve farklı öğretim deneyimlerinin (Harel ve Sowder, 1998; Harel, 2001; Sowder ve Harel, 2003) hem de tarihsel, felsefi ve kültürel analizlerin (Hanna ve Jahnke, 1996; Harel, 1999; Kleiner, 1991) bir sonucu olarak ortaya çıktığını söylemişlerdir. Harel ve Sowder (2007) ispat şeması kavramını diğer taksonomilerle de (Bell, 1976; Balacheff, 1988) ilişkilendirdiklerini ve tanım ve taksonomilerin yetersiz kaldığı yerlerde ispatın rolleri ve fonksiyonları hakkındaki (Balacheff, 1988; Bell, 1976; Hanna, 1990; Hersch, 1993; de Villers, 1999) kaynaklardan da yardım alarak kendi kavramsal çatılarını oluşturduklarını belirtmişlerdir. Harel ve Sowder'a (1998) göre tüm bu kaynakların yardımıyla oluşturulan bu çatının kurucu elemanı ise "ispat şeması" kavramıdır.

Harel ve Sowder (1998) ispat şemaları gruplandırması için *ispatlama*, *ispat* ve *ispat şeması* arasındaki ayrımı belirleyerek ispatın fonksiyonunu bir önermenin doğruluğunun onaylanması olarak ele almışlardır (Reid ve Knipping, 2010). Harel ve Sowder (1998) *ispatlama*'yı "aslını anlama" (ascertaining) ve "ikna etme" (persuading) olarak tanımlanabilecek iki sürece ayırmıştır. "Aslını anlama" bir iddianın doğruluğu hakkında bireyin kendi şüphelerini ortadan kaldırmak olarak tanımlanırken "ikna etme" süreci bir iddianın doğruluğu hakkında diğerlerinin şüphelerini ortadan kaldırmak olarak tanımlanmaktadır. *İspatlama* sadece matematiğe özgü bir eylem değildir. Bireyler gerek günlük hayatta gerekse meslek hayatlarında iddiaları farklı biçimde ispatlama yoluna gidebilirler. Bu anlamda bireylerin ispatlama eylemlerinin niteliklerinin birbirinden farklı olduğu söylenebilir. Buna göre *ispatlama*, *ispat* ve *ispat şeması* terimleri sırasıyla "zihinsel eylem", "anlayış biçimi" ve "düşünme biçimi" terimleri ile ilişkilendirilmektedir (Harel, 2007). "Zihinsel eylem" kavramı ispatlama içerisinde araştırma, anlam çıkarma, yorumlama, varsayımlar üretme, problem çözme, uygulama, tahminde bulunma, sınıflandırma, gibi eylemlere işaret etmektedir. *İspatlama* bir iddia hakkındaki şüpheleri

ortadan kaldırmak için birey tarafından ortaya konan süreç olarak tanımlanmaktadır (Harel ve Sowder, 1998; Harel, 2007; Harel ve Sowder, 2007). Dolayısıyla, anlayış biçimlerinin (aslını anlama ve ikna etme) bizi ispatlama kavramına götürdüğü söylenebilir. Zihinsel eylemlerin nitelikleri ise bir düşünme biçimine işaret eder. Zihinsel eylemin ilişkili olduğu bu düşünme biçimi ise ispat şeması olarak nitelendirilmektedir. Örneğin bir biyologun yaptığı ispatlama deneysel iken bir matematikçinin yaptığı ispatlama çıkarımsaldır. Dolayısıyla deneysel ispatlama ile tümdengelimsel ispatlama ispat şemalarına ilişkin örnekler olarak görülebilmektedir (Harel, 2007). Bu iki süreç beraber ele alındığında, Harel ve Sowder (1998) tarafından ispat şeması “*Bir bireyin ispat şeması o birey için aslını anlama ve ikna etmeyi oluşturan şeyleri içerir*” (s. 241) olarak kavramsallaştırılmıştır.

Harel ve Sowder (2007) daha sonraki çalışmalarında *ispat şeması* kavramını üç farklı tanım temelinde ele alarak daha ayrıntılı bir bakış açısıyla ortaya koymuşlardır. Buna göre *ispat şeması* kavramı üç tanıma dayalıdır. Bunlar, “gerçeklere karşı varsayımlar”, “ispatlama” ve “ikna etmeye karşı aslını anlama” olarak belirlenmiştir. “Gerçeklere karşı varsayımlar”, bir iddianın bir varsayım ya da bir gerçek olarak tasarlanma durumuna göre hareket edildiği durumları içermektedir. Buna göre bireyin kendi doğruluğundan emin olduğu takdirde iddiası varsayım olmaktan çıkarak gerçek halini almaktadır. Dolayısıyla “varsayım” ve “gerçek” tanımları *ispatlama*’nın temelini oluşturmaktadır. *İspatlama* süreci daha önce de bahsedildiği üzere “aslını anlama” ve “ikna etme” olmak üzere iki alt süreci kapsamaktadır. Buradan hareketle *ispat şeması* kavramı daha önce de bahsedilmiş olan “*Bir bireyin ispat şeması o birey için aslını anlama ve ikna etmeyi oluşturan şeyleri içerir*” (Harel ve Sowder, 1998, s. 244) tanımıyla ortaya çıkmaktadır.

Harel ve Sowder (2007) ispat şeması kavramını daha önce de belirtildiği gibi diğer taksonomilerle (Bell, 1976; Balacheff, 1988) ilişkilendirerek kendi kavramsal yapılarını oluşturmuşlardır. Örneğin Bell (1976) çalışmasında öğrencilerin matematiksel genellemelerin gerekçelendirmelerini “deneysel ve tümdengelimsel” olmak üzere ikiye ayırmıştır. Harel ve Sowder (2007) bu gerekçelendirme biçimlerini kendi ispat şeması sınıflandırmalarında sırasıyla deneysel ve tümdengelimsel ispat şemalarıyla ilişkilendirmişlerdir. Yine benzer olarak Balacheff (1988) ispat çeşitleri ve düzeyleri hakkında ayrıntılı bilgiye yer verdiği çalışmasında ispatları pragmatik ve kavramsal ispatlar olarak ele almıştır. Balacheff (1988) pragmatik ispatları ise “saf deneyselcilik” (naive empiricism), “kritik deney” (crucial experiment) ve genel/kapsamlı örnek (generic

example) olmak üzere üç alt başlıkta incelemiştir. Buradaki saf deneyselciğin, bir sonucun doğruluğunu birçok durumu test ederek oluşturmaya, kritik deneyin, belirli örnekler seçerek, genel/kapsamlı örnek ise tüm durumları temsil edebilecek bir örnek seçerek oluşturmaya karşılık geldiğini belirtmiştir. Harel ve Sowder (2007) çalışmasında Balacheff'in (1988) genel örnek isimli ispat biçiminin kendi ispat şeması sınıflandırmasında tümdengelimsel ispat şemasına; daha özel olarak ise dönüşümsel ispat şemasına karşılık geldiğini belirtmiştir. Balacheff (1988) kavramsal ispatları ise “düşünce deneyi (thought experiment) ve “açıklamalar üzerinde hesaplamalar” (calculations on statements) olmak üzere ikiye ayırmıştır. Harel ve Sowder (2007) çalışmasında açıklamalar üzerine hesaplamaları, gerekçelendirmelerin sadece sembollerin dönüşümüne dayalı olduğu sembolik hesaplama (symbolic calculation) olarak ele almıştır. Harel ve Sowder (2007) Balacheff'in (1988) sınıflandırmasında bulunduğunu söylediği sembolik hesaplamanın kendi taksonomisindeki ima yolu sembolik ispat şeması (referential symbolic) ile uymakta olduğunu belirtmiştir. Balacheff (2002) daha sonra öğrencilerin bir ispatı reddetme durumları içerisindeki ispata ilişkin düzeyleri araştırmış ve beş düzeyde sınıflandırma yaparak çalışmasını (Balacheff, 1988) revize etmiştir. Buna göre ispatlar saf deneyselcilik (naive empiricism), kritik deney (crucial experiment), genel/kapsamlı örnek (generic example), düşünce deneyi (thought experiment) ve nedenler ile ispatlar (proof by reasons) sınıflandırmalarına ayrılmıştır.

Harel ve Sowder (2007) yararlandığını söylediği tanım ya da taksonomilerin (Bell, 1976; Balacheff, 1988) ispatın matematikteki birçok fonksiyonu hakkında yeterli açıklığa sahip olmadığını ve bu fonksiyonların matematik içerisindeki önemine ve öğretimsel uygulamalarına bağlı olarak açıklanması gerekli olduğunu vurgulamışlardır ve ispat şeması sınıflandırmaları için anılan çalışmalarla beraber ispatın rolleri ve fonksiyonları ile ilgili farklı çalışmalardan da (Hanna, 1990; Balacheff, 1988; Bell, 1976; Hersch, 1993; de Villers, 1999) yardım aldıklarını belirtmişlerdir. Harel ve Sowder (2007), de Villers'in (1999) buradaki çalışmalar üzerine araştırmasını kurarak ispatın rollerini belirlediğini belirtmiştir. Harel ve Sowder (2007) çalışmasında bu rolleri ispat şemalarıyla ilişkilendirdiklerini belirtmişlerdir. Aşağıda ispatın rolleri ve fonksiyonları ile ilgili çalışmalardan bazıları ve ispat şeması ile ilişkileri açıklanmaktadır:

Hanna (1990) çalışmasında ispatın rollerini araştırmak için ispata ilişkin üç anlayış biçimini ortaya atmıştır: “*formel ispat*”, “*kabul edilebilir ispat*” ve “*ispata öğretimi*”. Hanna (1990, s. 6) formel ispatı “*formel mantıktaki (ya da meta mantıktaki) gerçek*

matematikselse uygulamaya sadece yaklaşılabileceği ideal bir teorik kavram”; kabul edilebilir ispatı “*nitelikli matematikçiler için kabul edilebilen şeyleri tanımlayan kuralcı (normative) bir kavram*” olarak tanımlamıştır. Hanna’ya (1990, s. 6) göre ispatın öğretilmesi ise “*İspatın matematik eğitiminde öğrenciye iletmeye değer fikirlerin açıklığa kavuşturulması görevini gören bir etkinlik*” olarak açıklanmıştır. Burada bahsedilen ispatın üç anlamının, Harel ve Sowder’in (1998) ispat şeması kavramını açıklarken kendini ve diğerlerini ikna etmede kullanılan süreçleri kapsadığı düşünülmektedir. Buna göre formel ispatlar ispatın psikolojik yönünü saf dışı bırakmaktadır. Kabul edilebilir ispat ise bir sonucun doğruluğunu sadece göstermekten ziyade temel matematiksel ilişkileri ortaya koymaktadır. Bu anlamda ispatın öğretilmesi ispatın rolünün kesin ispatlara aşırı bağımlılık olmadan öğretilmesine vurgu yapmaktadır. İspatın rolü iletişim yoluyla ele alındığında ve bu rol yeni bir sonucun matematikçiler tarafından kabulünde önemli bir yeri olan sosyal süreç olarak tanındığında, eğitimciler ispat kavramına “ikna edici bir argüman” olarak yaklaşmaktadırlar. Buradaki kabul edilebilir ispat kavramının, Harel ve Sowder’in (1998) ve Sowder ve Harel’in (1998) sınıflandırmasındaki analitik ispat şemalarının bazı özelliklerinin altını çizdiği söylenebilir. Nitekim Harel ve Sowder (2007) çalışmasında kendi çatılarını oluştururken Hanna’nın (1990) ispatın rolünü içeren bu çalışmasından yararlandıklarını belirtmişlerdir.

Hersch (1993) ispatın ikna etme ve açıklama rollerini ortaya koymaya çalıştığı çalışmasında; ispatın üç anlam içerdiğini vurgulamıştır. Buna göre ispat ilk olarak “*Deneme, düzeltme, ve gidişatın belirlenmesi*” (Hersch, 1993, s.391) anlamına gelmektedir. Hersch’e göre (1993) ikinci anlam genel uygulamaya vurgu yapmaktadır. Yani “*İspat nitelikli yargılayıcıları ikna eden bir argümandır*” (Hersch, 1993, s.391). Son anlam ise matematiksel mantığa vurgu yapmaktadır: Bu anlam “*Analize dayanan kurallara göre gerçekleştirilmiş formel cümlelerin dönüşümlerinin dizisi*” (Hersch, 1993, s.391) olarak tanımlanmıştır. Hersch (1993) biri günlük dilde diğer ikisi matematiksel dildeki bu üç anlam arasındaki ilişkileri aramıştır. Buradaki üçüncü anlam, ikinci anlamın günlük anlamına dayanan fakat daha kesin olan bir tanımdır. Hersch’in (1993) çalışmasındaki ilk anlamın Harel ve Sowder’in (1998) ve Sowder ve Harel’in (1998) dışsal ve deneysel ispat şemalarının belirli özelliklerini yansıttığı söylenebilir. Diğer iki anlam ise benzer şekilde analitik ispat şemalarının göstergelerini taşıyor olabilir. Nitekim Harel ve Sowder (2007) ispat şeması çatılarını oluştururlarken Hersch’in (1993) ispatın rolleri ve fonksiyonları hakkındaki düşüncelerinden yararlandıklarını belirtmişlerdir.

De Villers'in (1999) belirlediği ispatın "doğrulama" rolü önceden belirlenmiş mantık ve öncüller grubuna göre oluşturulan varsayımların doğruluğunu göstermekte olup aksiyomatik ispat şemasına; "açıklama" rolü varsayımın neden doğru olduğunu arama arayışını göstermekte olup nedensel ispat şemasına; "keşif" rolü ispatlama süreci boyunca yeni sonuçların keşfedilme durumlarını göstermekte olup aksiyomatikleştiren ispat şemasına işaret etmektedir. "İletişim" rolü ise ispatlamayı açıklayan aslını anlama ve ikna etme olmak üzere iki alt boyut bağlamında ortaya çıkmaktadır (Harel ve Sowder, 2007) ve bu alt boyutların birleşimi ispat şemasını tanımlamaktadır.

Buraya kadar olan açıklamalarda, Harel ve Sowder'in (2007) çalışmasında ispat şeması sınıflandırması için yararlandıklarını belirttikleri çalışmalar açıklanmaya çalışılmıştır. Harel ve Sowder (2007) bundan sonraki açıklamalarda ise, öğrencilerin ispat yapma davranışlarını ispat şeması özelinde değerlendirmeyen, fakat bu davranışları ve bu davranışlara ilişkin algı ve görüşlere ilişkin çerçeveler belirleyen çalışmalara değinmiştir. Bu çalışmalar araştırmacı tarafından Harel ve Sowder'in (1998) ve Sowder ve Harel'in (1998) sınıflandırmasıyla ilişkilendirilmiştir.

Daha önceki bölümlerde ayrıntıları ile anlatılan Raman'ın (2002) çalışması Harel ve Sowder'in (1998) ve Sowder ve Harel'in (1998) ispat şeması sınıflandırması anlayışı için yararlı görülmektedir. Raman (2001; 2002) çalışmalarında ispat şeması kavramına yardımcı olacak akıl yürütme süreçlerine odaklanarak ispatın "anlama" fonksiyonu üzerinde durmuştur ve ispatı bir "süreç" olarak ortaya koyarak "ispatın özel görünümü"ne; ispatı bir obje olarak ele alarak ispat metinleri ve ikna edici argümanlarla "ispatın genel görünümü" ne işaret etmiştir (Reid ve Knipping, 2010). Bu çalışmalarda öğretmen ve öğrencilerin anlayışları arası farklılıkların ispatın üretimi ve değerlendirmesi için bir çatı oluşturduğu belirtilmiştir. İspatın özel yönünün anlamaya neden olan ve anlamayı ortaya çıkaran argümanlar içerirken genel yönünün ise belirli bir matematiksel topluluk için gerekli kesinlik duygusu olduğunu belirtilmiştir.

Raman (2001; 2002) ve Harel ve Sowder'in (1998) çalışmaları beraber değerlendirildiğinde, araştırmacıların ispatın iki görünümüne odaklandığı söylenebilir. Bu anlamda bireyin kendini ikna etmede yani aslını anlamada kullandıkları argümanların ispatın özel görünümüne, bireyin başkalarını ikna etmede kullandıkları argümanların ispatın genel görünümüne işaret ettiği ve bu iki görünümün beraber ele alındığında birey için ispat şemalarını oluşturduğu söylenebilir.

Tall (1998, akt. Uğurel, 2010) ispat yapma yaklaşımlarını belirli düzeylerde sınıflandırmıştır. Buna göre ispat yapma yaklaşımları uygulamalı (enactive), görsel (visual), cebirsel (algebraic) ve formel (formal) olmak üzere dört boyutta değerlendirilmiştir. Buna göre en alt düzeydeki uygulamalı ispat; bir ifadenin doğruluğunun gösterilmesi için fiziksel eylemi içeren ispattır. İkinci düzeydeki ispat olan görsel ispat, uygulamalı ispatı da bünyesinde barındıran ve argümanların görsel öğelerle doğrulanmasını içeren ispattır (Tall, 1998, akt. Uğurel, 2010). Bu ispat biçiminin Sowder ve Harel'in (1998) deneysel algısal ispat biçimiyle ilişkili olduğu söylenebilir. Üçüncü ispat ise cebirsel gösterimler ve manipülasyonlarla yapılan cebirsel ispattır (Tall, 1998, akt. Uğurel, 2010). Bu ispat düzeyi Sowder ve Harel'in (1998) dışsal sembolik ispat şeması ile ilişkilendirilebilir. En son düzeydeki ispat ise klasik matematiksel ispat olarak nitelendirilebilecek formel ispattır (Tall, 1998, akt. Uğurel, 2010). Bu ispat düzeyinin ise Sowder ve Harel'in (1998) analitik ispat şemasıyla ilişkilendirilmesi mümkündür.

Miyazaki de (2000) lise matematiği için ispat düzeylerini dört sınıflandırmaya ayırmıştır. Buna göre öğrenciler tümdengelimsel akıl yürütme ile fonksiyonel dil kullandıklarında İspat A, tümdengelimsel akıl yürütme ile diğer dilleri, objeleri veya çizimleri kullandıklarında İspat B, tümevarımsal akıl yürütme ile birlikte diğer dilleri, objeleri veya çizimleri kullandıklarında İspat C, tümevarımsal akıl yürütme ile birlikte fonksiyonel dil kullandıklarında ise İspat D düzeyinde ispat yapmaktadırlar. İspat A'nın Sowder ve Harel'in analitik ispat şeması sınıflandırması ile ilişkili olduğu söylenebilir.

Van Dormolen (1977) öğrencilere üç ispat problemi vererek bunlara ilişkin cevaplarını üç kategoride ortaya koyan bir çerçeve hazırlamıştır. Buna göre üç problem üç kategoride; her bir probleme ilişkin verilen çözüm yolları da ayrı üç kategoride kodlanmıştır. Öğrencilerin ispatları bu kategorilere ilişkin farklı düzeylerde (en temel olarak üç düzeyde) sınıflandırılmıştır. Van Dormolen bu sınıflandırmaya ilişkin açıklamalar yapmıştır. Örneğin en alt sınıflandırmadaki öğrenciler küçük bir alanda mantıksal bir sıralama yapabilmektedirler fakat bu alanın dışındaki ilişkili diğer durumları fark edemezler ve bu alanla ilişkilendiremezler. Bir üst düzey sınıflandırmada ise bu alan mantıksaldır ve alt düzeye göre daha geniştir. Bu boyutta hala yerel bir organize etme durumu vardır (local organization) fakat farklı alanlarla daha iyi bir bağ kurulmuştur. Bu durumda öğrenci üzerinde çalıştığı özel nesneden (object) bağımsız değildir ve araştırılan nesnelere de kendi başlarına önemli değillerdir. Bu nesnelere benzer nesnelere koleksiyonunun temsilleri niteliğindedirler. Bir üst düzeyde ise öğrenciler ne özel objelerle

ne de benzer objelerin koleksiyonuyla sınırlıdır. Bu sınıflandırmadaki öğrencilerin akıl yürütmeleri herhangi bir mantıksal argümandaki gözlemlenmesi gereken kuralları, argümanın öneminden bağımsız olarak göz önüne alabilecek niteliktedir.

Vinner (1983) (akt. Heinze ve Reiss, 2003), çalışmasında öğrencilerin ispatlarını basit hesaplamalar, hesaplama yoluyla genel bir durumun ispatı ve genel bir duruma ve onun ispatına ilişkin referans olmak üzere üç sınıflamaya ayrılmıştır. Burada basit hesaplamalar ve hesaplama yoluyla genel bir durumun ispatı Harel ve Sowder'ın (1998) ve Sowder ve Harel'ın (1998) deneysel ispat şeması ile, genel bir duruma ve onun ispatına ilişkin referans ise analitik ispat şeması ile ilişkilendirilebilir.

Senk (1985), Malone ve diğerlerinin (1980) çalışmasını temel alarak, öğrencilerin ispatlarını beş düzeyde değerlendirmiştir. Sıfırıncı düzeyde öğrenciler kayda değer açıklamalar yapmamaktadırlar. En azından bir adet geçerli çıkarım yazan ve nedenini açıklayan öğrenciler birinci düzeyde kabul edilmiştir. İkinci düzeyde öğrenciler akıl yürütme zinciri kullanmaktadırlar fakat basamakları hatalı akıl yürütmeye dayandığı için ispatın en azından yarısını tamamlamaktadırlar. Üçüncü düzeyde öğrenciler tüm basamakların mantık sıralamasına sahip olduğu ispatlar yaparlar fakat teoremlerin isimleri, dil ya da gösterimlerde hatalar yaparlar. En son düzey olan dördüncü düzeyde ise öğrenciler gösterimlerde en fazla bir adet hata yaparak geçerli bir ispat yaparlar.

Martin ve Harel'ın (1989) öğretmen adaylarının ispat yapılarını inceledikleri çalışmalarında öğretmen adaylarının ispata ilişkin görüşlerini ve gerekçelendirme biçimlerini ortaya koymuşlardır. Çalışmada öğretmen adaylarına geçerli olan ve olmayan argümanlar verilmiş; öğretmen adaylarından daha önce karşılaştıkları veya karşılaşmadıkları durumlar ve ifadeler içeren tümevarımsal ve dedüktif doğrulamaların matematiksel doğruluğu hakkında yargıya varmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının tepkilerine göre gerekçelendirme biçimleri tümevarımsal doğrulama biçimi ve dedüktif doğrulama biçimi olarak çerçevelenmiştir. Çalışmada büyük sayılarla veya örneklerle doğrulama gibi durumlar sağlayan örneklerin tümevarımsal gerekçelendirme biçimine işaret ettiği, dedüktif argümanları doğru olarak değerlendirmenin ise dedüktif gerekçelendirme biçimine işaret ettiği belirtilmiştir. Öğretmen adayları yargılamaları yaparken, argümanların içeriğinden çok biçimi ile karar vermelerine göre de ayrılmıştır. Burada öğretmen adaylarının gerekçelendirme biçimlerinin Harel ve Sowder'ın (1998) ve Sowder ve Harel'ın (1998) ispat şeması sınıflandırmasının belirli özelliklerine işaret ettiği söylenebilir. Örneğin, öğretmen adaylarının tümevarımsal gerekçelendirmeleri Sowder ve

Harel'in (1998) deneysel temel örnekler ispat şeması ile ilişkilendirilebilir. Benzer olarak dedüktif gerekçelendirmeleri Harel ve Sowder (1998) ile Sowder ve Harel'in (1998) analitik ispat şeması sınıflandırmasına ilişkin özellikler taşıyor olabilir. Bunun yanında öğretmen adaylarının argümanların içeriğinden çok biçimi ile karar vermelerine ilişkin yargıları ise Harel ve Sowder (1998) ile Sowder ve Harel'in (1998) deneysel algısal ispat şemasına ilişkin özellikler gösterdiğini işaret ediyor olabilir.

Waring (2000) öğrencilerin ispat kavramlarındaki gelişimi, ispatın doğasının anlayışı ve ispatı yapılandırılmalarındaki yeterliklerini tanımlayan bir çatı oluşturmuştur. Waring (2000) geliştirmiş olduğu çatıda öğrencilerin ispatla ilgili bu anlayışlarını ve yeterliklerini altı düzeyde incelemiştir. Buna göre sıfıncı ispat düzeyinde öğrenciler ispat kavramına bir değer yüklememektedirler. Birinci ispat düzeyindeki öğrencileri daha önce bahsedilen Balacheff'in (1988) saf deneyselciliğini kullanırlar. İspatın varlığının farkındadırlar fakat genel doğasını takdir etmezler. İkinci ispat düzeyi bu iki düzey arasındaki geçişi simgelemektedir. Bazı öğrenciler bu düzeyde birinci ispat düzeyindeki belirli durumları daha yüksek sayıdaki geniş belirli durumlara yerleştirirler. Bu durumda daha büyük sayılar ya da tesadüfi seçilmiş sayılar kullanırlar; bazı öğrenciler ise kapsamlı örnek (Balacheff, 1988) ile bir durumu temsil ederler. Üçüncü düzeyde öğrenciler ispatın genelleşmiş doğasını takdir ederler ve kısa bir dedüktif akıl yürütme zincirini takip ederler, fakat ispatı yapılandıramazlar Dördüncü ispat düzeyinde öğrenciler informel olarak ifade edilebilecek sınırlı bağlamlarda ispat yapabilirler. Beşinci düzeyde ise öğrenciler ispatın rolü ve doğası hakkında derin anlayışa sahip olarak çeşitli bağlamlarda ispat yapılandırır ve formel dilin bir düzeyini kullanma yetisine sahiptirler. Burada açıklanan sıfıncı ispat düzeyinin Harel ve Sowder'in (1998) ve Sowder ve Harel'in (1998) dışsal ispat şemasının; birinci ve ikinci ispat düzeylerinin deneysel ispat şemasının; dördüncü ve beşinci ispat düzeylerinin ise analitik ispat şemasının bazı özelliklerini taşıdığı söylenebilir.

Knuth ve diğerleri (2009) ortaokul öğrencilerinin ürettikleri matematiksel gerekçelendirmeleri incelediği çalışmalarında, Waring'in (2000) çatısını temel alarak öğrencilerin düşüncelerini dört düzeyde (ispat üretimi düzeyleri) sınıflandırmışlardır. Buna göre öğrenciler sıfıncı düzeyde bir önerme ya da durumun doğruluğunu göstermek için matematiksel gerekçelendirmenin sağlanması gerektiğinin farkında değildirler. Waring (2000) bu düzeydeki öğrencilerin Harel ve Sowder'in (1998) çalışmasındaki "öğretmen, aile ya da bir kitaba bağlı kalarak bir önermenin doğruluğunu onaylama" durumunda olduklarını belirtmiştir. Bu düzeyin Harel ve Sowder (1998) ve Sowder ve

Harel'in (1998) dışsal otoriter ispat şemasına ilişkin özellikler gösterdiği söylenebilir. Birinci ispat üretimi düzeyinde öğrenciler matematiksel gerekçelendirmelerin sağlanması gerektiğinin farkındadırlar fakat genellemeleri genel değildir ve çoğu durumda deneysel gerekçelendirmeler yaparlar. Knuth ve diğerleri (2009) bu düzeye ilişkin açıklamalarında Balacheff'in (1987) genel/kapsamlı örnek düzeyine benzer açıklamalar yapmışlardır. İkinci ispat üretim düzeyinde öğrenciler genel bir argümana duyulan ihtiyacın farkında olmakla beraber kendi başlarına bu tür argümanlar üretmeye çalışırlar, deneysel gerekçelendirmelerin ispat için yeterli olmadığını farkındadırlar fakat kabul edilebilir ispatlar yapılandıramazlar. Üçüncü ve son düzeydeki öğrenciler ise genel bir argümana duyulan ihtiyacın farkında olarak bu argümanları kendi başlarına kabul edilebilir düzeyde üretebilirler. Bu düzeydeki öğrencilerin ürettikleri ispatların Harel ve Sowder (1998) ve Sowder ve Harel'in (1998) analitik ispat şeması düzeyinde olduğu düşünülebilir.

Yukarıda açıklanan çalışmalar öğrencilerin ispata ilişkin anlayışlarını, akıl yürütme becerilerini ya da ispat üretme yeterliklerini belirli düzeylere göre çerçeveleyerek bir çatı oluşturmuşlardır. Bu çalışmalardan bazıları (Hanna, 1990; Balacheff, 1988; Bell, 1976; Hersch, 1993; de Villers, 1999) sadece ispatın rolleri ve fonksiyonları hakkında bir anlayış yaratmışlardır. Nitekim Harel (2007) kendi çatılarını oluşturmada bu çalışmalardan yararlandıklarını belirtmiştir. Bu çalışmalardan bazıları (Bell, 1976; Balacheff, 1988) ise öğrencilerin gerekçelendirmelerini Harel ve Sowder'in (1998) ve Sowder ve Harel'in (1998) çatısına benzer bir yaklaşımla çerçevelemişlerdir. Harel (2007) kendi taksonomilerini oluşturmada bu çalışmalardan yararlandıklarını belirtmiştir. Fakat Bell'in (1976) çalışmasında öğrencilerin gerekçelendirmeleri sadece deneysel ve tümdengelimsel olmak üzere ikiye ayrılmıştır. Balacheff (1988) ise daha geniş bir sınıflandırma kullanmıştır. Fakat taksonomisinin öğrencilerin matematiksel durumlara nasıl ikna oldukları hakkındaki Harel ve Sowder'in (1998) çalışması kadar geniş olmadığı söylenebilir. Haverhals (2011) öğrencilerin ispata ilişkin ikna durumlarını incelediği çalışmasında Balacheff'in (1988) sınıflandırması yerine Harel ve Sowder'in (1998) çatısını kullanma sebebini aynı şekilde açıklamaktadır.

Harel'in (2007) çalışmasında bahsetmediği ve bu bölümde araştırmacı tarafından Harel ve Sowder (1998) ve Sowder ve Harel'in (1998)'in ispat şeması sınıflandırmasıyla ilişkilendirilmiş olan diğer çalışmalar (Knuth ve diğerleri, 2009; Martin ve Harel, 1989; Miyazaki, 2000; Senk, 1985; Tall, 1998; Van Dormolen, 1977; Vinner, 1983; Waring, 2000) ise öğrencilerin ya da öğretmen adaylarının ürettikleri gerekçelendirmeleri ya da

ispat yapılarını incelemişlerdir ve bu yapılara ilişkin düzey ya da çerçeveler belirlemişlerdir. Fakat bu çalışmaların öğrencilerin ispata ilişkin kendilerini ve diğerlerini ikna etme durumlarını Harel ve Sowder (1998) ve Sowder ve Harel (1998) kadar ayrıntılı biçimde ele almadıkları düşünülmüştür. Bu çalışmaların bir bölümünde (Knuth ve diğerleri, 2009; Martin ve Harel, 1989; Miyazaki, 2000; Tall, 1998; Vinner, 1983; Waring, 2000) ispata ilişkin sınıflandırmalar, yukarıda araştırmacı tarafından Harel ve Sowder'ın (1998) ve Sowder ve Harel'ın (1998) ispat şeması sınıflandırmasıyla ilişkilendirilerek açıklanmıştır. Fakat bu sınıflandırmaların sadece bir bölümünün bu çalışmada kullanılan ispat şeması özellikleri ile ilişki içinde olduğu görülmüştür. Dolayısıyla bu çalışmada kullanılan sınıflamanın anılan çalışmalarda kullanılan sınıflamalardan daha geniş ve ayrıntılı olduğu söylenebilir. Nitekim bu çatı günümüzde bir çok çalışmada (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; CadwalladerOlsker, 2007; Ellis, 2007; Flores, 2006; Grigoriadou, 2012; Güner, 2012; Harel ve Rabin, 2010; Harel, 2001; Haverhals, 2011; Heinze ve Reiss, 2003; Housman ve Porter, 2003; İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu, Baki, ve İskenderoğlu, 2010; Koichu, 2009; Liu ve Manouchehri, 2013; Martin ve diğerleri, 2005; Oflaz, Bulut ve Akcakin, 2016; Ören, 2007; Plaxco, 2011; Recio ve Godino, 2001; Sarı, Altun ve Aşkar, 2007; Soto, 2010; Soucy Mccrone ve Martin, 2004; Sowder ve Harel, 2003; Stylinou, Chae ve Blanton, 2006; Şengül ve Güner, 2013; Uygan, Tanışlı, ve Köse, 2014; Weber, 2010) ispat şeması sınıflandırmalarında temel alınarak kullanılmıştır. Dolayısıyla bu çalışmada öğrencilerin ispata ilişkin kendilerini ve başkalarını ikna etme durumları Sowder ve Harel'ın (1998) ayrıntılı çatısı kullanılarak test edilmiştir.

2.1.3.1. İspat şemalarının sınıflandırılması.

Sowder ve Harel (1998) ispat şemalarını dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç ana grupta sınıflandırmışlardır. Aşağıda bu ana gruplara ve onların alt ispat şeması gruplarına ilişkin açıklamalar yer almaktadır:

2.1.3.1.1. Dışsal ispat şemaları (*Externally based proof schemes*).

Bu ispat şemalarını sergileyen öğrencilerin aslını anlama ve diğerlerini ikna etme durumları dışsal kaynaklıdır. Bu kaynaklar öğretmen ya da bir kitaba dayanan bir otorite (otoriter ispat şeması), bir argümanın biçimi ya da görünümü (alışkanlık edinilmiş ispat şeması) veya sembollerin anlamsız manipülasyonu (sembolik ispat şeması) olarak ortaya çıkabilir (Harel, 2014; Sowder ve Harel, 1998).

2.1.3.1.1.1. Otoriter ispat şeması (*The authoritarian proof scheme*).

Bu ispat şemasına ilişkin tepkiler gösteren öğrenciler bir sonucu gerekçelendirirken sadece kitaba, öğretmenlerinin ifadelerine veya sınıf arkadaşlarının ifadelerine başvururlar. Öğrenciler kendilerini ve başkalarını ikna ederken sadece bu kaynaklardan yardım aldıklarından problemlerinin kaynağı ortaya çıkar. Bu tür öğrenilmiş çaresizlik durumları “hatırlamıyorum”, “kitaba bakmak gerekir” gibi ifadelerle ortaya çıkabilir (Sowder ve Harel, 1998).

2.1.3.1.1.2. Alışkanlık edinilmiş ispat şeması (*The ritual proof scheme*).

Öğrenciler argümanın doğruluğunu araştırırken argümanın doğruluğu yerine argümanın görüntüsünden, ispatın alışlagelen formatlarından etkilenecek karar verdiklerinde (Martin ve Harel, 1989) alışkanlık edinilmiş ispat şemasının özelliklerini sergiledikleri söylenebilir. Örneğin geleneksel öğretim programına alışık olan öğrenciler ispatları yapılandırırken sadece tümevarımsal akıl yürütme kullanarak ve tümevarımsal akıl yürütmelerini sadece okullarda öğrendikleri gibi tümevarım basamaklarını uyguladılar fakat $n=k$ için $P(k)$ ile $n=k+1$ için $P(k+1)$ arasındaki mantıksal çıkarımı yapmadan ilerleyerek yapılandıkları alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin tepkiler gösterebilirler. Sowder ve Harel’a (1998) göre dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler veren öğrenciler sağlıklı argümanlar oluşturduklarında bile argümanlarının yeteri kadar matematiksel notasyon veya hesaplama içermeyecek biçimde yapılandırıldığından dolayı kendi önerdikleri ispatların ispat olmayabileceğinden şüphe duyabilirler.

2.1.3.1.1.3 Sembolik ispat şeması (*The symbolic proof scheme*).

Öğrenciler sembollerini anlamlardan uzak ve durum içerisindeki nicelikleriyle ilişkilendirmeden ele aldıklarında sembolik ispat şemasını ortaya koyan özellikler göstermiş olurlar. Bu durumda öğrencilerin akıl yürütmelerinin dışsal kaynaklı olduğu söylenebilir (Sowder ve Harel, 1998). Sembolik akıl yürütmenin iyi yönü ise özellikle cebirdeki sembollerin iyi bilinen gücüdür. Örneğin dört işlem problemlerindeki doğrusal denklemlerde birey, problem bağlamı açısından anlam sürecindeki her bir basamağı ilişkilendirmek zorunda kalmayabilir. Daha sonra da açıklanacak olan dönüşümsel ispat şemasına ilişkin özellikler sergileyen bir birey birçok durumda doğru sembolik akıl yürütmeyi ayrıntılandırabilir (Sowder ve Harel, 1998).

2.1.3.1.2. Deneysel ispat şemaları (Empirical Proof Schemes).

Bu ispat şemalarına ilişkin özellikler sergileyen öğrenciler varsayımları fiziksel kanıtlara veya duyuşal deneyimlere dayanarak geçerli kılarlar veya reddederler (Harel ve Sowder, 1998). Deneysel ispat şemaları algısal ispat şemaları ve temel örnekler ispat şemaları olarak ikiye ayrılmaktadır (Sowder ve Harel, 1998).

2.1.3.1.2.1. Algısal ispat şeması (The perceptual proof scheme).

Bu ispat şemasına ilişkin özellikler sergileyen öğrenciler bir durumun doğru ya da yanlış olduğunu hisleriyle sezinlerler fakat buna ilişkin güçlü bir kanıt bulamazlar (Mejia-Ramos ve Tall, 2005, akt: İskenderoğlu, 2010). Bunun yanında öğrenciler başkalarını ikna ederken çizimlere başvururlar. Özellikle geometri derslerinde öğrenciler bazen tek bir çizimle bazen de birçok çizimle sonuca ulaşmaya çalışabilirler (Sowder ve Harel, 1998). Fakat bu öğrencilerin bunu yaparken dönüştürme yapabilme veya dönüşümlerin sonuçlarını önceden görme becerilerinin olmadığı söylenebilir (Harel ve Sowder, 1998).

2.1.3.1.2.2. Temel örnekler ispat şeması (The examples-based proof scheme).

Öğrenciler bir varsayımı değerlendirirken kendilerini ya da başkalarını bir ya da birden fazla örnekle ikna etme yoluna gidiyorlarsa temel örnekler ispat şemalarına ilişkin özellikler sergiledikleri söylenebilir. Bununla birlikte öğrencilerin matematikte varsayımların deneyimsel doğasının örnek temelli olduğunun farkında olmaları önemlidir. Bunun yanında öğrenciler kendi becerilerini örneklerle sunulan gerekçelendirmelerden daha iyi ve katkı sağlayıcı düzeye getirmek durumundadırlar (Sowder ve Harel, 1998).

2.1.3.1.3. Analitik ispat şemaları (Analytical Proof Schemes).

Bu ispat şemalarına ilişkin özellikler sergileyen öğrenciler varsayımları mantıksal çıkarım yoluyla geçerli kılarlar ve ispatlanmadan kabul edilen durumlardan çıkartılan belirli mantıksal kurallarla oluşturulan önermeler sırasını içeren matematiksel gösterim yöntemini uygulamaktan öteye geçerler (Harel ve Sowder, 1998). Analitik ispat şemaları dönüşümsel ispat şemaları ve aksiyomatik ispat şemaları olmak üzere iki alt şemaya ayrılmaktadır (Sowder ve Harel, 1998):

2.1.3.1.3.1. Dönüşümsel ispat şeması (The transformational proof scheme).

Bu ispat şeması özellikleri sergileyen öğrencilerin gerekçelendirmeleri durumların genel yönleriyle ilişkilidir ve akıl yürütmeleri varsayımlarının genel bir analitik çatıya yerleşmesine yöneliktir. Bu ispat şemasına ilişkin dönüşümsel gözlemler, hedef yönelimli

işlemleri ve bu işlemlerin sonuçlarının beklentilerini içerir. Bu işlemler belirli ilişkilerin değişmeden bırakılması amacıyla yürütülürken, bir değişim ortaya çıktığında gözlemci bunun olabilecek sonuçlarını önceden görerek değişimi dengeleyecek işlemleri uygular (Sowder ve Harel, 1998). Örneğin, bu ispat şemalarındaki genel yapı sayma stratejileri ile örüntü bulmadan ziyade akıl yürütmeyi içerir. Burada bahsedilen “dönüşüm”, bir örüntünün arkasındaki görülmesi kolay olmayan yapıyı görebilmektir. Öğrencilerin bu anlamda kullandıkları dönüşümler ise matematiksel içerikleri algılama veya savunma birimleri tarafından sınırlanabilir. Buradan dönüşümsel ispat şemasının sınırlayıcı bir analitik ispat şeması gibi görüldüğü söylenebilir (İskenderoğlu, 2016). Başka deyişle, dönüşümsel ispat şemaları aksiyomatik ispat şemaları için gerekli bir alt yapı olarak görülebilir (Sowder ve Harel, 1998).

2.1.3.1.3.2. Aksiyomatik ispat şeması (*The axiomatic proof scheme*).

Matematikteki bilgi tabanlarında, sonradan gelen sonuçlar öncekilerin mantıksal çıkarımı şeklinde düzenlenmiştir. Dikkatli bir düzenleme ancak tanımsız terimler, varsayımlar, teoremler ve tanımlar ile oluşturulmaktadır (Sowder ve Harel, 1998). Bu ispat şemasına ilişkin özellikler sergileyen öğrenciler bir matematiksel gerekçelendirmenin başlama noktasının tanımsız terim ve aksiyomlar olduğunun farkındadırlar ve böyle bir sistemde rahat biçimde çalışabilme yetisine sahiptirler (Harel ve Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998).

Lee (1999), Harel ve Sowder’ın (1998) sınıflandırmasına dayanarak ispat şemalarının tanımlarını bir tabloda özetlemiştir: Tablo 2.1 Lee’den (1999, s. 33) uyarlanan ispat şeması sınıflandırmasını göstermektedir:

Tablo 2.1.

Harel ve Sowder'in ispat şemalarının özeti (Lee, 1999, s. 33)

İspat şeması öğeleri	Özellikler ve Bireylerin inançları	Gerçekleşme yöntemleri
	Dışsal İspat Şemaları	
Otoriter İspat Şeması	-İspatın neden doğru olduğu hakkında gerekçelendirme yapamama -İspatın doğruluğunun bireyin kendisi tarafından belirlenememesi	-Teoremleri ezberleme -Formülleri uygulama
Alışkanlık Edinilmiş İspat Şeması	-Yüzeysel argümanlar oluşturma -İspatın argümanları arasında sınırlı bağlantı kurma	-Benzer ispat süreçleri arama -Diğer ispat sürecini taklit etme
Sembolik İspat Şeması	-Sembollerin anlamını anlama - Anlamsız argümanlar oluşturma -İspatın sembollerin içinde olduğuna inanma -Matematiksel sembolleri manipüle ederek ispat yapma	-Matematiksel ifadeleri semboller kullanarak yazma -İyi bilinen sembolik algoritmalar kullanma -İspatın ilk ve devam eden basamaklarında sembolik manipülasyonlar yapma
	Deneyisel İspat Şemaları	
Algısal İspat Şeması	-Hipotezler ile ispat basamaklarını çizimler ile birleştirme fakat mantıksal argümanları göz ardı etme -İspatın doğruluğunu çizimlerle belirleme	-Arkadaşlarını çizimlerle ikna etme -Bir ya da daha fazla çizimle sonuca varma
Temel Örnekler İspat Şeması	-Mantıksal argümanlara sahip olmama -Hızlıca sonuç çıkarma -İspatın doğruluğunu örneklerle belirleme	-Diğerlerini örnekler göstererek ikna etme -İspatı örnekler göstererek yapılandırma
	Analitik İspat Şemaları	
Dönüşümsel İspat Şeması	-Tutarlı basamaklar yapılandırma -İspatın önceki ifadelerine mantıksal kurallar uygulama	-Ana meseleyi belirleme -Diğerlerini mantıksal akıl yürütme ile ikna etme
Aksiyomatik İspat Şeması	-Tanımsız terimlerle sınırlı küme oluşturma -Lineer yöntemler kullanarak ispat yapma -Geleneksel ispat süreçlerini takip etme	-Aksiyomatik sistem geliştirme -Bir teoremin sonucunun aksiyomatik sistemden nasıl çıktığını ispatlama

2.1.3.2. İspat şemalarının özellikleri.

Harel ve Sowder (1998) ve Sowder ve Harel (1998) çalışmalarında, “*ispat şeması*” gruplandırmasının her bir kategorisinin öğrencilerin ispatlama süreçlerindeki eylemlerinin gözlenmesiyle ortaya çıkarıldığını ve öğrencilerin matematiksel gelişimlerdeki bir bilişsel düzeyi ve zihinsel beceriyi temsil ettiğini söylemişlerdir. Dolayısıyla bu gruplandırma bir ispat içeriği ya da bir ispat yöntemi değildir. Bu gruplandırma bireyin sosyal bağlamdaki şüphelerinden, doğrularından ve görüşlerinden oluşur (Harel ve

Sowder, 1998; Sowder ve Harel, 1998). Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şeması gruplandırması “*dışsal ispat şemaları*”, “*deneysel ispat şemaları*” ve “*analitik ispat şemaları*” olmak üzere üç ana kategoriden oluşmakla beraber, ayrışık değildir ve bireyler aynı anda birden fazla ispat şemasına ilişkin özellikler sergileyebilirler ve kısa bir zaman aralığında çeşitli ispat şeması özellikleri gösterebilirler (Harel ve Sowder, 1998).

Harel ve Sowder'a (1998) göre ispat şeması gruplandırması kısmi bir hiyerarşik yapıya sahiptir: “*Bireyin farklı bağlamlarda farklı şekilde faaliyetler gösterebileceğini tanımlamak amacıyla bireyin ispat şemalarından çoğul olarak bahsedilse de, belirli bir bağlamda sınıflandırmalar içerisinde en azından kısmi bir hiyerarşik yapı çoğu kez bulunmaktadır*” (s. 277). Örneğin, dönüşümsel ispat şemasının aksiyomatik ispat şemasını yapılandırmanın gerekli bir önkoşulu olduğu varsayılmaktadır. Fakat diğer yandan, dışsal ispat şemalarının analitik ispat şemalarının gelişiminde önemli olduğu da düşünülmemektedir. Dışsal otoriter ispat şemaları ve deneysel şemaların da öğrencilerin bazı dönemlerinde sadece onaylayıcı ve varsayımsal rolleri karşıladıkları düşünülmektedir (Harel ve Sowder, 1998).

Aydoğdu İskenderoğlu (2016) anılan kısmi hiyerarşik yapıyı açıklarken dışsal ve deneysel ispat şemalarının öğrenciler tarafından kullanılması pek istenmeyen şemalar olduğunu, analitik ispat şemalarının ise matematiksel akıl yürütmenin merkezinde olduğu düşünüldüğünden öğrenciler tarafından kullanılması istenen şemalar olduğunu belirtmiştir. Buna göre analitik ispat şemaları diğer ispat şemalarından daha üst düzeydedir ve öğrencilerin ikna için akıl yürütme yardımı ile önceki bilgilerini yeni durumlara uygulamalarını gerektirdiğinden diğer şemaların içerisinde en karmaşık olanıdır. Analitik ispat şemaları içerisinde de en üst düzeyde analitik aksiyomatik ispat şemaları yer almaktadır.

2.2. İlgili Araştırmalar

Bu çalışmanın İlgili Araştırmalar bölümü “*Sonuçlarında İspat Şemalarına Yer Veren Araştırmalar*”, “*İspat Şemalarına Sonuçlarında Değınmeyen Fakat İspat Şemalarının Bazı Özelliklerini Ele Alan Araştırmalar*”, “*Sonuçlarında İspat Şemalarına Yer Veren veya İspat Şemalarının Bazı Özelliklerini Ele Alan Araştırmalara İlişkin Özet*”, “*İspatın Doğasına İlişkin Araştırmalar*”, “*İspatın Doğasına İlişkin Araştırmaların Özeti*” ve “*İlgili Alanyazın Taraması Özeti*” olmak üzere temel altı başlık altında incelenmiştir. Özet içeren temel başlıklar haricindeki tüm temel başlıklar ve bu başlıkların alt başlıklarının bulunduğu

bölümlerin başında ve sonunda, anılan çalışmalara ilişkin özetler yer almıştır. Bölümlerin başındaki özetler araştırmaların doğasına (araştırmanın örnekleme, türü, deseni, vs..) ilişkin bilgiler içerirken, sonundaki özetler ise araştırmanın sonuçlarına ilişkin bilgiler içermiştir. İlk iki temel bölümün sonrasında, bu bölümlerdeki araştırmaların beraberce değerlendirilmesine ilişkin genel özete yer verilmiştir. Özetten sonra ispatın doğasına ilişkin araştırmalar sunulmuş ve ispatın doğasına ilişkin araştırmaların özeti de hemen akabinde yer almıştır. Bu bölümün en sonunda ise İlgili Araştırmalar bölümünün içerisinde yer alan tüm araştırmalara ilişkin özet sunulmuştur. Bu temel başlıklara ait olan alt başlıklar aşağıda detaylandırılmıştır:

2.2.1. Sonuçlarında İspat Şemalarına Yer Veren Araştırmalar

Sonuçlarında ispat şemalarına yer veren araştırmalar, deneysel ve deneysel olmayan araştırmalar olmak üzere iki başlık altında incelenmiştir. Deneysel olmayan araştırmalar ispat şemalarını bulgularında özellikleriyle beraber ele almışlardır.

2.2.1.1. Sonuçlarında ispat şemalarının özelliklerini barındıran deneysel olmayan araştırmalar.

Bu gruptaki araştırmalar sonuçlarında ispat şemalarının özelliklerini barındıran araştırmalardır. Bu araştırmaların bir kısmı ispat şemalarını sadece kendi özellikleri açısından inceleyerek öğrencilerin ya da öğretmen adaylarının hangi ispat şemalarına ilişkin tepkiler ortaya koyduklarını ve bu tepkileri ne sıklıkla ortaya koyduklarını belirlemiştir. Diğer araştırma grubu, üniversite ve lise öğrencilerini ele almış ve bu öğrencilerin ispat şemalarının gelişimini boylamsal olarak inceleyen araştırmalardan oluşmuştur. En son olarak ispat şemalarını sadece kendi özellikleriyle değil; farklı değişkenlerle ilişkileriyle beraber inceleyen ve farklı düzeylerde öğrencilerle çalışmalarını yürüten araştırma grubuna yer verilmiştir.

2.2.1.1.1. Öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemeye yönelik yapılan araştırmalar.

Bu bölümde, öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemeyi hedefleyen deneysel olmayan çalışmalara yer verilmiştir. İspat şemalarını belirlemeye yönelik yapılan çalışmaların kısa bir özeti aşağıda yer almaktadır. Özetten sonra bu grupta yer alan her bir araştırma çalışma grubuna göre alt alta özetlenmiştir. Bu bölümün en sonunda bu çalışmaların sonuçlarına ilişkin özete yer verilmiştir.

Bu çalışmalardan bazıları (Şengül ve Güner, 2013; Güner, 2012; İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010; Sarı ve diğerleri, 2007; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014) ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programlarında öğrenim gören öğretmen adaylarının ispat şemalarını ortaya koyarken, bazıları (Gholamazad ve diğerleri, 2004; Oflaz ve diğerleri, 2016) çalışmalarını sınıf öğretmeni adaylarıyla gerçekleştirmişlerdir. Bazı çalışmalar (Weber, 2010) matematik lisans öğrencilerinin, bazıları (Koichu, 2009) matematik lisans ve lisanüstü öğrencilerinin, bazıları (Heinze ve Reiss, 2013; Liu ve Manouchehri, 2013; Sen ve Güler, 2015) ortaokul öğrencilerinin ispat şemalarını ortaya koyarken, bazıları (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Flores, 2006) hem ortaokul hem lise öğrencilerinin ispat şemalarını ortaya koymayı hedeflemiştir. İspat şemalarına ilişkin teoriyi ilk olarak alana kazandıran Harel ve Sowder'ın (1998) çalışması da bu bölümün içerisinde yer almaktadır ve araştırmacılar bu çalışmayı üniversite öğrencileri ve lise öğrencileri üzerinde yürütmüşlerdir. Anılan çalışmaların hepsi öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispat şemalarını ortaya koymak için Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şeması sınıflandırmasını kullanmışlardır. Bu çalışmaların tümü öğrenciler ve öğretmen adaylarının ortaya koydukları ispat şemalarına ilişkin frekans bilgilerine yer vermişlerdir. Çalışmaların tümünde nitel analiz yöntemleri kullanılmış olup, bazı çalışmalar (Güner, 2012; İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010; Şengül ve Güner, 2013) hem nicel hem nitel analiz yöntemlerini kullanmışlardır. Çalışmaların nitel verileri yarı yapılandırılmış görüşmeler (Güler, 2015; Şengül ve Güner, 2013; Güner, 2012; Oflaz ve diğerleri, 2016; Sen ve Güler, 2015), görev temelli görüşmeler (Koichu, 2009; Weber, 2010) ve klinik görüşmelerle (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Harel ve Sowder, 1998; İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010) toplanmıştır. Bazı çalışmalar (Flores, 2016; Heinze ve Reiss, 2003) ispat şemalarını belirlerken sadece görüşmelerin kullanıldığını belirtmişler, hangi görüşme yönteminin kullanıldığına ilişkin bilgi vermemişlerdir. Bir çalışma ise (Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014) verilerin toplanmasında hem yarı yapılandırılmış görüşmeleri hem de klinik görüşmeleri kullandıklarını belirtmiştir. Her bir çalışmanın amacına göre görüşmelerin yanında farklı veri toplama teknikleri de kullanılmıştır. Hem nitel hem nicel yöntemle yürütülen çalışmaların nicel verileri ise öğretmen adaylarının ispat şemalarının sınıf düzeylerine göre (Güner, 2012; İskenderoğlu, 2010; Şengül ve Güner, 2013) anlamlı bir farklılık gösterip göstermediğinin belirlenmesi amacıyla toplanmıştır.

Aşağıda, anılan çalışmaların özetleri çalışma gurubuna göre yer almaktadır. İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programlarında öğrenim gören öğretmen adaylarının ispat şemalarını ortaya koyan çalışmaların özetleri aşağıdaki gibidir:

Uygan, Tanışlı, ve Köse'nin (2014) yürüttükleri çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatın anlamına ve özelliklerine yönelik inançlarını, ispatlama ve örnek ispatların geçerliliğini değerlendirirken yaptıkları muhakeme süreçlerini incelemektir. Bu anlamda öğretmen adaylarının ispata yönelik inançları ve ispat yapmada kendilerine yönelik inançları ve ispat yapma ve değerlendirme süreçleri incelenmiştir.

Çalışma bir devlet üniversitesinde öğrenim gören üç ilköğretim matematik öğretmeni adayı ile gerçekleştirilmiştir. Nitel yöntemlerle analiz edilen çalışmada katılımcıların ispata yönelik inançları yarı yapılandırılmış görüşmeler aracılığıyla, ispat yapma süreçleri ve örnek ispatları değerlendirme süreçleri ise klinik görüşmelerle incelenmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlama ve ispat değerlendirme süreçlerindeki muhakeme biçimlerine yönelik ortaya çıkan sonuçların yorumlanmasında Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şeması sınıflandırması kullanılmıştır.

Çalışmanın sonuçlarına göre öğretmen adaylarının ispatı bir tür problem çözümü, problem çözümü için kurallar oluşturma ve bilginin kaynağını araştırma olarak gördükleri ve ispat sürecinde problem çözme sürecine benzer düşünme biçimlerini sergiledikleri belirlenmiştir. İspat yapma süreçleri incelendiğinde ise katılımcıların teoremdaki hüküm ifadesini teoremin öncülü gibi düşündükleri ve ezbere stratejiler kullandıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarının ispatın özelliklerine yönelik inançları “genellenebilirlik”, “tümdengelimli”, “anlaşılabilirlik” ve “doğruluğunun herkesçe kabul edilmesi” kategorileri altında sınıflandırılmıştır. Çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispatın doğruluğunu herkesin kabul etmesine ve genel olarak kabul edilmiş olmasına yönelik olarak açıkladıkları belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının düşünme biçimlerine olan inançları incelendiğinde tümevarım yöntemini düşünme ve bu yöntemi kullanmayı alışkanlık haline getirme durumlarını içeren ifadeler kullandıkları ifade edilmiştir. İspat değerlendirme sürecinde öğretmen adaylarından ikisinin deneysel uygulamaları ispat olarak gördüğü belirlenmiştir ve deneysel ispat şemasını kullandıkları sonucuna varılmıştır. Diğer öğretmen adayının bu konuda kararsız olduğu, aksiyomatik olarak hatalı doğrulamanın değerlendirilmesi incelendiğinde dışsal ispat şemasını kullandığı belirlenmiştir.

Şengül ve Güner'in (2013) yürüttükleri çalışmanın amacı öğretmen adaylarının problem çözerken kullandıkları ispat şemalarını belirlemek ve ayrıca birinci ve son sınıf matematik öğretmeni adaylarının kullandığı ispat şemaları arasında anlamlı bir farklılık olup olmadığını araştırmaktır. Çalışma 2011-2012 öğretim yılında bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören 135 birinci ve son sınıf öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Tarama modeli ile yürütülen çalışmada öğretmen adaylarına genel matematik dersine yönelik beş problem sorulmuş ve bu sorulara verdikleri yanıtların Harel ve Sowder (1998) ispat şemalarından hangisine ait olduğu belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının kullandığı ispat şemalarında sınıf seviyesine göre anlamlı bir farklılık olup olmadığı t testi yapılarak incelenmiştir.

Çalışmada öğretmen adaylarının ispat şemalarının her çeşidini (dışsal, deneysel, analitik) kullandıkları ortaya çıkmıştır. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının hem birinci sınıfta hem sonuncu sınıfta okuyanlar beraber ele alındığında en çok analitik ispat şemasını kullandıkları; birinci sınıf öğretmen adaylarının en çok deneysel ispat şemalarını kullandıkları ve son sınıf öğretmen adaylarının en çok analitik ispat şemalarını kullandıkları belirlenmiştir. Sınıf seviyesi açısından öğretmen adaylarının kullandığı deneysel ve analitik ispat şemalarında anlamlı bir farklılık olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Son sınıf öğretmen adaylarının en çok kullandığı şema analitik ispat şeması iken en çok kullandığı sonra gelen şema dışsal şemaları olmuştur. En az kullandıkları ispat şemaları ise deneysel ispat şemaları olmuştur.

Güner'in (2012) çalışmasının amacı DNR tabanlı öğretime göre (DNR'ye göre matematik öğretim programlarının hedefleri hem anlama hem de düşünme yollarıyla açık ve kesin olarak ifade edilmelidir) matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları ispat şemalarını belirlemek, ispata yönelik görüşlerini araştırmak ve anlama ve düşünme yollarını keşfetmektir. DNR tabanlı öğretim çalışmada ikililik (Duality), gereklilik (Necessity) ve tekrarlı düşünme (Repeated Reasoning) kavramlarını temsil eden bir teoriye dayanan öğretim olarak tanımlanmıştır. İlköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programında öğrenim gören birinci ve son sınıf matematik öğretmen adaylarının genel matematik dersi kapsamında kullandıkları ispat şemaları, bu şemaların her bölüm bazında sınıf düzeyleri açısından farklılık gösterip göstermediği, ispat yaparken kullanılan mevcut düşünme şekilleri ve ispata yönelik görüşleri ortaya çıkarılmıştır. Çalışma 2011-2012 eğitim öğretim yılında Samsun ilinde bir devlet üniversitesinin, ilköğretim matematik öğretmenliği ve ortaöğretim matematik öğretmenliği programlarının birinci ve son

sınıfında okuyan 98 öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Çalışma grubundan seçilen on iki öğretmen adayı ile yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir.

Bu çalışmada nitel ve nicel araştırma yöntemleri birlikte kullanılmıştır. Çalışmada ispat şemalarını belirlemeye yönelik ölçme aracı ve ispata yönelik görüş ölçeği yardımıyla nicel veriler toplanırken nitel veriler yarı yapılandırılmış görüşme yapılarak elde edilmiştir. Nitel verilerin analizinde betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemek amacıyla araştırmacı tarafından geliştirilen ölçme aracı uygulanmıştır. Matematik öğretmen adaylarının problemleri çözerken soruları nasıl anladıkları ve bu süreçte nasıl düşündükleri, ispata yönelik bakış açıları ve duygularının ne yönde olduğu hakkında bilgi sahibi olabilmek amacıyla yarı yapılandırılmış görüşme tekniği kullanılmıştır. Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerini öğrenmek amacıyla ispat yapmaya yönelik görüş ölçeği uygulanmıştır. Çalışmada öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemek için Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şemaları sınıflandırması kullanılmıştır.

Çalışmada öğretmen adaylarının görüşlerinin tam oluşmadığı ve kullandıkları ispat şemalarında farklılıklar olduğu belirlenmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşmelerde dışsal şemaları en fazla ilköğretim birinci ve ortaöğretim son sınıfların en az ise ilköğretim son sınıfların kullandığı tespit edilmiştir. Deneysel şemaları en fazla ilköğretim birinci sınıflar kullanırken en az ortaöğretim son sınıflar tercih etmişlerdir. Analitik şemaları kullanım oranı her sınıf bazında diğer şemalara göre daha yüksek olmakla beraber en fazla ortaöğretim birinci ve son sınıflar kullanırken en az ilköğretim birinci sınıflar kullanmışlardır. Tüm yarı yapılandırılmış görüşmeler için genel durum ele alındığında 108 problemin % 28.70'inde dışsal, % 15.76'sında deneysel, % 46.29'unda analitik şema kullanılmıştır ve problemlerin % 9.55'i boş bırakılmıştır. Görüşmelerde en çok tercih edilen şema analitik iken en az tercih edilen deneysel şema olmuştur. İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispatlama sürecinde en fazla kullandığı şemanın deneysel en az kullandığı şemanın dışsal şema olduğu sonucuna ulaşılmıştır. İlköğretim matematik öğretmenliği programı birinci sınıfların ağırlıklı olarak kullandığı şemanın deneysel şema son sınıfların ağırlıklı kullandığı şemanın analitik şema olduğu belirlenmiştir.

İskenderoğlu, Baki ve İskenderoğlu'nun (2010) yürüttükleri çalışmanın amacı öğretmen adaylarının matematik problemlerinde çözümlerini nasıl gerekçelendirdiklerini araştırmaktır. Çalışma bir devlet üniversitesinin birinci sınıfında öğrenim gören 40

ilköğretim matematik öğretmeni adayıyla gerçekleştirilmiştir. Çalışmada bu öğretmen adaylarından altı tanesi ile klinik görüşmeler yapılmıştır.

Öğretmen adaylarına öncelikle yazılı sınav uygulanmış, yazılı sınavdan bir ay sonra klinik görüşmeler yapılmıştır. Öğretmen adaylarının ispat şemalarının ortaya çıkarılması için Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şeması sınıflandırması kullanılmıştır ve kendilerine hem yazılı sınavda hem de klinik görüşmelerde açık uçlu on sorudan oluşan soru formu yöneltilmiştir. Her iki uygulamada da aynı soru formu kullanılmıştır. Çalışmanın verileri hem nicel hem nitel analiz yöntemleriyle analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat şemaları öncelikle verdikleri yazılı yanıtlara göre analiz edilmiştir. Klinik görüşmelerin analizi nitel betimsel analiz yöntemleriyle gerçekleştirilmiştir.

Çalışmada yazılı sınav sonucuna göre öğretmen adaylarının soruları çeşitli yollarla çözdükleri ortaya konmuştur. Yapılan klinik görüşmelerin analizi sonrasında öğretmen adaylarının tüm ispat şemalarını kapsayan yanıtlar verdikleri görülmüştür. Öğretmen adayları en çok deneysel temel örnekler ispat şemasını kullanmışlardır. Öğretmen adaylarının dışsal ve analitik ispat şemaları kullanımı nicelikleri birbirine yakın olmuştur. Öğretmen adaylarının dışsal ispat şemasına ait yanıtlarının çoğu otoriter ispat şemasına aitken analitik ispat şemasına ait verdikleri yanıtların çoğunda aksiyomatik ispat şemasına ilişkin tepkiler vermişlerdir.

İskenderoğlu'nun (2010) yürüttüğü çalışmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda ne tür ispat şemaları kullandıklarını tespit etmek, farklı sınıf seviyelerinde kullanılan ispat şemalarının nasıl farklılaştığını ortaya koymak, öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerini belirlemek, bu görüşlerinin farklı sınıf düzeylerine göre nasıl değiştiğini ortaya koymaktır. Bunun yanında çalışmada öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri ile fonksiyonlar konusunda kullandıkları ispat şemaları arasında paralellik olup olmadığı ortaya konmaya çalışılmıştır. Çalışma İlköğretim Matematik Öğretmenliği programında öğrenimlerine devam etmekte olan birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü sınıf öğretmen adayları üzerinde yürütmüştür. Çalışmada oluşturulan ölçek farklı sınıf seviyelerinden yüz seksen yedi öğretmen adayına, yazılı sınavda 158 öğretmen adayına ve klinik görüşmelerde 16 ilköğretim matematik öğretmeni adayına uygulanmıştır.

Çalışma gelişimci araştırmalardan enlemesine yürütülen bir çalışma olarak tanımlanmıştır. Çalışmada veriler klinik görüşmeler, bir yazılı sınav ve bir ölçek

yardımıyla elde edilmiştir. Açık uçlu sorulardan oluşan yazılı sınavlar nicel verileri toplamada kullanılırken, klinik görüşme problemleri de araştırmanın nitel verilerini toplamada kullanılmıştır. İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının fonksiyonlar konusunda ne tür ispat şemaları kullandıklarını ortaya çıkarmak için seviyelerine uygun olarak fonksiyonlar konusu ile ilgili hazırlanmış olan on problem hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşmeler sırasında öğretmen adaylarına yöneltilmiştir. Son olarak verilerin toplanması sürecince öğretmen adaylarına araştırmacı tarafından geliştirilen matematiksel ispat yapmaya yönelik görüş ölçeği uygulanmıştır. Elde edilen veriler nitel ve nicel veri analizi yöntemleriyle analiz edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat şemalarının ortaya çıkarılması için Sowder ve Harel'in (1998) sınıflandırması kullanılmıştır.

Çalışmanın sonucunda, öğretmen adaylarının ispata yönelik olumlu bakış açılarının olduğu ve sınıf seviyesi arttıkça da ispat şemalarında en üst düzey olarak kabul edilen analitik şemaların kullanımında bir artış olduğu ortaya konulmuştur. Çalışmada ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının yanıtları analiz edildiğinde dışsal, deneysel ve analitik ispat şemalarının tümünün bulunduğu görülmüştür. Öğretmen adayları yazılı sınavda % 24 oranında problemlerin doğruluğunu açıklarken dışsal şemaları kullanmışlardır. Görüşmeye katılan öğretmen adayları ise ispatlama sürecinde % 26.875 dışsal şemaları kullanmışlardır. Dışsal şemaları kullanan katılımcıların çoğunluğu otoriter ispat şemasını kullanırken birkaç katılımcı da sembolik ve alışkanlık edinilmiş şemaları kullanmışlardır. Yazılı sınavda % 18.2 kullanılan deneysel ispat şemaları ise klinik görüşmelerde % 31.25 kullanılmıştır. Klinik görüşmelerde kullanılan deneysel şemalarda genellikle temel örnekler kullanılırken öğrenciler sezgisel şemaları da kullanmışlardır. Hem yazılı sınavda ve hem de klinik görüşmelerde ağırlıklı olarak kullanılan şema ise analitik ispat şemaları olmuştur. Yazılı sınavda % 37 kullanılırken görüşmelerde % 39.375 kullanılmıştır. Bu süreçte kullanılan analitik şemalarda ise ağırlıklı olarak aksiyomatik ispat şemalarının yanı sıra dönüştürülebilir ispat şemaları da tercih edilmiştir. Bunların yanı sıra yazılı sınavda problemlerin % 20.8'i boş bırakılırken klinik görüşmelerde sadece % 2.5'i boş bırakılmıştır. Öğretmen adayları bazı problemlerde ağırlıklı olarak dışsal, bazı problemlerde deneysel ve diğer bazı problemlerde de analitik şemalar kullanmışlardır. Analitik şemaların kullanılmış olmasındaki en önemli nedenin katılımcılara yöneltilen problemlerin içerdiği konu ve problemlerin soruluş biçiminin yanı sıra öğretmen adaylarının bilgi birikimleri ile de ilgili olabileceği belirtilmiştir.

Sarı, Altun ve Aşkar'ın (2007) yürüttükleri çalışmanın amacı öğretmen adaylarının ispat süreçlerini incelemek ve görüşlerini ortaya çıkarmaktır. Çalışma bir üniversitenin matematik öğretmenliği bölümü birinci sınıfında öğrenim gören üç öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adayları Analize Giriş II dersindeki başarılarına göre yüksek, orta ve düşük düzeyden seçilmiştir. Nitel durum çalışması olarak yürütülen çalışmanın verileri sınıf gözlemleri, yapılandırılmış görüşmeler ve öğrencilerin ispat süreçlerini yansıttıkları yazılı kâğıtlardan oluşmuştur. Sınıf gözlemleri 2006-2007 akademik yılı bahar döneminde matematik eğitimi anabilim dalı birinci sınıfı öğrencileriyle Analize Giriş II dersinde gerçekleştirilmiştir. Gözlemler ders saati olan haftada altı saat olmak üzere toplamda 12 hafta boyunca sürmüştür. Öğretmen adaylarına ilk olarak dersin genel işlenişi ve ispat yapma hakkındaki sorulardan oluşan görüşme yapılmıştır, daha sonra öğretmen adaylarına matematiksel ifade verilerek, bu ifadeyi ispatlamaları istenmiştir. Çalışmanın verileri içerik analizi ve nitel araştırma yazılım programı olan Nvivo 7 kullanılarak analiz edilmiştir.

Çalışmada öğretmen adaylarının ispat şemaları ve yaklaşımları açıklanmış ve ispat şemaları ve yaklaşımları arasındaki ilişkileri gösteren örnekler sunulmuştur. Yüksek başarılı öğretmen adayı diğer iki öğretmen adayına göre daha kısa sürede, görüşmecinin yönlendirmesi olmadan, neler yapması gerektiğini, nasıl yapacağını belirlemiş ve geçerli bir ispata ulaşmıştır. Bu öğretmen adayının Harel ve Sowder'ın (1998) sınıflandırmasına göre analitik dönüşümsel ispat şemasını kullandığı belirtilmiştir. Diğer öğretmen adayları ise ispatlama sürecinde öncelikle derste bununla ilgili ne yapmış olduklarını hatırlamaya çalışmış, yapmış oldukları benzer ispatları ya da sorulan ifadenin ispatını kitaptan bulmak istemişlerdir. Bunlardan orta başarı seviyesine sahip olan öğrenci başlangıçta, Harel ve Sowder'ın (1998) sınıflandırmasına göre deneysel tümevarımsal ispat şemasını kullanmıştır. Sürecin büyük bölümünde tümevarımsal ispat şeması özellikleri göstermiş ancak sonuçta tanımlar arası bağlantıları kurarak amacına yönelik geçişlerle yani dönüşümsel ispat şemasına uygun olarak geçerli bir ispat ortaya çıkarmıştır. En düşük başarı düzeyindeki öğrenci ise ispatlamaya yönelik girişiminde başarılı olamamış, geçerli bir ispat ortaya çıkaramamıştır ve ispatlama sürecinde, öğrencinin açıklaması bir otoriteye dayandırılmıştır. Öğretmen adayının aynı zamanda algısal ispat şemasını kullandığı belirlenmiştir.

Sınıf öğretmeni adaylarının ispat şemalarını ortaya koyan çalışmaların özetleri aşağıda yer almaktadır:

Oflaz, Bulut ve Akcakin'in (2016) yürüttükleri çalışmanın amacı öğretmen adaylarının bir geometri problemini ispatlarken ispat şemalarını belirlemektir. Çalışmada öğretmen adaylarının ispat sürecinde ne gibi zorluklar yaşadıkları ve geometri derslerinde ispat yapma konusunda ne gibi görüşlere sahip oldukları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Çalışma Türkiye'de bir devlet üniversitesinin sınıf öğretmenliği bölümü birinci sınıfında öğrenim gören üç öğretmen adayı ile yürütülmüştür.

Durum çalışması olarak tanımlanan çalışmada öğretmen adaylarıyla bir teoremi ispatladıktan sonra, ispat ve ispatlama hakkındaki görüşlerini almak için yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının yanıtları Harel ve Sowder'in (1998) ispat şeması sınıflandırması kullanılmıştır.

Çalışmada, öğretmen adaylarının tutumlarının başarılarıyla paralel olmadığı sonucuna ulaşılmıştır. Öğretmen adaylarının ikisinin deneysel ispat şemasına diğerinin ise dışsal ispat şeması yaklaşımına sahip oldukları ortaya çıkmıştır. En başarılı olan öğretmen adayı deneysel ispat şeması yaklaşımına sahipken, orta düzeyde başarıya sahip olan öğretmen adayı dışsal sembolik ispat şemasına, en düşük başarıya sahip öğretmen adayı ise dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması yaklaşımına ilişkin tepkiler ortaya koymuştur. Çalışmada öğretmen adaylarının basit bir geometri ispatını yapamadıkları belirtilmiştir. Bunun altında yatan sebeplerin öğretmen adaylarının konu ile ilgili yanlış fikirleri, geometrik kavramların tanımlarında da yetersiz bilgiye sahip olmaları ve geçmiş eğitimlerinde herhangi bir ispat sürecine dâhil olmamalarından kaynaklandığı belirtilmiştir.

Gholamazad, Liljedahl ve Zazkis'in (2004) çalışmalarının amacı sınıf öğretmeni adaylarının geçerli bir ispatı nelerin oluşturduğu hakkındaki algılarını ortaya çıkarmaktır. Nitel yöntemlerle analiz edilen çalışma bir öğretmen yetiştirme programındaki "Öğretmenler İçin Matematik İlkeleri" dersine katılan 75 sınıf öğretmeni adayı üzerinde yürütülmüştür. Öğretmen adaylarına çeşitli durumları geçerli kılması olası argüman içeren beş farklı ifadeyi ispatlamalarının istendiği yazılı bir form verilerek verilmiştir. Öğretmen adaylarından kendilerine verilen argümanın ispat sayılıp sayılmayacağı hakkında yorum yapmaları istenmiştir.

Çalışmada öğretmen adaylarının deneysel doğrulamaları ispat olarak görme eğiliminde oldukları belirlenmiştir. Örneğin öğretmen adayları iki tek sayının toplamının tek sayı olacağını belirtmelerinin yanında, bunu doğrulayacak birkaç örnekten daha

fazlasının gerektiğinin farkında olmamışlardır. Bu çalışmada öğretmen adaylarının matematiksel argümanları görünümüne göre değerlendirmedeği sonucuna ulaşılmıştır.

Matematik bölümü lisans öğrencisi, öğretmen adayı ve lisansüstü öğrencilerinin ispat şemalarını ortaya koyan çalışmaların özetleri aşağıda yer almaktadır:

Weber'in (2010) çalışmasında öğrencilerin hangi tip argümanları ikna edici bulduklarının, hangi tip argümanları matematiksel ispat olarak gördüklerinin belirlenmesi ve ispatlanan bir iddianın doğru olup olmadığına ilişkin şüpheleri olup olmadığı, olduysa nedenlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Çalışma bir üniversitede birinci ve ikinci sınıfta öğrenim gören 28 matematik lisans öğrencisi üzerinde yürütülmüştür. Çalışma grubu İspata Giriş dersini tamamlayan ve ortalamasının üzerinde not ortalamasına sahip öğrencilerden oluşmuştur. Her bir katılımcıyla görev temelli görüşmeler (task based interviews) gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere matematik argümanları verilerek her bir argüman için, argümanı ne kadar ikna edici buldukları ve bu argümanın matematiksel bir ispatı oluşturup oluşturmadığı sorulmuştur. Çalışmada ispat şemaları Harel ve Sowder'in (1998) sınıflandırmasına göre belirlenmiştir.

Öncelikle katılımcılardan argümanı ne kadar anladıklarını ve daha sonra argümanı ne kadar ikna edici bulduklarını kodlamaları istenmiştir. Daha sonra argümanın ispat olup olmadığı sorulmuştur. Katılımcılardan her bir argümandan sonra argümanı okuyup sesli düşünmeleri istenmiştir. Tüm argümanları okuduktan sonra argümanları nasıl okudukları veya matematiksel argümanlara ilişkin algıları hakkında açık uçlu sorular sorulmuştur. Bunun yanında en sevdikleri birinci ve ikinci argümanı ve en sevmedikleri argümanı seçmeleri istenmiştir.

Çalışmanın sonuçlarına göre, katılımcıların çoğu deneysel argümanı ikna edici bulmamıştır ve ispatın standartlarını karşılamadığını belirtmiştir, katılımcıların büyük çoğunluğu diyagramlı bir argümanı hem ikna edici bulmuşlar hem de ispat olarak nitelendirmişlerdir, tümdengelimsel argümanı biçimiyle değil içeriğiyle değerlendirmişlerdir ve geçersiz olan tümdengelimsel argümanları mantıksal kusurlarını fark etmedikleri için ikna edici ispatlar olarak değerlendirmişlerdir. Çalışmada lisans öğrencilerinin matematiksel argümanları anlamalarının; onların deneysel argümanların sınırlıklarının farkında olmasına değil, okudukları argümanları işleme yollarını geliştirmelerine bağlı olduğu belirlenmiştir. Öğrencilerin neredeyse tamamı beşinci argüman olan deneysel argümanı ispat sayılmaması gereken ve ikna edici olmayan bir

argüman olarak görmüşlerdir.. Çalışmada öğrencilerin tümdengelimsel argümanlar hakkındaki yargılarının karışık olduğu belirtilmiştir. Bununla beraber, katılımcılar tümdengelimsel argümanlarda hata tespitinde problemler yaşamışlardır ve hatalı tümdengelimsel argümanları ikna edici geçerli ispatlar olarak kabul etme eğiliminde olmuşlardır.

Koichu'nun (2009) yürüttüğü çalışmada, öğretmen adayı ve lisansüstü öğrencilerinin ispat ve ispatlama dersi bağlamında lise öğrencileriyle yaptıkları görev temelli görüşmeler sonucunda ispat yapma yollarının ve ispat şemalarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Çalışma lisans ve lisansüstü öğrenciler için hazırlanan 14 haftalık "Matematik Eğitiminde İspat ve Gerekleştirme" dersinde yedi öğretmen adayı ve beş lisansüstü öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın önemli bir kısmı katılımcılarla ispat ve ispatlama hakkında güncel araştırmaların okunup tartışılmasıyla geçmiştir. Çalışma öğrencilerin ikiye ayrılmış gruplara ayrılarak hazırladıkları final ödevleri temeline dayanarak hazırlanmıştır.

Çalışmada ilk olarak öğretmen adayı ve lisansüstü öğrencilerinin bir lise öğrencisiyle görüşme yapmaları istenmiştir. Görüşme modeli görüşmecinin dört, beş matematiksel varsayımı ve yazılı ispatların incelenmesini içermiştir. Öğrencilere bazı varsayımlar verilerek bu varsayımlar hakkında yorum yapmaları istenmiştir. İkinci olarak katılımcılardan bir görüşme protokolünü analiz etmeleri istenmiştir. Öğrencilerin ispat şemaları sınıflandırması Harel ve Sowder'in (1998) sınıflandırmasına dayanılarak yapılmıştır. Araştırmanın verileri öğretmen adayı ve lisansüstü öğrencilerinin görüşme sürecindeki notlarından, görüşme protokolünün bölümlerinden ve bu öğretmen adayı ve lisansüstü öğrencilerinin final raporlarından oluşmuştur.

Çalışma sonuçlarına göre, bir katılımcı ispatı hakkında tam anlamıyla ikna olduğunu ve ispatında matematiksel semboller kullandığında sınıf arkadaşlarının da ikna olacağını ileri sürmüştür. İki öğretmen adayına göre katılımcının başlangıçta emin olma sebebi, ifadeyi matematiksel bir aksiyom gibi görmesinden dolayı olmuştur. Bu durumunun analitik aksiyomatik ispat şemasını kullandığının göstergesi olduğu belirtilmiştir. Bunun yanı sıra, katılımcının ispatın doğruluğundan emin olmasına ilişkin duygusunun kaynağının öğretmenin okuldaki anlatımlarından kaynaklandığı ve otoriter ispat şemasını kullandığı belirtilmiştir. Katılımcı ifadeyi ispatladığı zaman ifadesinin doğruluğuna matematiksel sembollerin gücünden dolayı ikna olduğu söylemiştir. Bu durumun ise onun

sembolik ispat şemasına sahip olduğuna işaret ettiği belirtilmiştir. Bazı katılımcıların ispat şeması kavramını anlamakta zorluk yaşadıkları belirtilmiştir.

Ortaokul öğrencilerinin ispat şemalarını ortaya koyan çalışmaların özetleri aşağıda yer almaktadır:

Sen ve Güler'in (2015) yürüttükleri çalışmanın amacı yedinci sınıf öğrencilerinin ispat şemalarını kullanarak ispat yapma becerilerini incelemektir. Çalışma 2014-2015 eğitim öğretim yılında Türkiye'deki sekiz devlet okulunun yedinci sınıfında okuyan 250 öğrenci ile yürütülmüştür. Nitel yöntemle yürütülen çalışmada öğrencilerin ispat şemalarını belirlemek için araştırmacılar tarafından geliştirilen bir ispat şeması testi kullanılmıştır. Öğrencilerin yanıtları Harel ve Sowder (1998) tarafından geliştirilen ispat şeması sınıflandırmasına göre sınıflandırılmıştır. Bunun yanında dokuz öğrenciyle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmış ve öğrencilerin yanıtları aynı sınıflandırmayla ispat şemalarına ayrılmıştır. Çalışmada öğrencilerin çoğunlukla dışsal ve deneysel ispat şemalarını kullandıkları ortaya çıkmıştır. Bunun yanında öğrencilerin çok az bir kısmının analitik dönüşümsel ispat şemalarını kullandıkları ve hiçbir öğrencinin analitik aksiyomatik ispat şemasını kullanmadığı belirlenmiştir. Bunların yanında öğrencilerin ispat becerilerinin istenen düzeyde olmadığı sonucuna varılmıştır.

Heinze ve Reiss'in (2003) yürüttükleri çalışmanın amacı ispat şeması, ispat yapısı ve sonuç zinciri olarak tanımlanan üç farklı yöntemsel durum hakkında sorun yaşayan öğrencilerin yöntemsel bilgilerindeki temel hataları saptamak, yöntemsel bilgi alanındaki çoktan seçmeli maddeleri çözerken fikirlerini ve düşüncelerini ortaya çıkarmaktır. Çalışmada Almanya'da sekizinci sınıfta okuyan 700 öğrenci ile yürütülen büyük bir çalışmanın bir kısım sonuçları ortaya konmuştur.

Öğrencilere çoktan seçmeli test yapıldıktan sonra yöntemsel bilgileri hakkında daha detaylı bilgiye erişmek için test başarılarına göre yedi öğrenci seçilmiş ve görüşmeler yapılmıştır. Kendilerine geometrik ispat ve buna bağlı olarak dört çözüm verilerek bu çözümlerle ilgili sesli düşünceleri istenmiştir. Çalışmada ispat şemalarının belirlenebilmesi için Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şeması sınıflandırması kullanılmıştır.

Çalışmada birçok öğrenci deneysel argümanı kabul etmişlerdir. Bu öğrenciler açıklamalarında deneysel tümevarımsal ispat şeması kullanmışlardır. Deneysel çözüm durumunda, görüşmeci hesaplamanın matematikte doğru bir ispat olup olmadığını sormuş ve çoğu öğrenci bunu reddetmiştir.

Liu ve Manouchehri'nin (2013) yürüttükleri çalışmada öğrencilerin belirli ifadelerin doğruluğunun arandığı dört önermeye verdikleri yanıtlara göre ispat şemalarının ortaya çıkarılıp incelenmesi amaçlanmıştır. Çalışma Amerika'nın doğu eyaletlerinden birindeki 19 farklı ortaokulda okuyan 41 sekizinci sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Nitel yöntemlerle analiz edilen çalışmada araştırmacılar tarafından bir düşünme ölçeği geliştirilmiştir. Bu ölçek öğrencilerin matematiksel ispat üretirken becerilerini, alternatif dışsal gerekçelendirme yöntemlerinin geçerliğini yargılama becerilerini ve matematiksel argümanları oluştururken belirli gerekçelendirme yöntemlerini adapte etmedeki istekliliklerini ölçmek için tasarlanmıştır. Bu ölçek Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şeması sınıflandırmasının teorik göstergelerini takip ederek hazırlanmıştır. Düşünme ölçeği matematiğin dört farklı öğrenme alanından dört matematik probleminden oluşmuştur.

Çalışmanın sonuçları öğrencilerin çoğunluğunun ağırlıklı olarak deneysel ve dışsal düşünme şemalarına ilişkin tepkiler ortaya koyduklarını göstermiştir. Analitik şema argümanını tercih eden öğrenci sayısı onları üretebilen öğrenci sayısından anlamlı şekilde farklı olmuştur. Öğrenciler diğer bağlamlardaki argümanlarında analitik şemaları tercih ederken sayılar teorisi probleminde tümevarımsal şemaları tercih etmişlerdir. Öğrencilerden 10'u diğer problemlerin her birinde analitik düşünce sergilerken sadece iki öğrenci sayılar teorisi problemlerinde analitik yaklaşımları benimsemişlerdir. Çalışmada öğrencilerin geometri haricindeki alanlarda analitik araçları kullanmanın gerekli olmadığını düşündükleri ve farklı alanlardaki durumların kesinliklerini düşünürken diğer şemalara güvenmede ısrar ettikleri sonucuna varılmıştır. Öğrenciler analitik argümanları deneysel argümanlara göre daha ikna edici ve matematiksel olarak tamamlanmış olarak görmüşlerdir.

Hem ortaokul hem de lise öğrencilerinin ispat şemalarını birlikte ortaya koyan çalışmaların özetleri aşağıda yer almaktadır:

Flores'in (2006) yürüttüğü çalışmanın amacı öğrencilerin gerekçelendirmelerini ve ispat şemalarını incelemektir. Çalışmanın Amerika'da ortaokul (ve bir kısmı lise) öğrencileri üzerinde yürütülen nitel bir çalışma olduğu belirtilmiştir. Çalışmada ilköğretim öğrencileriyle Arizona Üniversitesi'nde öğrenim gören öğretmen adayları tarafından görüşmeler yapılmıştır. Öğretmen adayları bu görüşmeleri matematik yöntemleri dersi ödevi kapsamında yürütmüşlerdir. Çalışmaya beşinci sınıftan 12. sınıfa kadar farklı sayılarda toplam 70 öğrenci dâhil olmuştur. Öğrencilere ilk olarak matematikte öğrendikleri kurallar ve işlem basamakları olmak üzere iki durum hakkında sorular

sorulmuştur. Daha sonra görüşmeciler öğrencilere öğrendikleri durumların doğru olduğunu nasıl bildiklerini ve doğru cevabı verdiğiine nasıl emin olduklarını sormuşlardır. Bunun yanında görüşmeciler görüşmeler hakkında yansıtma yazıları yazmışlardır. Veriler görüşmecilerin raporlarına dayanarak araştırmacı tarafından analiz edilmiştir. Öğrencilerin yanıtları öğrenciler tarafından yapılan gerekçelendirmelere dayanılarak sınıflandırılmıştır. Sınıflandırmalarda Harel ve Sowder'in (1998) gerekçelendirme şemaları kullanılmıştır.

Çalışmanın sonuçlarına göre öğrencilerin farklı gerekçelendirme şemalarına örnekler sağladıkları belirlenmiştir. Birçok öğrenci bir durumda otoriteyi kullanırken başka birçok durumda deneysel ya da analitik şemayı kullanmıştır. Bazı öğrenciler ise aynı örnek için farklı şemalar kullanmışlardır. Çalışmada birçok öğrenci otorite olarak öğretmeni daha sonra ise ders kitaplarını göstermişlerdir. Bazı öğrenciler otoriteye güvenmelerine rağmen matematiksel durum hakkında iyi bir anlayışa sahip olmamışlardır. Çalışmada daha çok alt sınıflarda öğrenim gören birçok öğrenci sembolik gerekçelendirmeler sunmuştur. Bu öğrenciler durumların niceliksel ilişkileri üzerine odaklanmaktan çok verilen sayılarla hesaplama işlemleri yoluna gitmişlerdir. Bunun yanında öğrenciler açıklama olarak işlemsel adımlar vermişlerdir. Bunu yaparken ise sembolik manipülasyonlar hakkında ne yaptıklarını açıkça bilmelerine rağmen yaptıklarının anlamları hakkında açıklama yapmamışlardır.

Deneysel ispat şemalarını kullanan öğrencilerin gerekçelendirmeleri hesaplama içeren ve sayısal örnekler içeren olmak üzere iki grupta toplanmıştır. İlk durumda bazı öğrenciler örneklerini tek bir hesaplama bağlarken diğer gruptaki öğrenciler sayısal örnekler kullanarak genellemelerini gerekçelendirmişlerdir. Analitik ispat şemalarında ise öğrencilerin argümanları daha genel ve akıl yürütmeleri örneklere dayanmaktan çok matematiksel olmuştur. Bu görüşmelerde öğrencilerin gerekçelendirme şemaları dönüşümsel ispat şemalarına sınıflandırılmıştır. Dönüşümsel ispat şemalarını kullanan öğrenciler durumun genel görünümüyle ilgilenmişlerdir ve öğrencilerin akıl yürütmeleri genel duruma yönelik olmuştur. Bu tür durumlardaki öğrencilerin akıl yürütmelerinin kavramsal yönelimli olduğu belirlenmiştir. Bu öğrenciler kavramları geçmiş bilgileriyle ilişkilendirmiş, her şeyi gerekçelendirmeleri mümkün olmasa bile kendi kavramlarını daha temel kavramlarla ilişkilendirmeyi başarmışlardır. Dönüşümsel ispat şemasına sahip olduğu düşünülen öğrenciler matematiksel ilişkileri karşılaştıkları durumdan üretmeyi başarmışlar, açıklamalarında güçlükler yaşasalar da durum içindeki matematiksel ilişkiler hakkında doğru bir anlayışa sahip olmuşlardır. Açıklamaları sadece kavramsal olmamakla

beraber, problemin anahtar matematiksel durumunu ortaya koymuşlardır. Çalışmada öğretmenlerin, öğrencilerden beklentilerini modellemelerinin onların ispat şemalarını geliştirmelerine yardım edeceği sonucuna ulaşılmıştır.

Aydoğdu İskenderoğlu'nun (2003) yürüttüğü çalışmanın amacı beşinci, altıncı, yedinci, sekizinci ve lisenin dokuzuncu sınıflarında öğrenim gören öğrencilerin matematik problemlerini çözerken nasıl gerekçelendirmeler kullandıklarını belirlemektir. Bu amaçla problemleri çözdükten sonra sonuçları doğrularken hangi ispat şemalarını kullandıkları; problemin çözümünün doğruluğunu gerekçelendirirken her zaman aynı şemayı mı yoksa farklı şemaları mı kullandıkları ve kullandıkları ispat şemalarının onların sınıf düzeyleri, cinsiyetleri ve öğretmenlerine göre nasıl değişmekte olduğu belirlenmeye çalışılmıştır. Çalışma Bolu'daki yüksek sosyo-ekonomik düzeydeki bir ortaokulun anılan sınıf düzeylerinde her bir sınıftan dört öğrenci olmak üzere toplam 20 öğrenci ile yürütülmüştür.

Öğrencilerle klinik görüşmeler yapılmış, her sınıf seviyesi için beş soru içeren soru formu hazırlanmıştır. Öğrencilerden onlara yöneltilen soruyu çözmeleri istenmiş ve daha sonra nasıl çözdüklerini anlatmaları beklenmiştir. Çalışmanın verileri nitel analiz yöntemleriyle analiz edilmiştir. Çalışmada ortaya çıkarılan ispat şemalarının Harel ve Sowder'in (1998) ispat şeması sınıflandırması ile uyum içinde olduğunu belirtilmiştir.

Çalışmada öğrenciler kendilerine yöneltilen 100 sorunun 80'ini doğru olarak yanıtlamışlardır. Çalışmada öğrencilerin çözümlerini gerekçelendirirken tüm ispat şemalarını kullandıkları belirtilmiştir. Öğrenciler sonuçlarını gerekçelendirirken en çok dışsal otoriter ispat şemasını kullanırken daha sonra deneysel temel örnekler ispat şemasını kullanmışlardır. Öğrencilerin en az sıklıkla analitik aksiyomatik ispat şemasını kullandıkları belirtilmiştir. Çalışmada kızlar ve erkekler arasında ispat şemaları bakımından farklılık olmadığı ortaya çıkarılmıştır. Öğrencilerin alt sınıflarda iken daha çok deneysel şemaları kullandıkları belirtilmiştir. Çalışmada sadece bir öğrenci tüm problemleri yanıtlarken aynı ispat şemasını (dışsal otoriter) kullanmıştır. Diğer tüm öğrenciler farklı problem sonuçları gerekçelendirmelerinde farklı ispat şemaları kullanmışlardır. Fakat öğrencilerin genellikle deneysel ve dışsal şemaları kullandıkları belirlenmiştir. Çalışmada öğrencilerin gerekçelendirmelerinde sıklıkla otoriteyi kullandıkları ortaya çıkarılmıştır.

Lise ve üniversite öğrencilerinin ispat şemalarını ortaya koyan çalışmaların özetleri aşağıda yer almaktadır:

Harel ve Sowder'ın (1998) gerçekleştirdikleri çalışmanın temel amacı lise ve üniversite öğrencilerinin matematiksel ispatlarının bilişsel şemalarını ortaya çıkarmaktır. Araştırmacılar bu amacın yanında üniversite öğrencilerinin matematik lisans programlarındaki matematiksel ispat anlayışlarının gelişimini belgelemeyi, matematik eğitimindeki güncel araştırmalarla desteklenmiş epistemolojik ve pedagojik prensiplere dayalı bir öğretim ortamında matematik lisans öğrencileri arasındaki ispat kavramına gelişimsel modeller önermeyi, ve ispat anlayışını, üretimini ve ispatı değerlendirmeyi destekleyen öğretimsel uygulamalar için prensipler önermeyi amaçlamışlardır. Çalışmada başlıca amacın öğrencilerin matematiksel ispatlarının şemalarını ortaya çıkarmak olduğu belirtilmiştir. Çalışma 126 öğrenci ile altı öğretim uygulaması sürecinde gerçekleştirilmiştir. Bu öğretim uygulamalarından beş tanesi üniversite öğrencileriyle belirli lisans dersleri boyunca bir ya da iki ders döneminde gerçekleştirilmiş olup, bir tanesi lise öğrencileriyle gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın verileri sınıf gözlemleri, alan notları, klinik görüşmeler, takım çalışması ev ödevleri ve yazılı sınavlar aracılığıyla toplanmıştır. Yapılan klinik görüşmeler video kaydına alınmıştır. İspat şeması sınıflandırması dışsal, deneysel ve analitik ispat şemaları olmak üzere üç ana kategoriye ayrılmış ve bunun yanında bu temel kategorilere ilişkin 16 alt kategori belirlenmiştir. Çalışmada bu temel sınıflandırmalar ve onların alt sınıflandırmaları, öğretim uygulamalarından alınan örneklerle desteklenerek raporlanmıştır. Çalışmanın bulgularına göre ispat şemalarının her bir sınıfının öğrencilerin matematiksel gelişimlerinde bir bilişsel düzeyi, entellektüel kabiliyeti temsil ettiği ve bu bulgunun öğrencilerin ispatlama süreçlerindeki gerçek eylemlerinin gözlemlerinden elde edildiği vurgulanmıştır. Bunun yanında çalışmada ispat şemalarının birbirinden bağımsız halde ele alınmayacağı, bir kişinin birden fazla ispat şemasını ortaya koyan özellikleri barındırabileceği söylenmiştir. Çalışmada öğretim uygulamalarının ve görüşme çalışmalarının kesin sonuçlar vermediği; diğer çalışmaları yorumlamak için bir çatı ve koşulların göstergelerini içerdiği belirlenmiştir.

Öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemeye yönelik yapılan çalışmaların sonuçlarına ilişkin özet aşağıda yer almaktadır.

Yukarıda özetlenen araştırmalar incelendiğinde ispat şemalarına ilişkin bugüne kadar kullanılan ve kullanılmaya devam eden sınıflandırmanın lise ve üniversite öğrencileri ile yürüttükleri çalışmalarında ortaya koyan Harel ve Sowder'a (1998) ait olduğu söylenebilir. Araştırmacılar ispat şemalarını dışsal, deneysel ve analitik ispat şemaları olmak üzere üç ana grupta ve üç temel sınıflandırmanın altında yedi alt kategoride

sınıflandırmışlardır (Harel ve Sowder (1998) kendi özgün çalışmasında temel sınıflandırmaları 16 alt grupta sınıflandırmıştır).

Bazı çalışmalar öğretmen adaylarının ya da öğrencilerin çoğunlukla hangi ispat şemasına sahip olduğuna ilişkin bilgilere yer vermiştir. Örneğin bu çalışmalarda; öğretmen adaylarının (Gholamazad ve diğerleri, 2004; İskenderoğlu ve diğerleri 2010; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014) ve ortaokul öğrencilerinin (Heinze ve Reiss, 2003) deneysel ispat şemasının kullanımının ya da deneysel argümanları ispat olarak görme eğiliminin çoğunlukta olduğuna yönelik ifadeler yer verilmiştir. Bazı çalışmalar ortaokul öğrencilerinin (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Sen ve Güler, 2015), lise öğrencilerinin (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003) ve sınıf öğretmeni adaylarının (Ofraz ve diğerleri, 2016,) çoğunlukla dışsal ve deneysel ispat şemalarını kullandıklarını belirtmişlerdir. Bazı çalışmalar (Güner, 2012; İskenderoğlu, 2010; Şengül ve Güner, 2013) öğretmen adaylarının kullandıkları ispat şemalarının sınıf düzeyi arttıkça analitik ispat şemasına doğru değiştiğini ortaya koymuştur. Öğrencilerin çoğunlukla hangi ispat şemasına sahip olduğuna ilişkin bilgilere yer veren çalışmalardan bir tanesi olan Liu ve Manouchehri'nin (2013) çalışmasında sekizinci sınıf öğrencilerinin analitik argümanları deneysel argümanlara göre daha ikna edici ve matematiksel olarak daha tam olarak gördükleri belirlenmiştir.

Yukarıda da özetlendiği gibi, sonuçlarında öğretmen adaylarının ya da öğrencilerin ispat şemalarına ilişkin tepkilere ve bu tepkilerin sıklıklarına yer veren çalışmalar incelendiğinde bu çalışmaların birçok yönden farklılık gösterdiği görülmüştür. Örneğin bazı çalışmalar (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Ofraz ve diğerleri, 2016; Şen ve Güner, 2015; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014) öğretmen adaylarının veya öğrencilerin en çok dışsal ve deneysel ispat şemalarını kullandıklarını ortaya koyarken, bazıları (Güner, 2012; İskenderoğlu, 2010; Şengül ve Güner, 2013) öğretmen adaylarının kullandıkları ispat şemalarının sınıf düzeyi arttıkça analitik ispat şeması olarak değiştiğini belirtmiştir.

Bir diğer çalışma grubu ise öğrencilerin (Koichu, 2009; Weber, 2010) ve öğretmen adaylarının (Flores, 2006; Koichu, 2009) belli bir ispat şemasına ağırlıklı olarak sahip olduğuna ve ispat şemalarına ilişkin frekans bilgilerine yer vermemiş fakat ispat şemalarını kendi özellikleri açısından açıklayarak irdemişler, öğrencilerin veya öğretmen adaylarının hangi ispat şemasına sahip olduğunu nedenleriyle beraber ortaya koymuşlardır. Örneğin Flores'in (2006) çalışmasında öğretmen adayları ilköğretim öğrencileriyle görüşmeler yapmışlardır. Bu çalışmada farklı gerekçelendirme şemalarına örnekler

sağlanarak çeşitli çıkarımlar yapılmıştır. İspat şemalarını kendi özellikleri açısından inceleyen çalışmalardan birisi (Sarı ve diğerleri, 2007) ise lisans öğrencilerinin başarı düzeylerine göre ispat şemalarını ortaya koyarak değerlendirmiştir.

2.2.1.1.2 Üniversite ve lise öğrencilerinin ispat şemalarının gelişimini inceleyen boylamsal araştırmalar.

Bu bölümde üniversite ve lise öğrencilerinin ispat şemalarının gelişimini inceleyen deneysel olmayan boylamsal araştırma grubuna yer verilmiştir. Bu araştırma grubunun kısa bir özeti aşağıda yer almaktadır. Bu kısa özetten sonra, bu grupta yer alan her bir araştırma çalışma grubuna göre alt alta özetlenmiştir. Daha sonra ise bu çalışmaların sonuçlarına ilişkin kısa bir özet yer almaktadır.

Çalışmalardan bazıları (Martin, Soucy McCrone, Wallace Bower, ve Dindyal, 2005; Soucy McCrone ve Martin, 2004) lise öğrencilerinin ispat anlayışlarının gelişimini ve öğretmenlerin, bu öğrencilerin anlayışlarındaki etkilerini incelemiştir; bazı çalışmalar (CadwalladerOlsker, 2007; Haverhals, 2011; Recio ve Godino, 2001) ise üniversite öğrencilerinin ispat öğrenme süreçlerindeki gelişimlerini, ispat şemalarının veya bu şemaların farklı bağlamlardaki anlamlarının arasındaki anlayışların nasıl değiştiğini ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Bir çalışma (Sowder ve Harel, 2003) ise lise matematik öğretmeni adaylarının ispat anlayışları, ispat üretimleri ve değerlendirmelerinin nasıl geliştiğini ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Bu çalışmaların tümü öğrencilerin veya öğretmen adaylarının ispat şemalarındaki değişimlerini Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şeması sınıflandırmasını temel alarak ortaya çıkarmaya çalışmışlardır. Lise öğrencileriyle yürütülen çalışmaların haricindeki tüm çalışmalar, ispat şeması sınıflandırması için görüşme yöntemini kullanmışlardır. Bu çalışmalardan bazıları (Haverhals, 2011; Recio ve Godino, 2001) klinik görüşme yöntemini kullandıklarını belirtirlerken, bir çalışma (Sowder ve Harel, 2003) verilerini yarı yapılandırılmış görüşmelerden elde ettiğini açıklamıştır. Diğer başka bir çalışma (CadwalladerOlsker, 2007) ise ispat şemalarını belirlerken sadece görüşmeler gerçekleştirdiğini belirtmiştir. Lise öğrencileriyle yürütülen çalışmalarda (Martin, Soucy McCrone, Wallace Bower, ve Dindyal, 2005; Soucy McCrone ve Martin, 2004) ise görüşme yöntemi kullanılmamıştır. Bu çalışmalar verilerini gözlemler, sınıf kayıtları, alan notları, öğrencilerin çalışmaları gibi kaynaklardan elde ettiklerini belirtmişlerdir. Sadece bir çalışma (CadwalladerOlsker, 2007) nitel ve nicel yöntemlerle veri topladığını belirtirken, bu bölümdeki diğer tüm çalışmalar verilerini nitel yöntemlerle topladıklarını raporlamışlardır. Aşağıda, anılan çalışmaların özetleri yer almaktadır:

Lise öğrencilerinin ispat anlayışlarının gelişimini ve öğretmenlerin, bu öğrencilerin anlayışlarındaki etkilerini inceleyen çalışmaların özetleri aşağıdaki gibidir;

Martin, Soucy McCrone, Wallece Bower ve Dindyal'ın (2005) yürüttükleri çalışmanın amacı ispat anlayışının gelişimi ile ilişkili olabilecek etkenleri belirlemektir. Çalışma Amerika'nın orta batısındaki büyük bir lisede başarılı geometri öğrencilerinin olduğu bir sınıfta gerçekleştirilmiştir. Çalışmada geometri dersinde Öklit geometrisine dayalı ders kitabına bağlı etkinlikler uygulanmıştır. Nitel yöntemlerle yürütülen çalışmanın veri kaynakları sınıf etkinliklerinin kamera kayıtlarının deşifreleri, alan notları ve öğrencilerin yaptıkları işlerin kayıtlı notları olmuştur. Veri analizi sonucunda ortaya çıkan kodlar öğretmen davranışları, öğrenci davranışları, sosyal fenomenler ve matematik fenomenleri olarak belirlenmiştir. Çalışmada matematiksel varsayımların, gerekçelendirme süreçlerinin ve oluşturulan ispatların tartışıldığı sınıflardaki öğrenci ve öğretmen davranışları ile belirgin sosyal yönler ortaya çıkarılmış ve yorumlanmıştır. Çalışmada ispat şemalarının belirlenmesi amacıyla Harel ve Sowder'in (1998) ispat şeması sınıflandırması kullanılmıştır. Çalışmada öğrencilerin aksiyomatik sistemin ilkeleri doğrultusunda formel ispatlar üretmeye adapte olmalarına rağmen, genel durumların doğruluğundan birçok deneme yapmadan emin olamadıkları görülmüştür. Bu yüzden ders öğretmenin öğrencilerin ispat şemalarını ortaya çıkarırken ortaya koyduğu pedagojik seçimlerin net olmadığı belirtilmiştir.

Soucy Mccrone ve Martin'in (2004) yürüttükleri çalışmanın amacının bir geometri sınıfında ispatın öğretimi ile öğrenimi arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmak olduğu ve daha belirgin olarak, öğretmenin davranışlarının; bir öğrencinin, bir ispatı nelerin oluşturduğu hakkındaki anlayışlarını nasıl etkilediğini belirlemek olduğu belirtilmiştir. Çalışma Amerika'nın orta batısındaki büyük bir lisenin en başarılı geometri sınıfında öğrenim gören bir sınıf lise öğrencisi üzerinde gerçekleştirilmiştir. Çalışmada öğretmenin davranışları sonucunda öğrencilerin dışsal ispat şemasından analitik ispat şemasına nasıl geçtikleri belirlenmeye çalışılmıştır. Araştırmacılar Öklit geometrisi kullanılarak aksiyomatik formel ispatların oluşturulmaya çalışıldığı geometri sınıfında dört ay boyunca hemen hemen her gün gözlem yapmışlardır. Nitel yöntemlerle gerçekleştirilen veri analizi öğrencilerin çalışmaları, alan notları ve sınıf kayıtlarının deşifrelerinden oluşmuştur.

Çalışmada Harel ve Sowder'in (1998) ispat şemalarıyla tutarlı birçok sınıflandırma ortaya çıkmıştır. Çalışmada öğretmenin önerileri ile öğrencilerin gelişmiş ispat şemaları

düzeylerine çıkabildikleri belirlenmiştir. Öğretmenlerin desteğiyle öğrencilerin aksiyomatik ispat şemasına geçişte zorlanmadıkları belirlenmiştir.

Üniversite öğrencilerinin ispat öğrenme süreçlerindeki gelişimlerini, ispat şemalarının veya bu şemaların farklı bağlamlardaki anlamlarının arasındaki anlayışların nasıl değiştiğini ortaya koyan çalışmaların özetleri aşağıdaki gibidir:

Haverhals'ın (2011) yürüttüğü çalışmanın amacı öğrencilerin ispat öğrenme sürecindeki gelişimlerini ve gelişim evrelerini belirlemektir. Çalışma 2009 yılının bahar döneminde Amerika'daki bir üniversitede dokuz lisans öğrencisi ile yürütülmüştür. Bir yıl boyunca bir ders kapsamında iki haftada bir gerçekleştirilen görüşmeler yapılmıştır.

Her bir görüşme boyunca öğrencilerden matematiksel ispatları tamamlamaları, değerlendirmeleri veya tartışmaları istenmiştir. Nitel durum çalışması olarak yürütülen boylamsal çalışmada öğrencilerin tepkileri tekrarlı olarak derinlemesine analiz edilerek öğrencilerin süreç içerisindeki gelişimleri görülmüştür. Öğrenciler bu süreçte sesli düşünerek çeşitli çalışmalar tamamlamışlardır. İlk çalışmada öğrencilerin daha önce görmedikleri ispatlarla çalışmaları sağlanmıştır. Ders boyunca öğrencilerin yeni problemlerle uğraşmaları sağlanarak oluşan değişimleri gözlemek amaçlanmıştır. İkinci çalışmada öğrenciler daha önce yaptıkları çalışmaları görmüş ve ne kadar geliştiklerini gözlemlemişlerdir. Bu durum daha sonra öğrencilere ispat dersine geçmeden bir sınav halinde uygulanmıştır. Son çalışmada ise öğrenciler tamamlanmış ispatları değerlendirmişlerdir. Çalışmada nitel araştırma yaklaşımı benimsenerek öğrencilerle nitel görüşme ortamında yürütülmüştür. Çalışmada ispat şemalarının analizi için ise Harel ve Sowder'ın (1998) sınıflandırması kullanılmıştır. Veriler sınıf gözlemleri, klinik görüşmeler ve ev ödevlerinin incelenmesi ile elde edilmiştir.

Çalışmanın verileri tüm öğrencilerde ortak olan belirleyici bir yol bulunamadığına işaret etmiştir. Sadece bir öğrenci çalışmanın başından itibaren belirlenen kriterlere göre açık bir ilerleme kaydetmiştir. Bu öğrenci ispat yapma yolunda ispat çeşidinde değişimler göstermiştir. Diğer öğrencilerden altısı ise ispata ilişkin olgunlaşmış bir bakış açısıyla çalışmaya başlamışlar ve çok az bir gelişim göstermişlerdir. Kalan iki öğrenci ise daha az başarılı olup gelişmiş ispat çeşitlerini çok az kullanmışlardır. Çalışmada iki öğrenci dışında kimse deneysel ya da dışsal şemaları bir görüşmeden fazlasında kullanmamıştır. Bu iki öğrenci dışında her öğrenci analitik ispat şemasının özelliklerini göstermişlerdir. Analitik ispat şemasının bu kadar sık görülmesinin sebebinin daha önce aldıkları matematik

dersiyle ilgili olduğu ve bu ispat şemasına sahip olan öğrencilerin ispatı nelerin oluşturup nelerin oluşturmadığı hakkında açıkça düşünmüş olmalarından kaynaklandığı belirtilmiştir.

CadwalladerOlsker'in (2007) çalışmasında öğrencilerin ispat şemaları dönem başı ve sonunda karşılaştırılmıştır ve bir dönem boyunca ispat şemalarının nasıl geliştiği incelenmiştir. Bunun yanında ispat şemalarının onların ispat yazma becerileri üzerindeki etkisinin de ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Çalışma 2006 güz döneminde altı sanat yüksek okulunda gerçekleştirilen tanıtıcı ispat dersinde 77 öğrenciyle yürütülmüştür. Çalışmada öğrencilerin ispat uygulamaları, ispata ilişkin inançları, ispat şemaları ve yazdıkları ispatlar arasındaki ilişkilerin incelenmesi için nicel ve nitel yöntemler kullanılmıştır. Nitel yöntemlerde ispat şemaları Harel ve Sowder'in (1998) sınıflandırmasına göre incelenmiştir.

Çalışmada görüşmelerle desteklenen ölçme aracı kullanılmıştır. Ölçme aracı ve görüşmeler öğrencilerin ispat şemaları ve ispat yazma becerilerini incelemek için onların ispat hakkındaki inançları ve alışkanlıkları hakkında da sorular içermiştir. Ölçme aracı dönem başı ve dönem sonunda iki farklı biçimde uygulanmıştır. Her bir sınıf bir durum olarak algılanarak altı sınıfla durum çalışması yürütülmüştür.

Uygulamanın birinci bölümde öğrencilere bir küme teoremi ve bu teoremin doğruluğunu ispatladığı iddia edilen ve her biri bir ispat şemasına dayalı olarak hazırlanan beş argüman verilmiştir. Çalışmada, çok az öğrenci algısal argümanı en ikna edici olarak bulurken, öğrencilerin çoğu aksiyomatik argümanı ikna edici bulmuştur. İlk ölçme aracında hiçbir öğrenci tümevarımsal ve sembolik argümanı en çok ikna edici olarak bulmazken ikinci ölçme aracında ikinci dönem sonunda bir öğrenci tümevarımsal argümanı ve bir öğrenci sembolik argümanı en çok ikna edici olarak bulmuştur. Bunun dışında öğrencilerin büyük çoğunluğu analitik dönüşümsel ve aksiyomatik argümanları ikna edici bulmuşlardır.

Recio ve Godino'nun (2001) yürüttükleri çalışmanın amacı üniversitede okuyan öğrencilerin ispat şemalarını tespit ederek bu ispat şemalarıyla ispatın günlük hayatta, deneysel bilimlerde, profesyonel matematikte, mantıkta ve matematiğin kaynaklarında gibi farklı bağlamlardaki anlamlarının arasındaki kurumsal ilişkileri ortaya çıkarmak olmuştur. Çalışma İspanya'da bir üniversitede 1994-1995 akademik yılları ile 1997-1998 yıllarında farklı iki zaman aralığında ve üniversiteye o yıl başlayan öğrenciler üzerinde gerçekleştirilmiştir. İlk örneklem 429 öğrenciden oluşmuş, 1997-1998 öğretim yılında

çalışmaya yüz doksan üç öğrenci katılmıştır. Öğrenciler farklı fakültelerden seçilmişlerdir. Çalışmada öğrencilere iki problemten oluşan bir form yöneltilmiştir. Öğrencilerin yanıtları genelleme ve sembolleştirme becerilerinin ölçülmesi için yapılan bir sınıflandırmaya göre beş sınıflandırma altında toplanmıştır. Bu sınıflandırmaların her biri öğrencilerin ispat şemaları olarak sınıflandırılmıştır. Çalışmada Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şeması sınıflandırması kullanılmıştır. Nitel yöntemlerle yürütülen çalışmada klinik görüşme yöntemi kullanılmıştır. Çalışmada tümdengelimsel matematiksel ispatın öğrenciler için zor olduğu sonucuna ulaşılmıştır. İspatın farklı anlamlarının bu zorluğu açıklamaya yardım edeceği belirtilmiştir. Öğrencilerin ispat şemalarının problemlerdeki matematiksel içerikten bağımsız kaldığı belirtilmiştir. Öğrencilerin her bir ispat şemasının ne ifade ettiği farklı kurumsal bağlamlardaki matematiksel ispatın farklı anlamlarıyla ilişkilendirilmiştir. Çalışmada öğrencilerin en temel önermelerde bile tümdengelimsel matematiksel ispatları kendiliğinden üretebilmede sınırlı beceriye sahip oldukları tespit edilmiştir. Çalışmada ayrıca öğrencilere öğrendikleri formel işlem basamakları dışında yeni ispat stratejileri geliştirmelerini gerektiren sorular yöneltildiğinde büyük bir çoğunluğunun argümanlar üretirken kendiliğinden gelişen deneysel tümevarımsal ispat şemasının kullandıkları tespit edilmiştir.

Lise matematik öğretmeni adaylarının ispat anlayışları, ispat üretimleri ve değerlendirmelerinin nasıl geliştiğini ortaya çıkarmaya çalışan tek çalışma Sowder ve Harel'a (2003) aittir. Anılan çalışmanın özeti aşağıda yer almaktadır:

Sowder ve Harel'ın (2003) çalışmalarının amacı öğretmen adaylarının ispat anlayışları, üretimleri ve değerlendirmelerinin nasıl geliştiğinin ortaya çıkarılmasıdır. Çalışma Amerika'nın güneybatısında bir üniversitede lise matematik öğretmenliği lisans programında öğrenim gören öğretmen adaylarıyla gerçekleştirilmiştir. İlk grup katımcı soyut matematik ve lineer cebir derslerinden rastlantısal olarak seçilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat dersi boyunca ispat görüşlerinin nasıl değiştiğinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Yarı yapılandırılmış görüşmeler öğretmen adaylarının ispat anlayışları, üretimleri ve değerlendirmelerini (İAÜD: proof understanding, production and appreciation (PUPA)) incelemek üzere üç yıl boyunca sürmüştür. Çeşitli sayıdaki görüşmelerle 38 öğretmen adayı çalışmaya katılmıştır. Bu çalışma ise lisans programının çeşitlilik gösteren doğasını ortaya koymak üzere üç öğretmen adayının durum çalışmasından oluşmuştur. Bu öğrencilerden biri olan Ann derslerinde yüksek başarıya sahip öğrenci olup ispat becerileri her iki görüşmede de düşük olmuştur. Diğer öğrenci

olan Ben görüşmeler boyunca yüksek İAÜD gösteren öğrenci olmuştur. Carla ise orta düzeyde başarıya sahip olan öğrenci olmuştur. Çalışmada ispat şemalarının belirlenebilmesi için Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şeması sınıflandırmasından yararlanılmıştır.

Üç durum çalışması da öğrencilerin ispat becerilerinin gelişiminde değişimler olduğunu ortaya çıkarmıştır. Bazı öğrencilerin üniversiteye zayıf İAÜD ile girip üniversiteyi zayıf ispat becerileri ve algılarıyla bitirirken, bazıları matematik lisans programlarında bazı gelişimler göstermekte olduğu, bazı öğrencilerin zengin İAÜD ile girip zengin bir ispat ortamında gelişmeye devam ettikleri belirtilmiştir. Çalışmada ilk durum çalışması Ann olmuştur. Ann'in tüm görüşmelerinde zayıf İAÜD'ye sahip olduğu ve tüm görüşmelerde deneysel tümevarımsal ispat şemasını kullanarak dönüşümsel ispat şemasının özelliklerini pek göstermediği belirlenmiştir. Ben'in ilk görüşmeden itibaren deneysel ispat şemasının özelliklerini çok nadir olarak sergilediği ve tüm görüşmelerde ve dönüşümsel ispat şemasına sahip olduğu belirlenmiştir. Ben'in farklı olmasının sebebinin üniversiteye başlarken ispatla ilgili uygun deneyimlere sahip olmuş olabileceği belirtilmiştir. Carla'nın ise ilk görüşmesinde ispatta rahat olmadığı, özel durumlar verildiği zaman bile, argümanlarına diğer durumları inceleyerek başladığı ve belirli durumları soruşturmasının yeterli olmayacağına farkına vardığı ve yine de karşı örnekle ispat hakkında netleşemediği fakat ilerleyen zamanlarda çelişki yöntemiyle ispatla kendini rahat hissetmeye başlayarak ilerleme kaydettiği belirtilmiştir. Ben'in İAÜD'sinde geliştiği ve beşinci görüşmesinde aksiyomatikleşen (axiomatizing) ispat şemasına geçiş yaptığı; Yunan aksiyomatik (Greek axiomatic) ispat şemasının özelliklerini gösterdiği belirtilmiştir.

Öğretmen adaylarının ve öğrencilerin ispat şemalarının gelişimini inceleyen boylamsal araştırmaların sonuçlarına ilişkin özet aşağıda yer almaktadır:

Bu çalışmalar ispat şemalarının gelişimiyle ilgili yargılarda bulunmuşlardır. Burada özetlenen çalışmaların çoğu öğrencilerin ya da öğretmen adaylarının ispat şemalarının gelişiminde tanımlayıcı ortak özellikler bulundurmamıştır. Örneğin; Sowder ve Harel (2003) çalışmasını üç öğretmen adayıyla üç yıl boyunca yürütmüş ve öğretmen adaylarının İAÜD'lerini incelenmiştir. Burada üç durum çalışması da öğretmen adaylarının ispat becerilerinin gelişiminde değişimler olduğunu ortaya çıkarmıştır. Fakat bu değişimler ortak bir yapıyla değil her bir öğretmen adayı için ayrı ayrı değerlendirilerek ortaya konmuştur. Benzer şekilde lisans öğrencilerinin ispat öğrenme sürecindeki gelişimlerini ve gelişim evrelerini belirlemeyi amaçlayan Haverhals'ın (2011) çalışmasında tüm katılımcılarda

ortak olan tanımlayıcı yollar bulunamamıştır, sadece bir öğrencinin çalışmanın başlangıcında hazırlanmış olan kritere göre değerlendirilirken belirgin bir ilerleme gösterdiği saptanmıştır. Bunun yanında iki öğrenci dışında kimsenin deneysel ya da dışsal şemaları bir görüşmeden fazlasında kullanmadığı ve iki öğrenci dışında her öğrencinin analitik ispat şemasının özelliklerini gösterdiği belirlenmiştir. Martin ve diğerleri'nin (2005) çalışmasında lise öğrencilerinin dışsal ispat şemasından analitik ispat şemasına nasıl geçtikleri belirlenmeye çalışılmış; fakat ders öğretmenin öğrencilerin ispat şemalarını ortaya çıkarırken ortaya koyduğu pedagojik seçimlerin net olmadığı belirtilmiştir. Bunun yanında öğretmenin önerileri ile öğrencilerin gelişmiş ispat şemaları düzeylerine çıkabildikleri görülmüştür.

Çalışmalardan ikisi (CadwalladerOlsker, 2007; Recio ve Godino, 2001) lisans öğrencilerinin belirli dönemlerdeki ispat şemaları ile ilgili ölçümleri arasındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olmadığı ya da gelişim göstermediği sonucuna ulaşmıştır. Bir çalışma (SoucyMccrone ve Martin, 2004) ise lise öğrencilerin ispat şemalarında olumlu değişim gösterdiklerini belirtmiştir. Öğrencilerin gelişmiş ispat şemaları düzeylerine çıkabildikleri belirlenmiş ve öğretmenlerin desteğiyle öğrencilerin aksiyomatik ispat şemasına geçişte zorlanmadıklarını vurgulanmıştır.

2.2.1.1.3. İspat şemalarını farklı değişkenlerle ilişkileriyle beraber inceleyen araştırmalar.

Bu bölümde, öğrencilerin ispat şemalarını belirleyen ve bunun yanında bu ispat şemalarının farklı değişkenlerle ilişkisini inceleyen çalışmalara yer verilmiştir. Bu çalışmaların kısa bir özeti aşağıda yer almaktadır. Özetten sonra bu grupta yer alan her bir araştırma çalışma grubuna göre alt alta özetlenmiştir. Bu bölümün en sonunda bu çalışmaların sonuçlarına ilişkin özetler verilmiştir. Bu sonuçlara ilişkin özetlerde öğrencilerin ispat şemalarıyla bu değişkenler arasındaki ilişkilere odaklanmak yerine bu çalışmaya daha yararlı olacak şekilde öğrencilerin ispat şemalarıyla ilgili sonuçlara yer verilmiştir.

Bu çalışmaların her biri öğrencilerin ispat şemalarını başka bir değişkenle beraber ele almış fakat yine öğrencilerin ortaya koydukları ispat şemalarına ait tepkilere ilişkin sonuçlara yer vermişlerdir. Örneğin, lisans öğrencileriyle çalışmalarını yürüten Stylinou, Chae ve Blanton (2006) öğrencilerin problem çözme yollarını ortaya koyarak bu yollarla onların ispat şemaları arasında ne gibi ilişkiler olduğunu belirlemeye çalışırken benzer

şekilde Plaxco (2011) lisans öğrencilerinin matematiksel tanım anlayışlarını ortaya koyarak bu anlayışlar ile onların ispat şemaları arasında ne gibi ilişkiler olduğunu belirlemeye çalışmışlardır. Lisans öğrencileriyle çalışmalarını yürüten Housman ve Porter (2003) ise öğrencilerin matematiksel kavramlar öğrenirken kullandıkları stratejiler ve geçmiş ispat deneyimleri ile onların ispat şemaları arasındaki ilişkileri aramışlardır. Tüm bu çalışmalar nitel yöntemler kullanmışlardır. Bu çalışmalardan Stylinou ve diğerleri (2006) öğrencilerin ispat şemalarını klinik görüşmeler ile, Housman ve Porter (2003) görev temelli görüşmeler ile belirlemeye çalışmışlardır. Plaxco (2011) ise öğrencilerin ispat şemalarını belirlemek için görüşmeler yaptığını belirtmiştir.

Bu çalışma grubunda ortaokul öğrencileri ile çalışmasını yürüten tek çalışma olan Ören (2007) ise öğrencilerin bilişsel stilleri ve cinsiyetlerine göre ispat şemaları kullanımlarındaki farklılıkları araştırmıştır. Nicel yöntemlerle yürütülen çalışma tanımlayıcı ve nedensel karşılaştırmalı olarak nitelendirilmiştir. Bu çalışma öğrencilerin ispat şemalarına ilişkin verilerini görüşme yolu yerine açık uçlu sorulardan oluşan veri toplama aracılığıyla toplamıştır. Aşağıda, anılan çalışmaların özetleri yer almaktadır:

Lisans öğrencilerinin ispat şemalarını başka bir değişkenle beraber ele alan ve öğrencilerin ispat şemalarına ait tepkilere ilişkin sonuçlara yer veren çalışmaların özetleri aşağıdaki gibidir:

Plaxco'nun (2011) çalışmasının başlıca amacı lisans öğrencilerinin matematiksel tanım anlayışlarını araştırmak ve bu anlayışların, onların genel ispat şemalarıyla nasıl bir ilişki içinde olduğunu ortaya çıkarmaktır. Nitel yöntemle hazırlanan bu tez çalışması Amerika'nın Virginia eyaletindeki bir enstitüsünde öğrenim görmekte olan Alex, Betty, ve Carolina olarak isimlendirdikleri üç lisans öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerle görüşmeler yapılmış ve ispatların kabul ya da reddine bağlı olarak katılımcıların ispat şemalarının belirlenmesi yoluna gidilmiştir. Araştırmacı katılımcılara Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şeması sınıflandırmasındaki bir çeşide denk düşen (analitik, deneysel ya da dışsal) bir ispat matrisi yöneltmiştir. Araştırmacı katılımcıların ispat şemalarını belirlemek; temel düşünme temalarını tanımlamak için görüşmelerden sonra her bir görüşme kaydını analiz etmiştir. Araştırmacı öncelikle katılımcıların yanıtlarının matematiksel doğruluğunu değerlendirmiş, daha sonra her bir cevabın açıklamalarına göre katılımcıların düşüncelerinin bütüncül modeline ulaşmak için yanıtları ve çalışmalar arası düşüncelerini karşılaştırarak temaları oluşturmuştur.

Yapılan görüşmelerde Alex ağırlıklı olarak analitik ispat şemasının aksiyomatik sezgisel özelliklerini göstermiştir. Bazı durumlarda ispatın içeriğinden çok biçimine önem vermiş ve böylelikle dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının özelliklerini sergilemiş ve ispat yapılandırılmalarında örnek kullanımı hakkında derin bir anlayışa sahip olmuştur. Örnekleri, sembolik ilişkileri kabul edip reddederken sağlıklı biçimde kullanabilmiştir. İkinci katılımcı olan Betty görüşmelerde ağırlıklı olarak analitik ispat şemasının özelliklerini göstermekle beraber bazı durumlarda dışsal alışkanlık edinilmiş ve deneysel ispat şemasına eğilim göstermiştir. Betty'nin ispat şeması matematiksel ilişkileri kendi başına doğrulama eğiliminde olduğunu göstermiştir. Üçüncü katılımcı olan Caroline kendisiyle yapılan görüşmelerde dışsal otoriter, deneysel tümevarımsal ve analitik ispat şemalarının kombinasyonunu ortaya koymuştur. Çalışmada öğrencilerin matematiksel kavram imajlarının onların ispat şemalarını geliştirdiği ya da engellediğini göstermiştir. Çalışmanın sonuçları öğrencilerin matematiksel anlayışlarının kavram imajlarını adapte etmedeki yeterliklerinin ya da yetersizliklerinin onların ispat şemalarını geliştirdiğini ya da engellediğini göstermiştir.

Stylinou, Chae ve Blanton'un (2006) çalışmalarının amacı üniversite öğrencilerinin ispat şemalarını, bu ispat şemalarını ortaya koyarken kullandıkları problem çözme yollarını belirleyerek bu yollarla ispat şemaları arasında ne gibi ilişkiler olduğunu belirlemektir. Çalışma bir üniversitenin matematik bölümünde okuyan 34 lisans öğrencisi üzerinde yürütülmüştür. Çalışma bir dönem boyunca ispat ve matematiksel argümantasyonun vurgulandığı soyut matematik dersinde sürdürülmüştür.

Nitel yöntemle yürütülen çalışmada farklı ispat şemalarına sahip öğrencilerle ispat yaparken klinik görüşmeler yapılmış ve öğrencilerin problem çözerlerken sahip oldukları kalıplar ile ispat şemaları arasındaki olası ilişkilerin belirlenmesi için işlem basamakları analiz edilmiştir. Çalışmada dönem başında ders öğrencilerinin hepsi çalışmaya davet edilmiş, her öğrenciye klinik görüşmeler boyunca üç matematik problemi sunulmuştur. Öğrencilerin ispat şemaları Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şemaları sınıflandırmasına göre sınıflandırılmıştır. Her bir işlem basamağı okuma, analiz, keşfetme, planlama, uygulama ve doğrulama içeren bölümlere ayrılmıştır. Daha sonra, öğrencilerin ispatlarında ilerlerken yaptıkları açıklama ve tanımlar tümdengelimsel yolla ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Çalışmada her bir ispat şemasına sahip öğrencilerin ispat yaparken benzer kalıplarda hareket ettikleri ve bu kalıpların onların ispat performanslarını etkilediği

sonucuna ulaşılmıştır. Çalışmada öğrencilerin çoğunluğunun deneysel ispat şeması özelliklerini gösterdikleri görülmüştür. Çalışmada farklı ispat şemalarını takip eden farklı problem çözme yolları olduğu sonucuna varılmıştır. Örneğin dışsal ikna şemasını kullanan öğrenciler okuma yaptıktan sonra tanımı sunmuşlar, daha sonra ispatı sembol manipölasyonu yaparak sonlandırmışlar veya orada bırakmışlardır. Deneysel ispat şeması özelliklerini gösteren öğrenciler okuma yaptıktan sonra sayısal örneklerle keşif yoluna başvurmuşlar, daha sonra ise tümevarımsal bir varsayımla ispatı sonlandırmışlardır. Analitik ispat şemalarını kullanan öğrenciler ise okuma yaptıktan sonra tanımı sunmuşlar ve analize başlamışlardır. Analitik ispat şeması özellikleri gösteren öğrenciler birbirini izleyen etkinlikler için bir amaç belirlemişler, tanımlarını sembolleştirmişler (temsil etmişler), tanımlarını araştırarak problem durumuna fazladan anlayışlar kazandırmışlar ve yeni bilgiyi başlangıçtaki problemle ilişkilendirmişlerdir. Bunların sonucunda ise tündengelsel ispatı yapılandırmayı başarmışlardır.

Housman ve Porter'ın (2003) yürüttükleri çalışmanın amacı ortalamanın üzerinde başarıya sahip öğrencilerin matematiksel argümanlarda ikna edici buldukları kalıpları ve yeni matematiksel kavramlar öğrenirken kullandıkları stratejileri ortaya çıkarmaktır. Çalışma bir yüksekokulda okuyan ve matematik derslerinde başarılı 11 kız öğrenci ile gerçekleştirilmiştir.

Nitel yöntem kullanılarak hazırlanan çalışmada öğrencilerle görev temelli görüşmeler yapılmıştır. Görüşmelerde öğrencilerden her bir varsayımın doğruluğu hakkında yorum yapmaları istenmiş, bunun için kendilerine yazılı ispatlar verilmiştir. Daha sonra her bir öğrenciye her bir varsayım için varsayımlarının doğruluğunu yorumlamalarını sağlayacak sorular sorulmuştur. Bu ifadeler ise Harel ve Sowder'ın (1998) ispat şemaları sınıflandırmasına göre sınıflandırılmıştır. Öğrencilerin matematiksel kavramları tanımlarından öğrenirken ne tip stratejileri kullandıklarını ortaya çıkarmak için ise ikinci bir görüşme tasarlanmıştır.

Tüm öğrenciler, yapmaları istendiğinde başarılı biçimde örnek oluşturabilmişlerdir fakat hiç yardım almadan örnekleri oluşturmalarına göre ve varsayımları reddetmek gerektiğinde örnek oluşturmada başarılı olup olmamalarına göre ayrılmışlardır. Bazı öğrenciler kısa süre içerisinde ispat şemalarının üç ana sınıflandırmasının özelliklerini göstermişlerdir. Biri hariç tüm öğrenciler iki ya da üç ispat şemasının özelliklerini sergilerken bir tanesi dört ispat şeması özelliklerini göstermiştir. Daha çok dışsal faktörlerle ikna olan öğrenciler örnekleri genellemede, örnekleri kullanmada ve kavramları

yeniden formüle etmede başarısız olmuşlardır. Örneklere dayalı argümanı ikna edici bulan tek öğrenci diğer öğrencilerden çok daha fazla örnek oluşturmuştur. Tümdengelsel argümanlar yazan ve bunlarla ikna olan öğrenciler örnekleri kullanmada ve kavramları yeniden formüle etmede başarılı olmuşlardır. Bu öğrenciler örnekleri, yapmaları istendiği zaman veya bir varsayımı reddetmeleri gerektiğinde başarılı bir şekilde oluşturmuşlardır. Çalışmada beş öğrencinin dönüşümsel ispat şemasının en azından önemli görünüşlerini sergiledikleri belirlenmiştir. Bu öğrenciler aynı zamanda örnek kullanımını da aşırıya kaçmadan kararında yapan öğrenciler olmuşlardır. Dönüşümsel ispat şemasının belirgin özelliklerini taşımayan öğrencilerin varsayımları reddetmeleri gerektiğinde başarılı biçimde örnekler oluşturamadıkları görülmüştür. Öğrencilerin geçmiş ispat deneyimleri ile ilgili olarak bazı sonuçlara varılmıştır. Hiç ispat deneyimi olmamış öğrencilerin deneysel ya da dışsal ispat şemasının özelliklerini sergileyebilecekleri, iki ya da daha fazla ispat dersi alanların da analitik ispat şemasının özelliklerini gösterebileceğinin düşünülebileceği fakat bu çalışmada durumun farklı olduğu belirtilmiştir. Her bir ispat şeması sınıflandırması ispat deneyimi olan en az bir öğrenci tarafından sergilenmiştir. Biri hariç tüm öğrenciler iki ya da daha fazla ispat şemasının özelliklerini sergilemiştir. Yedi öğrenci temel sınıflandırmalardan birden fazlasını kullanmıştır. Öğrencilerin a) dışsal ispat şeması ve b) dışsal ve analitik ispat şeması haricinde temel sınıflandırmaların her kombinasyonunun özelliklerini sergiledikleri görülmüştür.

Lise öğrencilerinin ispat şemalarını başka değişkenlerle beraber ele alan tek çalışma olan Ören'in (2007) çalışmasına ilişkin özet aşağıda yer almaktadır:

Ören'in (2007) çalışmasının amacı lise öğrencilerinin geometri sorularında kullandıkları ispat şemalarını belirlemek ve öğrencilerin bilişsel stilleri ve cinsiyetlerine göre ispat şemaları kullanımlarındaki farklılıkları araştırmaktır. Çalışma 2005-2006 akademik döneminde Ankara'da bulunan dört lisede iki 224 10. sınıf öğrencisi ile yürütülmüştür. Çalışma hem tanımlayıcı hem de nedensel karşılaştırmalı bir araştırma olarak tanımlanmıştır. Çalışmanın verileri, iki veri toplama aracı kullanılarak elde edilmiştir. Öğrencilerin yanıtları Harel ve Sowder (1998) tarafından geliştirilen ispat şemaları çerçevesinde sınıflandırılmıştır.

Çalışmada öğrencilerin dışsal dayanaklı ve deneysel ispat şemalarını analitik ispat şemalarına göre önemli ölçüde daha fazla kullanmakta olduğunu ortaya konulmuştur. Öğrencilerin yaklaşık olarak % 44'ü deneysel, % 41' i dışsal şemalar kullanırken sadece % 14'ü analitik şemalar kullanmışlardır. Kız öğrenciler deneysel ispat şemalarını erkek

öğrencilere göre önemli ölçüde daha fazla kullanmışlardır. Bunun yanında, alan bağımlı öğrenciler dışsal dayanaklı ispat şemalarını alan bağımsız öğrencilere göre önemli ölçüde daha fazla kullanmışlardır. Çalışmada, alan bağımsız öğrencilerin analitik ispat şemalarını alan bağımlı öğrencilere göre önemli ölçüde daha fazla kullanmakta oldukları tespit edilmiştir. İspat şemalarını kullanımda bilişsel stil ile cinsiyet arasında anlamlı bir ilişki bulunamamıştır.

İspat şemalarını farklı değişkenlerle ilişkileriyle beraber inceleyen çalışmaların sonuçlarına ilişkin kısa bir özet aşağıda yer almaktadır:

Bu bölümdeki bir çalışma (Ören, 2007) lise öğrencilerinin, diğer bir çalışma (Stylinou ve diğerleri, 2006) ise lisans öğrencilerinin çoğunlukla deneysel ve dışsal ispat şemalarının özelliklerini sergilediklerini belirlemiştir. Ören'in (2007) çalışmasında lise öğrencilerinin dışsal dayanaklı ve deneysel ispat şemalarını analitik ispat şemalarına göre önemli ölçüde daha fazla kullanmakta oldukları belirlenmiştir. Bunun yanında çalışmada kız öğrencilerin deneysel ispat şemalarını erkek öğrencilere göre önemli ölçüde daha fazla kullandıkları belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin bilişsel stilleri ile kullandıkları ispat şemaları arasında anlamlı farklılıklar tespit edilmiştir. Stylinou ve diğerleri'nin (2006) çalışmasında benzer şekilde lisans öğrencilerinin çoğunluğunun deneysel ispat şemasını kullandıkları görülmüştür. Çalışmada farklı ispat şemalarını takip eden farklı problem çözme yolları olduğu sonucuna varılmıştır.

Bazı çalışmalar (Housman ve Porter, 2003; Plaxco, 2011) lisans öğrencilerinin analitik ispat şemasının özelliklerine sahip olduklarını ortaya koymuşlardır. Örneğin, Plaxco (2011) üç lisans öğrencisi ile yürüttüğü çalışmada bir öğrencisinin ağırlıklı olarak analitik ispat şemasının aksiyomatik sezgisel ispat şemasının özelliklerini gösterdiğini belirtirken diğer öğrencilerinin analitik ispat şemasının yanında başka ispat şemalarını da kullandıklarını ortaya koymuştur. Çalışmada öğrencilerin matematiksel kavram imajlarının ve matematiksel anlayışlarının onların ispat şemalarını geliştirdiği ya da engellediği belirlenmiştir. Housman ve Porter'ın (2003) çalışmasında birlikte çalıştığı öğrencilerden bir kısmının analitik dönüşümsel ispat şemasının en azından önemli görünümüne sahip olduğu belirlenmiştir. Çalışmada dönüşümsel ispat şemasının belirgin özelliklerini taşımayan öğrencilerin varsayımları reddetmeleri gerektiğinde başarılı biçimde örnekler oluşturamadıkları görülmüştür. Bunun yanında her bir ispat şeması sınıflandırması ispat deneyimi olan en az bir öğrenci tarafından sergilenmiştir.

2.2.1.2. Sonuçlarında ispat şemalarının özelliklerini barındıran deneysel araştırmalar.

Bu bölümde sonuçlarında ispat şemalarının özelliklerini barındıran deneysel araştırmalara yer verilmiştir. Anılan deneysel araştırmaların kısa bir özeti aşağıda yer almaktadır. Özetten sonra bu grupta yer alan her bir araştırma çalışma grubuna göre alt alta özetlenmiştir. Bu bölümün en sonunda ise bu çalışmaların sonuçlarına ilişkin özete yer verilmiştir.

Bu gruptaki çalışmalardan biri (Grigoriadou, 2012) lise öğrencilerinin diğeri bir çalışma (Ellis, 2007) ortaokul öğrencilerinin, bir diğeri (Harel, 2001) öğretmen adaylarının ve başka bir çalışma (Soto, 2010) ise öğretmenlerin ispat şemalarındaki değışimleri deneysel yaklaşımla ortaya koymuşlardır. Harel ve Rabin (2010) ise iki lise öğretmenin öğrencileri gözlemlediğı bir durum çalışması yürütmüşlerdir. Lise öğrencileriyle çalışmasını yürüten Grigoriadou (2012) öğrencilerin düşünme biçimlerinde oluşan değışikler gözlemek için önerdikleri öğretim modelinin öğrencilerin matematik ve ispat hakkındaki inançları üzerindeki etkisini araştırırken; Harel ve Rabin (2010) belirli öğretim uygulamalarının öğrencilerin otoriter ispat şeması gelişimi üzerindeki etkilerini araştırmışlardır. Ellis (2007) yedinci sınıf öğrencilerinin genelleme ve gerekçelendirme yollarını, önerdikleri bir öğretim modeli ile test etmiştir. Harel (2001) öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım anlayışlarının önerilen bir öğretim uygulaması ile dönüşümsel ispat şeması olarak gelişip gelişmediğini araştırırken, Soto (2010) bir lise öğretmenin yaz enstitüsünde bir öğretim uygulaması ile ispat şemalarındaki gelişimini incelemiştir. Anılan çalışmaların tümü önerilen öğretim uygulamalarının katılımcıların ispat şemalarında nasıl bir değışime yol açtığını belirlemeye yönelik çalışmalardır. Çalışmalar nitel yöntemlerle yürütülmüş olup sadece Grigoriadou (2012) çalışmasının hem nitel hem de nicel karaktere sahip olduğunu belirtmiştir. Anılan çalışmalara ilişkin veriler birebir görüşmeler (Ellis, 2007; Soto, 2010) ve klinik görüşmeler (Harel, 2001) yoluyla gerçekleştirilmiştir. Bunların yanında araştırmacılar sınıf uygulamalarının video kayıtları (Ellis, 2007; Harel ve Rabin, 2010; Harel, 2001, Soto, 2010), alan notları (Ellis, 2007; Harel, 2001), ödevler, yazılı test ve küçük sınavlar (Grigoriadou, 2012; Harel, 2001; Soto, 2010) gibi farklı veri kaynaklarından da yararlanmışlardır. Çalışmaların hepsi ispat şemaları sınıflandırmasında Harel ve Sowder'ın (1998) çatısını kullanmışlardır.

Aşağıda, anılan çalışmalardan ilk olarak öğretmen adaylarının ispat şemalarına ilişkin yürütülen Harel'ın (2001) çalışması, daha sonra ise sırasıyla öğretmenlerin (Soto,

2010), lise öğrencilerinin (Grigoriadou, 2012) ve ortaokul öğrencilerinin (Ellis, 2007) (2010) ispat şemalarını deneysel yaklaşımlarla ortaya koyan çalışmalar özetlenmiştir. En son olarak iki lise öğretmenin öğrencileri gözlemediği durum çalışmasını deneysel bir yaklaşımla ortaya koyan Harel ve Rabin'in (2010) çalışmasına ilişkin özet yer almaktadır:

Harel'in (2001) çalışmasının amacı lise matematik öğretmeni adaylarının matematiksel tümevarımla ilgili anlayışlarının ve düşüncelerinin ispat şemalarıyla nasıl ortaya çıktığını belirlemek ve öğrencilerin matematiksel tümevarımsal gelişim anlayışlarında ne gibi zorluklar yaşadıklarını ortaya çıkarmaktır. Çalışma 25 öğretmen adayıyla Amerika'da gerçekleştirmiştir. Çalışmada öğretmen adaylarının standart bir öğretim programında elemanter sayı kuramı dersinde matematiksel tümevarım ile ilgili farklı bir öğretim uygulaması (sayılar teorisi konusunda) sonucunda matematiksel tümevarım anlayışlarının dönüşümsel ispat şeması olarak gelişip gelişmediği ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Deneysel olarak yürütülen nitel çalışmanın uygulamasında öğretmen adaylarının ispat şemaları ortaya çıkarılıp gelişim süreçleri kaydedilmiştir. Bu çalışmada iki haftalık uygulama süreci farklı bir öğretim uygulamasıyla yapılandırılmıştır. Uygulanan öğretim, DNR sistem adı olarak bilinen bir tür öğrenme öğretme prensiplerine dayalı ve matematiksel ispat yaparken kullanılan sıralı bir öğretim uygulaması olmuştur. Öğrencilerin ispat şemalarını ortaya çıkarmak için Harel ve Sowder'in (1998) ispat şemaları sınıflandırmasından yararlanılmıştır. Bu öğretim uygulamasında otoriter, sembolik nicel dışı (non quantitative) ispat şeması ve deneysel ispat şeması sonuç modeli genelleme olarak ele alınırken; öğrenciler arasında pek yaygın olmayan dönüşümsel ispat şeması süreç modeli genelleme olarak ele alınmıştır. Çalışmanın verileri sınıf gözlemlerinin alan notları, yazılı testler ve quizler, sınıf gözlemlerinin video kayıtları ve klinik görüşmeler ile toplanmıştır.

Çalışmada öğrencilerin matematiksel tümevarımın temel ilkesinin nasıl bir ihtiyaçtan kaynaklandığını bilmedikleri, bunu bir reçete gibi kullandıkları gözlenmiş; matematiksel tümevarımın kullanımı daha çok otoriter ve sembolik, nicel dışı ispat şemalarıyla ortaya çıkmıştır. Çalışmadaki alternatif uygulamayla öğrenciler düşünme yollarını değiştirmişler, sadece deneysel akıl yürütme kullanmaktan vazgeçip sonuç modeli genellemeden süreç modeli genellemeyle dönüşümsel akıl yürütmeye geçmişlerdir.

Soto'nun (2010) yürütmüş olduğu çalışmanın amacı DNR tabanlı profesyonel gelişim (PG) bağlamında bir lise öğretmenin ispat şemalarının geçişini tanımlamak; bu

öğretmenin öğretim uygulamalarının gelişiminin doğasını incelemek ve bu iki unsur arasındaki bağlantıları ortaya koymak olmuştur. Çalışma 2003-2004 yazlarında Amerika'nın güneybatısındaki bir yaz enstitüsünde gerçekleştirilmiştir. Bu enstitünün öğrencilerinin tümü matematik ve pedagojik açıdan geçmişe sahip çeşitli özelliklerdeki öğretmenlerden oluşmuştur. Yaz enstitüsünün öğretmeni ise ispat şemalarının sınıflandırmasını yapan araştırmacılardan biri olan Guerson Harel'dır.

Çalışmada PG yaz enstitüsü dört hafta boyunca haftada beş gün günde altı saat olmak üzere iki yaz sürmüştür. PG yaz enstitüsü ve arkasından gelen bölümler probleme dayalı olmuştur. Öğretmenler küçük gruplar halinde problemler üzerinde çalışmış, çözümlerini ve çözüm stratejilerini hem küçük gruplar halinde hem de tüm sınıfta paylaşmışlardır. Durum çalışması olarak yürütülen çalışmada öğretmenin matematik yaparken video kaydı ve kendi öğretiminin kamera görüntüleri olmak üzere iki veri kaynağı incelenmiştir. İspat şemalarının analizinde PG boyunca ispat üretimi üzerine odaklanılmıştır. Öğretmenin uygulama gelişimi de iki yıl boyunca incelenmiştir. Çalışma öğretmenin ispat şemaları ile öğretme uygulamaları arasındaki teorik bağlantılar içermiştir.

PG'den ve sonrasında toplanan veriler, ön test ve son testle, alan notları, öğretmenlerin ödevlerinin kopyaları, bireysel görüşmeler ve seçili küçük gruplar ile tüm sınıf tartışmalarının derslerinin video kayıtlarından oluşmuştur. PG'yi izleyen her yaz on bir katılımcı üç hafta boyunca kendi öğrencilerine öğretim uygularken gözlenmek için seçilmiştir. Öğretmenlerin her bir dersi video kaydına alınmış ve alan notları alınmıştır. Öğretmenlerin konuşmaları üç haftalık sürede tamamlanmış ve ses kaydına alınmıştır. Bu çalışmada sadece PD yaz enstitüsünün kamera kayıtlı dersleri, PG sonrası bölümler ve daha önceden var olan veri setinin sınıf öğretim gözlemleri kullanılmıştır. Çalışmada ön test ve son testler PG yaz enstitüsünden önce ve sonra uygulanmıştır. Çalışmanın amaçlarına uygun olarak çalışmanın bir tek öğretmenle yürütülmesinde karar kılınmıştır. Çalışmada öğretmenin (Maggie) ispat şemalarının belirlenebilmesi için Harel ve Sowder'ın (1998) sınıflandırması kullanılmıştır.

Maggie başlangıçta bir ispatı nelerin oluşturduğu hakkında çelişkilere sahipken, PG boyunca artan bir matematiksel ustalığa sahip olmuştur. Çalışmada Maggie'nin değişmeye en çok direnç gösteren ispat şeması ima yollu (referential) sembolik ispat şeması olmuştur. Maggie sembolleri, anlamlarını ortaya çıkarma becerisiyle problem bağlamında gerekli olduğu zaman manipüle edebilmiştir. Bu yüzden Maggie'nin ima yollu sembolik ispat şemasında bir değişiklik olmamıştır. Maggie model genellemesinde biraz dengesizlik

yaşadıysa da daha sonra dönüşümsel ispat şemasını kullanmada tutarlılık göstermiştir. Maggie deneysel ispat şemasından tümdengelimsel ispat şemasına geçmiştir. Öğretim uygulamalarındaki en büyük gelişmelerin, öğrencilerin çözümlerini kendi aralarında konuşmalarını sağlayarak, öğrencilerden varsayımlarını ispatlamalarını isteyerek, doğru çözümlerin varlığını alternatif çözümler isteyerek ve doğru çözümlere matematiksel ayrıntılarla yaklaşarak oluşturulduğu sonucuna varılmıştır.

Grigoriadou'nun (2012) çalışmasında öğrencilerin tümevarımsal argümanları bırakıp tümdengelimsel argümanlara geçerken düşüncelerine odaklanılmıştır. Çalışma Yunanistan'da bir lisede 2010 yılında matematikte başarılı olan 19 öğrenci ile yürütülmüştür. Çalışmada öğrencilerin öğrenme süreçlerinde yönlendirildikleri bir öğretme modeli önerilmiştir ve bu modül öğrenciler üzerinde uygulanmış ve sonuçlar tartışılmıştır. Öğrencilerin düşünme biçimlerinde oluşan değişiklikler ve bu değişimin öğrencilerin matematik ve ispat hakkındaki inançları üzerindeki etkisi incelenmiştir. Çalışmada öğrencilerin düşünme biçimleri ve bunların sınıflandırması için Harel ve Sowder'in (1998) ispat şeması sınıflandırmasından, düşünme düzeyleri sınıflandırması için Van Hiele teorisinden yararlanılmıştır. Çalışmada ispat şemaları ile düşünme düzeyleri arasında bir ilişki olup olmadığı ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Deneysel yöntemle yürütülen çalışma hem keşfedici hem de açıklayıcı olarak tanımlanmıştır. Bunun yanında, çalışmanın çoğunlukla nitel olduğu fakat aynı zamanda bazı nicel karakterlerinin de olduğu belirtilmiştir.

Çalışmada yeni bir öğretme modeli kullanılmıştır. Bu model öğretme stratejilerinin tasarlanmasını ve değerlendirilmesini içermiştir. Çalışmada uygulanan modelde öğrencilerin tümevarımsal ve tümdengelimsel argümanlar arasındaki ayrımın farkında olmaları ve kendi başlarına tümdengelimsel ispatlar yapılandırabilmeleri amaçlanmıştır. Çalışmanın ana veri kaynakları yazılı testler, görevler (task) ve soru formları olmuştur.

Çalışmada öğrenciler (24 öğrenci) uygulama öncesi Van Hiele üçüncü düzeyde bulunmuştur. Uygulama sonrası öğrencilerin çoğunluğunun Van Hiele düzeylerinde ilerleme kaydettiği görülmüştür. Uygulama öncesi öğrencilerin çoğunluğunun deneysel ispat şemalarını, uygulama sonrasında tümdengelimsel şemaları kullandıkları belirtilmiştir. Çalışmada beklenenin aksine dönüşümsel ispat şemasına öğretme uygulaması boyunca pek rastlanmamıştır. Bunun nedeninin uygulamanın kısa bir zamanda yapılmasından kaynaklanabileceği söylenmiştir. Çalışmada kullanılan öğretme stratejisinin ilk basamağı başarılı olmuştur. Öğrencilerin çoğu tümdengelimsel ve tümevarımsal argümanların

arasındaki ayrımı anlamıştır. Fakat öğrenciler her zaman tümdengelimsel argümanlar önerememişlerdir. Öğretme stratejisinin ikinci basamağı da hemen hemen başarılı olmuştur. Bu basamağın sonunda deneysel ya da dışsal ispat şemaları kullanan öğrencilerin yüzdesi düşerken tümdengelimsel ispat şeması kullanan öğrencilerin yüzdesi önemli derecede (9%'den 88%'ye) artmıştır.

Ellis'in (2007) çalışmasının amacı öğrencilerin lineer fonksiyonlarla uğraşırken genelleme ve gerekçelendirme yollarını incelemektir. Çalışma Amerika'nın güneybatısındaki bir devlet ortaokulunda okuyan ve C ve üzeri ortalamaya sahip olan yedinci sınıf öğrencileri üzerinde yürütülmüştür. Öğrencilerin genelleme ve gerekçelendirme biçimleri arasındaki bağlantıları kurmak için onların genellemeleri ve ispat şemaları belirlenmiş ve sınıflandırılmış; öğrencilerin genellemeleri ile ispat şemaları arasındaki bağlantılar ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Araştırmacı deneysel olarak yürütülen nitel çalışmada günde bir buçuk saat olarak 15 ardışık okul gününde öğrencilerle öğretme deneyimi gerçekleştirmiştir. Öğretme deneyiminin amacı öğrenciler yeni matematiksel fikirlerle anlamlı şekilde uğraştıklarında genelleme ve gerekçelendirme etkinliklerinin birbirleriyle ilişkilene yollarını araştırmak olmuştur. Derslerde “dişliler” ve “hız” konuları olmak üzere iki gerçek dünya durumu üzerine odaklanılmıştır. İlk yedi gün öğrencilerin dişlileri keşfetmeleri için fiziksel olarak dişlilerle uğraşmaları sağlanmış; kalan sekiz günde de hızla ilgili olarak SimCalc, Mathworlds simülasyon bilgisayar programı yardımıyla uzaklık ve zamanın farklı kombinasyonlarının nasıl değiştiğini görmeleri için varsayımlar oluşturmaları ve bu varsayımları test etmeleri sağlanmıştır. Uygulama boyunca bir asistan uygulamayı video kaydına almış ve gözlem yaparak alan notlarıyla ayrıntılı rapor yazmıştır. Her ders saatinden sonra araştırmacı her bir öğrenciyle birebir görüşmeler gerçekleştirmiştir. Çalışmada öğrencilerin ispat şemaları Harel ve Sowder'in (1998) ispat şeması sınıflandırmasına göre sınıflandırılmıştır

Tüm veri seti öğrencilerin genellemelerinde büyük bir gelişme olduğunu göstermiştir. Öğrencilerin gerekçelendirmeleri zamanla sembolik ve deneyselden dönüşümsel doğru gelişmiştir. Öğretme deneyiminin sonuçları öğrencilerin tek bir yolla genelleme yapmadığını, bir genelleme için özel bir gerekçelendirme biçiminin bulunduğunu göstermiştir. Çalışmanın sonuçlarına göre tümdengelimsel düşünmeyi destekleyen genellemelerde dönüşümsel ispat şemasının, öğrencilerin varsayımlarını mantıksal çıkarımlar ile destekledikleri tek ispat şeması olduğu belirlenmiştir. Dönüşümsel ispat şemasıyla çalışan öğrenciler bir gözlemin genel yönlerinin farkına varmışlar, amaç

yönelimli ve ileriye dönük zihinsel işlemler yürütmüşler ve zihinsel imajları kendi tündengelimsel süreçlerinin bir parçasıymış gibi dönüştürebilmişlerdir. Böylelikle bu çalışmada öğretmen deneyiminin amaçlarından biri olan dönüşümsel ispat şemasının gelişiminin gerçekleşmiş olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Çalışmanın sonuçları dönüşümsel ispat şemasının güçlü genellemeler yapmadaki rolünü ortaya koymuştur. Buna göre öğrenciler sınırlı ve yardımcı olmayan genellemelerle başlayabilmüşler fakat dönüşümsel ispat şemasıyla gerekçelendirme yaptıktan sonra daha kesin ve daha karmaşık genellemeler oluşturabilmüşlerdir. Çalışmada dönüşümsel ispat şemasıyla yakından ilişkili olan üç genelleme biçimi (ilişki arama, birinin düşüncesini genişletme, devam eden-devamlı fenomenlere durumlar üretme) olarak belirlenmiştir. Çalışmadaki öğrenciler başlangıçta sınırlı, kısmen yanlış veya üretken olmayan genelleme etkinlikleri oluştururken; genellemelerini açıklama girişiminde bulundukça ve daha tündengelimsel gerekçelendirmeler yaptıkça kendi genellemelerine tekrar geri dönüp bakmaya başlamış, bunların üzerine yeni fikirler inşa etmiş ve sonunda daha güçlü genellemeler yapılandırmaya başlamışlardır. Çalışmada dönüşümsel ispat şeması aracılığıyla gerekçelendirdikleri genellemelerin en dirençli ve diğer bilgilerle en iyi biçimde ilişkide olan oldukları sonucuna varılmıştır.

Harel ve Rabin'in (2010) yürüttükleri çalışmanın amacı ispatı genel anlamıyla ele alan belirli öğretme uygulamalarını belirlemek ve böylece öğrencilerdeki otoriter ispat şeması gelişimini olumlu yönde etkileme yollarını ortaya çıkarmaktır. Çalışma Amerika'da bir lisede gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın verileri iki lise matematik öğretmenin sınıf gözlemlerinden elde edilmiştir. Çalışmada otoriter ispat şemasının öğrencilerde çok görülmesi ve öğrenci öğrenmeleri üzerindeki negatif etkisinden dolayı, otoriter ispat şemasının yapılandırılması ve düzenlenmesine katkıda bulunmak amacıyla, öğretme etkinliklerinin belirlenmesi ve özelleştirilmesi gerekliliği savunulmuş; bu amaç için matematik derslerinde öğretme uygulamalarının nasıl ve ne tür olması gerektiği sorusuna yanıt aramıştır. Bu yüzden çalışmada öğrencilerdeki otoriter ispat şemalarını açıkça ortaya koyacak belirli öğrenci davranışlarının biçimlendirilmesinde rol oynayan öğretme uygulamalarına odaklanılmıştır. Çalışma, iki cebir öğretmenin derslerindeki öğretme uygulamalarını ortaya koyan bir durum çalışmasıdır. Öğretim uygulamaları iki lise öğretmeni tarafından gerçekleştirilmiştir. Bir akademik yıl boyunca her üç haftada bir her bir öğretmen sekiz ders saati boyunca bir araştırmacı tarafından gözlemlenmiştir. Öğretmenin otoriter ispat şeması ile ilişkili öğretme uygulamalarından elde edilen veriler

her iki araştırmacı tarafından bağımsız olarak analiz edilmiştir ve daha sonra karşılaştırılmıştır. Gömümlü teorinin prensiplerini takip ederek ve öncelikle gözlenen tüm öğretim uygulamalarına odaklanarak açık kodlama yapılmıştır. Yinelemeli düzenleme süreci sonunda belirli öğretim uygulamaları; öğrencilerin sorularını yanıtlama, öğrencilerin fikirlerine tepki verme ve konu anlatımı olarak üç sınıf altında toplanmıştır. Bu sınıflandırmalar ise sınıf etkinliklerinin gözlenen doğası ve Harel ve Sowder (1998) tarafından belirlenen otoriter ispat şemaları değerlendirmeleri ışığında ortaya konmuştur.

İki öğretmenle yapılan durum çalışmaları sonuçlarına göre, öğretmeni sınıftaki tek doğruluk kaynağı olarak ortaya koyan belirli öğretim uygulamaları belirlenmiştir. Öğrencilerin problemleri çözmek için beklediği ve işlem basamaklarının ona anlatılmasını istedikleri; öğrencilerin problemleri kendileri çözmeye çalışmadan önce yardım istedikleri ve sınıf arkadaşlarının ve öğretmenlerinin iddialarının yanında ve sunulan içerikle ilgili sorular sormaya isteksiz oldukları sonucuna ulaşılmıştır.

Sonuçlarında ispat şemalarını ve özelliklerini barındıran deneysel araştırmaların sonuçlarına ilişkin kısa bir özet aşağıda yer almaktadır:

Bu çalışmaların hepsinde ortaya konulan müdahalenin, çalışmaların çalışılan bağımlı değişkende değişiklik yarattığı söylenebilir. Sadece bir çalışma (Harel ve Rabin, 2010) diğerlerinden biraz daha farklı olarak ispatı genel anlamıyla ele alan belirli öğretim uygulamalarını belirleyerek öğrencilerdeki otoriter ispat şeması gelişimini olumlu yönde etkileme yollarının neler olduğunu ortaya çıkarmaya çalışmıştır. Çalışmanın sonuçlarında öğretmeni sınıftaki tek doğruluk kaynağı olarak ortaya koyan belirli öğretim uygulamaları belirlenmiştir. Bunun dışındaki tüm deneysel çalışmalar sonuçlarında öğrenci, öğretmen ve öğretmen adaylarının belirli öğretim uygulamaları sonucunda ispat şemalarındaki gelişimleri ortaya koymuşlardır. Örneğin; Grigoriadou (2012) çalışma sonunda deneysel ya da dışsal ispat şemaları kullanan lise öğrencilerinin yüzdelerinin düşerken tümdengelsel ispat şeması kullanan öğrencilerin yüzdelerinin önemli derecede arttığı sonucuna varmıştır. Diğer bir çalışma (Ellis, 2007) ortaokul öğrencilerinin ispat şemalarının gerekçelendirmelerinin uygulama sonucunda sembolik ve deneysel ispat şemasından dönüşümsel ispat şemasına doğru geliştiğini belirlemiştir. Bu çalışmada ayrıca öğrencilerin dönüşümsel ispat şemasıyla yakından ilişkili olan üç genelleme biçimi ortaya konmuştur. (Harel, 2001) farklı bir öğretim uygulaması sonucunda öğretmen adaylarının sadece deneysel akıl yürütme kullanmaktan vazgeçip sonuç modeli genellemeden süreç modeli genellemeyle dönüşümsel akıl yürütmeye geçtiklerini belirlemiştir. Bir lise

öğretmenin ispat şemalarının gelişimi ve öğretme uygulamalarının incelendiği diğer bir çalışmada (Soto, 2010) ise uygulama sonrasında öğretmenin deneysel ispat şemasından tümdengelsel ispat şemasına geçtiği belirlenmiştir.

2.2.2. İspat Şemalarına Sonuçlarında Değınmeyen Fakat İspat Şemalarının Bazı Özelliklerini Ele Alan Araştırmalar

Aşağıda özetlenen çalışmalar sonuçlarında belirli bir ispat şemasının varlığından bahsetmeyen fakat belirli bir ispat şemasının bir takım özelliklerini barındıran çalışmalardır. Bu bölümde araştırmacı tarafından bu çalışmalara ilişkin özetlerde hangi çalışmanın sonuçlarında hangi ispat şemasının özelliklerini barındırdığına ilişkin açıklamalarda bulunulmuştur. Çalışmada bulunduğu varsayılan ispat şemalarının özellikleri araştırmacı tarafından yorumlanarak belirli bir ispat şeması grubuna dâhil edilmiştir.

Bu çalışmaların bazıları (Aylar, 2014; Knuth, Choppin ve Bieda, 2009; Knuth, Slaughter, Choppin, ve Sutherland, 2002) ortaokul öğrencileri ile, bazıları (Arslan ve Yıldız, 2010; Chazan, 1993; Coe ve Ruthven, 1994; Healy ve Hoyles, 2000; Patkin, 2012; Özer ve Arıkan, 2002) lise öğrencileri ile, bazıları (Baştürk, 2010; Ceylan, 2002; Demiray, 2013; Flores, 2002; Goetting, 1995; Martin ve Harel, 1989; Norby, 2013; Pekşen Sağır, 2013) öğretmen adaylarıyla, bazıları (Segal, 1999; Selden ve Selden, 2003; Solomon, 2006; Stylianides ve Stylianides, 2009) lisans öğrencileri ile, başka bir çalışma (Bieda, 2008) öğretmenlerle, bir diğeri (Boyle, 2012) yüksek lisans öğrencisi olan öğretmen ve öğretmen adayları ile, bir tanesi (İmamoğlu, 2010) matematik bölümü öğrencileri ve öğretmen adayları ile, başka bir çalışma ise (Raman, 2002) üniversite öğrencileri, öğretim üyeleri ve matematik bölümü mezunu öğrencileri ile gerçekleştirilmiştir.

Bu gruptaki çalışmaların büyük bir kısmının (Arslan ve Yıldız, 2010; Aylar, 2014; Bieda, 2008; Boyle, 2012; Ceylan, 2002; Chazan, 1993; Coe ve Ruthven, 1994; Demiray, 2013; Flores, 2002; Goetting, 1995; Knuth ve diğeri, 2009; Knuth ve diğeri, 2002; Martin ve Harel, 1989; Norby, 2013; Özer ve Arıkan, 2002; Patkin, 2012; Raman, 2002; Segal, 1999; Selden ve Selden, 2003; Solomon, 2006; Stylianides ve Stylianides, 2009) verileri nitel yöntemlerle analiz edilirken, bir tanesinin (İmamoğlu, 2010) verileri nicel yöntemlerle analiz edilmiştir. Bazı çalışmalar (Baştürk, 2010; Healy ve Hoyles, 2000; Pekşen Sağır, 2013) ise karma desen kullandıklarını belirtmişlerdir. Bu çalışmalardan Aylar (2014), Boyle (2012), Segal (1999) ve Stylianides ve Stylianides'in (2009)

çalışmaları anılan çalışmalardan deneysel deseniyle ayrılmıştır. Aylar (2014) yedinci sınıf öğrencilerinin, Boyle (2012) ise öğretmen ve öğretmen adaylarının ispat bilgi ve becerilerini geliştirmeye yönelik öğretim uygulamaları gerçekleştirmişlerdir. Aylar (2014) öğrencilerin ispat becerilerini ölçen testler uygulamış ve bunun yanında öğrenciler ile görüşmeler yapmıştır. Boyle (2012) ise veri kaynakları olarak öğretim uygulamasındaki ders defterleri ve çalışma kayıtları ile görüşmeleri kullandığını belirtmiştir. Segal (1999) ise lisans öğrencilerinin belirli aralıklarla öğrencilere gerekçelendirilmelerin bulunduğu görev (task) yöneltmiştir. Stylianides ve Stylianides (2009) ise lisans öğrencilerinin bir öğretim dizisindeki gelişimlerini ortaya koymuştur.

Nitel çalışmaların bazıları (Arslan ve Yıldız, 2010; Ceylan, 2002; Demiray, 2013; Goetting, 1995; Knuth ve diğerleri, 2009; Knuth ve diğerleri, 2002; Martin ve Harel, 1989; Norby, 2013; Özer ve Arıkan, 2002; Patkin, 2012; Raman, 2002; Selden ve Selden, 2003; Stylianides ve Stylianides, 2009) katılımcılara ispat ile ilgili testler ya da içerisinde argümanlar bulunan sorular, değerlendirmeler sunarak veya yazılımlar kullanmalarını sağlayarak verileri analiz etmişlerdir. Bu çalışmalardan bazıları (Norby, 2013; Raman, 2002) bu testleri görev temelli görüşmeler ile, bazıları (Ceylan, 2002) klinik görüşmeler aracılığıyla, bazıları (Patkin, 2012; Chazan, 1993) yarı yapılandırılmış görüşmeler aracılığıyla, bazıları (Goetting, 1995; Selden ve Selden, 2003) görüşmeler aracılığıyla, bazıları (Arslan ve Yıldız, 2010) yapılandırılmamış gözlemler aracılığıyla uygulama yoluna gitmiştir. Bu nitel çalışmalardan bazıları (Özer ve Arıkan, 2002) ise anılan testler ile görüşmeleri ayrı ayrı yürüttüklerini raporlamışlardır. Bazı çalışmalar ise öğrencilere ispat ile ilgili herhangi bir yazılı test uygulamamış, onların ispat ile ilgili anlayışlarını ve görüşlerini almak için görüşmeler (Coe ve Ruthven, 1994; Flores, 2002) veya yarı yapılandırılmış görüşmeler (Solomon, 2006) düzenlemişlerdir. Bieda (2008) farklı olarak öğretmenlerin sınıf uygulamalarını gözlemlemiş ve gözlem sonrası görüşmeler yapmıştır.

Bu araştırma grubunda karma desene sahip olan (Baştürk, 2010; Healy ve Hoyles, 2000; Pekşen Sağır, 2013) çalışmalar nicel verilerini anketler ve soru setleri aracılığıyla sağlamışlardır. Nitel verilerini ise görüşmeler aracılığıyla topladıklarını belirtmişlerdir.

Bu gruptaki çalışmalar ispat ile ilgili anlayışları değerlendirirken, ispat şeması kavramına değinmemişlerdir. Fakat, bulgularında belirli ispat şemalarını ortaya koyan bazı özellikler buldurmışlardır. Bu çalışmada anılan özellikler araştırmacı tarafından ilgili ispat şemalarıyla ilişkilendirilmiş ve belirli bir ispat şeması grubuna dâhil edilerek okuyucuya sunulmuştur. Aşağıda, anılan çalışmaların özetleri çalışma grubuna göre yer

almaktadır. Bu bölümün en sonunda bu çalışmaların sonuçlarına ilişkin özet yer almaktadır:

Öğretmen adayları ile yürütülen çalışmaların özeti aşağıda yer almaktadır:

Pekşen Sağır'ın (2013) çalışmasının amacı matematik öğretmen adaylarının ispata bakış açılarının ve ispat yapma süreçlerinin incelenmesidir. Araştırmada matematik öğretmen adaylarının ispat ve ispat yapmaya yönelik görüşlerinin nasıl olduğu ve ispat yöntemlerini bilme ve uygulama becerilerinin ne düzeyde olduğu belirlenmeye çalışılmıştır. Çalışma 2012-2013 eğitim öğretim yılında bir devlet üniversitesinin Eğitim matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 73 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Karma desene sahip olan çalışmada anket, soru seti ve görüşme tekniklerinden yararlanılmıştır. Veri analizlerinde de yine nicel ve nitel veri analiz yöntemleri bir arada kullanılmıştır. Anket verileri nicel olarak, soru seti ve görüşme nitel olarak analiz edilmiştir. Çalışmada öğretmen adaylarına, ispata ilişkin genel görüşlerini ölçmeye yönelik bir ölçek ve ispat süreçlerini incelemeye yönelik matematiksel ispat gerektiren sorular sorulmuştur. Adayların bu sorulara yazılı olarak yanıt verdiği kâğıtlar üzerinden yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Elde edilen veriler nitel analiz yöntemlerinden betimsel istatistik yardımıyla analiz edilmiştir.

Çalışmada öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini ezbere kullanmaya çalıştıkları, ispat yaparken doğru yöntemi seçmekte zorlandıkları, sürece tam olarak hâkim olmadıkları ve yöntemler hakkında eksik ve yanlış bilgilere sahip oldukları tespit edilmiştir. Bu durum araştırmacı tarafından öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin tepkiler verdikleri şeklinde yorumlanmıştır. Öğrencilerin kâğıtları ayrıntılı bir incelendiğinde, uygun olmayan ispat yöntemi seçenlerin doğrudan ispat yöntemine başvurdukları, bu yöntemi uygularken de formel ispat yapmak yerine ispatlarını örnek vererek tamamladıkları görülmüştür. Öğrencilerin kendilerine uygun yöntem verilmediğinde, kullanacakları yöntemi seçmekte zorlandıkları ve örnek vererek ispatı tamamlama yoluna başvurdukları belirtilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlarını örnek vererek tamamlama yoluna gitmeleri araştırmacı tarafından onların deneysel ispat şemasının göstergelerine sahip olmaları şeklinde yorumlanmıştır.

Norby'ın (2013) yürütmüş olduğu çalışmanın amacı lise öğretmen adaylarının Ortak Ana Standartlar (Common Core Standards) ile tanıtılan yeni bir terim olan "uygulanabilir argüman" terimi hakkındaki anlayışlarını araştırmaktır. Çalışmada lise

öğretmenlerinin uygulanabilir argümanı nasıl anlayıp tanımladıkları, argümanları nasıl yapılandırdıkları ve matematiksel argümanları nasıl değerlendirdikleri araştırılmıştır. Çalışma Amerika'da bir üniversitede lise öğretmen yetiştirme lisans programının üçüncü sınıfında okuyan ve modern geometri dersi alan beş öğretmen adayıyla gerçekleştirilmiştir.

Nitel yöntemlerle yürütülen çalışmada, bir dizi matematik problemini ve ilgili soruları içeren görev temelli görüşme protokolü geliştirilmiştir. Ölçme aracı katılımcıların bir argümanı yapılandırmasını (yapılandırma çalışmaları) ve bunların argümanlarla sunulmasını ve bu argümanlar içindeki akıl yürütmelerin kritik edilmesini sağlayan (değerlendirme çalışmaları) bir formatta sunulmuştur. Matematik öğretmen adayları ile yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır.

Öğretmen adaylarının uygulanabilir argümanları matematiksel ispatla karşılaştırılmış ve bu terimler arasında benzerlikler ve farklılıklar belirlenmiştir. Birçok öğretmen adayının belirli argümanların uygulanabilir olup olmadığını belirlemede sorun yaşadığı belirlenmiştir. Çalışmanın bir diğer bulgusu katılımcıların deneysel ispatları nasıl kullanıp anladığıyla ilgili yeni bir perspektife ulaşmak olmuştur. Tüm katılımcılar sonsuz bir kümedeki bir matematiksel ifadeyi ispatlarken deneysel ispatlamanın sınırlı ve sabit bir anlayışa sahip olduğunun farkında olmuşlardır. Tüm katılımcılar deneysel listeleri uygulanamaz olarak işaretlemişlerdir. Bu durum araştırmacı tarafından çalışmadaki öğretmen adaylarının deneysel ispat şemasının göstergelerine sahip olmadıkları şeklinde yorumlanmıştır.

Demiray'ın (2013) yürüttüğü çalışmanın amacı, ortaokul matematik öğretmen adaylarının aksine örnek verme, olmayana ergi ve çelişki ile ispat yöntemlerindeki başarı düzeylerini incelemektir. Çalışmada ayrıca ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat yöntemlerindeki yanlış anlamlandırmalarının nedenlerinin belirlenmesi ve ortaokul matematik öğretmen adaylarının hangi ispat yöntemlerini kullandıkları ve geçersiz ispatlarının nedenleri ortaya konmaya çalışılmıştır. Çalışma Ankara'daki bir devlet üniversitesindeki ortaokul matematik öğretmeni adaylarıyla gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın verileri hem frekans ve yüzdeler gibi tanımlayıcı istatistiklerle hem de soru temelli derinlemesine analizler ile analiz edilmiştir.

Çalışmada ortaokul matematik öğretmen adaylarının aksine örnek verme ve çelişki ile ispat yöntemlerindeki başarı düzeylerinin yüksek olduğunu ortaya konmuştur. Öğrencilerin geçerli ispatları analiz edildiğinde, matematiksel tümevarım yönteminin ve

doğrudan ispat yönteminin en çok kullanılan ispat yöntemleri olduğu görülmüştür. Öğrencilerin geçersiz ispatları incelendiğinde, “ifadeyi ispatlamak için sayıları kullanmak” en çok görülen geçersiz ispat yapma nedenlerinden biri olarak ortaya konmuştur. Öğrencilerin bu tepkileri araştırmacı tarafından deneysel ispat şemalarının göstergeleri olarak yorumlanmıştır.

Baştürk’ün (2010) çalışmasının amacı lise öğretmenliği birinci sınıfta okuyan öğretmen adaylarının ispat ve ispatlama algılarını ortaya çıkarmaktır. Çalışma İstanbul’da bir devlet üniversitesinin lise matematik eğitimi bölümünde okuyan 33 öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın deseni betimsel tarama yöntemi olarak tanımlanmıştır. Çalışmanın verileri nicel ve nitel yöntemlerle analiz edilmiştir. Çalışmanın nicel verileri Likert tipi beşli bir ölçek ve örneklem içerisinde seçilen 10 öğrenci ile görüşmeler aracılığıyla sağlanmıştır.

Çalışmada öğrencilerin ispatın matematikte ve matematik eğitiminde önemli bir yeri olduğunu düşündükleri belirlenmiştir. Öğrencilerin sınavlar için çalışma yöntemleri, bir ispat algoritmasını hatırlamak için ders kitabına ya da ders notlarına bakma gibi ispatı taklit eden düşünme biçimleriyle tanımlanan taklitçi akıl yürütmeye dayanmıştır. Öğrenciler sınavlara girmeden önce ispatları yazarak ezberlemeye çalıştıklarını söylemişlerdir. Öğrencilerin bu davranışları araştırmacı tarafından dışsal otoriter ispat şemasının göstergeleri olarak yorumlanmıştır. Bunun yanında daha önce hiç görmedikleri bir ispatı yapılandırma özgüven eksikliklerinin olduğu belirtilmiştir.

Flores’in (2002) yürüttüğü çalışmada öğretmen adayları ilköğretim öğrencileri ile matematikte doğruluğu belirlemeleri için görüşmeler yapmışlardır. Nitel yöntemlerle yürütülen çalışma Amerika’nın güney batısındaki bir eyalette bir üniversitede öğrenim gören ve matematik yöntemleri dersini alan öğretmen adayları ve bir grup ilköğretim öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Görüşmeciler öğrencilerin yanıtlarını kaydetmişlerdir ve öğrencilerin ortaya koyduklarının neden doğru olduğunu nasıl bildiklerini daha sonra sormaları hakkında eğitilmişlerdir. Verilerin analizi aşamasında yanıtlar öğrencinin bir ifadenin doğru ya da yanlış olduğunu nasıl bildiğine dayanan sınıflamalara sınıflandırılmıştır. Bu sınıflandırmaların geniş anlamda Sowder ve Harel’in (1998) ispat şemaları sınıflandırmasına uyduğu belirlenmiştir.

Çalışmada yapılan görüşmeler sonucunda öğrencilerin öğrendikleri durumların neden doğru olduğunu açıklamada zorluk yaşadıklarını sonucuna varılmıştır.

Görüşmecilerin birçok öğrencinin matematikte öğrendikleri durumlar hakkında birilerinin sorular sormasından endişe duydukları belirtilmiştir. Görüşülen birçok öğrencinin yanıtlarının ve tutumlarının ailelerinin, büyük kardeşlerinin, öğretmenlerinin ve kitaplarının onlara ne anlattığına derin bir güven içinde olduklarını gösterdiği sonucuna varılmıştır. Öğrencilerin bu tepkileri araştırmacı tarafından dışsal otoriter ispat şemalarının göstergeleri olarak yorumlanmıştır.

Ceylan'ın (2002) yürüttüğü çalışmanın amacı ikinci sınıf ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının GeoGebra dinamik matematik yazılımı yardımıyla geometriye yönelik ispat yapma becerilerinin incelenmesi ve kullanmış oldukları ispat biçimlerinin belirlenmesidir. Çalışma 2010-2011 eğitim öğretim yılında Orta Anadolu'da bir üniversitenin ilköğretim matematik öğretmenliği programında okuyan farklı düzeylerde bulunan ikinci sınıf altı matematik öğretmeni adayı ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmada öğretmen adaylarının kendilerine verilen geometrik ispat probleminin çözümünde GeoGebra'yı ispat yapmada nasıl kullandıkları ve yaptıkları ispatların varsayımda bulunma sürecinde GeoGebra'yı nasıl kullandıkları ve varsayımlarını doğrulamak ya da doğru olmadığını göstermek için hangi gerekçelerden yararlandıkları; bunun yanında GeoGebra'yı kullanarak geometrik ispat problemleri çözme sırasında hangi tür ispat biçimlerini kullandıkları ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır.

Çalışma nitel bir araştırma modeli olan durum çalışması olarak tanımlanmıştır. Öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Klinik görüşme sürecinde öğretmen adayları verilen ispat problemlerini GeoGebra yazılımını kullanarak çözmüşlerdir. Öğretmen adaylarının yapmış olduğu çözümler Wink programı ve ses kayıt cihazı ile kaydedilmiştir. Daha sonra ses kayıtları yazılı doküman haline getirilip Wink programı ile elde edilen ekranlarla karşılaştırılmıştır.

Çalışmada öğretmen adaylarının verilen bir ispat probleminde GeoGebra yazılımını amaçları doğrultusunda kullanabildikleri ve çözüm sürecinde doğru sonuca ulaşmak için yazılımda yer alan birçok araçtan yararlandıkları saptanmıştır. Öğretmen adaylarının yaptıkları on sekiz ispatın dokuz tanesinin (yarısının) deneysel gerekçelendirmeler, dokuz tanesinin de tümdengelimli gerekçelendirmeler içerdiği belirtilmiştir. Bu durum araştırmacı tarafından öğretmen adaylarının tepkilerinin yarısında deneysel ispat şemasına, diğer yarısında ise analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin özellikler barındırdıkları şeklinde yorumlanmıştır. Öğretmen adaylarının ispat sürecinde örneklerden yararlanmaları onların yeterli mantıksal çıkarımlara sahip olmadıkları anlamına gelebileceği belirtilmiştir.

Öğretmen adaylarının doğru varsayımı ortaya attıkları halde ispatı sonuçlandıramamalarının sebebinin ispat için yeterli gerekçe sunamamalarından kaynaklandığı belirtilmiştir.

Goetting'in (1995) çalışmasının amacı öğrencilerin ispat anlayışını ve geçerli ispatlar olarak gördükleri ikna edici argümanları ve bu iki fikir arasında kurdukları ilişkileri incelemektir. Çalışma Amerika'da bir üniversitenin ilköğretim bölümünde öğrenim gören 11 ve lise matematik eğitimi bölümünde öğrenim gören 16 öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adayları üst düzey matematik dersi alan öğrencilerden oluşmuştur. Çalışmada öğretmen adaylarının ispat anlayışlarını ortaya çıkarmak için görüşmeler yapıldığı, bu görüşmelerde öğrencilere matematik önermeleri ve ifadeleri sunulduğu ve öğrencilerden önermelerin ne kadar doğru olduğunu ve verilen argümanın ne kadar geçerli bir matematiksel ispat olup olamayacağını puanlamalarının istendiği belirtilmiştir. Görüşmelerde öğretmen adaylarının genellemelerini doğrulayan tümevarımsal ve tümdengelimsel argümanlara verdikleri tepkilerin, çelişki ile ispat ve karşıt örnek ile ispatı destekleyen örneklerin incelendiği belirtilmiştir. Nitel paradigma ile yürütülen çalışmada öğretmen adaylarının tepkileri ilgili temalara ayrılarak analitik tümevarımsal yöntemle incelenmiştir.

Çalışmada ispatın üç farklı anlayışına ilişkin deliller sunulmuştur. İlk grup (öncelikle ilköğretim matematik öğretmeni adayları) ispatı mutlaka sonuca götürmesi gerekmeyen destekleyici bir argüman olarak görmüşlerdir. Bu gruptaki öğretmen adayları deneysel bulguları genelleme için geçerli ispatlar olarak görmüşlerdir. Bu gruptaki öğretmen adaylarının araştırmacı tarafından deneysel ispat şemasına ilişkin göstergeler taşıdıkları düşünülmüştür. Bir durumun doğruluğu hakkındaki ikna düzeyleri bir argümanı ispat olarak kabul edip etmedikleriyle yakından ilişkili olmuştur. İkinci grup ispatı varsayımları kesin olarak geçerli kılma aracı olarak görmüştür. Bu gruptaki öğrenciler deneysel bulguların genellemelerin geçerli ispatları olmasını reddetmişlerdir fakat karşı örnek ve örnekle ispatı kabul etmişlerdir. Üçüncü grup (ağırlıklı olarak lise matematik eğitimi bölümü öğrencileri) kesin doğrulamanın gerekli olduğunu fakat bazı zamanlarda yetersiz olduğunu belirtmişlerdir.

Martin ve Harel'in (1989) yürüttükleri çalışmanın amacı sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel ispat içindeki tümevarımsal ve tümdengelimsel argümanların rolünü nasıl değerlendirdiklerini ortaya çıkarmaktır. Çalışma Amerika'da bir üniversitede öğrenim gören sınıf öğretmeni adaylarıyla gerçekleştirilmiştir. İkinci sınıf düzeyindeki

matematik derslerine katılan 101 ilköğretim öğretmeni adayına geçerli olan ve olmayan argümanlar verilmiş; daha önce karşılaştıkları veya karşılaşmadıkları durumlar ve ifadeler içeren tümevarımsal ve tümdengelimsel doğrulamaların matematiksel doğruluğu hakkında yargıya varmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarına verilen genellemeyi doğrulayan ve büyük sayılarla veya örneklerle doğrulama gibi durumlar sağlayan örnekler gösterilerek bunlar hakkında değerlendirme yapmaları istenmiştir.

Çalışmanın sonuçlarına göre öğretmen adaylarının yarısından fazlasının tümevarımsal argümanları geçerli bir ispat olarak değerlendirdikleri ve bu kabullerinin bağlamın kendilerine daha önceden tanıdık olmasına bağımlı olmadığı belirtilmiştir. Bu durum araştırmacı tarafından öğretmen adaylarının yarısından fazlasının deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkilerinin olduğu şeklinde yorumlanmıştır. Öğretmen adaylarının % 60'ından fazlasının doğru bir tümdengelimsel argümanı geçerli bir ispat olarak değerlendirmedeği, yargılamalarını yaparken argümanların içeriğinden çok biçimi ile karar verdikleri belirtilmiştir. Öğretmen adaylarının % 38'i daha önce karşılaştıkları ve % 52'si daha önce karşılaşmadıkları durumlar için yanlış bir tümdengelimsel argümanı matematiksel olarak doğru olarak değerlendirdikleri ve üçte birinden fazlasının eşzamanlı olarak tümevarımsal ve doğru bir argümanı matematiksel olarak doğru olarak değerlendirdikleri belirtilmiştir.

Lisans öğrencileri ile yürütülen çalışmaların özeti aşağıda yer almaktadır:

Stylianides ve Stylianides 'in (2009) çalışmalarının amacı bir öğretim dizisini uygulayarak geliştirmek ve bu öğretim dizisinin, öğrencilerin farklı matematiksel alanlardaki ispat içeren matematiksel konulardaki öğrenmelerinin etkililiğini incelemektir. Çalışma daha önceden yapılan dört yıllık bir deney tasarımının bir parçası olup Amerika'da öğrenim gören 18 üniversite öğrencisiyle gerçekleştirilmiştir. Bahsedilen öğretim dizisinin gelişimi, bir lisans matematik dersinde yapılandırılan dört yıllık deney tasarımının bir parçası olmuştur. Çalışmada teorik çatinın örneklendirilmesi için deney tasarımının beş araştırma döngüsünün öğretimsel dizisinin uygulanmasına ve istenilen öğrenme amaçlarının desteklenmesi için bu dizinin tartışılmasına odaklanmıştır. Çalışmada kullanılan veriler beşinci araştırma döngüsünden elde edilmiştir. Veriler dört ders saatinin ses ve video kayıtlarını, öğrencilerin küçük gruplarla çalışmalarına odaklanan araştırma görevlisinin aldığı notlarını, öğretim dizisinin uygulanması sırasında birçok durumda öğretmenin sorduğu sorulara verilen yazılı yanıtlarını, öğrencilerin bir dönem boyunca gördükleri tüm etkinliklerin göz önüne alınarak verilen en son ev ödevindeki sorulara

verdikleri yazılı yanıtları içermiştir. Öğrencilerden öğrenmelerine en çok katkıda bulunduğunu düşündükleri üç etkinliği belirlemeleri ve her etkinlik için en yararlı neyi bulduklarını açıkça yazmaları istenmiştir. Bu öğrenme yolları tüm grup tartışmalarından, küçük grup tartışmalarından ve bireysel öğrenci yapılandırmalarından gelen ilgili verinin üçgenlemesine dayalı olarak ortaya çıkmıştır. Çalışmada öğretmen adaylarının, deneysel argümanların sınırlılıklarını bilmelerine rağmen önermeleri deneysel argümanlar kullanarak ispatlamaya çalıştıkları belirlenmiştir. Bu durum araştırmacı tarafından öğretmen adaylarının deneysel ispat şemasının göstergelerine sahip oldukları şeklinde yorumlanmıştır.

Solomon'un (2006) çalışmasının amacı birinci sınıf lisans öğrencilerinin matematik hakkındaki kişisel epistemolojilerini ve matematik öğrenmelerini açıklayıcı örneklerle ortaya koymaktır. Çalışma İngiltere'de bir üniversitede matematik bölümünde öğrenim gören 12 birinci sınıf öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmeler öğrencilerin matematik geçmişlerine, farklı öğretme stillerinin onların öğrenme deneyimleri üzerindeki etkilerine, çıkmaza girdikleri durumlar hakkındaki deneyimlerine ve problemleri tekrar çözmek için kullandıkları stratejilere, kolay ve zor buldukları konulara, konu alanına ve görevlere nasıl yaklaştıklarına, öğrencilerin üniversitede matematiği seçme nedenlerine, matematikte ne gibi yaklaşımların başarıyla sonuçlanacağına dair görüşlerine odaklanmıştır.

Çalışmada öğrencilerin hiçbirinin ispata ve onun rolüne ilişkin doğru bir anlayışa sahip olmadığı belirlenmiştir. Öğrenciler görüşmelerin çoğunda kendilerine özel düşünceler sergileyememişler, ispata ilişkin yaratıcılık veya ispata ilişkin kendilerine has düşünceler ortaya koyamamışlar, daha çok diğerlerinden bildiklerinin pasif tüketicisi olduklarını gösteren düşünceler sergilemişlerdir. Öğrenciler kendilerini matematik konusunda güçsüz olarak nitelerken üniversite hocalarını otorite kaynağı olarak gördüklerini belirtmişlerdir. Bu durum araştırmacı tarafından öğrencilerin dışsal otoriter ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler sergiledikleri şeklinde yorumlanmıştır. Öğrenciler ispatın, sınıfta bir varsayımın doğruluğunun gösterilmesi için kendilerine sunulduğunu belirtmişlerdir. Bu öğrenciler ispatı matematiğin önemli bir parçası olarak görmemişlerdir.

Selden ve Selden'in (2003) çalışmasının amacı üniversite öğrencilerinin ispat gibi görünen argümanları doğrulama becerilerinin ve uygulamalarının ortaya çıkarılması ve öğrencilerin ispat odaklı aldıkları dersin sonunda zamanla yargılarının nasıl değiştiğinin

incelenmesidir. Çalışma Amerika’da bir üniversitenin matematik bölümünde okuyan dört ve lise matematik eğitimi bölümü dördüncü sınıfında okuyan dört öğrenci olmak üzere toplam sekiz öğrenci ile yürütülmüştür. Çalışmada öğrencilerden tek bir teoreme bağlı olan ve ispat gibi görünen ve öğrenciler tarafından yapılmış dört argümanı okumaları ve üzerinde derinlemesine düşünmeleri istenmiştir. Öncelikle öğrencilerle 15 haftalık ispata geçiş dersi yapılmış ve bu dersin dördüncü ve beşinci haftalarında kendileriyle görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Öğrenciler ispata dayalı derslerinin büyük bölümünde kendi ispatlarını yaparak öğrenmeye yönlendirilmişlerdir. Görüşmeler “öğretim görüşmeleri” şeklinde yapılandırılmıştır. Çalışmanın verileri görüşmelerin ses kayıtlarından, görüşmeci notlarından ve öğrencilerin görüşmeler boyunca yazılı olarak verdikleri ispat çalışmalarından oluşmuştur. Çalışmanın verileri metin çözümlemesi yönteminin farklı bir çeşidi ile analiz edilmiştir. Çalışmadaki teorem ve üzerinde çalışma yürütülen dört argüman metin olarak ele alınmış ve analiz edilmiştir. Veriler analiz edilirken, tüm öğrencilerin çalışmanın başında ve diğer iki okumalarının sonunda her bir ispatın doğruluğu hakkında bir yargıya vardıkları belirlenmiştir.

Çalışmada öğrencilerin genel olarak zamanla ispata ilişkin yargılarını geliştirdikleri belirlenmiştir. Bu gelişmenin kaynağının büyük bölümünün görüşmeciyle olan etkileşimlerine dayandığı belirlenmiştir. Öğrencilerin hatalarının büyük bölümünün genel/yapısal bir doğaya değil daha yerel ve ayrıntılı bir yapıya sahip olduğu belirlenmiştir. Bu öğrenciler verilen ispatı anlamaya çalışırken anlayışlarını kişisel deneyimlerine dayandırma yoluna gitmişlerdir. Çalışmanın sonuçları öğrencilerin argümanların yüzeysel görünüşlerine odaklanma eğiliminde olduklarını ve argümanların ispat olup olmadığı konusunda sınırlı beceriye sahip olduklarını göstermiştir. Öğrencilerin bu tepkileri araştırmacı tarafından dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması sınıflandırması altında değerlendirilmiştir. Bu durumun onların doğrulama konusunda iyi bir karar vermelerine engel olduğu belirtilmiştir. Öğrencilere ispatı nasıl doğrulayacakları sorulduğunda, ispatı adım adım kontrol edeceklerini, argümanları mantıksal olarak takip edeceklerini, örnekler oluşturacaklarını ve ispatı anlamlı yapacak fikirlerden emin olacaklarını belirtmişlerdir. Fakat onların bu tasarılarına ve amaçlarına uymadıklarını ve şans sonuçlarına riayet ettikleri belirlenmiştir. Fakat görüşme süreci ile ortaya çıkan derinlemesine düşünme ve tekrar değerlendirmenin; açık ve belirgin bir öğretim olmadan da öğrencilerin % 81 oranında doğru yargıya varma ürününü elde etmeyi doğurduğunu göstermiştir. Bu gelişim de doğrulama öğretiminin etkili olabildiğini göstermiştir.

Segal'in (1999) yürüttüğü çalışmanın amacı öğrencilerin üniversitedeki ilk yıllarından sonra matematiksel ispat algılarının nasıl değiştiğini ortaya koymaktır. Çalışma İngiltere'de bir üniversitede Matematiksel Çalışmalar veya İşletme Matematiği bölümlerinde öğrenim gören öğrenciler ile yürütülmüştür. Çalışmada ispatın genel ve özel yönleri kendini ve topluluğu ikna etmek olarak ele alınmış; argümanın deneysel ve tümdengelimsel olmak üzere iki yönüne odaklanılmıştır. Deneysel olarak yürütülen çalışmanın verileri öğretim yılının başında, ortasında ve sonunda olmak üzere ve her seferinde aynı materyal kullanılmak üzere üç seferde toplanmıştır. Katılımcılardan ikna ve geçerlik için aynı sonuca sahip olan; üçünün doğası gereği deneyselken dördüncüsünün tümdengelimsel olan dört gerekçelendirmeyi değerlendirmeleri istenmiştir.

Öğrenciler biri diğerinden daha aksiyomatik düşünceye sahip ve mantıksal olarak daha çok deneyime sahip iki gruba ayrılmıştır. Görev (task) öğrencilere üniversite kariyerlerinin başında, ortasında ve sonunda verilmiştir. Öğrencilerin verilen üç deneysel gerekçelendirme için ikna ve geçerliğin farklı eğilimler olduğunun farkında olduğu söylenmiştir. Tümdengelimsel argümanda ise öğrencilerin ikna ve geçerliği beraber alma eğiliminde olduğu belirtilmiştir.

Çalışmanın sonuçları bir argümanın geçerliğinin algısının zamanla nasıl değiştiğini ortaya koymuştur. Örneğin kırk iki katılımcının üçte birinin, giriş seviyesinde tamamen belirli bir durumu gösteren ilk gerekçelendirmenin ispatı oluşturduğunu söylediği belirtilirken yıl ortasında katılımcıların % 80'inin deneysel durum için kabul edilebilir yanıtlar verdikleri bildirilmiştir. Bu durum araştırmacı tarafından deneysel ispat şemasının göstergeleri olarak nitelendirilmiştir. Katılımcıların bir bölümü tümdengelimsel gerekçelendirme için tutarsız yanıtlar vermelerine rağmen görevin üç bölümü boyunca aynı şekilde ispatın geçerli olduğunu söylemişlerdir. İknaya ilişkin deneysel gerekçelendirme modellerinin zamanla anlamlı bir fark göstermediği sonucuna ulaşılmıştır. Çalışmada deneysel gerekçelendirmeler konusunda katılımcıların kişisel ikna ile toplumsal geçerliği farklı ölçütlere dayanan ayrı nitelikler olarak değerlendirildiği belirtilmiştir. Tümdengelimsel gerekçelendirme yapan katılımcılarda bu ayrımın çok nadir görüldüğü; deneyin birinci ve ikinci dizisi arasında deneysel bir ispatı nelerin oluşturacağı hakkındaki anlayışın ve tümdengelimsel argümanı ispat olarak kabul edip etmeme anlayışının anlamlı şekilde geliştiği bildirilmiştir.

Öğretmenlerle yürütülen tek çalışma Bieda (2008) tarafından gerçekleştirilmiştir. Anılan çalışmaya ilişkin özet aşağıda yer almaktadır:

Bieda'nın (2008) yürüttüğü çalışmanın amacı öğrencilerin gerekçelendirme ve ispat yeterliklerini geliştirmek için tasarlanan görevlerin sınıflarda nasıl ortaya konulduğunu belirlemektir. Çalışma Amerika'nın orta batısındaki bir eyalette yedi farklı ortaokulun altı, yedi ve sekizinci sınıfında görev yapan yedi öğretmen ile yürütülmüştür. Durum çalışması olarak yürütülen çalışmada, öncelikle öğretmenlerle ön görüşme yapılmıştır. Daha sonra görüşmeler incelenmiştir. Çalışmada ispat yönünden zengin görevlerin uygulanması esnasında sınıf gözlemleri yer almıştır. Bahsedilen görevler öğrencilerin genelleme veya varsayımlar üretmeleri için fırsat tanıyacak şekilde oluşturulmuştur. İspatla ilişkili problemlerin uygulamaları hakkında bilgi sağlamak amacıyla gözlem-öncesi yazılar, sınıf gözlemleri ve öğretmenlerle yapılan görüşmeler olmak üzere üç kaynak kullanılmıştır. Veri analizi süreci her sınıf düzeyinde gözlemler boyunca alan notlarının kodlanması, sınıf gözlemi alan notlarının kodlanması ve göze çarpan kalıpların ortaya çıkarılmasını içermiştir. Kalıplar ortaya çıktıktan sonra, alan notlarından çıkarılan kalıplardan çıkarımlar yapılabilmesi için hem gözlem öncesi yazılara hem gözlem sonrası görüşmelere başvurulmuştur. Sınıf gözlemlerinden elde edilen veriler katılımcı yapılarına ve etkinlik yapılarına göre incelenmiş; daha sonra ortaya çıkarılabilen ispat fırsatları değerlendirilmiş, daha sonra sırasıyla ispat etkinlikleri; en son olarak öğretmen ve öğrenci hareketleri gözlemlenmiştir.

Çalışmada öğrencilerin gelecek matematik derslerinde uygun gerekçelendirmeler üretmeleri için gerekli becerileri kadar sınıf içindeki ispat ve gerekçelendirme deneyimlerinin de yetersiz olduğu ortaya konulmuştur. Öğrencilerin ispat ile ilişkili görevlerde az sayıda genel argümanları ürettikleri ağırlıklı olarak örnek temelli gerekçelendirmeleri ürettikleri belirlenmiştir. Bu durum araştırmacı tarafından öğrencilerin ağırlıklı olarak deneysel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler gösterdikleri şeklinde yorumlanmıştır. Çalışmada öğrencilerin bu eğilimlerinin sebebinin zaman yetersizliği, öğretim programları desteğinin yetersizliği, hesap verme zorunluluğunun olmayışından kaynaklandığı öne sürülmüştür.

Yüksek lisans öğrencisi olan öğretmen ve öğretmen adayları ile yürütülen çalışmaya (Boyle, 2012) ilişkin özet aşağıda yer almaktadır:

Boyle'un (2012) yürüttüğü çalışmanın amacı lise öğretmenlerinin akıl yürütme ve ispat bilgilerini geliştirmeye odaklı olarak yürütülen matematik öğretmen eğitimi yüksek lisans dersinin onların geçerli argümanlar yazma, onlara sunulmuş çözümleri kritik etme ve sorgulama, kendi öğrencileri için akıl yürütme ve ispat çalışmalarını seçip uygulama

becerilerini geliştirmelerine etkisini incelemektir. Çalışma dokuz yüksek lisans öğrencisi-öğretmen adayı üzerinde yürütülmüştür. Katılımcılardan biri ise hâlihazırda öğretmen olup eğitim yüksek lisansına devam eden bir öğrenciden oluşmuştur. Bu dokuz öğretmen adayının akıl yürütme ve ispatlamaya odaklı altı haftalık bir dersteki öğrenmeleri analiz edilmiştir. Ders katılımcıların problem çözmelerini, çözümleri analiz etmelerini, hikâye tarzındaki durum çalışmalarını düşünmelerini ve ders etkinliklerini öğretim programlarıyla ilişkilendirmelerini içermiştir. Çalışma boyunca öğretmen adayları ispatlar yapmışlar, öğrencilerin çalışmalarını kritik etmişler, hikâye tarzı durumları analiz etmişler, çalışmaları seçmiş ve modifiye etmişler, matematiksel ve pedagojik durumları tartışmışlar ve kendi öğrenmeleri üzerine derinlemesine düşünmüşlerdir. Çalışmanın temel veri kaynakları katılımcılarla oluşturulan çalışma bölümleri, ders defterleri ve görüşmeler olmuştur.

Katılımcıların ispat anlayışları; araştırmacı tarafından hazırlanan bir rubriğe dayanarak analiz edilmiştir. Katılımcıların argümanları araştırmacının oluşturduğu temalara göre kritik edilmiştir. Katılımcılar akıl yürütme ve ispat çalışmalarını seçmişler, bu seçimleri ise çalışmaların bilişsel düzeyine göre düşük ya da yüksek düzey olarak sınıflandırılarak analiz edilmiştir.

Çalışmanın sonuçlarına göre ders, katılımcıların ispat anlayışlarını geliştirmekte başarılı olmuştur. Öğretmen adayları lise matematiği düzeyinde ispat yapmaları istendiğinde zorluklarla karşılaşmıştır. Katılımcılar çalışma etkinliklerini seçme ve modifiye etmede başarılı olmuşlardır ve çoğu (sekizi) yüksek düzeydeki argümanlarla ilgili çalışmaları seçmede başarılı olmuşlardır. Çalışmada ayrıca öğretmen adaylarının örnek temelli argümanlarla ikna olmadıkları belirlenmiştir. Bu durum araştırmacı tarafından öğretmen adaylarının deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermedikleri şeklinde yorumlanmıştır.

Matematik bölümü öğrencileri ve öğretmen adayları ile yürütülen çalışmaya (İmamoğlu, 2010) ilişkin özet aşağıda yer almaktadır:

İmamoğlu'nun (2010) çalışmasının amacı matematik öğretmen adaylarının ispata ilişkin tutum ve inançlarını ortaya çıkarmak ve ispat değerlendirme uygulamalarını olduğu kadar ispat yaparken kullandıkları ispat yöntemlerini ve düşünme biçimlerinin belirlemektir. Çalışma 2009-2010 eğitim öğretim yılında bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik eğitimi, lise matematik eğitimi ve matematik bölümü programlarının birinci ve son sınıflarında öğrenim gören 175 öğrenci ile yürütmüştür. Çalışmanın amacına

yönelik olarak tutum ve inanç ölçeği, ispat sınavı ve ispat değerlendirme sınavı geliştirilmiştir. İspat sorularına verilen yanıtlar kullanılan ispat tiplerine göre sınıflandırılmış ve ayrıca akıl yürütme (tümevarımsal-deneysel sayısal örneğe dayalı ile matematiğin sembolik dilini kullanan tümdengelimsel arasında değişen) stillerine göre puanlandırılmıştır. Üç ölçekten elde edilen verilerle ilgili ayrıca betimsel istatistikler de yürütülmüştür. Bulgular arasında sınıflara (birinci ve sonuncu sınıf) ve programlara (matematik, ilköğretim matematik öğretmenliği ve ortaöğretim matematik öğretmenliği) göre gerekli nicel analiz yöntemleri kullanılarak karşılaştırmalar yapılmıştır.

Çalışmada birinci sınıfların ispat yaparken daha çok tümevarımsal akıl yürütme kullanmaya eğilimli oldukları gözlemlenmiştir. Son sınıflar ise çoğunlukla genelleme yapma gereği duyup tümdengelimsel yöntemler kullanmaya çalışmışlardır. Son sınıfların ispat yapma ve değerlendirmede hala bazı zorluklar yaşadıkları ortaya çıkmıştır. Matematik programı öğrencileri ile öğretmen adayları öğrenciler arasında ispat yapma ve değerlendirme konusunda bulunan anlamlı farklar matematik programı öğrencileri lehine olmuştur. Öğretmen adaylarından birinci sınıfta olanlar ispat sorularına verdikleri yanıtlarda genellikle deneysel yöntemler kullanmışlardır. Bu durum araştırmacı tarafından öğretmen adaylarının deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri şeklinde yorumlanmıştır. Son sınıflar ise daha genel argümanlar kullanmaya çabalamışlar fakat bir durumu ve onun tersini ispatlama arasındaki farkı belirlemede zorluk yaşamışlar, doğrudan olmayan yöntemlerin daha kolay uygulanabileceği durumlarda bile doğrudan yöntemleri uygulamaya çalışmışlardır.

Üniversite öğrencileri, öğretim üyeleri ve matematik bölümü mezunu öğrencileri ile gerçekleştirilmiş olan çalışmaya (Raman, 2002) ilişkin özet aşağıda yer almaktadır:

Raman'ın (2002) yürüttüğü çalışmanın amacı üniversite birinci sınıf öğrencileri ve onların öğretmenleri ile matematik bölümü mezunu öğrencilerinin ispat görüşlerinin karşılaştırılmasını içermiştir. Çalışma Amerika'nın üst düzey üniversitelerinden birinde birinci sınıfta okuyan 11 analiz dersi öğrencisi, beş matematik bölümü mezunu öğrenci ve beş matematik profesörü ile yürütülmüştür. Çalışmanın verilerinin "Bir çift fonksiyonunun türevinin tek olduğunu ispatlayınız" sorusunun görev temelli görüşmeler ile sorulmasıyla elde edildiği belirtilmiştir. Görüşmeler özgeçmiş ile ilgili sorular, bir görev (task) ve tepki karşılaştırmasından (response comparison) oluşmuştur. Katılımcılara öncelikle geçmişleriyle ilgili sorular sorulmuş daha sonra kendilerine türev ile ilgili soru yöneltmiştir. Öncelikle katılımcıların bu soruyu kendi başlarına yapmaları istenmiştir.

Daha sonra soru üzerinde sessizce çalışmalarını için süre verilmiş ve belirli bir yöntemi neden seçtiklerine ve yanıtlarından ne derece ikna olduklarına odaklanarak çalışmalarını açıklamaları istenmiştir. Daha sonra katılımcılara bu soruya ilişkin ve hepsi doğru olmayan beş yanıt gösterilmiş ve bunları değerlendirmeleri istenmiştir.

Çalışmada lisans öğrencilerinin iddiayı ispatlamayı zor buldukları ve lisans öğrencilerinden hiçbirisinin tam bir ispat yapılandıramadığı belirtilmiştir. Matematik bölümü mezunu öğrenci ve öğretim üyelerinin ise ispatı kolaylıkla yaptıkları belirlenmiştir. Öğretmen ve öğrencilerin anlayışları arası farklılıkların ispatın üretimi ve değerlendirmesi için bir çatı oluşturduğu belirtilmiştir. Bu çatının ispatın özel ve genel görünümüne odaklanan fikirlerden oluştuğu; ispatın özel yönünün anlamaya neden olan ve anlamayı ortaya çıkaran argümanlar içerirken genel yönünün ise belirli bir matematiksel topluluk için gerekli kesinlik olduğu belirtilmiştir. Çalışma sonucunda iddiayı yanıtlamada sezgisel fikirler (heuristic ideas), işlemsel fikirler (procedural ideas) ve anahtar fikirler (key ideas) olmak üzere üç farklı yaklaşım olduğu sonucuna varılmıştır. Sezgisel fikirlerin deneysel veri ve resimle temsile ilişkin informel anlayışa dayalı fikir verici fakat direk formal ispata götürmeyen fikirler olduğu, anlama hissi verdikleri fakat ikna etmedikleri vurgulanmıştır. Bu fikirdeki öğrencilerin akıl yürütmelerinin temel iddianın doğru olması gerektiği duygusunu vermekle beraber formel ispata götürecek yolu göstermeyeceği belirtilmiştir. Bu fikre sahip öğrencilerin argümanlarının tamamen boş olmamakla beraber daha ileri götürecek kaynaklara sahip olmadığı belirtilmiştir. Bu fikirlerin ispatın özel yönünü temsil ettiği söylenmiştir. İşlemsel fikirlerin ispatın genel yönünü tanımlayan informel anlayış ile bağlantı olmadan formel ispata götüren manipülasyon ve mantığa dayalı fikirler olduğu; ikna duygusu verdikleri fakat anlayış duygusu vermedikleri belirlenmiştir. Bu fikre sahip öğrencilerin bir şeyin doğru olduğunu gösteren argümanlar ürettikleri ve kurnazlıkla prosedürleri takip ederek ispat yapmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Anahtar fikirlerin ise ispatın genel ve özel yönleri arasındaki bağ sağlayan ve sezgisel fikirleri uygun kesinlik duygusuyla formel ispata götüren fikirler olarak tanımlandığı belirtilmiştir. Çalışmada anahtar fikirlerin hem genel hem özel alanlarla bağlantı kurduğu için anlayış ve ikna duygusu veren fikirler olduğu ve belirli bir iddianın neden doğru olduğunu açıklayan fikirler olduğu söylenmiştir. Çalışmanın verileri öğretmen ve öğrencilerin bazı yollarla birbirine benzer şekilde davrandıklarını, her iki grubun özel ve genel argümanlarla birbirlerinden ayrıldığını göstermiştir. Bireylerin bir ispatı doğrudan üretmeyi bilmedikleri zaman bir grafiğe bakmak ya da örnekleri denemek gibi informel yaklaşımlar denedikleri

belirtilmiştir. Çalışmada bu iki grup arasındaki farkın hem anlama hissi veren hem de kesin bir argümana dönüşen genel ve özel alanlar arasında bağlantı kurma becerisi olduğu belirtilmiştir. Bu çalışmadaki profesörlerin anahtar fikirlerle çalıştığı belirtilirken öğrencilerin anahtar fikirlere sahip olmadığı belirtilmiştir. Çalışmada öğretmenler formaliteyi ancak matematiksel fikirlere götüreceği zamanlarda önemli bulurken, öğrenciler formalitenin matematiğin genel yüzü olduğunu belirtmişlerdir. Öğrenciler örneklere bakarak informel yaklaşımlar denemiş ve formal argümana ulaşamamışlardır. Öğretmenler informel argümanları, formal argümana götüren potansiyel bir zemin olarak görürken öğrenciler bu bağı görememişlerdir. Öğretmenler için ispatın en önemli özelliğinin içerdiği anahtar fikir olduğu belirtilirken öğrenciler için en önemli görünümünün bu yüzden, böylelikle gibi dil içeren ifadelerin; sembolizm ve uzunluk olduğu belirtilmiştir. Öğrencilerin formal ve informel argümanlar arasındaki bağları kuvvetlendirmelerinin sağlanmasının onların ispata ilişkin daha doğru görüşler geliştirmelerine ve matematiği daha derinden anlayabilmelerine olanak sağlayacağı belirtilmiştir.

Lise öğrencileri ile yürütülen çalışmaların özeti aşağıda yer almaktadır:

Patkin'in (2012) gerçekleştirdiği çalışmanın amacı lise öğrencilerinin geometrik ispatlar hakkındaki algılarını ortaya çıkarmaktır. Çalışmada öğrencilerin tümdengelsel ispatı ne zaman kullanacaklarını ve geometrik iddiaları ispatlamak ya da reddetmek için bir örneğin yeterli olup olmadığını bilip bilmedikleri ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Çalışmanın verileri 10. sınıfta okuyan ve matematik öğrenen 25 öğrenciden toplanmıştır. Çalışmada lise öğrencilerinin geometrideki ispat kavramlarını nasıl yorumlamakta oldukları ve bu yorumlamayı tümdengelsel bir yolla mı yoksa bunun için bir örnek mi sunmakta oldukları ve öğrencilerin yanıtlarına dayalı olarak ispatları oluşturulurken düşünme biçimlerini tümevarımsal ya da tümdengelsel olarak ve hatta tümdengelselin üzerinde olarak belirlemenin mümkün olup olamayacağı belirlenmeye çalışılmıştır. Nitel yöntemlerle analiz edilen çalışmada veriler bir ölçme aracı ve yapılandırılmış görüşme ile toplanmıştır. Öğrencilere yanıtlarını ispatlamaları için iddiaların doğru ya da yanlış olduğunu belirlemeleri istenmiştir. Öğrencilere yöneltilen iddiaların hepsi geometri derslerinden önce öğrencilerin tanıdık olduğu iddialardan oluşmuştur.

Çalışmanın sonuçlarına göre basit iddia durumlarında öğrenciler tümdengelsel ispatları desteklemişlerdir. Fakat iddia daha karmaşık olduğunda öğrencilerin kullanmaları gereken kanalların daha açıklayıcı ve daha ikna edici olması gerekmiştir. Öğrenciler

iddiyayı önemsiz bulduklarında formel bir açıklama yapmayı gereksiz bulmuşlar ve etraflıca düşünmemişlerdir. Öğrenciler iddia onlara yabancı geldiğinde veya farklı biçimde formüle edildiğinde bir örnek sağlamakta daha emin olmuşlardır. Öğrenciler bir örneğin bir yöntem oluşturup oluşturmadığına emin olamamışlardır. Öğrencilere göre örnekler ikna için değil sadece amaçların gösterimi için kullanılmaktadır. Çalışmada öğrencilerin, örneklerin yetersiz olduğu durumlar ile bir iddiayı ispatlamak için yeterli olduğu durumlar arasındaki ayrımın geliştirilmesi ve derinleştirilmesi gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin hem bir örneğin yeterli olabileceğine inanmaları hem de örneklerin ikna için kullanılmayacağını bilmeleri araştırmacı tarafından öğrencilerin deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermelerinin belirsiz olduğu şeklinde yorumlanmıştır.

Arslan ve Yıldız'ın (2010) çalışmalarının amacı öğrencilerin matematiksel düşünmenin özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarıyla ilgili yaşantılarını ortaya çıkarmaktır. Çalışma Trabzon'da bir lisenin 11. sınıfında öğrenim gören yirmi dört öğrenci ile yürütülmüştür. Nitel araştırma yaklaşımı kullanılarak yürütülen çalışmanın verileri geliştirilen üç çalışma yaprağı ve uygulama sırasında yapılan yapılandırılmamış gözlemler yoluyla toplanmıştır. Hazırlanan çalışma yapraklarının her biri, dörder soru içeren iki etkinlik ve etkinlikler sonucunda elde edilen sonuçların birbiriyle ilişkilendirilmesini isteyen bir soru olmak üzere toplam dokuz sorudan oluşmuştur.

Çalışmada genellemeyle ilgili olarak, sayılar veya değişkenler arasındaki ilişkinin daha çok sözel olarak ifade edildiği ve bu ilişkinin matematiksel sembollerle ifade edilmesinde sorunlar yaşandığı ortaya çıkarılmıştır. Öğrencilerin doğrulama sürecinde varsayımın niçin doğru olduğunu araştırmak yerine, değişkene değer vererek veya istenilen durum için şekil çizerek özelleştirme yapmaya çalıştıkları görülmüştür. Bu durum araştırmacı tarafından öğrencilerin deneysel ispat şemasının göstergelerini taşıyan tepkiler sergiledikleri şeklinde yorumlanmıştır. Öğrencilerin özelleştirmede iyi performans sergiledikleri, ispatlamada ise büyük sıkıntı çektikleri tespit edilmiştir.

Özer ve Arıkan'ın (2002) yürüttükleri çalışmanın amacı lise ikinci sınıf öğrencilerinin matematik derslerinde ispat yapabilme becerilerinin tespit edilerek ispat düzeylerinin ortaya çıkarılmasıdır. Çalışma 2000-2001 eğitim öğretim yılında lise ikinci sınıfta öğrenim gören yüz on öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Ayrıca lise birinci sınıflarından seçilen üç öğrenci ile görüşmeler yapılmıştır. Çalışmada öğrencilerin materyal kullanarak ispat yapıp yapmadıkları da belirlenmiştir. Durum tespiti yapıldığı belirtilen

araştırmada lise ikinci sınıf öğrencilerine açık uçlu altı soru yöneltilmiştir. Lise birinci sınıf öğrencilerine ise görüşmelerde açık uçlu iki soru yöneltilmiştir.

Çalışmada lise öğrencilerinin ispat yöntem ve tekniklerini yeterince kullanmadıkları, istenilen düzeyde ya da materyal kullanarak tümdengelim ya da tümevarım yoluyla ispat yapamadıkları ortaya konmuştur. Öğrencilerin, verilen bir ifadenin doğruluğunu gösterebilmek için özel sayısal değerler verdikleri, açık uçlu yöneltilen altı soruya yanıtlarının genellikle sayısal değerler vererek olduğu belirlenmiştir. Öğrencilere bir ifade verilip, doğruluğu göstermeleri istendiğinde, öğrencilerin buldukları yerde gerekli materyal olmasına rağmen, sayısal değerler verme yoluna gittikleri ya da tümevarım yöntemini kullanmayı tercih ettikleri saptanmıştır. Öğrencilerin bu tepkileri araştırmacı tarafından deneysel ispat şemasının göstergeleri olarak yorumlanmıştır.

Healy ve Hoyles'un (2000) çalışmasında öğrenciler tarafından ispat olarak kabul edilen argümanların özellikleri araştırılmış ve yargılarının ardında yatan sebepler ve kendi başlarına yapılandırdıkları ispat yollarının ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. İngiltere'de 2500 lise öğrencisiyle yürüttükleri çalışmanın amacı Ulusal Öğretim Programı'nı takip eden öğrencilerin bu öğretim programının onlara kattığı ispat anlayışlarını ortaya çıkarmak olmuştur. Öğrencilerden lise cebiriyle ilgili daha önceden tanıdıkları ve tanımadıkları varsayımları ispatlamaları istenmiştir. Nicel analizler bittikten sonra bazı öğretmenlerle ve onların bazı öğrencileriyle görüşmeler yapılmış ve belirlenen eğilimlerin daha ileri açıklamaları araştırılmıştır. Çalışmada ispat aritmetik cebir ve geometri olmak üzere iki alanda araştırılmıştır. Çalışmada nicel verilerin toplanması için iki ölçme aracının kullanıldığı belirtilmiştir. Bu ölçme araçları öğrencilerin, bir ispatın nelerden oluştuğu, ispatın rolü, genelliği hakkındaki görüşlerini ve ikinci olarak ispat yapma yeterliklerini ortaya çıkarmak için tasarlanmıştır.

Çalışmada öğrencilerin daha önceden tanıdıkları varsayım için % 34 oranında ve tanımadıkları varsayım için % 43 oranında deneysel argümanlar ürettikleri raporlanmıştır. Bunun yanında öğrencilere matematiksel önermelerin doğruluğunu yargılamaları ve hangi argümanın kendi yaklaşımlarına daha yakın olduğunu düşünmelerini sağlaması öngörülen iki argüman verildiği, öğrencilerin % 24'ünün ve % 39'unun deneysel argümanları seçtikleri belirtilmiştir. Bu durum araştırmacı tarafından öğrencilerin deneysel ispat şemalarının göstergelerine sahip oldukları şeklinde yorumlanmıştır. Çalışmada deneysel argümanların öğrencilerin sınırlılıklarının farkında olmalarına rağmen ispat

yapılandırmalarının içinde baskın olarak bulunduğu belirtilmiştir. Çalışmada öğrencilerin kendi ürettikleri deneysel argümanların genel olmadığı konusunda farkındalıkları olmadığı gözlemlendiği raporlanmıştır. Öğrencilerin kendi ispatları için ağırlıklı olarak deneysel argümanları kullanmalarına rağmen aynı zamanda bu tür argümanların düşük düzeyde olduğunu ve bunlar için öğretmenlerinden yüksek notlar alamayacaklarını bildikleri belirtilmiştir. Öğrencilerin çoğunluğunun daha önceden aşına olmadıkları durumların ispatında deneysel argümanların genel olmadığı fakat örneklerin bir ifadenin doğruluğu hakkında ikna olmada güçlü anlamları olduğunu farkında oldukları bildirilmiştir. Öğrencilerin çoğunun geçerli bir ispatın genel olması gerektiğinin ve bir ispat yapıldıktan sonra geçerliğinin sağlanması için özel durumların doğruluğunun araştırılmasına gerek olmadığı farkında oldukları belirtilmiştir. Öğrencilerin karmaşık cebirsel ifadeler içeren ispatların kullanımının öğretmenlerden yüksek not almalarını sağlayacağına inandıkları, öğretmenlerin ise bu durumun farkında olmadıkları belirtilmiştir. Öğrencilerin, ispatın mutlaka cebirsel semboller içermesi gerektiğine inandıkları ve hikâye anlatı tarzı kullanılan geçerli ispatların öğretmenlerden yüksek not alamayacağını düşündüklerinin gözlemlendiği belirtilmiştir.

Coe ve Ruthven (1994) çalışmalarında öğrencilerin yeni bir öğretim programında ispat uygulamalarını ve yapılandırmalarını incelemişlerdir. Çalışma İngiltere'deki ileri düzeydeki bir lisedeki yedi öğrenci ile yürütülmüştür. Çalışmada öğrencilerle onların ispat algılarını, ispatın fonksiyonları ile ispata ilişkin sezgi anlayışları hakkındaki görüşlerini almak için görüşmeler düzenlenmiştir.

Çalışmada çok az öğrencinin kurallar ya da modellerin neden ortaya çıktığını açıklayabilmiş olduğu ve çok az öğrencinin bunu dar bir matematiksel sistem içerisine yerleştirmeyi başarabildiği vurgulanmıştır. Öğrencilerin ispat stratejilerinin ağırlıklı olarak deneysel olduğu ve çok azının tümdengelimsel yapıya sahip strateji geliştirebildikleri raporlanmıştır. Öğrencilerin temel sorununun birkaç örnekle test ettikleri varsayılan kural ve modelleri geçerli kılmak olduğu ve başlangıç noktalarıyla mücadele ederken ders kitaplarındaki sayısal verileri analiz etmek için tasarlanan standart rutinleri uygulama eğiliminde oldukları belirtilmiştir. Buradan bu çalışmaya katılan öğrencilerin araştırmacı tarafından deneysel ispat şemasına ilişkin göstergelere sahip oldukları düşünülmüştür.

Chazan'ın (1993) çalışmasının amacı lise öğrencilerinin deneysel ve tümdengelimsel argümanlar arasındaki benzerlik ve farklılıklar hakkındaki anlayışlarını ortaya koymaktır. Çalışmasını Amerika'nın kuzeydoğusunda bulunan bir lisede geometri

dersi alan 17 lise öğrencisiyle yürütmüştür. Çalışmada matematiksel argümanlar hakkındaki bu anlayışa sahip olan öğrencilerin gerekçelendirmeleri belirlenmiştir ve geometri dersi alan ve deneysel ispatlar kullanan lise öğrencileriyle derinlemesine görüşmeler yapılmıştır. Görüşmeler ile öğrencilerin geçmiş algısal ve dilsel deneyimlerinin, onların deneysel ve tümdengelimsel argümantasyon anlayışlarını oluşturmalarına etki edip etmediği analiz edilmiştir.

Çalışmada öğretmenlerin kendi sınıflarında materyal geliştirmeleri için desteklendikleri, öğretimsel ünite bittikten sonra öğrencilere daha önce yaptıkları soru formunun tekrar verildiği, öğrencilerin soru formuna verdikleri yanıtlara dayalı olarak seçili öğrencilerle görüşmeler yapıldığı belirtilmiştir. Veriler yarı yapılandırılmış görüşmeler ile sağlanmıştır. Görüşmelerde görüşmecilere, karşılaştırmaları için örnek hesaplamaları içeren ve tümdengelimsel ispat içeren iki çeşit argümantasyon verildiği ve daha önce gördükleri belirli argümanları karşılaştırıp yorumlamalarının istendiği söylenmiştir. Görüşmelerin ilk bölümünde öğrencilere örnek hesaplamalarına dayalı ve tümdengelimsel ispata dayalı argümanları karşılaştırmaları için argümanlar yöneltilmiş ve kendi ders kitaplarında bulunan tümdengelimsel bir ispat hakkında okullarda neden yapıldığıyla ilgili soru yöneltilmiştir. Öğrencilerin yanıtları incelendikten sonra onlara ispat sorularından bir argüman gösterildiği ve öğrencilerden önlerinde bulunan iki çeşit argüman açısından yanıtlarını açıklamaları istendiği belirtilmiştir.

Çalışmada öğrencilerin hesaplamalar gibi deneysel bulguları ispat olarak gördükleri ve matematiksel ispatı sadece bir bulgu olarak gördükleri ortaya konmuştur. Bu durum araştırmacı tarafından öğrencilerin deneysel ispat şemasına ilişkin tepkiler ortaya koydukları şeklinde yorumlanmıştır. Öğrencilerin tümdengelimsel düşünmeyle ispatı sadece tek bir durum için bir bulgu olarak değerlendirdikleri ve ispatın genel durumlar için gücünü anlamadıkları belirtilmiştir.

Ortaokul öğrencileri ile yürütülen çalışmaların özeti aşağıda yer almaktadır:

Aylar'ın (2014) yürütmüş olduğu çalışmanın amacı öğrencilere ispat becerilerini geliştirmeye yönelik bir öğretim uygulandığında ispat becerilerinin nasıl değişeceğinin belirlenmesidir. Çalışma Ankara'nın farklı iki ilçesine bağlı iki ortaokulunun yedinci sınıfında öğrenim gören 48 öğrenci ile yürütülmüştür. Deneysel yöntemlerle yürütülen çalışmada öğrencilerin ispat becerileri ilk olarak bir hazır bulunuşluk testi ile ölçülmüş, öğrencilerle daha sonra 13 haftaya yayılmış 14 saatlik formel ispat yapabilecekleri

uygulamalar gerçekleştirilmiştir. Uygulama sonrasında doğrudan ispat, karşı örnek vererek ispat, tüketerek ispat ve durum yolu ile ispat yöntemlerini içeren ispat testi uygulanmıştır. Daha sonra öğrencilerinin düşüncelerinin daha ayrıntılı incelenmesi için görüşmeler yapılmıştır.

Çalışmada öğrencilerin örnek vererek ispat yönteminde diğer yöntemlere göre daha başarılı oldukları, durum yolu ile ispat yönteminde ise belirgin bir şekilde başarısız oldukları ortaya çıkarılmıştır. Öğrencilerden ispat yapmaları istendiğinde örnekle doğrulama eğiliminin baskın olduğu görülmüştür. Bu durum araştırmacı tarafından öğrencilerin deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler verdikleri şeklinde yorumlanmıştır.

Knuth, Choppin, ve Bieda'nın (2009) çalışmalarının amacı ortaokul öğrencilerinin ispatlamanın çeşitli görünüşleri hakkındaki anlayışlarını ortaya çıkarmaktır. Çalışma Amerika'daki bir ortaokulda altıncı, yedinci ve sekizinci sınıflarda öğrenim gören 400 öğrenci üzerinde yürütülmüştür. Nitel olarak yürütülen çalışmada öğrencilerin ispatlama ve gerekçelendirme yeterlikleri gelişimsel bir çatıda incelenmiştir. Öğrencilere, çeşitli matematiksel argümanları değerlendirecekleri, kendi argümanlarını oluşturacakları, tanımlara başvuracakları, uygulama kuralları ve tümdengelim anlayışlarını sergileyecekleri ve ispatın doğasını tartışacakları iki yazılı değerlendirme verilmiştir. Veriler iki okul yılı boyunca toplanmıştır. Her güz döneminde, öğrencilerden iki farklı değerlendirmeyi yanıtlamaları istenmiştir. Örneğin ilk değerlendirmeyi altıncı sınıfta alan bir öğrenci ikinci değerlendirmeyi yedinci sınıftayken almıştır. Bu çalışmada, iki değerlendirme boyunca öğrencilerin ürettikleri gerekçelendirmelerin nasıl farklılaştığı incelenmiştir. Çalışmanın başlıca amacı öğrencilerin gerekçelendirmelerinin doğasının bir yıldan diğerine nasıl değiştiğini karşılaştırmak değil, ortaokul öğrencilerinin gerekçelendirmeleri nasıl ürettiğinin bir resmini ortaya koymaktır. Çalışmada öğrencilerin ürettiği gerekçelendirmelerin birçok modeline ilişkin sonuçlar ortaya konmuştur. Öğrenciler tarafından kullanılan gerekçelendirmelerin deneysel argümanlar olduğu belirtilmiştir.

Çalışmada sınıf düzeyi arttıkça öğrenciler tarafından yapılan gerekçelendirmelerin geliştiği belirlenmiştir. Öğrencilerin gerekçe üretmeleri beklenen durumlarda, genel bir durum üretmeleri gerektiğinin farkında olmalarına rağmen örnek temelli argümanlar gerekçelendirmeleri tek yardım kaynakları olmuştur. Öğrencilerin karışık durumlar yerine daha basit görünen deneysel argümanlar üretme eğiliminde oldukları belirtilmiştir. Çalışmada bazı öğrenciler genel argümanlar üretseler de argümanlarını örneklerle

desteklemişlerdir. Bu durum araştırmacı tarafından öğrencilerin deneysel ispat şemasının göstergeleri olan tepkiler verdikleri şeklinde yorumlanmıştır.

Knuth, Slaughter, Choppin, ve Sutherland'in (2002) çalışmalarının çok yıllı bir araştırma projesinin ilk sonuçlarının ortaya konduğu, ortaokul öğrencilerinin gerekçelendirme ve ispat yeterliklerinin gelişimini ve bu gelişimi desteklemesi gerekli olan koşulları ve pedagojiyi ortaya çıkarmayı amaçlayan bir çalışma olduğu belirtilmiştir. Çalışma altıncı, yedinci ve sekizinci sınıflarda öğrenim gören 350 öğrenci üzerinde yürütülmüştür. Çalışmada öğrencilerin matematiksel argümanları, tümdengelim çeşitli görünüşleri hakkındaki anlayışları ve ispatın doğası hakkındaki anlayışlarını oluşturma ve değerlendirme becerileri incelenmiştir. Çalışmada öğrencilere gerekçelendirme ve ispatlama becerilerinin ölçülmesi amacıyla tasarlanan yazılı bir değerlendirme verilmiştir. Öğrencilerin bir ders saati boyunca matris örnekleme kullanarak, verilen 15 sorunun sekizine yanıt verdikleri belirtilmiştir.

Nitel yöntemlerle yürütülen çalışmada öğrencilerin çok yoğun biçimde bir durumun doğruluğunu geçerli kılmada ve göstermede örnek kullanımına güven duyduklarını gösterdiği belirtilmiştir. Öğrencilerin yanıtlarında bir durumun doğruluğunun kurulmasında deneysel bulguların sınırlılıklarını farkında olmadıkları ve büyük çoğunluğunun bir durumu ispat etmek için sistematik olmayan yöntemle seçilen bir ya da iki örneğin ispat için yeterli olduğuna inandıkları sonucuna varılmıştır. Örneğin bir durumda öğrenci çeşitli sayıları ve kombinasyonlarını “çok büyük” sayılar içeren çeşitli sayılara uygulayarak bir durumun doğruluğunu gösterme yoluna gittikleri ve çok az öğrencinin genel argümanlar üretme çabası içine girdiği belirlenmiştir. Öğrencilerin bu tepkileri araştırmacı tarafından deneysel ispat şemasının göstergeleri olarak değerlendirilmiştir. Çalışmanın sonuçlarının farklı sınıf düzeyindeki öğrencilerin tümdengelimsel süreçlerin çeşitli görünüşleri hakkındaki anlayışlarının farklı olduğunu ortaya koyduğu belirtilmiştir.

Sonuçlarında ispat şemalarına değinmeyen fakat ispat şemalarının bazı özelliklerini ele alan araştırmalara ilişkin özet aşağıda yer almaktadır. Bu çalışmalar sonuçlarında ispat şeması terimini içeren ifadelerde bulunmamışlardır. Aşağıdaki özetlerde belirtilen belirli “ispat şeması” ifadeleri araştırmacı tarafından yorumlanarak ortaya konulmuştur. Başka deyişle bu gruptaki çalışmalarla ilgili sonuç özetlerindeki “ispat şeması” ifadeleri, araştırmacı tarafından anılan özelliklerle eşleştirilerek belirli bir ispat şeması sınıflandırmasına dâhil edilmiştir.

Sonuçlarında deneysel ispat şemalarının özelliklerini barındıran bu çalışmalardan bazıları (Aylar, 2014; Bieda, 2008; Knuth ve diğerleri, 2009; Knuth ve diğerleri, 2002) ortaokul öğrencileriyle; bazıları (Arslan ve Yıldız, 2010; Chazan, 1993; Coe ve Ruthven, 1994; Healy ve Hoyles, 2000; Özer ve Arıkan, 2002) lise öğrencileriyle, bazıları (Segal, 1999) lisans öğrencileri ile bazıları ise (Ceylan, 2002; Demiray, 2013; Goetting, 1995; İmamoğlu, 2010; Martin ve Harel, 1989; Pekşen Sağır, 2013; Stylianides ve Stylianides, 2009) ise matematik öğretmen adayları ile gerçekleştirilmiştir.

Öğrencilerin veya öğretmen adaylarının deneysel ispat şemalarının bazı özelliklerini gösterdikleri durumları içeren çalışmalara ilişkin sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

Bu araştırmaların çoğunluğu (Arslan ve Yıldız, 2010; Aylar, 2014; Bieda, 2008; Ceylan, 2002; Chazan, 1993; Coe ve Ruthven, 1994; Demiray, 2013; Goetting, 1995; Healy ve Hoyles, 2000; İmamoğlu, 2010; Knuth ve diğerleri, 2009; Knuth ve diğerleri, 2002; Martin ve Harel, 1989; Özer ve Arıkan, 2002; Pekşen Sağır, 2013; Segal, 1999; Stylianides ve Stylianides, 2009) sonuçlarında öğrencilerin ya da öğretmen adaylarının deneysel ispat şeması terimi içermese de deneysel ispat şemasının özelliklerine ilişkin özellikler ortaya koyduklarına dair sonuçlara yer vermişlerdir.

Ortaokul öğrencilerinin araştırmacı tarafından deneysel ispat şemalarının bazı özelliklerini gösterdikleri durumlar olarak yorumlanabilecek sonuçlar içeren çalışmalara (Aylar, 2014; Bieda, 2008; Knuth ve diğerleri, 2009; Knuth ve diğerleri, 2002) ilişkin özet aşağıda yer almaktadır:

Aylar'ın (2014) çalışmasında öğrencilerin ispat yaparken deneysel ispat şemasına ilişkin özellikler ortaya koymanın bir göstergesi olan örnekle doğrulama eğilimlerinin baskın olduğu; Bieda'nın (2008) çalışmasında öğrencilerin ispat ile ilişkili görevlerde az sayıda genel argümanları ürettikleri ve ağırlıklı olarak deneysel temel örnekler şeması olarak nitelendirilebilecek gerekçeler ürettikleri; Knuth ve diğerleri'nin (2009) çalışmalarında öğrenciler tarafından kullanılan gerekçelendirmelerin deneysel argümanlar olduğu, öğrencilerin karışık durumlar yerine daha basit görünen deneysel argümanlar üretme eğiliminde oldukları ve genel argümanlar üretseler de argümanlarını örneklerle destekledikleri; Knuth ve diğerleri'nin (2002) çalışmasında ise öğrencilerin çok yoğun biçimde bir durumun doğruluğunu geçerli kılmada ve göstermede örnek kullanımına güven duydukları ve bir durumun doğruluğunun kurulmasında deneysel bulguların

sınırlılıklarının farkında olmadıkları belirlenmiştir. Bu durumlar araştırmacı tarafından ilgili çalışmalarda ortaokul öğrencilerinin bazı ifadelerinde deneysel ispat şemasını ortaya koyan bazı özellikler gösterdikleri şeklinde yorumlanmıştır.

Lise öğrencilerinin deneysel ispat şemalarının bazı özelliklerini gösterdikleri durumları içeren çalışmalara ilişkin sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

Lise öğrencilerinin ispat süreçlerinde; çoğunlukla deneysel argümanlar yapılandıkları ve kendi ürettikleri deneysel argümanların genel olmadığı konusunda farkındalıkları olmadıkları (Healy ve Hoyles, 2000); varsayımın niçin doğru olduğunu araştırmak yerine, değişkene değer vererek (Arslan ve Yıldız, 2010; Özer ve Arıkan, 2002) veya istenilen durum için şekil çizerek özelleştirme yapmaya çalıştıkları (Arslan ve Yıldız, 2010); deneysel bulguları ispat olarak görerek ispatın genel durumlar için gücünü anlamadıkları (Chazan, 1993); ispat stratejilerini çok az tümdengelsel yapıya sahip olarak ortaya koyarak ağırlıklı olarak deneysel argümanlar yapılandıkları ve birkaç örnekle test ettikleri varsayılan kural ve modelleri geçerli kılmaya çalıştıkları (Coe ve Ruthven, 1994) belirlenmiştir. Bu durumlar araştırmacı tarafından ilgili çalışmalarda lise öğrencilerinin bazı ifadelerinde deneysel ispat şemasını ortaya koyan bazı özellikler gösterdikleri şeklinde yorumlanmıştır.

Öğretmen adaylarının deneysel ispat şemalarının bazı özelliklerini gösterdikleri durumları içeren çalışmalara ilişkin sonuçlar aşağıda özetlenmiştir:

Demiray (2013) öğretmen adaylarının geçersiz ispatları içerisinde en çok görülen davranışlardan birinin “ifadeyi ispatlamak için sayıları kullanmak” olduğunu belirtmiştir. Benzer şekilde öğretmen adaylarının kendilerine uygun yöntem verilmediğinde, kullanacakları yöntemi seçmekte zorlandıkları ve örnek vererek ispatı tamamlamaya çalıştıklarını (Pekşen ve Sağır, 2013) ve az sayıda genel argüman üreterek ağırlıklı olarak örnek temelli gerekçelendirmeler (Bieda 2008) ve deneysel gerekçelendirmeler (Ceylan, 2002) yapılandıkları belirlenmiştir. Benzer şekilde Stylianides ve Stylianides (2009) ve İmamoğlu (2010) çalışmalarında öğretmen adaylarının, önermeleri deneysel argümanlar yardımıyla ispatlamaya çalıştıklarını bildirmişlerdir. İmamoğlu (2010) öğretmen adaylarından birinci sınıfta olanların genellikle deneysel yöntemleri kullandıklarını vurgulamıştır. Goetting (1995) çalışmasında bazı öğretmen adaylarının deneysel bulguları genelleme için geçerli ispatlar olarak gördüklerini belirtirken Martin ve Harel (1989) çalışmasında öğretmen adaylarının yarısından fazlasının tümevarımsal argümanları geçerli

bir ispat olarak değerlendirdiklerini belirtmiştir. Segal'in (1999) deneysel olarak yuruttuğu çalışmanın ilk bolumunde oğretmen adaylarının ute birinin belirli bir durumu gosteren gerekçelendirmenin ispatı oluşturduğunu duşundukleri ve eğitim mudahalesi sonunda deneysel bir ispatı nelerin oluşturacağı hakkındaki anlayışlarının geliştiğini ortaya konmuştur. Bu durumlar araştırmacı tarafından ilgili çalışmalardaki oğretmen adaylarının bazı ifadelerinde deneysel ispat şemasını ortaya koyan bazı ozellikler gosterdikleri şeklinde yorumlanmıştır.

Yukarıdaki çalışmaların haricindeki bazı alışmalar (Boyle, 2012; Norby, 2013; Patkin, 2012) ise sonuçlarında oğretmen adaylarının, bu çalışmada araştırmacı tarafından deneysel ispat şeması olarak yorumlanabilecek belirli bazı ozellikleri gosterip gostermediklerinden emin olamadıklarından veya bu ozellikleri gostermediklerinden bahsetmişlerdir. Oğretmen adaylarının deneysel ispat şemasına ilişkin ozelikler gosterme durumu bu çalışmada araştırmacı tarafından yorumlanmıştır. Orneğin, Boyle (2012) oğretmen adaylarının ve yuksek lisans oğrencilerinin matematiksel iddiayı ispatlamak için bir orneğin bir yontem oluşturup oluşturmadığına emin olamadıklarını belirtmiştir. Bu çalışmada oğrencilere gore ornekler ikna için değil sadece amaçların gosterimi için kullanılmakta ise de, bu oğrencilerin orneklerin yetersiz olduğu durumlar ile bir iddiayı ispatlamak için yeterli olduğu durumlar arasındaki ayırım hakkındaki anlayışlarının geliştirilmesi ve derinleştirilmesi gerektiği goruşu desteklenmiştir. Norby'nin (2013) alışmasında ise tum katılımcılar sonsuz bir kumedeki bir matematiksel ifadeyi ispatlarken deneysel ispatlamanın sınırlı ve sabit bir anlayışa sahip olduğunun farkında olmuşlardır. Tum katılımcılar deneysel listeleri uygulanamaz olarak işaretlemişlerdir. Patkin'in (2012) alışmasında oğrenciler iddia onlara yabancı geldiğinde veya farklı biçimde formule edildiğinde bir ornek sağlamakta daha emin olmuşlardır fakat bir orneğin bir yontem oluşturup oluşturmadığına emin olamamışlardır. Oğrencilere gore ornekler ikna için değil sadece amaçların gosterimi için kullanılmaktadır.

Yukarıda ozetlenen araştırmalar sonuçlarında deneysel ispat şemalarına ilişkin ozellikleri ile ilgili detaylar barındıran çalışmalardır. Bu başlık altındaki bazı çalışmalar ise sonuçlarında deneysel ispat şemalarının ozelliklerinden farklı ispat şemalarının ozelliklerini barındırmışlardır. Bu alışmalar ise aşağıda ozetlenmiştir:

Sonuçlarında tam olarak ifade edilmemiş olsa da ilkoğretim oğrencilerinin (Flores, 2002), veya lisans oğrencilerinin (Solomon, 2006) veya oğretmen adaylarının (Baştırk, 2010), bu çalışmada araştırmacı tarafından otoriter olarak yorumlanabilecek ispat

şemasının özelliklerini barındırdıklarına işaret eden araştırmalara ilişkin açıklamalar aşağıdaki gibi özetlenmiştir:

Baştürk (2010) matematik öğretmen adaylarının bir ispat algoritmasını hatırlamak için ders kitabına ya da ders notlarına bakma gibi ispatı taklit eden düşünme biçimleriyle tanımlanan taklitçi akıl yürütme kullandıklarını bildirirken Flores (2002) ilköğretim öğrencileriyle yürüttükleri çalışmada birçok öğrencinin yanıtları ve tutumlarının ailelerinin, büyük kardeşlerinin, öğretmenlerinin ve kitaplarının onlara ne anlattığına dair derin bir güven içinde olduklarını gösterdiklerini belirtmiştir. Solomon (2006) üniversite öğrencileri ile gerçekleştirdiği çalışmada öğretmen adaylarının kendilerini matematik konusunda güçsüz olarak nitelerken üniversite hocalarını otorite kaynağı olarak gördüklerini belirtmiştir.

Bazı çalışmalar ise (Pekşen Sağır, 2013; Selden ve Selden, 2003) öğretmen adaylarının araştırmacı tarafından dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının özelliklerini barındığı şeklinde yorumlanabilecek sonuçlara yer vermişlerdir.

Pekşen Sağır (2013) matematik öğretmen adaylarıyla yürüttüğü çalışmada öğretmen adaylarının ispat yaparken sürece tam olarak hâkim olmadıklarını, ispat yöntemlerini seçmekte zorlanarak bu yöntemleri ezbere kullanmaya çalıştıklarını, ve yöntemler hakkında eksik ve yanlış bilgilere sahip olduklarını tespit etmiştir. Selden ve Selden (2003) çalışmalarında öğretmen adaylarının argümanların yüzeysel görünüşlerine odaklanma eğiliminde oldukları ve argümanların ispat olup olmadığı konusunda sınırlı beceriye sahip olduklarını belirtmişlerdir. Bu durumlar bu çalışmalarda öğretmen adaylarının araştırmacı tarafından dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin tepkiler verdikleri şeklinde yorumlanmıştır.

Raman (2002) ise birinci sınıfta okuyan lisans öğrencileri, matematik bölümü mezunları ve matematik profesörleri ile gerçekleştirdiği çalışmada öğretmenler için ispatın en önemli özelliğinin içerdiği anahtar fikir olduğu belirtilirken öğrenciler için en önemli görünümün “bu yüzden”, “böylelikle” gibi dil içeren ifadelerin; sembolizm ve uzunluk olduğunu belirtilmiştir. Bu durum bu çalışmada araştırmacı tarafından öğretmenlerin analitik ispat şemasının, öğrencilerin ise dışsal ispat şemalarının özelliklerini barındıran beceri ve düşüncelere sahip oldukları şeklinde yorumlanmıştır.

Bir çalışma (Ceylan, 2002) ise öğretmen adaylarının yaptıkları ispatların yarı yarıya deneysel gerekçelendirmeler ve tümdengelimli gerekçelendirmeler içerdiğini belirtilmiştir.

Bu durum araştırmacı tarafından öğretmen adaylarının tepkilerinin yarısında deneysel ispat şemasını, diğer yarısında ise analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koydukları şeklinde yorumlanmıştır.

2.2.3. Sonuçlarında İspat şemalarına Yer Veren veya İspat şemalarının Bazı Özelliklerini Ele Alan Araştırmalara İlişkin Özet

Buraya kadar olan bölümlerde; öğrencilerin, öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemeyi hedefleyen veya öğrenci ve öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemeyi hedeflemese de sonuçlarında bu şemaların özelliklerine dair bilgiler sunan çalışmalara yer verilmiştir. Aşağıda tüm bu çalışmalara ilişkin özet yer almaktadır. Özetten hemen sonra ise ispatın doğasına ilişkin araştırmalara (2.2.4. başlığı altında) yer verilmiştir.

Aşağıda öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemeye yönelik yapılan çalışmalara ilişkin özet yer almaktadır:

Öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemeye yönelik yapılan çalışmaların tümü ispat şemaları sınıflandırmaları için Harel ve Sowder'in (1998) ve Sowder ve Harel'in (1998) çatısını kullanmışlardır. Bu çalışmalar ispat şemalarını dışsal, deneysel ve analitik ispat şemaları olmak üzere üç temel grupta ve üç temel sınıflandırmanın altında yedi alt kategoride belirlemişlerdir. Bu gruptaki çalışmaların bir bölümü öğretmen adaylarının (Gholamazad ve diğerleri, 2004; İskenderoğlu ve diğerleri 2010; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014) ve ortaokul öğrencilerinin (Heinze ve Reiss, 2003) deneysel ispat şemasının kullanımının ya da deneysel argümanları ispat olarak görme eğiliminin çoğunlukta olduğunu belirlemişlerdir. Benzer olarak bazı çalışmalar ise ortaokul öğrencilerinin (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Sen ve Güler, 2015), lise öğrencilerinin (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Ören, 2007) ve sınıf öğretmeni adaylarının (Oflaz ve diğerleri, 2016) ve lisans öğrencilerinin (Stylinou ve diğerleri, 2006) çoğunlukla dışsal ve deneysel ispat şemalarını kullandıklarını ortaya koymuşlardır.

Bir başka çalışma grubu ise (Housman ve Porter, 2003; ve Plaxco, 2011) lisans öğrencilerinin analitik ispat şemasının özelliklerine ilişkin tepkiler ortaya koydukları sonucuna ulaşmışlardır. İlgili alanyazın incelendiğinde öğrencilerin veya öğretmen adaylarının çoğunlukla dışsal ve deneysel ispat şemalarına ortaya koyan tepkiler sergiledikleri söylenebilir. Bazı çalışmalar (Flores, 2006; Koichu, 2009) ise ispat şemalarına ilişkin frekans bilgilerine yer vermemiş, öğrencilerin veya öğretmen adaylarının

ispat şemalarını nedenleriyle beraber kendi özellikleri açısından irdeleyerek ortaya koymuşlardır.

Öğretmen adaylarının ve öğrencilerin ispat şemalarının gelişimini inceleyen bazı boylamsal araştırmalar (Martin ve diğerleri, 2005; SoucyMcCrone ve Martin, 2004; Sowder ve Harel, 2003) ise sonuçlarında öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispat süreçlerine ve ispat şemalarına ilişkin gelişimler gösterdiklerini belirlemişlerdir. Bir çalışma (Haverhals, 2011) öğrencilerin ispat şemalarındaki gelişimlerinde ortak tanımlayıcı yollar bulunmadığını belirlerken, diğer çalışma grubu (CadwaladerOlsker, 2007; Recio ve Godino, 2001) ise öğrencilerin ispat şemaları ile ilgili ölçümleri arasındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olmadığı ya da gelişim göstermediği sonucuna ulaşmışlardır.

Yukarıda anılan çalışmalar dışındaki diğer bir çalışma grubu ise ispat şemalarını ve özelliklerini deneysel desen yardımıyla ortaya koyan çalışmalardan oluşmuştur. Bu çalışmaların tümü (Ellis, 2007; Grigoriadou, 2012; Harel, 2001; Soto, 2010) sonuçlarında öğrenci, öğretmen ve öğretmen adaylarının belirli öğretim uygulamaları sonucunda ispat şemalarında gelişim gösterdiklerini ortaya koymuşlardır. Sadece bir çalışma (Harel ve Rabin, 2010) diğerlerinden biraz daha farklı olarak sonuçlarında öğrencilerdeki otoriter ispat şeması gelişimini olumlu yönde etkileme yollarının ortaya çıkaracak belirli öğretim uygulamaları belirlemiştir. Bu özetten sonra, sonuçlarında ispat şemalarına değinmeyen fakat ispat şemalarının özelliklerini barındıran çalışmalara ilişkin özet yer almaktadır:

Bazı çalışmalar sonuçlarında ispat şemalarına ilişkin bilgi vermemiş, fakat ispat şemalarının belirli özelliklerine ele almışlardır. Bu özellikler araştırmacı tarafından belirli ispat şeması sınıflandırması bağlamında yorumlanarak ortaya konmuştur. Bu araştırmaların çoğunluğu (Arslan ve Yıldız, 2010; Aylar, 2014; Bieda, 2008; Ceylan, 2002; Chazan, 1993; Coe ve Ruthven, 1994; Demiray, 2013; Goetting, 1995; Healy ve Hoyles, 2000; İmamoğlu, 2010; Knuth ve diğerleri, 2009; Knuth ve diğerleri, 2002; Martin ve Harel, 1989; Özer ve Arıkan, 2002; Pekşen Sağır, 2013; Segal, 1999; Stylianides ve Stylianides, 2009) sonuçlarında öğrencilerin ya da öğretmen adaylarının gösterdikleri tepkileri deneysel ispat şeması terimi ile tanımlamamış, fakat deneysel ispat şemasının özelliklerine ilişkin özellikler ortaya koyduklarına dair sonuçlara yer vermişlerdir. Bir diğer çalışma grubu (Baştürk, 2010; Flores, 2002; Solomon, 2006) da öğrencilerin ve öğretmen adaylarının bu çalışmada araştırmacı tarafından otoriter olarak yorumlanabilecek ispat şemasının özelliklerini barındırdıkları sonucuna ulaşmışlardır. Bu gruptaki çalışmaların çok azı sonuçlarında araştırmacı tarafından sadece dışsal (Selden ve Selden, 2010) ya da analitik

(Raman, 2002) ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkileri barındırmıştır. Buradan, sonuçlarında ispat şeması terimine değinmeyen fakat ispat şeması özelliklerini barındıran çalışmaların büyük bölümünün araştırmacı tarafından deneysel ispat şeması olarak yorumlanabilecek tepkiler barındırdığı söylenebilir. Bir çalışma ise (Pekşen Sağır, 2013) çalışmasında matematik öğretmeni adaylarının deneysel ispat şemasının yanında araştırmacı tarafından dışsal alışkanlık edinilmiş olarak yorumlanabilecek tepkilerde bulduklarını belirtmiştir.

Yukarıda özetlenen tüm çalışmalara bakıldığında ilgili alanyazındaki çalışmaların büyük çoğunluğunun sonuçlarında öğrencilerin veya öğretmen adaylarının deneysel ispat şeması veya dışsal ve deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilediklerini belirledikleri söylenebilir.

Bunun yanında ilgili alanyazın incelendiğinde çalışmaların çok azının matematik öğretmeni adaylarının (İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu, Baki, ve İskenderoğlu, 2010; Sarı, Altun, ve Aşkar, 2007) ispat şemalarını deneysel olmayan bir yaklaşımla başka değişkenler olmadan incelediği belirlenmiştir. İspat şemalarını deneysel olmayan bir yaklaşımla başka değişkenler olmadan matematik öğretmeni adayları üzerinde inceleyen bu çalışmaların hepsi Türkiye’de yapılmış olup ikisi (İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu, Baki, ve İskenderoğlu, 2010) klinik görüşmeler kullandıklarını belirtirken, diğeri (Sarı, Altun, ve Aşkar, 2007) sadece görüşmeler kullandığını belirtmişlerdir. Bu çalışmalardan hiçbirinin matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını görev temelli görüşmeler yardımıyla belirleme yoluna gitmemiştir. Yurtdışında ise matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını bu bağlamda inceleyen çalışmaya rastlanmamıştır.

2.2.4. İspatın Doğasına İlişkin Araştırmalar

Bu bölümde, öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispatın doğasına ilişkin bilgi, düşünce, görüş veya anlayışlarını incelemeyi hedefleyen çalışmalara yer verilmiştir. Bu bağlamda ispatın doğası kategorisinde nitelendirilebilecek çalışmalar “Öğretmenlerin veya Öğretmen Adaylarının ispat Kavramına İlişkin Görüşlerini İnceleyen Araştırmalar”, “Öğrencilerin veya Öğretmen Adaylarının İspat Bilgilerini veya İspat Süreçlerini İnceleyen Araştırmalar” ve “İspatın Doğasına İlişkin Öğretim Uygulamalarının Değerlendirilmesini Kapsayan Araştırmalar” olmak üzere üç başlık altında incelenmiştir. Bu başlıklar altındaki çalışmaların geneline ilişkin özet bu bölümün sonunda çalışmalara ilişkin özetlerden sonra yer almaktadır.

2.2.4.1. Öğretmenlerin veya öğretmen adaylarının ispat kavramına ilişkin görüşlerini inceleyen araştırmalar.

Bu bölümde öğretmenlerin veya öğretmen adaylarının ispat kavramına ilişkin görüşlerini inceleyen araştırmalara yer verilmiştir. Anılan araştırmaların kısa bir özeti aşağıda yer almaktadır. Özetten sonra bu grupta yer alan her bir araştırma çalışma grubuna göre alt alta özetlenmiştir. Bu bölümün en sonunda ise bu çalışmaların sonuçlarına ilişkin özete yer verilmiştir.

Alanyazın incelendiğinde; ispatın doğası kategorisinde nitelendirilebilecek çalışmaların birçoğunun (Dane, 2008; Güler ve Dikici, 2012; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Knuth, 2002b; Köğce ve Yıldız, 2011; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006; Oehrtman ve Lawson, 2008; Özdemir ve Kaplan, 2014) matematik öğretmeni adaylarının veya öğretmenlerin ispat kavramına ilişkin görüşlerini ortaya çıkarmayı amaçladığı görülmüştür. Bu çalışmalardan bazıları (Dane, 2008; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; Köğce ve Yıldız, 2011; Özdemir ve Kaplan, 2014,) ilköğretim matematik öğretmen adaylarının, bazıları (Özdemir ve Kaplan, 2014) ortaöğretim veya lise matematik öğretmen adaylarının, bazıları (Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006) ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının, bazıları (Knuth, 2002b; Oehrtman ve Lawson, 2008) ise matematik öğretmenlerinin ispat hakkındaki görüşlerini değerlendirmeyi hedeflemişlerdir. İlköğretim matematik öğretmeni adayları ile gerçekleştirilen bu çalışmalardan bazıları (Güler ve diğerleri, 2012; Köğce ve Yıldız, 2011; Özdemir ve Kaplan, 2014) öğretmen adaylarının ispat görüşlerinin farklı değişkenlerle ilişkilerini ortaya çıkarmayı hedeflemişlerdir. Örneğin, Özdemir ve Kaplan (2014) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının öğrenme stillerine göre matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerindeki farklılıkları incelemeyi amaçlamış, Güler ve diğerleri (2012) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel tümevarım yöntemiyle ispat becerilerini, matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini ve bunlar arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmayı hedeflemişlerdir. Köğce ve Yıldız (2011) ise ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat kavramı hakkındaki görüşlerini belirlerken farklı sınıf düzeyinde bu kavrama ilişkin görüşlerini karşılaştırmayı amaçlamışlardır.

Öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispata ilişkin görüş, anlayış ve düşüncelerini inceleyen yukarıdaki araştırmalardan bazıları (Dane, 2008; Güler ve Dikici, 2012; Knuth, 2002b) nitel bazıları ise nicel (Moralı ve diğerleri, 2006; Oehrtman ve Lawson, 2008) yöntemlerle verilerini analiz etmişlerdir. Öğretmen adaylarının ispat görüşlerinin farklı

değişkenlerle ilişkilerini ortaya çıkarmayı hedefleyen çalışmalar da nitel (Köğce ve Yıldız, 2011; Özdemir ve Kaplan, 2014) ve nicel (Güler ve diğerleri, 2012) analiz yöntemleri kullanmışlardır.

Matematik öğretmeni adaylarının ispat hakkındaki görüşlerini değerlendiren çalışmalara ilişkin özetler aşağıda yer almaktadır:

Özdemir ve Kaplan'ın (2014) çalışmalarının amacı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının öğrenme stillerine göre matematiksel ispat yapmaya yönelik görüşlerindeki farklılıkların incelenmesidir. Çalışma bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü son sınıfında öğrenim gören sekiz öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Farklı öğrenme stillerine sahip öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin görüşlerinin belirlenmesinde nitel araştırma desenlerinden olgu bilim deseni kullanılmıştır. Çalışmada öğretmen adaylarının öğrenme stillerinin belirlenebilmesi için öğrenme stili ölçeği kullanılmış, öğretmen adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini ortaya çıkarmak için ise görüşme formu kullanılarak yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Öğretmen adaylarının matematiksel ispata ilişkin görüşlerinden elde edilen nitel verilerin analizinde içerik analizi kullanılmıştır. Oluşturulan kod ve kategorilere göre veriler düzenlenmiş ve yorumlanmıştır.

Çalışmanın sonuçları, farklı öğrenme stillerine sahip öğretmen adaylarının sahip oldukları görüşlerin birbirlerinden farklılaşmakta olduğunu ortaya koymuştur. Öğretmen adaylarının ispatın tanımına ilişkin ifadelerinde “açıklama” ve “doğrulama” kategorilerinin ön plana çıktığı belirlenmiştir.

Güler, Özdemir ve Dikici'nin (2012) yürüttükleri çalışmanın amacı, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel tümevarım yöntemiyle ispat becerilerini, matematiksel ispat hakkındaki görüşlerini ve bunlar arasındaki ilişkiyi ortaya çıkarmaktır. Çalışma bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümü üçüncü ve dördüncü sınıflarında öğrenim gören 76 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. Çalışmada dokuz öğretmen adayı ile görüşmeler yapılmıştır. Çalışmada verilerin analizi için nitel ve nicel araştırma yöntemleri birlikte kullanılmış olup, öğretmen adaylarına matematiksel tümevarımsal bilgi testi ile ispat görüş anketi uygulanmıştır. Çalışmada görüşmeler ses kaydına alınmıştır. İspat görüş anketine verilen yanıtlar bir ile beş arasında puanlanarak analiz edilmiştir. Matematiksel tümevarımsal bilgi testine verilen yanıtlarda ise doğru yanıtlara iki, kısmen doğru yanıtlara bir yanlış yanıtlara sıfır puan verilmiştir. Çalışmanın

nicel analiz kısmında bu iki ölçekten alınan veriler paket program yardımıyla analiz edilmiştir.

Çalışmanın sonuçları, öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım adımları arası ilişkiyi tam olarak kavramadıklarını ve bu yöntemi takip edilmesi gereken bir prosedür olarak gördüklerini ortaya koymuştur. Görüşmeler sonucunda öğretmen adaylarının doğrulama basamağını kontrol edilmeye gerek olmayacak bir basamak olarak gördüklerini göstermiştir.

Güler ve Dikici'nin (2012) yürüttükleri çalışmanın amacı, ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin incelenmesidir. Çalışma bir devlet üniversitesinin matematik öğretmenliği bölümünde öğrenim gören 12 matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Nitel araştırma desenlerinden olgu bilim deseni kullanılarak yürütülen çalışmada öğretmen adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin alınabilmesi için matematiksel ispat görüş mülakat formu kullanılmıştır. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarıyla görüşmeler yapılmış ve bu görüşmeler ses ve video kaydına alınmıştır. Çalışmada verilerin çözümlenmesi için içerik analizi kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının tepkileri kod ve kategoriler altında sınıflandırılmış ve sonuçlar tartışılmıştır.

Çalışmanın sonuçlarına göre öğretmen adaylarının “Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?” sorusuna verilen yanıtlarda “kalıcılık”, “ezber”, “mantıklı öğrenme”, “doğruluk”, “kesinlik”, “kullanışlılık”, “güven”, “gereklilik” ve “saçmalık” kategorileri ortaya çıkmıştır. Çalışmanın sonuçlarına göre öğretmen adaylarının çoğunluğunun matematiksel ispatı ifadelerin doğruluğu olarak gördükleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının büyük bölümü matematiksel ispatın olumlu bir anlama sahip olduğunu düşünmüşlerdir. Bazı öğretmen adayları ise matematiksel ispatın ezberden oluştuğunu düşünmüştür. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının çoğunluğu matematiksel ispatın matematik eğitiminde önemli yere sahip olduğunu düşünmüştür.

Köğce ve Yıldız'ın (2011) yürüttüğü çalışmanın amacı ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat kavramı hakkındaki görüşlerini belirlemek ve farklı sınıf düzeyinde bu kavrama ilişkin görüşlerini karşılaştırmaktır. Çalışma bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik eğitimi bölümünde öğrenim gören 170 birinci ve son sınıf öğretmen adayı üzerinde gerçekleştirilmiştir. Nitel yöntemlerle analiz edilerek betimsel durum çalışması olarak tanımlanan çalışmada iki açık uçlu sorudan oluşan ölçme

aracı kullanılmıştır. Bu ölçme aracının soruları; “Sana göre ispat nedir? Açıklar mısın?” ve “Matematiksel ispata gerek var mıdır? Neden?” olarak belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının tepkileri benzerlik ve farklılıklarına göre tematik olarak sınıflandırılmış ve daha sonra kodlanmıştır.

Çalışmanın sonuçlarına göre öğretmen adaylarının ispatın tanımına ve ispatın gerekliliğine ilişkin yanıtlarında on ikişer farklı kod ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının ispatın tanımına ilişkin yanıtlarında ispatı “doğrulama”, “matematiksels işlemler süreci”, “ispatın mantıksal yönüne vurgu”, “matematiksels dil”, “soyutlamaya vurgu”, “tümevarımsal akıl yürütme yönteminin ilk adımına vurgu”, “ispat sürecine vurgu” altında sınıflamalar oluşmuştur. Soyutlama sınıflaması daha çok birinci sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarının yanıtlarında, “ispat sürecine vurgu” ise sadece birinci sınıfta öğrenim gören öğretmen adaylarının yanıtlarında yer almıştır. Çalışmada birinci sınıf matematik öğretmeni adaylarının büyük bölümü ispatlamayı bir ifadenin doğruluğunu gösterme olarak açıklarken son sınıf öğretmen adaylarının büyük bölümü ispatlamayı tüm durumlara uygulanabilir olarak bir ifadenin hem doğruluğunu hem yanlışlığını gösterme ve neden sonuç ilişkisi ile bilgi aktarma olarak tanımlamışlardır. Son sınıf öğretmeni adaylarının matematiksels ispatlamaya ilişkin daha geniş bir bakış açıları olabileceği belirtilmiştir. Son sınıf öğretmen adayları ispatın gerekliliğine inanırken, birinci sınıf öğretmen adaylarının bir bölümü ispata gerek olmadığını belirtmişlerdir.

Dane'nin (2008) çalışmasının amacı ilköğretim matematik öğretmen adaylarının tanım, aksiyom, önerme, özellik, teorem, ispat gibi kavramları anlama düzeyini test etmektir. Çalışma bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik eğitimi bölümü üçüncü sınıfında öğrenim gören 51 öğretmen adayı ile gerçekleştirilmiştir. Çalışmada bu kavramların öğrenilme düzeyleri ve kavram yanlışlarının test edilmesi amacıyla matematik kavram testi uygulanmıştır. Öğretmen adaylarının kavram testinin ispat ile ilgili bölümünde “İspat denilince aklınıza ne geliyor?” ve “Bir teoremin ispatını yaparken nelere ihtiyaç duyarsınız?” sorularını yanıtlamaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının bu teste ilişkin anlama seviyeleri beş kategori altında incelenmiştir. Bunlar “hiç yanıt vermeyenler”, “anlamama”, “sınırlı anlama”, “yanlış yanıtlama” ve doğru yanıtlayanlar” olarak belirlenmiştir. Kavram testi betimleme analizi ile değerlendirilmiştir.

Çalışmanın sonuçları öğretmen adaylarının ispat kavramını yaklaşık % 45 oranında doğru yanıtladıklarını göstermiştir. Öğretmen adaylarının doğru yanıtları “ispatı, tanımsız kavramlara, aksiyomlara veya daha önce ispat edilen teoremlere ve problemlere dayanarak

bir dizi mantıksal hükümlerle bir önermenin doğru olduğunu ortaya çıkarma” tepkisi altında gruplandırılmıştır. Öğretmen adaylarının sınırlı anlama kategorisindeki ifadeleri, ispatları hipotez gibi görmeleri gibi sınırlı anlama ve kavram yanılgılarıyla ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarının “anlamama” kategorisi altındaki yanıtları ispatı açıklama olarak gördükleri durumları içermiştir. Öğretmen adayları bir teoremin ispatını yaparlarken nelere ihtiyaç duyacakları ile ilgili soruyu yaklaşık % 43 oranında doğru yanıtlamışlardır. Öğretmen adaylarının % 36’sı ise bu soruyu sınırlı anlamışlardır. Öğretmen adaylarının sınırlı anlama durumlarında kavram yanılgılarına düştükleri belirlenmiştir.

Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere’nin (2006) çalışmalarının amacı matematik öğretmeni adaylarının ispata ilişkin görüşlerini tespit etmektir. Çalışma bir devlet üniversitesinin ilköğretim ve ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümlerinin birinci ve son sınıflarında öğrenim gören 337 öğretmen adayı üzerinde yürütülmüştür. Nicel yöntemlerle analiz edilen çalışmada matematik öğretmen adaylarının ispata ilişkin görüşlerini almak amacıyla likert tipi ölçek kullanılmıştır. Çalışmanın verileri nicel analizler için paket program yardımıyla analiz edilmiştir. Çalışmanın sonuçları öğretmen adaylarının ispat yapmaya ilişkin becerilerine ilişkin kavramsal yeterliliklerinin düşük olabileceğini, sayısal değerlere dayanan ispatlamaya eğilimli olabileceklerini ve ispat yapmaya yönelik görüşlerinin tam oluşmadığını göstermiştir.

Matematik öğretmenlerinin ispat hakkındaki görüşlerini inceleyen çalışmaların özetleri aşağıda yer almaktadır:

Oehrtman ve Lawson’ın (2008) yürüttükleri çalışmanın amacı lise matematik ve fen öğretmenlerinin ispat ve reddetme içeren birçok anahtar terim hakkındaki anlayışlarını değerlendirmektir. Çalışma Amerika’da devlet okulunda öğretmenlik yapan 45 öğretmen üzerinde yürütülmüştür. Çalışmada ispatın, hipotezlerin, tahminlerin, teori ve kuralların bilimdeki rolleriyle ve anlamlarıyla ve ispatın, varsayımların, aksiyomların, teoremlerin, tanımların ve postülatların matematikteki rolleriyle ve anlamlarıyla ilgili maddeler içeren bilimin ve matematiğin doğası ölçeği uygulanmıştır. Öğretmenlerden beşli ölçeğe yanıt vermeleri istenmiştir. Çalışmanın verileri nicel yöntemlerle analiz edilmiştir.

Çalışmanın sonuçlarına göre fen öğretmenleri bilimin doğasına ilişkin maddelerde, matematik öğretmenleri ise matematiğin doğasına ilişkin maddelerde diğer gruba göre daha iyi performans sergilemişlerdir. Çalışmanın sonuçları fen ve matematik öğretmenlerinin ispatın ve reddetmenin anlamları ve rolleri hakkında eksik anlayışa sahip

olduklarını ortaya koymuştur. Aynı zamanda öğretmenlerin bu anahtar terimlerin rolleri ve anlamları hakkında öğrencilerine yardım etmek için yeterince donanımlı olmadıkları belirlenmiştir.

Knuth (2002b) çalışmasında öğretmenlerin ispata ilişkin düşüncelerini ortaokul matematiği bağlamında incelemeyi amaçlamıştır. Çalışma iki ortaokul ve 15 lise öğretmeni ile yürütülmüştür. Çalışmanın verileri iki yarı yapılandırılmış görüşme ile elde edilmiştir. Veriler iki ayrı düzeyde toplanmıştır. İlk düzeyde öğretmenlerin matematik disiplini içerisindeki ispat anlayışlarına odaklanılmış, ikinci düzeyde ise öğretmenlerin ortaokul matematiği bağlamındaki ispat anlayışlarına odaklanılmıştır. Bu çalışmada ikinci düzey görüşmelerine ilişkin bulgular ortaya konmuştur. Görüşmelerde öğretmenlerin ortaokul matematiği bağlamında ispatın rolü ve doğası hakkındaki anlayışları incelenmiştir. Yarı yapılandırılmış görüşmelerde öğretmenlere ispatın onlar için ne anlam ifade ettiği, ortaokul matematiğinde ispatı oluşturan şeylerin ne olduğu, öğrencilerin ne zaman ispatla karşılaşmaları gerektiği gibi sorular yöneltilmiştir. Bunun yanında öğretmenlerin araştırmacı tarafından oluşturulan argümanları, argümanların öğretimsel uygunluğu hakkında değerlendirmeleri istenmiştir. Çalışma verilerin analizi, verilerin analitik-tümevarımsal yöntem kullanılarak kodlanmasıyla yapılmıştır.

Çalışmanın sonuçlarına göre öğretmenlerin büyük bölümü ispatı bir öncülün doğruluğunu gösteren tümdengelimsel argüman olarak tanımlamışlardır. Diğer öğretmenler ispatı biraz daha genel olarak; ikna edici bir argüman olarak tanımlamışlardır. Öğretmenler ispatı ortaokul matematiği bağlamında ele aldıklarında formel, az formel ve informel ispatlar sınıflandırması ortaya çıkmıştır. Öğretmenler ortaokul matematiğinde ispatın doğasını açıklarken, üç çeşit tema ortaya çıkmıştır: “İspatın okul matematiğindeki merkeziliği”, “reform ve ispat” ve “öğrencilerin ispat deneyimleri”. Öğretmenlerin büyük çoğunluğu ispatın ortaokul matematiği boyunca merkezi fikir olmaması gerektiğini, ispatın öğrencilere uygunluğunu sorgulayarak belirtmişlerdir. Birçok öğretmen ispatın öğrencilere üniversitede gelişmiş matematik sınıflarında uygun olacağını belirtmiştir. Bunun yanında birçok öğretmen ortaokul eğitiminde ispatın Öklit geometrisi içinde yer alabileceğini vurgulamıştır.

2.2.4.2. Öğrencilerin veya öğretmen adaylarının ispat bilgilerini veya ispat süreçlerini inceleyen araştırmalar.

Bu bölümde öğrencilerin veya öğretmen adaylarının ispat bilgilerini veya ispat süreçlerini inceleyen araştırmalara yer verilmiştir. Anılan araştırmaların kısa bir özeti aşağıda yer almaktadır. Özetten sonra bu grupta yer alan her bir araştırma çalışma grubuna göre alt alta özetlenmiştir. Bu bölümün en sonunda ise bu çalışmaların sonuçlarına ilişkin özete yer verilmiştir.

Bu araştırma grubundaki çalışmalar (Güler, 2013; Stylianides, Stylianides ve Philippou, 2007; Zaimoğlu, 2012) öğrencilerin veya öğretmen adaylarının ispat bilgilerini veya ispat süreçlerini incelemeyi amaçlamışlardır. Güler (2013) ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat süreçlerini incelemeyi amaçlarken, Stylianides ve diğerleri (2007) matematik öğretmeni adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat bilgilerini ortaya koymaya çalışmıştır. Zaimoğlu (2012) ise ilköğretim öğrencilerinin ispat ve akıl yürütme süreçlerini ve ispat temsil şekillerine eğilimlerini tümevarımsal ve tümdengelimsel akıl yürütme açısından incelemeye çalışmıştır. Bu çalışmaların tümü nitel yöntemlerle yürütülmüştür ve sonuçlarında öğrencilerin veya öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin süreçlerine odaklanarak çıkarımlarda bulunmuşlardır.

Güler'in (2013) çalışmasının amacı matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki matematiksel ispat süreçlerini incelemektir. Çalışma bir devlet üniversitesinin matematik öğretmenliği dördüncü sınıfında öğrenim gören 10 ortaöğretim matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Çalışmada öğretmen adaylarıyla altı klinik görüşme yapılmıştır. Bu klinik görüşmelerin ilkinde öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri alınmış, diğer beş klinik görüşmede ise cebir öğrenme alanındaki ispat süreçleri belirlenmeye çalışılmıştır. Çalışmada matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerinin alınması amacıyla matematiksel ispat görüş mülakat formu kullanılmıştır. Çalışmada öğretmen adaylarının ispat süreçleri görev temelli görüşmeler ile belirlenmiştir. Çalışmada gerçekleştirilen görüşmeler video kaydına alınmıştır. Araştırmada nitel araştırma yöntemlerinden çoklu durum çalışması modelinin kullanıldığı belirtilmiştir. Öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşlerinden elde edilen veriler içerik analizi yöntemlerinden kategorisel analiz ile analiz edilmiştir. Veriler kodlanmış ve kategoriler oluşturularak bulgular tanımlanmış ve yorumlanmıştır. Öğretmen adaylarının etkinlik temelli görüşmelerinden elde edilen verileri de içerik analizi yöntemi ile analiz edilmiştir. Veri analizi sonucunda ortak kategoriler belirlenmiştir.

Çalışmanın sonuçları, öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik genellikle olumlu görüşlere sahip olduklarını göstermiştir. Öğretmen adaylarının matematiksel ispatın ne olduğu sorusuna verdikleri yanıtlarda “matematiksel ifadelerin doğrulanmasıdır”, “matematiğin rehberidir”, “sonuca ulaşmaktır”, “beyin jimnastiğidir”, “bilgilerin uygulamaya hazır hale getirilmesidir” ve “kavramlar arasındaki ilişkiyi aramaktır” kategorilerinin olduğu belirtilmiştir. Öğretmen adayları matematiksel ispatın onlar için ne anlam ifade ettiği sorusuna “ezber”, “anlamlı/kalıcı öğrenme”, “doğruluk”, “merak”, “kullanışlılık ve ilişki” kategorileri altında yanıtlar vermişlerdir. Öğretmen adayları matematiksel bir ifadede ispatı gerektiren şeylerin ne olduğu sorusuna ilişkin yanıtlarında “matematiksel ifadelerin doğru/yanlış olduğunu araştırmak”, “zevk”, “genellemeye ulaşma” arzusu”, “merak duygusu” kategorileri altında yanıtlar vermişlerdir. Öğretmen adayları matematiksel bir ispatın doğruluğunu değerlendirirken nelere dikkat edilmesi gerektiğine ilişkin yanıtlarında “ispatın amacını incelerim”, “ispat adımlarını incelerim”, “yöntemini incelerim”, “dilini incelerim” ve “kavramlar arasındaki ilişkiyi incelerim” kategorileri altında yanıtlar vermişlerdir. Öğretmen adaylarının matematiksel ispat ve matematiksel problem çözme arasındaki ilişki ile ilgili görüşlerini öğrenebilmek amacıyla yöneltilen matematikte yapılan her ispatın aslında problem çözme aktivite olduğu görüşü hakkında neler söyleyebilecekleri sorusuna yanıtlarında “problemler ispat şeklinde de çözülebilir”, “süreç olarak aynıdır” ve “her ikisinde de problem ortadan kalkar” kategorileri altında yanıtlar verdikleri belirlenmiştir.

Stylianides, Stylianides ve Philippou'nun (2007) çalışmalarının amacı matematik öğretmeni adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat bilgilerini ortaya koymaktır. Çalışma Kıbrıs'ta bir devlet üniversitesi son sınıfında öğrenim gören 70 ilköğretim matematik öğretmeni adayı ve yirmi beş lise matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Katılımcıların on biriyle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Çalışmada öğretmen adaylarına tümevarım yöntemiyle ispat soru ve çözümlerinden oluşan iki görev (task) verilmiştir. Öğretmen adaylarının görüşmelerle bu sorulara yanıt vermeleri istenmiştir. Daha sonra ortak öğrenci tepkilerine, birden fazla çözüm içeren durumlara ve az buluna öğrenci tepkilerine odaklanılarak on bir öğrenciyle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Nitel yöntemle yürütülen çalışmada tüm görüşmeler video kaydına alınmıştır.

Çalışmanın sonuçları her iki gruptaki öğretmen adaylarının üç ortak tümevarımsal zorlukla karşılaştığını göstermiştir: 1) Tümevarım yöntemindeki temel basamağın önemi, 2) $P(n)$ 'in tanım aralığı içerisinde herhangi bir k için $P(k)$ 'dan $P(k+1)$ 'e geçişte

tümevarım adımıyla ilişkili olan anlam, 3) Matematiksel tümevarımla ispatlanan bir ifadedeki önermenin doğruluk kümesinin kendi tanım aralığı dışında değerler alma olasılığı. Temel ve tümevarımsal adımlar hakkındaki zorluklar ilköğretim matematik öğretmeni adaylarında, lise öğretmen adaylarından daha belirgin olarak ortaya çıkmıştır. Bunun yanında lise matematik öğretmeni adayları doğru cevaplar elde etmede ilköğretim matematik öğretmeni adaylarından daha başarılı çıkmıştır. Çalışmanın sonuçları matematik öğretmen adaylarının matematiksel tümevarımla ispat yapmada zorluklar yaşadıklarını ortaya koymuştur.

Zaimoğlu (2012) çalışmasında ilköğretim öğrencilerinin geometrik ispat ve akıl yürütme süreçlerini ve ispat temsil şekillerine eğilimlerini tümevarımsal ve tümdengelsel akıl yürütme açısından incelemeyi amaçlamıştır. Çalışma bir devlet ortaokulunda öğrenim gören 154 sekizinci sınıf öğrencisi ile yürütülmüştür. Durum tespiti olarak tanımlanan çalışmada öğrencilere geometri öğrenme alanında sekiz soruluk bir çalışmayla açık uçlu sorular sorulmuştur. Öğrencilerin geometri problemlerini çözerken başvurdukları ispatlama yollarının belirlenmesi için öğrencilerin yanıtları doğru, kısmen doğru, yanlış ve boş olmak üzere dört grupta belirlenmiştir. Daha sonra öğrencilerin ispatlama yolları soru bazında incelenerek tümevarımsal ve tümdengelsel akıl yürütme becerileri süzgecinde kodlanmış ve frekansları belirlenmiştir. Öğrencilerin ispat yaparken başvurdukları ispat temsil şekillerinin belirlenebilmesi için ise öğrencilerin yanıtları cebirsel, görsel, sözel ve sayısal olmak üzere dört kategoride incelenmiştir. Bu yanıtlar aynı zamanda doğru, yanlış ve kısmen doğru sınıflamasına göre ayrılmıştır.

Çalışmanın sonuçlarına göre öğrencilerin büyük bölümünün geçerli bir ifadenin doğrulanmasını az da olsa yapabildiklerini fakat geçersiz ifadeyi çürütmeyi bilmediklerini göstermiştir. Öğrenciler en çok sayısal örnekleme ve görsel ispat biçimlerini tercih etmişler, en az ise cebirsel ispatı tercih etmişlerdir. Öğrencilerin çoğu tümevarımsal akıl yürütme yapmaya eğilimli olmuş fakat ispatın altında yatan mantığı kavrayamışlardır.

2.2.4.3. İspatın doğasına ilişkin öğretim uygulamalarının değerlendirilmesini kapsayan araştırmalar.

Bu bölümde ispatın doğasına ilişkin öğretim uygulamalarının değerlendirilmesini kapsayan araştırmalara yer verilmiştir. Anılan araştırmaların kısa bir özeti aşağıda yer almaktadır. Özetten sonra bu grupta yer alan her bir araştırma çalışma grubuna göre alt alta

özetlenmiştir. Bu bölümün en sonunda ise bu çalışmaların sonuçlarına ilişkin özete yer verilmiştir

Bu bölümdeki çalışmalar (İnam, 2014; Moore, 1994) ispata ilişkin öğretim uygulamalarının değerlendirilmesini amaçlayan nitel araştırma desenine sahip çalışmalardır. İnam (2014) ortaöğretim öğrencilerine yönelik olarak oluşturulan ispat kavrama testlerine dayalı bir öğretim uygulamasının değerlendirmeyi amaçlarken, Moore (1994) matematik lisans öğrencilerinin ispat hakkındaki problemlerini, düzenli bir matematik dersinde izleyerek ve öğretmenlerin ve öğrencilerin ispat yaparken ispat yapmayı öğrenme bağlamında perspektiflerine odaklanarak kuram oluşturmayı hedeflemiştir. Aşağıda, anılan çalışmaların özetleri yer almaktadır:

İnam'ın (2014) çalışmasının amacı ortaöğretim öğrencilerine yönelik olarak oluşturulan ispat kavrama testlerine dayalı bir öğretim uygulamasının değerlendirmesidir. Çalışma bir devlet lisesinin 11. sınıfında öğrenim gören 20 öğrenci üzerinde yürütülmüştür. Nitel eylem araştırması desenine sahip olduğu belirtilen çalışmada veriler beş gruptan toplanmıştır. İlk grupta uygulama öncesinde öğrencilere belirli sorularla serbest yazma etkinliği gerçekleştirilmiştir. İkinci grupta toplam beş haftalık öğretim sürecinde beş adet ispat kavrama testi uygulanmıştır. Üçüncü grupta öğrencilerin süreç sonunda ispata ilişkin fikirlerini değerlendirmek için başlangıçta kullanılan serbest yazma etkinliği tekrarlanmıştır. Dördüncü grupta ispat kavrama testlerinin uygulanmasından sonra öğretmenlere günlük yazdırılmıştır. Son olarak öğrencilerle yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Bu görüşmeler kayıt altına alınmış ve deşifreleri yapılmıştır.

Çalışmanın sonuçlarına göre öğrencilerin ispat kavrama testinin yapısını anladıkları ve büyük çoğunluğunun öğretim uygulamasından memnun olduğu belirtilmiştir. Öğrencilerin büyük çoğunluğunun serbest yazma etkinliğinde uygulama sonrasında “Niçin ispat yapıyoruz” sorusuna verdikleri yanıtlarda doğrulama rolüne ilişkin tepkilerinin arttığı, ikna rolüne ilişkin tepkilerinin azaldığı belirlenmiştir. En büyük artış ise ispatın keşif rolüne ilişkin tepkilerinde görülmüştür.

Moore'un (1994) çalışmasının amacı öğrencilerin ispat hakkındaki problemlerini, düzenli bir matematik dersinde izleyerek ve öğretmenlerin ve öğrencilerin ispat yaparken ispat yapmayı öğrenme bağlamında perspektiflerine odaklanarak kuram oluşturmaktır.

Çalışma Amerika'da bir üniversitenin üç dönem boyunca süren matematik derslerinde 16 lisans öğrencisi ile gerçekleştirilmiştir. Derslerde öğrencilerin ispatları okumasına ve yapmalarına odaklanılmış, gelişmiş matematiğe ilişkin belirli matematiksel fikirler öğretilmiştir. Çalışmada her gün sınıf gözlemi yapılmış, öğretmen ve öğrencilerle görüşmeler yapılmış ve öğrencilerle sınıf dışında eğitim oturumları yapılmıştır. Nitel olarak yürütülen çalışmanın verileri tümevarımsal veri analiziyle kuram oluşturma deseniyle elde edilmiştir. Tümevarımsal veri analizinde sabit karşılaştırmalı yöntemden yararlanılmıştır.

Çalışmanın sonuçları öğrencilerin ispat yaparken yedi ana sorunla karşılaştıklarını göstermiştir. Buna göre; öğrencilerin problemleri; tanımı bilmeme ve ifade edememe; kavramlar hakkında çok az sezgisel anlayışa sahip olma, ispat yapılandırması için uygun olmayan kavram imajlarına sahip olma; kendi örneklerini oluşturmada isteksiz veya yetersiz olma, ispatın tüm yapısını ortaya koyacak tanımları nasıl kullanacaklarını bilmeme, matematiksel dili ve simgeleri anlayamama ve kullanamama ve ispata nasıl başlayacaklarını bilememe olarak belirlenmiştir. Bunun yanında öğrencilerin ispat ve matematik anlayışlarının onların ispat yazma performanslarını etkilediği ve bazen başarılarını engellediği belirlenmiştir.

2.2.5. İspatın Doğasına İlişkin Araştırmaların Özeti

İspatın doğasına ilişkin çalışmaların tümünün sonuçlarına ait özet aşağıda yer almaktadır:

Yukarıdaki çalışmalar incelendiğinde, öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispatın tanımına ya da ispatın ne olduğuna dair ifadelerinde ispatı “doğrulama” olarak gördüklerine ilişkin sonuçlara ulaşılmıştır. Örneğin bazı çalışmalar (Güler, 2013; Güler ve Dikici, 2011; Köğce ve Yıldız, 2011; Özdemir ve Kaplan, 2014) nitel verilerinin analizi sonucunda farklı kategorilerin yanında ispatın tanımıyla ilgili ifadelerde “doğrulama” veya “doğruluk” kategori ya da sınıflamalarının ortaya çıktığını belirtmişlerdir. Köğce ve Yıldız (2011) birinci sınıf matematik öğretmeni adaylarının büyük bölümünün ispatlamayı bir ifadenin doğruluğunu gösterme olarak açıkladıklarını belirtirken, Güler ve Dikici (2012) öğretmen adaylarının çoğunluğunun matematiksel ispatı ifadelerin doğruluğu olarak gördüklerini belirtmişlerdir. Güler (2013) öğretmen adaylarının matematiksel ispatın ne olduğu sorusuna verdikleri yanıtlarda diğer kategorilerin yanında “matematiksel ifadelerin doğrulanmasıdır” kategorisinin ortaya çıktığını belirtmiştir. İnam (2014) ise serbest yazma

etkinliğinde uygulaması yaptığı çalışmasında uygulama sonrasında öğrencilerin büyük çoğunluğunun “Niçin ispat yapıyoruz” sorusuna verdikleri yanıtlarda doğrulama rolüne ilişkin tepkilerinin arttığını belirlemiştir. Buradan, bu çalışmalardaki öğrencilerin ve öğretmen adayların ispatın ne olduğu sorusuna önceden edinilmiş yüzeysel bilgilerle yanıt verdikleri söylenebilir.

Anılan çalışmalardan bazıları (Dane, 2008; Güler, 2013; Güler ve diğerleri, 2012; Güler ve Dikici, 2012; Köğce ve Yıldız, 2011) matematik öğretmeni adaylarının ispat ve ispat yöntemleri hakkındaki açıklamalarında ispatı kulaktan dolma, yüzeysel ve ezbere bilgilerle yanıtladıklarına ilişkin ifadelerle yer vermişlerdir:

Güler (2013) bazı öğretmen adaylarının matematiksel ispatın ne olduğu sorusuna verdikleri yanıtlarda “sonuca ulaşmaktır” kategorisi altında yanıt verdiklerini belirtmiştir. Güler (2013) öğretmen adaylarının her ispatın aslında problem çözme aktivite olduğu görüşü hakkında neler söyleyebilecekleri sorusuna yanıtlarında “problemler ispat şeklinde de çözülebilir”, “süreç olarak aynıdır” ve “her ikisinde de problem ortadan kalkar” kategorileri altında yanıtlar verdiklerini belirtmiştir. Köğce ve Yıldız (2011) ise çalışmalarında bazı öğretmen adaylarının matematiksel ispatın tanımına ilişkin yanıtlarında ispatı “matematiksel işlemler süreci” sınıflaması altında betimleyen ifadelerde bulduklarını belirtmişlerdir. Bu çalışmalardaki (Güler, 2013; Köğce ve Yıldız, 2011) öğretmen adaylarının ispata bir problem gibi yaklaştıkları söylenebilir. Dane (2008) bazı öğretmen adaylarının ispatı tanımlarken ispatları hipotez gibi gördüklerini ve bu şekilde ispatı sınırlı anlama ve kavram yanılgılarıyla tanımladıklarını belirtmiştir. Güler ve diğerleri (2012) çalışmalarında öğretmen adaylarının tümevarım yöntemini takip edilmesi gereken bir prosedür olarak gördüklerini ve anlamını kavramadıklarını belirtmişlerdir. Güler ve Dikici (2012) çalışmalarında bazı öğretmen adaylarının matematiksel ispatın ezberden oluştuğunu düşündüklerini belirtmişlerdir. Buradan anılan çalışmalardaki öğretmen adaylarının ispatın anlamına hâkim olamadıkları ve ispata ilişkin kavramsal yetersizlikleri olduğu söylenebilir.

Bir başka çalışma grubu (Knuth, 2002b; Moralı ve diğerleri, 2006; Oehrtman ve Lawson, 2008) öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının genel olarak ispata ilişkin eksik anlayışlara sahip olduklarını ortaya koymuşlardır. Moralı ve diğerleri (2006) öğretmen adaylarının ispata ilişkin kavramsal yeterliliklerinin düşük olduğunu ve ispat yapmaya yönelik görüşlerinin tam oluşmadığını belirlemiştir. Oehrtman ve Lawson (2008) matematik öğretmenlerinin ispatın ve reddetmenin anlamları ve rolleri hakkında eksik

anlayışa sahip olduklarını ortaya koymuştur. Knuth (2002b) ise öğretmenlerin büyük çoğunluğu ispatın ortaokul matematiği boyunca merkezi fikir olmaması gerektiğini düşündüklerini belirtmiştir.

Bu bölümdeki çalışmalardan bazıları (Güler ve diğerleri, 2012; Köğce ve Yıldız, 2011; Stylianides ve diğerleri, 2007; Zaimoğlu, 2012) sonuçlarında öğrencilerin veya öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütmeye ilişkin zorluklar yaşadıklarını ortaya koymuştur. Güler ve diğerleri (2012) çalışmalarında öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım adımları arası ilişkiyi tam olarak kavramadıklarını ve doğrulama basamağını kontrol edilmeye gerek olmayacak bir basamak olarak gördüklerini belirtmişlerdir. Köğce ve Yıldız (2011) çalışmalarında öğretmen adaylarının ispatın ne olduğuna ilişkin ifadelerinde “sonucun sayısal olarak gösterilmesi” kodunu “tümevarımsal akıl yürütme yönteminin ilk adımına vurgu” kategorisi altında sınıflamışlardır. Stylianides ve diğerleri (2007) ise çalışmalarında öğretmen adaylarının matematiksel tümevarımla ispat yapmada zorluklar yaşadıklarını; özellikle temel adım ve tümevarım adımının anlamını kavramakta zorluklar yaşadıklarını belirtmişlerdir. Benzer şekilde Zaimoğlu (2012) çalışmasında öğrencilerin çoğunun tümevarımsal akıl yürütme yapmaya eğilimli olduğunu fakat ispatın altında yatan mantığı kavrayamadıklarını belirtmiştir. Buradan, anılan çalışmalardaki öğrencilerin ve öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütme ile ilgili güçlükler yaşadıkları, tümevarımsal akıl yürütme ile ispatın anlamını kavrayamadıkları ve bu yöntemi daha çok dışsal kaynaklı fikirlerle tercih ettikleri söylenebilir.

Buraya kadar özetlenen çalışmalar öğrencilerin, öğretmen adaylarının veya öğretmenlerin ispatın doğasına ilişkin çoğunlukla olumsuz ya da eksik anlayışları olduğunu ortaya koymuştur. Bu bölümdeki bir başka çalışma grubu ise sonuçlarında öğrencilerin veya öğretmen adaylarının ispata ilişkin olumlu anlayışlarına işaret etmişlerdir. Fakat anılan çalışmalardaki bu bulgu bu çalışmaların diğer bulgularıyla beraber ele alındığında genel anlamda ispata ilişkin olumlu bir anlayış göze çarpmamaktadır. Örneğin, İnam (2014) öğrencilerin kendilerine yöneltilen ispat kavrama testinin yapısını anladıklarını ve büyük çoğunluğunun öğretim uygulamasından memnun olduğunu belirtilmiştir. Fakat sonuçlarında uygulama sonrasında öğrencilerin “Niçin ispat yapıyoruz” sorusuna verdikleri yanıtlarda doğrulama rolüne ilişkin tepkilerinin arttığını belirtmiştir. Bu sonuç özet bölümünde daha önce diğer sonuçlarla beraber sunulmuştur. Bir diğer çalışmanın (Güler, 2013) sonuçları öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik genellikle olumlu

görüşlere sahip olduklarını göstermiştir. Fakat Güler'in (2013) çalışmasında öğretmen adaylarının ispat ile ilgili sınırlı ve yüzeysel anlayışlara da sahip olduğu belirtilmiştir.

Bu bölümde yer alan ispatın doğası altında sınıflandırılacak sonuçlar özetlenecek olursa; yukarıda yer alan çalışmalardaki öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispata ilişkin dar bir anlayışa sahip oldukları, ispat yöntemlerinden genellikle habersiz oldukları ya da ispat yöntemlerini tam anlamıyla anlayamadıkları, ispata bir problem çözümü gibi yaklaştıkları, önceden edilmiş yüzeysel bilgilerle ispatı tanımlama yoluna gittikleri ve ispata karşı kavramsal yeterliklerinin az olduğu ifade edilebilir.

2.2.6. İlgili Alanyazın Taraması Özeti

İlk iki bölümde, öğrencilerin, öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemeyi hedefleyen veya ispat şemalarını belirlemeyi hedeflemese de sonuçlarında bu şemaların özelliklerine dair bilgiler sunan çalışmalara yer verilmiştir. Öğrencilerin, öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlemeyi hedefleyen çalışmalara bakıldığında bu çalışmaların tümünün ispat şeması sınıflandırması için Harel ve Sowder'in (1998) veya Sowder ve Harel'in (1998) ispat şeması sınıflandırmasını kullandığı ve bu sınıflandırmayı dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç temel grupta ve bu sınıflandırmaların alt sınıflamaları olan yedi alt grupta sınıflandırdıkları görülmüştür. İspat şemalarını belirlemeyi amaçlayan çalışmaların sonuçları öğrencilerin veya öğretmen adaylarının çoğunlukla dışsal ve deneysel ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler sergilediklerini göstermiştir. Sonuçlarında ispat şemalarına değinmeyen fakat ispat şemalarının özelliklerini barındıran çalışmaların büyük bölümünün ise araştırmacı tarafından deneysel ispat şeması olarak yorumlanabilecek tepkiler barındırdığı söylenebilir.

İlk iki bölümdeki çalışmaların sonuçları kısaca özetlenecek olursa, çalışmaların büyük çoğunluğunun (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Gholamazad ve diğerleri, 2004; Heinze ve Reiss, 2003; İskenderoğlu ve diğerleri 2010; Oflaz ve diğerleri, 2016; Ören, 2007; Sen ve Güler, 2015; Stylinou ve diğerleri, 2006; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014) sonuçlarında öğrencilerin veya öğretmen adaylarının deneysel ispat şeması veya dışsal ve deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkileri sıklıkla sergilediklerini veya deneysel ispat şemasının özelliklerine ilişkin tepkiler ortaya koyduklarını (Arslan ve Yıldız, 2010; Aylar, 2014; Bieda, 2008; Ceylan, 2002; Chazan, 1993; Coe ve Ruthven, 1994; Demiray, 2013;

Goetting, 1995; Healy ve Hoyles, 2000; İmamoğlu, 2010; Knuth ve diğerleri, 2009; Knuth ve diğerleri, 2002; Martin ve Harel, 1989; Özer ve Arıkan, 2002; Pekşen Sağır, 2013; Segal, 1999; Stylianides ve Stylianides, 2009) belirledikleri görülmüştür. Bu iki bölümde yer alan çalışmaların çok azının matematik öğretmeni adaylarının (İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu, Baki, ve İskenderoğlu, 2010; Sarı, Altun, ve Aşkar, 2007) ispat şemalarını deneysel olmayan bir yaklaşımla başka değişkenler olmadan incelediği ve ikisinin (İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu, Baki, ve İskenderoğlu, 2010) klinik görüşmeler kullandıkları, diğerinin (Sarı, Altun, ve Aşkar, 2007) ise sadece görüşmeler kullandığı görülmüştür. Bu çalışmaların hepsinin Türkiye’de yapıldığı düşünüldüğünde, hiçbirinin matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını görev temelli görüşmeler yardımıyla belirleme yoluna gitmediği belirlenmiştir. Yurtdışında ise matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını bu bağlamda inceleyen çalışmaya rastlanmamıştır.

İlgili Araştırmalar bölümünün dördüncü temel başlığı altındaki ispatın doğasına ilişkin araştırmalar incelendiğinde, öğrencilerin ve öğretmen adaylarının ispatın tanımına ya da ispatın ne olduğuna dair ifadelerinde ispatı “doğrulama” olarak gördüklerine ilişkin sonuçlara (Güler, 2013; Güler ve Dikici, 2011; Köğce ve Yıldız, 2011; Özdemir ve Kaplan, 2014) ulaşılmıştır. Buradan öğrencilerin ve öğretmen adayların ispatın ne olduğu sorusuna önceden edinilmiş yüzeysel bilgilerle yanıt verdikleri düşünülmüştür. Bazı çalışmalar (Dane, 2008; Güler, 2013; Güler ve diğerleri, 2012; Güler ve Dikici, 2012; Köğce ve Yıldız, 2011) matematik öğretmeni adaylarının ispat ve ispat yöntemleri hakkındaki açıklamalarında da ispatı kulaktan dolma, yüzeysel ve ezbere bilgilerle yanıtladıklarına ilişkin ifadelere yer vermişlerdir. Bu çalışma grubundaki bazı çalışmalar (Güler ve diğerleri, 2012; Köğce ve Yıldız, 2011; Stylianides ve diğerleri, 2007; Zaimoğlu, 2012) sonuçlarında öğrencilerin veya öğretmen adaylarının özellikle tümevarımsal akıl yürütmeye ilişkin zorluklar yaşadıklarını belirtmişlerdir. Bazı çalışmalar (Knuth, 2002b; Moralı ve diğerleri, 2006; Oehrtman ve Lawson, 2008) öğretmen ve öğretmen adaylarının genel olarak ispata ilişkin eksik anlayışlara sahip olduklarını ortaya koymuşlardır. İspatın doğasına ilişkin çalışmalara genel olarak bakıldığında, öğrencilerin, öğretmen adaylarının veya öğretmenlerin ispatın doğasına ilişkin çoğunlukla olumsuz ya da eksik anlayışları olduğu belirlenmiştir.

İspat şemalarını belirlemeyi hedefleyen ya da sonuçlarında ispat şemalarına ilişkin özelliklere yer veren çalışmaların büyük çoğunluğunun sonuçları öğrencilerin veya öğretmen adaylarının deneysel ispat şeması veya dışsal ve deneysel ispat şemasını ortaya

koyan tepkiler gösterdiklerini ortaya koymuşlardır. İspatın doğasına ilişkin çalışmalara ilişkin en göze çarpan sonuçlar ise ilgili çalışmalardaki öğrencilerin, ğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispata ilişkin dar bir anlayışa sahip oldukları, ispat yöntemlerinden genellikle habersiz oldukları ya da ispat yöntemlerini tam anlamıyla anlayamadıkları, ispata bir problem çözümü gibi yaklaştıkları, önceden edilmiş yüzeysel bilgilerle ispata tanımlama yoluna gittikleri ve ispata karşı kavramsal yeterliklerinin az olduğu sonuçlarına ulaşmışlardır.



ÜÇÜNCÜ BÖLÜM: YÖNTEM

Bu çalışmanın Yöntem Bölümü “Araştırmanın Deseni”, “Çalışma Grubu”, “Veri Toplama Araçları”, “Pilot Uygulama”, “Veri Toplama Süreci”, “Verilerin Analizi”, “Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları” ve “Araştırmacının Rolü” olmak üzere sekiz temel başlıkta incelenmiştir. Bu temel başlıklara ait olan alt başlıklar aşağıda detaylandırılmıştır:

3.1.Araştırmanın Deseni

Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması (case study) yöntemi kullanılmıştır. Yin’e (2003) göre “*Durum çalışması, olgular ve bağlamların arasındaki sınırların açıkça belli olmadığı durumlarda güncel bir olguyu kendi gerçek hayat durumları içerisinde inceleyen bir araştırma*” dır (s. 13). Bu çalışmanın analiz birimi matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarıdır. İspat şemaları Sowder ve Harel (1998) tarafından geliştirilen kuramsal çatıya göre üç temel kategoride ve bunların altındaki toplam yedi kategoride değerlendirilmiştir. Yin’e (2003) göre durum çalışması birden fazla analiz birimini içerdiğinde; bir durum içerisinde alt birim ya da alt birimlere yoğunlaşmaktadır. Bu ise iç içe geçmiş durum çalışmalarında ortaya çıkmaktadır. Bu çalışmada ispat şemaları birden fazladır, bu yüzden bu çalışma iç içe geçmiş durum çalışması olarak tanımlanmıştır. Bu çalışmadaki durumlar ise farklı başarı düzeylerindeki ortaokul matematik öğretmeni adaylarıdır. Çalışmadaki yüksek, orta ve en alt düzeyde başarılı olan ortaokul matematik öğretmeni adayları çoklu durumları oluşturmaktadır. Dolayısıyla bu çalışmanın deseni iç içe geçmiş çoklu durum deseni olarak tanımlanmaktadır (Yin, 2003).

Durum çalışması olarak yürütülen bu araştırmada öğretmen adaylarının ispat şemalarının belirlenebilmesi için klinik yöntem kullanılmıştır. Klinik yöntem tıp alanında kullanılan klinik görüşme yöntemine benzer olarak çocukların düşünceleri üzerinde uygulanan tanılayıcı bir yöntemdir (Opper, 1977). Bu yöntem çocukların bilgi yapılarını ve akıl yürütme süreçlerinin biçimlerini araştırmak için Piaget tarafından ortaya atılmıştır (Clement, 2000). Piaget’in çocuğun kendisini sözcüklerle özgürce ifade edebileceği ve böylece araştırmacının örtük olan düşünsel süreçlerden anlam çıkarma şansını yakalayabileceği bir yöntem olan ihtiyacı, bu yöntemin ortaya çıkmasına sebep olmuştur (Opper, 1977).

Piaget klinik yöntemi klinik görüşmeler aracılığıyla yürütmüştür. Bu görüşmeler ile öğrencilerin belirli bilişsel yapılarının varlığını ya da yokluğunu ortaya çıkarılarak bu

yapılarının gelişiminin anlayışını geliştirmek amaçlanmıştır (Oppper, 1977, Schoenfeld, 2002). Klinik görüşmelerde çocuklara dikkatlice hazırlanmış ilgi çekici sorular içeren çeşitli görüşme görevleri (task) verilmiş (Schoenfeld, 2002), erken yaştaki çocukların yanlış cevapları ve daha büyük çocukların doğru cevapları üzerine çalışılmış (Ginsburg ve Oppper, 1969) (akt. Oppper, 1977) ve bu görevler üzerindeki performansları değerlendirilmiştir (Schoenfeld, 2002). Klinik görüşmelerin amacı bir gelişim ölçeği ya da yaşlar arasında kesin bir saptama elde etmekten ziyade, görüşmecilerin temel bilişsel yapılarından ve durumlar hakkındaki tepkilerinden sonuçlar çıkararak problemlerin çözümünde kullanılan düşünsel mekanizmaları ve düşünme mekanizmalarını belirlemektir (Schoenfeld, 2002; Tanner ve Inhelder, 1956, akt. Oppper, 1977).

Çalışmada klinik yöntemi yürütmek için öğretmen adaylarıyla görev temelli yarı yapılandırılmış görüşmeler (task based interviews) ve ispatın doğasına ilişkin klinik görüşmeler yapılmıştır. Görev temelli görüşmeler, kökleri Piaget'nin klinik görüşmelerine dayanan görüşmeler olup, matematik eğitimindeki nitel araştırmalarda araştırmacılar tarafından bireylerin akıl yürütmeleri, problem çözme davranışları, matematik bilgileri ve anlayışları hakkında bilgi edinmek için kullanılmaktadır (Koichu, 2009; Maher ve Sigley, 2014). Görev temelli görüşmelerin klinik görüşmelerin bir biçimi olduğu söylenebilir. Matematik eğitiminde birçok araştırmacı tarafından kullanılan görev temelli görüşmeler (Koichu ve Harel, 2007) matematiksel bilgi ve problem çözme davranışlarını ölçmek için hazırlanır (Maher ve Sigley, 2014) ve katılımcı ve görüşmeci/görüşmeciler ile yapılır (Goldin, 2000; Houssart ve Evens, 2011; Koichu ve Harel, 2007). Görev temelli görüşmeler bir katılımcı ve görüşmeci ile birebir yapılabileceği gibi bir katılımcı ve birden fazla görüşmeciyle grup görüşmeleri biçiminde de yapılabilir (Goldin, 2000; Houssart ve Evens, 2011). Bu çalışmada bir katılımcı ve bir görüşmeciyle yapılan görev temelli görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Görev temelli görüşmelerde görüşmeci tarafından katılımcıya bir ya da birden fazla görev (task) yöneltilir (Goldin, 2000; Maher ve Sigley, 2014). Bu görüşmeler katılımcının problemi çözerken veya hemen sonrasında görüşme boyunca konuşarak bu görevlerle etkileşim içerisinde bulunduğu görüşmelerdir. Görevler katılımcıların daha önce gördükleri ya da görüşmede ilk kez rastladıkları sorular, problemler ya da etkinliklerden oluşabilir (Goldin, 2000; Houssart ve Evens, 2011; Koichu ve Harel, 2007; Maher ve Sigley, 2014). Koichu ve Harel'a (2007) göre "*Görev temelli görüşmeler, görüşmecinin ve katılımcının açık ya da örtük normlar tarafından düzenlenen bir görev üzerinde etkileşim içerisinde bulunduğu bir durum olarak görülebilir*" (s. 349).

Görev temelli görüşmeler ile bireylerin imgesel (görsel ve kinestetik) ve sayısal temsilleriyle, sözel tartışmalarıyla ve etkisel tepkileriyle beraber sezgisel (heuristic) süreçlerini canlandırmak amaçlanır (Goldin, 2000). Bu çalışmada görev temelli görüşmeler Görev Temelli Görüşme Formu aracılığıyla gerçekleştirilmiştir. Bu forma ilişkin ayrıntılı bilgi 3.3. Veri Toplama Araçları Bölümünde verilmiştir. Görev Temelli Görüşme Formu, öğretmen adaylarının ispat şemalarını ortaya çıkarmak amacıyla öğretmen adaylarının daha önce gördükleri ya da görüşmede ilk kez rastladıkları ispat problemlerini içeren bir formdan (İspat Soruları Formu (İSF)) ve bu formun yanında öğretmen adaylarının düşüncelerini ayrıntılı olarak anlamaya hizmet etmesi düşünülen ilave formlardan (İspat Süreçlerine İlişkin Görüşme Formu (İSGF), Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu (GİGF)) oluşmuştur. Bu ilave formlar öğretmen adaylarının imgesel ve sayısal temsilleriyle, sözel tartışmalarıyla ve etkisel tepkileriyle beraber sezgisel süreçlerini canlandırmak amacıyla yöneltilmiştir. Böylelikle öğretmen adaylarının ispat problemlerini çözerken ispat yapılandırmaları altında yatan düşüncelerinin ortaya çıkarılarak ispat şemalarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Bunun yanında öğretmen adaylarının ispat şemalarını daha sağlıklı biçimde ortaya çıkarmak için öğretmen adaylarıyla görev temelli görüşmelerin sonunda ispatın doğasına ilişkin klinik görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmeler ile öğretmen adaylarının ispatın doğası hakkındaki görüşlerinin alınmasıyla onların yukarıda anılan süreçlerinin takibinin desteklenmesi amaçlanmıştır.

Görev temelli görüşmeler ayrıntılı protokoller içeren, görüşmecinin önceden hazırlamış olduğu yapılandırılmış biçimde olabildiği gibi, araştırmacının yargısına göre farklılaşabilen değişimler içeren ve görüşmeciye katılımcıların matematiksel akıl yürütmelerini yargılamaya imkân verecek yarı yapılandırılmış biçimde de olabilir (Assad, 2015; Maher ve Sigley, 2014). Bu çalışmadaki görev temelli görüşmeler, yarı yapılandırılmış biçimde hazırlanmıştır.

“Görev temelli” terimi, katılımcıların etkileşimlerinin sadece görüşmeciyle değil görev ortamıyla da olduğunu göstermektedir. Görüşme boyunca gerçekleşen her şey ses ya da video kaydıyla, gözlemci notlarıyla ve katılımcının çalışmalarıyla gözlemlenir ve kayıt altına alınır. Kayıtlar deşifre edilir ve protokoller ile kayıtlar açımlayıcı birçok yolla analiz edilir (Goldin, 2000). Bu çalışmada görev temelli görüşmeler boyunca gerçekleşen her şey ses ve video kaydına alınmıştır. Araştırmacı öğretmen adaylarının tüm tepkilerini gözlemlemiştir. Kayıt altına alınan durumlar daha sonra araştırmacı tarafından deşifre edilmiş ve sonrasında analiz edilmiştir.

Görev temelli görüşmelerde görüşmelerden elde edilen veriler daha sonra kodlanır ve başlangıçta ortaya konulan araştırma sorularına uygun olarak rapor edilir (Goldin, 2000; Maher ve Sigley, 2014). Bu çalışmada elde edilen veriler araştırmada kullanılan kavramsal çatıya göre analiz edilmiş, kodlanmış ve araştırma soruları ışığında raporlanmıştır.

Goldin (1997) matematiksel davranışlardan gözlem yapma ve çıkarımda bulunurken görev temelli görüşmelerin gerçek anlamda bilimsel araştırma özellikleri gösterip göstermediğine dikkat edilmesi gerektiğini belirtmiştir. Goldin (1997) bu anlamda ölçme süreçlerinin diğerleriyle iletişiminin, değerlendirmesinin ve analizinin; sonuçların aynı özelliklere sahip olan bir topluluktan diğerine, güncel çalışmadan diğer çalışmalara tekrarlanabilirliğinin; farklı görüşme enstrümanlarıyla yapılan çalışmalar boyunca çıktılarının karşılaştırılabilirliğinin ve en önemlisi yapılan gözlemlerden elde edilen sonuçların muhtemel genellenebilirliğinin sağlanmasının gerekli olduğunu vurgulamıştır. Goldin (1997) görev temelli görüşmeleri kullanırken kuramın rolünün dikkate alınmasının gerektiğini belirtmiştir. Bu anlamda nitel görev temelli görüşme araştırmalarının gömülü olduğu kuramdaki teorik çatının dikkatlice tanımlanması ve betimlenmesi araştırmanın niteliğini açısından dikkate alınması gereken diğer bir unsurdur. Bu çalışmada kullanılan teorik çatı ve kavramsal çerçeve hâlihazırda birçok araştırma tarafından kullanılmış olan bir çatıdır. Bu teorik çatının tanımı ve özellikleri detaylarıyla anlatılmıştır. Bu kavramsal çatıyı kullanan yurt içi ve yurt dışı araştırmalar, içerisinde görev temelli görüşmeleri kullanan çalışmalar ile beraber ayrıntılı biçimde raporlanmıştır ve kuramın rolü vurgulanmıştır.

Görev temelli görüşmelerin tasarımında kuramın görüşmedeki soruların seçimine nasıl rehberlik ettiği, planlanan ve planlanmayan beklenmedik durumları nasıl yönettiği açıklığa kavuşturulmalı (Goldin, 1997), görüşme tasarımında gereken ve görüşmelerde kullanılan problemlerin nitelikleri kontrol edilmeli ve bu niteliklerin çeşitli problem içerik alanlarında ortaya çıkan derin matematiksel ve anlamsal yapılara işaret etmesi sağlanmalıdır (Goldin, 2000). Bu çalışmada görev temelli görüşmelere ilişkin formlar hazırlanırken öğretmen adaylarının tüm ispat şemalarını ortaya çıkarabilecek nitelikte olmasına çalışılmıştır. Bunun için ilgili alanyazından yararlanılmış, ispat şemalarına ilişkin göstergeler net biçimde tanımlanmış ve problem durumlarına uyarlanmaya çalışılmıştır. Öğretmen adaylarına yöneltilen formların niteliklerinin test edilmesi için uzman görüşlerine başvurulmuş ve pilot çalışmayla desteklenmiştir.

Goldin (1997) görev temelli görüşmelerin açımlayıcı olduğunu, durum çalışmalarının bir derlemesini içerdiğini ve çıktılarının bilimsel olarak tekrarlanabilir gibi dar bir anlamda ele alınmaması gerektiğini belirtmiştir. Bu yüzden bilimsel araştırmalarda gözlemsel yöntemlerin olabildiğince iyi tanımlanması; araştırma tasarımındaki kontrol edilen ya da edilmeyen unsurların dikkatlice ayırt edilmesi, yani gözlemlenen unsurun olabileceği ölçüde kesin şekilde özelliklerin saptanması ve gözlemlerden yapılan çıkarımların ayırt edilmesi gerektiğini, böylelikle gözlemlerle ortaya çıkan akıl yürütmelere dayalı geçerli çıkarımlar yapılabileceğini söylemiştir. Goldin'e göre (2000) çıkarımlar (genellikle örtük olarak) çıkarsamaya çalışılan şeyin doğası hakkındaki algılara ve modellere ve onların gözlemlenebilir davranışlarına dayanır. Goldin (1997) matematik eğitimi kuramının bilimsel amacının bu modelleri olabildiğince açık biçimde yapmak olduğunu belirterek düşünceler hakkında çıkarımlar yapmanın belirsizliklerle dolu olduğunu bu yüzden başlangıçta çıkarımlar ortaya konduğunda kullanılacak kriterleri açıklamanın önem taşıdığını belirtmiştir. (Görev temelli görüşmelerin plansız tasarımından ziyade açık kuramsal düşüncelerin temeline dayalı olarak bilinçli biçimde yapılandırılmış olması gereklidir). Bu çalışmada görev temelli görüşmeler hazırlanırken öğretmen adaylarının ispat şemalarını ortaya koyan göstergeler açık ve net biçimde tanımlanmıştır. Öğretmen adayının herhangi bir ispat şemasının alt sınıfına ilişkin tepkilerinden elde edilen çıkarımların kavramsal çatıya uygun biçimde tanımlandığı için geçerli olduğu düşünülmüştür. Bunun yanında Goldin'in (2000) bahsettiği "çıkarsanmaya çalışılan şeyin doğası" hakkında ayrıntılı bilgi edinilmeye çalışılmıştır. Bunun için öğretmenlerin ispat şemalarını belirlemek için yapılan görev temelli görüşmelerin yanında, onların ispatın doğası hakkındaki görüşlerinin alınması amacıyla klinik görüşmeler yapılandırılmıştır. Böylelikle öğretmen adaylarının ispat şemalarını belirlerken ispatın doğası hakkında görüşleri alınarak gözlemlenebilir davranışlarından gözlemlenemeyen davranışları hakkında çıkarım yapılmasının sağlandığı düşünülmüştür.

Goldin (1997) görev temelli görüşmelerin açık olarak farklı araştırmacılar tarafından yeniden kullanılmaya, geliştirilmeye ve değiştirilmeye bağlı olarak araştırma enstrümanları olarak karakterize edilebilmesi için esnekliğin ve tekrarlanabilirliğin başarılması gerekli olduğunu söylemiştir. Bu çalışmada öğretmen adaylarının hangi ispat şemasına sahip olduğu ve bu ispat şemasına nasıl sahip olduğu ayrıntılarıyla açıklanmıştır. Bir başka ifadeyle öğretmen adaylarının görev temelli görüşme formlarına verdikleri tepkiler tüm formlar bazında ayrıntılı olarak bulgular halinde sunulmuştur. Bu da, bir diğer

araştırmacıların bu bulguları ayrıntılı biçimde izlemesine ve kendi araştırmalarında kullanarak geliştirmesine olanak vermektedir.

3.2. Çalışma Grubu

Çalışmada belirli bir örneklemden evrene genellemeye gidilmeyeceğinden nitel araştırmalarda kullanılan, olasılıksız amaçlı örnekleme yöntemlerinden faydalanılmıştır. *“Amaçlı örnekleme, araştırmacının keşfetmek, anlamak ve durum hakkında fikir sahibi olmak ve bu yüzden bunların çoğunun öğrenilebileceği bir örneklem seçmek durumunda olduğu varsayımına dayanır.”* (Merriam, 1990a, s. 61). Çalışmada amaçlı örnekleme çeşitlerinden ölçüt örnekleme yöntemi ile örneklem seçilme yoluna gidilmiştir. Bu örnekleme yönteminde önceden belirlenmiş ölçütleri karşılayan durumlar çalışılmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2008). Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispat şemalarının ortaya çıkarılması için içeriğinde sayılar alanında ispat uygulamaları bulunan “Elemanter Sayı Kuramı” dersini almış olma ölçütüne ve bu derse ilişkin yüksek, orta ve düşük başarı düzeylerinde olma ölçütlerine göre örneklem seçimine gidilmiştir. Görüşmeler 2015-2016 eğitim öğretim yılı bahar döneminde Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı’nda dördüncü sınıfta öğrenim gören üç kız öğretmen adayıyla gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarının hepsiyle klinik görüşme yöntemiyle yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Çalışma raporlaştırılırken katılan öğretmen adaylarının gerçek isimleri kullanılmamıştır. Bu öğretmen adaylarının isimleri çalışmada Semiha, Derya ve Hamra olarak belirlenmiştir. Öğretmen adayları, Elemanter Sayı Kuramı dersi dönem sonu not ortalamaları yukarıdan aşağıya doğru sıralandığında en yüksek, en düşük ve tam ortada kalan notları alan üç öğretmen adayının seçilmesi yoluyla belirlenmiştir.

Elemanter Sayı Kuramı dersinde en yüksek not ortalamasına sahip olan Semiha bu dersi 2014-2015 güz döneminde almıştır ve bu dersten 100 puan ile geçmiştir. Bu öğrencinin 2016 yılı güz dönemi Mart ayında belirlenen genel not ortalaması ise 3.77’dir. Semiha Denizli’de bulunan özel bir Anadolu lisesinden 90.92 not ortalamasıyla, Pamukkale Üniversitesi matematik eğitimi programından 2015-2016 yılında 3.78 genel akademik not ortalamasıyla mezun olmuştur. Öğretmen adayı üniversite öğrenciliği boyunca Denizli’de ailesiyle birlikte yaşamıştır. Semiha çok konuşkan bir öğretmen adayı olmamakla beraber çalışmaya katılmaya gönüllü olmuştur ve soruları yanıtlamıştır.

Elemanter Sayı Kuramı dersinde en düşük not ortalamasına sahip olan Hamra bu dersi 2015-2016 gz döneminde almıştır ve bu dersten 61 puan ile geçmiştir. Bu öğrencinin 2016 yılı gz dönemi Mart ayında belirlenen genel not ortalaması ise 2.63'tür. Hamra Burdur'da bulunan Anadolu öğretmen lisesinden 83.19 not ortalamasıyla mezun olmuştur. Hamra Pamukkale Üniversitesi matematik eğitimi programından 2016-2017 bahar döneminde öğrenciliği devam etmektedir ve 2017 Mart ayı itibariyle genel akademik not ortalaması 2.55'tir. Hamra konuşkan ve kendini iyi ifade edebilen ve çalışmaya katılmaya istekli bir öğretmen adaydır.

Elemanter Sayı Kuramı dersinde tam ortadaki not ortalaması Derya'ya aittir ve bu dersi 2015-2016 gz döneminde alarak 80 puan ile geçmiştir. Bu öğrencinin 2016 yılı gz dönemi Mart ayında belirlenen genel not ortalaması ise 2.99'dur. Derya Muğla'da bulunan bir devlet Anadolu lisesinden 73.91 not ortalamasıyla, Pamukkale Üniversitesi matematik eğitimi programından 2015-2016 yılında 3.05 genel akademik not ortalamasıyla mezun olmuştur. Derya konuşkan bir öğretmen adaydır ve çalışmaya karşı istekli olmuştur.

3.3. Veri Toplama Araçları

Çalışmada tek bir oturumda farklı veri toplama araçları kullanılarak veri toplanmıştır. Veri toplama araçları iki ana bölümden oluşmuştur. Şekil 3.1'de görüldüğü üzere, ilk bölüm Görev Temelli Görüşme Formu'ndan (Task Based Interview Questions Form); ikinci bölüm ise İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu'ndan (İDGF) oluşmuştur. Öğretmen adaylarıyla yapılan görev temelli görüşmeler İspat Soruları Formu (İSF), İspat Süreçlerine İlişkin Görüşme Formu (İSGF) ve Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu (GİGF) ile gerçekleştirilmiştir. Görev temelli görüşmelerin sonunda öğretmen adaylarına ikinci bölümde yer alan İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu (İDGF) uygulanmıştır.

<p>A) Görev Temelli Görüşme Soruları Formu (Task Based Interview Questions Form) A1) İspat Soruları Formu (İSF) A2) İspat Süreçlerine İlişkin Görüşme Formu (İSGF) A3) Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu (GİGF)</p>	<p>B) İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu (İDGF)</p>
--	---

Şekil 3.1. Veri toplama araçları

3.3.1. Görev Temelli Görüşme Soruları Formu

Çalışmada veri toplama aracı olarak araştırmacı tarafından "Görev Temelli Görüşme Soruları Formu" (Task Based Interview Questions Form) geliştirilmiştir. Görev

Temelli Görüşme Soruları Formu; İspat Soruları Formu (İSF), İspat Süreçlerine İlişkin Görüşme Formu (İSGF) ve Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu (GİGF) olmak üzere üç bölümden oluşmuştur.

3.3.1.1. İspat soruları formu (İSF).

İspat Soruları Formu (İSF), öğretmen adaylarının ne tür ispat şemaları ortaya koyduklarını belirlemek amacıyla araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. Farklı ispat şemalarını ortaya çıkarmayı hedefleyen ispat sorularından oluşan taslak İSF, ilgili alanyazından yararlanılarak dokuz soru halinde hazırlanmıştır. İSF; ilköğretim, ortaöğretim ve lise matematik öğretmen adayları ile lisans öğrencilerinin ispat anlayışlarını, ispat becerilerini, ispat gibi görünen argümanları doğrulama biçimlerini ve becerilerini, bu argümanların özelliklerini araştıran ve ispat şemalarını incelemeyi hedefleyen çalışmalarda (Boyle, 2012; Haverhals, 2011; Healy ve Hoyles, 2000; Plaxco, 2011; Schabel, 2001; Selden ve Selden, 2003; Yoo, 2008) kullanılan ölçme araçlarındaki maddelerden derlenerek oluşturulmuştur. İSF'deki sorular daha önceden uzman görüşü alınmış, geçerliği ve güvenilirliği test edilmiş sorulardan oluşmuştur. İSF'ye ilişkin soruların kullanılma gerekçelerine ait daha detaylı bilgi bu bölümün ilerleyen açıklamalarında yer almaktadır.

İSF'nin bu çalışmadaki geçerliği ve güvenilirliği uzman görüşü alınarak pilot uygulama öncesi test edilmiştir. Pilot uygulamaya ilişkin ayrıntılı bilgi 3.4 başlığı altında yer almaktadır. Pilot uygulama sonrasında birinci ve sekizinci sorular çıkarılmıştır. "Herhangi üç tane ardışık sayı içerisinde her zaman 3 ile bölünebilen bir sayı olduğunu gösteriniz" olarak belirlenmiş olan birinci soru, çözümünün içeriğinin "Herhangi üç pozitif ardışık tam sayının çarpımının her zaman 6'nın katı olduğunu gösteriniz" olan üçüncü soruda da olması nedeniyle çıkarılmıştır. Başka deyişle üçüncü soruya cevap vermek için birinci sorunun nasıl yanıtlanacağını bilmek gerekmektedir ve birinci soruyu ispatlayamayan kişi üçüncü soruyu ispatlayamamaktadır. Yani iki ispat sorusunun çözümünde ortak olan noktalar vardır. Bu durumların İSF'nin geçerliğini düşüreceği düşünülmüştür. Bu yüzden birinci soru pilot uygulama sonrasında İSF'den çıkarılmıştır. Sekizinci sorunun ölçeğe alınma sebebi öğretmen adaylarının ispatlarını yapılandırırken örüntü ve modellerden yararlanma durumlarını gözlemektir. Ancak pilot uygulama sonrasında öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde bu sorunun amacına hizmet etmediği belirlenmiştir. Dolayısıyla sekizinci soru da pilot uygulama sonrasında İSF'den çıkarılmıştır.

Pilot uygulama sonrasında öğretmen adaylarının tepkileri analiz edildiğinde, analitik ispat şemalarından dönüşümsel ispat şemasına ilişkin örneklere rastlansa da öğretmen adaylarının analitik aksiyomatik ispat şemasına ilişkin göstergelerine rastlanamamıştır. Öğretmen adaylarının tepkilerinde analitik aksiyomatik ispat şemasının göstergelerinin ortaya çıkmama sebebinin, soruların içeriğinde analitik aksiyomatik düşünceyi ortaya koymayı gerektiren bir durum olmamasından mı yoksa gerçekten hiçbir öğretmen adayının analitik aksiyomatik ispat düşüncesi barındırmamasından mı kaynaklandığının net biçimde ortaya konabilmesi istenmiştir. Bu amaçla analitik aksiyomatik ispat şemasına ilişkin tepkileri ortaya çıkarma potansiyelinde olan bir soru eklenerek ek uzman görüşleri alınmış ve araştırma yapılan üniversitenin Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı'nda görev yapan iki araştırma görevlisiyle bu soruya ilişkin ikinci bir pilot uygulama gerçekleştirilmiştir. Eklenen soru Haverhals'ın (2011) matematik bölümü lisans öğrencilerinin ispat şemalarını ortaya çıkarmayı hedefleyen tez çalışmasından alınmıştır. Bu tez çalışmasında da bu sorunun amacı lisans öğrencilerinin analitik aksiyomatik ispat şemalarını ortaya çıkarmak olmuştur. İSF'nin pilot uygulamada kullanılan hali Ek 1'de, sekiz sorudan oluşan son hali Ek 2'de verilmektedir.

Bu çalışmadaki öğretmen adayları içeriğinde sayılar alanında ispat uygulamaları bulunan "Elemanter Sayı Kuramı" dersini almış olma ölçütüne göre çalışmaya seçilmişlerdir (3.2 başlığı altında açıklanmıştır). Bu yüzden İSF'deki soruların büyük bölümü öğretmen adaylarının Elemanter Sayı Kuramı dersinde iki bölüm halinde işledikleri sayılar alanındaki "Bölünebilme" ve "Asal Sayılar" konularını kapsayacak şekilde hazırlanmıştır. Öğretmen adayları Elemanter Sayı Kuramı dersindeki konularda genellikle tek bir kitaba bağlı kalarak ilerlemişlerdir. Öğretmen adaylarıyla yapılan informel görüşmelerde, öğretmen adayları derse ilişkin defter tutmadıklarını, dersin öğretim elemanın ders kitabına bağlı kalarak dersi işlediğini, derslerin genellikle bu ispat sorularının tahtaya yazılarak çözümünün dersin öğretim elemanı tarafından yapılarak geçtiğini, vize ve final sınavlarında da kendilerine derste işlediklerine benzer sorular yöneltildiğini belirtmişlerdir. Öğretmen adayları Elemanter Sayı Kuramı dersinin sınavlarına genellikle kitaptaki ispat örneklerini ezberleyerek girdiklerini belirtmişlerdir. İSF'deki sorular, öğretmen adaylarının anılan konulardaki ispat örneklerine benzer olan sorulardan oluşmuştur. İSF sorularının Elemanter Sayı Kuramı dersinin özellikle bölünebilme ve asal sayılar konusundan seçilme sebebi, örneklem seçilmesinde ölçüt olmasının yanı sıra öğretmen adaylarının bu konuya eğitim basamaklarının ilk

dönemlerinden bugüne kadar (Elemanter Sayı Kuramı dersi dâhil olmak üzere) aşına olmaları, ileride öğretmen olduklarında öğrencilerine bu konuları öğretecek olmalarıdır. Bunun yanında İSF'deki soruların üniversite matematiği düzeyindeki Elemanter Sayı Kuramı'nın daha ileri konuları kapsamında (Lineer Kongrüanslar, Primitif Kökler, Kuadratik Rezüdüler, vb.. gibi) olmamasına özellikle özen gösterilmiştir. Bunun sebebi öğretmen adaylarının sorunun içeriğiyle uğraşırken zorluk çekmemelerinin sağlanmasının istenmesidir. Öğretmen adaylarının ispat yaparken ve ispatları yargılarken ileri düzeyde ispatlarla uğraşmalarının onların ispat şemalarını belirlemede sorunlar yaratacağı düşünülmüştür. Başka deyişle, soruların zorluk düzeyinden dolayı öğretmen adaylarının ispat sorusuna cevap veremedikleri durumda ispat şemalarının belirlenmesinde sorunlar yaşanabileceği öngörülmüştür. Nitekim İSF'deki bir soru haricindeki (Healy ve Hoyles, 2000) soruların tamamı alanyazında lisans öğrencileriyle ve öğretmen adaylarıyla yürütülen çalışmalardan (Boyle, 2012; Haverhals, 2011; Plaxco, 2011; Schabel, 2001; Selden ve Selden, 2003; Yoo, 2008) alınmıştır. Bu çalışmalarda da soruların zorluk düzeyinin ileri düzeyde olmadığı görülmektedir. Anılan çalışmalardaki sorular lisans öğrencilerine veya öğretmen adaylarına yöneltilmiş olup, bu çalışmada kullanılan sadece bir soru (İSF'nin birinci sorusu) Healy ve Hoyles'un (2000) çalışmasında lise öğrencilerine yöneltilmiştir. İlgili soru lise öğrencileriyle yapılan bir çalışmadan edinilmiş olsa da matematik öğretmeni yetiştirme programlarında Elemanter Sayı Kuramı dersinde öğretmen adaylarına da yöneltilen bir sorudur. Aşağıda bu soruların ispat şemalarıyla ilişkili olarak da kullanılma gerekçeleri detaylarıyla anlatılmaktadır:

Birinci, üçüncü, dördüncü, beşinci sorular bölünebilme ile ilgili argümanlar içerirken, bunların içerisinde dördüncü soru ve ayrıca ikinci soru teklik-çiftlik durumlarını kapsamıştır. Bölünebilme konusu ile ilgili olan İSF'nin beşinci sorusu verilen argümanlar içerisinde ispat olanın ya da olanlarının seçilmesiyle katılımcıların ispat şemasını ölçmeyi hedeflemiştir. Sekizinci soru ise yine Elemanter Sayı Kuramı dersinin "Asal Sayılar" konusunu içeren asal sayıların sonsuzluğunun gösterilmesi istenen bir sorudur. Bu anlamda İSF'de sorulan sorular yoğunlukla bu dersin iki konusundan oluşmuştur. Altıncı soru öğretmen adaylarının bir örüntü oluşturmalarını ve bu örüntüden yola çıkarak ispatlarını yapılandırmalarını gerektiren durumlar içermiştir. Yedinci soru ise katılımcıların ispat şemalarının belirlenebilmesinin, onların karmaşık sayılarla ilgili olarak tanım aralıkları kavramına yaklaşım biçimleriyle mümkün olduğu bir durumu içermektedir. Bu soruların tümü öğretmen adaylarının tüm ispat şemalarını ortaya koyacak

özellikte olmalarına dikkat edilerek ispat şemalarının belirlenmesinde farklı amaçlara sahip olarak hazırlanmıştır. Bu amaçlara ilişkin ayrıntılar aşağıda raporlanmıştır:

İSF'nin birinci sorusu olan “Herhangi üç pozitif ardışık tam sayının çarpımının her zaman 6'nın katı olduğunu gösteriniz.” sorusu Healy ve Hoyles'un (2000) çalışmasından alınmıştır. Soru, herhangi üç pozitif ardışık tam sayı çarpıldığında ilk aşamada eşitliğin bir tarafında 6'nın katının açıkça görülmediği, ancak belirli bir akıl yürütme ve doğru çıkarım yapılarak ispatın yapılandırılabilmesine olanak veren bir yapıya sahiptir. Dolayısıyla doğru akıl yürütme yaparak dönüşüm yapan öğrencilerin bu soruda analitik ispat şemasının belirleyicisi olan tepkilere sahip olacağı, doğru çıkarım yapmayan öğrencilerin ise dışsal ya da deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler vereceği öngörülmüştür.

İSF'nin ikinci sorusu olan “Herhangi iki tek sayının toplamının her zaman çift olacağını gösteriniz” sorusu öğretmen adaylarının her zaman bildikleri bir iddiayı ispatlarken ne tür düşünme biçimlerini sergileyeceklerini öğrenmek için sorulmuştur. Bu soru Boyle'un (2012) çalışmasından alınmıştır. Öğretmen adaylarının tek sayı gösterimi ile iki tek sayının toplamındaki bilinmeyen ifadelerle yaklaşımları, ispat şemaları açısından irdelenmek istenmiştir. Öğretmen adaylarının tek sayı gösterimlerini yapılandırma biçimlerini ortaya koymalarının onların ispat şemalarına ilişkin göstergeler sağlayacağı öngörülmüştür. Öğretmen adaylarının her zaman bildikleri bir iddiayı ispatlarken başta dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olmak üzere tüm ispat şeması sınıflandırmalarına ilişkin tepkiler sergileyebilecekleri düşünülmüştür.

İSF'nin üçüncü sorusu olan “Herhangi bir pozitif tam sayı n için eğer n^2 3'ün katıysa n 'nin de 3'ün katı olduğunu gösteriniz” sorusu; öğretmen adaylarının uygun ispat yöntemlerini uygulama becerilerini ortaya çıkarırken ispat şemalarını incelemek amacıyla yöneltilmiştir. Bu soru ise Selden ve Selden (2003) ve Yoo'nun (2008) çalışmalarında kullandıkları bir sorudur. Bu ispat sorusuyla öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini uygulayabileceği düşünülmüştür. Öğretmen adaylarının farklı ispat yöntemlerini uygularken bu yöntemleri belirli bir alışkanlıkla mı (dışsal ispat şemaları) yoksa uygun yöntemle akıl yürüterek mi (analitik ispat şeması) ispatlayacakları özellikle ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bunun yanında öğretmen adaylarının kullandıkları ispat yöntemleri hakkındaki bilgilerinin tüm ispat şeması sınıflandırmalarına ilişkin ipuçları vereceği öngörülmüştür.

İSF'nin dördüncü sorusu olan “ b tek doğal sayı ise 8 'in $b^2 - 1$ 'i böldüğünü gösteriniz” sorusu, b 'ye herhangi bir tek sayı ifadesi ($2n+1$, $2k+1$ gibi) verildiğinde 8 'in katı olan bir ifade elde edilerek, örüntünün keşfedebileceği durumlar içermiştir. Bu soru Schabel'in (2001) çalışmasından alınmıştır. Bu soru ile öğretmen adaylarının bu işlemleri yaparken açıklama biçimleri ile onların ispat şemalarına ilişkin becerilerinin belirlenmesini sağlayacağı düşünülmüştür. Öğretmen adaylarının örüntüyü keşfederek ispatlarını yapılandıkları durumlarda verdikleri tepkilerin derslerden öğrendiklerine atıf yaptıklarında (dışsal otoriter veya alışkanlık edinilmiş ispat şeması), ispatlarını belirli değerler üzerinden yapılandıklarında (deneysel ispat şeması) ya da dönüşümlerini doğru biçimde akıl yürütme ile gerçekleştirdiklerinde (analitik ispat şemaları) tüm ispat şemalarına ilişkin göstergeler taşıyacağı düşünülmüştür.

İSF'nin beşinci sorusunda öğretmen adaylarına “Bir tam sayının rakamları toplamı 3 ile bölünürse, bu tam sayı 3 ile bölünebilir.” iddiası ve bu iddiaya yönelik üç ispat verilmiştir ve öğretmen adaylarından bu iddiaya yönelik ispatları inceleyerek her bir ispatın matematiksel doğruluğu hakkında yorum yapmaları istenmiştir. Bu soru Plaxco'nun (2001) çalışmasından alınmıştır. Plaxco'nun da (2011) belirttiği üzere, öğretmen adaylarının ispat şemaları sadece ispatı yapılandırırken değil, verilmiş ispatları incelerken de belirlenebilir. Bu soru da öğretmen adaylarının verilen ispatları değerlendirirken ispat şemalarının belirlenmesi amacıyla sorulmuştur. Bunun yanında bu sorunun her bir şikkı öğretmen adaylarının özellikle belirli ispat şemalarını ortaya koymayı hedefleyen ispatlardan oluşmuştur. Örneğin, ilk ispatı seçen öğretmen adaylarının deneysel ispat şemalarına; ikinci ispatı seçen öğretmen adaylarının analitik ispat şemalarına; son ispatı seçen öğretmen adaylarının ise dışsal ispat şemalarına ilişkin göstergeler taşıyacakları öngörülmüştür.

İSF'nin altıncı sorusunda öğretmen adaylarına kenarları 3 br ve 4 br olan dikdörtgen biçiminde bir pencere çerçevesi şekli verilmiştir. Pencerenin, cam levhaları ayıran tahta şeritlerden yapıldığı ve her cam levhanın 1 br uzunluğunda ve 1 br genişliğinde kareyi oluşturmakta olduğu belirtilmiştir. Öğretmen adaylarından herhangi bir uzunluktaki pencere için tahta şeridin uzunluğunu bulmayı sağlayan genel bir ifade yazmaları istenmiştir. Bu soru Boyle'un (2012) çalışmasından alınmıştır. Soru öğretmen adaylarına bir örüntü oluşturmaları ve bu örüntüden hareketle kendi çıkarımlarını yaparak ispatı yapılandirmaları amacıyla sorulmuştur. İspatı yapılandırırken belirli denemeler üzerinden akıl yürütme yapma değerli bir düşünme biçimidir. Dolayısıyla öğretmen

adaylarının örüntüyü keşfederken belirli denemeler üzerinden dönüşüm yapma ve dönüşümlerini genelleme becerileri sınanmak istenmiştir. Öğretmen adaylarının bu becerileri gösterirken analitik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler verebilecekleri, ya da belirli sayı değerleri ile ispatı değerlendirerek veya ispatın doğruluğunu hisleriyle kontrol ederek deneysel ispat şemasına ilişkin göstergeler taşıyabilecekleri öngörülmüştür.

İSF'nin yedinci sorusunda katılımcıların analitik aksiyomatik ispat şemasına ilişkin becerilerinin olup olmadığının ortaya çıkarılması hedeflenmiştir. Bu soru pilot uygulamada mevcut değilken pilot uygulama sonrasında İSF'ye eklenmiştir. Bu sorunun eklenme sebebi yukarıda ayrıntılarıyla açıklanmıştır. Bu soru Haverhals'ın (2011) çalışmasında da katılımcıların analitik aksiyomatik ispat şemalarını belirlenmesi amacıyla sorulmuştur.

İSF'nin sekizinci sorusu olan “Asal sayıların sonsuz olduğunu gösteriniz” sorusu öğretmen adaylarının daha önce derslerinde karşılaştıkları ve hatta kendilerine vize sorusu olarak yöneltilen bir sorudur. Sorunun, doğası gereği bu soruyla ilk kez karşılaşan birinin tek başına sonuca ulaşamayacağı zorlukta olduğu düşünülmüştür. Öğretmen adaylarına bu soru sorularak onların dersten ya da sınavlardan hatırlayacakları çıkarsamalara ispat çözümü yaparken nasıl referans verecekleri belirlenmeye çalışılmıştır. Böylelikle öğretmen adaylarının bu soruya ilişkin tepkilerinde dışsal otoriter ispat şeması başta olmak üzere tüm ispat şemalarının göstergeleriyle hareket edebilecekleri öngörülmüştür.

3.3.1.2. İspat süreçlerine ilişkin görüşme formu (İSGF).

İspat Süreçlerine İlişkin Görüşme Formu (İSGF) öğretmen adayları İSF'yi yanıtlarken ispat süreçlerine ilişkin yöneltilen ve öğretmen adaylarının ispat şemalarına ilişkin becerilerini ortaya çıkarmayı hedefleyen genel sorulardan oluşmaktadır. Bu sorular öğretmen adaylarına sırasıyla değil, görüşmenin seyrine göre yöneltilmiştir. Pilot uygulama ile İSGF revize edilmiştir (pilot uygulamaya ilişkin ayrıntılı bilgi 3.4 başlığı altında yer almaktadır). Pilot uygulama sonrasında öğretmen adaylarının ispat şemaları belirlenirken, ispatı yapılandırırken kullandıkları yöntemler hakkında ayrıntılı bilgi alınmasını sağlayacak sorular sormanın onların ispat şemalarını daha sağlıklı biçimde ortaya çıkaracağı yargısına varılmıştır. Örneğin pilot uygulamada öğretmen adayı tümevarımla ispat yaptığında, kullandığı yöntemi irdeleyen sorular sorulamamıştır. Pilot uygulama sırasında bunun eksikliği hissedildiğinden tümevarımsal akıl yürütme ile ispat yapan bir öğrenciye tümevarımın doğası ile ilgili soru yöneltilmenin ispat şemalarını ortaya çıkarmada daha yararlı olacağı düşünülmüştür. Benzer şekilde başka yöntemler kullanan

öğretmen adaylarına kullandıkları yöntemle ilgili sorular sorulmuştur. Bu sorular pilot uygulama sonrasında İSGF'ye eklenmiştir. Bu soru öğretmen adaylarına, kullandıkları yönteme göre farklı biçimlerde yöneltilmiştir.

İSGF'de öğretmen adaylarına yaptıkları ispatın doğruluğuna araştırmacıyı ya da öğrencileri nasıl ikna edecekleri, yaptıkları ispatın her durum için doğru olup olmayacağı, ispatlarının geçerli olmadığı bir durum için örnek sağlayıp sağlayamayacakları, ispatlarının neden doğru olduğunu düşündükleri, ispatı farklı bir yolla yapıp yapamayacakları, ispatlarında kullandıkları yöntemin ne olduğu ve neden bu yöntemi kullandıkları, ilk akıllarına gelen yöntemin kullandıkları yöntem olup olmadığı, kullandıkları yöntemi nereden hatırladıkları, ispatlarını nasıl buldukları ve her zaman böyle bulup bulamayacakları hakkında sorular sorulmuştur. Bunun yanında öğretmen adaylarından kullandıkları yöntemi kullanma süreçlerini anlatmaları istenmiştir. İSGF Ek 3'te sunulmuştur.

3.3.1.3. Gözlemlenen ispat şemasına ilişkin görüşme formu (GİGF).

Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu (GİGF) her bir ispat şeması için hazırlanmış sorulardan oluşmaktadır. Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmeler sırasında İSF'ye verdikleri yanıtlarda gözlemlenen ispat şemalarına göre ilgili soruların yöneltilmesi hedeflenmiştir. GİGF'de öğretmen adayının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması özellikleri gösterdiği düşünülüyse kendisine ispatını özgün yapan şeyin ne olduğu; dışsal otoriter ispat şeması özellikleri gösterdiği düşünülüyse ispatı nasıl ve neye dayanarak yaptığı, dışsal sembolik ispat şeması özellikleri gösterdiği düşünülüyse kullandığı algoritmayı neden kullandığı ve anlamı, deneysel temel örnekler ispat şeması özellikleri gösterdiği düşünülüyse kullandığı durumların ispat için yeterli olup olmadığı ve ispatı başka bir şekilde yapılandırıp yapılandıramayacağı, deneysel algısal ispat şeması özellikleri gösterdiği düşünülüyse çizimini anlatıp anlatamayacağı ya da yaptıklarını ayrıntılarıyla gerekçelendirip gerekçelendiremeyeceği, analitik dönüşümsel ispat şeması özellikleri gösterdiği düşünülüyse ispatındaki ana (anahtar) meselenin ne olduğu, analitik aksiyomatik ispat şeması özellikleri gösterdiği düşünülüyse ispat sürecini detaylandırıp detaylandıramayacağı sorulmuştur. GİGF Ek 4'te sunulmuştur.

3.3.2. İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu (İDGF)

İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu (İDGF) görev temelli görüşmelerin hemen akabinde öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşlerini açıklarken sergiledikleri

ispat şemalarının ortaya çıkarılması amacıyla yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatın doğası hakkında görüşlerinin alınmasının, onların ispat yapılandırma süreçlerindeki davranış biçimlerinin ve ispat şemalarının daha ayrıntılı ve doğru biçimde yorumlanmasına yön vereceği düşünülmüştür. İDGF’de öğretmen adaylarına ispatın ne olduğu, bir ispatı ispat yapan şeyin ne olduğu ve ne yapılırsa matematiksel olarak doğru bir ifade yazılmış olunacağı, başarılı bir ispat için nelerin gerekli olduğu ve ispatın nelerden oluştuğu, ispat için çok gerekli olmayan ama ispata yardım eden şeylerin ne olduğu sorulmuştur. İDGF Ek 5’te sunulmuştur.

3.4. Pilot Uygulama

Bu çalışmanın pilot uygulaması iki kısım halinde gerçekleştirilmiştir. Öncelikle öğretmen adaylarının İSF’ye verdikleri yazılı yanıtlar toplanmış ve analiz edilmiş, analiz sonucunda ispat şemalarına göre sınıflandırılan öğretmen adaylarından belirli ölçütlerle seçilen bir grup öğretmen adayıyla klinik görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde öğretmen adaylarından öncelikle daha önce yaptıkları ispat yapılandırmalarını incelemeleri istenmiş, daha sonra ispat yapılandırmalarının daha ayrıntılı incelenmesi ve ispat şemalarının daha sağlıklı biçimde belirlenebilmesi için kendilerine İSGF’deki ve GİGF’deki sorular yöneltilmiştir ve ardından öğretmen adaylarına İDGF yöneltilmiştir. Pilot uygulama boyunca izlenen adımlar Ek 6’da sunulmuştur.

Pilot uygulamada İSF 2014-2015 eğitim öğretim yılının mayıs ayında dördüncü sınıfta okuyan 45 öğretmen adayına öğrenim gördükleri üniversiteye ait iki derslikte uygulanmıştır. İSF normal öğretim ve ikinci öğretimde öğrenim gören öğretmen adaylarına dağıtılmış, öğretmen adaylarının kendi başlarına bu soruları yanıtlamaları beklenmiştir. Normal öğretim ve ikinci öğretimde öğrenim gören öğretmen adaylarına farklı saatlerde yapılan uygulama süresi her bir öğretmen adayının ispat performansına göre değişmiştir. Uygulama süresi 30 dakika ile bir buçuk saat arasında olmuştur. Uygulama bittikten sonra öğretmen adaylarının yanıtları toplanmış ve bu yanıtlar içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir.

İspat sorularının pilot uygulamasından sonra öğretmen adaylarının tepkileri Sowder ve Harel’in (1998) belirli ispat şemaları sınıflandırmalarına ayrılmıştır. İspat şemalarının sınıflandırmasına göre, ispat şemalarına, kendini iyi ifade eden ve edemeyen; ispat notasyonları düşük/yüksek gibi ölçütlere göre sınıflandırılan öğretmen adayları arasından gönüllü olan sekiz (dört kız ve dört erkek) öğretmen adayıyla görüşmeler yapılmıştır. Bu

görüşmeler sırasında öğretmen adaylarına İSF'deki sorular tekrar yöneltilmiş, önceden yaptıkları ispat çözümlerini tekrar incelemeleri sağlanmıştır. Öğretmen adaylarının açıklamaları sırasında kendilerine İSGF'deki ve GİGF'deki sorular yöneltilerek ispat şemaları hakkında ayrıntılı bilgi edinilmesi sağlanmıştır. Daha sonra ise görüşme yapılan öğretmen adaylarına İDGF'deki sorular yöneltilmiştir. Görüşmeler araştırmacının ofisinde ve Anabilim Dalı'na ait yüksek lisans dersliğinde gerçekleştirilmiştir. Görüşme süreleri 35 ile 50 dakika arasında değişmiştir. Görüşmeler sırasında öğretmen adayları video kaydına alınmıştır ve aynı zamanda ses kayıtları yapılmıştır.

Pilot uygulamanın yukarıda açıklandığı gibi iki kısım halinde yürütülmesi öğretmen adaylarının yazılı sınavlarda ve görüşmelerde aynı soruya ilişkin farklı ispat şemalarının göstergeleri olan tepkiler sergilemelerine yol açmıştır. Öğretmen adayları yazılı halde dile getirmedikleri bazı düşünceleri görüşmelerde dile getirmişler ve görüşmelerde daha zengin ve dolayısıyla daha farklı veri sağlamışlardır. Öğretmen adaylarının yazılı sınavdaki ispat sorularına verdikleri yanıtlarla görüşmede ortaya çıkan yanıtların ve buna ait ispat şemaları sınıflandırmasının neden farklı olduğunun belirlenme işine harcanan sürenin çalışmanın asıl amacı olan öğretmen adaylarının ispat şemalarının belirlenmesine harcanan süreden daha fazla olduğu görülmüştür. Bu durumun çalışmanın amacına hizmet etmediği düşünülmüştür. Pilot uygulama verilerinin analizi sonrasında, öğretmen adaylarına İSF'nin önceden verilerek yanıtları yazılı olarak alındıktan sonra ayrıca görüşmeler yapılandırmak yerine, tüm uygulamanın tek bir görev temelli görüşme ile yapılmasına karar verilmiştir.

3.4.1. Pilot Uygulama Verilerinin Analizi

Çalışmanın pilot uygulamasında veriler içerik analizi yardımıyla analiz edilmiştir. Pilot uygulamaya ilişkin veri analizi boyunca izlenen adımlar Ek 6'da sunulmuştur. Öncelikle kâğıtların tamamı soru bazında okunmuş, parçalanmış veriler ortak olan noktalar dikkate alınarak incelenmiş, birbirleriyle karşılaştırılmış, kavramsallaştırılarak sınıflandırılmıştır. Böylelikle öğretmen adaylarının tepkileri belirli bir kod listesi ile sınıflandırılmıştır. Daha sonra veri setindeki anlamlı veri birimleri başlangıç (geçici) kodlar olarak sınıflandırılmıştır. Örneğin, “İki tek sayının toplamı çifttir” ifadesini içeren soruya verilen yanıtlarda, öğretmen adaylarının tepkileri “aynı ya da farklı parametre kullanma”, “teklik-çiftliği doğru veya yanlış yapılandırma”, “tümevarımsal akıl yürütme kullanma” gibi tepkiler altında sınıflandırılmıştır. Buradaki “aynı ya da farklı parametre kullanma” sınıflamasında bazı öğretmen adayları tek sayı gösteriminde ($2n+1$, $2n+3$) gibi “aynı parametreleri” kullanırken, bazı öğretmen adayları ($2n+1$, $2k+1$) gibi “farklı

parametreleri” kullanmışlardır. Bu sınıflamalardaki “aynı parametreleri kullanarak ispatı yapılandırma” veya “farklı parametreleri kullanarak ispatı yapılandırma” tepkileri veri analizi için başlangıç (geçici) kodları olmuştur. Bu başlangıç (geçici) kodları kendi aralarında tekrar okunarak bir araya getirilmiş ve veri analizinin kodları oluşturulmuştur. Örneğin ikinci soruda “farklı parametreler kullanarak ispatı yapılandırma” başlangıç kodu ile bir diğer soruda “tümevarımsal akıl yürütme basamağında dönüşüm yaparak ispatı yapılandırma” başlangıç kodu beraber “İspatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma” sınıflamasına dâhil edilmiştir. Böylelikle İSF’nin tüm sorularına ilişkin tüm tepkiler incelenerek ortak sınıflama içinde bir araya getirilmiştir. Bu yeni sınıflama pilot çalışma kodlarını oluşturmuştur. Daha sonra buna benzer tepkiler içeren diğer kodlarla birlikte elde edilen bu yeni kodlar Sowder ve Harel’in (1998) kavramsal çatısındaki “analitik dönüşümsel ispat şeması” sınıflandırmasına dâhil edilmiştir. Burada, “analitik dönüşümsel ispat şeması” ise alt temalardan biri olurken “analitik ispat şeması” tema olarak nitelendirilmiştir. Veri analizinde ortaya çıkan kodlar, ilgili alanyazında Sowder ve Harel’in (1998) ispat şemalarına ilişkin göstergelerine uyan bir yapıya sahip olmuştur. Kodları oluşturan temalar ve alt temalar ise bu ispat şemalarına ilişkin temel ispat şemaları ile bunların altındaki ispat şemalarının alt sınıflama çeşitleri olmuştur. Çalışmanın pilot uygulamasında ortaya çıkan temalar ve alt temalar ilgili ispat şemaları olarak; kodlar ise ilgili ispat şemalarının göstergeleri olarak Tablo 3.1’de sunulmuştur:

Tablo 3.1.

İspat Şemalarının Pilot Uygulamaya İlişkin Göstergeleri

İspat Şeması (Temalar)	İspat Şemasının Alt Sınıflandırma Şemaları (Alt Temalar)	İspat Şemasının Göstergesi (Kodlar)
Dışsal İspat Şeması	Dışsal Otoriter İspat Şeması	İspatı derste öğrendiklerine benzer olarak yapılandırma ve ispatı tamamlayamama Hatırlamadığını ifade etme
	Dışsal Sembolik İspat Şeması	İspatı yapılandırırken sembollerini anlamsızca manipüle etme
	Dışsal Alışkanlık Edinilmiş İspat Şeması	İşlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakma İspatı yapılandırırken sembolik gösterimleri derslerde öğrendiklerine benzer olarak fakat anlamlandırmadan kullanma Kalıp ifadelerle (sınırlı bağlantı kurarak) yüzeysel deliller sunma
Deneysel İspat Şeması	Deneysel Temel Örnekler İspat Şeması	İspatın doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalışma Ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandırma Ana meseleyi belirleme ve ifade eksiklikleri ile ispatı yapılandırma
Analitik İspat Şeması	Analitik Dönüşümsel İspat Şeması	İspatı belirlediği yöntemi doğru biçimde kullanarak doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma İspatı ifade eksiklikleri ile doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma

Tablo 3.1'den de görüldüğü üzere pilot uygulamada deneysel algısal ve analitik aksiyomatik ispat şemasına ilişkin göstergeler ortaya çıkmamıştır.

3.5. Veri Toplama Süreci

3.5.1. Uygulama

Bu çalışmanın verileri görev temelli görüşmeler ve hemen akabinde ispatın doğasına ilişkin görüşmeler aracılığıyla tek bir oturumda toplanmıştır. Öğretmen adaylarıyla yapılan görev temelli görüşmeler Görev Temelli Görüşme Formu'nu oluşturan İspat Soruları Formu (İSF), İspat Süreçlerine İlişkin Görüşme Formu (İSGF) ve Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu (GİGF) ile gerçekleştirilmiştir. Hemen sonrasında ise İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu (İDGF) kullanılarak görüşmeye devam edilmiştir. Uygulama boyunca izlenen adımlar Ek 7'de sunulmuştur. Anılan veri toplama araçlarının tek bir oturumda gerçekleştirilme sebebi pilot uygulama kısmında anlatılmıştır.

Görüşmeler 2015-2016 eğitim öğretim yılının bahar döneminde şubat ayının ilk haftasında öğretmen adaylarının öğrenim gördükleri üniversiteye ait iki derslikte her öğretmen adayı için tek oturumda gerçekleştirilmiştir. Elemanter Sayı Kuramı dersinden en yüksek not ortalamasına sahip Semiha ile yapılan görüşme Anabilim Dalı'na ait yüksek lisans dersliğinde gerçekleşmiş ve bir saat 48 dakika sürmüştür. Elemanter Sayı Kuramı dersinden orta düzeyde başarıya sahip olan Derya ile yapılan görüşme Anabilim Dalı'na ait yüksek lisans dersliğinde gerçekleşmiştir ve iki saat 28 dakika sürmüştür. Elemanter Sayı Kuramı dersinden en düşük not ortalamasına sahip Hamra ile yapılan görüşme araştırmacının ofisinde gerçekleştirilmiştir ve iki saat 29 dakika sürmüştür. Tüm oturumlar ses ve kamera kaydına alınmıştır. Ses kayıtları ses kayıt cihazıyla video kayıtları video kamera yardımıyla gerçekleştirilmiştir. Ses ve video kayıtlarının deşifresi araştırmacı tarafından yapılmıştır.

3.6. Verilerin Analizi

Öğretmen adaylarının ispat şemalarının ortaya çıkarılması için Görev Temelli Görüşme Soruları Formu'na ve İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu'na verdikleri yanıtlar içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Uygulamanın veri analizi boyunca izlenen adımlar Ek 7'de sunulmuştur.

Öğretmen adaylarının ispat şemalarının belirlenebilmesi için yapılan içerik analizi araştırmacı dâhil olmak üzere üç kişiyle yürütülmüştür. Verilerin analizinde görev alan

yardımcı araştırmacılarından biri aynı Őhrin kırsal kesimindeki bir ilćenin Anadolu lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmakta olup, diğer yardımcı araştırmacı aynı Őhrin merkezindeki bir ortaokulda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Her iki yardımcı araştırmacı Pamukkale Üniversitesi İlköğretim Doktora Programının Matematik Eđitimi alanında doktora öğrencisidir. Yardımcı araştırmacılara analiz öncesinde ispat Őemalarının ne olduğu, nasıl ve hangi ölçütlere göre sınıflandırıldığı ve benzer ćalıřmalarda ispat Őemalarının nasıl sınıflandırıldığına dair örnekler ićeren eğitim verilmiştir. Bu eğitim 2015-2016 Eđitim Öđretim Yılı Mart ayının ilk haftasında verilmiş olup yaklaşık iki saat sürmüştür. Eđitimden bir hafta önce yardımcı araştırmacılara eğitimin detaylarını ićeren yazılı metin dağıtılmış, eğitimden önce bu metni okumuş olmaları istenmiştir. Böylelikle eğitim sırasında ispat Őemalarıyla ilgili ön bilgiye sahip olmaları sağlanmıştır. Eđitim sırasında yardımcı araştırmacılara araştırmacı tarafından yapılan deşifreler, Görev Temelli Görüřme Soruları Formu ve İspatın Doğasına İlişkin Görüřme Formu ile öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde verdikleri yazılı cevapların fotokopileri ve benzer ćalıřmalardan alınan ispat Őemaları sınıflandırma örnekleri fotokopileri dağıtılmıştır. Böylelikle yardımcı araştırmacıların analiz yapmadan önce hem konuya aşına oldukları hem de öğretmen adaylarının verdikleri tepkiler ile ilgili ayrıntılı bilgi edindikleri düşünölmüştür.

Daha sonra yardımcı araştırmacılarından deşifreleri ve kendilerine verilen belgeleri inceleyerek 2015-2016 Eğitim Öğretim Yılı Mart ayının ikinci haftasında analize başlamaları istenmiştir. Bir sonraki buluşmaya kadar kodlamacılar görev temelli görüşmelere ve ispatın doğasına ilişkin görüşmelere ilişkin deşifreleri ve öğretmen adaylarının yanıtlarını incelemişlerdir. Görev temelli görüşmelerin ve ispatın doğasına ilişkin görüşmelerin analizleri birbirlerinden bağımsız olarak yapılmıştır.

Görev temelli görüşmeler için verilerin analizine soru bazında başlanmıştır. Öncelikle deşifrelerden her öğretmen adayı için birinci sorulara verilen tepkiler okunmuş, daha sonra birinci soru için her öğretmen adayı ayrı ayrı değerlendirilmiştir. Daha sonra aynı işlem ikinci soru, üçüncü soru... ve diğer sorular için tekrarlanmıştır. Parćalanmıř veriler ortak olan noktalar dikkate alınarak incelenmiş, birbirleriyle karşılaştırılmış, kavramsallaştırılarak sınıflandırılmıştır. Böylelikle öğretmen adaylarının tepkileri belirli bir kod listesi ile sınıflandırılmıştır. Daha sonra veri setindeki anlamlı veri birimleri bařlangıć (gećici) kodlar olarak sınıflandırılmıştır. Bu işlem tüm araştırmacılar tarafından tek başına farklı oturumlarda gerćekleřtirilmiřtir. Örneđin, “Herhangi 2 tek sayının

toplamının her zaman çift olacağını gösteriniz” sorusuna verilen yanıtlarda, öğretmen adaylarının tepkileri “aynı ya da farklı parametre kullanma”, “teklik-çiftliği doğru veya yanlış yapılandırma”, “tümevarımsal akıl yürütme kullanma” gibi tepkiler altında sınıflandırılmıştır. Buradaki “aynı ya da farklı parametre kullanma” sınıflamasında bazı öğretmen adayları tek sayı gösteriminde $(2n+1, 2n+3)$ gibi “aynı parametreleri” kullanırken, bazı öğretmen adayları $(2n+1, 2k+1)$ gibi “farklı parametreleri” kullanmışlardır. Bu sınıflamalardaki “herhangi iki tek sayı gösterimi için aynı parametreleri kullanarak ispatı yapılandırma” veya “herhangi iki tek sayı gösterimi için farklı parametreleri kullanarak ispatı yapılandırma” tepkileri veri analizi için başlangıç kodlarını oluşturmuştur. Bunun yanında “Herhangi bir pozitif tam sayı n için eğer n^2 3’ün katıysa n ’in de 3’ün katı olduğunu gösteriniz” sorusuna verilen yanıtlarda da buna benzer olarak birçok başlangıç kodu oluşturulmuştur. Bu kodlardan biri “İspatı $n^2 = 3k$ başlangıç varsayımı yerine $n^2 = 9k^2$ başlangıç varsayımı ile yapılandırma” olarak belirlenmiştir. Bu kodlar araştırmacılar tarafından tek başına farklı oturumlarda oluşturulmuştur. Araştırmacılar belirli aralıklarla bir araya gelmiş ve belirledikleri kodları birbirleriyle paylaşmışlar ve başlangıç kodlarını son haline getirmişlerdir. Daha sonra araştırmacılar başlangıç kodlarını birbirlerinden bağımsız olarak belirli sınıflamalar altında toplamışlardır. Örneğin, İSF’nin ikinci sorusundaki “herhangi iki tek sayı gösterimi için aynı parametreleri kullanarak ispatı yapılandırma” ile İSF’nin üçüncü sorusundaki “İspatı $n^2 = 3k$ başlangıç varsayımı yerine $n^2 = 9k^2$ başlangıç varsayımı ile yapılandırma” beraber ele alınarak ve bu işlemlere ilişkin öğretmen adaylarının sözlü ve yazılı tepkileri göz önüne alınarak “İspatı yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullanma” sınıflamasına dâhil edilmiştir. Bu sınıflama, çalışmada ortaya çıkan kodları oluşturmuştur. Araştırmacılar daha sonra bir araya gelerek belirlenen ortak kodları birbirleriyle paylaşarak kodların son haline gelmesini sağlamışlardır. Öğretmen adayları son haline gelen kodları birbirlerinden ayrı olarak Sowder ve Harel’in (1998) ispat şeması sınıflamasına göre sınıflamışlardır. Bunun için yardımcı araştırmacılara ispat şemaları sınıflandırması ile ilgili doldurabilecekleri tablolar verilmiştir. Bu sayede ispat şeması sınıflandırması için tek bir sınıflandırma tablosu kullanılması sağlanmıştır. Örneğin “İspatı yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullanma” kodu dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması sınıflamasına girmektedir. Bahsedilen tabloyla, dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının altında çeşitli kodlar oluşmuştur. Bu nihai sınıflama yani temel ispat şemaları ve alt sınıflamaları ise araştırmada kullanılan temaları ve alt temaları oluşturmuştur.

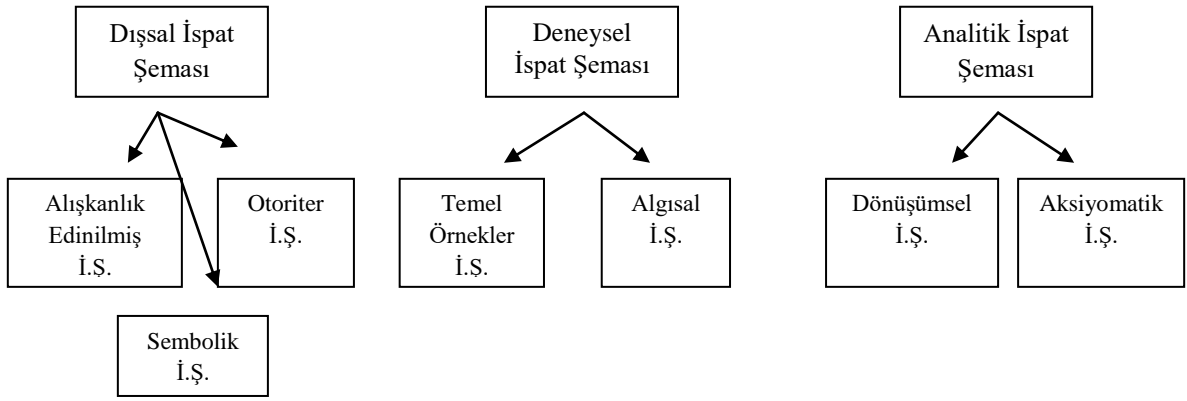
Araştırmacılar bir araya gelerek hangi kodun hangi şemaya girdiğini düşündüklerini birbirleriyle paylaşmışlardır. Böylelikle kodlar ve ilgili temaları son halini almıştır. Çalışmada ortaya çıkan temalar ve alt temalar ilgili ispat temel şemaları ve alt sınıflandırma şemaları olarak; kodlar ise ilgili ispat şemalarının göstergeleri olarak aşağıda Tablo 3.2’de sunulmuştur:

Tablo 3.2.

İspat Şemalarının Uygulamaya İlişkin Göstergeleri

İspat Şeması (Temalar)	İspat Şemasının Alt Sınıflandırma Şemaları (Alt Temalar)	İspat Şemasının Göstergesi (Kodlar)	
Dışsal İspat Şeması	Dışsal Otoriter İspat Şeması	İzlediği yol hakkında derslerden öğrendiklerine atıf yaparak açıklama yapma	
	Dışsal Sembolik İspat Şeması	İspatı yapılandırırken sembollerini anlamsızca manipüle etme	
	Dışsal Edinilmiş Şeması	Alışkanlık İspat Şeması	İşlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakma Sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama İspatı yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullanma Kullandığı yöntem hakkında yanlış bilgiyle ispatı yapılandırma İspatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek yargılama Genel ifadelerle yüzeysel deliller sunma
Deneysel İspat Şeması	Deneysel İspat Şeması	Algısal İspat Şeması	İspatın doğruluğunu hislerine dayanarak göstermeye çalışma Sadece özel bir durum için inceleme yaparak nedensel ilişkileri belirleyememe
	Deneysel Örnekler Şeması	Temel İspat Şeması	İspatın doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalışma
Analitik İspat Şeması	Analitik Dönüşümsel İspat Şeması		İspatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma
			Ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandırma İspatın doğruluğunu mantıksal çıkarımlarla destekleyerek açıklama

Çalışmada üç öğretmen adayıyla yapılan analizler sonucunda tüm temel ispat şemaları ve analitik aksiyomatik ispat şeması haricindeki tüm alt sınıflama ispat şemaları ortaya çıktığı için ve ortaya çıkan bu şemaların nasıl ortaya çıktığı yorumlanabildiği için veri doygunluğuna ulaşıldığı düşünülmüştür. İspatın doğasına ilişkin görüşmelerin analizi de görev temelli görüşmelerin analizine benzer şekilde yapılmıştır. Araştırmacı ve yardımcı araştırmacılar farklı düşünceye sahip oldukları zaman bunları nedenleriyle tartışmışlar ve nihai kararlarını vermişlerdir. Veri setindeki analizler karşılaştırıldığında yüzde yüz tutarlık olduğu belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının ispat şemaları veri setine daha uygun olduğu düşünülen Sowder ve Harel’in (1998) ispat şeması sınıflandırmasına göre sınıflandırılmıştır. Aşağıda Sowder ve Harel’in (1998) ispat şeması sınıflandırması Şekil 3.2’de gösterilmiştir:



Şekil 3.2. Sowder ve Harel'in (1998) ispat şeması sınıflandırması

Öğretmen adaylarına ait ispat şemaları sınıflandırması tüm araştırmacıların bir araya geldiği toplam on dört saat süren beş görüşme sonunda son halini almıştır. İçerik analizleri 2015-2016 Eğitim Öğretim yılının Mart ayının dördüncü haftasında tamamlanmıştır.

3.7. Geçerlik ve Güvenirlik Çalışmaları

Merriam (1990a) geçerlik ve güvenirlik çalışmalarının önemini şu şekilde vurgulamıştır: “Geçerlik ve güvenirlik kavramları; bir çalışma kavramsallaştırılırken verilerin toplanmasında, analiz edilmesinde, yorumlanmasında ve bulguların sunulmasında büyük itina ile yaklaşılması gereken kavramlardır” (Merriam, 1990a, s. 199-200). Güvenirlik bilimsel bulguların tekrar edilebilirliği ile ilgiliyken, geçerlik bilimsel bulguların doğruluğu ile ilgilidir. (LeCompte ve Goetz, 1982).

3.7.1. Geçerlik

Maxwell (1996) nitel araştırmalar üç çeşit geçerlikten bahsetmiştir. Bunlardan ilki *tanımlama*'dır. Araştırmada görülen ve duyulan şeylerin tanımlanma biçimi verilerin yanlış ve eksik olmasına yol açabilir. Bu yanlış ya da eksik olma durumu, görüşme ve gözlemlerin ses ve video kaydına alınması ve bu kayıtların deşifre edilmesi ile giderilebilir. Nitel araştırmalarda gözlenen şeyin tanımlanması geçerliliğinin bu betimlemeden ortaya çıkan bulgu ve yorumlara bağlı olduğu söylenebilir. Bu yüzden görüşmelerin her zaman kayıt altına alınması ve deşifre edilmesi gereklidir. Bu çalışmada yapılan tüm görüşmeler hem ses hem de video kaydına alınarak araştırmacının kendisi tarafından deşifre edilmiştir. İkinci geçerlik biçimi *yorumlama*'dır. Yorumlamanın en büyük tehdi, kişinin oluşturduğu anlamı, o kişinin çalışma perspektifini veya yüklediği anlamları dikkate almadan uygulamaya koymaktır. Bu durum, katılımcıların anlattıklarını dikkatle

dinlememek, katılımcılara kısa ve kapalı sorular sormak gibi kendi perspektiflerini ortaya koymayı engelleyici birçok yolla ortaya çıkar. Bu çalışmada katılımcılar araştırmacının çalıştığı devlet üniversitesinde öğrenim gören öğretmen adaylarından oluşmuştur. Bu anlamda araştırmacı katılımcıların içerisinde buldukları fiziksel ortam, çalışma alanları, işledikleri dersler, gibi birçok bilgiye sahip olmuştur. Görüşme formları hem bu koşullar dikkate alınarak, hem de katılımcıların seviyesine uygun olacak biçimde benzer çalışmalardan derlenerek hazırlanmıştır. Görüşmelerin hepsi açık uçlu sorulardan oluşmuştur. Görüşmeler sonunda her katılımcıdan yazdıklarını kontrol etme, emin olmadığı durumları tekrar inceleme şansı verilmiştir. Dolayısıyla katılımcılara kendi perspektiflerini yansıtmaya şansı verildiği düşünülmektedir. Dikkat edilmesi gereken üçüncü geçerlik biçimi ise *teori*'dir. Bu çalışmada geçerliği ve güvenilirliği kanıtlanmış ve 1998 senesinden bu dünyada yaygın olarak kullanılan Sowder ve Harel'in (1998) ispat şeması sınıflandırması kullanılmıştır. Bu yüzden teorik geçerliğin sağlandığı düşünülmektedir. Yıldırım ve Şimşek'e (2008) göre araştırma alanına olan yakınlık, yüz yüze görüşmeler yoluyla doğal ortam içinde bilgi toplama, elde edilen bulguların onaylanması için alana geri gidebilme ve ek bilgi toplama olanağının olması nitel araştırmada geçerliği oluşturmayı sağlayan önemli özelliklerdir. Bu çalışma daha önce de bahsedildiği üzere Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda öğretmen adaylarıyla birebir görüşmeler vasıtasıyla gerçekleştirilmiştir. Öğretmen adaylarıyla öğrenim gördükleri doğal ortamlarında görüşmeler yapılmıştır. Bu görüşmelerde süre kısıtlaması olmamıştır. Dolayısıyla uzun süreli bilgi toplama olanağı elde edilmiştir.

Bu araştırma yazılı hale getirilirken toplanan verilerin nasıl toplandığına dair bilgiler, toplanma aşamaları, analizler ve görüşmelerden doğrudan alıntılara yer verilmiştir. Toplanan verilerin ayrıntılı olarak sunulması ve sonuçlara nasıl ulaşıldığının rapor edilmesi geçerliğin önemli ölçütleri arasında yer almaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2008).

3.7.1.1. İç geçerlik.

İç geçerlik, gözlemlendiği sanılan olaylar ya da anlaşıldığı düşünülen olgulara ilişkin yorumlamaların gerçek durumu yansıtmaması ile ilgilidir. İç geçerlik konusunda araştırmacıların, veri toplama süreçlerinde ve verilerin analizi ve yorumlanması süreçlerinde tutarlı olması ve bu tutarlılıkla ilgili ayrıntıları ortaya koyması gereklidir. Araştırmacının araştırma süreçlerini eleştirel bir bakışla devamlı olarak analiz etmesi ve bulgularının gerçeği yansıtmaya derecesini kontrol etmesi gereklidir. Bu kontrollerin yapılma aşamaları ayrıntılandırılmalı ve açık ve anlaşılır biçimde ortaya konmalıdır (Yıldırım ve

Şimşek, 1998). Miles ve Huberman (1994) iç geçerliği sağlayabilmek için bazı sorular sormuş ve bunlara yanıt aranması gerektiğini belirtmiştir. Örneğin Miles ve Huberman'a (1994) göre sunulan verilerin önceki ya da yeni geliştirilen kuramla doğru ilişkilendirilip ilişkilendirilemediği sorusunu sormuştur. Araştırmanın verileri, Pamukkale Üniversitesi'nde Matematik Eğitimi Anabilim Dalı'nda öğrenim gören öğretmen adaylarından sağlanmıştır. Verilerin elde edildiği ortam üniversite ortamıdır ve öğretmen adaylarının ispat şemalarının ortaya çıkarabilmesi için uygundur. Öğretmen adaylarının ispat şemaları bu ortam içerisinde ele alınmıştır. Araştırmada tüm öğretmen adaylarının tepkileri (boş ve anlamsız cevaplar hariç) bir ispat şemasına sınıflandırılabilmiştir ve kendi aralarında tutarlı ve anlamlı olduğu düşünülmüştür. Sunulan verilerin önceki kuramla yani Sowder ve Harel'in (1998) geliştirdiği ispat şeması sınıflandırmasıyla uyum içinde olduğu düşünülmektedir. Miles ve Huberman (1994) iç geçerlik için araştırmada kullanılan tanımların bağlam bakımından zengin olup olmadığı sorusunu sormuştur. Araştırmada bağlam bakımından zengin tanımlara yer verilmiştir, tanımların anlamları açıkça ortaya konmaya çalışılmıştır. Miles ve Huberman (1994) karşıt açıklamaların dikkate alınıp alınmamasının önemini vurgulamıştır. Bu araştırmanın bulguları yorumlanırken diğer araştırma bulgularına yer verilmiş, karşıt bulgular ile bu araştırma bulguları arasındaki farklılıklar ortaya konularak tartışılmıştır. Yine Miles ve Huberman (1994) araştırmada tahminler yapılıp yapılmadığını ve bu tahminlerin ne kadar uygun olduğunun sorulmasının iç geçerlik için önemli olduğunu belirtmiştir. Çalışmada bulgular tartışıldıktan sonra gelecek için araştırmacılara öneriler sunulmuş, hangi çalışmaların daha yararlı olabileceğine dair tahminlere yer verilmiştir. Dolayısıyla bu çalışmada Miles ve Huberman'ın (1994) altını çizdiği bazı koşulların sağlanarak iç geçerliğin güçlendirildiği düşünülmektedir.

Nitel araştırmada araştırmacının esnek olması ilkesi geçerlik konusunda önemli bir kazanımdır. Araştırmacı araştırma sürecinde gerekli gördüğü takdirde, yeni stratejilere başvurabilir; görüşmeye yeni sorular ekleyebilir; daha önce planlanmayan yeni görüşmeler yapabilir; elde ettiği bilgileri teyit etmek amacıyla farklı veri toplama yöntemleri kullanabilir. Tüm bu özellikler araştırmacının iç geçerlik konusunda duyarlı olmasını ve gerekirse buna yönelik ek önlemler almasını gerektirmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 1998, s. 256).

Bu araştırmada araştırmacı tüm süreç boyunca esnek olmaya çalışmıştır. Pilot uygulamanın sonrasına kadar geçen süreçte çalışma devamlı geliştirilmiş, ölçme araçları

revize edilmiş, sorular eklenip çıkartılmıştır. Bunun yanında analitik aksiyomatik ispat şeması ile analitik dönüştürülebilir ispat şeması arasındaki farkları daha net ortaya koyabilmek için ek uzman görüşleri alınmış, güncel çalışmalar tekrar taranmış, araştırma yapılan üniversitenin Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı'nda görev yapan iki araştırma görevlisiyle ikinci bir pilot uygulama yapılarak ölçme araçları son haline getirilmiştir. Bunun yanında bu uygulamalar araştırmacının konuyu daha iyi tanmasına ve uygulama öncesi nelerle karşılaşacağı hakkında daha fazla bilgi almasına sebep olmuştur. Bu anlamda araştırmacının çalışmanın iç geçerliğini yükselttiği düşünülmektedir.

3.7.1.2. Dış geçerlik.

Dış geçerlik araştırma bulgularının genellenebilir olup olmadığıyla ilgilidir. Eğer bir araştırmanın sonuçları diğer bağlamlarla uyum içerisindeyse ve dönüştürülebiliyorsa ve nitel araştırmalarda bir dereceye kadar genellenebiliyorsa araştırmanın dış geçerliğe sahip olduğu söylenebilir. Nitel araştırmalarda sayısal genelleme yerine analitik genelleme vardır. (Miles ve Huberman, 1994). Miles ve Huberman (1994) dış geçerliğe sahip olunması için bazı sorulara yanıt verilmesi gerektiğini söylemiştir. Bu sorulardan bazıları araştırma örnekleminin, ortamının ve süreçlerinin özellikleri diğer örneklerle uygun biçimde karşılaştırabilecek yeterlikte tanımlanıp tanımlanmadığı ile ilgilidir. Bu çalışma öğretmen adaylarına üniversite ortamında dönem içerisinde uygulanmıştır. Çalışmada katılımcıların hangi örneklem seçme yöntemiyle oluşturulduğu, araştırma ortamının ve araştırma sürecinin özellikleri ayrıntılı olarak anlatılmıştır. Bir diğer soru ise çalışmanın bulgularının önceki kuramla uyumlu, ilişkili ve önceki kuramı doğrulayabilir ölçüde olup olmadığıyla ilgilidir. Elde edilen veriler ilgili alan yazında kabul edilmiş Sowder ve Harel'in (1998) ispat şemaları sınıflandırmasına göre sınıflandırılmıştır. Araştırmanın bulgularına göre öğretmen adaylarının ispat şemalarının daha önce başka çalışmalarda ortaya çıkarılan ispat şemalarıyla tutarlı olduğu; yani araştırma sonuçlarının, araştırma sorusu ile ilgili kuramlarla tutarlı olduğu söylenebilir. Miles ve Huberman (1994) çalışma bulgularının daha sonra yararlı biçimde test edilebileceği raporlanmış olup olmadığı sorusuna yanıt aranması gerekliliğini vurgulamıştır. Bu çalışma bulgularının başka üniversitelerde diğer öğretmen adaylarına uygulanabilir nitelikte olduğu; yani araştırma bulgularının benzer ortamlarda kolaylıkla test edilebilir olduğu düşünülmektedir. Araştırmanın bulgularının, kuramla ve bu konuda yapılmış benzer çalışmalarla uyumlu olduğu için başka çalışmalar tarafından yararlanılabilir düzeyde olduğu söylenebilir.

Bunun yanında araştırma yazılı hale getirilirken veri analiz süreci ayrıntılı biçimde ele alınmıştır. Veri analiz süreci şematize edilmiştir. Araştırmanın bulguları ve bulgular hakkındaki tartışmalar ayrıntılarıyla raporlanmıştır. Dolayısıyla araştırmanın dış geçerliği sağlayacak şartları büyük ölçüde yerine getirdiği düşünülmektedir.

3.7.2. Güvenirlik

Güvenirlik kavramı bulguların tekrarlanabilirliğiyle, çalışma tekrarlandığında aynı sonuçların sağlanmasıyla ilgilidir. İnsan davranışı hiçbir zaman sabit değildir ve nitel araştırmalar insan davranışını dışlamak istemez. Bunun yerine dünyayı insan davranışıyla açıklamak ve yorumlamak ister. Fakat bunun için tekrarlanmış ölçümlerle geleneksel anlayışla bir güvenilirlik oluşturmak için bir ölçüt yoktur (Merriam, 1990b). Durum çalışmalarında sık rastlanan bir güçlük bir durumu diğerine genellemenin zor olmasıdır. Bunun için çalışmalarda güvenilirliği sağlamak için ince detaylarıyla kontrol edilecek işlemsel basamaklar oluşturmak yararlıdır (Yin, 2003).

3.7.2.1. Dış güvenilirlik.

Le Compte ve Goetz (1982) araştırmalarda verilerin dış güvenilirliğini sağlamak için beş temel problemle uğraşmak gerektiğini belirtmişlerdir.

1) Araştırmacının durumu: Araştırmacının çalışılan grupta hangi pozisyonda olduğu ile ilgilidir. Bu çalışmada araştırmacının görüşmeci pozisyonunda olduğu ve katılımcılarla aynı devlet üniversitesinde hangi görevle bulunduğu açıkça belirtilmiştir.

2) Katılımcı seçimleri: Bu seçimler araştırmacının rolü ile yakından ilişkili olmakla beraber veri sağlayacak katılımcıları belirlemekle ilgilidir. Bu çalışmada katılımcılar amaçlı örnekleme yöntemi ile seçilmiş olup seçilme biçimleri detaylıca anlatılmıştır.

3) Sosyal durum ve koşullar: Verilerin toplandığı sosyal bağlam önemlidir. Katılımcıların içinde buldukları bazı ortamlar onların uygun veri sağlamasına neden olurken, başka ortamlarda aynı rahatlık yakalanmayabilir. Bu çalışmada katılımcılarla daha önceden tanışık olan kendi ortamlarında görüşme yapılmıştır.

4) Analitik yapılar ve dayanaklar: Araştırmacı önceki bir çalışmanın sosyal bağlam ve katılımcılarını çoğaltıp ilişkilerini tekrar yapılandırırsa bile eğer orijinal araştırma hakkında bilgi veren yapılar, tanımlar ve analiz birimleri kendine özgüyse ve iyi tanımlanamadıysa o çalışmanın tekrarlanması imkânsız olur. Bu çalışmada ispat şemalarının belirlenebilmesi için Sowder ve Harel'in (1998) teorik çatısı kullanılmıştır.

Çalışmanın her evresinde bu çatıyla ilişkili detaylı açıklamalara yer verilmiştir. İlgili alan yazında bu çatıyı kullanan araştırmalar ayrıntılı biçimde anlatılmıştır.

5) Veri toplama ve analiz yöntemleri: Araştırmacı veri toplama ve analiz yöntemleri açık ve ayrıntılı biçimde anlattığında ortaya çıkan çalışmanın diğer çalışmalar tarafından tekrar edilirliliği yüksek olmaktadır. Araştırmacı, araştırmanın yöntemini ve aşamalarını açık biçimde ifade etmiştir; verilerin nasıl toplanacağı, nasıl işleneceği, nasıl yorumlanacağı ve nasıl sonuçlara ulaşılacağı detaylıca anlatılmıştır. Uygulama sonuçları, ortaya konulmuş olan verilerle açık biçimde ilişkilendirilmiştir; ham veriler başkası tarafından incelenebilecek şekilde muhafaza edilmiştir. Araştırmada tartışma bölümünde benzer çalışmalardan aynı ya da farklı sonuçlara ulaşan çalışmalar ele alınmış ve benzerlikler ve farklılıkların nedenleri tartışılmıştır. Yani, araştırmada farklı görüşler ve alternatif açıklamaların dikkate alındığı söylenebilir. Tüm bunların araştırmanın dış güvenilirliğini arttırdığı düşünülmektedir.

3.7.2.2. İç güvenilirlik.

İç güvenilirlik için en önemli olgulardan biri puanlayıcılar ve gözlemciler arası güvenirliliktir. Farklı gözlemcilerin anlam gruplarının; içinde buldukları ortamı aynı yolla tanımlamak ve onlar hakkında aynı bulgulara ulaşabilmek için ne ölçüde uyumlu oldukları iç güvenilirlik için çok önemlidir. İç güvenirliliği tehdit eden unsurların azaltılması için beş strateji kullanılabilir (Le Compte ve Goetz, 1982). Bunlardan ilki “zayıf çıkarım tanımlayıcıları” (low inference descriptors)’dır. Buna göre çalışmalarda kullanılan tanımlayıcılar somut ve kesin olmalıdır. Bu tür tanımlayıcılar temel gözlemsel veri sağlarlar. Elde edilen veriler yorumsuz biçimde sunulmalı yorumları ayrıca sonradan yapılmalıdır. Bu çalışmada toplanan veriler öncelikle yorum katmadan okuyucuya sunulmuştur. Verilerin yorumu daha sonra yapılmıştır. İkinci strateji ise “farklı araştırmacılar” (multiple researchers) olarak belirlenmiştir. Buna göre araştırmada verilerin toplanması, analiz edilmesi gibi durumlarında birden fazla araştırmacının dâhil edilmesinin araştırmanın iç güvenirliliğini yükselteceği düşünülmektedir. Üçüncü strateji “katılımcı araştırmacılar” (participant researchers) olarak tanımlanmıştır. Buna göre gözlemcinin gördüklerini katılımcıların ve araştırmacının gözünden aynı biçimde ve tutarlı şekilde görüldüğünün teyit edilmesi ve kaydedilmesi önemlidir. Araştırmacılar bazı durumlarda katılımcıları söz sahibi yaparak alan notları ve araştırmacının yanlış algılarını ve yanlış yorumlarını düzeltmek için kullanmakta ve iç güvenirliliği artırmaktadırlar. Bu çalışmada verilerin analizinde öğretmen adaylarının tepkilerinin ispat şemalarına sınıflandırılmasında

iki araştırmacıdan yardım alınmıştır. Dördüncü strateji ise "eř değerlendirme (peer examination) olarak belirlenmiştir. Bu stratejiye göre benzer ortamlarda çalışma yürüten araştırmacılarla bulguların doğrulanması i güvenirliliği artırabilmektedir. Çalışmada Harel ve Sowder (1998) ve Sowder ve Harel (1998) tarafından oluşturulan ve ilgili alan yazının hemen hemen hepsinde kullanılan ispat şeması sınıflandırması kullanılmıştır. Dolayısıyla, birden fazla araştırmacının öğretmen adaylarının ispat şemalarını aynı zaman diliminde birbirine yakın biçimde ölçebileceği düşünölmektedir. Son strateji ise "mekanik olarak kaydedilen veriler" (mechanically recorded data) olarak belirlenmiştir. Buna göre verileri kaydetmek için farklı ölçme araçlarının kullanımı, video kaydı, ses kaydı yapan araçların veri toplarken kullanılması bulguların doğruluğunu sağlayarak bu bulguların diğer araştırmacılar tarafından da onaylanmasını mümkün kılmaktadır. Bu çalışmada görüşmeler boyunca öğretmen adayları hem video hem ses kaydına alınmıştır. Öğretmen adaylarının İSF'ye verdikleri yazılı yanıtlar toplanarak değerlendirilmiştir. Ayrıca öğretmen adaylarına birden çok veri toplama aracı yöneltilmiştir. Bunların yanında araştırma soruları açık biçimde ifade edilmiştir, araştırmacının araştırma sürecindeki kendi konumu "Araştırmacının Rolü" başlığı altında açık biçimde tanımlanmıştır;

Öğretmen adaylarına yöneltelen sorular kendi düzeylerinde cevaplayabilecekleri biçimde ve her bir ispat şemasını kapsayacak biçimde hazırlanmıştır. Yani ölçme aracının araştırmanın amacına uygun biçimde oluşturulduğu söylenebilir. Gerçek uygulamada veriler araştırmanın amacına uygun şekilde ayrıntılı biçimde toplanmıştır. Bunun için gerçek uygulamada iki yardımcı araştırmacı dâhil olmak üzere veriler üç araştırmacı tarafından kontrol edilmiştir. Tüm bunların araştırmanın i güvenirliliğini artıran unsurlar olduğu söylenebilir. Araştırma boyunca araştırmacının geçirdiği tüm süreçler ayrıntılı biçimde ele alınmaya çalışılmıştır. Bu çabanın çalışmanın geçerliliğini ve güvenirliliğini arttırdığı düşünölmektedir

3.8. Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmalarda araştırmacı veri toplama ve veri analizi için temel kaynaktır. Araştırmacı anlamlı bilgi edinebilmek için fırsatlar sağlayarak bulunduğu duruma tepki verir. Veriler; anketler veya bilgisayarlar yerine bu insan aracı (human instrument) ile sağlanır (Merriam, 1990a).

Fakat nitel araştırmalarda tam nesnelliğin başarılması mümkün olmamaktadır. Bu yüzden araştırmacı, nesnelliği zedeleyecek önlemleri almalıdır. Bunun için standart veri

toplama araçlarıyla çalışmak yararlı olabilir. Nitel araştırmalarda önemli olan araştırmacının konumunu ve tutumunu yani kendi rolünü açık biçimde belirlemesi ve sonuçlara ulaşma yöntemlerini ayrıntılı biçimde ortaya koyabilmesidir. (Yıldırım ve Şimşek, 1998).

Araştırmacı; öğretmen adaylarının ispat şemalarını ortaya çıkarırken, nesnelliği zedeleyecek önlemleri almak için; öncelikle birçok kaynakta yıllardır kullanılan, geçerliği ve güvenilirliği kanıtlanmış olan Sowder ve Harel'in (1998) sınıflandırmasını kullanmıştır. Veri toplama aşamasında nesnelliği korumak için öğretmen adaylarına yönlendirici olmayan sorular yönelttiği klinik görüşmelerin bir çeşidi olan görev temelli görüşmeler yapmıştır. Araştırmacı verileri deşifre ederek bulguları ortaya koyduktan sonra kendi yorumunu ortaya koymuş ve çalışmanın tartışma bölümünü oluşturmuştur.

Araştırmacı çalışmayı bizzat kendisi yürütmüştür. Görev Temelli Görüşme Soruları Formu ve İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu, ilgili alanyazından yararlanılarak ve uzman görüşü alarak hazırlanmıştır. Araştırmacı hazırlamış olduğu Görev Temelli Görüşme Soruları Formu'nu öğretmen adaylarına görev temelli görüşmeler aracılığıyla yöneltmiştir. Bunun yanında öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin ispat şemalarını belirlemek için İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu'nu klinik görüşmeler aracılığıyla yöneltmiştir. Öğretmen adayları araştırma boyunca araştırmacının görev yaptığı üniversitenin aynı bölümünde öğrenim görmüşlerdir. Bu anlamda araştırmacı öğretmen adaylarıyla aynı ortamda olmuştur. Bu durum araştırmacıya öğretmen adaylarıyla daha kolay iletişime geçebilme, istenildiği vakit daha ayrıntılı ve doğru bilgi alma, yanlış alınmış olan bilgiyi düzeltme şansı tanımıştır.

Araştırmacı ilgili konuyu daha önce vermiş olduğu seminer derslerinden itibaren çalışmaya başlamıştır. Alanyazını tanıdıkça ve ispat şemalarını Türkiye'de ve yurtdışında başka bir değişken olmadan deneysel olmayan bir yaklaşımla durum çalışması kullanarak belirleme yoluna giden çalışmaların nadir olmasını keşfettikten sonra öğretmen adaylarının ispat şemalarını ortaya çıkarmaya karar vermiştir. Bunun için ilgili alanyazından ispat şemaları örnekleri bulmaya çalışmış ve öğretmen adaylarının tepkilerini ilgili ispat şemalarına sınıflandırabilmek için bir anahtar hazırlamıştır. Pilot uygulamadan sonra öğretmen adaylarının hiçbirinin hiçbir cevabında analitik aksiyomatik ispat şeması saptayamadığı için ve analitik aksiyomatik ispat şeması ile analitik dönüştürülebilir ispat şeması arasındaki farkı daha net ortaya çıkarılabilmek için ispat uygulamalarında deneyimli olan kişilerle görüşmek gerektiğine karar vermiştir. Pamukkale Üniversitesi

Matematik Eğitimi yüksek lisans ve doktora programında öğrenim gören ve aynı zamanda araştırma görevlisi olan iki kişiye daha Görev Temelli Görüşme Formu'nu uygulamıştır. Bunun yanında araştırmacı ilgili alanyazındaki yeni kaynaklara ulaşmış, daha önce yapılmış olan tezlerden bilgi edinmiştir. Böylece uygulama öncesi bu iki şema arasındaki farkın daha net biçimde ortaya çıkmasını sağlamıştır. Bu da araştırmacının ilgili konuyu daha yakından tanımasına ve anlamasına sebep olmuştur. Bu açıdan bakıldığında araştırmacının araştırmaya entegre olarak Merriam'ın (1990a) çalışmasında bahsedilen insan aracı (human instrument) görevini gördüğü söylenebilir.

Araştırmacı pilot uygulama sonrasında öğretmen adaylarının tepkilerini uygun ispat şemalarına yerleştirmek için içerik analizi yöntemini kullanmıştır. Öğretmen adaylarının tepkilerinin yazılı metinler halinde elinde bulunmasından dolayı araştırmacı öncelikle yazılı metinleri soru bazında okumuş fakat uygun sınıflandırmayı yapabilmek için öncelikle verilen cevapları belirli temalara ayırmak durumunda kalmıştır. Öncelikle içerik analizinde kodlamalar yaptıktan sonra bu kodlamaları ispat şemalarına götüren unsurlar altında ele alarak ispat şemaları altında sınıflandırmıştır. Araştırmacı daha sonra öğretmen adaylarıyla yaptığı yüz yüze görüşmeler sonrasında ispat şemalarının görüşme ortamında daha doğru ve güvenilir biçimde sınıflandırabileceği sonucuna varmıştır. Görüşmeler esnasında araştırmacı aklındaki soruları öğretmen adaylarına yöneltebilmiş ve anında cevap alabilmiştir. Bunun yanında öğretmen adayları bilemedikleri ya da o an cevap veremedikleri durumlarda tekrar başa dönerek araştırmacıyla beraber soruları tekrar değerlendirme şansına sahip olmuşlardır. Bu yüzden uygulamada İspat Soruları Formu'nu önceden dağıtıp cevapları yazılı halde almak yerine araştırmanın güvenilirliğini yükseltmek amacıyla tüm uygulamanın görev temelli görüşmeler şeklinde yapılmasına karar verilmiştir. Böylelikle araştırmacı uygulama sırasında öğretmen adaylarıyla görüşerek onların ispat şemaları hakkında o anda tahminde bulunma şansı yakalamış, onlara ek sorular yöneltilmiş ve analizlerde verilen tepkileri ispat şemaları altında daha doğru biçimde sınıflandırma şansı yakalamıştır. Araştırmacının bu kararının öğretmen adaylarının ispat şemalarının daha doğru biçimde ortaya çıkarılmasına ve dolayısıyla araştırmanın güvenilirliğine katkıda bulunduğu düşünülmektedir.

Araştırmacı matematik eğitimi alanında aldığı yüksek lisans ve doktora eğitimi boyunca nitel araştırmaları konu alan derslere katılarak nitel araştırma yöntemleri ve uygulama alanları konusunda yöntemsel bilgi almış ve bu konuda yeterlik kazanmaya çalışmıştır. Bunun yanısıra bu doktora tezini hazırlama süreci içerisinde tez izleme

dönemlerinde, tez izleme jürisinde bulunan nitel araştırma konusunda bilgi ve deneyim sahibi öğretim elemanı ile yapılan fikir alışverişleri sayesinde tez sürecinin doğru biçimde yapılandırılmasına yönelik destek almıştır. Bu anlamda araştırmacının nitel araştırma yeterliğinin sağlandığı düşünülmektedir.

Bunun yanında araştırmacı bu tez çalışmasından önce çeşitli ulusal ve uluslararası kongrelerde nitel araştırma desenlerine sahip ve ispat konusunu içeren çalışmalar yaparak hem nitel araştırmalar konusunda hem de ispat konusunda deneyim sahibi olmuştur.



DÖRDÜNCÜ BÖLÜM: BULGULAR VE YORUM

Bu bölümde öğretmen adaylarının tek oturumda gerçekleştirilen görev temelli görüşmelerde ve ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde ispat şemalarının belirleyicisi olan tepkileri sunulmuştur. Bu bölüm “Görev Temelli Görüşmelere Ait Bulgular ve Yorum”, “İspatın Doğasına Ait Bulgular ve Yorum” ve “Görev Temelli Görüşmelerde ve İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerde Öğretmen Adaylarının İspat Şemalarını Ortaya Koyan Düşüncelerinin Beraber Değerlendirilmesine İlişkin Bulgular ve Yorum” olmak üzere üç ana bölümden oluşmuştur. İlk iki bölümde öğretmen adaylarının görüşmelerde sergiledikleri ispat şemaları, bu ispat şemalarının alt sınıflandırma şemaları ve bu şemalara ilişkin göstergeler sunulmuş ve açıklanmıştır. Bu bölümlerin her birinin sonunda öğretmen adaylarının görüşmelere ilişkin ispat şemalarının genel değerlendirilmesine ait bulgulara yer verilmiştir. En son bölümde ise öğretmen adaylarının tüm görüşmelerde sergiledikleri ispat şemalarının beraber değerlendirilmesine ilişkin bulgulara yer verilmiştir.

4.1.Görev Temelli Görüşmelere Ait Bulgular ve Yorum

Aşağıdaki bölümlerde, öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde ispat şemalarının belirleyicisi olan tepkileri sunulmuştur. Öğretmen adayları, görev temelli görüşmelerde ispat şemalarının alt sınıflandırmalarının özelliklerini İspat Soruları Formu'nun (İSF'nin) belirli sorularında ortaya koymuşlardır. Öğretmen adaylarının ispat şemalarının göstergesi olan düşünceleri açıklanırken görüşmelerden elde edilen alıntılara yer verilmiştir. Bu alıntılar öğretmen adaylarının sözlü ifadeleri ya da ispatlarını yapılandırırken yazılı çözüm yolları (Örn. Şekil 4.1 gibi) olarak sunulmuştur. Öğretmen adaylarının görüşmelerinden elde edilen alıntılarının ispat şeması olarak nitelendirilebilecek bölümlerin dikkat çekici kısımları koyulaştırılmıştır. Alıntıların bazı bölümlerinde öğretmen adaylarına yöneltilen soruların hangi veri toplama aracına ait olduğu cümlelerin sonunda parantez içinde yazılmıştır. Örneğin öğretmen adayına Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu'ndan alınan bir soru yöneltilmişse bu sorunun sorulduğu cümlelerin sonuna (GİGF), İspat Süreçlerine İlişkin Görüşme Formu'ndan alınan bir soru yöneltilmişse bu sorunun sorulduğu cümlelerin sonuna (İSGF) yazılmıştır. Öğretmen adaylarının İSF'deki sorulara verdikleri yanıtlara ilişkin ifadeleri ispat şemaları altında, bu ispat şemaları altındaki ifadeleri ise ispat şemalarının göstergeleri olarak sınıflandırılmıştır. Görev temelli görüşmelerde öğretmen adaylarının temel ispat şemaları çalışmanın Yöntem bölümünde veri analizinde temalar olarak ve alt sınıflandırmaları alt temalar olarak, bu ispat şemalarının göstergeleri veri analizinde ortaya

çıkan kodlar olarak tanımlanmıştır ve bu tanımlamalar ilgili bölümde (Tablo 3.2) sunulmuştur.

Aşağıdaki başlıklarda öğretmen adaylarının her bir ispat şemasının alt sınıfına dâhil olan ifadeleri, bu ifadelerin ispat şemaları sınıflandırmaları (temalar ve alt temalar) ve ispat şemalarının göstergeleri (veri analizi kodları) olarak alt başlıklar halinde sunulmuştur. Bu sınıflandırmalara ilişkin bilgiler her bölümün başında okuyucuya tablolar halinde verilmiştir.

4.1.1. Görev Temelli Görüşmelerde Öğretmen Adaylarının Dışsal İspat Şemalarını Ortaya Koyan Yanıtları

Bu bölümde öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde dışsal ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları incelenmiştir. Öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde dışsal ispat şemalarının alt sınıfları olan dışsal otoriter ispat şemasını, dışsal sembolik ispat şemasını ve dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir. Öğretmen adaylarının dışsal ispat şemalarının göstergelerine ilişkin dağılımları Tablo 4.1’de yer almaktadır. Bunun yanında öğretmen adayları alt sınıflamalara dâhil edilemeyecek nitelikte yalnızca dışsal ispat şeması olarak değerlendirilebilecek tepkiler de sergilemişlerdir.

Tablo 4.1.

Öğretmen Adaylarının Görev Temelli Görüşmelerde Sergiledikleri Tepkilerin Dışsal İspat Şemalarının Göstergelerine İlişkin Dağılımları

İspat Şeması (Temalar)	İspat Şemasının Alt Sınıflandırma Şemaları (Alt Temalar)	İspat Şemasının Göstergeleri (Kodlar)	Öğretmen Adayı (Soru No)			
Dışsal İspat Şeması	Dışsal Otoriter İspat Şeması	İzlediği yol hakkında derslerden öğrendiklerine atıf yaparak açıklama yapma	Semiha (8) Hamra(1)			
	Dışsal Sembolik İspat Şeması	İspatı yapılandırırken sembollerini anlamsızca manipüle etme	Derya (3)			
	Dışsal Alışkanlık Edinilmiş İspat Şeması	Dışsal Alışkanlık Edinilmiş İspat Şeması	İşlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakma	Semiha (1) Derya (1)		
			Sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama	Semiha(5) Derya(1,3,5) Hamra (4)		
		Dışsal Alışkanlık Edinilmiş İspat Şeması	Dışsal Alışkanlık Edinilmiş İspat Şeması	İspatı yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullanma	Semiha(2,3) Derya(2)	
				Kullandığı yöntem hakkında yanlış bilgiyle ispatı yapılandırma	Semiha (3)	
			Dışsal Alışkanlık Edinilmiş İspat Şeması	Dışsal Alışkanlık Edinilmiş İspat Şeması	İspatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerak yargılama	Hamra (5)
					Genel ifadelerle yüzeysel deliller sunma	Hamra (8)

4.1.1.1. Öğretmen adaylarının dışsal otoriter ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları.

Öğretmen adaylarından Hamra İSF'nin birinci sorusunda ve Semiha İSF'nin sekizinci sorusunda dışsal otoriter ispat şemasını ortaya koyan tepkilerde bulunmuşlardır. Bu ifadeler Tablo 4.1'den de görülebileceği üzere, öğretmen adaylarının “İzlediği yol hakkında derslerden öğrendiklerine atıf yaparak açıklama yapma” olarak sınıflandırılan ispat şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Bu göstergeye ilişkin ayrıntılar aşağıda alt başlık altında sunulmuştur:

4.1.1.1.1. Öğretmen adaylarının izledikleri yol hakkında derslerden öğrendiklerine atıf yaparak açıklama yaptıkları durumlar.

Hamra “Herhangi üç pozitif ardışık tam sayının çarpımının her zaman 6'nın katı olduğunu gösteriniz” olan birinci ispat sorusunu okuduktan sonra üç tane n , $n+1$, $n+2$ ardışık sayı ifadelerini almış ve bu ardışık sayıların bir fazlalarını alarak bunların çarpımını $6k$ sayısına eşitlemiştir. Hamra'ya izlediği yol hakkında sorular sorulduğunda genellikle “böyle yapıyorduk... böyle hatırlıyorum” gibi yanıtlar vermiştir. Bunun üzerine “nerede yapıyordunuz?” ya da “nereden hatırlıyorsun?” diye sorulunca derslere atıfta bulunmuştur. Hamra'nın ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:

Hamra (H): Üç ardışık sayı çarpılınca..... n , $n+1$, $n+2$ çarpılıncasonra n 'ye... mesela şu an $k+1$ veriyorduk.... $n+1$ veriyorduk.

Araştırmacı (A): Veriyorduk dedin...Nerede veriyordunuz?

H: Hmmm... sanki... **derslerde böyle bir şey işlemiştik** ...evet evet $n+2$ çarpı $n+3$ $6k$

A: Bu arada zaman sınırlaması yok yani rahat rahat yapabilirsin.

H: n 'ye 1 veriyordum şu an **hatırladım** 1 çarpı 2 çarpı 3 eşittir 6'nın katı bu sağladı. Sonra şunu çarpıp şunları **yapacaktım**.... $2n$ artı n artı 2 ...çarpı..... $n +3$... aslında şunla şu...aynı.... O zaman şöyle diyeyim.... $\frac{6k}{n}$ çarpı $n+3$ eşittir..... 6'nın bir katı mı acaba.

A: Şimdi ne yaptığını anlatır mısın?(İSGF)

H: Şöyle yaptım...imm.... Şu şekilde yazdım... n ... $6k$ sonra $n+1$ ile $n+2$ 'yi çarpınca buradan çekildi yani şunun yerine $\frac{6k}{n}$ yazdım .

A: Neden?(İSGF)

H: n 'nin yerine $n+1$ yazdım.

A: Hah niye ki?

H: Niye ki..... **böyle hatırlıyorum** ... sanki böyle ... **ispatlama sorularında ilk önce 1 veriyorduk sonra n sonra $n+1$ ispatlama için üç yöntemde.....üç aşamalı ispatlamada... şu an ismini bilmiyorum ama şu şekilde yaptığımızı hatırlıyorum sadece** ...yani buna benzer şekilde...sonra $n+1$ $n+2$ 'nin yerine.

A: Yaptığımızı nereden hatırlıyorsun?

H: **Dersten....mesela genel matematik dersinde de ispat ...buna benzer ispatlar yapmıştık Elemanter'de de bu şekilde bir yol izlemiştik.**

Hamra'nın yanıtlarında tümevarımsal akıl yürütme kullandığı fakat kendisine nasıl yaptığıyla ilgili sorular sorduğunda tümevarımsal akıl yürütmenin anlamına hâkim

olmadığı görülmüştür. Hamra'nın yukarıdaki gibi açıklamalarını ispatının büyük bölümünde sürdürdüğü görülmüştür. Aşağıda bu durumla ilgili ifadeleri yer almaktadır:

H: Hmmm ... ben... bana göre ispatlamıştım artık ben üç sayının ardışık üç sayının 6'ya bölünmesini bölünebileceğini ama şu an bölünemiyor.... **Belki de bölünemiyor yani.**

A: Belki de bölünemiyor.

H: Bu kesin.... **Bu kesin değil değil mi?** [soru kökünü gösterir] 6'ya bölünebildiği?

A: Yani onun öyle olduğunu gösteriniz demişiz .

H: Evet... ben gösteremedim.... yani 6'ya da bölünmeyebilir çünkü normal.... **pat diye çıkması lazım.**

Hamra'nın ispatına ilişkin bir kesit aşağıdaki Şekil 4.1'de yer almaktadır.

$$\begin{aligned}
 n(n^2 + 2n + 2) &= n^3 + 2n^2 + 2n = 6k \\
 n^3 + 3n^2 + 2n^2 + 6n + n^2 + 3n + 2n + 6 &= 6t' \\
 n^3 + 6n^2 + 11n + 6 &= 6t' \\
 \Rightarrow \underbrace{n^3 + 2n^2 + 2n}_{6k} + \underbrace{4n^2 + 9n + 6}_{6t'} &= 6t'
 \end{aligned}$$

Şekil 4.1. Hamra'nın İSF'nin birinci sorusuna ilişkin yanıtı

Hamra'ya sorulduğunda ispatının doğru olduğuna emin olduğuna yönelik ifadeler verdiği görülmüştür. Aşağıda buna ilişkin açıklamaları yer almaktadır:

A: Böyle yaparsan peki ispatlamış olur musun?

H: Bence böyle yaparsam ispatlamış olurum çünkü düşünüyorum **sanki hep böyle yaptık ya başka metod kullanmadık yöntemin adını da bilmiyorum ama hep bu şekilde bir şeyler yaptık bu da benim aklıma gelmiyor ... daha güzel nasıl ifade edebilirim bilmiyorum ama.**

A: Hmmm peki bunun dayanağı ne? Neye dayanarak böyle yaptığını bana söyleyebilir misin?(GİGF)

H: Neye dayanarak bunu yaptığımı....yani **daha önce gördüğüm matematik derslerinde bu şekilde yaptığımızı hatırlıyorum sadece ama adını bile hatırlamıyorum.**

A: Anladım peki bunun neden doğru olduğunu düşünüyorsun?(İSGF)

H: Neden doğru olduğunu.... **Çünkü daha önce hiç yaptığımız hiç yanılmadı.**

Şekil 4.1'den de görüleceği üzere Hamra derslerden hatırladığını söylediği bilgileri kağıda aktarmış, gerekli gördüğü işlemleri yapmış fakat sonuca ulaşamamıştır. Yukarıdaki alıntılarda da gözlenebileceği gibi, Hamra'nın ispatı yaparken derslerden hatırladıklarıyla işlemlerini yapmaya çalıştığı, eşitliğin sağ tarafında 6'nın katını bulamadığında sorunun yanlış olabileceğini düşündüğü, ispatı yapılandıramayınca kendi akıl yürütmesini yargılamak yerine hatayı soru kökünde aradığı görülmüştür. Hamra ispatı yapamayınca "Pat diye çıkması lazım" demiştir. Bu ifadesi onun derslerde uygulanan yöntemlere bağlı olarak düşündüğünün bir göstergesi olabilir. Hamra'nın derslerden öğrendiği ve onu hemen sonuca ulaştırılan yöntemi uyguladığında bu ispat sorusunda da başarılı olacağını düşünmüş olabileceği ve ispatının doğruluğuna olan inancını yine derslerle ilişkilendirdiği

söylenbilir. Hamra'nın, kendi başına akıl yürütmeye çalışmadığı, ispatı tamamlayamayınca hatayı soru kökünde aradığı belirlenmiştir. Buradan Hamra'nın birinci soruya yönelik açıklamalarında dışsal otoriter ispat şemasını ortaya koyan tepkiler verdiği belirlenmiştir.

İSF'nin sekizinci sorusu olan "Asal sayıların sonsuz olduğunu gösteriniz" sorusu öğretmen adaylarına daha önce vize sınavlarında sorulmuştur. Bu yüzden bu soruya ilişkin bir hazır bulunuşluklarının olması beklenmiştir. Fakat hiçbir öğretmen adayı bu soruyu yanıtlanamamıştır. Sadece Semiha'nın bu ispatı derslerinde gördüklerini söylediği görülmüştür. Ancak Semiha ispatı "*hatırlamadığını*" belirtmiştir. Semiha'nın açıklamaları aşağıdaki gibidir:

Semiha (S): Hmmm bunu yapamam çünkü bunun bir ispatı vardı geçen sene görmüştük Elemanterde de.... ve ispatı hatırlamıyorum.

A: Niye yapamazsın? (İSGF)

S: Çünkü ispatı hatırlamıyorum bu ispatı görmüştük geçen sene hatırlamıyorum nasıl yapıyorduk p diyorduk $p_1 p_2$ Bunu çelişkiyle yapıyorduk galiba....yok öyle yapmıyorduk...yok bunu yapamam çünkü hatırlamıyorum.

A: Yapman için hatırlaman mı lazım?

S: Evet.

A: Neden?(İSGF)

S: Çünkü kendim bu konuda fikir yürütemem.

A: Niye?(İSGF)

S: Hmmm. Bir asal sayı sadece 1'e ve kendine bölünebilen sayıysa ... mesela asal sayımıza p diyelimo zaman $p+1$ asal sayı olmuyor mu desek....eee yok bunu yapamam $p+1$...çok çok saçmaladım yok bunu yapamam.

A: Hemen yapamam diyorsun neden ki?

S: Yani çünkü aklıma bir fikir gelmiyor o konuyla ilgili .

A: Biraz çabalasan olmaz mı? Olur mu?

S: Çabalasam.... Şimdi düşünsem.... Hani bir asal sayı sadece 1'e ve kendine bölünüyor şeklinde ...oradan... yok ...asal sayı olmayanlarla mı yapıyordun bu soru...asal sayının sonsuz olduğunu...bilemiyorum ispatını....ı ih.

Açıklamalarından da anlaşılacağı üzere Semiha'nın ispat için dış kaynaklı bir otorite olan Elemanter Sayı Kuramı dersine dayandırma ihtiyacı duyduğu söylenebilir. Dolayısıyla sekizinci soruya ilişkin yanıtlarında dışsal otoriter ispat şemasının göstergesi olan ifadelerinin olduğu belirlenmiştir.

4.1.1.2. Öğretmen adaylarının dışsal sembolik ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları.

Öğretmen adaylarından sadece bir tanesi (Derya) İSF'nin üçüncü sorusunda dışsal sembolik ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunmuştur. Bu ifadeler Tablo 4.1'den de görülebileceği üzere, öğretmen adaylarının "*İspatı yapılandırırken sembolleri anlamsızca manipüle etme*" olarak sınıflandırılan ispat şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Bu göstergeye ilişkin ayrıntılar aşağıda alt başlık altında sunulmuştur:

4.1.1.2.1. Öğretmen adayının ispata yapılandırırken sembolleri anlamsızca manipüle ettiği durumlar.

Derya İSF'nin üçüncü sorusu olan "Herhangi bir pozitif tamsayı n için eğer n^2 3'ün katıysa n 'nin de 3'ün katı olduğunu gösteriniz" sorusuna verdiği yanıtlarda farklı yolları denemiştir. Bu yolların bazılarında (4.1.1.3.2 başlığı altında) dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler de gösterdiği tespit edilmiştir.

Derya üçüncü soruya ilişkin yanıtlarında $3k$ 'nin karekökünü alırken $3^{1/2}$ sayısını 3'ün bir katı olarak kabul etmiştir. Aşağıda bununla ilgili açıklamaları yer almaktadır:

Derya (D): n^2 'yi 3'ün katı bir sayı olduğunu zaten bize vermiş, uuu... n^2 $3k$ diye düşündüm ... n 'ye gideceğimiz için n 'nin 3'ün katı olduğunu göstermemizi istediği için karekökünü aldım oradan da kök $3k$ geldi...uuu... buradaki $\sqrt{3}$ de zaten 3'ün $\frac{1}{2}$ katıdır...uu... o yüzden n de 3'ün bir katıdır

A: Hmmm n 3'ün $\frac{1}{2}$ katıdır mı diyorsun ?

D: Hı hı [evet anlamında].

A: Nereden biliyorsun bunu yani bunun $1/2$ katı olduğunu?(İSGF)

D: Imm... karekökünü aldığımız için ...kareyi yok etmek için...ya n 'yi soruyor bize n 'yi sorduğu için n 'ye ulaşmak için karekökünü almam gerekiyor, zaten diğer tarafta da 3 katı olduğunu vermişti ... her iki tarafın karekökünü aldığım zaman n $3k$ 'nin $\frac{1}{2}$ 'inci kuvveti geliyor... o da zaten 3'ün $1/2$ 'inci kuvveti, o da 3'ün bir katı olduğu için $1/2$ 'inci kuvveti olduğu için .

A: Hmmm yani 3'ün $1/2$ 'inci kuvveti 3'ün bir katı mıdır?

D: Evet [tereddüt etmez].

A: Nasıl?(İSGF)

D: Uu ya sonuçta katlar her zaman bir tamsayı olmak zorunda değil ...uu... rasyonel sayılar da olabilir .

A: Bir örnek verebilir miyiz buna?(İSGF)

D: Burada olduğu gibi hani 3'ün $1/2$ 'inci kuvveti de 3'ün katı.

Yukarıdaki açıklamalarından da anlaşılacağı üzere Derya'nın 3'ün katına ulaşmak için üslü ifadeleri bir "kat" olarak gördüğü saptanmıştır. Derya'nın üçüncü soruya verdiği tepkilerde onun çoğunlukla sembolleri manipüle ettiği dolayısıyla dışsal sembolik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği belirlenmiştir. Bu yüzden ağırlıklı olarak dışsal sembolik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği; bunun yanında dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının göstergesi olan tepkiler de ortaya koyduğu (4.1.1.3.2 başlığı altında) belirlenmiştir.

4.1.1.3. Öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları.

Öğretmen adayları İSF'nin birinci, ikinci, üçüncü, dördüncü, beşinci ve sekizinci sorularında dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunmuşlardır. Bu ifadeler Tablo 4.1'den de görülebileceği üzere, "İşlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakma", "Sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama", "İspatı yapılandırırken sık kullanılan

sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullanma”, “Kullandığı yöntem hakkında yanlış bilgiyle ispatı yapılandırma”, “İspatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek yargılama” ve “Genel ifadelerle yüzeysel deliller sunma” olarak sınıflandırılan ispat şemasının göstergeleri olarak değerlendirilmiştir. Bu göstergelere ilişkin ayrıntılar aşağıda alt başlıklar altında sunulmuştur:

4.1.1.3.1. Öğretmen adaylarının işlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakarak ispatlarını yapılandırmaya çalıştıkları durumlar.

Öğretmen adaylarından Semiha ve Derya'nın İSF'nin birinci sorusuna ilişkin yanıtlarında “İşlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakarak” ispatlarını yapılandırmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Aşağıda öğretmen adaylarının bu durumlara ilişkin ifadeleri yer almaktadır:

Semiha birinci ispat sorusu olan “Herhangi üç pozitif ardışık tam sayının çarpımının her zaman 6'nın katı olduğunu gösteriniz” sorusunu okumuş, n , $n+1$, $n+2$ ardışık sayılarını alarak ilk önce derslerde bu tip sorular için neler yaptıklarını düşünerek bir şeyler hatırlamaya çalışmış, bu sayıların çarpımını yazarak eşitlik oluşturmuş, eşitliğin diğer tarafında 6'nın katını elde etmeye çalışmıştır. Semiha'nın ispatı yapılandırmak için ilk denemesi Şekil 4.2'de yer almaktadır.

1

$$\begin{aligned} (n)(n+1)(n+2) &= 6k \\ (n^2+n)(n+2) &= 6k \\ n^3 + 3n^2 + 2n & \\ n \cdot (n^2 + 3n + 2) & \end{aligned}$$

Şekil 4.2. Semiha'nın İSF'nin birinci sorusuna ilişkin yanıtı/1

Şekil 4.2'de görüldüğü üzere verilen ve istenenleri yerlerine koyan fakat sonuca ulaşamayan Semiha'nın ilk açıklamaları aşağıdaki gibidir:

A: Şimdi ilk önce bir soru üzerinde konuşalım istersen bu sorudan ne anladın?

S: Ardışık 3 sayıyı çarpınca cevabın her zaman 6'nın katı olduğunu göstericez.

A: Evet...

S: Yani n dedim birinci sayıya... $n+1$, $n+2$ dedim bunun her zaman 6'nın katı olması gerekiyor dedim, sonra bunu dağıttım ve hiçbir şey çıkmadı.

A: Hiçbir şey çıkmadı derken ne demek istedin? (İSGF)

S: Yani dağıttım 6'nın katı olduğunu buradan anlayamadım.

Semiha'nın "bunun her zaman 6'nın katı olması gerekiyor dedim, sonra bunu dağıttım ve hiçbir şey çıkmadı" gibi ifadelerinden anlaşılacağı üzere eşitliğin sağ tarafında 6'nın katı olacak bir ifade aradığı ve ilk teşebbüsünde ispatı sonuçlandıracak bir yol bulamadığı belirlenmiştir. Araştırmacı ispatlamayı başka bir şekilde denemesini teklif ettiğinde Semiha ikinci yol olarak $2k+1$, $2k+2$, $2k+3$ ardışık sayılarını 6'nın katına eşitleyeceği bir eşitlik oluşturmuştur fakat yine sonuca ulaşamamıştır. Şekil 4.3, Semiha'nın ispata ilişkin yanıtı için ikinci denemesini göstermektedir:

2

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} T \\ 2k+1 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \\ 2k+2 \end{array} & \begin{array}{c} T \\ 2k+3 \end{array} \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline \frac{(6k-2)}{4} & \frac{(6k-1)}{5} & \frac{(6k)}{6} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{1. 2'nin katı} \quad \text{1 tane 3'un katı var} \\ \text{2. 1 tane 4} \quad \text{4 j'ü} \quad \text{4 u} \quad \text{u} \end{array}$$

$$\frac{(36k^2 - 18k - 2)(6k)}{6} = \frac{36k^2 \cdot 6k}{6} - \frac{(18k \cdot 6k)}{6} - \frac{(12)k}{6}$$

(Ardışık 3 sayıdan en 0)

3

$$\begin{array}{l} (2k+1)(2k+2)(2k+3) \\ (4k^2 + 6k + 2)(2k+3) \\ 8k^3 + 26k^2 + 18k + 4k + 6 \\ 8k^3 + 24k^2 + 18k + 4k + 6 \\ \underline{4k^2(2k+1)} \\ 4 \quad T \end{array} \quad \begin{array}{l} \begin{array}{c} 9 \quad T \quad 9 \\ (2k)(2k+1)(2k+2) \end{array} \\ (4k^2 + 2k)2(k+1) \\ 2 \cdot (4k^3 + 6k^2 + 2k) \\ 8k^3 + 12k^2 + 4k \\ 4k(2k^2 + 1) + 12k^2 \\ 2k \quad \underline{4+T} \\ T \end{array}$$

Şekil 4.3. Semiha'nın İSF'nin birinci sorusuna ilişkin yanıtı/2

Şekil 4.3'te görüldüğü üzere, Semiha'nın bu soruyu yanıtlarken (ikinci ve üçüncü denemelerinde) 6'nın katı olan bir ifadeye ulaşmaya çalıştığı görülmüştür. Semiha'nın daha önce edindiği tek sayı ifadelerini yan yana çarpma bilgisi yoluyla farklı ardışık sayıları birbiriyle çarpıp uygun işlemleri yaptığında 6'nın katına ulaşması gerektiğine dair beklenti içerisinde olduğu, fakat ispatı yapılandıramadığı belirlenmiştir. Buradan Semiha'nın daha önceki bilgilerini akıl yürütme ve dönüşüm yapmadan kullanarak ispat yapılandırmalarını tamamlayamadığı ve dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olarak

nitelendirilebilecek ifadeleri olduğu tespit edilmiştir. Şekil 4.3 ayrıntılı olarak incelendiğinde, ispata ilişkin yanıtının ikinci denemesinde Semiha'nın $2k+1$, $2k+2$, $2k+3$ gibi tek sayı gösterimlerini kullanarak 2'nin ve 3'ün katlarını bulma çabası içine girdiği görülmüştür. Daha önceki bölümlerde (4.1.2.1.1 başlığı altında) Semiha'nın bu yanıtında deneysel algısal ispat şemasının göstergesi olan tepkiler verdiği tartışılmıştır. Dolayısıyla Semiha'nın birinci soruya yanıtında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilemesinin yanında deneysel algısal ispat şeması olarak nitelendirilebilecek ifadelerinin de bulunduğu belirlenmiştir.

Derya birinci soruya Semiha'ya benzer olarak n , $n+1$ ve $n+2$ gibi üç ardışık sayı ifadesi ile başlamış, bu sayıları 6'nın katına eşitleyerek bir eşitlik oluşturmuştur. Fakat bunları yaparken kendisini doğru ispata götürecek çıkarımları yapamadığını belirten ifadeler kullanmıştır. Aşağıda Derya'nın açıklamaları yer almaktadır:

D: Yani ben 6'nın katı çıktığını hatırlıyorum ama....[sessizlik olur elinde kalem düşünür]

A: Neyin 6'nın katı olacağını düşünüyorsun?

D: Cevabın 6'nın katı çıktığını hatırlıyorum... üç ardışık sayı vermiş bize, üç tane, bunları çarpınca cevabın her zaman 6'nın katı ... olacağını göstermemizi istiyor. [durur]

A: Göstermemizi istiyor, tamam, şimdi üç ardışık sayının .. evet sen ne yaptın?

*D: Ben ilk sayının n olabileceğini düşündüm, ardışık oldukları için diğerinin $n+1$, bir sonraki sayının da $n+2$ olacağını düşünerekten çarptım... **tabi çarpıp açtığımda direk 6'nın katı gelmedi ama ...bundan....[uzunca düşünür] bir şeyler üretemedim.***

Derya'nın bu soruda akıl yürütmeden verilenleri yerine koyup derslerde öğrendikleri gibi bir takım işlemlerle yola koyulduğu görülmüştür. “6'nın katı çıktığını hatırlıyorum ama...” gibi ifadelerinde Derya'nın akıl yürütmelerini derslerde öğrendiklerine dayandırdığı belirlenmiştir. Derya'nın sonuca ulaşamayınca “*tabi çarpıp açtığımda direk 6'nın katı gelmedi ama ... bir şeyler üretemedim*” ifadesinden de anlaşılacağı üzere akıl yürütmeden yaptığı işlemlerle bir şeyler üretemediğinin farkında olduğu belirlenmiştir.

Bu yüzden bu soruya ileride tekrar dönmek üzere diğer soruya geçilmiştir. Diğer tüm sorular değerlendirildikten sonra bu soruya geri döndüğünde Derya “*bir sonraki adımı*” düşündüğünü söylediği tümevarım yoluyla ispat denemesini ikinci yol olarak denemiştir. Bu sefer ispata $n+1$, $n+2$, $n+3$ şeklinde aldığı ardışık sayıları çarparak başlamış ve yine bir sonuca ulaşamamıştır. Derya'nın yanıtı Şekil 4.4'te yer almaktadır:

1

$$n(n+1)(n+2) = (n^2+n)(n+2)$$

$$= n^3 + 2n^2 + n^2 + 2n$$

$$= n^3 + 3n^2 + 2n$$

$$n(n^2 + 3n + 2)$$

$$\downarrow (1 + 3 + 2)$$

$$2 (4 + 6 + 2)$$

1, 2, 3

2

$$(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2 + 3n + 2)(n+3)$$

$$= n^3 + 3n^2 + 3n^2 + 9n + 2n + 6$$

$$= n^3 + 6n^2 + 11n + 6$$

Şekil 4.4. Derya'nın İSF'nin birinci sorusuna ilişkin yanıtı/1

Yukarıdaki ifadelerinden ve Şekil 4.4'teki çözümünden görülebileceği üzere Derya'nın işlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta yapılandırmaya çalıştığı fakat ispatı tam olarak yapılandırmadığı söylenebilir. Buradan Derya'nın dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği belirlenmiştir. Daha sonraki bölümlerde (4.1.3.1.1 başlığı altında), Derya'nın birinci soruya yönelik yanıtlarında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının yanında tam olarak analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermese de analitik dönüşümsel ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere sahip olduğuna ilişkin bulgulara yer verilmiştir.

4.1.1.3.2. Öğretmen adaylarının sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arayarak ispatlarını yapılandırmaya çalıştıkları durumlar.

Öğretmen adaylarından Derya'nın İSF'nin birinci ve üçüncü sorularına; Hamra'nın İSF'nin dördüncü sorusuna, Semiha ve Derya'nın ise İSF'nin beşinci sorusuna ilişkin yanıtlarında “sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arayarak” ispatlarını yapılandırmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Aşağıda öğretmen adaylarının bu durumlara ilişkin ifadeleri yer almaktadır:

Derya'nın birinci soruya ilk verdiği tepki bu soruyu daha önce Elemanter Sayı Kuramı dersinden hatırladığını söylemesi olmuştur. Derya öncelikle n , $n+1$ ve $n+2$ gibi üç ardışık sayı ifadesi ile başlamış, bu sayıları 6'nın katına eşitleyerek bir eşitlik oluşturmuştur. Fakat bunları yaparken kendisini doğru ispata götürecek çıkarımları

yapamadığını belirten ifadeler kullanmıştır. Aşağıda Derya'nın açıklamaları yer almaktadır:

D: Bunu bize daha önce sormuşlardı sanırım.

A: Öyle mi, hangi sınavda?

D: Elemanter gibi bir sınavda olabilir.

A: Öyle mi?

D: Yani ben 6'nın katı çıktığını hatırlıyorum ama....

A: Neyin 6'nın katı olacağını düşünüyorsun?

D: Cevabın 6'nın katı çıktığını hatırlıyorum... üç ardışık sayı vermiş bize, üç tane, bunları çarpınca cevabın her zaman 6'nın katı ... olacağını göstermemizi istiyor. [durur]

Yukarıdaki alıntılardaki “*Bunu bize daha önce sormuşlardı sanırım*”, “*Elemanter gibi bir sınavda olabilir*”, “*Cevabın 6'nın katı olduğunu hatırlıyorum*” gibi ifadelerinden de görülebileceği gibi, Derya'nın bu soruda akıl yürütmeden verilenleri yerine koyup derslerde öğrendikleri gibi bir takım işlemlerle yola koyulduğu belirlenmiştir. Görüşmenin ilerleyen dakikalarında Derya'nın bu soruya tekrar geri dönmesi istendiğinde beşinci sorudaki tümevarım adımını görmüş olmasına ve yaptığının farklı bir yöntem olduğunu bilmesine rağmen yapmış olduğu akıl yürütme biçiminin tümevarımsal akıl yürütme olduğunun farkına varamadığı görülmüştür. Tümevarımsal akıl yürütmede kendi ifadesiyle “*bir sonraki adımı düşündüğünü*” belirtmiştir. Derya'nın tümevarımsal akıl yürütme ile ilgili açıklamaları aşağıdaki gibi olmuştur:

D: İu... şeyi denedim ikinci bir yol vardı onu denedim ...uu... Bunun hani 6'nın katı olduğunu düşünerekten bir sonraki adımı düşündüm. Hani n çarpı (n+1) n+2'nin çarpımları 6'nın katı olduğunda bir sonraki adımda da ...uu... aynı şekilde 6'nın katının gelebileceğini düşünerekten yola çıktım..

A: Bu bir sonraki adımı.... Bunu açar mısın? (İSGF)

D: Yok zaten daha önceden de ispat yollarından biri zaten de ...hani burada gördüğümde tekrardan hatırladım.

A: Ne o hangi ispat yöntemi? (İSGF)

D : [düşünür]yok hatırlayamadım.

Yukarıdaki ifadelerinden de görülebileceği üzere, Derya'nın bu soruda tümevarımsal akıl yürütme için yeterli çıkarımlar yapamadığı, daha önceden hatırladığı bilgileri kullandığı fakat içselleştiremediği, dolayısıyla derslerden hatırladıklarına odaklanarak sınırlı bağlantılar kurduğu, derslerde yaptıklarına benzer ispat süreçleri aradığı fakat derslerden hatırladığı benzer ispat süreçlerinin anlamlarını bilmediği söylenebilir. Buradan Derya'nın bu soruda ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilediği belirlenmiştir. Daha sonraki bölümlerde (4.1.3.1.1 başlığı altında), Derya'nın birinci soruya yönelik yanıtlarında analitik dönüşümsel ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere de sahip olduğuna ilişkin bulgulara yer verilmiştir. Derya'nın birinci soruya verdiği yanıtında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler sergilediği, bunun yanında düşüncelerinde ve

ifadelerinde analitik ispat şemasının bazı göstergelerine sahip olabileceğine ilişkin ipuçları verdiği belirlenmiştir.

Derya, İSF'nin üçüncü sorusu olan “Herhangi bir pozitif tamsayı n için eğer n^2 3'ün katıysa n 'nin de 3'ün katı olduğunu gösteriniz” sorusuna $n^2 = 3k$ eşitliğini oluşturarak başlamıştır. Daha sonra her iki tarafın karekökünü almış fakat ilk denemesinde ispatı daha ileriye götürememiştir. Derya daha sonra varsayımını $n^2 = 3k$ olarak ele almak yerine $n^2 = 3.3k$ olarak ele almıştır. Derya'nın ilgili yanıtı Şekil 4.5'te gösterilmektedir.

$$\begin{aligned} n^2 &= 3 \cdot 3k \\ n^2 &= 9k \\ n &= 3\sqrt{k} \end{aligned}$$

Şekil 4.5. Derya'nın İSF'nin üçüncü sorusuna ilişkin yanıtı

Derya'ya neden $n^2 = 3k$ eşitliği yerine $n^2 = 3.3k$ eşitliğini kullandığı sorulduğunda daha kolay olduğu için $3k$ yerine $9k$ ($3.3k$) ifadesini seçtiğini, bunu seçmesinin mahsuru olmadığını düşündüğünü belirtmiştir. Aşağıda bununla ilgili ifadeleri mevcuttur:

D: ...Aaa... soruyu daha basitleştirmek için şey de yapabiliriz hani daha kolay alınması için $9k$ diye de düşünebiliriz.

A: Yani 3'ün katı yerine 9'un katı desek yine doğru olur mu?

D: Aynen.

A: Bir deneyelim istersen yanda.

D: n^2 ... yani şu şekilde düşünebiliriz 3 çarpı $3k$. 3'ün katı olmasını istiyoruz ben burada $3k$ olarak düşündüm o herhangi bir sayıyı n^2 $9k$ gene karekökünü aldığımızda $3\sqrt{k}$ geliyor bu seferde birinci kuvveti geldi o yüzden hani kuvvete pek fark etmiyor n gene her zaman 3'ün herhangi bir kuvveti çıkıyor.

Yukarıdaki açıklamalarında da görüldüğü gibi Derya $n^2=3k$ başlangıç varsayımında “daha kolay (karekökü) alınması için” $3k$ yerine $9k$ seçebileceğini belirtmiştir. Derya ispatını tamamlaması için $n=3k$ ifadesine ulaşması gerekirken $n=3\sqrt{k}$ ifadesine ulaştığında sonucun kendisini ikna ettiğine ilişkin açıklamalarda bulunmuştur. Derya'nın “3'ün katı olmasını istiyoruz ben burada $3k$ olarak düşündüm o herhangi bir sayıyı n^2 $9k$ gene karekökünü aldığımızda $3\sqrt{k}$ geliyor bu seferde birinci kuvveti geldi o yüzden hani kuvvete pek fark etmiyor n gene her zaman 3'ün herhangi bir kuvveti çıkıyor” ifadesinde olduğu gibi \sqrt{k} ile k sayı ifadelerini denk bulduğu ve bulduğu sonuçla ikna olduğu görülmüştür. Derya'nın bu soruya ilişkin yanıtlarında doğru akıl yürütme kullanmadığı (kurduğu bağlantıların akıl yürütme içermediği), “ $3k$ ile $3\sqrt{k}$ ifadelerinin

birbirine denk olduğu” ya da “*3k yerine 9k seçebileceği*” gibi daha önceden edindiği bazı bilgileri düşünmeden işleme koyduğu söylenebilir. Dolayısıyla tepkilerinde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının özelliklerini bulundurduğu belirlenmiştir. Fakat önceki bölümlerde bu soruya ilişkin olarak (4.1.1.2.1 başlığı altında) Derya’nın alışkanlık edinilmiş tepkilerinin yanında ağırlıklı olarak dışsal sembolik ispat şeması ortaya koyan ifadelerinin de bulunduğu tartışılmıştır. Dolayısıyla Derya’nın üçüncü soruya ilişkin ağırlıklı olarak dışsal sembolik ispat şemasını ortaya çıkaran tepkiler gösterdiği, bunun yanında tepkilerinin dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olarak nitelendirilebileceği de belirlenmiştir.

Hamra’nın İSF’nin dördüncü sorusu olan “*b tek doğal sayı ise 8’in $b^2 - 1$ i böldüğünü gösteriniz*” sorusuna verdiği yanıtı incelendiğinde tüm basamakları doğru yapılandırmış gibi gözüktüğü, fakat görüşmeden elde edilen bulguların Hamra’nın, bu ispatın büyük bölümünü ezbere bilgilerle yapılandığı belirlenmiştir. Aşağıda Şekil 4.6 Hamra’nın bu soruya ilişkin yanıtını göstermektedir.

$$\begin{aligned}
 & \underline{b = 2n + 1} \\
 & \frac{b^2 - 1}{8} = \frac{(2n+1)^2 - 1}{8} = \frac{4n^2 + 4n + 1 - 1}{8} = \frac{4(n^2 + n)}{8} \\
 & = \frac{n^2 + n}{2} \\
 & \begin{array}{l}
 n=1 \quad 1^2 + 1 = 2 = 2k \\
 n=k \quad k^2 + k = 2m \\
 n=k+1 \quad (k+1)^2 + (k+1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 \\
 \quad \quad \quad = k^2 + 3k + 2 \\
 \quad \quad \quad = \underline{k^2 + k} + 2k + 2 \\
 \quad \quad \quad = 2m + 2(k+1)
 \end{array} \\
 & \begin{array}{l}
 n = k+2 \quad (k+2)^2 + (k+2) = k^2 + 4k + 4 + k + 2 \\
 \quad \quad \quad = k^2 + 5k + 6 \\
 \quad \quad \quad = \underline{k^2 + k} + 4k + 6 \\
 \quad \quad \quad = 2m + 2(2k+3)
 \end{array}
 \end{aligned}$$

Şekil 4.6. Hamra’nın İSF’nin dördüncü sorusuna ilişkin yanıtı

Şekil 4.6’da görüldüğü üzere Hamra öncelikle b ’yi $b=2n+1$ tek doğal sayısı şeklinde ifade etmiştir. Bu esnada soruyu anlamakta sıkıntı yaşamıştır. Araştırmacının yardımıyla soruyu anladığı, daha sonra bazı sadeleştirmelerle $b^2 - 1$ için $\left(\frac{n^2+n}{2}\right)$ ifadesini elde ettiği, hemen sonrasında tümevarım yöntemini kullanmaya başladığı görülmüştür.

Fakat görüşmeler sonucunda kullandığı yöntemin adını ya da ne işe yaradığını bilmeden uyguladığı belirlenmiştir. Aşağıda Hamra'nın yanıtlarıyla ilgili açıklamaları yer almaktadır:

H: [Soruyu okur] b tek doğal sayıymış... buna $2n+1$ demek istiyorum ...8'in $b^2 - 1$ 'e bölündüğünü göstericem.

A: Hayır böldüğünü bölündüğünü değil.

H: Böldüğünü ha bu böldüğünü.... anladım.

A: Hayır bu değil 8'in b kare -1'i böldüğünü.

H: Böldüğünü... anladım ... hani $\frac{b^2-1}{8}$ -olacak.... gösterip gösteremediğini... b^2 yerine.... b yerine $2n+1$ yazıcammmm... en sonda da $\frac{n^2+n}{2}$ kalmış oluyor...yani artık $n^2 + n$ 'in 2'ye bölündüğünü göstermeye çalışıyorum ben ... n'ye 1 verdiğim zaman aaa.. 1'in karesi + 1 eşittir 2'den... 2'nin...2'ye bölünüyor 2'nin katı olmuş oluyor n'ye ben k vericem $k^2 + k$ eşittir acaba 2'nin katı mı sonra n'yi bir de k+1 şeklinde bakacağım.

A: Bu ne yöntemiydi?(İSGF)

H: Adını bilmediğim bu şekilde kullandığımız bir yöntem şey adını hatırlayamıyorum gerçekten...ya da adı var mı onu da bilmiyorum [işlemleri yapar].

Şekil 4.6'da görüldüğü gibi Hamra'nın yanıtı incelendiğinde işlemleri eksiksiz ve doğru gözükmiştir fakat görev temelli görüşmelerde Hamra'nın yaptığı işlemleri akıl yürütme yapmadan uyguladığı belirlenmiştir. Örneğin, Hamra yaptığı yöntemin adını bilmemesinin yanı sıra, $n=1$ sayı ifadesini işleme koyma nedenini bilmediği, bunun temel adım olduğunu ve neden n'nin bir fazlasını işe koştüğünün farkında olmadığı belirlenmiştir. Hamra tümevarım yöntemini “n'ye 1 vermek, n'ye k vermek n'ye k+1 vermek” olarak ifade etmiştir. Bu düşüncelerine ilişkin açıklamaları aşağıdaki gibidir:

H: Anladım... $2n+1$ ise bunları yerine koyduğum zaman en son 8'e bölümünde şu ifadeyi elde ettim 4 parantezinde $\frac{n^2+n}{8}$ 'di daha sonra 4'le 8'i sadeleştirdiğim zaman $\frac{n^2+n}{2}$ 'yi buldum yani $n^2 + n$ 'in 2'ye bölündüğünü u...ıfa...ispat edebilirsem bu sayının 8'e bölündüğünü göstermiş oluyorum ...bu tek sayının ...ıı.... Daha sonra n'ye 1 verdiğim zaman bu ifadeyi sağlıyor k verdiğim zaman şu şekilde bir ifade elde ettim ...k+1 verdiğim zaman da şu şekilde bir ifade elde etmiş oluyorum hani $k^2 + k$ 'nin ben 2'ye bölündüğünü uuu.... farzedersen bu ifade nasıl bir hal alıyor onu görüyorum... en son k+2 çıktı bu $2k+2$ 'de zaten 2'nin bir katı olduğu için diyorum ki o zaman bu ifade 2'ye tam bölünüyor...o zaman $b^2 - 1$ de 8'i böldüğünü göstermiş oldum.

A:Peki bunun doğru olduğunu hani buradan gösterdin peki bunu nerden biliyorsun böyle bir ifadenin senin ispatı yapmana yettiğini? (İSGF)

H:....

A: Hani 1 verdim, k verdim, k+1 verdim nedir bu olay?(İSGF)

H: Evet şöyle yani her sayı için hani.... Sonuçta herhangi bir tek doğal sayı diyorsun ya yani her sayı için düşünmeye çalıştım o yüzden her sayı için acaba ne olabilir diye düşündüm yani n'ye bir k versem ya da n'ye bir k+1 versem yani her sayı için durumu görmüş oldum.

Hamra, ifadesini doğru yapmaya yetmeyecek yüzeysel incelemesinden sonra, durumun her sayı için doğru olduğunu gördüğünü söylemiştir. Bu durum onun bu kalıbı ezberleyerek akıl yürütmeden uyguladığının bir göstergesi olabilir. Hamra'ya ifadesinin $k+2$ ve $k+3$ için nasıl devam edeceği sorulduğunda o ihtimallerin de doğru olabileceğini belirtmiştir. Aşağıda bu ifadesine ait açıklamalar bulunmaktadır:

A: O zaman k+2 de vericez k+3 de vericez.

H: Evet ama sadece iki tanesini vermem yeterli olabilir.

A: Neden?(İSGF)

H: Yeterlidir çünkü zaten aslında düşünürsek....ıı.... herburada k'leri...mesela hem tek olarak hem çift olarak düşünmüş gibi mi oldum ...hayır olmadım.

A: Hani niye 1 ekliyoruz da 3 eklemiyoruz? 5 eklemiyoruz? Ya da niye k+1 yetiyor? k+2 k+3... niye gitmiyor ileri?

H: Şöyle...k+3 de diyebiliriz ama o zaman işlem uzar daha sade...hani net bir ifade edebilmek için daha kolay ifade edebilmemiz için bunu yaptım.

Açıklamalarında da belirttiği üzere Hamra'nın, k ve sonrasında $k+3$ için işlem yaptığında da tümevarımsal yöntemin işleyeceğini düşündüğü söylenebilir. Hamra'nın "bir fazlası" ifadesinde k 'nin herhangi bir sayı kadar fazlasının (örneğin $k+3$) tümevarımsal akıl yürütme için yeterli gördüğü ve "bir fazlası" çıkarımını "herhangi bir sayı ve o sayının bir fazlası için doğru olduğunda tüm sayılar için geçerli olabileceği" şeklinde düşünmediği söylenebilir. Hamra ifadelerinde $k+1$ sayısını "diğer sayı" olarak nitelendirmiştir. Hamra'ya tekrar neden k 'nin bir fazlasını kullandığı sorulduğunda ikna edici açıklamalar yapamamıştır. Bu durumla ilgili ifadeleri aşağıdaki açıklamalarında yer almaktadır:

A: Peki neden nereden biliyorsun bunun böyle bir şey olduğunu? [$n=k+1$ verdiği yeri gösterir] niye 1 ekleme ihtiyacı duydun yani?(İSGF)

H: İmm... şöyle... sonuçta burada doğruluğunu göstermeye çalışıyorum ya o yüzden yani ...ımm... her sayı için bakmaya çalışıyorum mesela sadece burada $k^2 + k$ 'nin 2'nin [$n=k$ verdiği yeri gösterir] katı olduğunu söylemem bana yetmiyor o yüzden bi de acaba diğer sayı için bakayım diyorum bu da $k+1$ olsun diyorum diğer sayı... o zaman acaba sağlıyor mu bu işlemi...yani 2'ye bölülebiliyor mu...mesela burada sağ...ladığını farzedersen [$n=k$ 'yi gösterir] burada bölüyor mu diye bakıyorum [$n=k+1$ ile başlanan işlemin son satırını gösterir] ...evet.

Hamra'ya ispatını bitirdikten sonra ispatının özgün olup olmadığı sorulduğunda yaptıklarının özgün olmadığını, Elemanter Sayı Kuramı dersi alan herkesin bunu yapabileceğini söylemiştir. Bununla ilgili açıklamaları aşağıdaki gibidir:

A: Bu yaptığın şey sence özgün mü?(GİGF)

H: Bunu....yani herkes yapabilir...yani matematikçi olan...yani eğer genel bir matematik dersi ya da ya da Elemanter dersini aldılarsa bence yapabilirler.

A: Neden yapabilirler?(İSGF)

H: Çünkü biz bu derste buna benzer şeyler çözmüştük o yüzden öyle düşünüyorum.

A: Hmmm... yani onları çözdüğün için mi bunu çözdüğünü düşünüyorsun?

H: Yani onların nasıl çözüldüğünü bildiğim için şu an onlardan yola çıkarak bunları yaptım...yani daha öncesi lisede böyle bir şey bilmiyordum ..yani bu şekilde ispat edebileceğim ya da bu şekilde doğruluğunu gösterebileceğimi.

Yukarıdaki açıklamalarından da görüleceği üzere Hamra'nın yaptıklarının özgün olmadığını düşündüğü ve herkesin akıl yürüterek kolaylıkla bu ispatı kendisi gibi yapabileceğini düşündüğü belirlenmiştir. Hamra'nın açıklamalarından, öğrendiklerini derslerden hatırladığını söylediği anlaşılabilir. Bu yüzden Hamra'nın dışsal otoriter ispat şemasının göstergesi olan düşünceler sergilediği düşünülmüştür. Fakat Hamra yaptıklarının dayanağını anlatırken Elemanter Sayı Kuramı dersine atıfta bulunmuşsa da, akıl yürütmesini sadece Elemanter dersine dayandırmadığı saptanmıştır. Öyle ki Hamra'ya akıl

yürütmesi ile ilgili sorular sorulduğunda sadece “derslerde öyle gördük” şeklindeki açıklamalarının yanında dayanaklarını, zihnindeki belli bazı şablonlara ve alışkanlıklara dayandırdığı düşünülmüştür. Hamra'nın ispatını ne kadar doğru yapılandırılmış görünse de, $n=k$ verdiğinde karşılığında 2'ye bölünebilen bir sayı bulma eğilimini kafasındaki belli alışkanlıklardan edinmiş gözükmekte olduğu yorumu yapılabilir. Hamra'nın akıl yürütmesi hakkında daha ayrıntılı bilgi edinmek amacıyla yaptığı işlemlerin dayanağı sorulduğunda, dayanaklarını genel ifadeler kullanmasına bağladığı görülmüştür. Böylece Hamra'nın dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği belirlenmiştir. Buna ilişkin ifadeleri aşağıdaki gibidir:

A: Dayanağın ne peki burada? Neye dayanarak yaptın sence bunu?(GİGF)

H: Şöyle ben gene burada ifade kullanmak için bence doğruluğunu göstermiş oldum yani k yerine ya da herhangi ya da n yerine herhangi bir sayı verdiğim zaman şurada herhangi bir sayı verdiğim zaman ben bu sayının 2'ye bölünebileceğini ya sadece 1, 2, 3 ile değil yani mesela n'ye ben burada 36 da versem 37 de versem hani bunun 2'ye bölünebileceğini gösterdiğim için hani genel ifadem bundan...uu... doğruluğunu ya da buna dayandım hani...sonuçta...ben... bu n'nin hangi sayı olduğunu bilmiyorum o yüzden genel ifadeler kullandım.

Hamra'nın tüm ifadeleri incelendiğinde kullandığı tümevarım yöntemini doğru akıl yürütme yapmadan daha önce edindiği bazı bilgilere dayandırarak uyguladığı, ispat için gerekçelerini sunarken argümanlarıyla ispatlar arasında sınırlı bağlantılar kurduğu, kafasındaki “n'ye 1 vermek, n'ye k vermek n'ye k+1 vermek” gibi hazır şablonlardan yararlanarak ispatı yapılandırdığı fakat yaptıklarının anlamlarına hâkim olmadığı, benzer ispat süreçlerini takip etme alışkanlığının olduğu söylenebilir. Buradan en düşük başarı düzeyine sahip olan Hamra'nın ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği belirlenmiştir. Daha sonraki bölümlerde (4.1.3.1.1 başlığı altında) Hamra'nın bu soruda aynı zamanda dönüşümsel ispat şemasının göstergesi olan tepkileri tam olarak sergilemese de bu tepkilere ilişkin bazı düşüncelere sahip olma ihtimalinden bahsedilmiştir. Dolayısıyla Hamra'nın İSF'nin dördüncü sorusuna ilişkin yanıtlarında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler verdiği, bunun yanında dönüşümsel ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere sahip olduğu belirlenmiştir.

Semiha'nın beşinci soruya ilişkin yanıtlarında üçüncü ispata ilişkin söylemlerinde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının göstergesi olan tepkiler verdiği belirlenmiştir. Semiha üçüncü ispatın doğru olduğunu belirtmiştir. Önce bu yöntemin tümevarım yöntemi olmadığını söylemiştir. Açıklama olarak “böyle yapmıyoruz çünkü” demiştir. Nasıl yaptığı sorulduğunda “k=1 için gösteririz önce, sonra k eşittir n için doğru olduğunu kabul edip

$n+1$ için gösteririz” demiştir. Bunun yanında soru ifadesinde yer alan “temel adım”ın ne olduğunu bilmediğini söylemiştir. Bununla ilgili açıklaması aşağıdaki gibidir:

S: n'den küçük veya eşit olan 3'ün tüm katları için doğru olduğunu varsayalım diyor...3'ün bir sonraki çarpanını $n+3$ alalım demiş burada ne yapmaya çalıştığını pek anlamadım tabii..temel adım niye yazdığını anlamadım.

Semiha kendisine temel adımla ilgili açıklama yapıldıktan sonra da bu ispatın da doğru olabileceğini söylemiştir. Semiha'nın, bu ispatı doğrularken ya da yanlışlarken her iki yolu da hatalı olarak yapılandığı görülmüştür. Semiha daha sonra kendisine temel adımın 12 olarak alındığı söylendiğinde bu ispatın doğru olduğunu, bir sonraki sayının da 3'ün katı olacağını söylemiştir. Semiha'nın burada sayıların rakamlarının toplamının bir sonraki adımında 3'ün katı olmayabileceği durumunu atladığı belirlenmiştir. Semiha bu ispata “doğrudur” dedikten sonra yine daha önce açıklamalarında kullandığı ifadeleri tekrarlayarak derslerdeki uygulamalara atıfta bulunmuştur. Bununla ilgili açıklamaları aşağıdaki gibi olmuştur:

S: Bence... böyle yapabiliriz gibi geldi bana bilmiyorum...yani sonuçta biz bu n'nin kaç olduğunu bilmiyoruz bu yüzden n'den küçük ve 3'ün katları haaa 3'ün katları için doğru olduğunu varsayıyoruz tamam o zaman doğrudur bu.

A: Doğru olma sebebini açıklar mısın?(İSGF)

S: Şimdi bu n 3'ün katymış tüm katları için doğruymuş yani n'nin rakamlarının toplamının 3'ün katı olduğu n sayısı için doğruymuş demiş bir sonraki n'den 3'ün katı olan bir sonraki sayı $n+3$ tür demiş n'nin rakamları toplamı 3'ün katı olduğu için bir sonraki olan sayı da zaten 3'ün katı eklenmiş olur rakama 3'ün katıdır rakamlarının toplam... doğrudur bence.

A: Bu hangi yöntemle yapılmış sence? Hangi ispat yöntemi?(İSGF)

S: Tümevarım yazmış [gülür].

A: Nedir tümevarım? Bana bir daha söyler misin?(İSGF)

S: Ya biz öyle biliyorduk hani tümevarım yaparken önce $k=1$ için alıyorduk sonra $k=n$ için doğru kabul ediyorduk ve $k=n+1$ için doğruluğunu gösteriyorduk... sanırım bu da öyle bir şey yapmaya çalışmış.

Semiha'nın üçüncü ispatta rakamların toplamının üç fazlasının bir sonraki adım olmaması gerektiğini atladığı ve açıklamalarını bu yönde yaptığı görülmüştür. Çünkü 18 sayısının basamaklarındaki rakamları toplamı 9 iken üç fazlası olan 21 sayısının basamaklarındaki rakamları toplamı 3'tür. Semiha'nın bu ispatı yanlışlarken tümevarımın yapılış biçimine odaklandığı, ifadeyi, kafasındaki “ $n=1$, $n=k$, $n=k+1$ ” şablonuna oturtmadığı için yanlış bulduğu düşünülebilir. Bu yüzden Semiha'nın tümevarımsal akıl yürütmenin doğası hakkında eksik ve yanlış bilgilere sahip olduğu yorumu yapılabilir. Semiha'nın açıklamalarında doğru akıl yürütme yapmadan zihnindeki önceden edinilmiş kalıplaşmış ezberle bilgilerle hareket ettiği ifade edilebilir. Dolayısıyla dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının göstergesi olan tepkileri ortaya koyduğu belirlenmiştir. Daha sonraki bölümlerde (4.1.3.1.3 başlığı altında) Semiha'nın bu ispat şemasının yanında, dışsal alışkanlık ispat şemasını ortaya koyan tepkiler kadar yoğun olmasa da analitik

dönüşümsel ispat şemasının göstergesi sayılan ifadelerinin de olduğu tartışılmıştır. Dolayısıyla Semiha'nın bu soruya ilişkin yanıtlarında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık ispat şemasını ve bunun yanında analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği belirlenmiştir.

Derya'nın beşinci soruya ilişkin açıklamaları incelendiğinde üçüncü ispatın doğru olduğunu düşündüğü görülmüştür. Derya üçüncü ispatın doğru olma sebebini ne görünüşüne, ne daha önceden öğrendiklerine, ne bir kaynağa dayandırmıştır. Derya'nın açıklamalarını mantıksal bir çıkarıma dayandırdığı, tümevarım yöntemini “*bir sonrasi için neden doğru*” olması gerektiğini doğru biçimde aktaran cümlelerle açıkladığı görülmüştür. Buna ilişkin açıklamaları aşağıda yer almaktadır:

D: Tamam [düşünür] bu iddia da doğrudur diyebiliriz burada 3'ün tüm katlarının doğru olduğunu öncelikle kabul ediyor ...uu... ama diyor her 3 eklediğimizde sonuçta bu doğruluğu devam ettirmesi gerekiyor eğer ilkini doğru kabul etmiş..her.. toplamları n diyelim n 3'e bölünebiliyor o zaman n 3'e bölünebiliyorsa her 3 eklediğimizde de bölünmeye devam etmesi gerekiyor ...hmm... bunu... burada bunu ispatlamış aslında 3 eklemiş 3....uu...3 eklediğinde de eğer bölünebiliyorsa bu iddia doğrudur diyorum..... yani burada eğer hani verilen durum doğruysa sonuçta her eklediğimiz 3'te de ...uu... doğruluğu devam etmesi gerekiyor ...aaa... bir adım...yani [düşünür].....aslında biz burada hani genelliyoruz n diyerek n dediğimiz şey doğruysa bir sonraki adım da doğru oluyor hani buradan yola çıkaraktan doğruluğunu düşünüyoruz.

A: Bunun bir adı var mı?...yöntemin?(İSGF)

D: Adını hatırlamıyorum....tümevarım yöntemi miydi.....bu şekilde.

A: Bunun “bir sonraki “ mantığı ne? Bunu biliyor musun? Neden bir sonrasını aldın burada: burada bunun doğruluğuna beni ikna et dediğimizde ne var burada ikna olabileceğim?(İSGF)

D: Ya burada ikna olabileceğimiz...uu...n bölündüğü içinuu...3 sayısı zaten 3'e bölünebilen bir sayı o yüzdenuu... elimdeki sayıya her 3 eklediğimizde 3'e bölünmeye devam etmeli hani bu olabilir ...herhalde.

Derya'nın “*burada hani genelliyoruz n diyerek n dediğimiz şey doğruysa bir sonraki adım da doğru oluyor hani buradan yola çıkaraktan doğruluğunu düşünüyoruz*” gibi açıklamalarında da görüldüğü üzere tümevarımsal akıl yürütme için bir sonraki adımı tanımlamayı başardığı, fakat üçüncü ispatı doğru olarak yargılarken fark etmediği şeyin sayının basamaklarındaki rakamlar toplamının üç fazlasının 3'e bölünmeyebileceğinin olduğu belirlenmiştir. Çünkü 18 sayısının rakamları toplamı 9 iken üç fazlası olan 21 sayısının rakamları toplamı 3'tür. Dolayısıyla Derya'nın tümevarımsal akıl yürütmeyi doğru olarak ifade etse de bu ifadedeki “*bir sonraki*” adım hakkında doğru akıl yürütme yapmadığı ve tümevarımın bu adımında rakamların toplamının üç fazlasına odaklanarak yanlış yapılandırıldığı düşünülebilir. Derya'nın bu sorudaki tümevarımsal akıl yürütmedeki yanlışlığı fark etmemesinden, tümevarımsal akıl yürütmeyi bilse de önceki öğrenmelerinden hareketle argümanları arasında doğru bağlantılar kuramamasından dolayı dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan belirtilere sahip olduğu belirlenmiştir. Daha sonraki bölümlerde (4.1.3.1.3 başlığı altında) Derya'nın ağırlıklı

olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkilerinin yanında analitik dönüşümsel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek ifadelerinin de bulunduğu düşünülmüştür.

4.1.1.3.3. Öğretmen adaylarının ispatlarını yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullandıkları durumlar.

Öğretmen adaylarından Semiha ve Derya'nın İSF'nin ikinci sorusuna, Semiha'nın İSF'nin üçüncü sorusuna ilişkin yanıtlarında “*ispatlarını yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullandıkları*” belirlenmiştir. Aşağıda öğretmen adaylarının bu durumlara ilişkin ifadeleri yer almaktadır:

Semiha İSF'nin ikinci sorusu olan “Herhangi iki tek sayının toplamının her zaman çift olacağını gösteriniz” sorusuna başlarken herhangi iki tek sayı gösterimi olarak $2n+1$ ve $2n+3$ sayı ifadelerini kullanmıştır. Araştırmacı Semiha'dan tek sayıları örneklendirmek için ardışık tek iki sayı gösterimi olan $2n+7$ ve $2n+9$ ifadelerini düşünmesini istediğinde Semiha bu ifadelerle de tüm tek sayıları üretebileceğini ifade etmiştir. Bununla ilgili açıklamaları aşağıdaki gibidir:

A: Peki biraz şu $2n+1$ ile $2n+3$ 'ten konuşalım... **Bu ikisi herhangi iki tek sayı mıdır?**

S: **Tabi ki.**

A: Sebebini biraz açar mısın bana bunu biraz açmak istiyorum ben. **(İSGF)**

S: n yerine değer verebilirsin istediğin değeri verebilirsin sonuçta... ..yani n yerine farklı değerler verdiğimizde bütün tek sayıları üretmesi gerekiyor burada da farklı değerler verirsem bütün tek sayıları üretir.

S: Çünkü ben bunları genellebiliyorum yani çünkü dediğim gibi n 'ye ne verirsem vereyim bütün tek sayıları üretebilirim n 'ye verdiğim tamsayı değeriyle.

A: **Peki ben mesela $2n+7$ ile $2n+9$ alsaydın /alsaydım mı olacak?**

S: **Olurdu.**

A: Hangisini doğru olarak alırdım sence?

S: **İkisi de doğru yani $2n+7$ versem de bu da bütün tek sayıları üretir bu da bütün tek sayıları üretir.**

Yukarıdaki açıklamalarından da görülebileceği gibi Semiha'nın “herhangi” iki tek sayı seçmek yerine sorgulamadan kullandığı “tek sayıların sembolik gösterimi” ni ardışık iki tek sayı yerine kullandığı ve bunun sınırlı bir durumu temsil ettiğinin farkında olmadığı görülmüştür. Semiha açıklamalarına herhangi birinin de bu seçimi böyle yapacağını belirten ifadelerle devam etmiştir. Bu ifadeleri aşağıdaki gibidir:

A: Neden öyle gösterir? **(İSGF)**

S: Neden böyle gösterir? **İki tane tek sayı al deyin mesela herkes böyle alır.**

A: Neden sence? **(İSGF)**

S: **Çünkü bu tek sayılarda genelleşmiş bir şey ya...o yüzden .**

Yukarıdaki açıklamalarından da anlaşılacağı üzere Semiha tek sayı gösterimleri hakkındaki soruya “herkesin böyle yapacağı” nı ve bunun tek sayılarda “genelleşmiş bir

şey” olduğunu söyleyerek yanıt vermiştir. Semiha’nın herkesin böyle düşüneceğinden emin olduğu ifadeleriyle sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullanma alışkanlığıyla daha önceden sahip olduğu bazı ezbere bilgilerle hareket ettiği söylenebilir. Dolayısıyla Semiha’nın dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının göstergesi olan tepkiler verdiği belirlenmiştir.

Derya’nın ikinci ispat sorusu için yanıtı incelendiğinde, onun da herhangi iki tek sayı seçmek için verdiği sayı ifadelerinin tüm tek sayıları karşılayıp karşılamamasına dikkat etmeden Semiha gibi ardışık iki tek sayı ifadesi olarak $2n+1$ ve $2n+3$ seçtiği görülmüştür. Aşağıda buna ilişkin ifadeleri yer almaktadır:

D: Bu sayıma $2n+1$ dersem ilk sayıma, diğer sayıma da $2n+3$ dersem; $2n+1$ tek sayı, bu da bir tek sayı, herhangi 2 tek sayıyı aldım

A: Niye bunu aldın bana açıklar mısın? (İSGF)

*D: Bu şekilde gösterebiliriz [$4(n+1)$ sonucuna ulaşır] bunu illa ardışık almak zorunda değiliz sonuçta $2n+1$ bize tek bir sayıyı gösteriyor, $2n$ zaten çift olduğu için eklediğim her tek sayı bana tek sayıyı verecek **ben herhangi ikisini seçtim.***

A: Herhangi ikisi mesela? Bana bunu biraz açmanı istiyorum herhangi ikisi derken? (İSGF)

D: İu.... n tamsayı olduğu için ardışık almışım ya da farklı almışım fark etmeyeceği için uu toplamı diyor zaten topladığımda $4n+4$, bunu da 4 parantezine aldığımda buranın $[(n+1)$ parantezini kasteder] tek ya da çift olması bunun çiftliğini etkilemiyor, sonuçta 4 çift bir sayı olduğu için tekle de çarpsam çiftle de çarpsam çift sonucunu elde edeceğim için.

A: Nereden biliyorsun onu?

D: Hmm... bu kural gibi bir şey yani hani vardır ya tekle tek çift tek hani çift sayıyla çift te olsa tek de olsa çarptığımızda çift sayı elde ederiz. $2n+1$ ’e tek dedim zaten tek olduğu için iki de eklediğimde gene tek devam edecektir bu sayı ...1.... n ’yi de herhangi bir tamsayı aldığım için hangi değeri verirsem her türlü sağlayacaktır...bu iki sayıyı da tek olma şartını.

A: Her durum için doğru mudur bu?(İSGF)

D: Evet.

A: Neden doğrudur?(İSGF)

D: İu.... n ’ye vereceğim her değer bu ilk sayının tekliğini ve bu sayının tekliğini sağlayacaktır.

Yukarıdaki ifadelerinden de görülebileceği gibi Derya, seçtiği $2n+1$ ve $2n+3$ sayı ifadelerinin “herhangi” iki tek sayıyı temsil ettiğini düşünmüştür. Derya açıklamalarında bu sayıları ardışık alıp almaması arasında bir fark olmadığına yönelik açıklamalara yer vermiştir. Derya aldığı iki tek sayı gösterimini toplayarak 4 parantezine aldığımda 2 çarpanını elde etmiştir. Bu ifadelerinden sonucun çift olduğunu doğru olarak gösterdiğini ve bu iki tek sayının böylelikle tüm tek sayıları temsil ettiğini düşündüğü yorumunu yapmıştır. Derya’nın “ n tamsayı olduğu için ardışık almışım ya da farklı almışım fark etmeyeceği için uu toplamı diyor zaten topladığımda $4n+4$, bunu da 4 parantezine aldığımda buranın tek ya da çift olması bunun çiftliğini etkilemiyor, sonuçta 4 çift bir sayı olduğu için tekle de çarpsam çiftle de çarpsam çift sonucunu elde edeceğim için.” ifadesinden de anlaşılacağı üzere bu sayı ifadelerini seçerken tüm sayıları temsil yeterliğini sağladığını düşündüğü söylenebilir. Derya bu sayı ifadelerini seçme sebebini bir “kural” olarak gördüğünü belirterek “bu kural gibi bir şey” açıklamasını yapmıştır. Bu

açıklaması daha önceden elde ettiği bir takım bilgileri bu soruda doğru akıl yürütme yapmadan ortaya koyduğunu göstermekte olabilir. Derya iki tek sayı ifadesini topladığında sonucun çift olduğunu nasıl gösterdiğine ilişkin açıklamalar yaparken “*n’ye vereceğim her değer bu ilk sayının tekliğini ve bu sayının tekliğini sağlayacaktır*” gibi ifadelere başvurmuştur. Derya’nın bu ifadelerinden ardışık tek sayı gösterimlerini herhangi iki ardışık sayı olarak kabul etmesine dayandırdığı ve bu sayı ifadelerinin sadece ardışık tek sayıları temsil ettiğini fark etmediği yorumu yapılabilir. Dolayısıyla Derya’nın gerekçelendirmeleri arasındaki bağlantıları kuramadığı, ispatını yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullanarak bu bağlantıları doğru şekilde gerekçelendirmediği ifade edilebilir. Bu yüzden Derya’nın ikinci soruda dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler ortaya koyduğu belirlenmiştir.

Semiha, İSF’nin üçüncü sorusu olan “Herhangi bir pozitif tamsayı n için eğer n^2 3’ün katıysa n ’nin de 3’ün katı olduğunu gösteriniz” sorusuna ilişkin ispatını yapılandırmaya başlarken $n^2=3k$ eşitliğini oluşturmuş, işlemleri takip ederek, karekökünün alınacağını düşündüğü sayılara tam kare sayı ifadeleri vermiştir. Fakat Semiha’nın ispatı yanlış yapılandığı görülmüştür. Kendisine yöneltilen sorular sonucunda akıl yürütmelerinin hatalı olduğu saptanmıştır. Aşağıda bu duruma ilişkin ifadeleri mevcuttur:

*S: Hmm n^2 3’ün katıysa demiş. Bir kere n^2 var ben **direk kökünü kolay alacağım bir şey düşündüm bu yüzden n^2 ’ye $9k^2$ dedim** kökünü alınca da ... ya bu zaten bir 3’ün katıdır değil mi? yani bunda şey yok bu 3’ün katı olduğu için 3’ün katı olan bir şey seçtim ...şimdi 3’ün katı olması gerekiyor çünkü.*

A: Ben şunu anlatmanı istiyorum senden hani burayı yazdın da şunu algılayamadım $n^2 = 9k^2$ ile başlamanı. (İSGF)

S: Yani kökünü kolay alabileceğim bir şey seçtim.

A: Yani $n^2 = 9k^2$ ’dir dedin.

S: Sonuçta n^2 ’den n ’nin 3’ün katı olduğunu göstermem gerekiyor ya .

A: n^2 3’ün katıdır ile mi başladın?

S: Hıhı ..evet.

*A: **Ama orada n^2 $9k^2$ diyor** .*

*S: **9’un katı olması zaten 3’ün de bir katı olduğunu gösterir** ...bir şey 9’un katıysa aynı zamanda 3’ün de katıdır.*

Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşıldığı üzere, Semiha $n^2 = 3k$ ise $n=3k$ olduğunun gösterilmesini isteyen ispat sorusunda $n^2 = 3k$ varsayımı yerine $n^2 = 9k^2$ varsayımını kullanabileceğini söylemiştir. Başka deyişle Semiha’nın başlangıç varsayımında $3k$ gösterimi ile $9k^2$ gösteriminin aynı olduğunu düşündüğü görülmüştür. Semiha bu duruma ilişkin açıklamasını yaparken “*bir şey 9’un katıysa aynı zamanda 3’ün de katıdır*” ifadesini kullanmıştır. Semiha’nın bu ifadelerinde sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullanma alışkanlığıyla hareket ettiği ve başlangıç varsayımını değiştirmesinin sorun

yaratmayacağını düşündüğü söylenebilir. Semiha daha sonra hatalı bir düşüncede olduğunu söylemiştir ve ispatı farklı şekilde yapmaya çalışmıştır. Daha sonraki bölümlerde (4.1.3.1.2 başlığı altında) Semiha'nın üçüncü soruya verdiği yanıtlarda dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının yanında analitik dönüşümsel ispat şemasının belirleyicisi olan tepkileri tam olarak ortaya koymasa da bu ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı ifadeler başvurduğu tartışılmıştır. Dolayısıyla Semiha'nın üçüncü soruya ilişkin yanıtlarında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkilerde bulunduğu, bunun yanında analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan özellikleri tam olarak sergileyemese de bu şemayı ortaya koyma ihtimali olan bazı ifadelerde bulunduğu belirlenmiştir.

4.1.1.3.4. Öğretmen adaylarının kullandıkları yöntem hakkında yanlış bilgiyle ispatlarını yapılandıkları durumlar.

Öğretmen adaylarından Semiha'nın İSF'nin üçüncü sorusuna ilişkin yanıtlarında “kullandığı yöntem hakkında yanlış bilgiyle ispatını yapılandığı” belirlenmiştir. Aşağıda öğretmen adayının bu durumlara ilişkin ifadeleri yer almaktadır:

Semiha İSF'nin üçüncü sorusu olan “Herhangi bir pozitif tamsayı n için eğer n^2 3'ün katıysa n 'nin de 3'ün katı olduğunu gösteriniz” sorusuna ilişkin ispat yapılandırmasının ikinci denemesinde olmayana ergi yöntemini uygulamaya çalıştığını belirtmiştir ancak ispatı yapılandıramamıştır. Aşağıda Şekil 4.7'de Semiha'nın ispatı yanıtlarken başvurduğu yollar gösterilmektedir:

Handwritten work showing two different approaches to proving that if n^2 is a multiple of 3, then n is a multiple of 3. The left approach shows $n^2 = 3k$, then $n = \sqrt{3k}$, and concludes "olmayana ergi" (proof by contradiction). The right approach shows $n^2 = 3k$, then $n = \sqrt{3}$, and concludes " $n \in \mathbb{Z}^+$ " (n is a positive integer).

Şekil 4.7. Semiha'nın İSF'nin üçüncü sorusuna ilişkin yanıtı/1

Şekil 4.7'de görüldüğü üzere Semiha $n^2 = 3$ ve $n^2 = 3k$ eşitliklerini oluşturmuş, her iki tarafın karekökünü alarak daha sonra $n = \sqrt{3}$ eşitliğine ulaşmıştır. Uyguladığı yöntemin tek bildiği yöntem olan olmayana ergi yöntemi olduğunu belirtmiştir. Fakat

ispatı doğru biçimde yapılandıramadığında ve kendisine olmayana ergi yönteminin ne olduğu sorulduğunda yanlış açıklamalarda bulunduğu görülmüştür. Aşağıda bununla ilgili açıklamaları yer almaktadır:

S: *Burada olmayana ergiyle göstermeye çalıştım tek bildiğim yöntem de o zaten de...yani burada... n'nin kesinlikle pozitif tamsayı olması gerektiğini söylüyor... Ben başını okumamışım şu n'nin pozitif tamsayı olduğunu ve buradan gidemedim o yüzden burada n kesinlikle pozitif tamsayı çıkmıyor. .*

A: *Olmayana ergiyle ne yapmaya çalıştın en başta?(İSGF)*

S: *Hmm bunu 3'ün katı olarak kabul ettim [ikinci yol].*

A: *n^2 eşittir 3'ün katı olmayana erginin... olmayana ergi hakkında konuşalım mı, o nedir?(İSGF)*

S: *O mu.... Yani herhangi bir olumsuz örnek gösterirsen onun ispatının kesinlikle olmayacağını gösterebilirim. .*

A: *Hmm... o olmayana ergi diyorsun.*

S: *Hıhı ... doğru mu diyorum bilmiyorum .*

A: *Burada olumsuz bir örnek mi göstermeye çalıştın?*

S: *Hıhı öyle bir şey göstermeye çalıştım ama olmadı. .*

A: *Peki olumsuz örnek için ne yaptın yani göstermeye çalışırken ne dedin?(İSGF)*

S: *Buna 3'ün katı dediğimiz için k'ye herhangi bir değer verebilirim dedim.*

A: *$n^2 = 3k$ diyelim demen ne demek?*

S: *Çünkü 3'ün katıymış n^2 .*

A: ***Olumsuz örneği görebilir miyim? (İSGF)***

S: ***1 dedim k yerine n^2 o zaman oldu.***

A: *Anlayamadım yani olumsuz örnek dediğimiz şey burada hangisi? Hani senin tanımından yola çıkıyorum bir olumsuz örnek vermeye çalıştım dedin.*

S: *Hıhı yani n^2 'ye 3 dedim mesela bu olumsuz örneğim benim.*

A: *Bu senin olumsuz örneğin.*

S: *n^2 'ye 3 diyerek gittim bunun kökü 3'ün katıysa ...katı değilse olumsuz örnek vermiş oluyorum zaten aldığım kök 3'ün katıysa olumsuz örnek vermiş oluyorum ama tabi $\sqrt{3}$ çıktı ama en başını okumadığım için yanlış.*

Yukarıdaki ifadelerinden ve Şekil 4.7'deki yanıtlarından da görülebileceği gibi Semiha'nın olmayana ergi yöntemi hakkında yanlış bilgilere sahip olduğu belirlenmiştir. Semiha olmayana ergi yöntemini uygularken $n \neq 3k$ varsayımından hareketle $n^2 \neq 3k$ olduğunu ispatlamak yerine $n^2 = 3k$ eşitliğini oluşturarak ispatına yanlış varsayımla başlamıştır. Semiha'nın varsayımını yanlış kabulle başlattığı için ispatı doğru yapılandıramadığı ve önceden edindiği bazı bilgileri (olmayana ergi yöntemi ile yapılandırdığı "olumsuz örnek verme" olarak görmek gibi) yanlış yapılandırarak uygulamalarına dâhil ettiğinde başarısız olduğu belirlenmiştir. Semiha daha sonra yaptığı yanlış olduğuna ilişkin açıklamalar yapmıştır. Semiha'nın ikna için önceden öğrendiği bilgileri (örneğin olmayana ergiyi anlatırken "Yani herhangi bir olumsuz örnek gösterirsen onun ispatının kesinlikle olmayacağını gösterebilirim" gibi açıklamaları) veya gerekçeleri (" n^2 'ye 3 diyerek gittim bunun kökü 3'ün katı değilse olumsuz örnek vermiş oluyorum" gibi açıklamaları) öne sürme yoluna gittiği, fakat bunu uygularken kullandığı yöntem hakkında yanlış bilgiyle ispatı doğru akıl yürütmeye yapılandıramadığı için dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olarak yorumlanacak tepkiler gösterdiği sonucuna

ulaşılmıştır. Daha sonraki bölümlerde (4.1.3.1.2 başlığı altında) Semiha'nın üçüncü soruya verdiği yanıtlarda dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının yanında analitik dönüşümsel ispat şemasının belirleyicisi olan tepkileri tam olarak ortaya koymasa da bu ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı ifadeler başvurduğu tartışılmıştır. Dolayısıyla Semiha'nın üçüncü soruya ilişkin yanıtlarında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkilerde bulunduğu, bunun yanında analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan özellikleri tam olarak sergileyemese de bu şemayı ortaya koyma ihtimali olan bazı ifadelerde bulunduğu belirlenmiştir.

4.1.1.3.5. Öğretmen adaylarının ispatın doğruluğunu ispatın görünümünden etkilenerek yargıladıkları durumlar.

Öğretmen adaylarından Hamra'nın İSF'nin beşinci sorusuna ilişkin yanıtlarında “*ispatın doğruluğunu ispatın görünümünden etkilenerek yargıladığı*” belirlenmiştir. Aşağıda öğretmen adayının bu durumlara ilişkin ifadeleri yer almaktadır:

Hamra bir iddianın ve buna yönelik verilen üç ispatın incelenmesinin ve her bir ispatın matematiksel doğruluğu hakkında yorum yapılmasının istendiği, İSF'nin beşinci sorusuna ilişkin açıklamalarında ilk ispatın doğru olmadığını belirtmiştir fakat bu konuda çelişkiler yaşadığı belirlenmiştir. İspatın doğruluğunu sunarken daha önceden ezbere edindiği bazı bilgilerden yola çıktığı görülmüştür. Aşağıda bununla ilgili ifadeleri yer almaktadır:

*H: Tamam bakayım şöyle bu nasıl yapılmış. Bu sayı vermiş bunları topladığın zaman[ispatların hepsini okur] üç ispatı da inceledim. **Birincisi....çok genel değil o yüzden onu çok beğenmedim.... çok genel değil yani sadece bir sayıya yoğunlaşmış hani o sayının doğruluğunu göstermiş.***

A: Çok genel ya da az genel...ne demek çok genel değil?

H: Yani sadece burada bir tek sayı örnek vermiş.

A: Mesela 3 örnek verse çok genel mi olurdu?(GİGF)

*H: Hayır 3'ü... **benim için genel olan n'li ifadelerdir** yani o n yerine herhangi bir sayı yazdığımız zaman onu sağlayabiliyorsa.*

Hamra birinci ispatı değerlendirirken bu ispatı “*çok genel*” bulmadığını belirtmiştir. Hamra bunun nedeninin sadece bir sayıya yoğunlaşmış olmasından kaynaklandığını belirtmiştir. Kendisine “*genel olma*” anlayışını açması için yöneltile soru sonucunda *n*'li ifadelerin kendisi için genel olduğunu belirtmiştir. Buradan, Hamra'nın ön öğrenmelerinden genellik kavramını *n*'li ifadelerin oluşturduğu söylenebilir. Bu tanımları daha önceki dış kaynaklı öğrenmelerinin oluşturduğu ve böylelikle zihninde daha önceden gelen bir alışkanlıkla genellik terimine karşılık gelen şablonların var olduğu yorumu yapılabilir.

Hamra ikinci ispatı doğru olarak yargılamış ve gerekçelendirmelerini belli bir mantıksal çıkarıma dayalı olarak yapmıştır. Bununla ilgili açıklamaları aşağıdaki gibidir:

A: Neyi mantıklı geldi?

*H: Çünkü bizim iddiamız şu 3'e bölünmeydi ya bu mod 3'e göre almış ve çözümlenmeye baktığımızda yine aslında 10'un katlarını mesela şey yapıyoruz mesela 10, 10'un karesi, 10 n hani ...burada mod 3'e göre baktığımız zaman ..baktığımız zaman 10, bir yapıyor 10'un katlarında da mod 3'e göre 10, bir yapıyor o zaman direk rakamların toplamı nı bulmak bize o zaman mod 3'e göre 10'a denk oluyor yani ...bunu nasıl söyleyebilirim size...**bence bu ispat...güzel...ama nasıl söylüyüm...yani mod 3'e göre bakması güzel yani oradan yola çıkarak yapmış.....yani daha genel...olduğunu düşünüyorum mesela yukarıdakine göre yani her sayı için bunu sağlayabilir yani daha net bir şekilde görebiliyoruz her sayı için...o yüzden bu ispatın.***

Yukarıdaki alıntılardan da görüldüğü üzere Hamra ispatı daha "güzel" ve daha "genel" bulduğunu belirtmiştir. Hamra mantıksal gerekçelendirmeler sunsa da (araştırmacının soruları karşısında daha ayrıntılı inceleme yaparak ispattaki ayrıntıyı fark etmiş ve en sonunda 10'un mod 3'e göre 1'e denk olduğunu belirtmiştir), genel olarak ispatın görünümünden etkilenmiştir denilebilir.

Hamra temel adımın ne olduğunu bilmediğini söyleyerek üçüncü ispatın da doğru olduğunu belirtmiştir. Hamra ispatta kullanılan yöntemi adını bilmeden uyguladığı tümevarım yöntemine benzetmiştir. Bununla ilgili açıklamaları aşağıdaki gibidir:

H: İddianın n'den küçük veya eşit olan tüm kat tüm katları için....[düşünür] aslında biraz benim yaptığım ifadelere benziyor ilk önce bir tanesinde temel adımla şey yapmış daha sonra bir n de vermiş sonra bir de n+3'te vermiş zaten n'de 3 ile bölünüyordu demiş o zaman artı 3'ü verdiğimiz zaman da bu ifade 3'e bölünüyor bence bu iddia da olabi....doğrudur...uu... sanki biraz benim yaptığım biraz önce iddialara benziyor yani ilk önce bir sayı olarak doğruluyor...

A: Neden doğrudur diyorsun?(İSGF)

H: Çünkü mesela n demiş yani mesela ... bütün genel sayılar için konuşmuş ve bu n'ye herhangi bir sayı verdiğimizde ya da n+3 'e ben herhangi bir sayı verdiğimiz zaman a bu u...iddiayı doğruluyor ... o yüzden farklı ne söyleyebilirim...diye düşünüyorum da...immm...bu ispat....bence olmuştur

A: Şöyle genel olarak baktığımda bir toparlayalım istersen.

H: Hıh şu [üçüncü ispatı gösterir] benim biraz önce de yaptığım ispat gibi yani bunu hep görmüştüm.

A: İspat 3'ü?

H: Evet ...ispat 2 değişik geldi bence güzeldaha eee... daha matematiksel sanki modları falan kullanmış ya...daha matematiksel olarak ispatlamış gibi ...ispat bir daha genel...değil...daha özel...ben ispat biri beğenmedim.

Hamra üçüncü ispatı daha önce kendi yapılandığı ispatlara benzetmiştir. Hamra'nın bununla ilgili açıklamalarında akıl yürütme biçimini anlatmak yerine eski bilgilerine atıfta bulunduğu söylenebilir. Hamra bu soruya ilişkin tüm ispatları incelerken "daha genel", "daha güzel", "beğenmedim" gibi açıklamalarda bulunmuştur. Dolayısıyla bu sorudaki ispatları yargılamak Hamra'nın genel olarak argümanların doğruluğu yerine biçimlerinden etkilendiği, benzer ispat süreçleri aradığı, argümanlar ve ispatlar arasındaki bağlantıyı görmekte zorluk çektiği ifade edilebilir. Dolayısıyla ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilediği belirlenmiştir. Daha

sonraki bölümlerde (4.1.2.2.1 başlığı altında) Hamra'nın dışsal alışkanlık ispat şemasının yanında deneysel temel örnekler ispat şemasının belirleyicisi olan tepkileri tam olarak ortaya koymasa da, bu ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı göstergeleri sergilediği tartışılmıştır. Dolayısıyla İSF'nin beşinci sorusunda Hamra'nın ağırlıklı olarak dışsal ispat şemasını ortaya koyan tepkilerde bulunduğu, bunun yanında deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya koyan bazı düşüncelerinin olduğu belirlenmiştir.

4.1.1.3.6. Öğretmen adaylarının ispatlarını yapılandırırken genel ifadelerle yüzeysel deliller sundukları durumlar.

Öğretmen adaylarından Hamra'nın İSF'nin sekizinci sorusuna ilişkin yanıtlarında “genel ifadelerle yüzeysel deliller sunduğu” belirlenmiştir. Aşağıda öğretmen adayının bu durumlara ilişkin ifadeleri yer almaktadır:

Hamra'nın İSF'nin sekizinci sorusu olan “Asal sayıların sonsuz olduğunu gösteriniz” sorusunu ispatlamaya başlarken asal sayıların kendi aralarında bir örüntü bulmaya çalıştığı görülmüştür. Hamra'nın açıklamaları aşağıdaki gibidir:

H: Çünkü...asal sayılar konusu...**çünkü bir sürü sayı var**.... Yani **illa sonsuz olur** ...ama nasıl gösterilir ki?.....hmmmm.....**çünkü yani bu sayıların belli bir düzeni yok mesela bir ...hani bir şey bulmaya çalışsam aralarında bir bağ bulmaya çalışsam...Mesela 17 sayısı....bunu 2 ile çarpınca direk asal olmaktan çıkıyor....1 artmış 2 artmış 2 artmış [aralarında örüntü bulmaya çalışır] 4 artmış 2 artmış.....yani... iki asal sayının arasında hiçbir bağ olmadığı için yani sonsuz...**

A: Bağ derken?

H: Yani mesela 17 ile 23 arasında ya da 13 ile 17 arasında belirli bir düzen yok hm.....düzen derken.....yani... yani bunu bir cebirsel ifade olarak yazamamo yüzden de gösteremem heralde.... **Ama illa ki sonsuzdur.**

A: Nereden biliyorsun?(İSGF)

H: **Bir sürü sayı var diyordum.... Sonuçta kaçlara kadar sayı gidiyor... yani sayılar sonsuz olduğuna göre asal sayılar da sonsuzdurdeğil miydi yoksa?....bence illa bir sonsuzlukta tekrar vardır sonsuz bir asal sayı.**

A: Sonsuz bir asal sayı mı?

H: Yani o kadar sonsuz...aaaa...sayının içinde...yani hiçbir sayıya bölünemeyen sadece 1'e ve kendisine bölünebilen bir sayı **bence illa ki çıkar.**

A: Bir sayı mı? Neden bir sayı düşündün?(İSGF)

H: Yani hani...en azından bir tane vardır yani diye düşündüm...**yani belki daha fazla vardır ama en azından 1 tane olmalı....olur yani.**

A: Biz sonsuzluğunu ispatlamaya çalışıyoruz en azından bir tanesini niye düşündüğünü merak ediyorum.

H: Yani şöyle...sonsuzlukta en azından 1 tane vardır diyorum hani sonsuz hani o sayıların içinde.

A: Ama zaten sonsuz sayıda asal sayı olduğunu ispatlamaya çalışıyoruz.

H: Haaa..... (şimdi anladım der gibi) anladım anladım.

A:Asal sayıların sonsuz tane olduğunu ispatlamaya çalışıyoruz...çok fazla yani sonu olmayan.

H: Yani sayılar sonsuz olduğu için asal sayıların da sonsuz olduğunu düşünüyorum.

Yukarıdaki ifadelerinde de görüldüğü üzere Hamra belli bir örüntüye ulaşamayınca “içlerinden bir tane 1'e ve kendisine bölünen illa ki çıkar” yorumunu yaparak asal sayıların sonsuz olduğunun tersi bir çıkarımda bulunmuştur. Daha sonra araştırmacı daha çok ayrıntıya girmesini sağladığında ise “sonsuz olduğunu düşünüyorum”, “çünkü bir sürü

sayı var illa ki sonsuz olur”, “ *bir sürü sayı var sonuçta kaçlara kadar gidiyor*” gibi ifadelerde bulunmuştur. Hamra'nın bu ispatı yapılandırılmaya çalışırken genel ifadelerle akıl yürütmeden yüzeysel bazı fikirler öne sürdüğü görülmüştür. Buradan Hamra'nın dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının göstergesi olan ifadelerde bulunduğu belirlenmiştir.

4.1.1.4. Öğretmen adaylarının alt sınıflamalara dâhil edilemeyecek nitelikte yalnızca dışsal ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları.

Öğretmen adaylarından Derya ve Hamra İSF'nin sadece yedinci sorusunda alt sınıflamalara dâhil edilemeyecek nitelikte yalnızca dışsal ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunmuşlardır. Bu ifadeler öğretmen adaylarının “*ispat problemlerini çözmek için sadece işlemleri takip etme*” olarak sınıflandırılan ispat şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Bu göstergeye ilişkin ayrıntılar aşağıda alt başlık altında sunulmuştur:

4.1.1.4.1. Öğretmen adaylarının ispat problemlerini çözmek için sadece işlemleri takip ettikleri durumlar.

İSF'nin yedinci sorusunda öğretmen adaylarına $\sqrt{-1}$ ile 0 arasındaki ilişkinin çelişki yöntemi ile incelendiği iki ispat verilmiştir. Öğretmen adaylarının bu ispatlarda çelişki yönteminin işe yaramama sebebinin ve ispatta yapılan hatanın ne olduğunu açıklamaları istenmiştir. Bu soru yöntem bölümünde de açıklandığı üzere öğretmen adaylarının analitik aksiyomatik ispat şemalarını ortaya çıkaran ifadeleri gözleme olanağı sağlaması düşünülen bir sorudur.

Derya ve Hamra'nın bu soruya ilişkin yanıtlarında çoğunlukla işlemlere odaklanarak yorum yaptıkları ve karmaşık sayıların varlığından haberdar oldukları şeklinde yorumlanabilecek hiçbir açıklamada bulunmadıkları görülmüştür. Derya sorudaki çelişki yönteminin işe yaramama sebebinin işlem hatalarından kaynaklandığını belirten ifadeler kullanmıştır. Aşağıda ifadelerinden bir kesit sunulmuştur:

*D: [soruyu okur] İhi anladım ya buradaki ispatta bir tarafı $\sqrt{-1}$ ile çarpmış ama diğer tarafı çarpmamış bu yüzden hani **ispatta yapılan işlemde hata var?***

A: 0 ile çarpmış aslında orada.

*D: Hmmmm...doğru o zaman burada.....burada **eksi bir sayıyla çarptığı için burada işaretin yön değiştirmesi gerekiyor** direk hani her iki tarafı çarpmış ama **işaretle alakalı bir sıkıntı var ...** diğerine geçeyim mi?*

A: Zaten bu iki durumu incelemeni istiyorum yani.... Soruyu istersen bir kez daha oku o ikisini bir bütün olarak da algılayarak yanıt verebilirsin.

*D: Tamam [düşünür] burada da uuu işlemi yaptığında ..yani - 1 burada **mutlak değer olarak çıkması gerekiyor** hani direk işlemi yapıp -1 olarak çıkartmış.*

A: Nasıl yapması gerekiyordu?(İSGF)

D: Yani karesini aldığımızda zaten bu işaret artıya dönüşüyor ama bu kare kalkarken a.aaa...içindeki sayıyı mutlak değer içerisinde çıkarması gerekiyor

A: Hmmmm yani buradaki çelişkinin sebebi buradaki işlem hataları gibi mi?

D: Evet hıhı yani üsttekinde uuu...**işaretin yön değiştirmesi gerekiyor oradan kaynaklanan bir hata aynı zamanda çarpımda da $\sqrt{-1}$ ile $\sqrt{-1}$ 'i çarpınca -1 diye bulmuş gene burada kökler kalkıyor ama cevap 1 olarak çıkıyor yani sonuç olarak ikisinde de işlem hatası yapıldığını düşünüyorum.**

A: [Birinci durumu gösterir] Şurada işlem hatası olmadığını düşünsek yani bu 1 büyüktür 0 olsa o zaman ne düşünürsün? Aynen devam et soruya, 1 büyüktür 0 olsun.

D: O zaman ya şey oluyo hani eksi bir sayıyla çarptığımız için buradaki büyüktür işaretinin yön değiştirmesi gerekiyor hani 1 küçüktür 0 bulmamız gerekiyor...bu şekilde göstermesi gerekirken **işaret değiştirmeden gösterdiği için yanlış olduğunu düşünüyorum.**

A: Diğerinde ne durum var?

D: Diğerinde de hani hmmm...**burada işlemden dolayı hani karesini aldığımda karekök kalkarken o -1'in mutlak değerce çıkması gerekiyor.**

Yukarıdaki ifadelerinden de anlaşılacağı üzere Derya'nın bu soruda çelişki yönteminin işe yaramama sebebini düşünürken ve ispat içinde yapılmış olan hatayı ararken soruda yapıldığını sandığı işlem hatalarına odaklandığı belirlenmiştir. Bu durum "ispatta yapılan işlemde hata var"; "işaretin yön değiştirmesi gerekiyor oradan kaynaklanan bir hata" gibi ifadelerinde ve bu ifadelere ilişkin açıklamalarında yer almaktadır.

Hamra'nın bu ispat sorusuna verdiği tepkilerde Derya'ya yakın bir tutum sergilediği belirlenmiştir. Öncelikle çelişki yönteminin işe yaramama sebebini 0'ın yutan eleman olma özelliğine dayandırmıştır. Daha sonra ise yapılmış olduğunu düşündüğü işlem hatalarından bahsetmiştir. Aşağıda bununla ilgili ifadeleri yer almaktadır:

H: [Soruyu okur] Ya şöyle.... İşe yaramama sebebi ... ya buradaki [ilk ispatı gösterir] **0'ın yutan eleman olması çarpma işleminde...mesela burada -1 ile çarpıyor ama 0 da olduğu için onu hiçbir şekilde etkilemiyor hani -1 ile çarpmak...ama sonuçta -1 büyüktür 0 oluyor mesela aşağıda...hmmm...bu şekilde...immm... [yine ilk ispata döner] burada çarpma yani 0'ın çarpma işlemindeki yutan eleman olması bence sonucu değiştirmiş.**

A: Neden? (İSGF)

H: İu... çünkü mesela bir normal pozitif bir tamsayıyı -1 ile çarptığımız zaman burayı da immm.. mesela -1 ile çarpmam gerekiyordu yani şu... eğer mesela 0 olmasaydı başka bir pozitif tamsayı olsaydı o zaman **ikisiyle eksiyle çarptığım için burada işaret de değiştiriyorduk galiba...** [ilk ispatta > işaretini gösterir] ...karekökte negatiflik var mıdır.....hah... durdu artık kafam.... -1 ile -1'i çarpıncaiçinde..... **-1 ...burada şuradaki işareti değiştirmek gerekmiyor mu** [ilk ispattaki > işaretini gösterir]...immm.... Çünkü sonuçta negatif bir sayıyla çarpmışız.... Ama karekökün içindeki negatif bir sayı**ispat içinde yapılan hata.....karekök içinde negatif bir sayı....işleme koyuyoruz.** ...mesela a b olduğu zaman fark eder **hani o zaman işaret değişmesi gerekiyordu işte bu artık mesela -a olmuş oluyor ama 0 olduğu için bu durum şu an hiçbir şekilde etkilemiyor bunu.....[düşünür].....[içinden tekrar okur] köklü sayı büyüktür 0'dan.....immm.....**karekök içinde -1 ile -1'i 'çarpınca +1 yapmaz mı? Hani şu şekilde [altına yazar] -1 çarpı -1 olmaz mı artık? Yani o da +1 olur ...o zaman çıkan sonuç ta +1 olur .o yüzden +1 büyüktür 0'dan olur...yani aslında...immm... sağlamış oluyor çelişki olmamış oluyor ...burada...yani ben öyle düşünüyorum yani.... O zaman çelişki olmamış oluyor....o zaman....nasıl oluyor.....immm..... çelişki değilse.... -1 büyüktür 0 'dan olmuş oluyor o zaman....yani şu [$\sqrt{-1}$ büyüktür 0 ifadesini daire içine alır]..immm.. bu şekilde olduğunu düşündüm ...**yani karekök içinde -1'leri çarptığım zaman artık zaten +1 olur bence ...immm...çünkü eksi eksi çarpınca pozitif... o zaman +1 >0'dan olur....o zaman bu çelişki olmaz.... $\sqrt{-1}$ olur.******

Yukarıdaki ifadelerinden anlaşılacağı üzere Hamra'nın çelişki yönteminin işe yaramama sebebini soruda yapıldığını sandığı bir takım işlem hatalarına dayandırdığı görülmüştür. "İkisiyle eksiyle çarptığım için burada işaret değiştiriyorduk galiba",

“karekök içinde -1 ile -1’i ‘çarpınca +1 yapmaz mı?’, “yani karekök içinde -1’leri çarptığım zaman artık zaten +1 olur bence” gibi ifadelerinden de anlaşılacağı üzere Hamra’nın karekök içerisindeki negatif sayıların karmaşık sayılardan oluştuğunu görmemiş olduğu, ifadelerdeki karmaşık sayıların eksiyle çarpılma durumunda sonucun ne olması gerektiğini düşünerek yapılan hatayı işlemlerde aradığı belirlenmiştir.

Hamra ve Derya’nın ifadeleri onların soruda yapılan hatayı işlemlerde aradığını göstermiştir. Hamra ve Derya’nın bu soruya verdikleri tepkilerde özgün bir fikir üretmedikleri, daha önce öğrendikleri bir takım işlemsel fikirlerle yola koyuldukları yorumu yapılabilir. Sorunun yapısından dolayı öğretmen adaylarının verdikleri tepkilerin dışsal ispat şemasının hangi alt grubuna girdiği saptanamamıştır fakat Hamra ve Derya’nın dışsal ispat şemasının göstergesi olan düşünceler sergiledikleri belirlenmiştir.

4.1.2. Görev Temelli Görüşmelerde Öğretmen Adaylarının Deneysel İspat Şemalarını Ortaya Koyan Yanıtları

Bu bölümde öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde deneysel ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları incelenmiştir. Öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde deneysel ispat şemalarının alt sınıfları olan deneysel algısal ispat şemasını ve deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir. Öğretmen adaylarının deneysel ispat şemalarının göstergelerine ilişkin dağılımları Tablo 4.2’de yer almaktadır:

Tablo 4.2.

Öğretmen Adaylarının Görev Temelli Görüşmelerde Sergiledikleri Tepkilerin Deneysel İspat Şemalarının Göstergelerine İlişkin Dağılımları

İspat Şeması (Temalar)	İspat Şemasının Alt Sınıflandırma Şemaları (Alt Temalar)	İspat Şemasının Göstergeleri (Kodlar)	Öğretmen Adayı (Soru No)
Deneysel İspat Şeması	Deneysel Algısal İspat Şeması	İspatın doğruluğunu hislerine dayanarak göstermeye çalışma	Semiha (1)
	Deneysel Temel Örnekler İspat Şeması	Sadece özel bir durum için inceleme yaparak nedensel ilişkileri belirleyememe	Hamra (6)
		İspatın doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalışma	Hamra (3,5‡)

‡ bu ispat şemasına girmemekle beraber o ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere sahip olabileceğine dair deliller ve ipuçları bulundurma (sıklık hesaplamalarına dahil edilmemiştir)

4.1.2.1. Öğretmen adaylarının deneysel algısal ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları.

Öğretmen adaylarından Semiha İSF'nin birinci sorusunda ve Hamra İSF'nin altıncı sorusunda deneysel algısal ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunmuşlardır. Bu ifadeler Tablo 4.2'den de görülebileceği üzere, “İspatın doğruluğunu hislerine dayanarak göstermeye çalışma” ve “Sadece özel bir durum için inceleme yaparak nedensel ilişkileri belirleyememe” olarak sınıflandırılan ispat şemasının göstergeleri olarak değerlendirilmiştir. Bu göstergelere ilişkin ayrıntılar aşağıda alt başlıklar altında sunulmuştur:

4.1.2.1.1. Öğretmen adaylarının ispatın doğruluğunu hislerine dayanarak göstermeye çalıştıkları durumlar.

Semiha İSF'nin birinci sorusu olan “Herhangi üç pozitif ardışık tam sayının çarpımının her zaman 6'nın katı olduğunu gösteriniz” sorusuna ilişkin yanıtlarında (üçüncü yolunu kastederek) ardışık üç sayının çarpımının 6'nın katı olduğuna dair güçlü bir hissi olduğuna yönelik ifadeler kullanmıştır. Aşağıda bu duruma ilişkin açıklamalarına yer verilmiştir:

*S: Düşündüm...6k... çünkü 2k [güler] **çıkmadı** aslında **bence çıkması gerekiyordu** bu şekilde ama ben düşünemiyorum sanırım burada ...buradan da çıkması gerekiyordu [üçüncü yolu gösterir]...6'nın katı diye düşününce biri çıktı ...niye çıktıherhangi ardışık ...şey...bilmiyorum böyle çıktı ama ...niye ki yanlış mı çıkartmış...olamam 8k kare çıktı hala [üçüncü yola bakar] burası denk...*

A: Mesela burayı (ikinci yolu gösterir) 5k-1, 5k-2, 5k alsan ve orada çıkmasa ama burada çıkırsa [ikinci yol sağ sütünü gösterir] ne olur ne yorumlarsın? (İSGF)

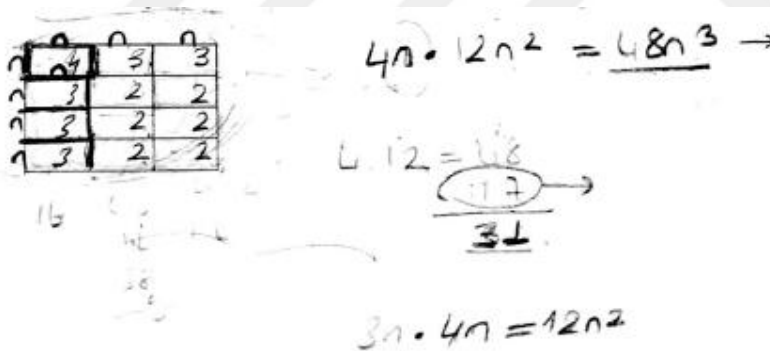
S: Yani o zaman ispat olmamış diye yorumlamış olmak istemem çünkü bu aldığım şey de bence doğrudur oradan da bir şekilde çıkması gerekiyor bence örneğin buradan da [üçüncü yolu gösterir] 2k diye aldım buradan da çıkması gerekiyordu bence sonucun ama ben çıkaramadım bence sonuçta aldığım sayılar ardışık sayılar.

Şekil 4.3'ün 2 ile numaralandırılmış kısmından da görüldüğü üzere Semiha'nın 6'nın içinde 2'nin ve 3'ün katlarını belirlediği fakat bu düşüncesini daha ileriye götüremediği belirlenmiştir. Üçüncü denemesinde de bunu başaramamıştır. Şekil 4.3^'ün 2 ve 3 ile numaralandırılmış kısımlarında görüldüğü üzere Semiha'nın bir çok deneme yaptığı fakat ispatını doğru olarak yapılandıramadığı görülmüştür. Semiha'nın bunu göstermek için yeterli gerekçeleri bulamamış olabileceği düşünülmüştür. Semiha'nın “bence çıkması gerekiyordu” gibi ifadelerinden de anlaşılacağı gibi bu ispatın doğru olduğuna inandığı, doğru akıl yürütme yaptığı fakat bunun için yeterli delilleri sunamadığı söylenebilir.

Daha önceki bölümlerde (4.1.1.3.1. başlığı altında) Semiha'nın bu tepkisini bu soruya ilişkin yanıtlarının büyük bölümünde devam ettirmiş olduğundan ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler ortaya koyduğu söylenmiştir. Dolayısıyla Semiha'nın bu soruda ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını, bunun yanında da deneysel algısal ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunduğu belirlenmiştir.

4.1.2.1.2. Öğretmen adaylarının sadece özel bir durum için inceleme yaparak nedensel ilişkileri belirleyemedikleri durumlar.

Öğretmen adaylarından Hamra'nın İSF'nin altıncı sorusu olan cam levhaları ayıran tahta şeritlerden yapıldığı belirtilen 3'e 4 birimlik bir pencere çerçevesi çiziminin verildiği genel bir ifade yazılmasının istendiği soruya verdiği yanıtlarda ispat için öncelikle çerçeve içindeki 1'er birimlik karelere yöneldiği görülmüştür. Hamra'nın öncelikle her bir kare için kaç tane şeride ihtiyaç olduğunu belirlemeye çalıştığı, bunun için en üstte soldaki kareye 4, bunu takip eden aynı satır ve sütundaki karelere 3, 3, 3 yazdığı; daha sonra bu örüntüyü devam ettiremediği görülmüştür. Hamra'nın bu soruya ilişkin yanıtı Şekil 4.8'de görülebilir:



Şekil 4.8. Hamra'nın İSF'nin altıncı sorusuna ilişkin yanıtı

Şekil 4.8'de görüldüğü üzere Hamra sol üst köşedeki birim karenin çevresiyle ($4n$) birim kare sayısını ve her bir karenin alanını çarpmıştır. ($4n \cdot 12n^2$). Buradan da bir sonuca ulaşamadığı, her bir kutunun 4 birim olmasını düşünerek bunu toplam kare sayısı olan 12 ile çarptığı, daha sonra mükerrer olarak yazdığı şerit uzunluğunu (17) bu sayıdan çıkardığı belirlenmiştir. Hamra'nın sadece özel bir durum ile ilgili inceleme yaptığı, diğerlerini yaptığı çizimlerle ikna etmeye çalışarak gördüğünün dışında başka bir kısma geçemediği; var olan durumu tespit ettiği fakat genelleme için örüntü bulamadığı görülmüştür. Hamra'nın sonuca bir şekilde gideceğini algıladığı fakat çıkarım yapamadığı ve

genellemeye götürecek çıkarımlar yapmayı başaramadığı söylenebilir. Hamra'nın örüntüsünü farklı boyutlardaki birkaç pencere için devam ettirdiği takdirde bir genellemeye ulaşılabileceği görülmüştür. Hamra'nın mantıksal argüman eksikliği olduğundan ve nedensel ilişkileri göremediğinden dolayı deneysel algısal ispat şemasının göstergesi olan tepkiler gösterdiği belirlenmiştir.

4.1.2.2. Öğretmen adaylarının deneysel temel örnekler ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları.

Öğretmen adaylarından Hamra İSF'nin üçüncü sorusunda deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunmuştur. Bunun yanında Hamra İSF'nin beşinci sorusunda tam olarak deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunmasa da ifadelerinde bu ispat şemasına ilişkin bazı düşüncelere sahip olduğuna ilişkin ipuçlarına rastlanmıştır. Bu ifadeler Tablo 4.2'den de görülebileceği üzere, “*İspatın doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalışma*” olarak sınıflandırılan ispat şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Bu göstergeye ilişkin ayrıntılar aşağıda alt başlık altında sunulmuştur:

4.1.2.2.1. Öğretmen adaylarının ispatın doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalıştıkları durumlar.

Hamra İSF'nin üçüncü sorusu olan “Herhangi bir pozitif tamsayı n için eğer n^2 3'ün katıysa n 'nin de 3'ün katı olduğunu gösteriniz” sorusuna ilişkin yanıtlarında ispatı yapılandırırken n 'ye 3, 4, 6, 9 ve 12 değerlerini vermiş; n^2 'ye ise bunun karşılığı olarak 9, 16, 36, 81 ve 144 değerlerini vermiştir. Böylelikle 3'ün katı olmayan değerleri de görmüştür ve bu duruma uyan değerleri işaretlemiştir. Hamra bu değerler için ifadenin doğru olmasının ifadenin ispatı için yeterli olduğunu düşündüğüne ilişkin açıklamalar yapmıştır. Aşağıda bu açıklamalara ilişkin bir kesit bulunmaktadır:

H: Bu şekilde....pozitif yapacak değerlere baktığım zaman hep bunlar 3'ün katı olmuş oluyor ve bunların kareköklerini aldığım zaman da 3'ün katı olmuş olan ifade olmuş oluyor . Mesela 3 aldığım zaman 9, 6 aldığım zaman 36 gibi ... yani bu durumda n karesi 3'ün katıysa n 'nin de 3'ün katı olduğunu göstermiş oldum sanırsam ihhh [gül].

A: Herhangi bir pozitif tamsayı için öyle mi?

H: Evet.

Hamra'nın bu soruya ilişkin yanıtı aşağıda Şekil 4.9'da yer almaktadır:

$$n \in \mathbb{Z}^+$$

$$n^2 = 3k$$

$n=3$	$n^2=9$
$n=4$	$n^2=16$
$n=6$	$n^2=36$
$n=9$	$n^2=81$
<hr/>	
$n=12$	$n^2=144$

Şekil 4.9. Hamra'nın İSF'nin üçüncü sorusuna ilişkin yanıtı/1

Hamra'ya Şekil 4.9'da görüldüğü gibi ispatını yapılandırırken n 'ye bazı değerler vererek yapılandığı ispatına ait ifadeleri hakkında bu yaptıklarından emin olup olmadığının anlaşılması için herhangi bir değer (mesela 125) için de ispatın doğru olup olmayacağı sorulmuştur. Hamra bu soru üzerine çelişkiye düştüğünü belirten ifadeler kullanmıştır. Aşağıda Hamra'nın açıklamalarından bir kesit sunulmuştur:

A: Bu yaptığının doğru olduğuna inanıyor musun? Yani bu yaptığın şey herhangi bir n tamsayısı için doğru mudur yani doğruluğunu ispatlamaya yetiyor mu? Mesela 125...ispatlamış oldun mu?

H: Ya şöyle ummmm.... Aslında tam....u... yani gösterdim mi.... göstermedim mi....[düşünür].... olur bence ya.... **Bence tam göstermiş oldum mesela 125 olsa mesela n ...eee... onun ...karekök içindeki değeri 3'ün katı değil o yüzden mesela 125'in n karesi de 3'ün katı olmuyor**şu an....ikilemede kaldım.

Hamra'nın ispat için belli sayıları denediği bir kesit aşağıda Şekil 4.10'da yer almaktadır:

$$n^2 = 3k$$

$$\sqrt{n^2} = \sqrt{3k}$$

$$n = \sqrt{3k}$$

$k=3$
$n = \sqrt{3 \cdot 3} \Rightarrow n=3$
$k=12$
$n = \sqrt{3 \cdot 12} \Rightarrow n=6$
$k=4$
$n = \sqrt{3 \cdot 4} = \sqrt{12}$

Şekil 4.10. Hamra'nın İSF'nin üçüncü sorusuna ilişkin yanıtı/2

Hamra'nın ispata ilişkin gerekçelendirmelerini belirli sayılar üzerinden yaptığı görülmüştür. Şekil 4.10'da görüldüğü gibi Hamra oluşturduğu eşitlikte her iki tarafın karekökünü alarak n için $n = \sqrt{3k}$ değerini elde etmiştir. Daha sonra bu ifadedeki k sayısına belli değerler vererek ispatı tamamlamaya çalışmıştır. Hamra bunun üzerinde konuşurken küçük ve büyük sayılardan bahsetmiştir. Hamra ispatı belli değerler üzerinden tamamlayınca bu ispatı “küçük sayılar” için yapmış olduğunu, fakat “büyük sayılar” için ne yapması gerektiğini bilmediğini gösteren ifadeler kullanmıştır. Hamra'nın büyük ve küçük sayılar hakkındaki düşünceleri aşağıdaki gibidir:

H: Şöyle...eee...iki tane vereyim diye düşündüm ama daha sonra bunu ($n = 3k$ ifadesini gösterir) katmadım şuradan yola gittim [çizdiği oku gösterir].

A: n kare $3k$ ise....

H: Hmm n kare $3k$ ise dedim.

A: n de 3 'ün katı mıdır ona bakacaksın?

H: Evet.

A: Evet?

H: Daha sonra k 'nin n 'yi pozitif yapacak değerlerine baktığım zaman ...ki çıkan ifade mesela .

A: Nedir o değerler ne verdin k 'ye?

H: Mesela 3 verdim... 9 Karekökten çıkabiliyor tamsayı yapıyor... mesela 12 ...mesela bu iki değer sağlıyor bu ifadeyi.

A: Evet devam..yani k 'ye 3 verdin ve k 'ye 12 verdin evet...çıkıtlar karekökten.

H: Evet çıktılar.

A: Eee?

H: Eee.... Ve çıkan sonuçlar 3 'ün katı .

A: Evet.

H: **Oldu...onların karesini aldığımız zaman da zaten 3 'ün katı olmuş oldu...yani... göstermiş oldum...küçük sayılar için.... Ama büyük sayılarda nasıl yapacağız buna emin değilim tam şu an**

A: Küçük sayılar için göstermiş oldun... küçük sayı deyince ne anlıyorsun? iki basamak mı bir basamak mı?

H: **Immm...1'den 100'e kadar olan sayılar benim için küçüktür 1ile 100 arasındaki** [gülür].

A: Şimdi...eee... sana sorduğum zaman yani işte n kare 3 'ün katıysa n 'in de 3 'ün katı olduğunu göstermiş oldun mu?... olmadın mı? Olduysan neden oldun? Olmadıysan neden olmadın? (İSGF)

H: **Hmmm. Ya düşünüyüm....göstermiş oldum mu olmadım mı....[yaptığı işlemlere bakar]... ya gösterdim sanırım yaaa... tam emin olamıyorum şu an da....[düşünür]....gösterdik bence gösterdik...şöyle... çünkü mesela ben burada k 'yi herhangi bir... 3 'le çarptığım için 3 'ün katı olması gerekiyor n ... o zaman n^2 de 3 'ün katı oluyor zaten.. n 'nin karesini aldığım zaman...burada...hmmm....göster....dim...çünkü bu n sayısının karekökten çıkabilmesi için k sayısı... 3 'ün katı çıkıyor...mesela.... **81 için de ...27.... O da 3 'ün katı.... O zaman k sayısı 3 'ün katı olduğu zaman n dışarı.... Yani tamsayı olarak çıkabiliyor ... o zaman n de 3 'ün katı olmuş oluyor . yani 3 verdiğimiz zaman çıkabiliyor karekökten dışarı 12 verdiğimiz zaman çıkabiliyor yani k sayısını 3 'ün katı verdiğimiz zaman n sayısı karekökten dışarı çıkabildiği için n sayısı da otomatikman 3 'ün katı olmuş oluyor.****

A: ... ve böylelikle ispatlamış oluyorsun.

H: Evet.

Yukarıdaki ifadelerinden ve Şekil 4.10'dan da anlaşılacağı gibi Hamra'nın belli değerler için bulduğu sonuçların ispatın doğruluğunu göstermesinde yeterli olacağını düşündüğü söylenebilir. Buradan Hamra'nın bu soruya ilişkin tepkilerinde deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilediği tespit edilmiştir.

Hamra'nın, bir iddianın ve buna yönelik verilen üç ispatın incelenmesinin ve her bir ispatın matematiksel doğruluğu hakkında yorum yapılmasının istendiği, İSF'nin beşinci sorusuna verdiği yanıtlarda da deneysel temel örnekler ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkileri tam olarak ortaya koymasa da bu ispat şemasına işaret eden bazı ifadelerde bulunduğu belirlenmiştir.

Hamra beşinci soruya ilişkin olarak ilk ispata ait açıklamalarında rastlantısal olarak seçilip ispatı doğru yaptığını düşündüğü sayının çok büyük bir sayı olduğunu belirtmiştir. Hamra bu soruda üçüncü soruya ilişkin verdiği yanıtlardaki yaklaşımına benzer bir yaklaşım sergilemiştir. Hamra'nın açıklamaları aşağıdaki gibidir:

H: Yani tek bir sayının seçilmesi ...ne kadar doğru olur diye düşündüm yani sonuçta rastlantısal olarak bir sayı seçilmiş ..ama...bir tek sayının seçilmesi hani o benim kafamı kurcaladı....ama aslında bayaaaa büyük bir sayı... hani altı basamak.... dokuz basamaklı bir sayı.....yeterlidir ya... zaten kocaman bir sayı vermiş dokuz basamaklı bir sayıdan yola çıkarak yapmışbu ispatın matematiksel doğruluğu.....yani bir tane örnek verdiği için bu artık her sayıda ...uu... ya ispat ederken bir örnek vermesi....uu... bu ..bu iddia...yani hepsi için doğru olduğunu gösterir mi....yani bütün sayılar için doğru olduğunu gösterir mi.....[düşünür]ya iddia doğru ama bence ispat yetersiz.

A: Az önce ispat doğrudur demiştin.

H: Ben o zaman yanlış ifade kullandım şöyle söylüyeyim ispat yetersiz olduğunu düşünüyorum ispatın.

A: Neden? (İSGF)

H: Çünkü bir tane örnekle bunu ifade etmiş yani herhangi bir örnek ama tek bir örnek yani o yüzden direk baktığım zaman bu sayıda doğru oldu... o zaman bütün sayılarda doğrudur diyemem

A: Peki çok büyük bir sayıydı falan dedin az önce?

H: Aslında büyük bir sayıydı hani.

A: Büyük sayı olduğu zaman ne oluyor ki? Yani çok büyük bir sayı alırsa ispatlayabilir mi?

H: Yani en azından küçük sayılara oranla daha uu... nasıl söylüyüm ..daha....inandırır yani yani sonuçta büyük sayıda oluyor küçükte de zaten ben kendim denerimşöyle... büyük sayılarda oluyorsa ben küçük sayılarda da bunu sağlayabilir diye düşünürüm ama bana sadece burada bu ispata bir tane örnek vermiş sadece.

A: Mesela üç tane büyük sayı örneği verseydi?

H: I uu... o zaman daha....uuu...net olurdu bence.

Açıklamalarından da anlaşılacağı üzere, Hamra'nın hem bir örnekle ispatın yetersiz olduğunu söylediği, hem de "aslında büyük bir sayıydı" diyerek küçük sayılara oranla büyük sayılarla ifadenin doğruluğunun sağlanmasının daha güvenli olma ihtimalinden bahsettiği görülmüştür. Hamra bu konuda tutarsız ve çelişkili ifadeler vermiştir. Örneğin bu soruda bir yerine üç tane örnek verilseydi daha net olacağını belirtmiştir. Araştırmacı konuyla ilgili daha derinlemesine sorular yönelttiğinde Hamra birkaç örneğin bir örneğe oranla daha güvenilir olduğu şeklinde açıklamalar yapmıştır. Bunun üzerine araştırmacı bu durumun ispat olup olmadığı hakkında soru yönelttiğinde Hamra ispat sayılmayabileceğini söylemiştir. Bununla ilgili açıklamaları aşağıdaki gibi olmuştur:

H: Hıhı şöyle toparlayayım o zaman... yani şöyle iki üç tane daha örnek olsaydı derdim ki o zaman yani o zaman hepsini sağlayabiliyor bunda da sağlamış bu örnekte de sağlamış bu örnekte de sağlamış.

*A: O zaman ispat yapmış olur muyduk? Üç örnek ya da beş örnek daha yapsaydık ve **hepsi de büyük sayılarla olsaydı ispatımız yeterli olur muydu?***

*H: **Olmazdı...çünkü örnekten yola çıkmışız yani sadece o sayılar üzerinden yola çıkmışız başka sayı vermemişiz yani başka sayıları verecek bir ifade de yok yani sadece o üç örnek var.***

Hamra yukarıdaki ifadelerinde ilk ispata verdiği tepkilerde ne kadar bir ya da iki örnekle ispat yapılamayacağını belirtse de deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya koyan tepkiler vermiştir. Sayının “*kocaman bir sayı*” olduğunu vurgulamış; bir örnek değil de iki ya da üç örnek olsaydı ikna olabileceği yönünde ifadelerde bulunmuştur. Hamra’nın araştırmacıya açıklama yaparken derslerde ya da herhangi bir yerde öğrendiği düşünülen “*örnekle ispat olmaz*” yargısını dışa vurmuş olabileceği; fakat kendini ikna ederken yine de bu örneklerden yola çıkma yolunu seçmiş olabileceği düşünülmektedir. Daha önceki bölümlerde (4.1.1.3.5 başlığı altında) Hamra’nın bu soruya ilişkin ifadelerde ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının göstergesi olan ifadelerde bulunduğu tartışılmıştır. Yukarıdaki ifadelerinden ise Hamra’nın tam olarak deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya koyan tepkilere sahip olmasa da bu ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere sahip olabileceğine dair ipuçları vermekte olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla İSF’nin beşinci sorusuna ilişkin yanıtlarında Hamra’nın ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği, bunun yanında deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya çıkaran bazı düşüncelere sahip olabileceğine dair ipuçları vermekte olduğu saptanmıştır.

4.1.3. Görev Temelli Görüşmelerde Öğretmen Adaylarının Analitik İspat Şemalarını Ortaya Koyan Yanıtları

Bu bölümde öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde analitik ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları incelenmiştir. Öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde analitik ispat şemalarının alt sınıfı olan analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir. Bu çalışmada görev temelli görüşmelerde öğretmen adaylarının analitik aksiyomatik ispat şemalarını ortaya koyan tepkilerine rastlanmamıştır. Öğretmen adaylarının analitik ispat şemalarının göstergelerine ilişkin dağılımları Tablo 4.3’te yer almaktadır. Bunun yanında öğretmen adayları analitik ispat şemasının alt sınıflamalarına dâhil edilemeyecek nitelikte yalnızca analitik ispat şeması olarak değerlendirilebilecek tepkiler de sergilemişlerdir.

Tablo 4.3.

Öğretmen Adaylarının Görev Temelli Görüşmelerde Sergiledikleri Tepkilerin Analitik İspat Şemalarının Göstergelerine İlişkin Dağılımları

İspat Şeması (Temalar)	İspat Şemasının Alt Sınıflandırma Şemaları (Alt Temalar)	İspat Şemasının Göstergeleri (Kodlar)	Öğretmen Adayı (Soru No)
Analitik Şeması	İspat Analitik Dönüşümsel İspat Şeması	İspatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma	Semiha(4,6) Derya (1‡, 4,6) Hamra (4‡)
		Ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandırma	Semiha (3‡) Hamra (2)
		İspatın doğruluğunu mantıksal çıkarımlarla destekleyerek açıklama	Semiha (5) Derya (5)

‡ bu ispat şemasına girmemekle beraber o ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere sahip olabileceğine dair deliller ve ipuçları bulundurması (sıklık hesaplamalarına dahil edilmemiştir)

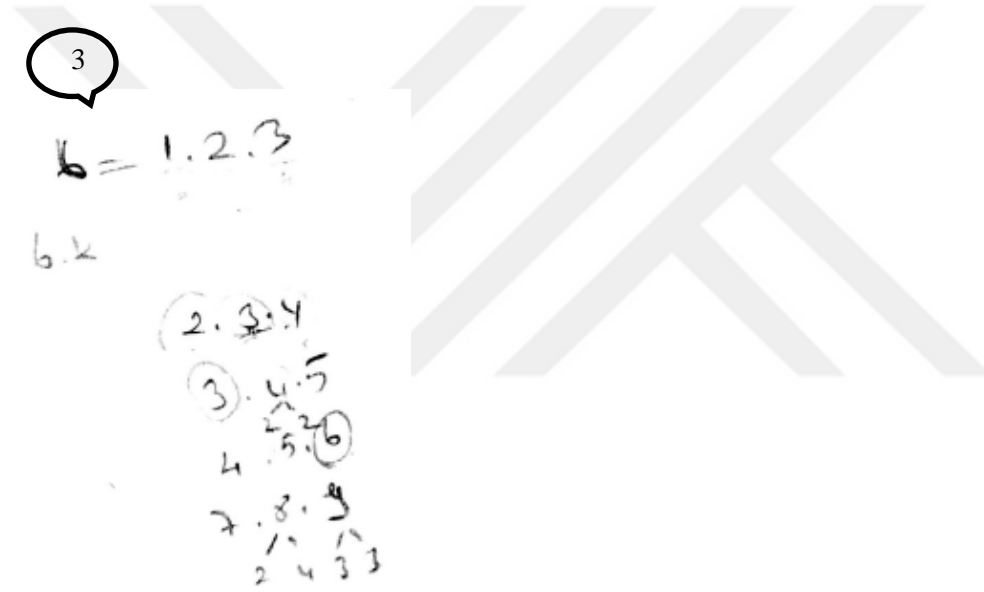
4.1.3.1. Öğretmen adaylarının analitik dönüşümsel ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları.

Öğretmen adayları İSF'nin ikinci, dördüncü, beşinci ve altıncı sorularında analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunmuşlardır. Bunun yanında öğretmen adayları tam olarak analitik dönüşümsel ispat şeması olarak ifade edilmese de tepkilerinde bu ispat şemasına ilişkin bazı düşüncelere sahip olacaklarına dair ipuçları vermişlerdir. Bu ifadeler Tablo 4.3'ten de görülebileceği üzere, “İspatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma”, “Ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandırma”, “İspatın doğruluğunu mantıksal çıkarımlarla destekleyerek açıklama” olarak sınıflandırılan ispat şemasının göstergeleri olarak değerlendirilmiştir. Bu göstergelere ilişkin ayrıntılar aşağıda alt başlıklar altında sunulmuştur:

4.1.3.1.1. Öğretmen adaylarının ispatlarını doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandıkları durumlar.

Öğretmen adaylarından Semiha ve Derya'nın, İSF'nin dördüncü ve altıncı sorusuna ilişkin yanıtlarında “ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandıkları” belirlenmiştir. Derya'nın, İSF'nin birinci sorusuna ve Hamra'nın İSF'nin dördüncü sorusuna ilişkin yanıtlarında ispatı tam olarak doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırımsalar da, doğru akıl yürütme ile dönüşüm yapmaya ilişkin bazı fikirlere sahip olduklarına dair deliller öne sürdükleri belirlenmiştir. Aşağıda öğretmen adaylarının ifadeleri yer almaktadır:

Derya'nın, İSF'nin birinci sorusu olan "Herhangi üç pozitif ardışık tam sayının çarpımının her zaman 6'nın katı olduğunu gösteriniz" sorusuna verdiği yanıtlarda ilk iki denemesinde (4.1.1.3.1 başlığı altında) dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilediği belirtilmiştir. Derya'ya daha önceki benzer süreçlere takılmadan kendi akıl yürütmesiyle neler yapabileceğini gözlemlemek için bu soruda dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkileri gösterdiği durumları hiç bilmeseydi farklı bir yolu deneyip deneyemeyeceği sorulmuştur. Bu soru üzerine Derya öncelikle 6 sayısını 1, 2 ve 3 sayılarının çarpımı olarak yazmıştır. Daha sonra bu ardışık sayıların birer fazlası olan 2, 3, 4; 3, 4, 5 ve 4, 5, 6 sayılarını çarpım durumunda yazan Derya'nın bunların hepsinin içerisinde 2 ve 3 çarpanı olduğunu keşfettiği görülmüştür. Bu yanıtına ilişkin yaptıkları Şekil 4.11'de görülebilir:



Şekil 4.11. Derya'nın İSF'nin birinci sorusuna ilişkin yanıtı/2

Şekil 4.11'de görüldüğü üzere Derya'nın farklı sayıların içerisinde 6 çarpanını bulmak için denemeler yaptığı, açıklamalarının doğru akıl yürütmeye dayandığı fakat kendisine yaptıklarının ispat olup olmadığı sorulduğunda, yaptığının ispat olmadığını düşündüğünü belirttiği görülmüştür. Derya'nın açıklamaları aşağıdaki gibidir:

D: Burada aslında ben ...u...işlemleri yaptığımda 6'nın çarpanını elde etmeye çalıştım hmmm...sonuçta üç ardışık sayı dediği için ben onları yazdım ve onları çarptığımda 6'nın bir katı gelmesini bekledim uu.... Burada hani aslında sayı verip deneyince doğruluğu gözüküyor ama bu şekilde ispatladığı da söyleyemem[düşünür]

A: Bu yolları hiç bilmeseydin başka bir yol deneyebilir miydin? Başka bir yöntem deneyebilir miydin? Aklında bir şey var mı? (İSGF)

D: Şey olarak düşünüyorum ama...6....bir çarpı iki çarpı üç uu...diye düşündüm ... burada sonuçta bu ardışık sayılar bu çarpımları işte bunu genelleştirmeye giderken[düşünür].

A: Şimdi 6 eşittir 1, 2, 3 dedin onunla yapmaya çalıştın.

D: İşte bunu genelleştirmeye çalıştım ... ama işte orada tam bir şey bulamadım.

A: Yani üç ardışık sayı aldın sanırım .

F: Evet 6'yı 1, 2, 3 şeklinde yazabiliriz hani bunlar da zaten ardışık üç sayı işte bundan bunun doğruluğundan yola çıkarak bir şeyler yapabiliriz ama şu an aklıma bir şey gelmiyor....[düşünür] hani aslında her sayıda 1 çarpanı vardır ...uu... 2, 3 çarpanıuu... ama ardışık olması gerekir[yazar] ...uu.... Deneme yanılma gibi bir şey yaptım ama ...hani... ardışık sayıları birkaç kere yazdım her yazdığımda zaten ...2 çarpanı zaten muhakkak gelir..... mesela 6, 2 ve 3 ...3'ün çarpımı diye düşünürsem iki her zaman muhakkak geliyor 3 de zaten üç tane sayı her üçlüde 3'ün katı geliyor zaten ... buradan yola çıkarak altının gelebileceğini düşündüm...birkaç deneme yaptım işte 2, 3, 4; 3, 4,5 gibi...uu... her üçlüde zaten 3'ün katı muhakkak geliyor ..hani üçlü olduğu için üç fazlası ya da 3'ün katları şeklinde düşünürsek Muhakkak bu üçlüde bir tane 3'ün katı geliyor...uu... 2 de aynı şekilde 2'nin de en az bir katı geliyor o yüzden hani elde ettiğimiz sayının da muhakkak 6 çarpanı oluyor ...bunu düşündüm.

A: Sence bu yaptığın ispat mı?(İSGF)

D: Buna ispat diyemeyiz. yani bu ben hani...burada birkaç şeyi deneme yanılma yoluyla buldum ...hmmmm... tam anlamıyla ispat diyemem.

Yukarıdaki açıklamalarından da anlaşılabilir üzere Derya'nın 6'nın katı olmayı 2 ve 3 sayılarının katı olmaya dayandırdığı ve bunun yanında doğru akıl yürütmesine ilişkin doğru açıklamalar yaptığı, fakat bu yaptıklarının bir ispatı oluşturmayacağını düşündüğüne ilişkin açıklamalarda bulunduğu belirlenmiştir. Buradan, Derya'nın analitik dönüşümsel ispat şemasını gösteren bazı belirtilerden biri olan dönüşümsel bir fikre sahip olmasına rağmen bu fikirleri örüntüsünü genellemede kullanamadığı belirlenmiştir. Daha önceki bölümlerde (4.1.1.3.1 başlığı altında) Derya'nın birinci soruda ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan ifadelerinin de bulunduğu tartışılmıştır. Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı üzere Derya akıl yürütmesini genel bir çıkarıma ulaşmak için kullanamadığından tam olarak analitik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler vermediği fakat dönüşümsel fikre sahip olduğu bunun yanında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilediği saptanmıştır.

Semiha İSF'nin dördüncü sorusu olan “b tek doğal sayı ise 8'in $b^2 - 1$ 'i böldüğünü gösteriniz” sorusunu yanıtlarken öncelikle b'ye bir tek sayı ifadesi ($b=2n-1$) vermiş, daha sonra bu ifadenin karesini alarak içerisinde 8'in katını arama yoluna gitmiştir. Semiha'nın 8'in katı için 4 ve 2 çarpanlarını aradığı, 4 çarpanını denklem içerisinde elde ettikten sonra $n.(n+1)$ ifadelerinin bir tek ve bir çift sayının çarpımı olacağı çıkarımını yaptığı görülmüştür. Semiha'nın ilgili yanıtı Şekil 4.12'de yer almaktadır:

$$\begin{aligned}
 & \text{b} = 2k-1 \quad \text{b}^2 \neq 4 \\
 & \text{b}^2 = 4k^2 - 4k + 1 \\
 & \text{b}^2 - 1 = 4k^2 - 4k \\
 & \quad \quad \quad 4k(k-1) \neq 4 \cdot 2 \\
 & \quad \quad \quad k - (k-1) = 2 \ll \\
 & \quad \quad \quad \frac{4k \cdot (k-1)}{8} = \frac{4k \cdot (k-1)}{4 \cdot 2} \\
 & \quad \quad \quad (2k-1)(2k) \\
 & \quad \quad \quad 4k^2 - 2k
 \end{aligned}$$

Şekil 4.12. Semiha'nın İSF'nin dördüncü sorusuna ilişkin yanıtı

Semiha'ya ispatını doğru yapılandırmasına temel teşkil eden fikri sorulduğunda ikna edici yanıtlar vermiştir. Semiha'nın ilgili açıklamaları aşağıda yer almaktadır:

A: Buradaki anahtar mesele ne? Ana mesele, temel konu, senin ispatında budur bundan dolayıdır dediğin şey ne? (İSGF, GİGF)

S: İmmmm yani bulduğum şeyde 4 çarpanının gelmesi ve iki tane ardışık sayının gelmesi ben b^2-1 'de 4 çarpanını bulduğum için 8'in 4 çarpanını götürürebildim ve iki ardışık sayının çarpımının 2'nin katı olduğunun konusu olduğu için yani direk yazabildim.

Yukarıdaki açıklamalarından ve Şekil 4.12'den de görüleceği üzere, Semiha'nın doğru akıl yürütme yaparak ve ikna edici tutarlı basamaklar yapılandırarak ispatını tamamladığı söylenebilir. Semiha'nın konuyu ele alış ve sergileyiş biçimi düşünüldüğünde bu soruya ilişkin yanıtlarında analitik dönüşümsel ispat şemasının göstergesi olan tepkiler ortaya koyduğu saptanmıştır.

Derya'nın da Semiha gibi dördüncü sorunun ispatını doğru bir biçimde yapılandığı görülmüştür. Derya öncelikle b 'ye $2k+1$ tek sayı ifadesi vermiş, daha sonra $b^2 - 1$ ifadesini k cinsinden bulmuştur. Buradan 4 çarpanına ulaşmış; 4 çarpanının yanındaki $k(k+1)$ ifadesinin ardışık iki sayıdan oluştuğu için çift sayı barındırdığını belirtmiştir. Aşağıda Şekil 4.13'te Derya'nın yanıtı yer almaktadır.

$$\begin{aligned}
 & 8 = 1 \cdot 2 \\
 b &= 2k + 1 \\
 b^2 &= 4k^2 + 4k + 1 \\
 b^2 - 1 &= 4k^2 + 4k \\
 b^2 - 1 &= 4k(k+1)
 \end{aligned}$$

Şekil 4.13. Derya'nın İSF'nin dördüncü sorusuna ilişkin yanıtı

Şekil 4.13'ten görüleceği üzere Derya'nın ispatını doğru akıl yürütme yaparak tamamladığı belirlenmiştir. Derya'ya yaptıklarını anlatması istendiğinde kendinden emin olarak süreci anlattığı görülmüştür. Bununla ilgili açıklamaları aşağıdaki gibi olmuştur:

D: 8'in pozitif bölenlerinden yola çıktım.

A: Niye? (İSGF)

D: 8'i 4 çarpı 2 olarak düşünürsek ...burada aslında ben bu 4'ü yakaladığım için 2'yi de araştırma gereği duydum çünkü burada 4'ü böldü diye direk 8'i de böler diyemem bu yüzden hani 2'yi de araştırıyorum bu sayı için ben..

A: Burada 4 bulduğun için yanına 2 çarpanını aradığını söyledin değil mi?

D: Evet çünkü burada bir sonuç elde edicez herhangi bir sayı elde edicez ben bu sayının 8'e bölünmesini istiyorum 8'e bölünebilmesi için de içinde 8 çarpanını barındırması gerekiyor . ben 4 çarpanını zaten buldum bu sayıların içinde de 2 çarpanı zaten vardır. [k(k+1) sayısını kasteder].

Alıntıda da görüldüğü üzere Derya'nın 8 çarpanını doğru yerde aradığı, anahtar meseleyi belirlediği, çarpım durumundaki ardışık sayıların içerisindeki 2 çarpanını tespit ederek ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak tamamladığı görülmüştür. Bu yüzden Derya'nın bu ispat için analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya çıkaran tepkiler gösterdiği belirlenmiştir.

Hamra dördüncü soruya ilişkin yanıtlarında tamamıyla doğru bir ispat yapılandırılmış gibi gözükse de daha önce açıklandığı üzere (4.1.1.3.2 başlığı altında ve Şekil 4.6'da) ezberle bilgileri sonuca ilerlemeyi başardığı ve ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği belirlenmiştir. Bu soruya ilişkin yanıtlarında aynı zamanda analitik dönüşümsel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkileri tam olarak ortaya koymasa da, analitik dönüşümsel ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelerinin varlığı söz konusudur. Şekil 4.6'daki yanıtının başlangıcında Hamra'nın tümevarımsal akıl yürütme basamaklarına ilerlemeden önce b'ye tek sayı ifadesi vererek bu sayının karesini aldığı, daha sonra bu sayıyı 8'e bölerek ispatı tamamlamaya çalıştığı fakat bunu başaramadığı, derslerden öğrendiği

bilgilerle ispata devam ettiği görülmüştür. Fakat bu noktada Hamra'nın $\frac{n^2+n}{2}$ ifadesini elde ederken doğru bir akıl yürütme yaptığı görülmüştür. Aşağıda Hamra'nın ilgili ifadeleri yer almaktadır:

H: Anladım... $2n+1$ ise bunları yerine koyduğum zaman en son 8'e bölümünde şu ifadeyi elde ettim 4 parantezinde $\frac{n^2+n}{8}$ 'di daha sonra 4'le 8'i sadeleştirdiğim zaman $\frac{n^2+n}{2}$ 'yi buldum yani $n^2 + n$ 'in 2'ye bölündüğünü uu...ifa...ispat edebilirsem bu sayının 8'e bölündüğünü göstermiş oluyorum ...bu tek sayının ...uu.... Daha sonra n'ye 1 verdiğim zaman bu ifadeyi sağlıyor k verdiğim zaman şu şekilde bir ifade elde ettim ...k+1 verdiğim zaman da şu şekilde bir ifade elde etmiş oluyorum hani $k^2 + k$ 'nin ben 2'ye bölündüğünü uu.... farzedersem bu ifade nasıl bir hal alıyor onu görüyorum... en son k+2 çıktı bu $2k+2$ 'de zaten 2'nin bir katı olduğu için diyorum ki o zaman bu ifade 2'ye tam bölünüyor...o zaman $b^2 - 1$ de 8'i böldüğünü göstermiş oldum.

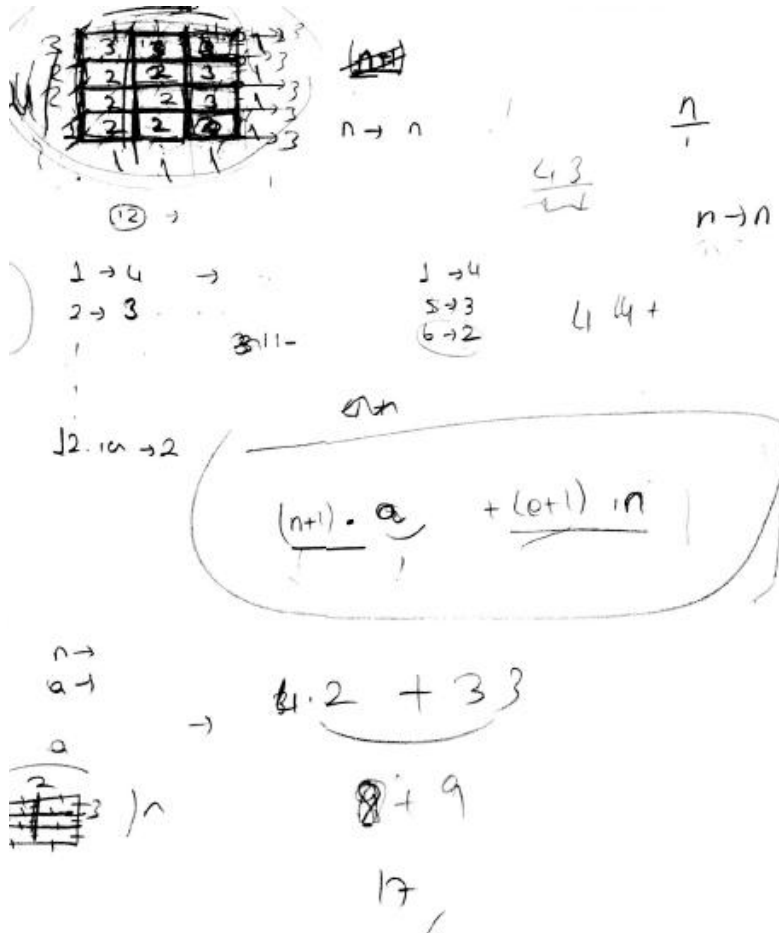
Yukarıdaki ifadelerinden de anlaşılabilceği üzere Hamra elde ettiği ifadeyi sadeleştirebilmeyi başarır ise ispatı yapmış olacağından bahsetmiştir. Bu da onun (tam olarak analitik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler olmasa da) doğru akıl yürütmeye ilişkin bazı fikirler taşıyarak analitik ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere sahip olduğunun bir göstergesidir. Fakat Hamra'nın daha sonra tümevarım yöntemini bilmediği görülmüştür. Dolayısıyla Hamra'nın (4.1.1.3.2 başlığı altında) ağırlıklı olarak dışsal ispat şemasını ortaya çıkaran tepkiler gösterdiği; bunun yanında neyi ispatlayacağı hakkında bilgiye sahip olduğu için analitik dönüşümsel ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere sahip olduğu belirlenmiştir.

Semiha cam levhaları ayıran tahta şeritlerden yapılan 3'e 4 birimlik bir pencere çerçevesi çizimi verilen herhangi bir uzunluktaki pencere için genel bir ifade yazılmasının istendiği altıncı soruyu anlamakta sıkıntı yaşamıştır. Semiha soruyu anlamadığı için ilk önce bu ispatı yapamayacağını, bu konuda fikri olmadığını söylemiştir. Araştırmacıyla soru kökünü gözden geçirildikten sonra genelleme için bir örüntü arama çabası içine girdiğini belirtmiştir. Semiha genellemeye ulaşmak için öncelikle verilen örnekten yola çıkmış ve ispatı doğru biçimde dönüştürme yaparak tamamlamayı başarmıştır. Aşağıda ispat yapılandırmasına ilişkin ifadeleri verilmiştir:

A: Deneme mi yapıyorsun nasıl yapıyorsun? (İSGF)

S: Yok ..genelliyorum da.... Genellemek için hani bir örüntü var mı diye aradım yok bulamadım yani aslında var da bunu ifade edemem mesela 3, 2, 2, 2 diye gider bu ama buradan bir genellemeye ulaşamam [Şekil 4.16'da cam levhaların içerisine yazdıkları sayıları kasteder] şuradan ulaşmaya çalışıyorum onu da yapamıyorum şu anda ...1 2 3...3 tane varrr...üç tane varrr...üç tane varrr...üç tane varrr...kaç beş sıra.... bir, iki, üç, dört, beş sıra yapıyor beş sıra yapıyor buradan ulaşmaya çalışsam gene 31 elde edemem 3.

Semiha'nın altıncı soruya ilişkin yanıtı aşağıda Şekil 4.14'te görülebilir.



Şekil 4.14. Semiha'nın İSF'nin altıncı sorusuna ilişkin yanıtı

Şekil 4.14'ten anlaşılacağı üzere Semiha'nın örüntü arayarak bir kenarın uzunluğunun bir fazlasını diğer kenarın uzunluğuyla çarparak ve aynı işlemi diğer kenara uygulayarak (Şekil 4.14'te $(n+1) \cdot a + (a+1) \cdot n$ formülüne ulaşmıştır) kendisini genelleme yapmaya götürecek bir formül bulma yoluna girdiği görülmüştür. Burada Semiha'nın örüntü arama davranışı doğru akıl yürütme yaptığının bir göstergesi olabilir. Semiha'nın bu düşünceden yola çıkarak ispatını doğru yapılandığı saptanmıştır. Semiha'nın ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:

S: Tamam ya **yaptım galiba**....şimdi...bir kenara n diyelim bir kenara a diyelim ...dedim... çerçevenin ...şimdi.... n olan..... a olan kenar şurası olsun mesela 3 olan kenar diyelim ... a olan kenar burastıysa.

S: Yani $n+1$ tane şey var... $n+1$ ile a .

A: Şerit mi?

S: Hah $n+1$ tane şerit vardır...1...2...3... $n+1$, n , a ile **çarpımı kadar şerit vardır.... Şu kenarın bir fazlasını....bu kenar da aynı şekildedir.** Bu şekilde yazmak zaten bir şey değil bunu ilkokuldan liseden beri zaten yazdığımız bir şey de... ben başka şekilde denemeye çalıştım örüntü arayarak zaten bunu denedim ilk başta ..buradan ulaşamadım mesela 4... bunun için dört çubuk lazım 3 3 3 ... 3 2 2 diye gidiyor bu hani buradan örüntü aramaya çalıştım zaten onu bulamadım ilk başta.

A: Buradaki ana mesele ne? Bunu ortaya çıkarırken neye dayan.... Ne yaptın yani ana meselen ne? Neye dayanarak yaptın yani?(GİGF)

S: 4 birimlik bir dörde bölmek için n ...onun bir fazlası kadar şeride ihtiyacımız vardır.

A: Nereden biliyorsun?(İSGF, GİGF)

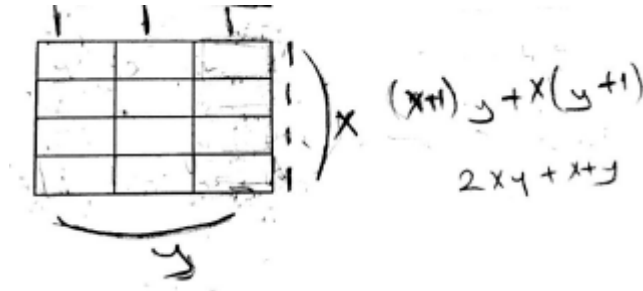
S: Nerden biliyorum.... Çünkü bir şeyi kaç parçaya bölüyorsun bölersin mesela .

A: Hayır şey... şöyle söyleyeyim...bunun doğru olduğunu nereden biliyorsun burada 4'e 3'lüğü denedin ya? (İSGF, GİGF)

S: Evet? **Bu doğru...çünkü bir çubuk kenarında bir çubuğu bir iki üç dört yani dört parçaya bölmeye çalışıyorum ve bunun için bunun bir fazlasına ihtiyacım var ...köşeleri de sayarsak tabii ki.**

Açıklamalardan da görüldüğü üzere Semiha'nın örüntüsünü genel bir ifadeye dönüştürmeyi başardığı yani doğru akıl yürütme ile tutarlı basamaklar yapılandığı görülmüştür. Semiha'nın çabasının bilinçli ve hedefe yönelik tutarlı basamaklardan oluştuğu söylenebilir. Dolayısıyla bu soruya ilişkin yanıtlarında analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği belirlenmiştir.

Derya'nın da Semiha gibi genellemeye ulaşmak için öncelikle verilen örnekte yola çıktığı belirlenmiştir. Derya ispata başlarken öncelikle 3'e 4 olarak örnekte verilen pencere çerçevesinde kaç tahta şeride ihtiyaç olacağını kontrol etmiş ve 31 br olacağını bulmuştur. Daha sonra bir kenarı x diğer kenarı y olarak düşünerek bu örnek üzerinden akıl yürütmeye çalışmış, 4 birim için beş tahta şerit ve 3 birim için dört tahta şerit gerektiğini bulmuş, bunun her zaman bir fazlası olacağını ve bu toplamın tahta şerit sayısına eşit olacağını düşündüğünü belirtmiştir. Burada Derya'nın, anahtar mesele olan "*1 fazlası*" ve "*bunların toplamının tahta şeritlere eşit olacağı*" nı belirlemeyi başardığı söylenebilir. Derya'nın altıncı soruya ilişkin yanıtı Şekil 4.15'te verilmiştir:



Şekil 4.15. Derya'nın İSF'nin altıncı sorusuna ilişkin yanıtı

Derya'nın ispata ilişkin düşüncelerini açıklarken örüntüsünü genelleme için kullanacağını doğru biçimde açıkladığı görülmüştür. Derya'nın açıklamaları aşağıdaki gibidir:

D: Burada bize 3'e 4 olarak vermiş ben bu kenarları hani genellemek açısından bir kenarın x bir kenarın y birim olduğunu düşündüm ...Şimdi bize tahta şeritlerden bahsediyor...şimdi mesela bu örnekte yola çıkarsak burada dört birim ama...bir iki üç dört beş tane tahta şerit [sağ sütun kutucukların yatay şeritlerini sayar] kullanmış hani şuraları düşünürsek [gösterir] o yüzden bunda ...ıı... üç sıra var yani şöyle düşünürsek her birini bunda da üçer tane olduğu için [sütun sayısına göre ele alır] $x+1$ çarpı y dedim daha sonra bu taraftan baktığımızda da [en alt satırın sütun şeritlerini sayar] şöyle bir iki üç dört tane üç birimlik yerde [en alt satır üç birim onu gösterir] dört tane tahta şerit kullanıyoruz ondan da bir iki üç dört tane [sol alttan yukarı doğru kutuları sayar]

yani kenar kadar kullanıyorum diyerekten onda da $y+1$ çarpı x olarak yani bu ikisinin toplamı bana şunun gibi [31 sayısını gösterir] kaç tane tahta şerit kullanabileceğimi veriyor.

Açıklamalarından da anlaşılacağı üzere Derya'nın örüntülerini genelleme için dönüştürmeyi başararak $(x+1).y+x(y+1)$ sonucuna ulaştığı görülmüştür.

Şekil 4.15'ten ve alıntılardan da anlaşılacağı üzere, Derya'nın tutarlı basamaklarla doğru akıl yürütme kullanarak ikna edici bir ispat yaptığı ve dolayısıyla İSF'nin altıncı sorusuna verdiği yanıtlarda analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği saptanmıştır.

4.1.3.1.2. Öğretmen adaylarının ispatlarında ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandıkları durumlar.

Öğretmen adaylarından Hamra'nın İSF'nin ikinci sorusuna ilişkin yanıtlarında "Ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandığı" belirlenmiştir. Semiha ise İSF'nin üçüncü sorusuna ilişkin yanıtlarında ana meseleyi belirlediğine yönelik bazı ifadelerle sahip olduğundan tam olarak analitik ispat şemasına ilişkin tepkiler ortaya koymasa da bu tepkilere ilişkin bazı fikirlere sahip olduğu belirlenmiştir. Aşağıda öğretmen adaylarının ifadeleri yer almaktadır:

Hamra'nın İSF'nin ikinci sorusu olan "Herhangi iki tek sayının toplamının her zaman çift olacağını gösteriniz" sorusuna ilişkin yanıtlarında herhangi iki tek sayı seçerken farklı değişkenler kullanarak $2m+1$ ve $2n+1$ aldığı görülmüştür. Bunun yanında da $2n+1$ sayı ifadesini alarak bir tane tek sayının kendisiyle toplamını incelemiştir. Hamra'nın bu soruya ilişkin yanıtı Şekil 4.16'da görülmektedir:

$$(2n+1).(2n+1) = 4n^2 + 4n + 1$$

$$\times (2n+1) + (2n+1) = 4n + 2 = 2(n+1) \rightarrow \begin{matrix} 2.3=6 \\ 2.4=8 \end{matrix}$$

$$\times (2m+1) + (2n+1) = 2m + 2n + 2 = 2(m+n+1) = 4$$

$m \in \mathbb{N}$ $n \in \mathbb{N}$

Şekil 4.16. Hamra'nın İSF'nin ikinci sorusuna ilişkin yanıtı

Şekil 4.16'da da görüldüğü gibi Hamra'nın burada iki tek sayının kendisiyle toplamını ve farklı iki tek sayının toplamını alarak farklı durumları denemeye çalıştığı görülmüştür. Bununla ilgili açıklamaları aşağıdaki gibidir:

H: Tek başlarına olsalar.....uu... sonuçta m 'ye de bir verebilirim n 'ye de 1 verebilirim fark etmez ki...yani tek başına şunu yapsam da bence sayılırdı şu alttakini [iki farklı değişkeni kasteder].

A: Neden?(İSGF)

H: Çünkü m 'ye 1 verebilirim n 'ye de bir verebilirim yani orada bir sınırlama yapmadım ama daha net gösterebilmek adına böyle gösterdim bunun farklı olduklarını ... sanki n deyince hep aynı rakam olması gerekiyormuş gibi oluyor $[(2n+1)+(2n+1)]$ 'i gösterir]... farklı olsa daha güzel olur diye düşündüm hani daha net görmek için .

Yukarıdaki açıklamalardan da anlaşılacağı üzere Hamra farklı parametreler alarak ispatı doğru akıl yürütmeye dayandırmıştır. Hamra'nın bir tek sayı alıp kendisiyle toplayarak ispat hakkında emin olmaya çalışıp gereksiz bir çaba içerisine girmiş olduğu fakat yine de ispatını doğru akıl yürütme kullanarak gerçekleştirdiği yorumu yapılabilir. En düşük başarı düzeyindeki Hamra'nın gerekçelendirmeleri arasında bağlantılar kurarak tutarlı basamaklarla ispatını tamamladığı, bu yüzden analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği belirlenmiştir. Hamra tüm görev temelli görüşmelerde sadece ikinci soruya ilişkin ispat çözümlerinde analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin tepkiler vermiştir. Bunun nedeni Hamra'nın daha önceki öğrenmelerine başvurmaması ve böylelikle ana meseleyi kendi akıl yürütmesiyle belirlediğinde dönüşüm yapma becerisine sahip olması olabilir.

Semiha'nın daha önceki bölümlerde (4.1.1.3.3 başlığı altında) İSF'nin üçüncü sorusuna verdiği yanıtlarda, ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği tartışılmıştır. Fakat Semiha'nın tepkileri incelendiğinde, ispat çabalarının bazı kısımlarında doğru akıl yürütme kullandığı da belirlenmiştir. Aşağıda Şekil 4.17'de ilgili yanıtları yer almaktadır:

2

$k \in \mathbb{Z}$ için.

$n^2 = 3k$ deneelim

$k=1$ için $n^2=3$ olur.

$\sqrt{n^2} = \sqrt{3}$

$n = \sqrt{3}$ $n \notin \mathbb{Z}^+$

3

$n=3k$

$n^2 = k^2 = 3t$ $3t \in \mathbb{Z}$

$t=3$

$3 \cdot 3 = 9$

$n = 3$

Şekil 4.17. Semiha'nın İSF'nin üçüncü sorusuna ilişkin yanıtı/2

Semiha'nın aksine örnek verme yöntemini olmayana ergi yöntemi olarak gördüğüne ilişkin açıklamalarda bulunarak ispatın yanlış olduğunu belirttiği ve bu yanıtını iptal ettiği (iki ile numaralandırılmış denemesinde); aksine örnek vermeye ve bir tane sağlamayan örnek arayarak (3 ile numaralandırılmış denemesinde $t = 3, 3 \cdot 2^2, 3 \dots$) ispatı doğru yapılandırmaya çalıştığı, fakat bunu yaparken akıl yürütmesini önceden yanlış hatırladığı bazı bilgilere dayandığı görülmüştür. Aşağıda açıklamalarından bir kesit bulunmaktadır:

S: Bence bu ispat yanlış [üzerine çarpı atar] bak...şimdi $n^2=3$ dersek ... $n^2=3$ dersek $\sqrt{n^2} = \sqrt{3}$ olur bu da olmayana ergi..... bir tane olmayan bir şey göstersek yeterli bencededim... ayrıca yanlış yaptım [yazdıklarını gösterir]

Yukarıdaki açıklamalarından ve Şekil 4.17'deki yanıtlarından anlaşılacağı üzere Semiha hem ikinci hem de üçüncü denemelerinde ispatlarını tamamlayamamıştır. Üçüncü ispat denemesinde $n^2 = k^2=3t$ eşitliğini oluşturmuş, t 'ye bu denklemi doğrulayan 3'ün katı değerler vermeye çalışmıştır. Bu noktada ana meseleyi belirleyerek ispatı doğru olarak yapılandırma ve analitik dönüşümsel ispat şemasının özelliklerini sergileyebilme ihtimalinin olduğu söylenebilir. Fakat Semiha'nın ispatını tam olarak yapılandırarak sonuçlandırmayı başaramadığı görülmüştür. Bu yüzden (4.1.1.3.3 başlığı altında) bu soruda Semiha'nın ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilediği fakat bunun yanında tam olarak analitik dönüşümsel ispat şemasının belirleyicisi olan tepkiler ortaya koymasa da bu ispat şemasıyla ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere sahip olduğu belirlenmiştir.

4.1.3.1.3. Öğretmen adaylarının ispatın doğruluğunu mantıksal çıkarımlarla destekleyerek açıkladıkları durumlar.

Öğretmen adaylarından Semiha ve Derya'nın İSF'nin beşinci sorusuna ilişkin yanıtlarında “*ispatın doğruluğunu mantıksal çıkarımlarla destekleyerek açıkladıkları*” belirlenmiştir. Aşağıda öğretmen adaylarının bu durumlara ilişkin ifadeleri yer almaktadır:

Semiha bir iddianın ve buna yönelik verilen üç ispatın incelenmesinin ve her bir ispatın matematiksel doğruluğu hakkında yorum yapılmasının istendiği İSF'nin beşinci sorusuna verdiği yanıtlarda analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermiştir. Semiha ikinci ispatın doğruluğunu doğru akıl yürütme kullanarak açıklamıştır. 10'un kuvveti sayıların mod 3'e göre 1'e denk olacağını ve bunları çıkardığında sadece basamaktaki sayılar kalacağını anlatmıştır. Açıklamaları aşağıda yer almaktadır:

S: Bu ispatı doğru yapan şey 10 çarpanlarından gitmesi ...sayıyı çözümlemesinden dolayı ...her 10 çarpanının mod 3'e göre 1 olduğunu gösteriyor ispatta... bu yüzden sadece bu 1 çarpanı burası 1 çarpanları olduğu için sayı değerlerinin toplamı kalıyor.

Semiha'nın ikinci ispatın doğruluğunu anlatırken doğru akıl yürütme kullandığı belirlenmiştir. Fakat Semiha ikinci ispata doğru bir mantıksal çıkarımla doğru yanıt vermiş olsa da, daha önceki bölümlerde (4.1.1.3.2 başlığı altında) belirtildiği gibi üçüncü ispata ilişkin açıklamalarında dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermiştir. Dolayısıyla Semiha'nın beşinci soruya ilişkin yanıtlarında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olarak değerlendirilebilecek tepkiler gösterdiği, bunun yanında analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği belirlenmiştir.

Derya ise beşinci sorudaki ikinci ispata ilişkin ifadelerinde ispatın doğruluğunu doğru akıl yürütme kullanarak açıklamıştır. Derya'nın ifadeleri aşağıdaki gibidir:

D: Mod'da bunu doğru alabiliriz ..uu. doğru yani ispat doğru ...uu.... Burada çözümlene yöntemine gitmiş.

A: Çözümleme yöntemi derken?(İSGF)

D: Yani basamaklarını tek tek açmış ... her bir basamağıeee... burada tek tek açtığımda ...uu... şeyden yararlanmış mod'dan yararlanmış 10, mod 3'e göre 1'e denktir 'ten yola çıkaraktan hepsinin mod 3'te dengini almış çözümlenmeli uu... bu da zaten $a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ 'e kadar gidiyor hmm... buradan da sayıların toplamı mod 3'te hani bölündüğünü göstermiş[düşünür]evet bu ispata da doğru diyebiliriz yani eee...ilk çözümlenmiş sayıyı mod 3'ten yararlananark 10'un kuvvetlerinden kurtulmuş bu şekilde aslında kurtulunca da mod 3'e göre aldığımda çünkü bölünebilme kuralı...uu... 3'e bölünmesinden bahsediyor o yüzden ben mod 3'ten yararlandığını düşünüyorum ..uu... öyle olunca da sayı aynı zamanda mod 3'e göre toplamlarına eşit olmuş yani denk olmuş bu da zaten bizden istenen şeydi rakamları toplamı burada vermiş bu rakamın 3 ile bölünebildiğini gösterebiliyoruz aslında mod 3'e göre burada ne çıkıyorsa sonuç uu...3'e 0 ya da 3'ün katı çıkıyorsa 3'e bölünüyordur ama çıkmıyorsa u.... 1, 2 gibi mesela bir sonuç çıkıyorsa bölünmüyordur ...uu.... sayıya.

A: Sence bu ispatta ana mesele ne? ne olmuş ta burada ispat olmuş? Anahtar meselesi ne bu durumun?(GİGF)

D: İu... burada bence çözümlenmeden yola çıkarak hani burada mod 3'e göre 10'un kuvvetlerini ...uu.... Nasıl söyleyeyim bizim elimizde sayı var zaten rakamlarının toplamının 3'e bölünmesini istiyoruz o yüzden hani rakamı çözümlenerek aslında hani elimdeki rakamdan yola çıkaraktan 3'e bölünmesi için de 10'un kuvvetlerini yok etmemiz lazım burada mod 3'ten yararlanmış .

A: Niye 10'un kuvvetlerini yok etmemiz lazım 3'e bölünmesi için?(İSGF)

D: Ya bizde...uu... bu rakamların toplamı 3'e bölünsün Bölündüğünü düşündüğümüz için burada sadece sayıyı çözümlenmiş ama mod 3'e göre aldığımızda bu çözümlenmeyi zaten rakamları toplamı geliyor elimize.

A: Neden?(İSGF)

D: İu çünkü 10 mod 3'te 1'dir 10'un tüm kuvvetleri de mod 3'te 1'dir.

Bu açıklamalarında Derya'nın 10'un mod 3'e göre 1'e denk olduğunu söyleyerek anahtar meseleyi ortaya koyarak doğru ve ikna edici açıklamalar yaptığı, fakat üçüncü ispatın da doğru olduğunu düşündüğü belirlenmiştir. Dolayısıyla bu soruda çıkarım basamağını fark etmemesine rağmen açıklamalarında mantıksal argümanlara yer verdiği ve ikinci ispatı mantıksal açıklamalarla doğru kabul ettiği söylenebilir. Bu yüzden Derya'nın, ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan belirtilere sahip

olmakla beraber (4.1.1.3.2 başlığı altında açıklandığı üzere) analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler de gösterdiği tespit edilmiştir.

4.1.3.2. Öğretmen adaylarının alt sınıflamalara dâhil edilemeyecek nitelikte analitik ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları.

Öğretmen adaylarından Semiha'nın İSF'nin yedinci sorusunda temel sınıflandırma olarak analitik ispat şemasını ortaya koyan tepkileri tam olarak göstermese de bu ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı ifadelerde bulunduğu dair ipuçları ortaya koyduğu belirlenmiştir. Bu ifadeler öğretmen adaylarının ispat yaparken “İfadelerinde doğru akıl yürütmeye ilişkin ipuçları taşıma” olarak sınıflandırılan ispat şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Bu göstergeye ilişkin ayrıntılar aşağıda alt başlık altında sunulmuştur:

Semiha, öğretmen adaylarına $\sqrt{-1}$ ile 0 arasındaki ilişkinin çelişki yöntemi ile incelendiği iki ispatın verildiği ve öğretmen adaylarının analitik aksiyomatik ispat şemaları ortaya çıkarmak için sorulan yedinci sorusuna verdiği yanıtlarda bir karmaşık sayının varlığından bahsetmiş, fakat bu karmaşık sayının bu ispatlar ile ilişkisini ya da ilişkisizliğini belirleme yoluna gitmemiştir. Bu durumun başlangıçta Semiha'nın tepkilerini analitik ispat şemasıyla ilişkilendirmek için yeterli bir delil sağlayamadığı düşünülmüştür. Semiha'nın açıklamaları aşağıdaki gibi olmuştur:

S: Hmm....[düşünür]...şimdi bence en başta hata şu bir varsayım olarak kökün içine eksi bir şey yazamam.

A: Neden yazamazsın?(İSGF)

S: Yani kökün içinde eksi bir şey olmaz 0'dan büyük bişi olması lazım kökün içine yazdığımın ama.

A: Neden öyle?

S: **Karmaşık sayı soruyorsanız o farklı bişey.**

A: Nasıl farklı?

S: **Karmaşık sayıyla alakalı sanırım bu. Karmaşık sayının 0'dan küçük olduğunu göstermeye çalışıyoruz gibi bir şey yani... dedim ben ..yani karmaşık sayı da...[düşünür] hıh...yani... başka bir şey bilmiyorum yani çelişki yapmış önce bunu gösterdiğim için çelişki için önce bunun yanlışınınyani karmaşık sayının 0'dan küçük olduğunu ispatlamak.**

A: **Karmaşık sayı mı var burada?**

S: **Tabii ki. Bu i^2 dir zaten kökün içinde eksi olduğu tek durum karmaşık sayılarda olur ...yani... bir karmaşık sayının 0'dan küçük olduğunu göstermek ya da büyük olduğunu göstermek yani bilmiyorum... nasıl gösteririz bilmiyorum.**

S: **İı.. burada bir hata olduğunu söylüyor çelişki yöntemiyle ispatlanıyor şimdi.... i^2 i^2 i i....bilmiyorum bir fikrim yok yani bunun neden yanlış olduğuyla ilgili bir fikrim yok bana çok doğru gibi geldi şu anda ama.**

A: Doğru mu geldi?

S: **Ya şimdi bu i dir bu da i dir çünkü $-1 = i^2$ dir bu da i^2 yani - yapıyor ve bu büyüktür 0'dır diyor bu bir çelişkidir diyor bu 0'dan büyük olmadığı için o zaman bunun 0'dan küçük olduğunu gösterebiliriz diyor yani bu doğru geldi ama bir fikrim yok gerçekten**

A: **Şimdi ikinciye bak o da tam tersinin doğru olduğunu ispatlıyor burada bir hata var.**

S: **Evet var da.**

A: **Çünkü ikisi de doğru.**

S: **Evet bir hata var ama hatayı bulamadım ... bakıyım.**

A: **Şimdi burada ≤ 0 olduğunu ispatlıyor burada da > 0 olduğunu ispatlıyor.**

S: Bi fikrim yok yani ikisini de doğru yaptığını düşündüm ama ikisi de tabi ki doğru değil ama nerede hata yaptığını bulamadım.

Yukarıdaki ifadelerinde görüldüğü üzere Semiha'nın karekökün içerisinde negatif ifadelerin ancak karmaşık sayılarda bulunabileceğine işaret eden açıklamalarda bulunduğu, fakat bir karmaşık sayının varlığından bahsetmesine rağmen düşünmesini daha ileriye taşıyamadığı görülmüştür. Semiha'nın tahminlerinin geçerliğini deneyimler yardımıyla kontrol etmediği, ya da bildiklerini dışsal bir kaynağa dayandırmadığı dolayısıyla dışsal ya da deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermediği belirlenmiştir. Bunların yanında Semiha'nın daha çok çelişki yöntemindeki hatayı arama yoluna gittiği, her iki ispatı inceleyerek, basamakların tutarlı olup olmadığını kontrol ettiği, iki ispatın da doğru yapılandırıldığını düşündüğü saptanmıştır. Semiha'nın ilgili ifadeleri aşağıdaki gibidir:

S: İu.. burada bir hata olduğunu söylüyor çelişki yöntemiyle ispatlanıyor şimdi.... $i \dots^2 \dots i^2 i \dots$ bilmiyorum bir fikrim yok yani bunun neden yanlış olduğuyla ilgili bir fikrim yok bana çok doğru gibi geldi şu anda ama.

A: Doğru mu geldi?

S: Ya şimdi bu i 'dir bu da i 'dir çünkü -1 eşittir i karedir bu da i^2 yani -1 yapıyor ve bu büyüktür 0 'dır diyor bu bir çelişkidir diyor bu 0 'dan büyük olmadığı için o zaman bunun 0 'dan küçük olduğunu gösterebiliriz diyor yani bu doğru geldi ama bir fikrim yok gerçekten

A: Şimdi ikinciye bak o da tam tersinin doğru olduğunu ispatlıyor burada bir hata var.

S: Evet var da.

A: Çünkü ikisi de doğru.

S: Evet bir hata var ama hatayı bulamadım ... bakayım.

A: Şimdi burada küçük eşittir 0 olduğunu ispatlıyor burada da büyüktür 0 olduğunu ispatlıyor

*S: **Bi fikrim yok yani ikisini de doğru yaptığını düşündüm ama ikisi de tabi ki doğru değil ama nerede hata yaptığını bulamadım.***

Semiha'nın bu soru ile ilgili düşüncelerinde dışsal kaynaklı otoritelere ya da işlemlere gönderme yapmadığı, o yüzden dışsal ispat şemasını ortaya koyan belirtiler de göstermediği belirlenmiştir. Fakat, Semiha'nın hatayı ararken yapması gerektiği şekilde çelişki yöntemindeki hatayı aradığı, bunun yanında karmaşık sayıların bu soru içindeki varlığından haberdar olduğu için ifadelerinde doğru akıl yürütmeye ilişkin ipuçları taşıdığı, yani analitik ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelerinin varlığından bahsedilebileceği görülmüştür. Fakat bu iki fikri (çelişki yöntemindeki hatayı ararken ve karmaşık sayıların varlığından haberdar iken) birleştirip dönüştürme yapmayı başaramadığı için tam olarak analitik ispat şemasının göstergesi olan tepkiler sergilemediği; fakat analitik ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere sahip olduğu belirlenmiştir. Diğer öğretmen adayları yedinci soruda $\sqrt{-1}$ sayısının bir karmaşık sayı olduğunu fark etmemiş ve bu alt ispatlardaki basamakları analiz etmemiş ya da bu basamaklardaki çıkarımlarla ilgilenmemiştir. Bu yüzden bu öğretmen adaylarının yanıtları herhangi bir ispat şemasına sınıflandırılmamıştır.

4.1.4. Görev Temelli Görüşmelerde Öğretmen Adaylarının Ortaya Koydukları İspat Şemalarına ve Göstergelerine İlişkin Özete Ait Bulgular ve Yorum

Bu bölümde, öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde ortaya koydukları ispat şemalarına ve göstergelerine ilişkin özetlere yer verilmiştir. Öğretmen adaylarının ispat şemalarının göstergeleri ve bu göstergelere ilişkin dağılımları ile ilgili ayrıntılı bilgi 'te yer almaktadır. Tablo 4.4'ten sonra öğretmen adaylarının ispat şemalarına ve göstergelerine ilişkin özetler alt alta sıralanarak sunulmuştur.



4.1.4.1. Öğretmen adaylarının ortaya koydukları dışsal otoriter ispat şemasına ve göstergelerine ilişkin özet.

Öğretmen adaylarından en düşük başarı ortalamasına sahip Hamra ile en yüksek başarı ortalamasına sahip olan Semiha'nın İSF'ye verdikleri yanıtlarda dışsal otoriter ispat şemasını ortaya koyan tepkiler verirken “*izledikleri yol hakkında derslerden öğrendiklerine atıf yaparak açıklama yapma*” göstergesiyle açıklama yaptıkları belirlenmiştir. Hamra'nın birinci soruya ilişkin ispatında tümevarımsal akıl yürütme kullandığı fakat bu yöntem hakkında doğru bilgiye sahip olmadığı tespit edilmiştir. Hamra'ya ispatı ile ilgili sorular sorulduğunda “*böyle yapıyorduk*”, “*böyle hatırlıyorum*” gibi ifadeler kullanmıştır. Semiha'nın İSF'nin sekizinci sorusuna ilişkin olarak bu ispat sorusunu daha önce derslerden hatırladığını belirttiği fakat ispat sorusuna ilişkin bir akıl yürütme yapamadığı ve ispatı tamamlayamadığı belirlenmiştir. Öğretmen adayları dışsal otoriter ispat şemasını ortaya koyan tepkiler verdikleri durumlarda başka bir ispat şemasını ortaya koyan göstergelere sahip olmamışlardır (Tablo 4.4).

4.1.4.2. Öğretmen adaylarının ortaya koydukları dışsal sembolik ispat şemasına ve göstergelerine ilişkin özet.

Öğretmen adaylarının İSF'ye verdikleri yanıtlarda sadece Derya'nın üçüncü soruya ilişkin yanıtlarında dışsal sembolik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği görülmüştür. Derya yanıtlarında ispatlarını yapılandırırken farklı yolları denemiştir. Bu yollardan birinde 3'ün katına ulaşmak için üslü ifadeleri bir “kat” olarak gördüğüne ilişkin açıklamalar yapmıştır. Derya “ispatı yapılandırırken sembolleri anlamsızca manipüle etme” göstergesine ilişkin tepkilerinin yanı sıra ifadelerinde başka bir ispat şemasının (dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması) göstergesi olan tepkiler de göstermiştir (Tablo 4.4).

4.1.4.3. Öğretmen adaylarının ortaya koydukları dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ve göstergelerine ilişkin özet

Öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde en sıklıkla dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir. Bu tepkilere ilişkin göstergeler ışığında dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkilerine ilişkin özet aşağıda yer almaktadır:

Tablo 4.4'te de görülebileceği üzere, çalışmaya katılan öğretmen adaylarının tümünün dışsal alışkanlık ispat şemasına ilişkin tepkileri en yoğun olarak “*sınırlı*

bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama” göstergesiyle ortaya koydukları belirlenmiştir. Derya İSF’nin birinci, üçüncü ve beşinci sorularına, Hamra İSF’nin dördüncü sorusuna ve Semiha İSF’nin beşinci sorusuna bu göstergeye ilişkin tepkilerle yanıt vermişlerdir. Öğretmen adayları bu göstergeye ilişkin tepkilerinin yanında başka bir ispat şemasına ilişkin tepkiler de ortaya koymuşlardır.

Derya birinci soruyu yanıtlarken soruyu Elemanter Sayı Kuramı dersine ilişkin hatırlamalarına yoğunlaşmıştır. Derya birinci soruya ilişkin tepkilerinde ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilemiş; bunun yanında tam olarak analitik dönüşümsel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler olmasa da, bu şemayla ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere ilişkin tepkiler sergilemiştir. Üçüncü soruya yanıtlarında ise başlangıç varsayımında karekökü kolay alınabilen sayıları seçme alışkanlığıyla önceden edindiği bazı bilgileri işleme koymaya çalışmıştır. Derya üçüncü soruya ilişkin tepkilerinde aynı zamanda ağırlıklı olarak dışsal sembolik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermiştir. Hamra dördüncü soruya ilişkin yanıtlarında tümevarımsal akıl yürütme kullanmış ve tüm basamakları doğru olarak kâğıda dökmüştür. Fakat görüşmeden elde edilen bulgular Hamra’nın tümevarımsal çıkarım basamağını ve tümevarımla ilgili akıl yürütmeleri hakkında bilgi sahibi olmadığı, önceki öğrenmelerini işleme koyarak ezbere bilgilerle ispatı yapılandırıldığını ortaya koymuştur. Hamra’nın ise İSF’nin dördüncü sorusuna ilişkin tepkilerinde ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan; bunun yanında tam olarak analitik dönüşümsel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler olmasa da, bu şemayla ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere sahip olduğu belirlenmiştir. Semiha ve Derya beşinci soruya ilişkin ifadelerinde benzer yaklaşımlar ortaya koymuşlardır. Her iki öğretmen adayı üçüncü ispatın doğru olduğunu söyleyerek ispatı hatalı olarak yargılamışlardır. Semiha ve Derya doğru gibi görünen ispata ilişkin tümevarım adımında rakamların toplamının üç fazlasının bir sonraki adım olmaması gerektiğini atlamışlar ve açıklamalarını bu yönde yapmışlardır. Dolayısıyla; anılan tepkiler öğretmen adaylarının yoğun olarak sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arayarak ispatlarını yapılandırıldıklarını ya da ispatları yargıladıklarını göstermiştir. Semiha ve Derya İSF’nin beşinci sorusuna ilişkin yanıtlarında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ve yanında analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir.

Öğretmen adayları dışsal alışkanlık ispat şemasına ilişkin tepkilerini, *“ispatı yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullanma”*

göstergesi ile de yoğun olarak ortaya koymuşlardır. Semiha ve Derya İSF'nin ikinci sorusuna, Semiha üçüncü sorusuna bu göstergeye ilişkin tepkilerle yanıt vermişlerdir. Semiha ve Derya İSF'nin ikinci sorusuna benzer yaklaşımlarla herhangi iki tek sayı olarak $2n+1$ ve $2n+3$ gibi ardışık iki tek sayı ifadesi almışlar ve bu tek sayı ifadelerinin tüm tek sayıları karşılayıp karşılamamasına dikkat etmeden genelleme yapmışlardır. Bu yüzden bu soruya yaklaşımlarında önceden bildikleri “tek sayıların sembolik gösterimini” bağlantı kurmadan ve akıl yürütme yapmadan işleme koydukları düşünülmüştür. Öğretmen adaylarının sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullanarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler koydukları durumlarda başka bir ispat şeması ile ilişkilendirilecek tepkilerinin bulunmadığı belirlenmiştir.

Öğretmen adaylarından Semiha ve Derya İSF'nin birinci sorusuna ilişkin yanıtlarında benzer yaklaşımlarla n , $n+1$, $n+2$ gibi ardışık sayı ifadeleri alarak 6'nın katına eşitledikleri bir eşitlik oluşturmuşlar, bu ifadeler ile birkaç deneme yaptıktan sonra işlemlerini derste öğrendikleri formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakmışlardır. Bu anlamda “işlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakma” göstergesine ilişkin tepkiler sergilemişlerdir. Semiha işlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakarak ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan düşünceler sergilerken aynı zamanda deneysel algısal ispat şemasına ilişkin tepkiler de ortaya koymuştur. Derya ise ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan düşünceler sergilerken aynı zamanda analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin bazı düşüncelere sahip olduğuna ilişkin ipuçları sergilemiştir.

Öğretmen adaylarından sadece Semiha İSF'nin üçüncü sorusuna ilişkin yanıtlarında “kullandıkları yöntem hakkında yanlış bilgiyle ispatlarını yapılandırma” göstergesine ilişkin tepkiler sergilemiştir. Semiha bu soruya ilişkin yanıtlarında olmayana ergi yöntemini uygulamaya çalışmış ancak ispatı yapılandıramamıştır. Semiha uyguladığı yöntemin tek bildiği yöntem olan olmayana ergi yöntemi olduğunu belirterek kendisine olmayana ergi yönteminin ne olduğu sorulduğunda yanlış açıklamalarda bulunmuştur. Semiha ispatı yanlış kabulle başlattığı için ispatı doğru yapılandıramamış ve önceden edindiği bazı bilgileri (olmayana ergi yöntemi ile yapılandığı “olumsuz örnek verme” olarak görmek gibi) yanlış yapılandırarak uygulamalarına dâhil ettiğinde başarısız olmuştur.

Dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının diğer göstergeleri olan “*ispatın doğruluğunu ispatın görünümünden etkilenerek yargılama*” ve “*ispatlarını yapılandırırken genel ifadelerle yüzeysel deliller sunma*” göstergeleri ise sadece en düşük başarı düzeyindeki Hamra tarafından sergilenmiştir.

Hamra bir iddianın ve buna yönelik verilen üç ispatın incelenmesinin ve her bir ispatın matematiksel doğruluğu hakkında yorum yapılmasının istendiği İSF'nin beşinci sorusuna ilişkin yanıtlarında ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek yargıladığı tepkiler vermiştir. Hamra verili ispatları değerlendirirken “*daha genel*”, “*daha güzel*”, “*beğenmedim*” gibi açıklamalarda bulunmuştur.

Hamra İSF'nin sekizinci sorusuna ilişkin yanıtlarında ise asal sayıların sonsuzluğuyla ilgili açıklamalarında *sonsuz olduğunu düşünüyorum* “*çünkü bir sürü sayı var illa ki sonsuz olur*” “*bir sürü sayı var sonuçta kaçlara kadar gidiyor*” gibi genel ifadelerle akıl yürütmeden yüzeysel fikirler öne sürmüştür.

Tablo 4.4'ten de görülebileceği üzere, öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık ispat şemasının göstergeleri olan tepkiler verdikleri durumlar incelendiğinde; ispatlarını yapılandırırken ya da verili ispatları değerlendirirken en sıklıkla “*sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama*” davranışını sergiledikleri belirlenmiştir. Buradan bu göstergenin dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının önemli bir belirleyicisi olduğu yorumu yapılabilir.

4.1.4.4. Öğretmen adaylarının ortaya koydukları deneysel algısal ispat şemasına ve göstergelerine ilişkin özet.

Görev temelli görüşmelerde öğretmen adaylarından Semiha'nın birinci soruda ve Hamra'nın altıncı soruda deneysel algısal ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri belirlenmiştir. Semiha'nın ardışık üç sayının 6'nın katı olacağına ilişkin güçlü bir hisse sahip olduğu belirlenmiştir. Nitekim Semiha, “*buradan çıkması gerekiyordu*” gibi cümleler kurmuştur. Semiha'nın 6'nın katını 2 ve 3'ün katı olarak ifade eden cümleler kurduğu fakat bu düşüncesini daha ileriye taşıyamadığı saptanmıştır. Buradan Semiha'nın “*ispatın doğruluğunu hislerine dayanarak göstermeye çalışma*” göstergesini taşıyan tepkiler verdiği belirlenmiştir. Semiha'nın İSF'nin birinci sorusuna ilişkin yanıtlarında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunduğu, bunun yanında deneysel algısal ispat şemasını ortaya koyan tepkiler de gösterdiği belirlenmiştir. Hamra'nın altıncı soruya verdiği yanıtlarda özel bir örüntü oluşturduğu fakat bu

örüntüsünü devam ettiremediği görülmüştür. Hamra'nın ispatta sadece özel bir durum için inceleme yaptığı fakat bu durumu genellemek için bir örüntü bulamadığı, “*sadece özel bir durum için inceleme yaparak nedensel ilişkileri belirleyememe*” göstergesi ile deneysel algısal ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler ortaya koyduğu belirlenmiştir.

4.1.4.5. Öğretmen adaylarının ortaya koydukları deneysel temel örnekler ispat şemasına ve göstergelerine ilişkin özet.

Öğretmen adaylarından en düşük başarı düzeyindeki Hamra'nın görev temelli görüşmelerde İSF'nin üçüncü ve beşinci sorularında deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği belirlenmiştir. Diğer öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunmamışlardır. Hamra'nın üçüncü ve beşinci sorularda benzer yaklaşımlarla “*çok büyük sayılar*” ve “*çok küçük sayılar*” gibi sayıları belli bir grupta topladığı ve her iki soruya verdiği yanıtlarda çelişkili ve tutarsız yanıtlar verdiği görülmüştür. Örneğin üçüncü soruda n 'ye değerler vermiş ve bu değerlerin ispat için yeterliliğini araştırırken hem bu sayıları denemenin ispat için yeterli olduğunu ima edebilecek cümleler kurmuş hem de 1'den 100'e kadar olan küçük sayılar için ispatın doğruluğunu sağlayacağına yönelik ifadelerde bulunmuştur. Hamra'nın 100'den büyük olan büyük sayılar için ispatın doğruluğu nasıl göstereceğinden emin olmadığı düşünülmüştür. Yine benzer şekilde beşinci soruda birinci ispatı hem yetersiz bulduğunu ifade eden cümleler kurmuş; hem de rastgele alınan sayının “*aslında çok büyük bir sayı*”, “*kocaman bir sayı*” olduğunu belirterek ispatın büyük sayılarla yapıldığında daha ikna edici olabileceğine ilişkin ifadelerde bulunmuştur. Hamra üçüncü soruya verdiği yanıtlarda “*ispatın doğruluğunu belirli sayı değerleri üzerinden göstermeye çalışma*” göstergesiyle hareket ederek sadece deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermiştir. Hamra beşinci soruya ilişkin yanıtlarında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermiş; bunun yanında ise deneysel temel örnekler ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı ipuçları ortaya koymuştur.

4.1.4.6. Öğretmen adaylarının ortaya koydukları analitik dönüşümsel ispat şemasına ve göstergelerine ilişkin özet.

Öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasından sonra en çok analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkilerde bulunmuşlardır. Öğretmen adayları belirli durumlarda analitik ispat şemasını ortaya koyan

tepkilerin yanında diğer ispat şemasına ilişkin göstergelere de sergilemişlerdir. Öğretmen adaylarının analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin tepkileri en yoğun olarak “*ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma*” göstergesiyle hareket ettikleri durumlarda (Semiha ve Derya’nın İSF’nin dördüncü ve altıncı sorusuna ilişkin tepkilerinde) ortaya koydukları durumlarda analitik dönüşümsel ispat şemasının yanında başka bir ispat şemasına ilişkin tepkiler göstermedikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarından sadece biri (Hamra) diğer göstergelerden biri olan “*ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandırma*” göstergesine ilişkin tepkilerinde başka bir ispat şeması olmadan sadece analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin açıklamalar yapmıştır. Bunun sadece bir öğretmen adayıyla bir soruda sınırlı bir durumu temsil ettiği düşünüldüğünde, “*ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma*” göstergesinin analitik dönüşümsel ispat şemasının en belirleyici göstergesi olduğu söylenebilir. Bunun yanında Semiha İSF’nin birinci sorusuna, Hamra ise İSF’nin dördüncü sorusuna yanıtlarında tam olarak doğru akıl yürütme ile ispatlarını yapılandırmamış olsalar da, bu göstergeyle ilişkilendirilebilecek bazı tepkiler ortaya koymuşlardır. Her iki öğretmen adayı bu tepkilerinin yanında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilemişlerdir.

Öğretmen adayları analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin tepkileri, “*ispatın doğruluğunu mantıksal çıkarımlarla destekleyerek açıklama*” göstergesiyle sergilemişlerdir. Öğretmen adaylarından Semiha ve Derya bu göstergelere ilişkin açıklamaları benzer yaklaşımlarla İSF’nin beşinci sorusunda vermişlerdir. Her iki öğretmen adayı birinci ispat çözümünün yanlış olduğunu doğru biçimde değerlendirmiş, ikinci ispat çözümüne ilişkin ifadelerinde ise açıklamalarını mantıksal çıkarımlarla desteklemişlerdir. Her iki öğretmen adayı, analitik dönüşümsel ispat şemasının göstergesi olan ispatın doğruluğunu mantıksal çıkarımlarla destekleyerek açıkladıkları durumların tümünde aynı zamanda ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkilere de sahip olmuşlardır.

Öğretmen adaylarından Hamra, ikinci soruya ilişkin tepkilerinde “*ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandırma*” göstergesiyle analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin tepkiler ortaya koymuştur. Semiha ise üçüncü soruya ilişkin yanıtlarında tam olarak ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandırmasa da ana meseleyi belirlediğine yönelik bazı ifadelerine sahip olmuştur ve bunun yanında ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin tepkiler de vermiştir. Hamra bu soruya ilişkin

tepkilerinde başka bir ispat şemasına ilişkin göstergelere sahip olmamıştır. Hamra'nın analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin tepkileri görev temelli görüşmelerde sadece ikinci soruda ortaya koyduğu belirlenmiştir. Görev temelli görüşmelerde Hamra tüm tepkilerinde dışsal ve deneysel ispat şemalarının göstergeleri olan tepkiler ortaya koymuştur. En düşük başarı düzeyindeki Hamra'nın bu soruda analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler vermesinin sebebi, daha önceden edindiği yüzeysel bilgilere başvurmadan kendi akıl yürütmesiyle ana meseleyi belirlediğinde dönüşüm yapıyor olması olabilir. Başka deyişle Hamra, kendi akıl yürütmesini kullanarak diğer kalıp bilgilere başvurmadığında analitik dönüşümsel ispat şemasının belirleyicisi olan tepkiler vermiş olabilir.

Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koydukları tepkiler özetlenecek olursa; öğretmen adaylarının sadece beş durumda (Semiha ve Derya, İSF'nin dördüncü ve altıncı sorularında; Hamra ikinci sorusunda, Tablo 4.4) yalnızca dönüşümsel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler ortaya koydukları; bunun dışındaki tepkilerinde analitik dönüşümsel ispat şemasıyla beraber dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının belirleyicisi olan tepkiler sergiledikleri saptanmıştır. Bunun yanında en yüksek ve orta başarı düzeyindeki Semiha ve Derya'nın, en düşük başarı düzeyindeki Hamra'dan sadece analitik dönüşümsel ispat şemasını (başka bir ispat şeması olmadan) ortaya koyan tepkileri farklı şekilde verdikleri düşünülmüştür. Semiha ve Derya benzer şekilde dördüncü ve altıncı sorulara ilişkin yanıtlarında ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırmışlar; beşinci soruya ilişkin yanıtlarında ispatın doğruluğunu mantıksal çıkarımlarla destekleyerek açıklamışlardır. Hamra'nın bu sorulara ilişkin yanıtlarında bu göstergeleri taşıyan davranışları bulunmamıştır. Bunun yanında Hamra, ikinci soruya ilişkin yanıtında ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandırmıştır. Hamra'nın tüm görev temelli görüşmelerde sadece ikinci soruya verdiği yanıtlarda ana meseleyi belirleyerek tutarlı basamaklar yapılandırdığı (başka deyişle sadece ikinci soruda analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği) düşünüldüğünde, bunun sebebinin daha önceki öğrenmelerine başvurmadığında doğru akıl yürütme kullanmasından kaynaklandığı düşünülmüştür. Özetle, yüksek ve orta düzeyde başarıya sahip olan Semiha ve Derya'nın görev temelli görüşmelerde analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin tepkileri benzer şekilde, düşük başarı düzeyindeki Hamra'dan farklı olarak ortaya koydukları belirlenmiştir. Yüksek ve orta düzeydeki öğretmen adayları olan Semiha ve Derya'nın

analitik dönüşümsel ispat şemasıyla başka bir ispat şemasını ortaya koyan tüm durumlarda, dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri belirlenmiştir.

4.1.5. Öğretmen Adaylarının Görev Temelli Görüşmelerde İspat Şemalarının Genel Değerlendirilmesine İlişkin Bulgular ve Yorum

Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde ispat şemalarını ortaya koyan tepkilerinin daha ayrıntılı incelenebilmesi amacıyla onların temel kategorideki sınıflandırmalara ilişkin durumları ve bu durumlarda ortaya koydukları ispat şemalarının göstergeleri sunulmuştur.

Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde İSF'deki tüm sorulara ilişkin yanıtları incelendiğinde dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç ana kategorideki ispat şemalarını ve analitik aksiyomatik ispat şeması haricindeki tüm alt sınıflarındaki ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler sergiledikleri belirlenmiştir. Tablo 4.5 öğretmen adaylarının kullandıkları ispat şemalarına ilişkin dağılımları ortaya koymaktadır.

Tablo 4.5.

Öğretmen Adaylarının Görev Temelli Görüşmelerdeki İspat Şemaları Dağılımları

Soru No	Öğretmen Adayı	Dışsal İspat Şeması			İspat Şeması		Analitik İspat Şeması	
		Alışkanlık Edinilmiş	Otoriter	Sembolik	Deneysel İspat Şeması	Temel Algisal Örnekler	Dönüşümsel	Aksiyomatik
1	Semiha	+						
	Derya	+						
	Hamra							
2	Semiha	+						
	Derya	+						
	Hamra							
3	Semiha	+						
	Derya	+		+				
	Hamra							
4	Semiha							
	Derya							
	Hamra	+						
5	Semiha	+						
	Derya	+						
	Hamra	+						
6	Semiha							
	Derya							
	Hamra							
7	Semiha							
	Derya		+					
	Hamra		+					
8	Semiha							
	Derya							
	Hamra	+						
Toplam		11	2	1	1	2	7	0
Toplam			16		3		7	

‡ Bu ispat şemasına girmemekle beraber o ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bazı düşüncelere sahip olabileceğine dair deliller ve ipuçları bulunurması (sıklık hesaplamalarına dahil edilmemiştir)

* Öğretmen adayının birden fazla ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterirken bu ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkileri ağırlıklı olarak ortaya koyması

**Öğretmen adayının alt sınıflamaya dâhil edilemeyecek nitelikte sadece temel ispat şeması sınıflandırmasına ilişkin tepkiler ortaya koyması

Tablo 4.5'te görüldüğü üzere, öğretmen adaylarının bazı durumlarda bir ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilerken bazı durumlarda aynı anda birden fazla ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri belirlenmiştir. Bu durumun farklı iki yolla ortaya çıktığı görülmüştür. Bu yollardan ilki öğretmen adaylarının farklı sorularda farklı ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermeleri olarak belirlenmiştir. Örneğin Hamra birinci soruda dışsal otoriter ispat şemasını gösteren ifadelerde bulunurken ikinci soruda analitik dönüşümsel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler göstermiştir. Bu durumun tüm öğretmen adayları için geçerli olduğu belirlenmiştir. İkinci olarak öğretmen adayları aynı soruya ilişkin yanıtlarında birden fazla ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir. Örneğin Semiha birinci soruda ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler verirken aynı zamanda deneysel algısal ispat şemasını ortaya koyan tepkiler de göstermiştir. Bir ispat şemasının göstergesi olan tepkileri ağırlıklı olarak gösterme durumu Tablo 4.5'te * işareti ile gösterilmiştir. Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde bir soruya ilişkin yanıtlarında iki ispat şemasına ait tepkileri aynı anda gösterdiklerinde, ispat şemalarından biri mutlaka dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olmuştur. Bazı durumlarda ise öğretmen adaylarının bir ispat şemasını ortaya koyan tepkileri tamamen sergilemeseler de o ispat şeması ile ilişkilendirilebilecek bir takım özellikleri ya da düşünceleri bulunduklarına ilişkin deliller ortaya koymuşlardır. Bu durumlar † ile işaretlenmiştir ve sıklık hesaplamalarına direk dâhil edilmemiş, ayrıca ele alınarak değerlendirilmiştir. Öğretmen adaylarının bazı durumlarda ise ispat şemalarının alt sınıflarına ilişkin değil temel sınıflandırma olarak belirli ispat şemasını ortaya koyan tepkileri gösterdikleri belirlenmiştir. Örneğin Derya ve Hamra İSF'nin yedinci sorusuna ilişkin tepkilerinde temel sınıflandırma olarak analitik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir.

Bunların yanında; iki öğretmen adayı (Semiha ve Hamra) görev temelli görüşmelerde tüm temel ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler gösterirken bir öğretmen adayı (Derya) ise görev temelli görüşmelerde iki temel ispat sınıflandırması olan analitik ve dışsal ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler göstermiştir (Tablo 4.4. ve Tablo 4.5).

Tablo 4.4'te ve Tablo 4.5'te görülebileceği üzere, öğretmen adaylarının en sık olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının göstergesi olan tepkileri daha sonra ise analitik dönüşümsel ispat şemasının göstergesi olan tepkileri verdikleri görülmüştür. Görev temelli görüşmelerde, öğretmen adaylarından en yüksek başarı düzeyindeki Semiha dört soruda ve ispat şemasının göstergesi olan beş tepkide; orta başarı düzeyindeki Derya ise

benzer olarak aynı dört soruda ve ispat şemasının göstergesi olan beş tepkide en sık olarak dışsal alışkanlık ispat şemasının göstergelerini ortaya koymuşlardır. Bu öğretmen adayları dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasından sonra en sıklıkla analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler vermişlerdir. En yüksek ve orta başarı düzeyindeki Semiha ve Derya, benzer olarak İSF'nin dördüncü, beşinci ve altıncı sorularında ispat şemasının göstergeleri olan tepkilerle analitik dönüşümsel ispat şemasının göstergelerine sahip olmuşlardır. Bu iki öğretmen adayı bunların dışındaki birer tepkiyi tam olarak analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyarak değil, bu ispat şemasını ortaya koyan bazı düşüncelere sahip olarak vermişlerdir. En düşük başarı düzeyindeki Hamra ise görev temelli görüşmelerde ispat şemasının göstergesi olan tepkileri orta ve yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarından farklı biçimde vermiştir. Hamra en sıklıkla dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler vermiştir. Buradan, bu çalışmada daha yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının kendi aralarında ispat şemalarını ortaya koyan tepkilerinin benzer olduğu söylenebilir.

Yüksek ve orta başarı düzeyindeki Semiha ve Derya aynı sorularda (her öğretmen adayı üçer durumda olmak üzere) altı durumda analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterirken en düşük başarı düzeyindeki Hamra'nın ise sadece bir durumda (İSF'nin ikinci sorusunda) bu şemaya ilişkin göstergelere sahip olduğu belirlenmiştir. Bu durum; daha yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının benzer çözümler sergiledikleri bulgusuyla beraber düşünüldüğünde, çalışmadaki daha yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının analitik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterme ihtimallerinin daha düşük başarı düzeyindeki öğretmen adaylarına göre daha yüksek olduğunun bir göstergesi olabilir.

Öğretmen adaylarının analitik ispat şemalarını kullanırken sadece analitik dönüşümsel ispat şemasının göstergesi olan tepkiler gösterdikleri görülmüştür. Bu çalışmada analitik aksiyomatik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergileyen öğretmen adayına rastlanmamıştır. Öğretmen adaylarının en az sıklıkla deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergiledikleri, deneysel ispat şemaları içerisinde ise en sıklıkla deneysel algısal ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri tespit edilmiştir (Tablo 4.5).

Tüm görev temelli görüşmeler boyunca, öğretmen adaylarının en çok dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler verdiği, bunun dışındaki dışsal ispat şemalarının alt sınıflarına ilişkin tepkilerinin az olduğu ve dışsal alışkanlık edinilmiş

ispat şemasından sonra en sıklıkla analitik dönüşümsel ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler verdikleri belirlenmiştir. Bunun yanında öğretmen adaylarının analitik dönüşümsel ispat şemasıyla başka bir ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri tüm durumlarda, aynı zamanda dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri görülmüştür. Tüm bu bulgular değerlendirildiğinde çalışmadaki öğretmen adaylarının dönüşümsel yargılarının daha çok alışkanlık edinilmiş ispat şemaları tarafından bloke edildiği; çıkarım yapmalarına engel olan alışkanlıkları yani dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına neden olan eğilimleri ortadan kaldırıldığında, analitik ispat şemalarının göstergelerini taşıma ihtimallerinin yüksek olduğu söylenebilir. Bu çalışmada “sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama” göstergesinin dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının en önemli belirleyicisi olduğu düşünüldüğünde, öğretmen adaylarının önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri aramalarına ilişkin eğilimleri azaltıldığında analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan göstergeleri taşıma ihtimallerinin yükseleceği söylenebilir.

4.2. İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelere Ait Bulgular ve Yorum

Aşağıdaki bölümlerde, öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde ortaya koydukları düşüncelerinden yola çıkılarak belirlenen ispat şemalarına ilişkin bulgular sunulmuştur. Öğretmen adayları, ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde ispat şemalarının alt sınıf şemalarına ilişkin tepkileri, İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu'nun (İDGF'nin) belirli sorularında ortaya koymuşlardır. Öğretmen adaylarının ispat şemalarının göstergesi olan düşünceleri açıklanırken görüşmelerden elde edilen alıntılara yer verilmiştir. Öğretmen adaylarının görüşmelerinden elde edilen alıntılarının ispat şeması olarak nitelendirilebilecek bölümlerin dikkat çekici kısımları koyulaştırılarak sunulmuştur. Öğretmen adaylarının İDGF'ye ilişkin sorulara verdikleri yanıtlara ilişkin ifadeleri ispat şemaları altında, bu ispat şemaları altındaki ifadeleri ise ispat şemalarının göstergeleri olarak sınıflandırılmıştır. İspatın doğasına ilişkin görüşmelerde öğretmen adaylarının temel ispat şemaları ve alt sınıflamaları temalar ve alt temalar olarak, bu ispat şemalarının göstergeleri ise veri analizinde ortaya çıkan kodlar olarak tanımlanmaktadır.

Aşağıdaki bölümlerde öğretmen adaylarının her bir ispat şemasının alt sınıfına dâhil olan ifadeleri, bu ifadelerin ispat şemaları sınıflandırmaları ve ispat şemalarının göstergeleri olarak alt başlıklar halinde sunulmuştur. Bu sınıflandırmalara ilişkin bilgiler her bölümün başında tablolar halinde verilmiştir.

4.2.1. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelere Verdikleri Yanıtlarda Dışsal İspat Şemalarını Ortaya Koyan İfadeleri

Bu bölümde öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları incelenmiştir. Öğretmen adayları ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal ispat şemalarının alt sınıflarından sadece dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir. Öğretmen adaylarının dışsal ispat şemalarının göstergelerine ilişkin dağılımları Tablo 4.6’da yer almaktadır:

Tablo 4.6.

Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerde Ortaya Koydukları İfadelerin Dışsal İspat Şemalarının Göstergelerine İlişkin Dağılımları

İspat Şeması (Temalar)	İspat Şemasının Alt Sınıflandırma Şemaları (Alt Temalar)	İspat Şemasının Göstergeleri (Kodlar)	Öğretmen Adayı (Soru No)
Dışsal İspat Şeması	Dışsal Alışkanlık Edinilmiş İspat Şeması	İspatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek göstermeye çalışma İspatı daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklama	Hamra (2,3) Semiha (3) Derya(1,2,3) Hamra (1)

4.2.1.1. Öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarını ortaya koyan ifadeleri.

Öğretmen adaylarından Derya ve Hamra’nın İDGF’nin birinci sorusu olan “İspat nedir?”, sorusunda ve ikinci sorusu olan “Bir ispatı ispat yapan şey nedir? Ne yaparsak matematiksel olarak doğru bir ifade yazmış oluruz?” sorusunda; Semiha, Hamra ve Derya’nın ise İDGF’nin üçüncü sorusu olan “Başarılı bir ispat için neler gereklidir? İspat nelerden oluşur?” sorusunda ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde buldukları belirlenmiştir. Bu ifadeler Tablo 4.6’dan da görülebileceği üzere, “İspatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek göstermeye çalışma” ve “İspatı daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilere sahip olarak açıklama” olarak sınıflandırılan ispat şemasının göstergeleri olarak değerlendirilmiştir. Bu göstergelere ilişkin ayrıntılar aşağıda alt başlıklar altında sunulmuştur:

4.2.1.1.1. Öğretmen adaylarının ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek göstermeye çalıştıkları durumlar.

Hamra İDGF’nin ikinci sorusu olan bir ispatı ispat yapan şeylerin ne olduğu ve matematiksel olarak doğru bir ifadenin nelerden oluştuğuna ilişkin açıklamalarında ve

İDGF'nin üçüncü sorusu olan başarılı bir ispat için nelerin gerekli olduğu ve ispatın nelerden oluştuğuna ilişkin açıklamalarında ispatın görüntüsüne vurgu yapan ifadelerde bulunmuştur.

Hamra ikinci soruya ilişkin ifadelerinde ispatı ispat yapan şeylerden bahsederken “*ispatın çok konudan faydalanılarak yapılması, moddan faydalanması, ispatı yaparken çok yönlü düşünülmesi, matematiğin her özelliğinden faydalanılarak, matematiğin en güzel şekilde kullanılarak yapılması*” gibi ifadelere başvurmuştur. Aşağıda bu ifadelerinden bir kesit sunulmuştur:

H: Ne yaparsak doğru bir ifade yazmış oluruz...mmm...matematiği bence en....güzel şekilde kullanırsak matematiği doğ...yani o ifadeyi doğru ispat yapmış oluruz yani matematiğin her özelliğinden yararlanarak onu ispat edersek.

A: Her özelliğini...mesela?

H: İmmm.. mesela.....yani bütün...imm.... Konulardan yararlanarak ispat etmeye çalışmak....yani o konuyla alakalı olan diğer konularla..mesela o...biraz önce mesela 3'e bölünebilme diyordu ya...mesela orada...mesela mod kullanmış modan yararlanmış matematiğin sadece bir şeyle değil diğerleriyle de faydalanarak yapabilmek.

A: Yani mesela farklı bir şey.

H: Farklı bir şey ve doğru bir şey kullandığı için doğru oldu bence...bağlı kalmadan... bir konuya bağlı kalmadan....çok yönlü düşünerek.

Yukarıdaki ifadelerinden de görüleceği üzere Hamra'nın ispatı ispat yapan şeylerden bahsederken yoğun olarak ispatın biçimine ve görüntüsüne odaklanarak açıklamalar yaptığı, sorunun bağlamından uzak olan ve anlam ifade etmeyen açıklamalara yer verdiği söylenebilir. Hamra'nın ifadelerinde ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan düşüncelerin varlığı söz konusudur. Hamra'nın ispatı ispat yapan şeyleri anlatırken dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının yanında daha sonraki bölümlerde (4.2.2.1.1 başlığı altında) ağırlıklı olarak deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya koyan açıklamalarda bulunduğu tartışılmıştır. Dolayısıyla Hamra'nın ispatı ispat yapan şeylerden bahsederken ağırlıklı olarak deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunduğu, bunun yanında dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan açıklamalarda da bulunduğu belirlenmiştir.

Hamra üçüncü soruya ilişkin ifadelerinde başarılı bir ispat için gerekli olan şeyleri ve ispatın nelerden oluştuğunu anlatırken başarılı bir ispat için doğru bir yöntemin gerekli olduğunu belirtmiş ve daha önce kimsenin denemediği bir ispatı başarılı bir ispat olarak değerlendirmiştir. İspatın sayılardan, harflerden, matematiksel konulardan ve cebirsel ifadelerden oluştuğunu belirtmiştir. Aşağıda Hamra'nın bu soruya ilişkin ifadeleri yer almaktadır:

A: Başarılı bir ispat için ne gerekli? Neler gerekli sence?

H: Başarılı bir ispat için.....**doğru bir yöntem**...yani....başarılı bir ispat.... Bence başarılı bir ispat **daha önce kimsenin yapmadığı bir ispat yöntemi** bence başarılı bir ispattır ...**daha önce hiç kimsenin denemediği** ama doğru olan bir ispat.

A: İspat nelerden oluşur sence?

H: Nelerden oluşur...**sayılardan...u...harflerden...t... matematiksel ummm..konulardan** diyeyim ya da matematiksel konuların içine giren ..matematiksel konulardan...ve **cebirsal ifadelerden oluşur. Sayı, harf cebirsal ifade, matematik...ten oluştuğunu düşünüyorum.**

Hamra'nın ispatın oluşumuna ilişkin anlatımlarının yüzeysel, şekilsel olduğu, bunları sağlayan ifadeleri ispat olarak nitelendirebileceği söylenebilir ve Hamra'nın ispat için gerekli öğeleri anlamlandırmadan biçimsel bir bakışa sahip olduğu düşünülebilir. Bu yüzden Hamra'nın başarılı bir ispat için gerekli şeyleri açıklarken dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olarak nitelendirilebilecek düşünceler ortaya koyduğu belirlenmiştir.

4.2.1.1.2. Öğretmen adaylarının ispatı daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklamaya çalıştıkları durumlar.

Öğretmen adaylarından Derya ve Hamra'nın İDGF'nin birinci sorusu olan ispatın ne olduğuna ilişkin açıklamalarında, Derya'nın İDGF'nin ikinci sorusu olan bir ispatı ispat yapan şeylerin ne olduğu ve matematiksel olarak doğru bir ifadenin nelerden oluştuğuna ilişkin açıklamalarında ve Semiha ve Derya'nın İDGF'nin üçüncü sorusu olan başarılı bir ispat için nelerin gerekli olduğu ve ispatın nelerden oluştuğuna ilişkin açıklamalarında ispatı daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklamaya çalıştıkları belirlenmiştir.

Derya, birinci soruya ilişkin ifadelerinde ispatın ne olduğunu tanımlarken “*elindeki veriler*” den, “*istenenler*” den ve “*istenen sonuca ulaşmak*” tan bahsetmiştir. Aşağıda açıklamalarından bir kesit bulunmaktadır:

A: Sence bir ispat nedir?

D: Eee... **elimizdeki verilerden yola çıkarak**tan ...u...bizden **istenen şeye ulaşmaya**...nasıl söylüyüm ...ya **elimizdeki verilerden yola çıkarak hani istenen sonuca ulaşmakta hani matematiksel işlemler kullanmıyız hani deneme yanılmaya ispat diyemeyiz.**

A: Ama şunu soruyorum ispat nedir?

D: Şey...**verilen bir önermenin doğruluğunu bulmak için yaptığımız işlemler** diyebiliriz doğruluğunu kanıtlamak adına yani doğruluğunu göstermek için yaptığımız işlemler.

A: Yani işlemlerdir ispat öyle mi?

D: Sadece işlemler değil hani bunu **çeşitli sembollerle de gösterebiliriz...sonuçta gene onlarda da işlem yapıyoruz ama...yani işlemler.**

Yukarıda da görüldüğü üzere Derya, ispatı verilenlerden yola çıkarak istenen şeylere ulaşmakta matematiksel işlemler kullanarak yapılan bir şey olarak gördüğüne yönelik cümleler kurmuştur. Derya'ya ispatın sadece işlemlerden mi oluştuğu sorulduğunda, sembollerin varlığından bahsetmiştir. Buradan Derya'nın ispatı bir problem gibi algılamakta olduğu ve ispatın ne olduğuyla ilgili önceden edinilmiş bir takım yüzeysel

fikirlerle sahip olduğu söylenebilir. Derya'nın bu ifadeleri daha önceden edindiği bir takım bilgilere dayanıyor olabilir. Dolayısıyla Derya'nın ispatın ne olduğu konusunda verdiği ifadelerde alışkanlık edinilmiş ispat şemasının göstergeleri olan düşüncelere sahip olduğu görülmüştür.

Hamra ise birinci soruya ilişkin olarak ispatın ne olduğuna ilişkin verdiği ifadelerde ispatı “*doğru veya yanlış olduğunu anlamamıza yarayan şeyler*”, “*yollar, yöntemler*”, “*doğru veya yanlış olduğunu ifade eden kanıtlar*” olarak tanımlamıştır. Hamra ispatı “*kanıt*” olarak tanımlama yoluna gitmiş ve kendisine kanıtın ne olduğu sorulduğunda ise kanıtı “*herkesin kabul ettiği şeyler*” olarak tanımlamıştır. Bu ifadelerinde Hamra'nın ispata ilişkin yargılarının kulaktan dolma önceden belleğine yer etmiş bilgilerden oluştuğu söylenebilir. Dolayısıyla Hamra'nın ispatın ne olduğuna ilişkin verdiği açıklamalarında dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olarak nitelendirilebilecek ifadelerde bulunduğu belirlenmiştir.

Derya ikinci soruya ilişkin ispatı ispat yapan şeyleri anlatırken zihninde “*bir önermenin varlığı*”, “*gerekli adımların yapılması*” ve “*beklenen sonuca ulaşma*” gibi ifadelere başvurmuştur. Derya'nın ilgili açıklamaları aşağıda yer almaktadır:

D: Ya bize zaten bir önerme veriliyor eğer o önermenin gerektiği adımları yaptıktan sonra önermeyi karşılıyorsa doğruluğunu karşılıyorsa bunu ispatlamış oluyoruz.

A: Doğruluğunu karşılamak ne demek?

D: Hmmm... şöyle diyim...ya önermede şu şöyleyse şu şudur şeklinde verdiğimde o sonucu bulmamızdır aslında bizden o olmasını beklediği şeyi bulduğumuzda aslında ispatlamış oluyoruz.

A: Sonucu bulmaktır?

D: Diyebiliriz.

Derya'nın bu ifadeleri zihninde bir yöntem olduğu ve yöntemi uygulayarak gereken adımlarla sonucun çıkmasını beklediği ve o olmasını istediği şeyi bulduğunda ispatı tamamladığını düşündüğünü göstermektedir. Derya'nın ispat yapmayı bir tür sonuç bulmak olarak gördüğü söylenebilir. Derya'nın “*önermede şu şöyleyse şu şudur şeklinde verdiğimde o sonucu bulmamızdır aslında*” ifadesinden de görülebileceği üzere, ispatı ispat yapan şeylerin yöntemler ve bunların uygulanmasından oluştuğunu düşünüyor olabilir. Derya'nın ispatı ispat yapan şeyleri belirlerken zihninde daha önceden var olan kalıplarla hareket ettiği söylenebilir. Dolayısıyla bu ifadelerinde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan düşüncelerin varlığı söz konusudur.

Semiha üçüncü soruya ilişkin olarak başarılı bir ispat için nelerin gerekli olduğu ve ispatın nelerden oluştuğuna ilişkin açıklamalarında ispatın genelleştirilmiş ifadelerden,

herkesin kabul ettiği şeylerden oluştuğunu dile getirmiştir. Aşağıda bununla ilgili ifadeleri yer almaktadır:

A: Yani bir ispat nelerden oluşur? Neler gereklidir ispat için?

S: İspat için **genelleştirilmiş ifadeler gerekiyor** bence ama mesela bir tek sayı birkaç saattir yazıyoruz $2n+1$ şeklinde genelleştirilmiş bir şey yazmam gerekiyor o sayı için.

A: Ne için gerekiyor?

S: İspata başlamak için.

A: Bu ne peki bu $2n+1$ dediğin şey?

S: Tek sayı. **Genelleşmiş bir şey yani herkesin kabulünce olan veya $2n....$ Tek sayı diyor... n yerine ne verirsem vereyim tek sayıları üretmem gerekiyor bütün tek sayıları bulması gerekiyor.**

Semiha ifadelerinde başarılı bir ispat için “genelleştirilmiş ifadeler”in, “herkesin kabulünce olan” şeylerin gerekli olduğunu vurgulamıştır. Bu durum “Genelleşmiş bir şey yani herkesin kabulünce olan veya $2n....$ Tek sayı diyor... n yerine ne verirsem vereyim tek sayıları üretmem gerekiyor bütün tek sayıları bulması gerekiyor” gibi ifadelerinde de görülmektedir. Burada Semiha’nın başarılı bir ispat için gerekli olan şeylerin anlamını sorgulamadan kabul ederek bu ifadelerin biçimlerine yöneldiği söylenebilir. Dolayısıyla Semiha’nın dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olarak nitelendirilebilecek ifadelere başvurduğu belirlenmiştir.

Derya’nın başarılı bir ispat için nelerin gerekli olduğu ve ispatın nelerden oluştuğuna ilişkin üçüncü soruya ait açıklamalarında belli yöntemler kullanarak istenen sonuca ulaşmanın başarılı bir ispat için yeterli olduğunu gösteren düşünceleri ortaya koyduğu görülmüştür. Bu ifadelerine aşağıda yer verilmiştir:

A: Başarılı bir ispat için neler gereklidir desem.....

D: Yani **gerekli ispat yöntemlerini kullanarak bizden o istenen sonuca ulaşmamızdır...bunun çeşitli ispat yöntemleri var ya...onları kullanarak immm...bizim ulaşmayı hedeflediğimiz sonuca ulaşmamızdır başarılı bir ispat.**

A: Peki...ispat nelerden oluşur?

D: İspat nelerden oluşur.....nelerden oluşur derken? immm.... Şey olarak mı hani önermelerden.?

A: Bilmiyorum hani....nelerden oluşur?ispat sen düşündüğünde nelerden oluşur desem.

D: Hmmm.....ya bize **bir önermenin verilmesi gerekiyor o önermenin...uuu...verilen önermenin daha doğrusu ...uu... çeşitli ispat yöntemleriyle sonuca ulaşmamız gerekiyor...yani ispat için...önerme ...işte kullandığımız yöntemler gerekli..önermenin olması gerekiyor...aaa...bu önermeyi elde...ya önermenin sonuca ulaşmamız için çeşitli ispat yöntemlerinin olması gerekiyor bu şekilde.**

Derya’nın başarılı bir ispat için gerekli şeyleri tanımlarken bir önermenin var olması gerektiğini ve çeşitli ispat yöntemleriyle sonuca ulaşılması gerektiğini düşündüğünü gösteren ifadeleri mevcuttur. Bu yüzden Derya’nın ispatı sonuç yönelimli olarak tanımlama yoluna gittiği yorumu yapılabilir. Derya’nın ispatın nelerden oluştuğunu anlatırken daha önce derslerde öğrendiği problem çözme yöntemlerine yüzeysel biçimde vurgu yaptığı düşünülebilir. Bu nedenle Derya’nın daha önceki öğrenmelerine vurgu

yaparak yüzeysel bilgilerle dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunduğu sonucuna ulaşılmıştır.

4.2.2. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelere Verdikleri Yanıtlarda Deneysel İspat Şemalarını Ortaya Koyan İfadeleri

Bu bölümde öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde deneysel ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları incelenmiştir. Öğretmen adaylarının, ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde deneysel ispat şemalarının alt şemalarından yalnızca deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde buldukları tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının deneysel ispat şemalarının göstergelerine ilişkin dağılımları Tablo 4.7’de yer almaktadır:

Tablo 4.7.

Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerde Ortaya Koydukları İfadelerin Deneysel İspat Şemalarının Göstergelerine İlişkin Dağılımları

İspat Şeması (Temalar)	İspat Şemasının Alt Sınıflandırma Şemaları (Alt Temalar)	İspat Şemasının Göstergeleri (Kodlar)	Öğretmen Adayı (Soru No)
Deneysel İspat Şeması	Deneysel Temel Örnekler İspat Şeması	İspatın doğruluğunu belirli değerler üzerinden göstermeye çalışma	Hamra (2)

4.2.2.1. Öğretmen Adaylarının Deneysel Temel Örnekler İspat Şemalarını Ortaya Koyan İfadeleri.

Öğretmen adaylarından Hamra’nın İDGF’nin ikinci sorusu olan “Bir ispatı ispat yapan şey nedir? Ne yaparsak matematiksel olarak doğru bir ifade yazmış oluruz?” sorusunda ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulduğu belirlenmiştir. Bu ifadeler Tablo 4.7’den de görülebileceği üzere, “İspatın doğruluğunu belirli değerler üzerinden göstermeye çalışma” olarak sınıflandırılan ispat şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Bu göstergeye ilişkin ayrıntılar aşağıda alt başlık altında sunulmuştur:

4.2.2.1.1. Öğretmen adaylarının ispatın doğruluğunu belirli değerler üzerinden göstermeye çalıştıkları durumlar.

Hamra ikinci soruya ilişkin olarak ispatı ispat yapan şeylerin ne olduğunu açıklarken “bütün verdiği rakamların doğruluğu sağlayabilmesi” gibi ifadelerle başvurmuştur. Bu düşüncelerine ilişkin açıklamaları aşağıda yer almaktadır:

H: Yani aklımızda soru işareti kalmazsa acaba şunu verdiğim zaman yanlış olur muydu demezsek...doğru olabilir.

A: Nasıl yaparız bunu? Nasıl sağlarız onu?

*H: İmmm.... Nasıl sağlarız....ımmm....yani o genel ifadem...nasıl söylüyeyim....ımmm.....ya bütün hepsi.... **Bütün verdiğim rakamlar** ya da bu ispatla alakalı bütün...ya da o...ımmm.... şeyle alakalı ay söyleyemiyorum şu an.*

A: Bütün verdiğin rakamlar.... Rakam vererek mi bulacağız?

*H: Yani **bütün verdiğim ifadelerde ...o doğruluğu sağlayabiliyorsa.***

A: Hangi doğruluğu?

H: İstenilen doğruluğu.

Yukarıdaki ifadelerinden, Hamra'nın tüm verdiği değerlerin ispat için yeterli olacağını düşündüğü görülmektedir. Buradan Hamra'nın ispatın doğruluğunu belirli örneklerle belirleme eğiliminde olduğu ve varsayımının doğruluğunu bir veya birkaç örnekle değerlendirme yatkınlığında olduğu yorumu yapılabilir. Bu da Hamra'nın ağırlıklı olarak deneysel temel örnekler ispat şemasını ortaya koyan düşüncelere sahip olduğunu göstermektedir. Daha önceki bölümlerde (4.2.1.1.1 başlığı altında) Hamra'nın ispatı ispat yapan şeyleri açıklarken dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan ifadelerle başvurduğu tartışılmıştır. Dolayısıyla Hamra'nın ispatı ispat yapan şeyleri açıklarken ağırlıklı olarak deneysel temel örnekler ispat şemasını bunun yanında dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunduğu belirlenmiştir.

4.2.3. Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelere Verdikleri Yanıtlarda Analitik İspat Şemalarını Ortaya Koyan İfadeleri

Bu bölümde öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde analitik ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları incelenmiştir. Öğretmen adayları ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde analitik ispat şemalarının alt sınıfı olan analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunmuşlardır. Bu çalışmada ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde öğretmen adaylarının analitik aksiyomatik ispat şemalarını ortaya koyan tepkilerine rastlanmamıştır. Öğretmen adaylarının analitik ispat şemalarının göstergelerine ilişkin dağılımları Tablo 4.8'de yer almaktadır. Öğretmen adayları ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde alt sınıflamalara dâhil edilemeyecek nitelikte yalnızca analitik ispat şeması olarak değerlendirilebilecek tepkiler de sergilemişlerdir. Bunun yanında öğretmen adayları ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde herhangi bir ispat şeması sınıflamasına dâhil edilemeyecek nitelikte değerlendirilebilecek açıklamalar yapmışlardır.

Tablo 4.8.

Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerde Ortaya Koydukları İfadelerin Analitik İspat Şemalarının Göstergelerine İlişkin Dağılımları

İspat Şeması (Temalar)	İspat Şemasının Alt Sınıflandırma Şemaları (Alt Temalar)	İspat Şemasının Göstergeleri (Kodlar)	Öğretmen Adayı (Soru No)
Analitik İspat Şeması	Analitik Dönüşümsel İspat Şeması	Diğerlerini mantıksal akıl yürütme ile ikna edecek ifadelerde bulunma	Semiha (1) Derya (4)

4.2.3.1. Öğretmen adaylarının analitik dönüşümsel ispat şemalarını ortaya koyan ifadeleri.

Öğretmen adaylarından Semiha'nın İDGF'nin birinci sorusu olan "İspat nedir?" sorusuna ilişkin açıklamalarında ve Derya'nın İDGF'nin dördüncü sorusu olan "İspat için çok gerekli olmayan ama ispata yardım eden şeyler nelerdir?" sorusuna ilişkin açıklamalarında analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan ifadelerde bulunduğu belirlenmiştir. Bu ifadeler Tablo 4.8'den de görülebileceği üzere, öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin soruları yanıtlarken "*Diğerlerini mantıksal akıl yürütme ile ikna edecek ifadelerde bulunma*" olarak sınıflandırılan ispat şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Bu göstergeye ilişkin ayrıntılar aşağıda alt başlık altında sunulmuştur:

4.2.3.1.1. Öğretmen adaylarının ispatlarını diğerlerini mantıksal akıl yürütme ile ikna edecek ifadelerde buldukları durumlar.

Semiha birinci soru olan "ispat nedir?" sorusuna "*bir önermenin doğru ya da yanlış olduğunu göstermektir*" olarak yanıt vermiştir. Semiha'nın bu yanıtında bir önermenin varlığından ve bunun doğruluğunu ya da yanlışlığını göstermekten haberdar olduğu görülmüştür. Buradan Semiha'nın diğerlerini mantıksal argümanlarla ikna edecek ifadelerde bulunduğu söylenebilir. Semiha'nın analitik dönüşümsel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek ifadelerde bulunduğu belirlenmiştir.

Derya dördüncü soruya ilişkin ifadelerinde ispata yardım eden fakat gerekli olmayan şeyleri anlatırken "*örnekler verme*" nin ispata yardım ettiğini fakat ispat için yeterli olmadığını belirtmiştir. Aşağıda Derya'nın ifadesi yer almaktadır:

A: Peki o zaman mesela diyelim ki bir ispat yapıyorsun gerekli olmayan fakat ispatı yapmana yardım eden şey nedir ?Bu gerekli değildir ama yardım eder.

F: Şey... bu hani bu örnekler vermem deneme yanılma o ispatlamakta yardımcı oluyor ama sonuçta bu şekilde ispatlayamam sadece ispatlamama yardımcı oluyor verdiğim örnekler.

Yukarıda da görüldüğü üzere Derya'nın birkaç örnekten yola çıkarak ispat yapılamayacağına fakat ispatı oluştururken bu örneklerin yardımcı olacağına ilişkin

ifadelere yer verdiği belirlenmiştir. Derya'nın ispat için önceden birkaç örnekle denemenin yararlı olduğunun fakat bu durumun ispatı tamamlamada yeterli olmayacağını farkında olduğu söylenebilir. Derya'nın açıklamalarının bu yüzden deneysel ispat şeması özellikleri taşımadığı belirlenmiştir. Bunun yanında Derya'nın düşüncelerini dış kaynaklı bir duruma da bağlamadığı belirlenmiştir. Bu yüzden Derya'nın dışsal ispat şemasını ortaya koyan düşüncelere sahip olmadığı da saptanmıştır. Derya'nın açıklamalarının doğru akıl yürütmeye dayandığı ve varsayımlarının mantıksal çıkarıma dayalı olduğu söylenebilir. Bu yüzden Derya'nın yanıtlarında analitik dönüşümsel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek ifadelerde bulunduğu belirlenmiştir.

4.2.3.2. Öğretmen adaylarının alt sınıflamalara dâhil edilemeyecek nitelikte yalnızca analitik ispat şemalarını ortaya koyan yanıtları.

Semiha'nın İGDF'nin ikinci sorusu olan "Bir ispatı ispat yapan şey nedir? Ne yaparsak matematiksel olarak doğru bir ifade yazmış oluruz?" sorusuna ilişkin ifadelerinde temel sınıflandırma olarak analitik ispat şemasını ortaya koyan bazı ifadelerde bulunduğu belirlenmiştir. Bu ifadeler "*ifadelerinde doğru akıl yürütmeye ilişkin ipuçları taşıma*" olarak sınıflandırılan ispat şemasının göstergesi olarak değerlendirilmiştir. Bu göstergeye ilişkin ayrıntılar aşağıda alt başlık altında sunulmuştur:

4.2.3.2.1. Öğretmen adaylarının ifadelerinde doğru akıl yürütmeye ilişkin ipuçları taşıdıkları durumlar.

Semiha ikinci soruya ilişkin olarak ispatı ispat yapan şeyleri açıklarken ispatı yanlış yapacak hiçbir durumun ortada olmamasının gerekliliğine ilişkin ifadelerine başvurmuştur. Semiha'nın ifadelerinden bir kesit aşağıda sunulmuştur:

S: Hmm... her şey için mesela söylenen şey hani olması la... hani nasıl ifade edeyim...orada yaptığım ispatta şeyyaptığım ispatın her şey.... Hani... hiç onu şey yapacak bir şey olmaması lazım.... Çelişkiye düşürecek bir şey olmaması.

A: Anlamadım [gülürler].

S: Gülüyorum çünkü ifade edemedim ... yaptığım ispatta onu çelişkiye düşürecek hiçbir şey olmaması gerekiyor ispat yapmak istiyorsam.

A: Ne demek bu çelişkiye düşürecek hiçbir şey olmaması?

S: Hmm... çelişkiye düşürecek hiçbir şey olmaması yani herhangi bir olumsuz örnek verdiğimde verememem lazım yani olumsuz hiçbir şey verememem lazım.

G: Ama az önce mesela sağlamayan bir tane olursa bile ispat olur dedin.

S: Tabi ki olur o olmayana ergi o farklı yoluyla ama mesela normalde bir ispat yaparken o da bir ispat yoludur ama....aaa...doğru olduğunu gösterdiğim bir ispatta kesinlikle bu doğrudur dediğim ispatta onun yanlış olduğunu gösteren hiç bir şey olmaması gerekiyor ama bir ispatta mesela aksine bir şey gösterdiğimde o da ispattır.

Semiha'nın yukarıdaki ifadelerinde tutarlı basamaklar yapılandırma, anahtar meseleyi belirleme gibi dönüşümsel işlemlerin kanıtları tam olarak bulunmamasına ve

“çelişki” sözcüğünü olumsuz örnek verme yerine kullanmasına rağmen doğru akıl yürütme kullanılarak ikna etme girişimlerinden söz etmek mümkün olabilir. Semiha'nın uyguladığı yöntemler ve bu yöntemlerdeki kavramlar hakkında yanılgılar yaşadığı düşünüldüğü için gösterdiği tepkiler analitik ispat şemalarının bir alt kategorisine sınıflandırılmamıştır. Fakat bu soruya ilişkin yanıtlarında doğru akıl yürütmeye sahip olduğu için analitik ispat şemasını ortaya koyan ifadelerle başvurduğu belirlenmiştir.

4.2.4. İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerde Öğretmen Adaylarının İspat Şemalarının Genel Değerlendirilmesine İlişkin Bulgular ve Yorum

Öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde ispat şemalarını ortaya koyan tepkileri ve bu tepkilerin göstergeleri aşağıda özetlenmiştir. Tablo 4.9 ve Tablo 4.10 öğretmen adaylarının ispat şemalarına ve bu şemaların göstergelerine ilişkin tepkilerini özetlemektedir:

Tablo 4.9
Öğretmen Adaylarının İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerdeki İspat Şemaları Dağılımları

Soru No	Öğretmen Adayı	Dışsal İspat Şeması			İspat Şeması		Analitik İspat Şeması	
		Alışkanlık Edinilmiş	Otoriter	Sembolik	Temel Örnekler	Algısal	Dönüşümsel	Aksiyomatik
1	Semiha						+	
	Derya	+						
	Hamra	+						
2	Semiha							+**
	Derya	+						
	Hamra	+			+*			
3	Semiha	+						
	Derya	+						
	Hamra	+						
4	Semiha							
	Derya						+	
	Hamra							
Toplam		7			1		2	
Toplam			7		1		3	

* Öğretmen adayının birden fazla ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterirken bu ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkileri ağırlıklı olarak ortaya koyması

**Öğretmen adayının alt sınıflamaya dâhil edilemeyecek nitelikte sadece temel ispat şeması sınıflandırmasına ilişkin tepkiler ortaya koyması

Tablo 4.9’da görüldüğü üzere, öğretmen adaylarının bazı durumlarda bir ispat şemasını ortaya koyan tepkiler sergilerken bazı durumlarda aynı anda birden fazla ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri belirlenmiştir. Bu durumun farklı iki yolla ortaya çıktığı görülmüştür. Bu yollardan ilki öğretmen adaylarının farklı sorularda farklı ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermeleri olarak belirlenmiştir. Örneğin Derya

İSGF'nin ikinci sorusunda dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını gösteren ifadelerde bulunurken İSGF'nin dördüncü sorusunda analitik dönüşümsel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler göstermiştir. Bu durumun tüm öğretmen adayları için geçerli olduğu belirlenmiştir. İkinci olarak öğretmen adayları aynı soruya ilişkin yanıtlarında birden fazla ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir. Bu durum ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde sadece bir öğretmen adayın için bir durumda ortaya çıkmıştır. Hamra İSGF'nin ikinci sorusuna ilişkin açıklamalarında ağırlıklı olarak deneysel temel örnekler ispat şemasını, bunun yanında dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan açıklamalar yapmıştır. Bir ispat şemasının göstergesi olan tepkileri ağırlıklı olarak gösterme durumu Tablo 4.9'da * işareti ile gösterilmiştir. Öğretmen adaylarının bir durumda ise ispat şemalarının alt sınıflarına ilişkin değil temel sınıflandırma olarak belirli ispat şemasını ortaya koyan ifadelerinin bulunduğu belirlenmiştir. Semiha İDGF'nin ikinci sorusuna ilişkin açıklamalarında analitik ispat şemasını ortaya koyan düşünceler sergilemiştir. Bazı durumlarda ise öğretmen adayları herhangi bir ispat şeması sınıflamasına dâhil edilemeyecek nitelikte değerlendirilebilecek açıklamalar yapmışlardır. Öğretmen adaylarından Semiha ve Hamra'nın ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde İDGF'nin dördüncü sorusu olan "İspat için çok gerekli olmayan ama ispata yardım eden şeyler nelerdir?" sorusuna verdikleri yanıtlarda herhangi bir ispat şeması sınıflamasına dâhil edilemeyecek nitelikte değerlendirilebilecek ifadeleri bulunmaktadır. Bu yüzden Semiha ve Derya'nın dördüncü soruya ilişkin ispat sınıflandırmaları Tablo 4.9 ve Tablo 4.10'a dâhil edilmemiştir.

koydukları “*ispatı daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklama*” göstergesine ilişkin açıklamalarla birlikte başka bir göstergeye ilişkin açıklamalarda bulunmamışlardır. Dolayısıyla, bu göstergenin ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının en belirleyici göstergesi olduğu söylenebilir. Dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin diğer gösterge olan “*ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek göstermeye çalışma*” ise sadece en düşük başarı düzeyindeki öğretmen adayı olan Hamra tarafından İSGF’nin ikinci ve üçüncü sorusuna ilişkin yanıtlarında ortaya konmuştur.

İspatın doğasına ilişkin görüşmelerde öğretmen adayları dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasından sonra analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin tepkiler ortaya koymuşlardır. Dolayısıyla, ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde öğretmen adaylarının yoğun olarak “*ispatı daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklama*” göstergesiyle hareket ettikleri, öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin fikirlerinin tam oturmadığı, ispata ve ispatın doğasına yaklaşımlarının yüzeysel ve kulaktan dolma fikirlerle dolu olduğu ve ispatın doğasına ilişkin düşüncelerinde doğru akıl yürütmeye dayanan düşüncelerinin az olduğu yorumu yapılabilir.

4.3. Görev Temelli Görüşmelerde ve İspatın Doğasına İlişkin Görüşmelerde Öğretmen Adaylarının İspat Şemalarını Ortaya Koyan Düşüncelerinin Beraber Değerlendirilmesine İlişkin Bulgular ve Yorum

Öğretmen adaylarının hem görev temelli görüşmelerde hem de ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde en sıklıkla dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının belirleyicisi olan daha sonra analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri belirlenmiştir.

Bunun yanında öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde analitik dönüşümsel ispat şemasıyla beraber başka bir ispat şemasına sahip olduğu durumlarda, her zaman dışsal alışkanlık ispat şemasına ilişkin tepkiler gösterdikleri belirlenmiştir. Bunun yanında öğretmen adaylarının tüm görüşmelerde sadece analitik dönüşümsel ispat şemasının göstergeleri olan tepkilerinin az olduğu ve dönüşümsel fikirleri olsa da bunların yanında dışsal fikirlere de sahip oldukları ortaya konmuştur. Tüm bu bulgular beraber ele alındığında öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan fikirlerinin ispatın doğası hakkındaki gelişmemiş ve yanlış fikirleri ile ilişkili olduğu yorumu yapılabilir. Daha önceki bölümlerde görev temelli görüşmelerde öğretmen

adaylarının dönüşümsel fikirlerine dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin fikirlerinin engel olabileceği yorumu yapılmıştır. Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde tümdengelimsel çıkarımlar yaparak ispatlarını doğru yapamadıkları düşünüldüğünde, bunun onların çoğunlukla dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarını ortaya çıkaran fikirler geliştirmiş olmalarından kaynaklanabileceği çıkarımı yapılabilir. Nitekim daha önceki bölümlerde görev temelli görüşmelerde en çok kullanılan dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının en belirleyici göstergesinin “*sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama*” olduğu belirlenmiştir. Benzer şekilde ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde en çok kullanılan dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının en belirleyici göstergesi “*ispatı daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklama*” olarak tanımlanmıştır. Dolayısıyla çalışmaya katılan öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel fikirleri ile onların ispatı yapılandırırken dönüşüm yapmalarına engel olan fikirlerinin ilişkili olduğu söylenebilir. Öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin bu tür göstergelere sahip olma durumları ile ispatlarını önceden edindikleri bilgilere dayanarak yapılandırmaya çalıştıkları durumların birbirine benzediği yorumu yapılabilir. Öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin fikirlerinin ve ispatı yapılandırırken ve değerlendirirken sergiledikleri tepkilerin çoğunluğunun alışkanlık edinilmiş ispat şemasının göstergelerini taşıdığı düşünüldüğünde, öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin alışkanlık edinilmiş fikirlerinin güçlendirilmesinin veya ispatları yapılandırırken veya yargılamakta dönüşüm yapmalarına engel olan alışkanlık edinilmiş düşüncelerinin ortadan kaldırılması durumlarının iki yönlü olarak birbirlerini etkileyebileceği öngörülebilir.

Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde İSF’ye verdikleri yanıtlarda kullandıkları ispat yöntemlerinden habersiz oldukları; bu yöntemleri uygularken kavram yanlışlarına sahip oldukları belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının, çoğu durumda kendilerine yöneltilen soruyu okuyup üzerinde düşündükten sonra uygun olan ispat yöntemini seçerek ispatı yapılandırmak yerine, kendilerine daha önceden tanıdık gelen ifadeler için önceden hatırladıkları kalıpları soruda uygulayarak sonuca ulaşma eğiliminde oldukları görülmüştür. Özellikle tümevarımsal akıl yürütme kullanarak yapılandırmaya çalıştıkları ispatlarında öğretmen adaylarının hiçbirinin temel basamaktan haberdar olmadığı ve tümevarımsal akıl yürütmeyi doğru yapılandırmadıkları, ispatlarını derslerde öğrendiklerine benzer adımlar oluşturarak yapılandırmaya çalıştıkları belirlenmiştir. Nitekim İSF’nin beşinci sorusunun yanlış olan son ispatını kimsenin doğru

değerlendiremediği görülmüştür. Öğretmen adayları kullandıkları yöntemin ne olduğunu açıklamakta zorluk yaşamışlardır. Bu bulgu, öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal ispat şemalarını ortaya koyan ifadelerinin yoğun olması bulgusu ile tutarlıdır. Öğretmen adaylarının kullandıkları yöntem hakkında bilgi eksikliklerinin ispat yapılandırmalarını yanlış biçimde oluşturmalarına sebep olduğu yorumu yapılabilir. Öğretmen adaylarının kullandıkları ispat yöntemlerini bilmemelerinin ve yöntemler hakkında kavram yanlışlarına sahip olmalarının sebebi onların ispatın doğası hakkındaki dışsal ispat şemasını ortaya çıkaran düşüncelerinden kaynaklanıyor olabilir.



BEŞİNCİ BÖLÜM: TARTIŞMA VE ÖNERİLER

5.1. Tartışma

Bu araştırmanın amacı ortaokul matematik öğretmeni adaylarının kullandıkları ispat şemalarının neler olduğunu ortaya koymak, bu şemaları nasıl ortaya koyduklarını inceleyerek ispat şemalarının ne gibi farklılıklar gösterdiğini belirlemek ve bu konuda öneriler geliştirmektir. Öğretmen adaylarının ispat şemalarının belirlenebilmesi için bazı çalışmalar (CadwalladerOlsker, 2007; Ellis, 2007; Grigoriadou, 2012; Güner, 2012; Harel, 2001; Harel ve Rabin, 2010; Haverhals, 2011; Heinze ve Reiss, 2003; Housman ve Porter, 2003; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010; Koichu, 2009; Liu ve Manouchehri, 2013; Martin ve diğerleri, 2005; Oflaz ve diğerleri, 2016; Ören, 2007; Plaxco, 2011; Recio ve Godino, 2001; Sarı ve diğerleri, 2007; Sen ve Güler, 2015; Soto, 2010; SoucyMccrone ve Martin, 2004; Sowder ve Harel, 2003; Stylinou, Chae ve Blanton, 2006; Şengül ve Güner, 2013; Uygan, ve diğerleri, 2014; Weber, 2010) Harel ve Sowder'ın (1998), bazı çalışmalar (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Flores, 2006; İskenderoğlu, 2010) ise Sowder ve Harel'in (1998) ispat şemaları sınıflandırmasını kullanmıştır. Bu çalışmada, veri setinin yapılmasına daha uygun olduğu düşünüldüğünden Sowder ve Harel'in (1998) ispat şeması sınıflandırması kullanılmıştır.

Bu çalışmada alanyazındaki bazı çalışmalarla (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Flores, 2006; Güner, 2012; Haverhals, 2011; Harel, 2001; Housman ve Porter, 2003; İskenderoğlu, 2010; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010; Ören, 2007; Plaxco, 2011; Sarı ve diğerleri, 2007; Stylinou ve diğerleri, 2006; Şen ve Güler, 2015; Şengül ve Güner, 2013) tutarlı olarak öğretmen adaylarının tüm sorulara ilişkin cevapları incelendiğinde dışsal, deneysel ve analitik olmak üzere üç temel kategorideki ispat şemalarının ortaya çıktığı görülmüştür. Bu çalışmanın bulgularına göre en yüksek ve en düşük başarı düzeyindeki iki öğretmen adayı (Semiha ve Hamra) görev temelli görüşmelerde Plaxco'nun (2011) çalışmasındaki katılımcılar gibi tüm temel ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler gösterirken orta başarı düzeyindeki öğretmen adayı (Derya) ise görev temelli görüşmelerde iki temel ispat sınıflandırması olan analitik ve dışsal ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler göstermiştir.

Araştırmanın bulguları diğer bazı çalışmaların (Flores, 2006; Housman ve Porter, 2003; Plaxco, 2011; Sarı ve diğerleri, 2007) bulgularında da belirttikleri gibi Harel ve Sowder'ın (1998) "bir kişi birden fazla ispat şemasına ilişkin tepkiler ortaya koyabilir" varsayımıyla tutarlı olmuştur.

Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde iki ispat şemasını ortaya koyan tepkileri bir arada bulduklarını görmüştür. Örneğin Semiha İspat Soruları Formu'nun birinci sorusunda ağırlıklı olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterirken aynı zamanda algısal ispat şeması olarak nitelendirilebilecek ifadelerde de bulunmuştur. Plaxco (2011), Sarı ve diğerleri (2007) gibi çalışmalarda da gözlemlendiği üzere bu çalışmada bazı durumlarda öğretmen adayları bir ispat şemasını ortaya koyan tepkileri daha ağırlıklı olarak gösterirken, diğer ispat şemasına ilişkin tepkiler de gösterebileceklerine ilişkin deliller ortaya koymuşlardır. Bir öğretmen adayının iki farklı ispat şemasına ilişkin tepkileri aynı anda ortaya koydukları durumların hepsinde ispat şemalarından birinin dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olduğu görülmüştür. Başka deyişle bir öğretmen adayı bir durumda eğer iki farklı ispat şemasına ilişkin tepkiler gösterdiyse bunlardan biri dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olmuştur. Benzer olarak Plaxco (2011) çalışmasında üç matematik lisans öğrencisinin ispat anlayışları arasındaki ilişkileri incelemiş ve üç öğrenciden ikisinin analitik ispat şemasının yanında dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler ortaya koydukları sonucuna ulaşmıştır. Çalışmaya katılan diğer öğretmen adayı ise analitik ispat şemasının yanında dışsal ispat şemalarından otoriter ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler göstermiştir. Bu çalışmada iki ispat şemasından biri analitik ispat şeması olan tüm öğretmen adaylarının ikinci olarak dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği düşünüldüğünde, iki çalışmanın bulgularında analitik ispat şemalarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasıyla yan yana gelme durumlarının benzerlik gösterdiği söylenebilir.

Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde temel ispat şemaları sınıflandırmasına göre en çok dışsal ispat şemalarının göstergeleri olan tepkiler ortaya koydukları görülmüştür. Öğretmen adayları analitik dönüşümsel fikirleri olsa da bunların yanında çoğunlukla dışsal fikirlere yönelmişlerdir. Bu yüzden öğretmen adaylarının sadece analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koydukları durumların az olduğu sonucuna ulaşılabilir. Bu bulgu öğrencilerin büyük bölümünün dışsal ispat şemalarının belirleyicisi olan tepkiler ortaya koydukları diğer çalışmalarla (Aydoğdu İskenderoğlu, 2003; Liu ve Manouchehri, 2013; Ören, 2007; Şen ve Güler, 2015) tutarlıdır. Fakat anılan çalışmalarda çalışılan grup ortaokul ve lise öğrencilerinden oluşmuştur. Öğretmen adaylarının daha üst sınıf düzeyinde oldukları düşünüldüğünde, dışsal ispat şemalarını ortaya koyan tepkileri daha az gösterme eğiliminde olmaları beklenebilir. Birçok çalışma (Güner, 2012;

İmamoğlu, 2010; İskenderoğlu, 2010; Knuth ve diğerleri, 2009; Şengül ve Güner, 2013) sınıf düzeyi arttıkça ispat şemasının dışsal düzeyden analitik düzeye değiştiğini ya da gerekçelendirme biçimlerinin dışsal ve deneysel argümanlar yerine analitik argümanlara doğru değiştiğini göstermiştir. Bu çalışmada eğitim basamaklarının en son sıralarında olan öğretmen adaylarının analitik ispat şemaları yerine çoğunlukla dışsal ispat şemaları olarak nitelendirilebilecek tepkileri ortaya koyma sebeplerinin irdelenmesi için ilk olarak hangi dışsal ispat şemayı ortaya koyan tepkiyi daha çok gösterdikleri tespit edilmeye çalışılmıştır.

Araştırmanın verileri, öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde dışsal ispat şemalardan en çok dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarının göstergesi olan tepkiler ortaya koyma eğiliminde olduklarını göstermiştir. Buradan dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının bu çalışmada öğretmen adaylarının ispat çözümlerinde ağırlıklı olarak etkili olduğu sonucuna ulaşılabilir. İlgili alanyazın incelendiğinde öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan göstergelere sahip olduklarına ilişkin sonuçlar ortaya koyan tek çalışmanın Oflaz, Bulut ve Akcakin'in (2016) çalışması olduğu görülmektedir. Çalışmada en düşük başarıya sahip öğretmen adayının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkilerde bulunduğunu belirlenmiştir. Fakat Oflaz ve diğerleri (2016) çalışmalarını sınıf öğretmeni adaylarıyla gerçekleştirmişlerdir. Dolayısıyla anılan çalışmanın bulgularıyla bu çalışmanın bulguları hem öğretmen adaylarının başarı düzeylerine göre dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin göstergeleri açısından hem de çalışma grubu açısından farklılıklara sahiptir. Bu çalışmadaki ortaokul matematik öğretmeni adayları dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarını ortaya koyan tepkileri yoğun olarak göstermişlerdir. Fakat üniversite eğitimleri boyunca derslerinde daha çok ispata ilişkin içerikle karşılaşan ortaokul matematik öğretmeni adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarına ilişkin tepkileri, eğitimleri boyunca daha az ispat eğitimi almış olan sınıf öğretmeni adaylarına göre daha az sıklıkla göstermeleri beklenebilir. Bunun yanında ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ileride öğretmen olduklarında öğrencilerine sunacakları ispata ilişkin öğretimlerin sınıf öğretmeni adaylarına kıyasla daha çok olacağı düşünülmektedir. Dolayısıyla bu çalışmadaki ortaokul matematik öğretmeni adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan eğilimlerinin sınıf öğretmeni adaylarına kıyasla daha yoğun olmasının şaşırtıcı olduğu yorumu yapılabilir. Oflaz ve diğerleri (2016) çalışmalarında öğretmen adaylarına, üçgenin iç açılarının 180° 'ye eşit olduğunu

ispatlamaları istenen tek sorudan oluşan veri toplama aracını yöneltmişlerdir. Sınıf öğretmeni adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin tepkileri bu çalışmaya göre daha az ortaya koyma sebeplerinden bir tanesi sorunun düzeyinin kolaylığı olabilir.

Bu çalışmada düşük, orta ve yüksek başarı düzeylerindeki tüm öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarına ilişkin tepkiler ortaya koyma sebeplerinin daha ayrıntılı incelenmesi için bu şemaya ilişkin göstergeleri incelenmiştir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarının belirleyicisi olan göstergelerle; işlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bıraktıkları, sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri aradıkları, ispatı yapılandırırken sık kullanılan sembolik gösterimleri anlamlandırmadan kullandıkları, kullandıkları yöntem hakkında yanlış bilgiyle ispatı yapılandırdıkları, ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek yargıladıkları ve genel ifadelerle yüzeysel deliller sundukları belirlenmiştir. İlgili alanyazındaki çalışmalar her ne kadar öğrencilerin ya da öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyduklarına ilişkin az bulguya sahip olsa da; bazı çalışmaların (Güler ve diğerleri, 2012; Harel, 2001; Özer ve Arıkan, 2002; Pekşen Sağır, 2013; Sarı ve diğerleri, 2007; Selden ve Selden, 2003; Stylianides ve diğerleri, 2007; Zaimoğlu, 2012) bu çalışmada çalışma verilerinin kodları olarak ortaya çıkan dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin göstergelere dair çıkarımlarda buldukları görülmüştür. Aşağıda, bu göstergelere ilişkin bilgiler bulunmaktadır:

Bu çalışmada öğretmen adayları bazı durumlarda dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin tepkiler verirken *“işlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakma”* göstergesiyle hareket etmişlerdir. Benzer şekilde Sarı ve diğerleri (2007) çalışmalarında bazı matematik öğretmeni adaylarının ispatlama sürecinde öncelikle derslerde ne yapmış olduklarını hatırlamaya çalışmaya odaklandıklarını belirlemişlerdir. Dolayısıyla bu bulgunun bu çalışmadaki öğretmen adaylarının işlemlerini önceki öğrenmelerine benzer formatta dönüşüm yapmadan yarım bırakmaları bulgusuyla tutarlı olduğu söylenebilir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının, *“kullandıkları yöntem hakkında önceden öğrenmelerine dayanan yanlış bilgilerle ispatlarını yapılandırma”* göstergesiyle tepkiler verdikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde İspat Soruları Formu'na verdikleri yanıtlarda özellikle tümevarımsal akıl yürütme kullanarak

yapılandırmaya çalıştıkları ispatlarında temel basamak veya çıkarım basamağının anlamından haberdar olmadıkları ve ispatlarını derslerden öğrendiklerine benzer adımlar oluşturarak yapılandırdıkları görülmüştür. Bu bulgu, öğrencilerin veya matematik öğretmeni adaylarının tümevarımsal akıl yürütme ile ispat yapmakta zorluklar yaşadıkları ve bu yöntemin altında yatan mantığı kavrayamadıklarını söyleyen bazı çalışmaların (Güler ve diğerleri, 2012; Harel, 2001; Özer ve Arıkan, 2002; Stylianides ve diğerleri, 2007; Zaimoğlu, 2012) bulgularıyla tutarlık göstermektedir. Bu çalışmalar arasında matematik öğretmen adaylarıyla yürütülen çalışmaların (Güler ve diğerleri, 2012; Harel, 2001; Pekşen Sağır, 2013; Stylianides ve diğerleri, 2007) sonuçları öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım adımları arası ilişkiyi kavrayamadıklarını ve/veya bu yöntemi takip edilmesi gereken bir prosedür gibi kullandıklarını göstermiştir. Pekşen Sağır (2013) çalışmalarında öğretmen adaylarının ispat yöntemlerini ezbere kullanmaya çalıştıklarını, kullandıkları yöntemler hakkında eksik ve yanlış bilgilere sahip olduklarını ve belirlemişlerdir. Bu durum bu çalışmanın bulgularıyla tutarlık göstermektedir. Bunun yanında anılan çalışmalardaki (Güler ve diğerleri, 2012; Harel, 2001; Stylianides ve diğerleri, 2007) öğretmen adayları temel basamak ve doğrulama basamaklarını uygulamada ve anlamlandırmada zorluklar yaşamışlardır. Stylianides ve diğerleri (2007) temel ve tümevarımsal adımlar hakkındaki zorlukların ilköğretim matematik öğretmeni adaylarında, lise öğretmen adaylarından daha belirgin olarak ortaya çıktığı belirlemiştir. Dolayısıyla bu çalışmadaki ortaokul matematik öğretmeni adaylarının temel ve tümevarımsal adımlarda yaşadıkları zorlukların ulaşılan alanyazında bahsedilen zorluklarla tutarlı olduğu söylenebilir. Harel (2001) çalışmasında matematik öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım ile uğraşırken iki çeşit düşünme biçimini sergilediklerini belirtmiştir. Harel'a (2001) göre doğruluğu sonuçta sunulsa da kişinin iknasının süreç içerisindeki doğruluk ve düzene dayalı olduğu düşünme yolu süreç modeli genelleme olup bu genelleme biçimi dönüşümsel ispat şemasının bir göstergesi olmuştur. Öğretmen adaylarının tesadüfi olarak seçilen birkaç sayıyla oluşan bazı durumların, önermenin doğruluğunu göstermek için yeterli olacağına ikna oldukları veya tümevarım ilkelerini anlamayıp dışsal otoriteye dayandırdıkları durumlarda ise sonuç modeli genellemeye sahip olduklarını belirtmiştir. Harel (2001) bu genelleme biçiminin dışsal ve deneysel ispat şemasının bir göstergesi olduğunu belirtmiştir. Buradan hareketle bu çalışmada öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütme kullanırken sonuç modeli genellemeye sahip oldukları söylenebilir. Bu genelleme biçiminin onların dönüşümsel düşüncelerine engel olduğu sonucuna ulaşılabilir.

İlgili alanyazında öğrencilerin tümevarımsal akıl yürütme ile ispat yapmakta zorluklar yaşadıkları belirlenmiştir. Özer ve Arıkan (2002) lise öğrencilerinin ispat yöntem ve tekniklerini yeterince kullanmadıklarını, istenilen düzeyde ya da materyal kullanarak tümevarım yoluyla ispat yapamadıklarını; Zaimoğlu (2012) ilköğretim öğrencilerinin çoğunun tümevarımsal akıl yürütme yapmaya eğilimli olduğunu fakat ispatın altında yatan mantığı kavrayamadıklarını belirtmiştir. Bu bulgu öğretmen adaylarının tümevarımsal akıl yürütmede yaşadıkları zorluklar ile beraber ele alındığında, matematik öğretmen adaylarının bu konuda zorluklar yaşadıkları düşünüldüğünde, ilköğretim ya da lise çağındaki öğrencilerin kullandıkları yöntemler hakkında yeterli anlayışa sahip olmadıklarının şaşırtıcı olmadığı yorumu yapılabilir.

Bu çalışmadaki öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkilerinde bazı durumlarda “*ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek yargılama*” göstergesiyle hareket etmişlerdir. Selden ve Selden (2003) çalışmalarında üniversitede öğrenim gören matematik bölümü öğrencilerinin argümanların yüzeysel görünüşlerine odaklanma eğiliminde olduklarını belirlemişlerdir. Bu durum bu çalışmadaki öğretmen adaylarının ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek yargılamaya çalıştıkları bulgusuyla tutarlıdır.

Yukarıda da ayrıntılı biçimde aktarıldığı üzere, öğrencilerin ya da öğretmen adaylarının bu çalışmada dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarının göstergeleri olarak ortaya çıkan tepkilerinin ilgili alan yazında da bazı çalışmaların bulgularında yer aldığı söylenebilir.

Bu çalışmada öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde en az sıklıkla deneysel ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir. Başka deyişle öğretmen adayları deneysel ya da örnek temelli argümanlarla çoğunlukla ikna olmamışlardır. İlgili alanyazında öğretmen adaylarının ve lisans öğrencilerinin (Gholamazad ve diğerleri, 2004; Grigoriadou, 2012; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010; Liu ve Manouchehri, 2013; Oflaz ve diğerleri, 2016; Stylinou ve diğerleri, 2006; Recio ve Godino, 2001; Uygan ve diğerleri, 2014), lise öğrencilerinin (Ören, 2007), ve ortaokul öğrencilerinin (Heinze ve Reiss, 2003; Şen ve Güler, 2015) çoğunlukla deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri birçok çalışmada bulgusu yer almaktadır. Bunların yanında bulgularında öğretmen adayları ve lisans öğrencilerinin çoğunlukla örnek temelli ve deneysel argümanlar ve gerekçelendirmeler sundukları, örnekle doğrulama eğilimlerinin baskın olduğu (Ceylan, 2002; Demiray, 2013; Gholamazad ve diğerleri, 2004; Martin ve Harel, 1989; Pekşen

Sağır, 2013; Stylianides ve Stylianides, 2009; Şengül ve Güner, 2013) lise öğrencilerinin (Arslan ve Yıldız, 2010; Chazan, 1993; Coe ve Ruthven, 1994; Healy ve Hoyles, 2001; Özer ve Arıkan, 2002) ve ortaokul öğrencilerinin çoğunlukla örnek temelli ve deneysel argümanlar ve gerekçelendirmeler sundukları, örnekle doğrulama eğilimlerinin baskın olduğu (Aylar, 2014; Bieda, 2008; Goetting, 1995; Knuth ve diğerleri, 2009; Knuth ve diğerleri, 2002) ve bu argümanları ispat olarak görme eğiliminde oldukları bulgular yer alan birçok çalışma mevcuttur. Anılan çalışmalardaki öğrencilerin ve öğretmen adaylarının deneysel ispat şemalarının ve bunun bir tanımı olan deneysel argümanları ispat olarak görme eğiliminin tüm sınıf seviyelerindeki öğrencilerde yaygın olarak bulunduğu sonucuna ulaşılabılır. Bu çalışmada sevindirici bir şekilde deneysel ispat şemasına olan eğilimin az olması, anılan çalışmaların sonuçlarının tersinedir. Fakat bu durum bulgularında deneysel ispat şemasına hiç rastlanmayan ya da en az sıklıkla bulunan az sayıdaki çalışmayla (Boyle, 2012; Haverhals, 2011; Norby, 2013; Weber, 2010) tutarlık göstermektedir. Boyle (2012) matematik öğretmen adaylarıyla gerçekleştirdiği çalışmasında öğretmen adaylarının örnek temelli argümanlarla ikna olmadığını belirtmiştir. Haverhals'ın (2011) dokuz lisans öğrencisi ile yürüttüğü çalışmasında iki matematik lisans öğrencisi dışında hiçbir katılımcı deneysel ya da dışsal şemalarını ortaya koyan tepkileri bir görüşmeden fazlasında göstermemiştir. Norby (2013) matematik öğretmen adaylarıyla gerçekleştirdiği çalışmasında tüm öğretmen adaylarının sonsuz bir kümedeki bir matematiksel ifadeyi ispatlarken deneysel kanıtlamanın sınırlı ve sabit bir anlayışa sahip olduğunun farkında olduklarını belirtmiştir. Weber (2010) matematik lisans öğrencileri ile yaptığı çalışmasında öğrencilerin hiçbirinin deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermediği sonucuna ulaşmıştır.

Bu çalışmada; ilgili alanyazında birçok çalışmada görülen deneysel ispat şemalarının göstergeleri olan tepkileri ortaya koyma eğiliminin az olması ve en az sıklıkla görülmesi öğretmen adaylarının deneysel argümanlar ile ikna olmamasının bir göstergesi olabilir. Bunun yanında öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde en çok başvurduğu ispat şemasının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olduğu ve ondan sonra en çok sıklıkla analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri görülmüştür.

Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemaları dışındaki dışsal şemaları ortaya koyan tepkilerinin daha az olduğu düşünüldüğünde; çalışmadaki öğretmen adaylarının dönüşümsel yargılarının daha çok

alışkanlık edinilmiş ispat şemaları tarafından bloke edildiği; çıkarım yapmalarına engel olan alışkanlıkları yani dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına neden olan eğilimleri ortadan kaldırıldığında, analitik ispat şemalarının göstergelerini taşıma ihtimallerinin yüksek olduğu sonucuna ulaşılabilir. Bu çalışmada dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının en önemli belirleyicisi “*sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama*“ göstergesi olarak belirlenmiştir. Bunun yanında bu çalışmada “*ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma*”nın analitik dönüşümsel ispat şemasının en belirleyici göstergesi olduğu belirlenmiştir. Buradan, öğretmen adaylarının önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri aramalarına ilişkin eğilimleri azaltıldığında ispatlarını doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandıracakları gibi göstergelere sahip olarak analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyma ihtimallerinin yükseleceği söylenebilir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının analitik aksiyomatik ispat şemasını ortaya koyan tepkilerine rastlanmamıştır. Bu durum bazı çalışmalardaki (CadwalladerOlsker, 2007; İskenderoğlu ve diğerleri, 2010; Koichu, 2009; Plaxco, 2011) lisans öğrencileri ve öğretmen adaylarının analitik aksiyomatik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermeleri durumuyla tutarlık göstermemektedir. Bu çalışmadaki öğretmen adaylarının geleneksel ispat süreçleri kullanmada, teoremlerin sonuçlarının belirli bir aksiyomatik sistem içerisinde nasıl oluştuğunu anlamakta sıkıntı çektikleri, ispatlarını yapılandırırken tanımsız terimlerle işlem yapma becerisine sahip olmadıkları sonucuna ulaşılabilir.

Görev temelli görüşmelerde en yüksek ve orta başarı düzeyindeki Semiha ve Derya, İspat Soruları Formu’na benzer yaklaşımlarla cevap vermişlerdir. Örneğin; Semiha ve Derya İSF’nin birinci, ikinci ve üçüncü ve beşinci sorularında benzer çözüm yollarıyla dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir. Benzer şekilde İSF’nin dördüncü ve altıncı sorularında benzer şekilde analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler göstermişlerdir. En düşük ortalamaya sahip olan Hamra’nın ise İSF’nin tüm sorularında diğer iki öğretmen adayından farklı düşünme biçimleriyle hareket ettiği söylenebilir. Bu durum, bu çalışmada daha yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının kendi aralarında ispat şemalarını ortaya koyan tepkilerinin benzer olduğunun bir göstergesi olabilir.

Bunların yanında, öğretmen adaylarının analitik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdikleri durumlar incelendiğinde görev temelli görüşmelerde en yüksek ve orta düzeyde başarıya sahip olan öğretmen adayları olan Semiha ve Derya’nın aynı

sorularda (her öğretmen adayı üçer durumda olmak üzere) altı durumda; en düşük başarı düzeyindeki Hamra'nın ise sadece bir durumda analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiği belirlenmiştir. Bu durum; daha yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının benzer çözümler sergiledikleri bulgusuyla beraber düşünüldüğünde, çalışmadaki daha yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının analitik ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterme ihtimallerinin daha düşük başarı düzeyindeki öğretmen adaylarına göre daha yüksek olduğunun bir göstergesi olabilir.

Sarı ve diğerleri (2007) yüksek, orta ve düşük düzeyden üç matematik öğretmen adayı ile yürüttükleri çalışmalarında öğretmen adaylarının ispatlama sürecindeki başarılarının analiz dersinde gösterdikleri başarıya paralel olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Çalışmada yüksek başarılı öğretmen adayının analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler verdiği, orta başarı düzeyindeki öğretmen adayının ise yönlendirmeler sonucunda analitik dönüşümsel ispat şeması olarak nitelendirilebilecek tepkiler ortaya koymaya başladığını belirtilmiştir. En düşük başarı düzeyindeki öğretmen adayının dışsal ve deneysel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler gösterdiğini söylenmiştir. Sarı ve diğerleri'nin (2007) çalışma bulgularının bu çalışmadaki “orta ve yüksek düzeydeki öğretmen adaylarının benzer ispat şemaları sergileme” durumuyla ve “orta ve yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının daha düşük başarı düzeyindeki öğretmen adaylarına göre analitik ispat şemasına ilişkin özellikler gösterme ihtimallerinin daha yüksek olabileceği” bulgusuyla tutarlık gösterdiği sonucuna ulaşılabilir.

Görüşmelerin öğretmen adaylarının ispatın doğası hakkındaki görüşlerinin alındığı kısımlarında da dışsal kaynaklı fikirlerinin baskın olduğu ve bu fikirlerinin hepsinin dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması özellikleri gösterdiği görülmüştür. Öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin “*ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenerek göstermeye çalışma*” ve “*ispatı daha önceden edinilmiş ezber ve yüzeysel bilgilerle açıklama*” göstergeleriyle açıklamalar yaptıkları belirlenmiştir.

Bu çalışmada ispatın doğruluğunun ispatın görüntüsünden etkilenerek açıklanmaya çalışıldığı durumlarda başarılı bir ispat için gerekli olan şeylerin tanımlanmasında ispatın sayılardan, harflerden, matematiksel konulardan ve cebirsel ifadelerden oluştuğuna dair açıklamalara rastlanmıştır. Benzer olarak Healy ve Hoyles (2000) çalışmalarında lise öğrencilerinin, ispatın mutlaka cebirsel semboller içermesi gerektiğine inandıklarını ve hikâye anlatı tarzı kullanılan geçerli ispatların öğretmenlerden yüksek not alamayacağını

düşündüklerini raporlamışlardır. Buradan, ispatın doğruluğunu ispatın görüntüsünden etkilenecek açıklama çabalarının bu çalışma ile Healy ve Hoyles'un (2000) çalışmalarında tutarlık gösterdiği söylenebilir. Fakat Healy ve Hoyles (2000) çalışmasını lise öğrencileriyle yürütmüştür. Buradan, ispatı görüntüsüne odaklanarak yargılama tepkisinin hem lise öğrencilerinde hem de matematik öğretmen adaylarında görülebileceği söylenebilir.

Bu çalışmada ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasının en belirleyici göstergesi "*ispatı daha önceden edinilmiş ezber ve yüzeysel bilgilerle açıklama*" olarak belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının bu göstergelere ilişkin açıklamalarında ispatın önceden edinilen bir takım yüzeysel bilgilerle bir problem gibi tanımlanmasına yönelik ifadeler rastlanmıştır. Uyan ve diğerleri (2014) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispatı bir tür problem çözümü, problem çözümü için kurallar oluşturma olarak gördüklerini belirtmiştir. Benzer olarak Güler (2013) çalışmasında matematik öğretmeni adaylarının "problemler ispat şeklinde de çözülebilir", "süreç olarak aynıdır" ve "her ikisinde de problem ortadan kalkar" kategorileri altında açıklamalar yaptıklarını belirlemiştir. Buradan anılan çalışma bulgularının bu çalışmadaki ispatı bir problem gibi görerek yüzeysel bilgilerle açıklamalar yapma bulgusuyla tutarlı olduğu söylenebilir. Yine aynı göstergeyle ilişkili olarak bu çalışmada başarılı ispat için nelerin gerektiği hakkındaki açıklamalarda genelleştirilmiş ifadelerin ve herkesin kabulünce olan şeylerin ispat için gerekli olduğuna yönelik ispatın yüzeysel olarak açıklandığı ifadeler rastlanmıştır. Uyan ve diğerleri (2014) çalışmalarında ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispatın doğruluğunu herkesin kabul etmesine ve genel olarak kabul edilmiş olmasına yönelik olarak açıkladıklarını belirtmiştir. Bu bulgu; bu çalışmada ispatın öğretmen adayları tarafından yüzeysel ve önceden edinilmiş bilgilerle herkesin kabul ettiği biçimde genelleştirildiği bulgusuyla tutarlık göstermektedir. Yine Güler ve Dikici (2012) çalışmalarında öğretmen adaylarının "Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?" sorusuna verilen yanıtlarında diğer kategorilerin yanında "kalıcılık", "ezber" kategorilerinin bulunduğunu ve bazı öğretmen adaylarının matematiksel ispatın ezberden oluştuğunu düşündüğünü belirtmiştir. Güler (2013) çalışmasının sonuçlarında öğretmen adaylarına "matematiksel ispatın anlamı hakkında sorduğu sorularda diğer kategorilerin yanında "kalıcılık", "ezber", kategorilerinin ortaya çıktığını ve bazı öğretmen adaylarının matematiksel ispatın ezberden oluştuğunu düşündüğünü belirtmiştir. Baştürk'ün (2010) matematik öğretmeni adaylarının sınavlara girmeden önce ispatları yazarak ezberlemeye çalıştıklarını belirtmiştir. Bu bulguların bu

çalışmada öğretmen adaylarının ispatı daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklama göstergeleriyle hareket ettikleri bulgusuyla tutarlık gösterdiği söylenebilir. Buradan, ispatı önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklama göstergesinin ülkemizde yapılan çalışmalarda matematik öğretmeni adaylarının ifadelerinde ortaya çıktığı söylenebilir.

Öğretmen adayları ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasından sonra en sıklıkla analitik dönüşümsel ispat şemasının göstergelerine ilişkin açıklamalar yapmışlardır. Bu bulgu görev temelli görüşmelerde öğretmen adaylarının en sıklıkla dışsal alışkanlık edinilmiş, daha sonra analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tepkiler vermesi durumu ile benzerlik göstermektedir. Öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde en sıklıkla “*sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama*” göstergesiyle tepkiler vermişler, ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde ise *ispatı daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklama*” göstergesiyle açıklamalar yapmışlardır. Bu iki göstergenin benzerlik gösterdiği düşünülmüştür. Buradan, bu çalışmadaki öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin ezbere ve yüzeysel bilgilere sahip olma davranışları ile onların ispat yaparken ve ispatları yargılarken daha önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama davranışlarıyla ilişkili olduğu söylenebilir. Başka deyişle, bu çalışmadaki öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ilişkin en sıklıkla başvurdukları sınırlı bağlantılarla önceki öğrenmelerine benzer ispat süreçleri arama göstergesi ile onların ispatın doğasına ilişkin önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel bilgilere sahip olma göstergeleri ilişkili olabilir. Dolayısıyla çalışmaya katılan öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin daha önceden edinilmiş ezbere ve yüzeysel fikirlerinin, onların ispatı yapılandırırken dönüşüm yapmaları ile ilişkili olduğu ve ispatın doğasına ilişkin bu tür göstergelere sahip olmalarının ispatlarını önceden edindikleri bilgilere dayanarak yapılandırmaya çalıştıkları durumlarla benzediği çıkarımı yapılabilir.

Öğretmen adayları görev temelli görüşmelerde ispat yaparken ve ispatları yargılarken analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin olarak en belirleyici gösterge olarak “*ispatı doğru akıl yürütme ile dönüşüm yaparak yapılandırma*” göstergesiyle tepkiler vermişlerdir. Öğretmen adayları ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde analitik dönüşümsel ispat şemasını ortaya koyan tek bir gösterge ile açıklama yapmışlardır: “*Diğerlerini mantıksal akıl yürütme ile ikna edecek ifadelerde bulunma*”. Bu iki göstergenin benzer olduğu düşünüldüğünde, öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde analitik dönüşümsel ispat şemasının en belirleyici göstergesi olan ispatı doğru akıl yürütme ile

dönüşüm yaparak yapılandırdıkları durumların, onların ispatın doğasına ilişkin diğerlerini mantıksal akıl yürütme ile ikna edecek fikirleri ile ilişkili olduğu söylenebilir.

Tüm bu bulgular beraber değerlendirildiğinde; öğretmen adaylarının ispatın doğası hakkındaki görüşleri ile onların ispat yapılandırmaları ve ispat değerlendirmeleriyle benzerlik gösterdiği düşünülmüştür. Öğretmen adaylarının ispatın doğası hakkındaki ezbere ve yüzeysel bilgilerle açıklama yapma alışkanlıkları gösterdikleri durumların, ispatı diğerleriyle mantıksal akıl yürütme ile ikna edecek açıklamalar yaptıkları durumlarla etkileşim halinde olduğu; bu yüzden bu iki durumun göstergeleri arasındaki değişimlerin birbirini etkileyeceği söylenebilir. Öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin fikirlerinin onların ispat yapılandırma ve ispatı yargılama tepkileriyle paralellik gösterdiği öngörüldüğünde; onların ispatın doğası hakkındaki alışkanlık edinilmiş fikirlerindeki değişimlerin onların analitik dönüşümsel ispat şemalarına ilişkin göstergelerini etkileyebileceği; ya da ispat yapma göstergelerindeki değişimlerin onların ispatın doğası hakkındaki fikirlerini etkileyebileceği yorumu yapılabilir. Buradan öğretmen adaylarının ispat yapma ve yargılama tepkilerindeki veya ispatın doğasına ilişkin düşüncelerindeki dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarına ilişkin tepkilerinin azaltıldığında analitik dönüşümsel ispat şemasına ilişkin fikirler ya da tepkiler ortaya koyma ihtimallerinin yükseleceği söylenebilir.

Öğretmen adaylarının, görev temelli görüşmelerde, çoğu durumda kendilerine yöneltilen soruyu okuyup üzerinde düşündükten sonra uygun olan ispat yöntemini seçerek ispatı yapılandırmak yerine, kendilerine daha önceden tanıdık gelen ifadeler için önceden hatırladıkları kalıpları soruda uygulayarak sonuca ulaşma eğiliminde oldukları görülmüştür. Nitekim İSF'nin beşinci sorusunun yanlış olan son ispatını kimsenin doğru değerlendiremediği görülmüştür. Öğretmen adaylarına kullandıkları yöntemin ne olduğu sorulduğunda çoğu durumda yanlış yanıtlar verdikleri tespit edilmiştir. Bu bulgu, öğretmen adaylarının ispatın doğasına ilişkin görüşmelerde dışsal ispat şemalarını ortaya koyan ifadelerinin yoğun olması bulgusu ile tutarlı olabilir. Öğretmen adaylarının kullandıkları yöntem hakkında bilgi eksikliklerinin ve kavram yanlışlarının ispat yapılandırmalarını yanlış biçimde oluşturmalarına sebep olduğu yorumu yapılabilir. Başka deyişle, öğretmen adaylarının kullandıkları ispat yöntemlerini bilmemelerinin ve yöntemler hakkında kavram yanlışlarına sahip olmalarının sebebi onların ispatın doğası hakkındaki dışsal ispat şemasını ortaya çıkaran düşüncelerinden kaynaklanıyor olabilir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının tüm görüşmelerde dışsal kaynaklı fikirlerinin yoğun olarak bulunmasının onların ispatın doğası hakkındaki fikirleri ile ilişkili olabileceği

tartışılmıştır. Öğretmen adaylarının ispatın ne olduğu, ispatı nelerin oluşturduğu gibi ispatın doğasına ilişkin fikirlerinin tam olarak oturmadığı düşünülmektedir. Bu bulgu, matematik öğretmeni adaylarının ispata ilişkin görüşlerinin tam oturmadığını (Güner, 2012) ve ispat yapmaya ilişkin becerilerine ilişkin kavramsal yeterliliklerinin düşük olduğunu (Moralı ve diğerleri, 2006) söyleyen çalışmalar ile tutarlıdır.

Bir çalışma ise (Moore, 1994) matematik lisans öğrencilerinin ispat tanımlarını bilmeme ve ifade edememe; kavramlar hakkında çok az sezgisel anlayışa sahip olma, ispatın tüm yapısını ortaya koyacak tanımları nasıl kullanacaklarını bilmeme, matematiksel dili ve simgeleri anlayamama ve kullanamama gibi ispatın doğasına ilişkin zorluklar yaşadıklarını belirtmiştir. Bazı çalışmalar ise matematik öğretmenlerinin (Knuth, 2002b; Oehrtman ve Lawson, 2008) ispatın ve reddetmenin anlamları ve rolleri hakkında eksik anlayışa sahip olduklarını ve hatta ispatın okul matematiği boyunca merkezi fikir olmaması gerektiğini vurguladıklarını belirtmişlerdir. Lisans öğrencilerinin ve matematik öğretmenlerinin ispatın doğasına ilişkin görüşlerinin eksik olması bu çalışmanın bulgularıyla tutarlık göstermektedir. Dolayısıyla, ispatın doğası hakkındaki gelişmemiş fikirlerin hem öğretmen hem öğrenci hem de öğretmen adayları boyutunda ortaya çıktığı ve geliştirilmesi gerektiği söylenebilir.

Bu çalışmada ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispatın doğası hakkındaki fikirlerinin veya görüşlerinin daha doğru biçimde gelişmesinin onların ispat yapılandırmaları ve ispatı yargılamaları üzerinde veya bunun tersi olarak onların ispat yapılandırmaları ve ispatı yargılamaların gelişmesinin onların ispatın doğası hakkındaki fikir veya görüşleri üzerinde olumlu etki yaratabileceği düşünülmektedir.

5.2. Öneriler

Bu bölümde öğretmen yetiştirme programlarına ve araştırmacılara yönelik öneriler sunulmuştur. Öğretmen yetiştirme programlarına yönelik öneriler, aşağıda sunulmuştur:

Bu çalışmada orta ve yüksek başarı düzeyindeki öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarını ortaya koyan tepkilerinin baskın olduğu görülmüştür. Başka deyişle, öğretmen adaylarının, argümanın doğruluğunu araştırırken argümanın doğruluğu yerine görüntüsünden ve ispatın alışlagelen formatlarından etkilenerek karar verdikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının bu eğilimlerini ortadan kaldırmak için sınıf içi uygulamalarda alışlagelmiş ispat yapılandırmalarının hazır biçimde öğrencilere sunulduğu, ezbere öğretimin tek kaynak olduğu eğitime son verilmesi; öğretmenin öğrencilerin akıl yürütmesine izin verdiği, öğrencilerin neden ve sonuçları sorgulayarak öğrendikleri sınıf uygulamalarına yer verilmesi önerilebilir.

Öğretmen adaylarının görev temelli görüşmelerde dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarından sonra en çok analitik dönüşümsel ispat şemalarına ilişkin tepkiler verdiği; bir soruya ilişkin yanıtlarında iki ispat şemasına ait tepkileri aynı anda gösterdiklerinde, ispat şemalarından birinin mutlaka dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması olduğu belirlenmiştir. Dolayısıyla öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarına ilişkin tepkilerinin ortadan kaldırıldığında, analitik ispat şemalarını ortaya koyan tepkilerinin artacağı çıkarımı yapılabilir. Öğretmen adaylarının dışsal ispat şemalarını oluşturan eğilimlerini ortadan kaldırmak ve onların varsayımlarını mantıksal çıkarım ile geçerli kılan analitik ispat şemalarına ilişkin tepkiler ortaya koymalarını sağlamak için öğretim etkinliklerinde öğrencilerin genelleme yapma, işlemsel düşünme ve mantıksal çıkarım yapma becerilerini artıracak ve tahminler kullanarak önceki bilgilerini yeni durumlara uygulamalarını (Aydoğdu İskenderoğlu, 2016) sağlayacak eğitim ortamlarının oluşturulması ve mümkünse sadece ispat uygulamalarının yer aldığı ispat konulu derslerin yürürlüğe sokulması önerilebilir.

Çalışmada öğretmen adaylarının ispata ve ispatın doğasına yaklaşımlarında dışsal kaynaklı fikirlerinin baskın olduğu ve bu fikirlerinin büyük çoğunluğunun dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasına ortaya koyan özellikler gösterdiği belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının analitik ispat şemasına geçişlerini sağlayabilmek için onların ispatın doğası hakkındaki fikirlerin gelişmesini sağlayacak öğretim etkinliklerine dâhil olmaları önerilebilir. Bu öğretim etkinlikleri matematik alan derslerinin ispat uygulamalarına geçmeden önce öğrencilere ispatın doğası hakkında düşüncelerini sağlayacak soru ve projelerden oluşabilecek şekilde hazırlanabilir.

Çalışmada, araştırmacılara yönelik öneriler aşağıdaki şekliyle sunulmuştur:

Bu çalışmada öğretmen adaylarının sergiledikleri ispat şemaları durum çalışması yoluyla ortaya konmaya çalışılmıştır. Öğretmen adaylarına uygulanacak ispat eğitiminin geliştirilebilmesi için araştırmacılara öğretim deneyimlerinin test edildiği deneysel çalışmaların yapılması önerilebilir. Alanyazında, öğrencilerin ispat şemalarının gelişimini sağlaması için geliştirilmiş öğretim deneyimlerini içeren deneysel birçok çalışma (CadwalladerOlsker, 2007; Ellis, 2007; Grigoriadou, 2012; Harel, 2001; Harel ve Rabin, 2010; Martin ve diğerleri, 2005; Soto, 2010; Soucy McCrone ve Martin, 2004; Sowder ve Harel, 2003) mevcuttur. Bu çalışmalar öğrencilerin bu tür öğretim deneyimleriyle ispat şemalarında geliştiklerini gösteren bulgulara yer vermişlerdir. Fakat bu çalışmaların yurtdışında yapıldığı görülmektedir. Araştırmacılara, ülkemizde bu tür çalışmaların yaygınlaşması amacıyla buna benzer deneysel araştırmalara yönelmeleri önerilebilir.

Bu çalışmanın pilot uygulamasında İspat Soruları Formu öncelikle öğretmen adaylarına yazılı olarak dağıtılmış, daha sonra cevapları toplanarak değerlendirilmiş ve ispat şemaları ortaya çıkarılmıştır. Uygulama sonrasında belli bazı öğretmen adaylarıyla yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Fakat görüşmeler sonrasında öğretmen adaylarının İSF'deki yazılı cevaplarına ilişkin gösterdikleri ispat şemalarını ortaya koyan tepkileri ile görüşmelerden elde edilen verilerin analizinden sonraki ispat şemalarını ortaya koyan tepkilerinin farklı olabileceği görülmüştür. Bu durumun çalışmanın amacına hizmet etmediği düşünüldüğünden, tüm uygulamanın görev temelli görüşmeler ile yapılandırılmasına karar verilmiştir. Dolayısıyla ispat şemasıyla ilgili çalışma yapmayı düşünen araştırmacılara, uygulamalarını yazılı sınav yerine görev temelli görüşmeler ile gerçekleştirmeleri önerilebilir.

Çalışma, öğretmen adaylarının ispat şemalarının belirlenebilmesi amacıyla öğretmen adaylarına uygulanmıştır. Araştırmacılara, ilkökul, ortaokul ve lise öğrencilerinin ispat şemalarının belirlenebilmesine yönelik çalışmalar yapmaları önerilebilir. Aynı zamanda araştırmacılara öğretmenlerin ispat şemalarının belirlenebilmesi amacını ve bu ispat şemalarını nasıl ortaya koyduklarının belirlenebilmesi amacını taşıyan çalışmalar yürütmeleri önerilebilir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının Elemanter Sayı Kuramı dersinde yer alan Sayılar alanındaki bölünebilme ve asal sayılar konusu ile buna ilave olarak karmaşık sayılar konusunu kapsayan ispat çözümlerindeki ve ispatın doğası hakkındaki ispat şemaları belirlenmeye ve bu şemaları nasıl ortaya koydukları tespit edilmeye çalışılmıştır. Geometri milattan önceki zamanlardan günümüze kadar devam eden ve ispat ile iç içe olan matematiğin önemli bir alt dalıdır. Dolayısıyla araştırmacılara matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarını geometri alanında ortaya koymalarını hedefleyen çalışmalar yapmaları önerilebilir. İlgili alanyazın incelendiğinde, ispat şemalarını başka değişkenler olmadan geometri alanında inceleyen bir çalışmaya (Heinze ve Reiss, 2003) rastlansa da bu çalışmanın çalışma grubunu ortaokul öğrencilerinin oluşturulduğu görülmüştür. Bunun dışında lise öğrencilerinin ispat şemalarının gelişimini geometri alanında inceleyen boylamsal araştırmalara (Martin ve diğerleri, 2005; Soucy McCrone ve diğerleri, 2004) ve ortaokul öğrencilerinin ispat şemalarını farklı değişkenlerle beraber inceleyen bir araştırmaya (Ören, 2007) rastlanmıştır. Matematik öğretmeni adaylarının ispat şemalarını başka değişkenler olmadan belirlemeyi hedefleyen sadece bir çalışmaya (Ofraz ve diğerleri, 2016) rastlanmıştır. Bu çalışma da sınıf öğretmeni adaylarıyla

gerçekleştirilmiştir. Dolayısıyla araştırmacılara ilgili alanyazındaki boşluğu dolduracak ve alana katkı sağlayacak matematik öğretmen adaylarının geometri alanında ispat şemalarının belirlenmesine yönelik çalışmalar yapmaları önerilebilir. Bu çalışmalarda öğretmen adaylarının geometri alanında bu şemaları nasıl sergilediklerinin de ortaya koyulmasının ilgili alanyazına özgün değer katacağı düşünülmektedir.

Bu çalışmada matematik öğretmeni adaylarının Sowder ve Harel'in (1998) tüm ispat şeması sınıflandırmalarına yönelik gösterdikleri tepkiler ortaya koyulmaya çalışılmıştır. Bunun sonucunda daha önce de belirtildiği üzere öğretmen adaylarının çoğunlukla dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarını, ondan sonra ise analitik dönüşümsel ispat şemalarını ortaya koyan tepkiler verdikleri görülmüştür. Bu konunun daha ayrıntılı incelenmesi amacıyla araştırmacılara, öğretmen adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemalarını nasıl ortaya koyduklarına, bu alışkanlıklarının nasıl giderilmesi gerektiğine ve öğretmen adaylarının analitik ispat şemalarına geçişlerine yönelik öneriler geliştirebilecekleri araştırmalar yapmaları önerilebilir. İlgili alanyazın incelendiğinde belirli bir ispat şemasına yönelik olarak yapılan tek çalışmanın Harel ve Rabin (2010) tarafından ortaya koyulduğu görülmüştür. Çalışmada öğretmen odaklı belirli öğretme uygulamalarının lise öğrencilerinin otoriter ispat şeması gelişimi üzerindeki etkilerini ortaya çıkarılmıştır. Dolayısıyla matematik öğretmeni adaylarının dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şemasını ortaya koyan tepkilerini nasıl gösterdiklerinin belirlenmesine ve bu konuda belirli öğretim uygulamalarına yönelik öneriler geliştirilmesine ilişkin çalışmaların alan yazına katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Bu çalışmada öğretmen adaylarının ispat şemaları durum çalışması ile Sowder ve Harel'in (1998) ispat şeması sınıflandırması çerçevesinde ortaya koyulmaya çalışılmıştır. Çalışmada tüm ispat şeması sınıflandırmalarına ilişkin bulgular ortaya konmuştur. Çalışmanın doğası gereği ispat şeması sınıflandırmalarına ilişkin yeni sınıflar (temalar) ortaya çıkmamıştır. Fakat, ispat şeması sınıflandırmasının Türk örneklemelerinde gömülü teori (grounded theory) yardımıyla şekillendirildiğinde Türkiye'de bu sınıflamalara ilişkin farklı bakış açıları ortaya koyabileceği ve bu sınıflandırmalara ilişkin belki yeni temalar (ispat şeması sınıflandırmaları) ortaya çıkabileceği düşünülmektedir. Dolayısıyla araştırmacılara, matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarının gömülü teori yardımı ile belirlenmesine yönelik çalışmalar yapmaları tavsiye edilebilir.

Bu çalışmada ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispatın doğası hakkındaki görüşlerini açıklarken ortaya koydukları ispat şemalarıyla onların ispat yapılandırmaları ve

ispatı yargulamalarında ortaya koydukları ispat şemalarının paralellik gösterdiği belirlenmiştir. Ancak bu konuda nicel ölçümler yapılmadığından buradaki ilişkinin yönü belirlenememiştir. Bu noktadan hareketle öğretmen adaylarının ispat yaparken ortaya koydukları ispat şemalarının geliştirilmesinin onları ispatında doğasına ilişkin görüşlerinde sergiledikleri ispat şemalarında değişime yol açıp açmadığı ya da öğretmen adaylarının ispatında doğasına ilişkin görüşlerinde sergiledikleri ispat şemalarının geliştirilmesinin onların ispat yaparken ortaya koydukları ispat şemalarında değişime yol açıp açmadığını inceleyen çalışmalar yapılması buradaki belirsizliği ortadan kaldırabilir. Araştırmacılara belirli öğretim uygulamalarıyla bu iki değişken arasındaki ilişkinin yönünü ve etkisini belirlemeye yönelik deneysel araştırmalar yapmaları önerilebilir.



KAYNAKLAR

- Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479-488.
- Altıparmak, K., ve Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme, *Ege Eğitim Dergisi*, 6(1), 25-37.
- Arslan, S., ve Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşıntılarından yansımalar, *Eğitim ve Bilim*, 35(156), 17-31.
- Assad, D. A. (2015). Task-based interviews in mathematics: Understanding student strategies and representations through problem solving, *International Journal of Education and Social Science*, 2(1), 17-26.
- Aydoğdu İskenderoğlu, T. (2016). Kanıt ve kanıt şemaları. İçinde E. Bingölbali, S. Arslan, & İ.Ö. Zembat (Ed.), *Matematik Eğitiminde Teoriler* (65-83). Ankara: Pegem Akademi.
- Aydoğdu İskenderoğlu, T. (2003). *Farklı sınıf düzeylerindeki öğrencilerin matematik problemlerini kanıtlama süreçleri*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Abant İzzet Baysal Üniversitesi, Bolu.
- Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinde ispat kavramının öğretilebilirliğinin incelenmesi*, (Yayımlanmamış doktora tezi). Hacettepe Üniversitesi, Ankara.
- Balacheff, N. (2010). Bridging knowing and proving in mathematics: A didactical perspective. İçinde G. Hanna, H.N. Jahnke, & H. Pulte (Ed.), *Explanation and proof in mathematics: Philosophical and educational perspectives* (115-136). New York: Springer.
- Balacheff, N. (2002). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. İçinde E. Von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (89-110), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. İçinde En Pimm D. (Ed.), *Mathematics, teachers and children*. (216-235). London: Hodder and Stoughton.
- Baştürk, S. (2010). First-year secondary school mathematics students' conceptions mathematical proofs and proving. *Educational Studies*, 36(3), 283-298.
- Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations, *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.
- Bieda, K.N. (2008). *The pedagogy of proving in middle school mathematics*. (Yayımlanmamış doktora tezi). University of Wisconsin, Madison, USA.
- Blum, W., ve Kirsh, A. (1991). Preformal proving: Examples and reflections. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 83-203.
- Boyle, J.D. (2012). *Study of prospective secondary mathematics teachers' evolving understanding of reasoning-and-proving*. (Yayımlanmamış Doktora Tezi). University of Pittsburgh, USA.

- CadwalladerOlsker, T. (2007). *Proof schemes and proof writing*. (Yayımlanmamış doktora tezi). Claremont Graduate University, California, USA.
- Ceylan, T. (2002). *Geogebra yazılımı ortamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının geometrik ispat biçimlerinin incelenmesi*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Ankara Üniversitesi, Ankara.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof, *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 359-387.
- Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education*, 547-589.
- Coe, R., ve Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students, *British Educational Research Journal*, 20(1), 41-54.
- Common Core State Standards Initiative. (2010). *Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM)*. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers. <http://www.corestandards.org/Math/> internet adresinden 5.03.2017 tarihinde elde edildi.
- Cyr, S. (2004, Ekim). Conceptions of proof among preservice high school mathematics teachers. İçinde D.E. McDougall, & J. A. Ross (Ed.), *Proceedings of The Twenty-sixth Annual Meeting of The North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (570-576). Toronto: OISE/UT.
- Dane, A. (2008). İlköğretim matematik 3. sınıf öğrencilerinin tanım, aksiyom ve teorem kavramlarını anlama düzeyleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 16(2), 495-506.
- Davis, P. (1986). The nature of proof. İçinde M. Carss (Ed.), *Proceedings of The Fifth International Congress on Mathematical Education* (352-358). Boston: Springer Science+Business Media: Birkhäuser.
- Dawson, J. (2006). Why do mathematicians re-prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 14(3), 269-286.
- Demiray, E. (2013). *An investigation of pre-service middle school mathematics teachers' achievement levels in mathematical proof and the reasons of their wrong interpretations*. (Yayımlanmamış Yüksek lisans Tezi), Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- De Villiers, M. (1999). The role and function of proof with Sketchpad. *Rethinking Proof with Sketchpad*, 3-10.
- Ellis, A.B. (2007). Connections between generalizing and justifying; Students' reasoning with linear relationships, *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 194-229.
- Fawcett, H. P. (1938). *The nature of proof: a description and evaluation of certain procedures used in a senior high school to develop an understanding of the nature of proof*. (NCTM yearbook 1938) New York: Teachers' College, Columbia University.
- Flores, A. (2006). How do students know what they learn in middle school mathematics is true?, *School Science and Mathematics*, 106(3), 124-132.

- Flores, A. (2002). How do children know that what they learn in mathematics is true? *Teaching Children Mathematics*, 8(5), 269-279.
- Gholamazad, S., Liljedahl, P., ve Zazkis, R. (2004, Ekim). What Counts as Proof? Investigation of Preservice Elementary Teachers' Evaluation of Presented 'Proofs', *Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Toronto, Kanada.
- Godino, J. D., ve Recio A. M. (1997, Temmuz). Meanings of proof in mathematics education. İçinde E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th International Conference of PME (Vol. 2)* (313–321), Lahti, Finland.
- Goetting, M. M. (1995). *The college students' understanding of mathematical proof*, (Yayımlanmamış Doktora Tezi), The University of Maryland, USA.
- Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task based interviews in mathematics education research. İçinde A. E. Kelly , & R.A. Lesh (Ed.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (517-545). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Goldin, G. A. (1997). Chapter 4: Observing mathematical problem solving through task-based interviews [Monograph]. *Journal for Research in Mathematics Education, Qualitative Research Methods in Mathematics Education*, 9, 40-177 + 164-177.
- Grabiner, J. V. (2012). Why proof? A historian's perspective. İçinde G. Hanna, & M. De Villers (Ed.), *Proof and Proving in Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.
- Grigoriadou, O. (2012). *Reasoning in geometry. How first learning to appreciate the generality of arguments helps students come to grips with the notion of proof*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). University of Amsterdam, Holland.
- Güler, G. (2013). *Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi*, (Yayımlanmamış Doktora Tezi), Atatürk Üniversitesi, Erzurum.
- Güler, G., ve Dikici, R. (2012). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispat hakkındaki görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(2), 571-590.
- Güler, G., Özdemir, E., & Dikici, R (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 20(1), 219-236.
- Güner, S. (2012). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinde DNR tabanlı öğretime göre anlama ve düşünme yollarının incelenmesi*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Hanna, G. (2014). Mathematical proof, argumentation and reasoning. İçinde S.Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (404-408). Dordrecht: Springer.
- Hanna, G. (2002). Mathematical Proof. İçinde D.Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*. (54-64). New York: Kluwer Academic Publishers.

- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview, *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5–23.
- Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.
- Hanna, G., ve Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. İçinde A.J. Bishop, K.Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Ed.), *International handbook of mathematics education*, Volume 4 (877-908) Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Hanna, G., ve Jahnke, H.N. (1993). Proof and application. *Educational Studies in mathematics*, 24(4), 421-438.
- Harel, G. (2014). Deductive reasoning in mathematics education. İçinde S.Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (143-147). London: Springer.
- Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. İçinde P. Boero (Ed.), *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice* (65-78). Rotterdam: Sense Publishers.
- Harel, G. (2001). The development of mathematical induction as a proof scheme: A model for DNR-based instruction. İçinde S. Campbell, & R. Zaskis (Ed.), *Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction* (185–212). New Jersey: Ablex Publishing Corporation.
- Harel, G. (1999). Students' understandings of proofs: A historical analysis and implications for the teaching of geometry and linear algebra, *Linear Algebra and Its Applications*, 302-303, 601-613.
- Harel G., ve Rabin, J. M. (2010) Teaching practices that can promote the authoritative proof scheme, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 10(2), 139-159.
- Harel, G., ve Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. İçinde F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (805-842). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Harel, G., ve Sowder, L. (1998). Students proof schemes: Results from exploratory studies, *CBMS Issues in Mathematics education*, 7, 234-283.
- Haverhals, N.J. (2011). *Student's development in proof: A longitudinal study*. (Yayımlanmamış Doktora Tezi). The University of Montana, Missoula.
- Healy, L., ve Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra, *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(4), 396-428.
- Heinze, A., ve Reiss, K. (2003, Şubat). Reasoning and proof: Methodological knowledge as a component of proof competence., *CERME 3 Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, Bellaria, Italy.

- Herbst, P., ve Balacheff, N. (2009). Proving and knowing in public. The nature of proof in a classroom. İçinde M. Blanton, D. Stylianou, & E.J. Knuth (Ed.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-12 perspective*. (40-64). New York: Routledge.
- Hersch, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 389-399.
- Housman, D., ve Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students, *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 139-158.
- Houssart, J., ve Evens, H. (2011). Conducting task-based interviews with pairs of children: consensus, conflict, knowledge construction and turn taking. *International Journal of Research & Method in Education*, 34(1), 63-79.
- İmamoğlu, Y. (2010). *An investigation of freshmen and senior mathematics and teaching mathematics students' conceptions and practices regarding proof*. (Yayımlanmamış Doktora Tezi), Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul.
- İnam, B. (2014). *Ortaöğretim düzeyinde, kavrama testlerine dayalı bir ispat öğretim uygulamasının değerlendirilmesi*, (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi), Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.
- İskenderoğlu, T. (2010). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıtlamayla ilgili görüşleri ve kullandıkları kanıt şemaları* (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- İskenderoğlu, T., Baki, A., & İskenderoğlu, M. (2010). Proof schemes used by first grade of preservice mathematics teachers about function topic, *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 9, 531-536.
- Kitcher, P. (1984). *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York: Oxford University Press.
- Kleiner, I. (1991). Rigor and proof in mathematics: A historical perspective. *Mathematics Magazine*, 64(5), 291-314.
- Knuth, E.J. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.
- Knuth, E.J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 61-88.
- Knuth, E., Choppin, J., ve Bieda, K. (2009). Middle school students' productions of mathematical justification. İçinde M. Blanton, D. Stylianou, & E. Knuth (Ed.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (153-212). NY: Routledge.
- Knuth, E., Slaughter, M., Choppin, J., ve Sutherland, J. (2002). Mapping the conceptual terrain of middle school students' competencies in justifying and proving. İçinde D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant, & K. Noony (Ed.), *Proceedings of the 24th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol 4)*, (1693-1700). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

- Koichu, B. (2009, Mayıs). What can pre-service teachers learn from interviewing high school students on proof and proving?. *ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education, Volume 2*, Taipei, Taiwan.
- Koichu, B., ve Harel, G. (2007). Triadic interaction in clinical task-based interviews with mathematics teachers. *Educational Studies in Mathematics* 65(3), 349-365.
- Köğçe, D., ve Yıldız, C. (2011). A comparison of freshman and senior mathematics student teachers' views of proof concept, *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 15, 1266-1270.
- Kurumu, T.D. (2017). Güncel Türkçe Sözlük. <http://tdk.gov.tr/> adresinden 1.02.2017 tarihinde elde edilmiştir.
- Lakatos, I. (1978). What does a mathematical proof prove? İçinde J. Worrall, & G. Currie (Ed.), *Mathematics, science and epistemology. Philosophical Papers Volume 2* (61-69). USA: Cambridge University Press.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The Logic of Mathematical Discovery* . İçinde J.Worrall, & E. Zahar (Ed). Cambridge: Cambridge University Press.
- Lane, E. (2004). The nature of proof in today's classroom. Book review of The Nature of Proof, *The Mathematics Enthusiast*. 1(2), 58-65.
- LeCompte, M.D., ve Goetz, J.P. (1982). Problems of reliability and validity in ethnographic research, *Review of Educational Research*, 52, 31-60.
- Lee, W-I. (1999). *The relationship between students' proof writing ability and Van Hiele levels of geometric thought in a college geometry course* (Yayımlanmamış Doktora Tezi). University of Northern Colorado, USA.
- Liu, Y., ve Manouchehri, A. (2013). Middle school children's mathematical reasoning and proving schemes, *Investigations in Mathematics Learning*, 6(1), 18-40.
- Maher, C.A., ve Sigley, R. (2014). Task based interview in mathematics education. İçinde S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (579-582). London: Springer.
- Mason, J, Burton, L., ve Stacey, K. (2010). *Thinking mathematically* (2. Baskı). Harlow: Pearson.
- Mariotti, M.A.(2006). Proof and proving in mathematics education. İçinde A. Gutierrez, & P. Boero (Ed.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education. Past, present and future* (173-204). Rotterdam: Sense Publishers.
- Martin, G., ve Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 41-51.
- Martin, T.S., Soucy McCrone, S.M., Wallece Bower M.L., ve Dindyal, J. (2005). The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof, *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 95-124.
- Maxwell, J.A. (1996). *Qualitative research design. An interactive approach*: Thousand Oaks: Sage.

- MEB (2013). T.C. Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10,11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. Ankara: Milli Eğitim Bakanlığı.
- Merriam, S. B. (1990a). *Qualitative research and case study applications in education*, San Francisco: Jossey-Bass.
- Merriam, S. B. (1990b). *Case study research in education*. San Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Miles, M.B., ve Huberman, A.M.(1994). *Quality data analysis: An expanded sourcebook*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- Miyazaki, M. (2000). Levels of proof in lower secondary school mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 41(1), 47-68.
- Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in mathematics*, 27(3), 249-266.
- Moralı, S. , Uğurel, I., Türnüklü, E., ve Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 14(1), 147-160.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*, Reston.VA: NCTM.
- Norby, K. (2013). *Investigating viable arguments: pre-service mathematics teachers' construction and evaluation of arguments* (Yayımlanmamış Doktora Tezi). Montana State University, Bozeman, Montana.
- Oehrtman, M., ve Lawson, A. E. (2008). Connecting science and mathematics: The nature of proof and disproof in science and mathematics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 6(2), 377-403.
- Oflaz, G., Bulut, N., ve Akcakin, V. (2016). Pre-service classroom teachers' proof schemes in geometry: a case study of three pre-service teachers. *Eurasian Journal of Educational Research*, 63, 133-152.
- Opper, S. (1977). Piaget's Clinical Method, *The Journal of Children's Mathematical Behavior*, 1(1), 90-107.
- Ören, D. (2007). *An investigation of 10th grade students' proof schemes in geometry with respect to their cognitive styles and gender*. (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara.
- Özdemir, F., ve Kaplan, A. (2014). Öğretmen adaylarının öğrenme stillerine göre matematiksel ispat hakkındaki görüşlerinin incelenmesi, *Amasya Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 3(2), 410-429.
- Özer, Ö., ve Arıkan, A. (2002, Eylül). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri. *V.Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, Ankara, Bildiriler Kitabı, II, 1083-1089. http://old.fedu.metu.edu.tr/ufbmek-5/netscape/b_kitabi/PDF/Matematik/Bildiri/t245d.pdf adresinden 02.03.2016 tarihinde elde edildi.

- Patkin, D. (2012). High school students' perceptions of geometrical proofs proving and refuting geometrical claims of the "for every..." and "there exists" type, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(8), 985-998.
- Pekşen Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi), Marmara Üniversitesi, İstanbul.
- Plaxco, D.B. (2011). *Relationship between students' proof schemes and justifications*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi). Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, USA.
- Raman, M.J. (2002). *Proof and justification in collegiate calculus* (Yayımlanmamış doktora tezi). University of California, Berkeley, USA.
- Raman, M. (2001, Ekim). Beliefs about proof in collegiate calculus. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (23rd)*, Snowbird, Utah. <http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED476632.pdf> adresinden ERIC veri tabanından 2.02.2016 tarihinde elde edildi.
- Recio, A.M., ve Godino, J.D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof, *Educational Studies in Mathematics*, 48(1), 83-99.
- Reid, D.A., ve Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education. Research, Learning and Teaching*, Rotterdam: Sense Publishers.
- Reid, D. A. (2005, Şubat). The meaning of proof in mathematics education. *European Research in Mathematics Education IV. Proceedings of CERME4, San Feliu de Guixols, Spain*.
- Reid, D. A. (2001, Temmuz). Proof, proofs, proving and probing: Research related to proof, *Twentieth-Fifth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, Netherlands.
- Riley, K.J. (2003). *An investigation of prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proof and refutations*. (Yayımlanmamış Doktora Tezi) Montana State University, Bozeman, Montana.
- Sarı, M., Altun, A., ve Aşkar, P. (2007). Undergraduate students' mathematical proof processes in a calculus course: case study, *Journal of Faculty of Educational Sciences*, 40(2), 295-319.
- Schabel, C.J. (2001). *An instructional model to improve proof writing in college number theory*. (Yayımlanmamış Doktora Tezi), Portland State University, USA.
- Schoenfeld, A. (2002). Research methods in (mathematics) education. İçinde L.D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (435-488). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior*, 13(1), 55-80.
- Segal, J. (1999). Learning about mathematical proof: Conviction and validity. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(2), 191-210.

- Selden, A., ve Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36.
- Sen, C., ve Güler, G. (2015). Examination of secondary school seventh graders' proof skills and proof schemes. *Universal Journal of Educational Research*, 3(9), 617-631.
- Senk, S. L. (1985). How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher*, 78(6), 448-456.
- Solomon, Y. (2006). Deficit or difference? The role of students' epistemologies of mathematics in their interactions with proof, *Educational Studies in Mathematics*, 61(3), 373-393.
- Soto, O.D. (2010). *Teacher change in the context of a prof-centered professional development*. (Yayımlanmamış doktora tezi). San Diego State University, San Diego, USA.
- Soucy Mccrone, S. M., ve Martin, T. S. (2004, Ekim). The impact of teacher actions on student proof schemes in geometry, *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Totonto, Ontario, Canada.
- Sowder, L., ve Harel, G. (2003). Case studies of mathematics majors' proof understanding, production, and appreciation, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 3(2), 251-267.
- Sowder, L., ve Harel, G. (1998). Types of students' justifications, *The Mathematics Teacher*, 91(8), 670-675.
- Stylianides, A., ve Stylianides, G. (2009). Proof construction and evaluation. *Educational Studies in Mathematics*, 72, 237-253.
- Stylianides, G.J., Stylianides, A.J., ve Philippou, G.N. (2007). Preservice teachers' knowledge of proof by mathematical induction. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 145-166.
- Stylinou, D., Chae, N., ve Blanton, M. (2006). Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions, *Proceedings of the annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico.
- Şengül, S., ve Güner, P. (2013). DNR tabanlı öğretime göre matematik öğretmen adaylarının ispat şemalarının incelenmesi, *International Journal of Social Science*, 6(2), 869-878.
- Tall, D. (2014). Making sense of mathematical reasoning and proof. İçinde M.N. Fried, & T. Dreyfus (Ed.), *Mathematics & mathematics education: Searching for common ground* (223-236). Dordrecht: Springer.
- Tall, D. (2002). The psychology of advanced mathematical thinking. İçinde D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (3-21). New York: Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (1998). The Cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or For Some? İçinde Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World* (117-136). Reston, Virginia: NCTM.

- Tall, D. (1989). The nature of mathematical proof. *Mathematics Teaching*, 127, 28-32.
- Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., ve Cheng, Y.H. (2012). Cognitive development of proof. İçinde G.Hanna, & M. Villers (Ed.), *Proof and proving in mathematics education The 19th ICMI stud.* (13-50). Dordrecht: Springer.
- Tymoczko, T. (1986). Making room for mathematicians in the philosophy of mathematics. *The Mathematical Intelligencer*, 8(3), 44-50.
- Uğurel, I. (2010). *Ortaöğretim Matematik programının temel öğeleri çerçevesinde öğrencilerin ispat kavramına yönelik matematiksel bilgilerini nasıl düzenlediklerinin söylem çözümlemesi ile belirlenmesi.* (Yayımlanmamış doktora tezi), Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir.
- Uygan, C., Tanışlı, D., ve Köse, N.Y. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının kanıt bağlamındaki inançlarının, kanıtlama süreçlerinin ve örnek kanıtları değerlendirme süreçlerinin incelenmesi, *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, 5(2), 137-157.
- Umland, K., ve Sriraman, B. (2014). Argumentation in mathematics education. İçinde S.Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education.* (46-48). Dordrecht: Springer.
- Van Dormolen, J. (1977). Learning to understand what giving a proof really means, *Educational Studies in Mathematics*, 8, 27-34.
- Varghese, T. (2007). *Student teachers' conceptions of mathematical proof, Faculty of Graduate Studies and Research.* (Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi). University of Alberta, Admonton.
- Vinner, S. (1983). The notion of proof-some aspects of students' views at the senior high level. İçinde: R. Hershkowitz (Ed.). *Proceedings of the 7th Conference of Psychology of Mathematics Education* (289-294), Rehovot (Israel): Weizman Institute.
- Waring, S. (2000). *Can you prove it?: developing concepts of proof in primary and secondary schools.* Leicester: Mathematical Association.
- Weber, K. (2014). Reflections on justification and proof . Justification and proof in mathematics and mathematics education. İçinde M. E. Fried, & T. Dreyfus (Ed.), *Advances in Mathematics Education. Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground* (237-257). Dordrecht: Springer.
- Weber, K. (2010). Mathematics majors' perceptions of conviction, validity, and proof, *Mathematical Thinking and Learning*, 12(4), 306-336.
- Yıldırım, C. (2012a). *Matematiksel Düşünme* (8. Basım), İstanbul: Remzi Kitabevi.
- Yıldırım, C. (2012b). *Bilim Felsefesi* (16. Basım), İstanbul: Remzi Kitabevi.
- Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2008). *Nitel Araştırma Yöntemleri.* (7. Baskı). Ankara: Seçkin Yayıncılık.
- Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods.* Thousand Oaks, CA: Sage.

Yoo, S. (2008). *Effects of Traditional and Problem-Based Instruction on Conceptions of Proof and Pedagogy in Undergraduates and Prospective Mathematics Teachers* (Yayımlanmamış Doktora Tezi). The University of Texas, Austin, USA.

Zaimoğlu, Ő. (2012). *8. sınıf öğrencilerinin geometrik ispat süreci ve eğilimleri*. (Yayımlanmamış yüksek lisans tezi), Kastamonu Üniversitesi, Kastamonu.





EKLER

EK 1: İspat Soruları Formu (İSF, Pilot Uygulama Versiyonu)

- 1) Herhangi 3 tane ardışık sayı içerisinde her zaman 3 ile bölünebilen bir sayı olduğunu gösteriniz.



2) Asal sayıların sonsuz olduğunu gösteriniz.



- 3) Herhangi 3 ardışık sayıyı çarpınca cevabınızın her zaman 6'nın katı olduğunu ispatlayınız.



4) 2 tek sayının toplamının her zaman çift olacağını gösteriniz.



- 5) Herhangi bir pozitif tamsayı n için eğer n^2 3'ün katıysa n de 3'ün katı olduğunu gösteriniz.



6) b tek ise 8'in $b^2 - 1$ 'i böldüğünü gösteriniz.



7) Aşağıdaki 3 ispatı inceleyiniz ve her bir ispatın matematiksel doğruluğu hakkında yorum yapınız.

“Bir tamsayının rakamları toplamı 3 ile bölünürse, bu rakam 3 ile bölünebilir”

İspat 1) Rastlantısal olarak 721234182 sayısını seçtik ve $7+2+1+2+3+4+1+8+2=30$ 'un 3 ile bölünebildiğini ve 721234182 sayısının 3 ile bölünebildiğini bulduk. Bu sayı rastlantısal olarak seçilmişti ve iddiayı doğruladı. Yani iddia doğrudur

İspat 2) d , aşağıdaki gibi n basamaklı tamsayı olsun.

$$d = \sum_{i=1}^n 10^{i-1} \cdot x_i, x_i \text{ ise } d\text{'nin } n\text{'inci basamağı olsun.}$$

10^k 'yi bazı $1 \leq k \leq n$ için ele alalım.

$$10^k = 10^k - 1 + 1 = 9p_k + 1$$

Burada; p_k her basamağı 1 olan k basamaklı bir sayıdır (ve $p_0=1$)

$$\text{Böylece, } d = \sum_{i=1}^n 10^{i-1} \cdot x_i = 9 \cdot \sum_{i=1}^n p_{i-1} \cdot x_i + \sum_{i=1}^n x_i$$

Buradan, 3, sağdaki ilk terimin 9 katını böldüğünden, eğer 3 d 'nin basamakları toplamını bölerse, 3 sağ böler ve böylece 3, d 'yi böler

İspat 3) Tümevarımla:

Temel adım; 12; 1 basamaktan fazla basamağı olan 3'e bölünebilen en küçük tamsayıdır.
 $1+2=3$

Tümevarım adımı:

n 'den küçük veya eşit olan 3'ün tüm katları için doğru olduğunu varsayalım;

3'ün bir sonraki çarpanı $n+3$ 'ü ele alalım.

n 'in rakamları toplamı 3 ile bölündüğüne göre, bu toplam artı 3 de 3 ile bölünebilir.

Bu yüzden, iddia doğrudur.

8) Geleneksel bir satranç tahtası 64 kareden oluşur (8×8). Bu tahtaya dominoların yerleştirildiğini ve her domino taşının 2 komşu kareyi kapladığını düşünelim. Dominolarla kaplı bir satranç tahtasının mükemmel kaplanması tahtanın her karesinin dışarı taşma olmadan kaplanmasıyla olur.

$m \times n$ boyutlu bir satranç tahtasının, m ve n 'den en az biri çift olduğunda tamamen kaplanacağını ispatlayınız.



9) Aşağıdaki şekil 3'e 3 cm olan bir pencere çerçevesini göstermektedir. Pencere, cam levhaları ayıran tahta şeritlerden yapılmıştır. Her cam levha 1 cm uzunluğunda ve 1 cm genişliğinde kareyi oluşturmaktadır. Sayarsanız, 3 cm'e 3 cm bir pencere çerçevesi için 24 cm tahta şeride ihtiyaç olduğunu göreceksiniz.

Herhangi bir uzunluktaki pencere için tahta şeridin uzunluğunu belirleyin. Genellemenizin herhangi uzunluktaki bir pencere için geçerli olduğunu ispatlayın. Genellemenizi ispat yapan nedir?. Yazmadan da, genellemenizin geçerli olduğunu ispatlayan başka olası yollar var mı?



EK 2: İspat Soruları Formu (İSF)

1) Herhangi 3 pozitif ardışık tam sayının çarpımının her zaman 6'nın katı olduğunu gösteriniz.



2) Herhangi 2 tek sayının toplamının her zaman çift olacağını gösteriniz.



3) Herhangi bir pozitif tamsayı n için eğer n^2 3'ün katıysa n 'in de 3'ün katı olduğunu gösteriniz.



4) b tek doğal sayı ise 8 'in $b^2 - 1$ 'i böldüğünü gösteriniz.



5) Aşağıdaki iddiayı ve buna yönelik verilen 3 ispatı inceleyiniz ve her bir ispatın matematiksel doğruluğu hakkında yorum yapınız.

İddia: “Bir tamsayının rakamları toplamı 3 ile bölünürse, bu rakam 3 ile bölünebilir.”

İspat 1) Rastlantısal olarak 721234182 sayısını seçtik ve $7+2+1+2+3+4+1+8+2=30$ 'un 3 ile bölünebildiğini ve 721234182 sayısının 3 ile bölünebildiğini bulduk. Bu sayı rastgele seçilmişti ve iddiayı doğruladı. Yani iddia doğrudur

İspat 2) $d = a_0 a_1 a_2 \dots a_n$; $n+1$ basamaklı bir sayı olsun.

Çözümleyelim

$$a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n$$

Burada $10 \equiv 1 \pmod{3}$ olduğundan

$\forall i \in \mathbb{N}$ için $10^i \equiv 1 \pmod{3}$ olur. Buna göre,

$d = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \dots + a_n \cdot 10^n \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \pmod{3}$ elde edilir. Yani bir sayı ile o sayının rakamları toplamı $\pmod{3}$ 'te denktir. Bu yüzden rakamları toplamı 3'e bölünürse sayı da bölünür.

İspat 3)

Temel adım;

12; 1'den fazla basamaklı olan 3'e bölünebilen en küçük tamsayıdır. $1+2=3$

Tümevarım adımı:

İddianın n 'den küçük veya eşit olan 3'ün tüm katları için doğru olduğunu varsayalım;

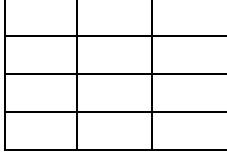
3'ün bir sonraki çarpanı $n+3$ 'ü ele alalım.

n 'in rakamları toplamı 3 ile bölündüğüne göre, bu toplam artı 3 de 3 ile bölünebilir.

Bu yüzden, iddia doğrudur.

6) Aşağıdaki şekil kenarları 3 br ve 4 br olan bir pencere çerçevesini göstermektedir. Pencere, cam levhaları ayıran tahta şeritlerden yapılmıştır. Her cam levha 1 br uzunluğunda ve 1 br genişliğinde kareyi oluşturmaktadır. Sayarsanız, 3 br'e 4 br bir pencere çerçevesi için 31 birim tahta şeride ihtiyaç olduğunu göreceksiniz.

Herhangi bir uzunluktaki pencere için tahta şeridin uzunluğunu bulmayı sağlayan genel bir ifade yazınız. Genellemenizin her boyuttaki pencere için doğru olduğunu ispatlayınız



7) Aşağıda $\sqrt{-1}$ ile 0 arasındaki ilişkinin çelişki yöntemi ile incelendiği iki ispat verilmiştir. Bu ispatlarda çelişki yönteminin işe yaramama sebebi nedir? İspat içindeki yapılmış olan hata nedir, açıklayınız.

$\sqrt{-1} \leq 0$ olduğunu ispatlayınız

İspat:

Varsayım: $\sqrt{-1} > 0$, o zaman $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} > 0$. Buradan $-1 > 0$ olur. Bu bir çelişkidir. Bu yüzden $\sqrt{-1} \leq 0$ olur.

$\sqrt{-1} > 0$ olduğunu ispatlayınız

İspat:

Varsayım: $\sqrt{-1} \leq 0$, o zaman $-\sqrt{-1} \geq 0$. Buradan $(-\sqrt{-1})^2 \geq 0$, yani $-1 \geq 0$. Buradan yine çelişki olur, bu yüzden $\sqrt{-1} > 0$.

8) Asal sayıların sonsuz olduğunu gösteriniz.



EK 3: İspat Süreçlerine İlişkin Görüşme Formu (İSGF)

- 1) Yaptığın ispatın doğru olduğuna beni ikna edebilir misin? Nasıl ikna edersin? Öğrencileri ikna edebilir misin? Nasıl?
- 2) Bu her durum için doğru mudur? /Bu yöntem her zaman geçerli midir? Geçerli olmadığı bir durum verebilir misin?
- 3) Neden doğru olduğunu düşünüyorsun?
- 4) İspatı farklı bir yolla yapabilir misin?
- 5) Bu ispatında kullandığın yöntem nedir? Neden bu yöntemi kullandın? Bu yöntem ilk aklına gelen miydi? Bu yöntemi nereden biliyorsun? Bu yöntemi kullanma sürecini anlatır mısın?
- 6) Nasıl bulduğunu açıklar mısın?
- 7) Her zaman böyle mi bulursun?

EK 4: Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu (GİGF)

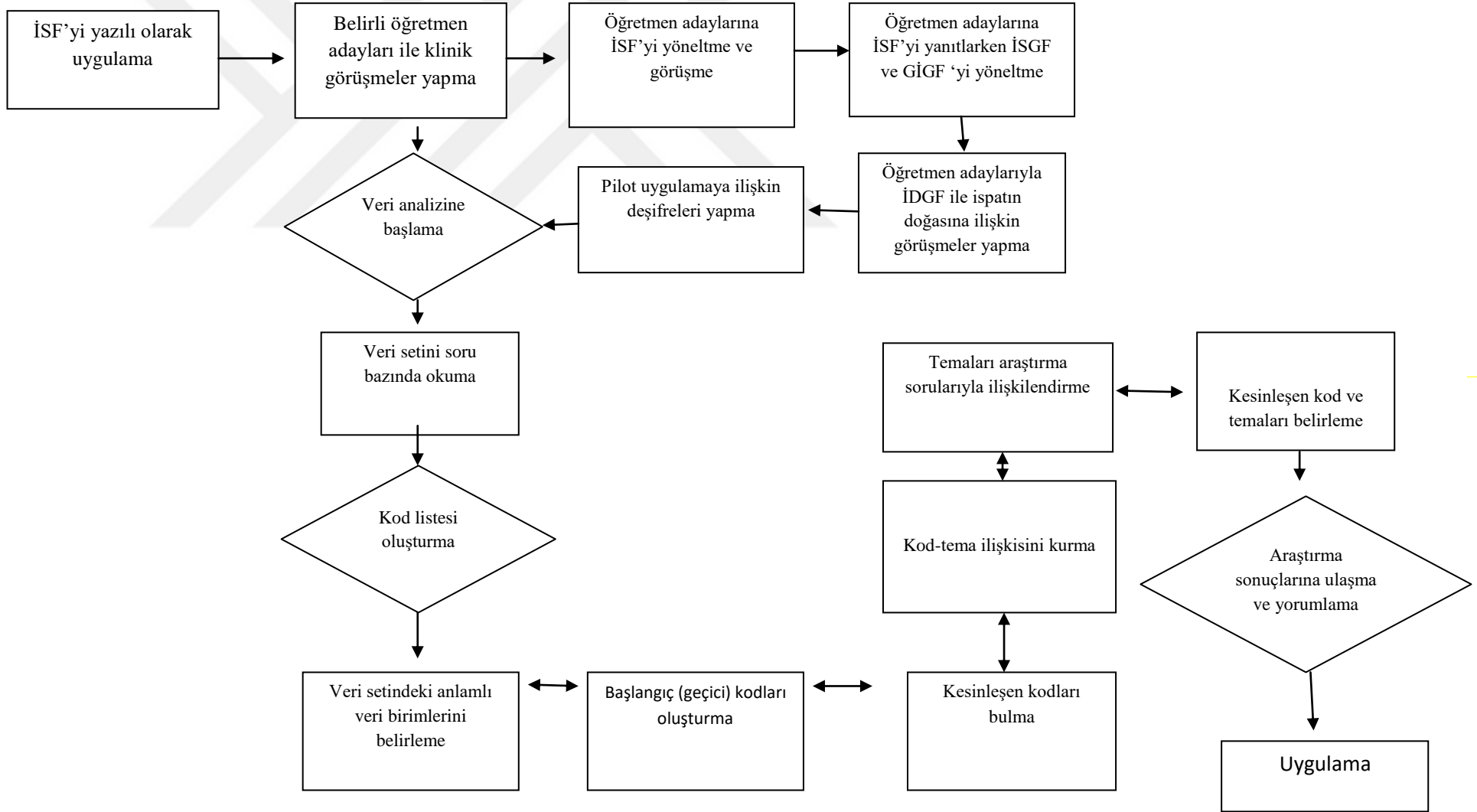
Gözlemlenen İspat Şemasına İlişkin Görüşme Formu

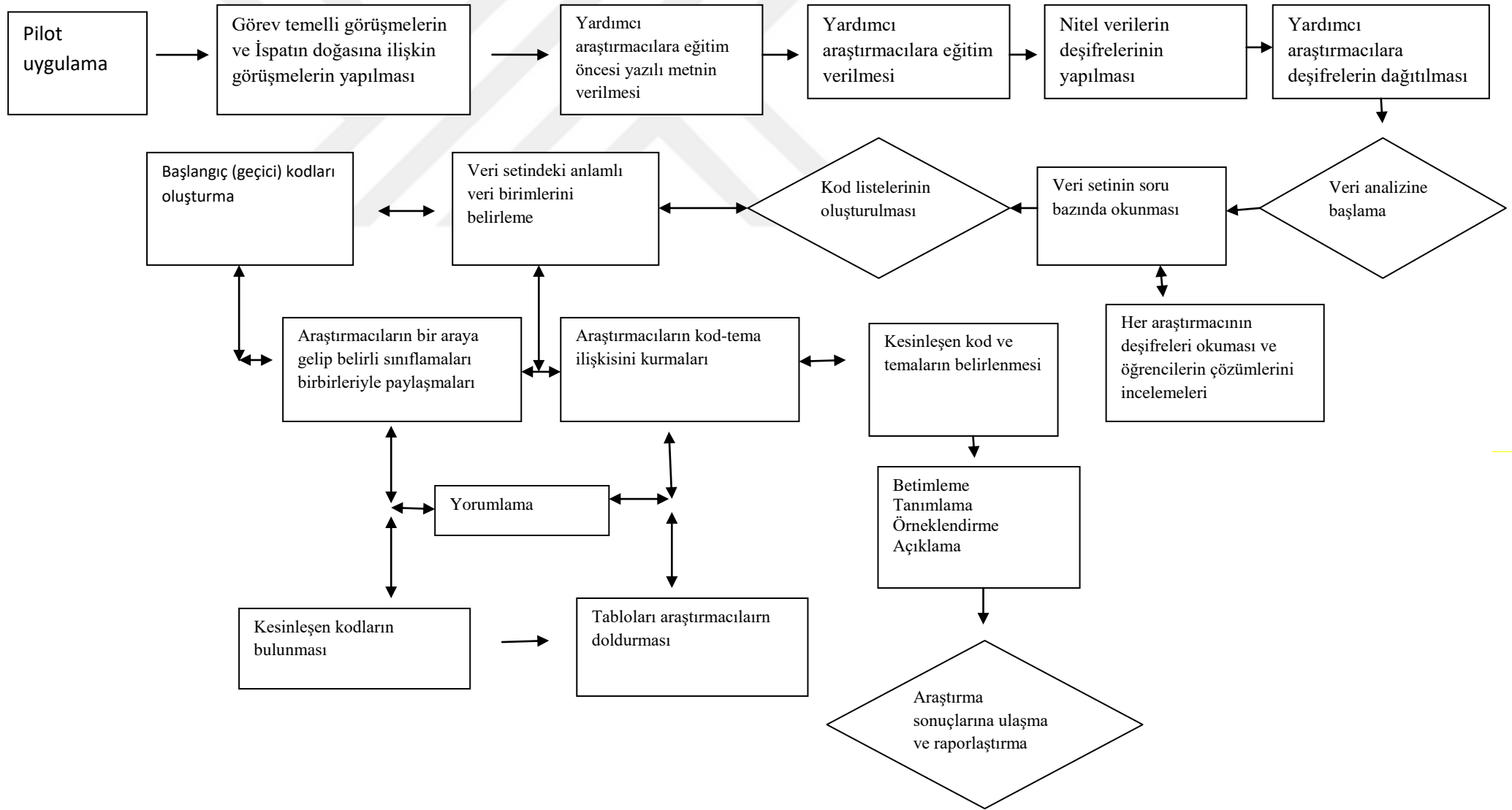
Gözlemlenen ispat şeması	Sorulacak soru
Dışsal alışkanlık edinilmiş ispat şeması	Sence bu çözümünü özgün yapan şey nedir?
Dışsal otoriter ispat şeması	Nasıl yaptığını/neye dayanarak yaptığını anlatabilir misin?
Dışsal sembolik ispat şeması	Bu algoritmayı neden kullandın? Bu algoritmanın anlamı ne?
Deneysel temel örnekler ispat şeması	Sence bu bir/bir kaç durum ispat için yeterli mi? Bu ispatı başka bir şekilde yapılandırabilir misin?
Deneysel algısal ispat şeması	Bu çizimini anlatır mısın? Yaptıklarını ayrıntılarıyla gerekçelendirebilir misin?
Analitik dönüştürülebilir ispat şeması	Sence bu ispatında ana (anahtar) mesele ne?
Analitik aksiyomatik ispat şeması	Yaptığın ispat sürecini detaylandırabilir misin?

Ek 5: İspatın Doğasına İlişkin Görüşme Formu (İDGF)

- 1) İspat nedir?
- 2) Bir ispatı ispat yapan şey nedir? Ne yaparsak matematiksel olarak doğru bir ifade yazmış oluruz?
- 3) Başarılı bir ispat için neler gereklidir? İspat nelerden oluşur?
- 4) İspat için çok gerekli olmayan ama ispata yardım eden şeyler nelerdir?







Ek 8: Özgeçmiş Formu

Kişisel Bilgiler	
Adı	Emine Gaye
Soyadı	ÇONTAY
Doğum Yeri ve Tarihi	Denizli-21.01.1977
Uyruğu	T.C.
İletişim Adresi ve e-mail adresi	Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Eğitimi ABD Kıymıklı Kampüsü Denizli gayeermec@gmail.com , germec@pau.edu.tr
Eğitim	
İlkokul	Denizli Hürriyet İlkokulu
Ortaokul-Lise	Denizli Anadolu Lisesi (DAL)
Yükseköğretim (Lisans)	Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümü (1994-1998)
Yükseköğretim (Yüksek Lisans)	Pamukkale Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Eğitim Yönetimi, Denetimi, Planlaması ve Ekonomisi YLP (2007) Pamukkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Matematik Eğitimi YLP (2012)
Yabancı Dil	
Yabancı Dil Adı-Sınav Adı-Sınavın Yapıldığı Ay ve Yıl	Alınan Puan
İngilizce-KPDS 2011	72.50
(Varsa) Mesleki Deneyim	
Yıl(lar)	Mesleki Deneyim
1998-2001	Osmanlı Bankası Bireysel Pazarlama Yetkilisi-Uzman Yrd.
2001-2005	MEB-Matematik Öğretmeni
2005-	Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Araştırma Görevlisi