T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIMSAL MODÜLLER

Cemile NUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEORİK MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
Doç. Dr. Ünsal TEKİR

İSTANBUL 2009

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇARPIMSAL MODÜLLER

Cemile NUR
(141103020060087)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEORİK MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
Doç. Dr. Ünsal TEKİR

İSTANBUL 2009

ÖNSÖZ

Öncelikle çalışmalarım boyunca üzerimden ilgisini eksik etmeyen, tezimi yöneten danışman hocam Doç. Dr. Ünsal Tekir'e teşekkür ederim.

Bu çalışma ile ilgili seminerlerde beni sabır ve titizlikle dinleyen, yapıcı eleştirileriyle çalışmalarıma büyük katkı sağlayan hocalarım başta Prof. Dr. Cemal Koç olmak üzere, Prof. Dr. İsmail Güloğlu, Prof. Dr. Fethi Çallıalp, Yard. Doç. Dr. Songül Esin ve sevgili arkadaşım Serkan Sütlü'ye çok teşekkür ederim.

Yine bu süreçte değerli desteklerini benden esirgemeyen ve hep yol gösteren hocalarım Prof. Dr. Oktay Veliev, Yard. Doç. Dr. Bülent Yılmaz'a ve sevgili arkadaşlarım Burcu Vulaş, Mustafa Kurumehmet, Ezgi Şeref ve Seza Dinibütün'e teşekkür ederim. Ayrıca beni her durumda destekleyen canım aileme teşekkürü bir borç bilirim.

04,2009 **Cemile NUR**

İÇİNDEKİLER

SAYFA

ÖNSÖZ i

İÇİNDEKİLER ii

ÖZET iii

ABSTRACT iv

SEMBOL LİSTESİ v

BÖLÜM I. GİRİŞ VE AMAÇ 1

I.1. GİRİŞ 1

BÖLÜM II. GENEL BİLGİLER 2

II.1 CEBİRDEKİ ÖN KAVRAMLAR VE NOTASYONLAR 2

II.2 MODÜLLER 7

II.3 ARTAN VE AZALAN ZİNCİR KOŞULLARI 14

BÖLÜM III. ÇALIŞMALAR 18

III.1 ÇARPIMSAL MODÜLLER 18

III.2 ÇARPIMSAL MODÜLLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ 30

III.2.1 Çarpımsal Modüllerin Maksimal Alt Modülleri 30

III.2.2 Çarpımsal Modüllerin Asal Alt Modülleri 40

III.3 SONLU ÜRETİLMİŞ MODÜLLER 47

III.3.1 Noetherian Modüller 47

III.3.2 Sonlu Üretilmiş Çarpımsal Modüller 48

III.4 ÇARPIMSAL MODÜLLERİN ALT MODÜLLERİNİN ÇARPIMI 59

BÖLÜM IV. SONUÇLAR ve TARTIŞMA 70

BÖLÜM V. SON DEĞERLENDİRMELER ve ÖNERİLER 71

KAYNAKLAR 72

ÖZGEÇMİŞ 73

ÖZET

Çarpımsal Modüller

Bu tezin ana amacı birimli ve değişmeli bir halka üzerindeki çarpımsal modülleri ve bunların asal alt modüllerini çalışmaktır.

Bu amaçla, öncelikle bir modülün çarpımsal olması için bazı gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Daha sonra asal idealler için verilen bazı sonuçların, çarpımsal modüllerin asal alt modülleri için de sağlanıp sağlanmadığı araştırılmıştır. Ayrıca, özel olarak çarpımsal modüllerin sonlu üretilmiş olma durumu incelenmiştir.

Son olarak da, bir çarpımsal modülün iki alt modülünün çarpımı kavramı tanıtılarak, çarpımsal modüllerin asal alt modülleri karakterize edilmiştir.

04,2009 **Cemile NUR**

ABSTRACT

Multiplication Modules

The main objective of this thesis is to study multiplication modules and the prime submodules of such modules over a commutative ring with identity.

To this end, we first gave some necessary and sufficient conditions for a module to be multiplication. Then we investigated whether some results on prime ideals also hold for prime submodules of multiplication modules. Furthermore we examined in particular when such modules are finitely generated.

Finally, by introducing the notion of product of two submodules of such modules, we characterized the prime submodules of a multiplication module.

04,2009 **Cemile NUR**

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KABUL ve ONAY BELGESİ

Cemile NUR ’un ‘ÇARPIMSAL MODÜLLER’ başlıklı Lisansüstü tez çalışması, M.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 27.04.2009 tarih ve 2009/11-04 sayılı kararı ile oluşturulan jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Teorik Matematik Programında YÜKSEK LİSANS Tezi olarak Kabul edilmiştir.

Danışman : Doç.Dr. Ünsal TEKİR Marmara Üniversitesi
1. Üye : Prof.Dr. Fethi ÇALLIALP Doğuş Üniversitesi
2. Üye : Prof.Dr. Ahmet DERNEK Marmara Üniversitesi
Tezin Savunulduğu Tarih : 05.06.2009

ONAY

M.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun 29.06.2009 tarih ve 2009/15-40 sayılı kararı ile Cemile NUR ’un Matematik Anabilim Dalı Teorik Matematik Programında Y.Lisans (MSc.) derecesi alması onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü
Prof. Dr. Sevil ÜNAL

SEMBOL LİSTESİ

$ann\,(M)$	: M nin sıfırlayıcısı
Ç$ek\ f$	: f nin çekirdeği
$\det C$	: C matrisinin determinantı
$[I]$	: $I \in L\,(R)$ nin denklik sınıfı
$\sqrt{I}$	: I idealinin radikali
$J\,(R)$	: R nin Jacobson radikali
$L\,(R)$	: R nin ideallerinin latisi
$L\,(M)$	: M nin alt modüllerinin latisi
$M - rad\ N$	: M nin N alt modülünün $M-$radikali
$\Pr\,(N)$	: M nin N alt modülünün bütün sunuş ideallerinin kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$rad\ M$	: M nin radikali
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\tau\,(M)$	: M nin bükülme(torsion) alt modülü

ÖZET

Çarpımsal Modüller

Bu tezin ana amacı birimli ve değişmeli bir halka üzerindeki çarpımsal modülleri ve bunların asal alt modüllerini çalışmaktır.

Bu amaçla, öncelikle bir modülün çarpımsal olması için bazı gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Daha sonra asal idealler için verilen bazı sonuçların, çarpımsal modüllerin asal alt modülleri için de sağlanıp sağlanmadığı araştırılmıştır. Ayrıca, özel olarak çarpımsal modüllerin sonlu üretilmiş olma durumu incelenmiştir.

Son olarak da, bir çarpımsal modülün iki alt modülünün çarpımı kavramı tanıtılarak, çarpımsal modüllerin asal alt modülleri karakterize edilmiştir.

04,2009 **Cemile NUR**

ABSTRACT

Multiplication Modules

The main objective of this thesis is to study multiplication modules and the prime submodules of such modules over a commutative ring with identity.

To this end, we first gave some necessary and sufficient conditions for a module to be multiplication. Then we investigated whether some results on prime ideals also hold for prime submodules of multiplication modules. Furthermore we examined in particular when such modules are finitely generated.

Finally, by introducing the notion of product of two submodules of such modules, we characterized the prime submodules of a multiplication module.

04,2009 **Cemile NUR**

I GİRİŞ VE AMAÇ

I.1 GİRİŞ

Matematik disiplininde modül teorisi, çok çalışılan alanlardan biridir. Biz bu tezde özel olarak çarpımsal modülleri inceleyeceğiz.

H. İbrahim Karakaş 1972 yılında halkalar için bilinen Cohen Teoremini modüllere genişletmiş ve Cohen Teoremini, ispatladığı teoremin sonucu olarak vermiştir.[1] Bu çalışmada, H. İbrahim Karakaş'ın sonlu üretilmiş modüller için ispatladığı teoremin çarpımsal modüller için de sağlandığını göstereceğiz.

1981 yılında A. Barnard çarpımsal modüllerin temel özelliklerini vermiş ve Nakayama Lemma'daki sonlu üretilmişlik şartı yerine çarpımsal modül olma şartını koyarak yeniden ispat yapmıştır.[2]

Çarpımsal modüller ile ilgili temel tanım ve teoremleri ise 1988 yılında Z. Abd El-Bast ve P. F. Smith vermiştir. Bu makalede Z. Abd El-Bast ve P. F. Smith, değişmeli halkalar üzerindeki modüllerin çarpımsal olması için gerek ve yeter koşulları vermişlerdir.[3]

Yine 1988 yılında P. F. Smith, bu teoremlerin bazılarını farklı tekniklerle yeniden ispatlamıştır.[4]

M. Majid Ali, Z. Abd El-Bast ve P. F. Smith'in ispatladığı bir teoremi kullanarak, bir idealin radikali için bilinenen karakterizasyona benzer bir karakterizasyonu, sonlu üretilmiş bir çarpımsal modülün alt modülünün $M-$radikali için vermiştir.[5]

R. Ameri, yine aynı teoremi kullanarak ve bir çarpımsal modülün iki alt modülünün çarpımı kavramını tanıtarak, bir çarpımsal modülün asal alt modüllerini ve bir alt modülünün $M-$radikalini karakterize etmiştir.[6]

Bu tezde, halkanın idealleri ile çarpımsal modüllerin alt modülleri arasındaki benzerlikler incelenmiş ve Cebirdeki önemli teoremlerin farklı versiyonları verilmiştir.

II GENEL BİLGİLER

II.1 CEBİRDEKİ ÖN KAVRAMLAR ve NOTASYONLAR

Yar.Teorem II.1 *(Zorn Lemması)* $(A, \preceq)$*, boş olmayan kısmi sıralı bir küme olsun. Eğer* A *nın her zincirinin bir üst sınırı varsa, o zaman* A *bir maksimal eleman içerir.[7]*

Tanım II.1 $(A, \preceq)$*, boş olmayan kısmi sıralı bir küme olsun. Her* $a, b \in A$ *için* $\{a, b\}$ *kümesinin hem en büyük alt sınırı hem de en küçük üst sınırı varsa,* $(A, \preceq)$ *kümesine bir* $latis$ *denir.*

Tanım II.2 R *boş olmayan bir küme olsun.* $(+)$ *ve* $(\cdot)$ *ikili işlemi için, aşağıdaki özellikleri sağlayan* $(R, +, \cdot)$ *üçlüsüne bir* $halka$ *denir.*

(i) $(R, +)$ abelyen bir grup;

(ii) $\forall a, b, c \in R$ için $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (çarpımın birleşme özelliği);

(iii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (çarpımın toplama üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği).

Ek olarak;

(iv) $\forall a, b \in R$ için $a \cdot b = b \cdot a$

ise R ye $değismeli\ halka$ denir.

(v) $\forall a \in R$ için $1_R \cdot a = a \cdot 1_R = a$

olacak şekilde R nin bir 1_R elemanı varsa, R ye $birimli\ halka$ denir.

Buradan itibaren $a \cdot b = ab$ olarak alınacaktır.

Tanım II.3 *R bir halka ve $a \in R$ olmak üzere $ab = 0$ olacak biçimde bir $b \in R \setminus \{0\}$ varsa, a elemanına bir $sıfır$ bölen denir.*

Tanım II.4 *R birimli bir halka ve $a \in R$ olsun. $ca = 1_R$ ($ab = 1_R$) olacak şekilde $c \in R$ ($b \in R$) varsa a elemanına sol (sağ) $tersinir$ denir. a elemanı hem sol hem de sağ tersinir ise, a ya $tersinir$ veya birimsel denir.*

Tanım II.5 *R birimli ve değişmeli bir halka ve $1_R \neq 0$ olsun. Eğer R nin sıfır böleni yoksa, R ye bir tamlık $bölgesi$ denir.*

D birimli bir halka ve $1_D \neq 0$ olmak üzere, D nin sıfırdan farklı her elemanı birimsel ise D halkasına bir *bölen halkası* denir.

Değişmeli bölen halkasına ise *cisim* adı verilir.

Tanım II.6 *R ve S iki halka olsun. Her $a, b \in R$ için*

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \text{ ve } f(ab) = f(a) f(b)$$

koşullarını sağlayan $f : R \to S$ fonksiyonuna bir halka $homomorfizması$ denir.

1-1 homomorfizmaya $monomorfizma$; örten homomorfizmaya $epimorfizma$; hem 1-1 hem de örten homomorfizmaya ise $izomorfizma$ adı verilir.

Çek $f = \{r \in R : f(r) = 0\}$ kümesine f nin ç*ekirdeği* denir.

Tanım II.7 *R bir halka ve S, R nin toplama ve çarpma işlemleri altında kapalı, boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer S bu işlemler altında kendi başına bir halka ise, o zaman S ye R nin bir alt halkası denir.*

Tanım II.8 *I, R nin bir alt halkası olsun. $r \in R$ ve $x \in I$ için $rx \in I$ ($xr \in I$) ise, o zaman I ya R nin bir sol (sağ) $ideali$ denir. Eğer I, R nin hem sol hem de sağ ideali ise, o zaman I ya R nin bir $ideali$ denir.*

R halkası kendi başına bir idealdir. Yalnızca sıfır elemanından oluşan 0 idealine *asikar ideal* denir.

Eğer R nin bir I ideali sıfırdan ve R den farklı ise, o zaman I ya R nin bir *has* (*veya öz*) *ideali* adı verilir.

Teorem II.1 *I, R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. I nın sol (sağ) ideal olması için gerek ve yeter koşul*

(i) $\forall a, b \in I$ için $a - b \in I$; ve

(ii) $a \in I, r \in R$ için $ra \in I$ $(ar \in I)$

olmasıdır.[7]

Teorem II.2 *$f : R \to S$ bir halka homomorfizması olsun. Bu durumda f nin çekirdeği R nin bir idealidir. Tersine I, R nin bir ideali ise, $\pi(r) = r+I$ ile verilen $\pi : R \to R/I$ dönüşümü, çekirdeği I olan bir halka epimorfizmasıdır.[7]*

Sonuç II.1 *(Birinci İzomorfizma Teoremi). Eğer $f : R \to S$ bir halka homomorfizması ise, o zaman $R/\text{Çek } f \cong f(R)$.[7]*

Tanım II.9 *P, R halkasının bir ideali ve $P \neq R$ olmak üzere, R nin herhangi A ve$B$ ideali için,*

$$AB \subseteq P \implies A \subseteq P \text{ veya } B \subseteq P$$

gerçekleniyorsa, P ye R nin bir asal ideali denir.

Teorem II.3 *P, R halkasının bir ideali ve $P \neq R$ olmak üzere, $\forall a, b \in R$ için,*

$$ab \in P \implies a \in P \text{ veya } b \in P \tag{II.3}$$

sağlanıyorsa, o zaman P asaldır. Tersine P asal ve R değişmeli ise, o zaman P, II.3 koşulunu sağlar.[7]

Teorem II.4 *R birimli ve değişmeli bir halka ve $1_R \neq 0$ olsun. R nin bir P idealinin asal olması için gerek ve yeter koşul R/P bölüm halkasının bir tamlık bölgesi olmasıdır.[7]*

Tanım II.10 *M, R halkasının bir ideali ve $M \neq R$ olsun. R nin $M \subseteq N \subseteq R$ koşulunu sağlayan her N ideali için, ya $N = M$ ya da $N = R$ gerçekleniyorsa M ye R nin bir maksimal ideali denir.*

R birimli ve değişmeli bir halka ise, R nin her maksimal ideali aynı zamanda asaldır.

Teorem II.5 *Sıfırdan farklı ve birimli her R halkası bir maksimal ideal içerir. Aslında, R nin kendisi dışındaki her ideali, bir maksimal ideali tarafından kapsanır.[7]*

Tanım II.11 *R halkasının tek bir maksimal ideali varsa, o zaman R ye local (yerel) halka denir.*

Teorem II.6 *R birimli ve değişmeli bir halka olsun. Bir M idealinin maksimal olması için gerek ve yeter koşul R/M bölüm halkasının bir cisim olmasıdır.[7]*

Tanım II.12 *R değişmeli bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. O zaman, I yı kapsayan R nin bütün P asal ideallerinin kesişimine, I nın radikali denir ve $\sqrt{I}$ ile gösterilir.*

$\sqrt{0}$ idealine R nin *nil radikali* veya *asal radikali* adı verilir.

Teorem II.7 *R değişmeli bir halka ve I, R nin bir ideali olsun. O zaman,*

$$\sqrt{I} = \{r \in R : r^n \in I \text{ olacak şekilde } n > 0 \text{ vardır.}\}$$

[7]

Tanım II.13 *R halkasının bütün maksimal ideallerinin kesişimine R nin Jacobson radikali denir ve $J(R)$ ile gösterilir.*

Teorem II.8 *$r \in J(R)$ olması için gerek ve yeter koşul, her $a \in R$ için $1 - ra$ nın birimsel olmasıdır.*

İspat. $r \in J(R)$ olsun. En az bir $a \in R$ için $1 - ra$ nın birimsel olmadığını varsayalım. Bu durumda $1 - ra \in P$ olacak biçimde R nin bir P maksimal ideali vardır. $r \in J(R)$ olduğundan

$$1 = (1 - ra) + ra \in P$$

çelişkisi elde edilir. O halde $1 - ra$ birimseldir.

Tersine, $r \in R$ olmak üzere, her $a \in R$ için $1 - ra$ birimsel olsun. $r \notin J(R)$ olsun. Bu durumda $r \notin Q$ olacak biçimde R nin bir Q maksimal ideali vardır. Buradan, $Q + (r) = R$ olur ve $x + ra = 1$ olacak biçimde $x \in Q$ vardır. O halde $x = 1 - ra \in Q$ olur, çelişkidir. Böylece $r \in J(R)$ elde edilir. ■

Teorem II.9 *(Çin Kalan Teoremi) $n \geq 2$ olmak üzere $I_1, I_2, \ldots, I_n$, R halkasının idealleri olsun. Her $i \neq j$ için $I_i + I_j = R$ $(i, j = 1, ..., n)$ ise*

$$f(r) = (r + I_1, ..., r + I_n)$$

ile tanımlanan

$$f : R \to R/I_1 \times ... \times R/I_n$$

homomorfizması örtendir.

İspat. Her $i \neq j$ için $I_i + I_j = R$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ olduğundan $I_i + \bigcap_{i \neq j} I_j = R$ dir. Buradan, her $i, j = 1, \ldots, n$ için $r_i = a_i + b_i$ olacak biçimde $r_i \in R, a_i \in I$ ve $b_i \in \bigcap_{i \neq j} I_j$ vardır. O halde, $r_i \equiv b_i \,(\mathrm{mod}\, I_i)$ ve $x = b_1 + \ldots + b_n$ için $x \equiv b_i \equiv r_i \,(\mathrm{mod}\, I_i)$ yazılabilir. Böylece $\left(\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}\right) \in R/I_1 \times ... \times R/I_n$ için $f(x) = \left(\overline{b_1}, \ldots, \overline{b_n}\right)$ olacak biçimde $x \in R$ mevcuttur ve f örtendir. ■

II.2 MODÜLLER

Tanım II.14 *R bir halka ve $(M,+)$ bir abelyen grup olsun. $(r,a)\longmapsto ra$ ile tanımlanan $R\times M\to M$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise M ye (sol) $R-$modül denir.*

$\forall r,s\in R$ ve $m,n\in M$ için,

(i) $r(m+n)=rm+rn;$

(ii) $(r+s)m=rm+sm;$

(iii) $r(sm)=(rs)m.$

Eğer R birimli ise ve

(iv) $\forall m\in M$ için $1_Rm=m$

sağlanıyor ise M ye *birimsel* (sol) $R-$ *modül* denir. Eğer R bir bölen halkası ise, o zaman birimsel R-modül M ye (sol) *vektör uzayı* denir.

Benzer biçimde, (birimsel) sağ $R-$modül tanımı,

$$(a,r)\longmapsto ar$$

ile tanımlanan $M\times R\to M$ fonksiyonu aracılığıyla, yukarıdaki koşullara uyarlanarak verilebilir.

Eğer R değişmeli bir halka ise, her sol $R-$modül M, $r\in R$ ve $m\in M$ için $mr=rm$ tanımı ile, bir sağ $R-$modül yapısı verebilir (R nin değişmeli olması (iii) koşulunda gereklidir).

Buradan itibaren, aksi belirtilmedikçe bütün halkalar birimli ve değişmeli; bütün modüller birimsel kabul edilecektir.

Örnek II.1 (a) *Her halka kendi üzerinde bir modüldür. Bu yüzden, modüller için verdiğimiz tanım ve teoremleri özel olarak $R-$modül R için düşünebiliriz.*

(b) I, R halkasının bir ideali ise R/I bölüm halkası bir $R-$modüldür.

Tanım II.15 *M_1 ve M_2, R halkası üzerinde iki modül olsun. $m,n \in M_1$ ve $r \in R$ için*

$$f\left(m+n\right)=f\left(m\right)+f\left(n\right) \;\; ve \;\; f\left(rm\right)=rf\left(m\right)$$

koşullarını sağlayan $f : M_1 \rightarrow M_2$ fonksiyonuna bir $R-modül\ homomorfizması$ denir.

Eğer R bir bölen halkası ise, o zaman f ye bir *lineer dönüsüm* adı verilir.

Modüller için monomorfizma, epimorfizma, izomorfizma, çekirdek tanımları ve izomorfizma teoremi, halkalardakine benzer biçimdedir.

Tanım II.16 *M bir $R-$modül ve N, M nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan N kümesine M nin bir alt modülü denir.*

(i) $\forall n_1, n_2 \in N$ için $n_1 + n_2 \in N$, ve

(ii) $\forall r \in R$ ve $n \in N$ için $rn \in N$.

M nin 0 ve kendisi dışındaki her bir alt modülüne, M nin *has* (veya *öz*) *alt modülü* denir. Eğer M nin has alt modülü yoksa, o zaman M ye *basit modül* denir.

Tanım II.17 *R bir tamlık bölgesi ve M bir $R-$modül olsun.*

$$\tau\left(M\right)=\{m \in M : rm=0 \text{ olacak biçimde } r \in R\setminus\{0\} \text{ vardır.}\}$$

kümesine M nin $bükülme\left(torsion\right)$ alt modülü denir. Eğer $\tau\left(M\right)=0$ ise M ye $bükülmesiz\left(torsion-free\right)$ denir. $\tau\left(M\right)=M$ ise, M ye bükülme modülü denir.

$\tau(M)$, M nin alt modülüdür. Gerçekten, $m_1, m_2 \in \tau(M)$ için $r_1 m_1 = 0$ ve $r_2 m_2 = 0$ olacak biçimde $r_1, r_2 \in R \setminus \{0\}$ var olduğundan

$$r_1 r_2 (m_1 + m_2) = 0$$

ve R bir tamlık bölgesi olduğundan $r_1 r_2 \in R \setminus \{0\}$ dır. O halde $m_1 + m_2 \in \tau(M)$ olur. $a \in R$ ve $m \in \tau(M)$ için $rm = 0$ olacak biçimde $r \in R \setminus \{0\}$ var olduğundan

$$r(am) = (ar)m = a(rm) = 0$$

ve $am \in \tau(M)$ olur.

Önerme II.1 *M bir $R-$modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Bu durumda M/N bölüm modülü de bir $R-$modüldür.[8]*

Tanım II.18 (i) *I ve J, R halkasının iki ideali olsun.*

$$(I : J) = \{r \in R : rJ \subseteq I\}$$

kümesini tanımlayalım.

$$(0 : J) = \{a \in R : aJ = 0\}$$

ile tanımlanan kümeye J nin sıfırlayıcısı denir ve $ann(J)$ ile gösterilir.

(ii) M bir $R-$modül ve N, M nin alt modülü olmak üzere

$$(0 : M) = \{r \in R : rM = 0\}$$

ile tanımlanan kümeye de M nin *sıfırlayıcısı* denir ve $ann(M)$ ile gösterilir.

$$(N : M) = \{r \in R : rM \subseteq N\}$$

kümesinin $ann(M/N)$ ye eşit olduğu açıktır.

$(N:M)$, R nin bir idealidir. Gerçekten de, $a, b \in (N:M)$ için

$$(a+b)\,M = aM + bM \subseteq N$$

ve $a+b \in (N:M)$; $r \in R, a \in (N:M)$ için

$$(ra)\,M = r\,(aM) \subseteq N$$

ve $ra \in (N:M)$ dir.

Tanım II.19 *M bir $R-$modül olsun. $ann\,(M) = 0$ ise M ye güvenilir $(faithful)$ denir.*

Önerme II.2 *M bir $R-$modül ve I, R nin $I \subseteq ann\,(M)$ koşulunu sağlayan bir ideali olsun. Bu durumda M, R/I bölüm halkası üzerinde de bir modüldür.[8]*

Yar.Teorem II.2 (i) *M bir $R-$modül ve I, R nin bir ideali olsun. Bu durumda, $I \subseteq ann\,(M/IM)$ dir.*

(ii) M/IM, R/I üzerinde bir modüldür.

İspat. (i) $r \in I$ olsun. $\forall m \in M$ için

$$r\,(m + IM) = rm + IM = IM$$

olur. O halde $r \in ann\,(M/IM)$ ve böylece $I \subseteq ann\,(M/IM)$ gerçeklenir.

(ii) Önceki önermeden ve (i) den, aşikardır. ■

Yar.Teorem II.3 *I ve J, R nin iki ideali ve M bir $R-$modül olsun. Eğer $I \subseteq J$ ise $IM \subseteq JM$ dir.*

İspat. $x \in IM$ olsun. Bu durumda $r_i \in I$ ve $m_i \in M$ için $x = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i$ yazılabilir. $I \subseteq J$ olduğundan $r_i \in J$ olur. O halde $x \in JM$ ve böylece $IM \subseteq JM$ elde edilir. ■

Tanım II.20 *M bir $R-$modül ve X, M nin bir alt kümesi olsun. O zaman M nin, X i kapsayan bütün alt modüllerinin kesişimine, X tarafından üretilen alt modül denir.*

Eğer X sonlu ve N modülünü üretiyor ise, o zaman N ye *sonlu üretilmiş* denir. Eğer X tek bir elemandan oluğuyorsa, yani $X = \{m\}$ ise, o zaman X tarafından üretilen alt modüle *devirli (alt) modül* adı verilir.

Yar.Teorem II.4 *(Genel Determinant Argümanı) M sonlu üretilmiş bir $R-$modül ve I, R nin bir ideali olmak üzere $M = IM$ olsun. Bu durumda $(1-a)M = 0$ olacak biçimde bir $a \in I$ vardır.*

İspat. $M = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ olsun. $a_{ij} \in I$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ için,

$$\begin{aligned}
m_1 &= a_{11}m_1 + a_{12}m_2 + \ldots + a_{1n}m_n \\
m_2 &= a_{21}m_1 + a_{22}m_2 + \ldots + a_{2n}m_n \\
&\vdots \\
m_n &= a_{n1}m_1 + a_{n2}m_2 + \ldots + a_{nn}m_n
\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$C = \begin{bmatrix}
a_{11}-1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22}-1 & \ldots & a_{2n} \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & \ldots & . \\
. & . & \ldots & . \\
a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-1
\end{bmatrix}$$

için,

$$C\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ . \\ . \\ . \\ m_n \end{bmatrix} = 0$$

olur. Buradan,

$$C^*C\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ . \\ . \\ . \\ m_n \end{bmatrix} = 0 \text{ ve} \det C \cdot I \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ . \\ . \\ . \\ m_n \end{bmatrix} = 0$$

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} \det C \cdot m_1 &= 0 \\ \det C \cdot m_2 &= 0 \\ &\vdots \\ \det C \cdot m_n &= 0 \end{aligned}$$

ve böylece $\det C \cdot M = 0$ elde edilir. Burada $a \in I$ olmak üzere, $\det C = 1 - a$ yazılabilir. O halde $(1-a)\,M = 0$ olacak biçimde bir $a \in I$ vardır. ■

Önerme II.3 *M devirli bir $R-$modül ise $M \cong R/ann\,(M)$.[8]*

Önerme II.4 *I, R halkasının bir ideali ve M sonlu üretilmiş bir $R-$modül olsun Bu durumda*

$$\sqrt{ann\,(M/IM)} = \sqrt{ann\,(M) + I}$$

gerçeklenir.

İspat. $ann\,(M) + I \subseteq ann\,(M \diagup IM)$ olduğundan

$$\sqrt{ann\,(M) + I} \subseteq \sqrt{ann\,(M \diagup IM)}$$

sağlanır.

Tersine $r \in \sqrt{ann\,(M \diagup IM)}$ olsun. Bu durumda $r^n \in ann\,(M \diagup IM)$ ve $r^n M \subseteq IM$ olur. $M = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ olsun. Genel determinant argümanından $(r^n - a)\,M = 0$ olacak biçimde $a \in I$ vardır. O halde $r^n - a \in ann\,(M)$ ve $r \in \sqrt{ann\,(M) + I}$ elde edilir. Böylece

$$\sqrt{ann\,(M \diagup IM)} = \sqrt{ann\,(M) + I}$$

olur. ■

Önerme II.5 *I, R halkasının bir ideali, M bir $R-$modül ve K, M nin bir alt modülü olsun. Bu durumda*

$$I\,(K : M) \subseteq (IK : M)$$

gerçeklenir.

İspat. $r \in I\,(K : M)$ olsun. Bu durumda $r = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ olacak biçimde $a_i \in I$ ve $b_i \in (K : M)$ vardır. Buradan $b_i M \subseteq K$ ve

$$rM = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right) M = \sum_{i=1}^{n} (a_i b_i M) \subseteq IK$$

olur. Böylece $r \in (IK : M)$ ve

$$I\,(K : M) \subseteq (IK : M)$$

elde edilir. ■

II.3 ARTAN VE AZALAN ZİNCİR KOŞULLARI

Tanım II.21 (i) *M bir $R-$modül olsun. M nin her*

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots$$

alt modüller zinciri ve her $i \geq n$ için $N_i = N_n$ olacak biçimde bir n tamsayısı mevcutsa M ye artan zincir kosulunu sağlar veya noetheriandır denir.

(ii) M' bir $R-$modül olsun. M' nün her

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$$

alt modüller zinciri ve her $i \geq m$ için $K_i = K_m$ olacak biçimde bir m tamsayısı mevcutsa M' ne *azalan zincir kosulunu sağlar* veya *artiniandır* denir.

Teorem II.10 *M bir $R-$modül olsun. M nin noetherian olması için gerek ve yeter koşul M nin her alt modülünün sonlu üretilmiş olmasıdır.[8]*

Önerme II.6 *M bir noetherian $R-$modül olsun. Bu durumda $R/ann(M)$ noetherian bir halkadır.[8]*

Teorem II.11 *R, artinian bir halka ise, o zaman R halkası aynı zamanda noetheriandır.[8]*

Teorem II.12 *(Cohen Teoremi) R halkasının bütün asal idealleri sonlu üretilmiş olsun. Bu durumda R noetheriandır.*

İspat. R nin her asal ideali sonlu üretilmiş olsun. R nin noetherian olmadığını kabul edelim.

$$F = \{I \leq R : \ I, \ R \text{ nin sonlu üretilmemis ideali}\}$$

olsun. R noetherian olmadığından $F \neq \emptyset$ dir.

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_k \subseteq \ldots$$

F nin artan bir idealler zinciri olsun. $I = \bigcup I_i$ olsun. I ideali sonlu üretilmemiştir. $I = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ ise, $a_1, \ldots, a_n \in I_j$ olacak biçimde $I_j \in F$ vardır. Buradan, $I_j \subseteq I \subseteq I_j$ ve dolayısıyla $I \in F$ olur. Aldığımız zincirin bir üst sınırı olduğundan Zorn Lemması'na göre F nin en az bir maksimal elemanı vardır. Bu maksimal elemana P diyelim. F nin her maksimal elemanının asal ideal olduğunu gösterelim. $a, b \in R$ için $a \notin P$, $b \notin P$ ve $ab \in P$ olsun. Bu durumda $P \subsetneqq P + Ra$ ve $P + Ra$ sonlu üretilmiştir.

$$P + Ra = \langle p_1 + r_1 a, \ldots, p_k + r_k a \rangle$$

olsun. $ab \in P \subseteq (P : a)$ olduğundan $b \in (P : a)$ dır.

$$P \subsetneqq P + Rb \subseteq (P : a)$$

ve $(P : a)$ sonlu üretilmiştir.

$$P = p_1 R + \ldots + p_k R + (P : a)\, a$$

olduğunu gösterelim.

$$p_1 R + \ldots + p_k R + (P : a)\, a \subseteq P$$

olduğu açıktır. Tersine, $x \in P$ olsun.

$$P \subsetneqq P + Ra = \langle p_1 + r_1 a, \ldots, p_k + r_k a \rangle$$

olduğundan $x \in P + Ra$ ve $c_i \in R$ için

$$x = \sum_{i=1}^{k} c_i \left(p_i + r_i a\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i p_i + \sum_{i=1}^{k} \left(c_i r_i\right) a$$

olur. Buradan

$$x - \sum_{i=1}^{k} c_i p_i = \sum_{i=1}^{k} \left(c_i r_i\right) a \in P$$

ve $\sum_{i=1}^{k} c_i r_i \in (P:a)$ olur. O halde $x \in p_1 R + \ldots + p_k R + (P:a)\, a$ ve

$$P = p_1 R + \ldots + p_k R + (P:a)\, a$$

elde edilir. Böylece P sonlu üretilmiş olur, bu bir çelişkidir. O halde $ab \notin P$ ve P asal ideal olur. Hipotezden P sonlu üretilmiş olur. Bu çelişki bize $F = \emptyset$ olduğunu verir. Böylece R halkası noetheriandır. ■

Teorem II.13 *I, R halkasının bir ideali ve M sonlu üretilmiş bir $R-$modül olsun. $x \in R$ için $xM \subseteq IM$ ise $(x^n + y)\, M = 0$ olacak biçimde $y \in I$ vardır.* $(n \geq 0)$

İspat. $M = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ olsun. $m_i \in M$ olduğundan, $i = 1, \ldots, n$ için $xm_i \in xM \subseteq IM$ dir. O halde, $y_{ij} \in I$ olmak üzere

$$xm_i = \sum_{j=1}^{n} y_{ij} m_j$$

şeklinde yazılabilir. Genel determinant argümanından $(x^n + y)\, M = 0$ olacak biçimde $y \in I$ vardır. ■

Sonuç II.2 *I, R halkasının bir ideali ve M sonlu üretilmiş bir $R-$modül olsun. Bu durumda, $M = IM$ ise $(1 + y)\, M = 0$ olacak biçimde $y \in I$ vardır.*

İspat. Önceki teoremde $x = 1$ alalım. $xM = M \subseteq IM$ olduğundan $(1 + y)\, M = 0$ olacak biçimde $y \in I$ vardır. ■

Yar.Teorem II.5 *(Nakayama Lemma) M sonlu üretilmiş bir $R-$modül olsun. J, R nin Jacobson radikali olmak üzere $I \subseteq J$ olsun. Bu durumda $M = IM$ olması $M = 0$ olmasını gerektirir.*

İspat. Önceki sonuçtan $(1 + y)\, M = 0$ olacak biçimde $y \in I \subseteq J$ vardır. $1 + y$ birimsel olduğundan

$$(1 + y)^{-1} (1 + y)\, M = 0$$

ve böylece $M = 0$ elde edilir. ■

Tanım II.22 *R bir tamlık bölgesi ve K, R nin kesir cismi olsun. I, $R-$modül K nin alt modülü olmak üzere $aI \subseteq R$ olacak biçimde bir $a \in R$ varsa I ya R nin bir kesir ideali denir.*

Örneğin, $R = \mathbb{Z}$ ve $K = \mathbb{Q}$ için $I = \frac{2}{3}\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin bir kesir idealidir.

Tanım II.23 *R bir tamlık bölgesi ve I, R nin bir kesir ideali olsun. $IJ = R$ olacak biçimde R nin bir J kesir ideali varsa I ya R nin bir tersinir ideali denir.*

Örneğin, $R = \mathbb{Z}$ ve $K = \mathbb{Q}$ için $I = \frac{1}{3}\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ nin bir tersinir idealidir ve $J = 3\mathbb{Z}$ dir.

III ÇALIŞMALAR

III.1 ÇARPIMSAL MODÜLLER

Tanım III.1 *(i) M bir $R-$modül olsun. M nin her bir N alt modülü için $N = IM$ olacak biçimde R nin bir I ideali varsa, M ye çarpımsal modül denir.*

(ii) A, R nin bir ideali olsun. $B \subseteq A$ koşulunu sağlayan R nin her bir B ideali için $B = AC$ olacak biçimde bir C ideali varsa A ya ç*arpımsal ideal* denir.

O halde çarpımsal idealler aynı zamanda çarpımsal modüldür.

Örnek III.1 *Her halka kendi üzerinde çarpımsal modüldür. Çünkü, R halkasının her I ideali $I = IR$ biçiminde yazılabilir.*

Örnek III.2 *R nin tersinir idealleri çarpımsal $R-$modüldür. I, R nin tersinir bir ideali olsun. O zaman $IJ = R$ olacak biçimde R nin J kesir ideali vardır. N, I nın bir alt modülü olsun. Bu durumda*

$$NIJ = NJI = NR = N$$

ve $N \leq I$ olduğundan $NJ \leq IJ = R$ olur. Böylece NJ, R nin bir idealidir ve I çarpımsal $R-$modüldür.

Örnek III.3 *Devirli modüller çarpımsal modüldür. M devirli bir $R-$modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Bu durumda bir $m \in M$ için $M = Rm$ dir. $n \in N$ olsun. O zaman $n = rm$ olacak biçimde bir $r \in R$ vardır.*

$$I = \{r \in R : rm \in N\}$$

kümesini düşünelim. $r_1, r_2 \in I$ için

$$(r_1 + r_2)\, m = r_1 m + r_2 m \in N$$

ve $r \in R$, $a \in I$ *için*

$$(ra)\,m = r\,(am) \in N$$

olduğundan I, R *nin bir idealidir ve* $N = IM$ *dir. Çünkü, her* $n \in N$ *için* $n = rm$ *olacak biçimde bir* $r \in R$ *var olduğundan* $r \in I$ *ve* $n = rm \in IM$ *dir.* $IM \subseteq N$ *olduğu da açıktır. O halde eşitlik sağlanır.*

Yar.Teorem III.1 M *bir çarpımsal modül ve* N, M *nin bir alt modülü olsun. Bu durumda,*

$$N = (ann\,(M/N))\,M \tag{III.1}$$

gerçeklenir.

İspat. M bir çarpımsal modül olduğundan $N = IM$ olacak biçimde R nin bir I ideali vardır. $I \subseteq ann\,(M/IM)$ olduğundan

$$N = IM \subseteq (ann\,(M/N))\,M$$

elde edilir.

Tersine, $r \in ann\,(M/N)$ olsun. $\forall m \in M$ için $r\,(m + N) = N$ ve buradan $rm \in N$ olur. O halde $rM \subseteq N$ ve böylece

$$(ann\,(M/N))\,M \subseteq N$$

elde edilir. Dolayısıyla III.1 sağlanır. ■

Önerme III.1 M *bir* $R-$*modül olsun.* M *nin çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul her bir* $m \in M$ *için* $Rm = IM$ *olacak şekilde* R *nin bir* I *idealinin var olmasıdır.*

İspat. Gereklilik açıktır. Tersine, her bir $m \in M$ için $Rm = IM$ olacak şekilde R nin bir I idealinin olduğunu varsayalım. N, M nin bir alt modülü olsun. Her bir

$x \in N$ için $Rx = I_x M$ olacak şekilde R nin bir I_x ideali vardır. $I = \sum_{x \in N} I_x$ olsun. Böylece $N = IM$ olur. Gerçekten, Her bir $x \in N$ için

$$x \in Rx = I_x M \subseteq IM$$

olduğundan $N \subseteq IM$ dir. $IM \subseteq N$ olduğu da açıktır. O halde M bir çarpımsal modüldür. ■

Şimdi Nakayama Lemma'da, M nin sonlu üretilmiş olma şartı yerine çarpımsal modül olma şartını koyalım:

Önerme III.2 *M çarpımsal bir $R-$modül olsun. J, R nin Jacobson radikali olmak üzere $I \subseteq J$ olsun. Bu durumda $M = IM$ olması $M = 0$ olmasını gerektirir.*

İspat. $x \in M$ olsun. M bir çarpımsal modül olduğundan $Rx = AM$ olacak biçimde R nin bir A ideali vardır. O halde,

$$Rx = AM = AIM = IAM = Ix$$

ve buradan $x = ax$ olacak biçimde bir $a \in I$ vardır. $1 - a$ birimsel olduğundan $x = 0$ ve böylece $M = 0$ elde edilir. ■

Teorem III.1 *Bir çarpımsal modülün her homomorfik görüntüsü de çarpımsal modüldür.*

İspat. M bir R halkası üzerinde çarpımsal modül, $\phi : M \longrightarrow M'$ bir $R-$modül homomorfizması ve $K = \phi(M)$ olsun. $k \in K$ olsun. Bu durumda $k = \phi(m)$ olacak biçimde $m \in M$ vardır. M bir çarpımsal modül olduğundan $Rm = IM$ olacak biçimde R nin bir I ideali mevcuttur. O halde,

$$Rk = R\phi(m) = \phi(Rm) = \phi(IM) = I\phi(M) = IK$$

ve böylece K çarpımsal bir $R-$modül olur. ■

Sonuç III.1 *M çarpımsal bir $R-$modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Bu durumda M/N çarpımsal bir $R-$modüldür.*

İspat. $\phi : M \longrightarrow M/N$ örten bir $R-$modül homomorfizmasıdır. O halde, yukarıdaki teoremden M/N çarpımsal bir $R-$modül olur. ■

M bir $R-$modül ve P, R nin bir maksimal ideali olsun.

$$T_P(M) = \{m \in M : \ (1-p)\,m = 0, \ p \in P\}$$

kümesini tanımlayalım.

$T_p(M)$, M nin bir alt modülüdür. Çünkü, $m_1, m_2 \in T_P(M)$ için $(1-p_1)\,m_1 = 0$ ve $(1-p_2)\,m_2 = 0$ olacak biçimde $p_1, p_2 \in P$ vardır. $p = p_1 + p_2 - p_1p_2$ için

$$(1-p)(m_1+m_2) = 0$$

ve $m_1 + m_2 \in T_P(M)$ olur. $r \in R$, $m \in T_P(M)$ için

$$(1-p)(rm) = r(1-p)\,m = 0$$

olduğundan $rm \in T_P(M)$ dir.

Tanım III.2 *M bir $R-$modül ve P, R nin bir maksimal ideali olsun.*

$$(1-q)\,M \subseteq Rm$$

olacak biçimde bir $q \in P$ ve $m \in M$ varsa, M ye $P-$ devirli denir.

Teorem III.2 *M bir $R-$modül olsun. M nin çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul R nin her P maksimal ideali için, ya $M = T_P(M)$ ya da M nin $P-$devirli olmasıdır.*

İspat. Önce M nin bir çarpımsal modül olduğunu kabul edelim. P, R nin bir maksimal ideali olsun. $M = PM$ olduğunu varsayalım. $m \in M$ olsun. O zaman,

$Rm = AM$ olacak şekilde R nin bir A ideali vardır. Böylece

$$Rm = AM = APM = PAM = Pm$$

ve $\exists p \in P$ için $m = pm$ olur. Buradan $(1-p)\,m = 0$ ve $m \in T_P(M)$ elde edilir. O halde $M = T_P(M)$ olur. Şimdi $M \neq PM$ olduğunu varsayalım. En az bir $x \in M$ için $x \notin PM$ olur. M çarpımsal olduğundan $Rx = BM$ olacak şekilde R nin bir B ideali vardır. $B \nsubseteq P$ dir. Çünkü, $B \subseteq P$ olsa

$$Rx = BM \subseteq PM$$

ve $x \in PM$ olurdu. P, R nin bir maksimal ideali olduğundan $1-q \in B$ olacak biçimde $q \in P$ vardır. O halde

$$(1-q)\,M \subseteq BM = Rx$$

ve böylece M, $P-$devirli olur.

Tersine, R nin her bir maksimal ideali için, ya $M = T_P(M)$ ya da M nin $P-$devirli olduğunu kabul edelim. N, M nin bir alt modülü ve $I = ann\,(M/N)$ olsun. $IM \subseteq N$ olduğu açıktır. $y \in N$ ve

$$K = \{r \in R : ry \in IM\}$$

olsun. $0 \in K$ olduğundan $K \neq \emptyset$ dir. $K \neq R$ olduğunu varsayalım. O zaman $K \subseteq Q$ olacak biçimde R nin bir Q maksimal ideali vardır. $M = T_P(M)$ ise $(1-s)\,y = 0$ olacak biçimde $s \in Q$ vardır ve böylece $1-s \in K \subseteq Q$ çelişkisi elde edilir. O halde hipotezden $(1-t)\,M \subseteq Rz$ olacak şekilde $t \in Q$ ve $z \in M$ vardır. Buradan $(1-t)\,N$ nin, Rz nin alt modülü olduğu söylenebilir ve R nin

$$J = \{r \in R : rz \in (1-t)\,N\}$$

ideali için $(1-t)\,N = Jz$ yazılabilir. Gerçekten de, $Jz \subseteq (1-t)\,N$ olduğu açıktır. Tersine $x \in (1-t)\,N$ ise $x = (1-t)\,s$ olacak biçimde $s \in N$ vardır. $(1-t)\,N$, Rz nin alt modülü olduğundan $x = az$ olacak biçimde $a \in R$ vardır. Buradan,

$$x = az = (1-t)\, s \in (1-t)\, N$$

ve $a \in J$ olur. O halde $x \in Jz$ ve böylece $(1-t)\, N = Jz$ sağlanır. Dolayısıyla,

$$(1-t)\, JM = J\,(1-t)\, M \subseteq Jz \subseteq N$$

ve böylece $(1-t)\, J \subseteq I$ elde edilir. Buradan

$$(1-t)^2\, y \in (1-t)^2\, N = (1-t)\, Jz \subseteq IM$$

olur. Fakat bu durum $(1-t)^2 \in K \subseteq Q$ çelişkisini verir. O halde $K = R$ ve $y \in IM$ olur. Yar.Teorem III.1 den M bir çarpımsal modül olur. ■

Sonuç III.2 *M, bir $R-$modül ve $m_\lambda \in M$ $(\lambda \in \Lambda)$ olmak üzere $M = \sum_{\lambda\in\Lambda} Rm_\lambda$ olsun. Bu durumda M nin bir çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul $\forall\lambda \in \Lambda$ için $Rm_\lambda = I_\lambda M$ olacak biçimde R nin $I_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$ ideallerinin var olmasıdır.*

İspat. Gereklilik açıktır. Tersine, $\forall\lambda \in \Lambda$ için $Rm_\lambda = I_\lambda M$ olacak biçimde R nin $I_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$ ideallerinin var olduğunu kabul edelim. P, R nin bir maksimal ideali olsun. $\exists\mu \in \Lambda$ için $I_\mu \nsubseteq P$ olduğunu varsayalım. O zaman $I_\mu M = Rm_\mu$ olması, M nin $P-$devirli olduğunu verir. Çünkü $I_\mu \nsubseteq P$ ve P maksimal ideal olduğundan $R = I_\mu + P$ olur. Buradan $1-q \in I_\mu$ olacak şekilde $q \in P$ mevcuttur.

$$(1-q)\, M \subseteq I_\lambda M = Rm_\lambda$$

ve böylece M, $P-$devirli olur.

Şimdi $\forall\lambda \in \Lambda$ için $I_\lambda \subseteq P$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$I_\lambda M = Rm_\lambda \subseteq PM\,(\lambda \in \Lambda)$$

ve

$$M = \sum_{\lambda\in\Lambda} Rm_\lambda \subseteq PM$$

olur. Böylece $M = PM$ olur. Ama bu durum, herhangi bir $\lambda \in \Lambda$ için

$$Rm_{\lambda} = I_{\lambda}M = Pm_{\lambda}$$

ve bir $p \in P$ için $(1-p)\, m_{\lambda} = 0$ olmasını gerektirir. Böylece $m_{\lambda} \in T_P(M)$ ve $M = T_P(M)$ elde edilir. Teorem III.2 den M, bir çarpımsal modül olur. ■

Sonuç III.3 *I, R halkasının çarpımsal bir ideali ve M, bir çarpımsal $R-$modül olsun. O zaman IM, bir çarpımsal $R-$modül olur.*

İspat. P, R nin bir maksimal ideali olsun. Eğer $I = T_P(I)$ veya $M = T_P(M)$ ise $IM = T_P(IM)$ dir. Çünkü,

$$\begin{aligned} T_P(I) &= \{r \in I : (1-p_1)\, r = 0, p_1 \in P\} \\ T_P(M) &= \{m \in M : (1-p_2)\, m = 0, p_2 \in P\} \\ T_P(IM) &= \left\{x = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i : (1-p)\, x = 0, p \in P\right\} \end{aligned}$$

dir. $p = p_1 + p_2 - p_1 p_2$ seçilirse,

$$(1-p)\, x = (1-p)\, r_1 m_1 + ... + (1-p)\, r_n m_n = 0$$

ve böylece $IM = T_P(IM)$ olur. Şimdi $I \neq T_P(I)$ ve $M \neq T_P(M)$ olduğunu varsayalım. Teorem III.2 den $(1-q_1)\, I \subseteq Ra$ ve $(1-q_2)\, M \subseteq Rm$ gerçeklenecek biçimde q_1,$q_2 \in P$, $a \in I$ ve $m \in M$ vardır. $q = q_1 + q_2 - q_1 q_2 \in P$ için

$$(1-q)\, IM \subseteq R(am)$$

elde edilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} (1-(q_1+q_2-q_1q_2))\, IM &= (1-q_1)\, IM - q_2(1-q_1)\, IM = (1-q_1)(1-q_2)\, IM \\ &= (1-q_1)\, I\, (1-q_2)\, M \subseteq R(am). \end{aligned}$$

Böylece Teorem III.2 den IM bir çarpımsal $R-$modüldür. ■

Sonuç III.4 *J, R halkasının Jacobson radikali ve M bir $R-$modül olsun. Aşağıdaki ifadeler için $(i) \implies (ii) \implies (iii)$ gerçeklenir. Bununla birlikte, eğer M sonlu üretilmiş ise $(iii) \implies (i)$ de sağlanır.*

(i) M bir çarpımsal modüldür.

(ii) M/JM bir çarpımsal modüldür.

(iii) R nin bütün P maksimal idealleri için M/PM devirlidir.

İspat. $(i) \implies (ii)$ Açıktır.

$(ii) \implies (iii)$ $R' = R/P$ ve $M' = M/JM$ olsun. P, R nin bir maksimal ideali ve $P' = P/J$ olsun. Bu durumda P', R' nün bir maksimal ideali olur. Teorem III.2 den ya $M' = P'M'$ (bu halde $M = PM + JM = PM$ olur.) ya da M', $P'-$devirli olur. Eğer M', $P'-$devirli olursa, o zaman

$$(1-p)\,M \subseteq Rm + JM \subseteq Rm + PM$$

ve böylece $M = Rm + PM$ olur. Her iki durumda da M/PM devirli olur.

$(iii) \implies (i)$ M nin sonlu üretilmiş olduğunu kabul edelim. Q, R nin bir maksimal ideali olsun. R nin her P maksimal ideali için M/PM devirli olduğundan

$$M/QM = \langle Rx + QM \rangle$$

olacak biçimde $x \in M$ vardır. Buradan $M = Rx + QM$ ve

$$M/Rx = Q\,(M/Rx)$$

olur. M/Rx sonlu üretilmiş olduğundan, genel determinant argümanından,

$$(1-q)\,(M/Rx) = 0$$

olacak biçimde $q \in Q$ vardır. Böylece

$$(1-q)\,M \subseteq Rx$$

ve M, $Q-$devirli olur. Teorem III.2 den M bir çarpımsal modüldür. ■

Önerme III.3 *$I_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$, R nin boş olmayan idealler topluluğu ve M bir $R-$modül olsun. Bu durumda,*

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) M = \sum_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda M)$$

dir.

İspat. $I_\lambda M \subseteq \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) M$ olduğundan

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) M \supseteq \sum_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda M)$$

dir. Tersine, $\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\right) m \in \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) M$ için

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda\right) m = \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda m\right) \in \sum_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda M)$$

olduğundan

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) M \subseteq \sum_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda M)$$

dir. Böylece eşitlik sağlanır. ■

Teorem III.3 *M güvenilir bir $R-$modül olsun. O zaman M nin bir çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul*

(i) R nin boş olmayan herhangi bir $I_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$ idealler topluluğu için

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda M) = \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda\right) M \qquad \text{(III.3)}$$

ve

(ii) M nin herhangi bir N alt modülü ve $N \subset AM$ koşulunu sağlayan R nin A ideali için, $B \subset A$ ve $N \subseteq BM$ şartlarını sağlayan bir B ideali vardır.

İspat. (i) M nin bir çarpımsal modül olduğunu kabul edelim. $I_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$, R nin herhangi bir idealler topluluğu olsun. $I = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ olsun.

$$IM \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (I_\lambda M)$$

olduğu açıktır. $x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M)$ olsun.

$$K = \{r \in R : rx \in IM\}$$

olsun. $K \neq R$ olduğunu varsayalım. O zaman, $K \subseteq P$ olacak biçimde R nin bir P maksimal ideali vardır. $x \notin T_P(M)$ dir. Çünkü $x \in T_P(M)$ olsa, $\exists p \in P$ için $(1-p)x = 0$ ve $1-p \in K \subseteq P$ olurdu. $M \neq T_P(M)$ olduğundan, Teorem III.2 den M, $P-$devirli olur. Yani $(1-p)M \subseteq Rm$ olacak biçimde $p \in P$ ve $m \in M$ vardır. O zaman

$$(1-p)x \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda m)$$

olur. Her bir $\lambda \in \Lambda$ için $(1-p)x = a_\lambda m$ olacak biçimde $a_\lambda \in I_\lambda$ vardır. $\alpha \in \Lambda$ seçelim. Her bir $\lambda \in \Lambda$ için $a_\alpha m = a_\lambda m$ ve böylece $(a_\alpha - a_\lambda)m = 0$ olur. O halde,

$$(1-p)(a_\alpha - a_\lambda)M = (a_\alpha - a_\lambda)(1-p)M \subseteq (a_\alpha - a_\lambda)Rm = 0$$

olması, $(1-p)(a_\alpha - a_\lambda) = 0$ olmasını gerektirir. Sonuç olarak,

$$(1-p)a_\alpha = (1-p)a_\lambda \in I_\lambda \ \ (\lambda \in \Lambda)$$

ve böylece $(1-p)a_\alpha \in I$ olur. O halde

$$(1-p)^2 x = (1-p)a_\alpha m \in IM$$

dir. Bu durum, $(1-p)^2 \in K \subseteq P$ olmasını gerektirir, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $K = R$ ve $x \in IM$ olur. Böylece

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M) \subseteq IM$$

elde edilir ve III.3 sağlanır.

(ii) N, M nin bir alt modülü ve A, R nin $N \subset AM$ koşulunu sağlayan bir ideali olsun. $N = CM$ olacak biçimde R nin bir C ideali vardır. $B = A \cap C$ olsun. $B \subset A$ olduğu açıktır ve (i) den

$$N \subseteq AM \cap CM = (A \cap C)M = BM$$

olur.

Tersine (i) ve (ii) nin sağlandığını varsayalım. N, M nin bir alt modülü olsun.

$$\hat{S} = \{I : \ I, \ R \ nin \ ideali \ ve \ N \subseteq IM\}$$

olsun. $R \in \hat{S}$ olduğu açıktır. $I_\lambda \, (\lambda \in \Lambda)$, $\hat{S}$ deki ideallerin boştan farklı bir topluluğu olsun. (i) den

$$A = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \in \hat{S}$$

ve $N \subseteq AM$ dir. $N \neq AM$ olduğunu varsayalım. (ii) den $B \subset A$ ve $N \subseteq BM$ olacak biçimde bir B ideali vardır. Bu halde $B \in \hat{S}$ olur ve bu durum A nın minimal olması ile çelişir. O halde $N = AM$ olur ve böylece M bir çarpımsal modüldür. ■

Önerme III.4 *M bir $R-$modül ve $R' = R \diagup (ann\,(M))$ olsun. O zaman M nin bir çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul M nin güvenilir bir çarpımsal $R'-$modül olmasıdır.*

İspat. M bir çarpımsal $R-$ modül ise, M nin her N alt modülü için

$$N = IM = ((I + ann\,(M)) \diagup ann\,(M))\,M$$

olduğundan M çarpımsal bir $R'-$modüldür. $r + ann\,(M) \in ann_{R'}\,(M)$ olsun. O zaman her $m \in M$ için $(r + ann\,(M))\,m = 0$ ve buradan $r \in ann\,(M)$ olur. O halde M güvenilir bir çarpımsal $R'-$modüldür.

Tersine, M güvenilir bir çarpımsal $R'-$modül olsun. M nin her N alt modülü için

$$N = (A \diagup ann\,(M))\,M = AM$$

olacak biçimde $ann\,(M) \subseteq A$ koşulunu sağlayan R nin bir A ideali vardır. Böylece M, çarpımsal bir $R-$modüldür. ■

M çarpımsal bir $R-$modül ve I, R nin bir ideali olsun. Bu durumda , Sonuç III.1 den $M \diagup IM$ de çarpımsal bir $R-$modüldür. $I \subseteq ann\,(M \diagup IM)$ olduğundan Önerme III.4 ten $M \diagup IM$, $R \diagup I$ üzerinde çarpımsal bir modül olur.

Böylece güvenilir çarpımsal modüller ile ilgili sonuçlar kolayca güvenilir olmayanlara genişletilebilir. Örneğin, Teorem III.3 aşağıdaki sonucu verir.

Sonuç III.5 *M bir $R-$modül olsun. M nin çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul*

(i) R nin boştan farklı herhangi bir $I_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$ idealler topluluğu için

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M) = \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}[I_\lambda + ann\,(M)]\right) M \tag{III.5}$$

ve

(ii) M nin herhangi bir N alt modülü ve $N \subset AM$ koşulunu sağlayan R nin A ideali için, $B \subset A$ ve $N \subseteq BM$ şartlarını sağlayan bir B ideali vardır.

İspat. M nin çarpımsal bir $R-$modül olduğunu varsayalım. O zaman $R' = R/\,(ann\,(M))$ için M güvenilir bir çarpımsal $R'-$modüldür. R'nin boştan farklı herhangi bir $I_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$ idealler topluluğu için $\{I_\lambda + ann\,(M)\}_{\lambda\in\Lambda}$, R' nün boştan farklı bir idealler topluluğu olur. O halde Teorem III.2 den,

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda}([I_\lambda + ann\,(M)]\,M) = \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda}[I_\lambda + ann\,(M)]\right) M$$

ve buradan III.5 sağlanır. ■

Tanım III.3 *M bir $R-$modül olsun. $N_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$, M nin alt modüllerinin boştan farklı bir topluluğu ve $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} N_\lambda = 0$ olsun. Eğer $\bigcap_{\lambda\in\Lambda'} N_\lambda = 0$ olacak biçimde Λ nın sonlu bir Λ' alt cümlesi varsa M ye sonlu eş üretilmiş denir. Eğer R halkası bir $R-$modül olarak sonlu eş üretilmiş ise R ye sonlu eş üretilmiş denir.*

Sonuç III.6 *M güvenilir bir çarpımsal $R-$modül olsun. O zaman M nin sonlu eş üretilmiş olması için gerek ve yeter koşul R nin sonlu eş üretilmiş olmasıdır.*

İspat. M nin sonlu eş üretilmiş olduğunu varsayalım. $I_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$, R nin ideallerinin boştan farklı bir topluluğu ve $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda = 0$ olsun. Bu durumda Teorem III.3 ten $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(I_\lambda M) = 0$ olur. M sonlu eş üretilmiş olduğundan $\bigcap_{\lambda\in\Lambda'}(I_\lambda M) = 0$ olacak biçimde Λ nın sonlu bir Λ' alt cümlesi vardır. Teorem III.3 ten $\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda'} I_\lambda\right) M = 0$ ve M güvenilir olduğundan $\bigcap_{\lambda\in\Lambda'} I_\lambda = 0$ olur. Böylece R sonlu eş üretilmiş olur.

Tersine, R nin sonlu eş üretilmiş olduğunu varsayalım. $N_\gamma\,(\gamma \in \Gamma)$, M nin alt modülerinin boştan farklı bir topluluğu ve $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} N_\gamma = 0$ olsun. Her bir $\gamma \in \Gamma$ için $N_\gamma = A_\gamma M$ olacak biçimde R nin bir A_γ ideali vardır.

$$\left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\right) M = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}(A_\gamma M) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} N_\gamma = 0$$

ve M güvenilir olduğundan $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma = 0$ olur. Hipotezden $\bigcap_{\gamma\in\Gamma'} A_\gamma = 0$ olacak biçimde Γ nın sonlu bir Γ' alt cümlesi vardır. Teorem III.3 ten

$$\bigcap_{\gamma\in\Gamma'} N_\gamma = \bigcap_{\gamma\in\Gamma'}(A_\gamma M) = \left(\bigcap_{\gamma\in\Gamma'} A_\gamma\right) M = 0$$

ve böylece M sonlu eş üretilmiş olur. ■

III.2 ÇARPIMSAL MODÜLLERİN BAZI ÖZELLİKLERİ

III.2.1 ÇARPIMSAL MODÜLLERİN MAKSİMAL ALT MODÜLLERİ

Yar.Teorem III.2 *M bir çarpımsal modül ve X, $\phi : M \to X \oplus X$ epimorfizması var olacak biçimde bir $R-$modül olsun. O zaman $X = 0$ dır.*

İspat. $\varphi(x, y) = x$ ile tanımlanan $\varphi : X \oplus X \to X$ dönüşümü ve $\psi(x, y) = y$ ile tanımlanan $\psi : X \oplus X \to X$ dönüşümü birer epimorfizmadır. $N_1 =$Ç$ek\,(\varphi \circ \phi)$ ve

$N_2 =$Çek$\,(\psi \circ \phi)$ için,

$$M \diagup N_1 \cong M \diagup N_2 \cong X$$

gerçeklenir.

$$f : M \diagup N_1 \to M \diagup N_2$$

izomorfizmasını

$$f\,(m + N_1) = m' + N_2$$

ile tanımlayalım. $a \in ann\,(M \diagup N_1)$ olsun. Bu durumda, $a\,(M \diagup N_1) = \overline{0}$ ve

$$af^{-1}\,(M \diagup N_2) = f^{-1}\,(a\,(M \diagup N_2)) = \overline{0}$$

olur. Buradan da $a\,(M \diagup N_2) = \overline{0}$ ve dolayısıyla $a \in ann\,(M \diagup N_2)$ elde edilir. Benzer biçimde $b \in ann\,(M \diagup N_2)$ için,

$$b\,(M \diagup N_2) = bf\,(M \diagup N_1) = f\,(b\,(M \diagup N_1)) = \overline{0}$$

ve $b\,(M \diagup N_1) = \overline{0}$ olur. O halde $b \in ann\,(M \diagup N_1)$ ve

$$(ann\,(M \diagup N_1))\,M = (ann\,(M \diagup N_2))\,M$$

elde edilir. M bir çarpımsal modül olduğundan,

$$N_1 = (ann\,(M \diagup N_1))\,M = (ann\,(M \diagup N_2))\,M = N_2$$

olur. $x \in X$ olsun. ϕ örten olduğundan $\phi\,(m) = (0, x)$ olacak biçimde $m \in M$ vardır. $\varphi\,(0, x) = 0$ olduğundan, $\varphi \circ \phi\,(m) = 0$ ve $m \in$Çek$\,(\varphi \circ \phi) =$Çek$\,(\psi \circ \phi)$ elde edilir. O halde $\psi \circ \phi\,(m) = \psi\,(0, x) = x = 0$ ve dolayısıyla $X = 0$ olur. ■

Sıradaki sonucu ifade etmeden önce bazı notasyonları tanıtalım. $M_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$, $R-$modüllerin boş olmayan bir topluluğunu ve $\lambda \in \Lambda$ için $\widehat{M_\lambda}$, $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$'nın $\bigoplus_{\mu \neq \lambda} M_\mu$ alt modülünü göstersin. Bu durumda, her bir $\lambda \in \Lambda$ için $M = M_\lambda \oplus \widehat{M_\lambda}$ dir.

Teorem III.4 *R birimli ve değişmeli bir halka ve $M_\lambda \, (\lambda \in \Lambda)$, $R-$modüllerin bir topluluğu olsun. O zaman $M = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ nın çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul*

(i) Her bir $\lambda \in \Lambda$ için M_λ nın çarpımsal modül olması, ve

(ii) Her bir $\lambda \in \Lambda$ için $A_\lambda M_\lambda = M_\lambda$ ve $A_\lambda \widehat{M_\lambda} = 0$ olacak biçimde R nin bir A_λ idealinin var olmasıdır.

İspat. Önce M nin bir çarpımsal modül olduğunu kabul edelim. O zaman

$$M_\lambda \cong M \diagup \widehat{M_\lambda}$$

bir çarpımsal modül olur. $\lambda \in \Lambda$ olsun. O zaman $M_\lambda = A_\lambda M$ olacak biçimde R nin A_λ ideali vardır.

$$M_\lambda = A_\lambda M = A_\lambda M_\lambda \oplus A_\lambda \widehat{M_\lambda}$$

ve $M_\lambda \cap \widehat{M_\lambda} = 0$ olduğundan,

$$A_\lambda \widehat{M_\lambda} \subseteq M_\lambda \cap \widehat{M_\lambda} = 0$$

ve $M_\lambda = A_\lambda M_\lambda$ elde edilir.

Tersine, $M_\lambda \, (\lambda \in \Lambda)$ modülleri (i) ve (ii) yi sağlasın. P, R nin bir maksimal ideali olsun. Eğer $M_\lambda = T_P \left(M_\lambda \right) \, (\lambda \in \Lambda)$ ise, o zaman $M = T_P \left(M \right)$ olur. $\exists \alpha \in \Lambda$ için $M_\alpha \neq T_P \left(M_\alpha \right)$ olduğunu varsayalım. Teorem III.2 den M_α, $P-$devirli olur. $(1-p) \, M_\alpha \subseteq Rm$ olacak biçimde $p \in P$ ve $m \in M$ vardır. Buradan,

$$(1-p) \, A_\alpha M = (1-p) \, M_\alpha \subseteq Rm$$

olur. Eğer $A_\alpha \subseteq P$ ise, o zaman

$$M_\alpha = A_\alpha M_\alpha \subseteq P M_\alpha$$

ve (i) den $M_\alpha = T_P(M_\alpha)$ olur, bu bir çelişkidir. O halde $(1-p)A_\alpha \subseteq P$ ve böylece M, $P-$devirli olur. Teorem III.2 den M bir çarpımsal modüldür. ■

Teorem III.4, sonlu üretilmiş modüller için farklı bir biçimde ifade edilebilir. Eğer X sonlu üretilmiş bir $R-$modül ve I, R nin $X = IX$ koşulunu sağlayan bir ideali ise, o zaman genel determinant argümanından $(1-a)X = 0$ olacak biçimde $a \in I$ mevcuttur. Böylece ilk olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç III.7 *$M_\lambda\,(\lambda \in \Lambda)$, sonlu üretilmiş $R-$modüllerin bir topluluğu ve $M = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ olsun. O zaman M nin bir çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul her bir $\lambda \in \Lambda$ için M_λ nın çarpımsal modül olması ve*

$$ann\,(M_\lambda) + ann\left(\widehat{M_\lambda}\right) = R$$

olmasıdır.

İspat. M bir çarpımsal modül ve her bir $\lambda \in \Lambda$ için M_λ sonlu üretilmiş bir $R-$modül olsun. Bu durumda Teorem III.4 ten $M_\lambda = I_\lambda M_\lambda$ olacak biçimde R nin I_λ ideali vardır. Genel determinant argümanından, her $\lambda \in \Lambda$ için $(1-a_\lambda)M_\lambda = 0$ olacak biçimde $a_\lambda \in I_\lambda$ mevcuttur. Buradan, $(1-a_\lambda) \in ann\,(M_\lambda)$ olur. Teorem III.4 ten $I_\lambda\widehat{M_\lambda} = 0$ ve $I_\lambda \subseteq ann\left(\widehat{M_\lambda}\right)$ olur. O halde her $\lambda \in \Lambda$ için $a_\lambda \in ann\left(\widehat{M_\lambda}\right)$ olur. Böylece

$$1 = (1-a_\lambda) + a_\lambda \in ann\,(M_\lambda) + ann\left(\widehat{M_\lambda}\right)$$

ve

$$ann\,(M_\lambda) + ann\left(\widehat{M_\lambda}\right) = R$$

elde edilir.

Tersine,

$$ann\,(M_\lambda) + ann\left(\widehat{M_\lambda}\right) = R$$

ise, $ann\left(\widehat{M_\lambda}\right)M_\lambda = M_\lambda$ ve $ann\left(\widehat{M_\lambda}\right)\widehat{M_\lambda} = 0$ olduğundan, Teorem III.4 ten M bir çarpımsal modül olur. ■

Özel olarak Λ nın sonlu olma durumu ilginçtir. Eğer $M_i\,(1 \leq i \leq n)$, çarpımsal $R-$modüllerin sonlu bir topluluğu ise, o zaman

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$$

nin çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul her $1 \leq i \neq j \leq n$ için

$$ann\,(M_i) + ann\,(M_j) = R$$

olmasıdır. Gerçekten de, her $1 \leq i \neq j \leq n$ için,

$$ann\left(\widehat{M_i}\right) = ann\left(\bigoplus_{i \neq j} M_j\right) = \bigcap_{i \neq j} ann\,(M_j)$$

olduğundan ve yukarıdaki sonuçtan

$$ann\,(M_i) + ann\,(M_j) = R$$

elde edilir.

Sonuç III.8 *$M_i\,(1 \leq i \leq n)$, devirli $R-$modüllerin sonlu bir topluluğu ve*

$$M = M_1 \oplus \ldots \oplus M_n$$

olsun. O zaman M nin bir çarpımsal modül olması için gerek ve yeter koşul M nin devirli olmasıdır.

İspat. Yukarıda ifade edildiği gibi, devirli modüller çarpımsal modüllerdir. Tersine, M bir çarpımsal modül olsun. $A_i = Ann\,(M_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ olsun. Sonuç III.7 den, bütün $1 \leq i \neq j \leq n$ için $A_i + A_j = R$ dir. Her i için $M_i \cong R/Ann\,(M_i)$ olduğundan ve Çin Kalan Teoremi'nden

$$M \cong (R/A_1) \oplus \ldots \oplus (R/A_n) \cong R/\,(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

ve böylece M devirli olur. ■

Tanım III.4 *K, M nin has bir alt modülü olmak üzere, $K \subseteq N \subseteq M$ olması ya $K = N$ ya da $N = M$ olmasını gerektiriyorsa, K ye M nin bir maksimal alt modülü denir.*

Teorem III.5 *R birimli ve değişmeli bir halka ve M sıfırdan farklı çarpımsal bir $R-$modül olsun. O zaman,*

(i) M nin her has alt modülü, M nin bir maksimal alt modülünde kapsanır.

(ii) K nin bir maksimal alt modül olması için gerek ve yeter koşul $K = PM \neq M$ olacak biçimde R nin bir P maksimal idealinin var olmasıdır.

İspat. (i) N, M nin has bir alt modülü olsun. O zaman M/N, sıfırdan farklı bir çarpımsal modüldür. O halde, sıfırdan farklı herhangi bir M çarpımsal modülünün bir maksimal alt modül içerdiğini göstermek yeterlidir. Gerçekten, K/N, M/N içinde maksimal alt modül ise, $N \subseteq K + N \subset M$ ve $K + N$, M'nin maksimal alt modülü olur. $0 \neq m \in M$ olsun. O zaman

$$I = \{r \in R : rm = 0\}$$

R nin has bir idealidir ve buradan $I \subseteq P$ olacak biçimde R nin P maksimal ideali vardır. Eğer $M = PM$ ise, o zaman $Rm = Pm$ (Teorem III.2 nin kanıtına bakınız) ve buradan $(1 - p)\, m = 0$ olacak biçimde $p \in P$ vardır. Fakat bu durum $1 - p \in I \subseteq P$ olmasını gerektirir, bu bir çelişkidir. O halde $M \neq PM$ dir. Buradan M/PM, R/P cismi üzerinde bir vektör uzayı olur. M çarpımsal bir $R-$modül olduğundan, M/PM, R/P cismi üzerinde çarpımsal olur. R/P cisminin idealleri yalnızca 0 ve kendisi olduğundan, M/PM nin alt modülleri yalnızca $\overline{0}$ ve kendisi olur. Böylece PM, M nin bir maksimal alt modülü olur ve (i) sağlanır.

(ii) Eğer P, R nin bir maksimal ideali ve $M \neq PM$ ise, (i) den PM, M nin bir maksimal alt modülüdür. Diğer taraftan K, M nin bir maksimal alt modülü ise,

$Q = ann(M/K)$, R nin bir maksimal idealidir. Gerçekten de, eğer Q, R nin bir maksimal ideali değilse $Q \subset P$ olacak biçimde R nin bir P maksimal ideali vardır. Bu durumda en az bir $p \in P$ için $p \notin Q$ ve buradan $pM \nsubseteq K$ olur. K maksimal olduğundan, $pM + K = M$ ve böylece

$$M = pM + QM = (Rp + Q)\, M \subseteq PM$$

elde dilir. Teorem III.2 den her $m \in M$ için $(1-p)\, m = 0$ olacak biçimde $p \in P$ vardır. Özel olarak $x \in M \diagdown K$ seçelim. Bu durumda $Rx + K = M$ dir. O halde

$$(1-p)\, Rx + (1-p)\, K = (1-p)\, M$$

ve buradan

$$(1-p)\, M = (1-p)\, QM \subseteq QM = K$$

elde edilir. Böylece $1 - p \in (K : M) = Q$ ve $Rp + Q = R \subseteq P$ olur. Bu durum P nin maksimal olmasıyla çelişir. O halde Q maksimal ideali için $K = QM$ elde edilir. ■

Tanım III.5 *M bir $R-$modül olsun. O zaman M nin radikali, eğer mevcut ise M nin maksimal alt modüllerinin kesişimi; diğer durumda M olarak tanımlanır. $rad\ M$ ile gösterilir.*

Sonuç III.9 *M bir $R-$modül ve N, M nin $M = N + rad\ M$ koşulunu sağlayan bir alt modülü olsun. O zaman $M = N$ dir.*

İspat. $M \neq N$ olduğunu varsayalım. Teorem III.5 ten $N \subseteq K$ olacak biçimde M nin bir K maksimal alt modülü vardır. Bu durumda $M = N + rad\ M \subseteq K$ olur, bu bir çelişkidir. O halde $M = N$ dir. ■

Tanım III.6 *M bir $R-$modül ve $u \in M$ olsun. u, M nin herhangi bir maksimal alt modülünde kapsanmıyorsa u ya birimsel denir.*

Teorem III.6 *M çarpımsal bir $R-$modül olsun. $u \in M$ nin birimsel olması için gerek ve yeter koşul $(u) = M$ olmasıdır.*

İspat. $u \in M$ birimsel ve $(u) \neq M$ olsun. Teorem III.5 ten (u), M nin bir maksimal alt modülünde kapsanır. Fakat bu durum tanımla çelişir. O halde $(u) = M$ dir.

Tersine, $u \in M$ için $(u) = M$ olsun. Bu halde $u \in (u)$, M nin hiç bir maksimal alt modülünde kapsanmaz. Dolayısıyla tanımdan u birimseldir. ∎

Teorem III.7 *M bir $R-$modül ve $u \in M$ birimsel olsun. Bu durumda $m \in rad\ M$ olması için gerek ve yeter koşul, her $r \in R$ için $u - rm$ nin birimsel olmasıdır.*

İspat. $u \in M$ birimsel ve

$$m \in radM = \bigcap \{K : \ K, \ M \ nin \ maksimal \ alt \ modülü\}$$

olsun. Bu halde M nin her bir K maksimal alt modülü için $m \in K$ olur. $u - rm$ nin birimsel olmadığını varsayalım. O zaman, $u - rm \in K$ olacak biçimde bir K maksimal ideali ve buradan $u = rm + k \in K$ olacak biçimde $k \in K$ vardır. Bu durum u nun birimsel olmasıyla çelişir. O halde $u - rm$ birimseldir.

Tersine, her $r \in R$ için $u - rm$ birimsel olsun. $m \notin rad\ M$ olduğunu varsayalım. Bu halde, $(m) + P = M = (u)$ olacak biçimde M nin bir P maksimal alt modülü ve $m \in M - P$ vardır. Buradan, R nin bir s elemanı için $u - sm \in P$ olur, çelişkidir. O halde $m \in rad\ M$ olur. ∎

M bir $R-$modül olsun. $\widetilde{M}$, R nin maksimal ideallerinin bir topluluğunu göstersin.

$$\widetilde{P}_1(M) = \left\{ P \in \widetilde{M} : M \neq PM \right\}$$

ve

$$\widetilde{P}_2(M) = \left\{ P \in \widetilde{M} : ann(M) \subseteq P \right\}$$

olsun. Burada $\widetilde{P}_1(M) \subseteq \widetilde{P}_2(M)$ dir. Eğer $Q \in \widetilde{M}$ ve $ann(M) \nsubseteq Q$ ise, o zaman $R = ann(M) + Q$ ve böylece $M = QM$ olur. Eğer M sıfırdan farklı bir çarpımsal modül ise, o zaman Teorem III.5 ten $\widetilde{P}_1(M)$ boştan farklıdır. Şimdi,

$$\widetilde{J}_1(M) = \bigcap \left\{ P : \ P \in \widetilde{P}_1(M) \right\}$$

ve

$$\widetilde{J}_2(M) = \left\{ P : \ P \in \widetilde{P}_2(M) \right\}$$

olsun.

$$J \subseteq \widetilde{J}_2(M) \subseteq \widetilde{J}_1(M)$$

olduğu açıktır. Burada J, R nin Jacobson radikalidir. Eğer M güvenilir ise $J = \widetilde{J}_2(M)$ dir.

Teorem III.8 *R birimli ve değişmeli bir halka ve M bir çarpımsal $R-$modül olsun. O zaman,*

$$rad\ M = \widetilde{J}_1(M)\, M = \widetilde{J}_2(M)\, M.$$

İspat. $M \neq 0$ olduğunu varsayalım. Sonuç III.5 ve Teorem III.5 ten,

$$\begin{aligned} rad\ M &= \bigcap \{PM : \ PM \neq M\} = \bigcap \left\{ PM : \ P \in \widetilde{P}_1(M) \right\} \\ &= \left(\bigcap \left\{ P + ann(M) : \ P \in \widetilde{P}_1(M) \right\} \right) M = \widetilde{J}_1(M)\, M \supseteq \widetilde{J}_2(M)\, M \end{aligned}$$

olur. Bununla birlikte, Sonuç III.5

$$\widetilde{J}_2(M)\, M = \bigcap \left\{ PM : \ P \in \widetilde{P}_2(M) \right\}$$

olduğunu da verir. $Q \in \widetilde{P}_2(M)$ olsun. Eğer $M = QM$ ise, $rad\ M \subseteq QM = M$ dir. $M \neq QM$ ise, o zaman $Q \in \widetilde{P}_1(M)$ ve böylece $rad\ M \subseteq QM$ olur. O halde her durumda $rad\ M \subseteq QM$ ve buradan $rad\ M \subseteq \widetilde{J}_2(M)\, M$ elde edilir. ■

Teorem III.9 *R birimli ve değişmeli bir halka ve M, sadece sonlu sayıda maksimal alt modülü olan bir çarpımsal $R-$modül olsun. O zaman M devirlidir.*

İspat. $M\diagup(rad\ M)$, basit modüllerin ve dolayısıyla Sonuç III.4 ten devirlilerin sonlu bir direkt toplamıdır. Yani,

$$M\diagup(rad\ M) = M\diagup\bigcap_{i=1}^{n} K_i = M\diagup K_1 \oplus \ldots \oplus M\diagup K_n$$

dir. Sonuç III.8 den $M\diagup(rad\ M)$ devirli olur ve buradan $M = Rm + rad\ M$ olacak biçimde $m \in M$ vardır. Böylce Sonuç III.9 dan M devirli olur. ■

Sonuç III.10 *Artinian çarpımsal modüller devirlidir.*

İspat. $\hat{S}$, M nin maksimal alt modüllerinin sonlu kesişimleri olan alt modüllerinin bir topluluğu olsun. Hipotezden $\hat{S}$ nin bir minimal elemanı vardır. Teorem III.5 ten bu minimal eleman, $P_i\,(1 \leq i \leq n)$ maksimal idealleri için $P_1M \cap \ldots \cap P_nM$ biçimindedir ve $M \neq P_iM\ \ (1 \leq i \leq n)$ dir. K, M nin bir maksimal alt modülü olsun. Teorem III.5 ten $K = PM$ olacak biçimde R nin bir P maksimal ideali vardır. Açıktır ki,

$$P_1M \cap \ldots \cap P_nM = P_1M \cap \ldots \cap P_nM \cap PM$$

ve böylece

$$(P_1 \cap \ldots \cap P_n)\,M \subseteq PM$$

olur. Eğer

$$A = P_1 \cap \ldots \cap P_n \nsubseteq P$$

ise, o zaman $R = A + P$ ve buradan

$$M = AM + PM \subseteq PM = K$$

olur, bu bir çelişkidir. O halde $A \subseteq P$ ve böylece $1 \leq i \leq n$ için $P_i \subseteq P$ olur. Bu durum $P_i = P$ olmasını gerektirir ve $K = P_iM$ olur. Buradan M nin yalnızca sonlu sayıda maksimal alt modülü vardır. Teorem III.7 den M devirli olur. ■

Teorem III.10 *R bir halka ve M çarpımsal bir $R-$modül olsun. Bu durumda R noetherian(artinian) ise, M de noetheriandır(artiniandır).*

İspat.

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots$$

M nin alt modüllerinin artan bir zinciri olsun. Bu durumda

$$(N_1 : M) \subseteq (N_2 : M) \subseteq \dots$$

R nin ideallerinin artan bir zinciri olur. R noetherian olduğundan

$$(N_k : M) = (N_{k+1} : M)$$

olacak biçimde $k \in \mathbb{N}$ vardır. M çarpımsal modül olduğundan

$$N_k = (N_k : M)\, M = (N_{k+1} : M)\, M = N_{k+1}$$

ve böylece M noetherian olur. ■

Eğer R bir artinian halka ise, o zaman herhangi bir çarpımsal $R-$modül de artinian ve Sonuç III.10 dan devirli olur. M, R halkası üzerinde bir artinian çarpımsal modül olsun. Sonuç III.10 dan M devirlidir ve buradan $R/ann\,(M) \cong M$ olur. Böylece $R/ann\,(M)$ halkası artinian olur. Özel olarak, güvenilir bir artinian çarpımsal modülü olan halka artiniandır. Bununla birlikte eğer $R/ann\,(M)$ artinian ise aynı zamanda noetheriandır ve buradan M noetherian olur. O halde artinian çarpımsal modüller noetherian ve böylece sonlu uzunluğa sahip olurlar.

Bir çarpımsal modülün maksimal alt modülleri ile halkanın bazı maksimal idealleri arasında bir benzerlik kuruldu. Şimdi dikkatimizi asal ideallere çevirelim.

III.2.2 ÇARPIMSAL MODÜLLERİN ASAL ALT MODÜLLERİ

Tanım III.7 *M bir $R-$modül ve K, M nin bir alt modülü olsun. $K \neq M$ olmak üzere, her $r \in R$, $m \in M$ için $rm \in K$ iken $r \in (K : M)$ veya $m \in K$ gerçekleniyor ise K ya M nin asal alt modülü denir.*

Örnek III.4 *R nin her asal ideali, $R-$modül R nin asal alt modülüdür. P, R nin asal bir ideali olsun. $r, a \in R$ için $ra \in P$ ve $a \notin P$ olsun. P, R nin asal ideali olduğundan $r \in P \subseteq (P : R)$ olur. O halde P, $R-$modül R nin asal alt modülüdür. Tersine $R-$modül R nin bütün asal alt modülleri, R halkasının asal idealleridir. K, R nin asal bir alt modülü ve $a, b \in R$ için $ab \in K$, $a \notin K$ olsun. K asal olduğundan $b \in (K : R)$ ve*

$$bR \subseteq (K : R)\, R = K$$

olur. Dolayısıyla $b \in K$ ve K, R nin asal bir ideali olur.

Örnek III.5 *$\tau(M) \neq M$ ise, o zaman $\tau(M)$, M nin asal bir alt modülüdür. $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in \tau(M)$ ve $r \notin (\tau(M) : M)$ olsun. Bu durumda, $a(rm) = 0$ olacak biçimde $a \in R \setminus \{0\}$ vardır ve $rM \nsubseteq \tau(M)$ dir*

$$0 \neq a(rM) = (ar)\, M$$

olduğundan $r \neq 0$ olur. O halde

$$(ar)\, m = a(rm) = 0$$

ve $ar \in R \setminus \{0\}$ dır. Böylece $m \in \tau(M)$ olur.

Teorem III.11 *M bir $R-$modül ve K, M nin bir alt modülü olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) K nin asal olması için gerek ve yeter koşul $P = (K : M)$ idealinin R nin bir asal ideali ve M/K nin bükülmesiz $R/P-$modül olmasıdır.

(ii) $(K : M)$, R nin bir maksimal ideali ise K, M nin asal bir alt modülüdür.

İspat. (i) K nin, M nin bir asal alt modülü olduğunu kabul edelim. $x, y \in R$ için $xy \in (K : M)$ ve $y \notin (K : M)$ olsun. O zaman, $xyM \subseteq K$ yani $\forall m \in M$ için $xym \in K$

olur. R değişmeli bir halka olduğundan $xym = y(xm) \in K$ dir. K asal ve $y \notin (K : M)$ olduğundan $\forall m \in M$ için $xm \in K$ olur. O halde $x \in (K : M)$ ve böylece $(K : M)$, R nin bir asal ideali olur. $m+K \in \tau(M/K)$ olsun. O zaman $\exists (r+P) \in (R/P) \backslash P$ için $(r+P)(m+K) = K$ olur. Buradan $rm + K = K$ ve $r \notin P$ olur. K, M nin bir asal alt modülü olduğundan $m \in K$ olur. Böylece M/K bükülmesiz $R/P-$modüldür.

Tersine, $P = (K : M)$ idealinin, R nin bir asal ideali ve M/K nin bükülmesiz $R/P-$modül olduğunu varsayalım. $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in K$ ve $r \notin (K : M)$ olsun. O zaman $(r+P)(m+K) = K$ yani $m+K \in \tau(M/K)$ olur. M/K bükülmesiz olduğundan $m \in K$ ve böylece K, M nin bir asal alt modülü olur.

(ii) Şimdi $(K : M)$ nin, R nin bir maksimal ideali olduğunu varsayalım. $r \in R$ ve $m \in M$ için $rm \in K$ ve $r \notin (K : M)$ olsun. P, R nin bir maksimal ideali olduğundan R/P bir cisim ve M/K, $R/P-$vektör uzayı olur. $rm \in K$ olduğundan $(r+P)(m+K) = K$ ve buradan,

$$(r+P)^{-1}(r+P)(m+K) = K$$

olur. O halde $m \in K$ ve böylece K, M nin bir asal alt modülü olur. ■

Önerme III.5 *M bir $R-$modül olsun. M nin her maksimal alt modülü asaldır.*

İspat. N, M nin bir maksimal alt modülü olsun. $x \in M$ ve $r \in R$ için $rx \in N$ ve $x \notin N$ olsun. Bu durumda $N + Rx = M$ ve

$$rM = r(N + Rx) \subseteq rN + Rrx \subseteq N$$

olur. Böylece $r \in (N : M)$ ve N asaldır. ■

M bir $R-$modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. $s \in R$ için aşağıdaki kümeyi göz önüne alalım.

$$N(s) = \{x \in M : sx \in N\}$$

kümesi, M nin bir alt modülüdür ve $N \subseteq N(s)$ dir. Ayrıca N asal ise, $N(s)$ de asaldır.[1]

Yar.Teorem III.3 *P bir R halkasının asal bir ideali ve M güvenilir bir çarpımsal $R-$modül olsun. $a \in R$ ve $x \in M$ olmak üzere $ax \in PM$ olsun. O zaman $a \in P$ veya $x \in PM$ dir.*

İspat. $a \notin P$ olduğunu varsayalım.

$$K = \{r \in R : rx \in PM\}$$

olsun. $K \neq R$ olduğunu kabul edelim. O zaman $K \subseteq Q$ olacak biçimde R nin bir Q maksimal ideali vardır. $x \notin T_Q(M)$ olduğu açıktır. Teorem III.2 den M, $Q-$devirlidir, yani $(1-q)M \subseteq Rm$ olacak şekilde $m \in M$, $q \in Q$ mevcuttur. Özel olarak, $\exists s \in R$ ve $p \in P$ için $(1-q)x = sm$ ve $(1-q)ax = pm$ dir. Buradan $(as-p)m = 0$ olur.

$$[(1-q)\, ann\,(m)]\, M = 0$$

olması, M güvenilir olduğundan $(1-q)\, ann\,(m) = 0$ olmasını gerektirir ve böylece

$$(1-q)\, as = (1-q)\, p \in P$$

olur. Fakat, $P \subseteq K \subseteq Q$ ve buradan $s \in P$ ve

$$(1-q)\, x = sm \in PM$$

olur. Böylece $1-q \in K \subseteq Q$ olur, bu bir çelişkidir. O halde $K = R$ ve $x \in PM$ elde edilir. ■

$P \subseteq (PM : M)$ olduğundan, Yar.Teorem III.3 yeniden şu şekilde ifade edilebilir: Eğer M güvenilir bir çarpımsal modül ve P, R nin $M \neq PM$ koşulunu sağlayan asal bir ideali ise, o zaman PM, M nin asal alt modülüdür. Ayrıca, Yar.Teorem III.3 aşağıdaki açık sonucu verir.

Sonuç III.11 *M çarpımsal bir $R-$modül ve N, M nin has bir alt modülü olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) N asaldır.

(ii) $ann\,(M/N)$, R nin asal bir idealidir.

(iii) $ann\,(M) \subseteq P$ koşulunu sağlayan R nin P asal idealleri için $N = PM$ dir.

İspat. $(i) \implies (ii)$ Teorem III.9 dan aşikardır.

$(ii) \implies (iii)$ $P = ann\,(M/N)$, R nin asal bir ideali olsun. M çarpımsal modül olduğundan

$$PM = ann\,(M/N)\,M = N$$

olur. $ann\,(M) \subseteq P$ olduğu aşikardır.

$(iii) \implies (i)$ Önerme III.3 ten M güvenilir bir çarpımsal $R/ann\,(M)-$modüldür. $P/ann\,(M)$, $R/ann\,(M)$ nin asal bir ideali olduğundan ve Yar.Teorem III.3 den

$$(P/ann\,(M))\,M = PM = N$$

ve N asaldır. ∎

Sonuç III.12 *A, R halkasının bir ideali ve M çarpımsal bir $R-$modül olsun. P, R nin asal bir ideali ve $ann\,(M) \subseteq P$ olmak üzere,*

$$AM \subseteq PM \implies A \subseteq P \text{ veya } M = PM$$

gerçeklenir.

İspat. $AM \subseteq PM$ ve $A \nsubseteq P$ olduğunu varsayalım. Bu durumda, $a \in A \setminus P$ olacak biçimde $a \in R$ vardır. Buradan $a + ann\,(M) \notin P/ann\,(M)$ ve her $m \in M$ için

$$(a + ann\,(M))\,m = am \in AM \subseteq PM = (P/ann\,(M))\,M$$

elde edilir. M güvenilir bir $R/ann\,(M)-$modül olduğundan

$$m \in (P/ann\,(M))\,M = PM$$

ve dolayısıyla $M = PM$ olur. ∎

Önerme III.6 *M çarpımsal bir $R-$modül ve P, M nin asal bir alt modülü olsun. Bu durumda M nin N_1 ve N_2 alt modülleri için*

$$N_1 \cap N_2 \subseteq P \implies N_1 \subseteq P \text{ veya } N_2 \subseteq P$$

gerçeklenir.

İspat. $N_1 \cap N_2 \subseteq P$ ise $(N_1 \cap N_2 : M) \subseteq (P : M)$ ve buradan

$$(N_1 : M) \cap (N_2 : M) = (N_1 \cap N_2 : M) \subseteq (P : M)$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} (N_1 : M)(N_2 : M) &\subseteq (N_1 : M) \cap (N_2 : M) \\ &\subseteq (P : M) \end{aligned}$$

elde edilir. $(P : M)$, R nin asal ideali olduğundan, $(N_1 : M) \subseteq (P : M)$ veya $(N_2 : M) \subseteq (P : M)$ olur. M çarpımsal olduğundan

$$N_1 = (N_1 : M) M \subseteq (P : M) = P$$

veya

$$N_2 = (N_2 : M) M \subseteq (P : M) M = P$$

elde edilir. ■

Bu önerme, çarpımsal olmayan modüller için her zaman doğru değildir.

Örnek III.6 *$R = \mathbb{Z}$ ve $M = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ için $N_1 = \mathbb{Z}\times \{0\}$ ve $N_2 = \{0\} \times \mathbb{Z}$ olsun. Bu durumda $N_1 \cap N_2 = (0,0)$ ve $P = (0,0)$ asal olduğu halde, $N_1 \nsubseteq P$ ve $N_2 \nsubseteq P$ dir.*

Önerme III.7 *M çarpımsal bir $R-$modül ve $\tau(M) \neq M$ olsun. I ve J, R nin iki ideali olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $IM = JM$ olması için gerek ve yeter koşul $I = J$ olmasıdır.

(ii) $(IM : M) = I$ dır.

İspat. (i) $x \in M \diagdown \tau(M)$ olsun. Bu durumda $Rx = KM$ olacak biçimde R nin bir K ideali vardır. Buradan

$$\begin{aligned} Ix &= IRx = IKM = KIM = KJM \\ &= JKM = JRx = Jx \end{aligned}$$

olur. O halde her bir $a \in I$ için, $ax = \sum_{i=1}^{n} b_i x$ olacak biçimde $b_i \in J$ vardır. $\left(a - \sum_{i=1}^{n} b_i\right) x = 0$ ve $x \notin \tau(M)$ olduğundan $a - \sum_{i=1}^{n} b_i = 0$ elde edilir. Böylece $a = \sum_{i=1}^{n} b_i \in J$ ve $I \subseteq J$ olur. Benzer şekilde $J \subseteq I$ olduğu da görünür.

(ii) M bir çarpımsal modül ve $IM = (IM : M)\, M$ olduğundan (i) den $I = (IM : M)$ elde edilir. ■

Yar.Teorem III.4 *R bir tamlık bölgesi ve M çarpımsal bir $R-$modül olsun. Bu durumda $\tau(M) \neq M$ olması için gerek ve yeter koşul M nin güvenilir olmasıdır.*

İspat. $M = 0$ ise $\tau(M) = M$ ve $ann(M) = R \neq 0$ olur. O halde $\tau(M) = M \neq 0$ olduğunu varsayalım. $0 \neq m \in \tau(M)$ olsun. Bu durumda $rm = 0$ olacak biçimde $0 \neq r \in R$ vardır. M çarpımsal modül olduğundan $Rm = IM$ olacak biçimde R nin sıfırdan farklı bir I ideali vardır. Böylece $0 = Rrm = rIM$. R tamlık bölgesi olduğundan $0 \neq r' \in I$ için $0 \neq rr' \in ann(M)$ olur.

Tersine, $ann(M) \neq 0$ ise $aM = 0$ olacak biçimde $0 \neq a \in R$ vardır. O halde $\tau(M) = M$ sağlanır.[9] ■

III.3 SONLU ÜRETİLMİŞ MODÜLLER

III.3.1 NOETHERİAN MODÜLLER

Önerme III.8 *M bir $R-$modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Eğer $N + sM$ ve $N(s)$ modüllerinin ikisinin de sonlu üretilmiş olmasını sağlayan $s \in R$ varsa, o zaman N de sonlu üretilmiştir.[1]*

Önerme III.9 *M sonlu üretilmiş bir $R-$modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Eğer M aşağıdaki $(^*)$ koşulunu sağlıyorsa, noetheriandır.*

$(^*)$ $N + Rx$ sonlu üretilmiş olacak biçimde $x \in M$ varsa, o zaman N alt modülü de sonlu üretilmiştir.[1]

Önerme III.10 *M sonlu üretilmiş bir $R-$modül ve N, M nin asal bir alt modülü olsun. Eğer M aşağıdaki $(^*p)$ koşulunu sağlıyorsa, noetheriandır.*

$(^*p)$ $N + Rx$ sonlu üretilmiş olacak biçimde $x \in M$ varsa, o zaman N asal alt modülü de sonlu üretilmiştir.[1]

Teorem III.12 *M bir $R-$modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) M noetheriandır.

(ii) M sonlu üretilmiştir ve $(^*)$ koşulunu sağlar.

(iii) M sonlu üretilmiştir ve $(^*p)$ koşulunu sağlar.

(iv) M ve M nin her asal alt modülü sonlu üretilmiştir.[1]

Sonuç III.13 *R halkasının noetherian olması için gerek ve yeter koşul R nin her asal idealinin sonlu üretilmiş olmasıdır. (Cohen Teoremi)[1]*

III.3.2 SONLU ÜRETİLMİŞ ÇARPIMSAL MODÜLLER

Teorem III.13 *R birimli ve değişmeli bir halka ve M güvenilir bir çarpımsal $R-$modül olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) M sonlu üretilmiştir.

(ii) A ve B, R nin $AM \subseteq BM$ koşulunu sağlayan idealleri ise, o zaman $A \subseteq B$ gerçeklenir.

(iii) M nin her bir N alt modülü için $N = IM$ olacak biçimde R nin tek bir I ideali vardır.

(iv) R nin herhangi bir A has ideali için $M \neq AM$ dir.

(v) R nin herhangi bir P maksimal ideali için $M \neq PM$ dir.

İspat. $(i) \implies (ii)$ M nin sonlu üretilmiş olduğunu varsayalım. A ve B, R nin $AM \subseteq BM$ koşulunu sağlayan idealleri olsun. $a \in A$ ve

$$K = \{r \in R : ra \in B\}$$

olsun. $K \neq R$ olduğunu kabul edelim. O zaman $K \subseteq P$ olacak biçimde R nin bir P maksimal ideali mevcuttur. $M = PM$ olduğunu varsayalım. M sonlu üretilmiş olduğundan, genel determinant argümanından, $(1-p)M = 0$ olacak biçimde $p \in P$ vardır. Buradan $p = 1$ olur, bu bir çelişkidir. O halde $M \neq PM$ olur ve Teorem III.2 den $(1-q)M \subseteq Rm$ olacak biçimde $m \in M$ ve $q \in P$ elemanları mevcuttur. Özel olarak,

$$(1-q)\,am \in (1-q)\,BM = B\,(1-q)\,M \subseteq Bm$$

ve böylece

$$[(1-q)\,a - b]\,m = 0$$

olacak biçimde $b \in B$ vardır. Fakat,

$$(1-q)\, ann\,(m) \subseteq ann\,(M) = 0$$

ve buradan

$$(1-q)\,[(1-q)\,a - b] = 0$$

olur. Bu durum $(1-q)^2\, a \in B$ ve böylece $(1-q)^2 \in K \subseteq P$ olmasını gerektirir. Bu bir çelişkidir. Böylece $K = R$ ve $a \in B$ elde edilir. Buradan $A \subseteq B$ gerçeklenir.

$(ii) \implies (iii)$ $N = IM = JM$ ise (ii) den $I = J$ olur.

$(iii) \implies (iv)$ $N = AM = RM$ ise (iii) den $A = R$ olur. O halde R nin herhangi bir A has ideali için $M \neq AM$ dir.

$(iv) \implies (v)$ Açıktır.

$(v) \implies (i)$ R nin her P maksimal ideali için $M \neq PM$ olduğunu varsayalım. Q, R nin bir maksimal ideali olsun. $m \in M$, $m \notin QM$ olsun. M çarpımsal olduğundan

$$Rm = (ann\,(M/Rm))\, M$$

dir. $ann\,(M/Rm) \subseteq Q$ ise

$$Rm = (ann\,(M/Rm))\, M \subseteq QM$$

olur. Bu durum $m \notin QM$ olması ile çelişir. O halde $ann\,(M/Rm) \nsubseteq Q$ olmalıdır.

$$I = \sum_{m \in M} ann\,(M/Rm)$$

ve $I \subset R$ olsun. Bu durumda $I \subseteq P$ olacak biçimde R nin bir P maksimal ideali vardır. O halde her $m \in M$ için $ann\,(M/Rm) \subseteq P$ olur. Bu bir çelişkidir. Böylece

$$R = \sum_{m \in M} ann\,(M/Rm)$$

elde edilir. O halde $1 = r_1 + \ldots r_n$ olacak biçimde bir pozitif n tam sayısı, $m_i \in M$ ve $r_i \in ann\,(M/Rm_i)$ elemanları mevcuttur.

$$ann\,(M/Rm_i)\, M = Rm_i$$

olduğundan her $x \in M$ için,

$$x = r_1 x + \ldots r_n x \in Rm_1 + \ldots Rm_n$$

olur ve buradan

$$M = Rm_1 + \ldots Rm_n$$

elde edilir. ■

Sonuç III.14 *A ve B, R halkasının iki ideali ve M sonlu üretilmiş bir çarpımsal $R-$modül olsun. Bu durumda $AM \subseteq BM$ olması için gerek ve yeter koşul $A \subseteq B + ann(M)$ olmasıdır.*

İspat. Yeterlilik açıktır. Tersine, $AM \subseteq BM$ olduğunu varsayalım. $R' = R \diagup (ann(M))$,

$$A' = (A + ann(M)) \diagup (ann(M))$$

ve

$$B' = (B + ann(M)) \diagup (ann(M))$$

olsun. Bu durumda $A'M \subseteq B'M$ olur. M güvenilir bir $R'-$modül olduğundan Teorem 3.1 den $A' \subseteq B'$ gerçeklenir. Böylece $A \subseteq B + ann(M)$ olur. ■

R halkasının bütün asal idealleri sonlu üretilmiş ise, Cohen Teoremi'nden R noetheriandır. Fakat M bir $R-$modül iken, M nin her asal alt modülünün sonlu üretilmiş olması, M nin noetherian olmasını gerektirmez.

Örnek III.7 *$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismini $\mathbb{Z}-$modül olarak düşünelim. N, $\mathbb{Q}$ nun asal bir alt modülü ve $P = (N : \mathbb{Q})$ olsun. Bu durumda P, $\mathbb{Z}$ nin asal bir ideali ve $P\mathbb{Q} \subseteq N$ olur. $N \neq \mathbb{Q}$ olduğundan $P = (0)$ dır. $N = (0)$ olduğunu gösterelim. $N \neq (0)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $ab^{-1} \in N$ olacak biçimde sıfırdan farklı a ve b tam sayıları mevcuttur. $a \notin (N : \mathbb{Q}) = (0)$ ve N asal olduğundan $b^{-1} \in N$ olur. Buradan $1 \in N$ ve $\mathbb{Z} \subseteq N$ elde edilir. $N \neq \mathbb{Q}$ olduğundan $\alpha\beta^{-1} \notin N$ olacak biçimde sıfırdan farklı α*

ve β tam sayıları vardır. Buradan $\beta\alpha\beta^{-1} = \alpha \in \mathbb{Z} \subseteq N$ olur, bu durum N nin asal olmasıyla çelişir. O halde $N = (0)$ olur.

Böylece $\mathbb{Q}$ nun tek asal ideali (0) dır fakat $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ üzerinde sonlu üretilmemiştir. Dolayısıyla $\mathbb{Q}$ noetherian değildir.

Teorem III.14 *R bir halka ve M çarpımsal bir $R-$modül olsun. M nin her asal alt modülü sonlu üretilmiş ise M noetheriandır.*

İspat. $M \neq \{0\}$ olduğunu kabul edebiliriz. M çarpımsal olduğundan, Teorem III.5 ten M nin bir L maksimal ideali vardır. L maksimal olduğundan $M = L + Rx$ olacak biçimde bir $x \in M$ vardır. Her maksimal alt modül aynı zamanda asal olduğundan L sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla M de sonlu üretilmiş olur. M nin noetherian olmadığını kabul edelim.

$$S = \{N \leq M : \ N \text{ } sonlu \text{ } üretilmemistir\}$$

olsun. M noetherian olmadığından $S \neq \emptyset$ ve $M \notin S$ dir. S yi kapsama bağıntısına göre sıraladığımızda $K = \bigcup N$, S nin bir üst sınırı olur. Zorn Lemması'na göre, S nin bir maksimal elemanı vardır, bu maksimal elemana N diyelim. M çarpımsal modül olduğundan, $I = (N : M)$ için $N = IM$ dir. I nın asal olduğunu gösterelim. $I \neq R$ olduğu açıktır. $a, b \in R$ için $a \notin I, b \notin I$ ve $ab \in I$ olsun. Bu durumda $aM \nsubseteq N$ ve $bM \nsubseteq N$ dir. Özel olarak $N + aM$ sonlu üretilmiştir. Bu yüzden,

$$N + aM = \sum_{i=1}^{n} R\left(t_i + as_i\right)$$

olacak biçimde $t_i \in N$ ve $s_i \in M$ vardır.

$$K = \{m \in M : am \in N\}$$

için $abm \in N$ olduğundan $N + bM \subseteq K$ dir ve K sonlu üretilmiştir. O halde

$$K = \sum_{j=1}^{m} Rk_j$$

olacak biçimde $k_j \in K$ vardır.

$$N = \langle t_1, \ldots t_n, ak_1, \ldots ak_m \rangle$$

olduğunu gösterelim.

$$\langle t_1, \ldots t_n, ak_1, \ldots ak_m \rangle \subseteq N$$

olduğu açıktır. Tersine $n \in N$ olsun.

$$N \subsetneqq N + aM = \sum_{i=1}^{n} R\left(t_i + as_i\right)$$

olduğundan

$$n = \sum_{i=1}^{n} r_i\left(t_i + as_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i t_i + \sum_{i=1}^{n} a\left(r_i s_i\right)$$

ve buradan

$$n - \sum_{i=1}^{n} r_i t_i = a \sum_{i=1}^{n} \left(r_i s_i\right) \in N$$

olur. Bu yüzden $\sum_{i=1}^{n}\left(r_i s_i\right) \in K$ ve $n \in \langle t_1, \ldots t_n, ak_1, \ldots ak_m \rangle$ dir. Böylece N, $\{t_1, \ldots t_n, ak_1, \ldots ak_m\}$ ile üretilmiş olur ve çelişki elde edilir. O halde, I asal idealdir ve $ann_R\left(M\right) \subseteq I$ olduğundan $N = IM$ asal modüldür. Hipotezden N sonlu üretilmiş olur ve yine çelişki elde edilir. Böylece M noetherian olur. ■

Tanım III.8 *M sıfırdan farklı bir $R-$modül ve N, M nin bir has alt modülü olsun. O zaman N yi kapsayan M nin bütün asal alt modüllerinin kesişimi, N nin $M-radikali$ olarak tanımlanır ve $M - rad\ N$ ile gösterilir.*

Eğer A, R halkasının bir ideali ise, o zaman A nın $M-$radikali (A, $R-$modül R nin bir alt modülü olarak düşünülür), A yı kapsayan bütün asal ideallerin kesişimidir ve bir n pozitif tam sayısı için $r^n \in A$ koşulunu sağlayan bütün $r \in R$ elemanlarından oluşur ve $\sqrt{A}$ ile gösterilir.

Teorem III.15 *M çarpımsal bir $R-$modül, N, M nin has bir alt modülü ve $A = ann\left(M/N\right)$ olsun. O zaman*

$$M - rad\ N = \left(\sqrt{A}\right) M$$

gerçeklenir.

İspat. $\widetilde{P}$, $A \subseteq P$ koşulunu sağlayan R nin bütün P asal ideallerinin topluluğunu göstersin. Eğer $B = \sqrt{A}$ ise, o zaman $B = \bigcap_{P \in \widetilde{P}} P$ ve Teorem III.3 ten

$$BM = \bigcap_{P \in \widetilde{P}} (PM)$$

olur. $P \in \widetilde{P}$ olsun. Eğer $M = PM$ ise, $M - rad\ N \subseteq PM$ dir. $M \neq PM$ ise, o zaman $N = AM \subseteq PM$ ve buradan $M - rad\ N \subseteq PM$ olur. Böylece $M - rad\ N \subseteq BM$ elde edilir.

Tersine, K, N yi kapsayan M nin asal bir alt modülü olsun. Sonuç III.11 den $ann\,(M) \subseteq Q$ ve $K = QM$ olacak biçimde R nin asal bir Q ideali mevcuttur. Q asal ve

$$AM = N \subseteq K = QM \neq M$$

olduğundan Sonuç III.12 den $A \subseteq Q$ ve dolayısıyla $B \subseteq Q$ olur. O halde $BM \subseteq K$ ve buradan $BM \subseteq M - rad\ N$ elde edilir. Böylece $M - rad\ N = BM$ sağlanır. ■

Önerme III.11 *M bir $R-$modül ve N, M nin bir alt modülü olsun.*

$$H = \left\{ m \in M : (Rm : M)^k\, m \subseteq N, k \in \mathbb{Z}^+ \right\}$$

olsun. M çarpımsal modül ise H, M nin bir alt modülüdür. Eğer M sonlu üretilmiş ise $H = M - rad\ N$ dir.

İspat. $m_1, m_2 \in H$ olsun. Bu durumda

$$(Rm_1 : M)^{k_1}\, m_1 \subseteq N \text{ ve } (Rm_2 : M)^{k_2}\, m_2 \subseteq N$$

olacak biçimde k_1, k_2 pozitif tam sayıları mevcuttur. Buradan

$$(Rm_1 : M)^{k_1}\, (Rm_1 : M)\, M \subseteq N$$

ve

$$(Rm_1 : M)^{k_1+1} \subseteq \left((Rm_1 : M)^{k_1+1} M : M\right) \subseteq (N : M)$$

olur. Benzer biçimde

$$(Rm_2 : M)^{k_2+1} \subseteq (N : M)$$

elde edilir. $k = k_1 + k_2 + 2$ olsun. Bu durumda

$$[(Rm_1 : M) + (Rm_2 : M)]^k \subseteq (N : M)$$

ve böylece

$$[(Rm_1 : M) + (Rm_2 : M)]^k M \subseteq (N : M) M = N$$

olur. Buradan,

$$\begin{aligned} & [(Rm_1 : M) + (Rm_2 : M)]^{k-1} (Rm_1 + Rm_2) \\ = \; & [(Rm_1 : M) + (Rm_2 : M)]^{k-1} [(Rm_1 : M) + (Rm_2 : M)] M \subseteq N \end{aligned}$$

ve böylece

$$[(Rm_1 : M) + (Rm_2 : M)]^{k-1} ((Rm_1 + Rm_2) : M) \subseteq (N : M)$$

olur. Benzer biçimde

$$[(Rm_1 : M) + (Rm_2 : M)]^{k-2} ((Rm_1 + Rm_2) : M)^2 \subseteq (N : M)$$

ve

$$((Rm_1 + Rm_2) : M)^k \subseteq (N : M)$$

elde edilir. O halde

$$(R(m_1 + m_2) : M)^k \subseteq ((Rm_1 + Rm_2) : M)^k \subseteq (N : M)$$

olur. Buradan,

$$(R(m_1 + m_2) : M)^k (m_1 + m_2) \subseteq (R(m_1 + m_2) : M)^k M \subseteq (N : M) M = N$$

ve böylece $m_1 + m_2 \in H$ elde edilir. $m \in H$ ve $r \in R$ olsun. Bu durumda

$$(Rm : M)^k m \subseteq N$$

olacak biçimde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan

$$(Rrm : M)^k rm \subseteq (Rm : M)^k m \subseteq N$$

ve $rm \in H$ olur. Böylece H, M nin bir alt modülüdür.

Şimdi M nin sonlu üretilmiş olduğunu kabul edelim. $m \in H$ olsun. Bu durumda $(Rm : M)^k m \subseteq N$ olacak biçimde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan

$$(Rm : M)^k (Rm : M) M \subseteq N$$

ve

$$(Rm : M)^{k+1} \subseteq \left((Rm : M)^{k+1} M : M\right) \subseteq (N : M)$$

olur. O halde $(Rm : M) \subseteq \sqrt{(N : M)}$ ve Teorem III.15 ten

$$m \in Rm = (Rm : M) M \subseteq \sqrt{(N : M)}M = M - rad\ N$$

elde edilir. Böylece $H \subseteq M - rad\ N$ dir.

Tersine, $m \in M - rad\ N = \sqrt{(N : M)}M$ olsun. Bu durumda $Rm \subseteq \sqrt{(N : M)}M$ olur.

$$\left(\sqrt{(N : M)}M : M\right) M = \sqrt{(N : M)}M$$

olduğundan

$$\left(\sqrt{(N : M)}M : M\right) = \sqrt{(N : M)} + ann\,(M)$$

ve böylece

$$(Rm : M) \subseteq \left(\sqrt{(N : M)}M : M\right) = \sqrt{(N : M)} + ann\,(M) = \sqrt{(N : M)}$$

elde edilir. O halde $(Rm : M)^k \subseteq (N : M)$ olacak biçimde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan

$$(Rm : M)^k m \subseteq (Rm : M)^k M \subseteq (N : M) M = N$$

ve $m \in H$ olur. Böylece $H = M - rad\ N$ elde edilir. ■

Tanım III.9 *M bir $R-$modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Eğer $M-rad\ N = N$ ise N ye M nin bir radikal alt modülü denir. I, R nin bir ideali olmak üzere $\sqrt{I} = I$ ise, I ya R nin bir radikal ideali denir.*

Önerme III.12 *M bir $R-$modül ve N, M nin bir radikal alt modülü olsun. Bu durumda $(N : M)$, R nin bir radikal idealidir.*

İspat. $M-rad\ N$, N yi kapsayan asal alt modüllerin kesişimi olduğundan $N = \bigcap P_i$ olur. A_i, $(N : M)$ yi kapsayan asal idealleri göstersin. Bu durumda,

$$\begin{aligned}(N : M) &= \left(\bigcap P_i : M\right) = \bigcap (P_i : M) \supseteq \bigcap A_i \\ &= \sqrt{(N : M)} \supseteq (N : M)\end{aligned}$$

ve $\sqrt{(N : M)} = (N : M)$ elde edilir. Böylece $(N : M)$, R nin bir radikal idealidir. ■

Önermenin tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ve $N = \langle (4, 0) \rangle$ olsun. Bu durumda

$$[N : M] = 0 = \sqrt{(N : M)}$$

fakat

$$M - rad\ N = \langle (2, 0) \rangle \neq N$$

dir.[10]

Önerme III.13 *M bir çarpımsal $R-$modül, K ve N, M nin iki ideali olsun. Bu durumda*

$$\sqrt{((K \cap N) : M)} = \sqrt{(K : M)} \cap \sqrt{(N : M)}$$

gerçeklenir.

İspat. $a \in \sqrt{((K \cap N) : M)}$ olsun. Bu durumda $a^n \in ((K \cap N) : M)$ olacak biçimde n pozitif tam sayısı vardır. Buradan

$$a^n M \subseteq ((K \cap N) : M)\, M = K \cap N \subseteq K$$

ve $a^n M \subseteq N$ olur. O halde $a^n \in (K : M)$ ve $a^n \in (N : M)$ dir. Böylece

$$a \in \sqrt{(K : M)} \cap \sqrt{(N : M)}$$

elde edilir.

Tersine,

$$r \in \sqrt{(K : M)} \cap \sqrt{(N : M)}$$

olsun. Bu durumda $r^k \in (K : M)$ ve $r^l \in (N : M)$ olacak biçimde k ve l pozitif tam sayıları vardır. O halde $r^k M \subseteq K$ ve $r^l M \subseteq N$ olur. $n = \max\{k, l\}$ için $r^n M \subseteq K \cap N$ ve $r^n \in ((K \cap N) : M)$ elde edilir. Böylece $r \in \sqrt{((K \cap N) : M)}$ ve

$$\sqrt{((K \cap N) : M)} = \sqrt{(K : M)} \cap \sqrt{(N : M)}$$

gerçeklenir. ∎

Teorem III.16 *M sonlu üretilmiş çarpımsal bir $R-$modül ve I, R nin bir ideali olsun. K ve N, M nin iki alt modülü olmak üzere aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.*

(i) $(N : M)$, R nin bir radikal ideali ise N, M nin bir radikal alt modülüdür.

(ii) $I + ann\,(M)$ nin, R nin bir radikal ideali olması için gerek ve yeter koşul IM nin, M nin bir radikal alt modülü olmasıdır.

(iii) $M - rad\ (K \cap N) = M - rad\ K \cap M - rad\ N$ dir.

İspat. (i) M bir çarpımsal modül ve $(N : M)$, R nin bir radikal ideali olsun. Teorem III.15 ten

$$N = (N : M)\,M = \sqrt{(N : M)}M = M - rad\ N$$

ve böylece N, M nin bir radikal alt modülü olur.

(ii) IM, M nin bir radikal alt modülü olsun. Sırasıyla Teorem III.15 ve Önerme II.4 ten,

$$\begin{aligned} (I + ann\,(M))\,M &= IM = M - rad\ \ (IM) = \sqrt{(IM : M)}M \\ &= \sqrt{I + ann\,(M)}M \end{aligned}$$

ve Sonuç III.14 ten

$$I + ann\,(M) = \sqrt{I + ann\,(M)} + ann\,(M)$$

olur.

$$ann\,(M) \subseteq \sqrt{ann\,(M)} \subseteq \sqrt{I + ann\,(M)}$$

olduğundan

$$I + ann\,(M) = \sqrt{I + ann\,(M)}$$

elde edilir.

Tersine, $I + ann\,(M)$, R nin bir radikal ideali olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} IM &= (I + ann\,(M))\,M = \sqrt{I + ann\,(M)}M \\ &= \sqrt{(IM : M)}M = M - rad\ \ (IM) \end{aligned}$$

ve böylece IM, M nin bir radikal alt modülü olur.

(iii) Sırasıyla Teorem III.15, Sonuç III.14 ve Sonuç III.5 ten

$$\begin{aligned} M - rad\ \ (K \cap N) &= \sqrt{((K \cap N) : M)}M = \left(\sqrt{(K : M)} \cap \sqrt{(N : M)}\right) M \\ &= \left[\left(\sqrt{(K : M)} + ann\,(M)\right) \cap \left(\sqrt{(N : M)} + ann\,(M)\right)\right] M \\ &= \sqrt{(K : M)}M \cap \sqrt{(N : M)}M = M - rad\ K \cap M - rad\ N \end{aligned}$$

elde edilir ve (iii) sağlanır. ■

III.4 ÇARPIMSAL MODÜLLERİN ALT MODÜLLERİNİN ÇARPIMI

Tanım III.10 *M bir $R-$modül, $m \in M$ ve N, M nin bir alt modülü olsun.*

(i) $N = IM$ olacak biçimde R nin bir I ideali varsa, I idealine N nin bir *sunuş ideali* (*presentation*) denir. N nin bütün sunuş ideallerinin kümesini $\Pr(N)$ ile göstereceğiz.

(ii) $Rm = AM$ olacak biçimde R'nin bir A ideali varsa, A'ya m'nin bir *sunuş ideali* denir. m'nin bütün sunuş ideallerinin kümesini $\Pr(m)$ ile göstereceğiz. $\Pr(m) = \Pr(Rm)$ dir.

M nin her alt modülünün sunuş idealinin var olması gerekmez. Örneğin, V keyfi bir $\Bbbk$ cismi üzerinde vektör uzayı ise, V nin herhangi bir has W alt uzayının sunuş ideali yoktur. Çünkü, $\Bbbk$ cisminin idealleri yalnızca 0 ve $\Bbbk$ dir. $W \neq 0V = 0$ ve $W \neq \Bbbk V = V$ olduğundan W nın sunuş ideali yoktur.

Önerme III.14 *M bir $R-$modül olsun. Bu durumda M nin her alt modülünün bir sunuş idealine sahip olması için gerek ve yeter koşul M nin çarpımsal modül olmasıdır.*

İspat. Yeterlilik açıktır. Tersine M bir çarpımsal modül ve N, M nin herhangi bir alt modülü ise Yar.Teorem III.1 den $N = (N : M)\,M$ dir. Böylece her N alt modülü için $(N : M)$ bir sunuş idealidir. ■

Önerme III.15 *$L(R)$ ve $L(M)$ sırasıyla R nin ideallerinin ve M nin alt modüllerinin latisini göstersin. Bu durumda*

$$I \sim J \iff IM = JM$$

ile tanımlanan bağıntı, bir denklik bağıntısıdır.

İspat. (i) $I, J, K \in L(R)$ olmak üzere, $I \sim I \iff IM = IM$, yansıma özelliği sağlanır.

(ii) $I \sim J \iff IM = JM \iff JM = IM \iff J \sim I$, simetri özelliği sağlanır.

(iii) $I \sim J \iff IM = JM$ ve $J \sim K \iff JM = KM$ iken, $IM = KM \iff I \sim K$, geçişme özelliği de sağlandığından $L(R)$ üzerinde tanımlanan $\sim$ bağıntısı, bir denklik bağıntısıdır. ■

$I \in L(R)$ nin denklik sınıfını $[I]$ ile göstereceğiz.

Teorem III.17 *M güvenilir bir çarpımsal $R-$modül olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.*

(i) M sonlu üretilmiştir.

(ii) $\sim$ bağıntısının her bir denklik sınıfı tek bir elemandan oluşur.

(iii) $\varphi(I) = IM$ ile tanımlanan $\varphi : L(R) \longrightarrow L(M)$ dönüşümü bir latis izomorfizmasıdır.

(iv) R nin her has I ideali için $[I] = \{I\}$ dır.

(v) R nin hehangi bir P maksimal ideali için $[P] = \{P\}$ dir.

İspat. $(i) \implies (ii)$. M nin sonlu üretilmiş olduğunu varsayalım. Teorem III.13 ten $N = IM$ olacak biçimde R nin tek bir I ideali vardır. Böylece

$$I \sim J \iff IM = JM$$

ile tanımlanan $\sim$ bağıntısının her bir denklik sınıfı tek bir elemandan oluşur.

$(ii) \implies (iii)$. Teorem III.13 ten, φ bijektif ve sırayı koruyan bir dönüşümdür.

$$(I + J) M = IM + JM$$

en küçük üst sınır ve M güvenilir olduğundan

$$(I \cap J) M = IM \cap JM$$

en büyük alt sınırdır. Böylece $\varphi : L(R) \longrightarrow L(M)$ dönüşümü bir latis izomorfizmasıdır.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$. Teorem III.13 ten açıktır.

$(iv) \Longrightarrow (v)$. Açıktır.

$(v) \Longrightarrow (i)$. R nin hehangi bir P maksimal ideali için $[P] = \{P\}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $N = PM \neq M$ olacak biçimde M nin bir N alt modülü vardır. Teorem III.13 ten M sonlu üretilmiştir. ∎

Tanım III.11 *I , J, A ve B, R halkasının idealleri ve M bir $R-$modül olsun.*

(i) N ve K, M nin $N = IM$ ve $K = JM$ koşulunu sağlayan iki alt modülü olmak üzere IJM ile tanımlanan çarpıma *N ve K nın çarpımı* denir. NK ile gösterilir.

(ii) m ve m', M nin $Rm = AM$ ve $Rm' = BM$ koşulunu sağlayan iki elemanı olmak üzere ABM ile tanımlanan çarpıma *m ve m' nün çarpımı* denir. mm' ile gösterilir.

NK, M nin bir alt modülüdür. Çünkü, $C = IJ$, R nin bir idealidir ve $NK = CM$, M nin bir alt modülüdür. Ayrıca $NK \subseteq N \cap K$ dır.

Teorem III.18 *I ve J, R halkasının iki ideali ve M bir $R-$modül olsun. N ve K, M nin $N = IM$ ve $K = JM$ koşulunu sağlayan iki alt modülü olmak üzere "N ve K nin çarpımı", N ve K nin sunuş ideallerinden bağımsızdır.*

İspat. I_1 ve I_2, N nin iki sunuş ideali, J_1 ve J_2, K nin iki tanıtma ideali olsun. Bu durumda, $N = I_1M = I_2M$ ve $K = J_1M = J_2M$ olur. $x \in NK$ olsun. $r \in I_1, s \in J_1$ ve $m \in M$ olmak üzere $x = \sum rsm$ olarak yazılabilir. $J_1M = J_2M$ olduğundan, $r_i \in J_2, m_i \in M$ için

$$sm = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i$$

ve buradan

$$rsm = \sum_{i=1}^{n} r_i \left(rm_i \right)$$

elde edilir. $rm_i \in I_1M = I_2M$ olduğundan, $t_{ij} \in I_2, m'_{ij} \in M$ için

$$rm_i = \sum_{j=1}^{k} t_{ij} m'_{ij}$$

yazılabilir. Buradan,

$$rsm = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} r_i t_{ij} m'_{ij}$$

ve $rsm \in I_2J_2M$ olur. Böylece

$$I_1J_1M \subseteq I_2J_2M$$

elde edilir. Benzer biçimde

$$I_2J_2M \subseteq I_1J_1M$$

olduğu gösterilir ve

$$I_1J_1M = I_2J_2M$$

olur. ■

Önerme III.16 *M bir çarpımsal $R-$modül olsun. N, K ve L, M nin alt modülleri olmak üzere aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.*

(i) $N(K+L) = NK + NL = KN + LN = (K+L)N$, yani çarpımın toplama üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği vardır.

(ii) $(K+L)(K \cap L) \subseteq KL$ dir.

(iii) $K + L = M$ ise $K \cap L = KL$ dir.

İspat. (i) A, B ve C, R nin üç ideali olmak üzere, $N = AM$, $K = BM$ ve $L = CM$ olsun.

$$\left(\sum_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \right) M = \sum_{\lambda \in \Lambda} \left(I_\lambda M \right)$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} N(K+L) &= AM(BM+CM) = AM(B+C)M = A(B+C)M \\ &= (AB+AC)M = ABM + ACM = NK + NL \end{aligned}$$

olur.

(ii) (i) den

$$(K+L)(K\cap L) = K(K\cap L) + L(K\cap L) \subseteq KL$$

gerçeklenir ve böylece (ii) sağlanır.

(iii) $KL \subseteq K\cap L$ olduğu açıktır. (ii) den

$$(K+L)(K\cap L) = M(K\cap L) = K\cap L \subseteq KL$$

dir. Böylece $K\cap L = KL$ elde edilir. ■

Yar.Teorem III.5 *M çarpımsal bir $R-$modül olsun. N ve K, M nin iki alt modülü olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

(i) $ann(M/N)\,ann(M/K)$ ve $ann(M/NK)$ idealleri NK nin sunuş idealleridir.

(ii) M sonlu üretilmiş ise

$$ann(M/N)\,ann(M/K) = ann(M/NK)$$

gerçeklenir.

İspat. (i) Yar.Teorem III.1 ve Teorem III.18 den $ann(M/N)$ ve $ann(M/K)$, sırasıyla N ve K nin sunuş idealleridir. Tanım III.12 den

$$NK = [ann(M/N)\,ann(M/K)]\,M$$

ve böylece $ann(M/N)\,ann(M/K)$, NK nin bir sunuş idealidir. Yar.Teorem III.1 den $NK = ann(M/NK)$ ve $ann(M/NK)$ ideali de NK nin bir sunuş ideali olur.

(ii) M sonlu üretilmiş olsun.

$$NK = [ann\,(M\diagup N)\,ann\,(M\diagup K)]\,M = ann\,(M\diagup NK)\,M$$

olduğundan ve Teorem III.13 ten

$$ann\,(M\diagup N)\,ann\,(M\diagup K) = ann\,(M\diagup NK)$$

sağlanır. ■

Tanım III.12 *M çarpımsal bir $R-$modül, $m \in M$ ve N, M nin bir alt modülü olsun. Bu durumda,*

(i) N^k, N alt modülünün k kez çarpımı olmak üzere, $N^k = 0$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ varsa N ye *nilpotent* denir.

(ii) $m^l = 0$ olacak biçimde bir l pozitif tam sayısı varsa m elemanına *nilpotent* denir. M nin bütün nilpotent elemanlarının kümesi N_M ile gösterilir.

Teorem III.19 *M bir çarpımsal R-modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Bu durumda N nin nilpotent olması için gerek ve yeter koşul N nin her I sunuş ideali için $I^k \subseteq ann\,(M)$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ nın var olmasıdır.*

İspat. I, N nin bir sunuş ideali olsun. N nin nilpotent olduğunu varsayalım. Bu durumda $N^k = 0$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $N^k = I^k M = 0$ ve $I^k \subseteq ann\,(M)$ elde edilir.

Tersine, N nin her I sunuş ideali için $I^k \subseteq ann\,(M)$ olacak biçimde bir $k \in \mathbb{Z}^+$ nın var olduğunu kabul edelim. Bu halde,

$$N^k = I^k M \subseteq ann\,(M)\,M = 0$$

ve böylece N nilpotent olur. ■

Sonuç III.15 *M güvenilir bir çarpımsal $R-$modül ve N, M nin bir alt modülü olsun. Bu durumda N nin nilpotent olması için gerek ve yeter koşul N nin her I sunuş idealinin nilpotent ideal olmasıdır.*

İspat. $ann\,(M) = 0$ olduğundan, Teorem III.19 da $I^k = 0$ olur. ∎

Teorem III.20 *M bir çarpımsal modül olsun. Bu durumda N_M, M nin alt modülüdür ve M/N_M nin sıfırdan farklı nilpotent elemanı yoktur.*

İspat. $x, y \in N_M$ olsun. Bu halde $x^m = 0$ ve $y^n = 0$ olacak biçimde $m, n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. I ve J sırasıyla x ve y nin sunuş ideali olsun. Bu durumda $x^m = I^m M = 0$ ve $y^n = J^n M = 0$ olur. Buradan,

$$R\,(x+y) \subseteq Rx + Ry = IM + JM = (I+J)\,M$$

elde edilir. $l = m+n$ olsun. O zaman,

$$R\,(x+y)^{m+n} \subseteq (I+J)^{m+n}\,M = \left(\sum_{i=0}^{l}\binom{l}{i} I^i J^{l-i}\right) M = 0$$

ve böylece $x + y \in N_M$ olur. $m \in N_M$ ve $r \in R$ olsun. m nin bir sunuş ideali I olsun. Bu halde

$$m^k = I^k M = 0$$

olur.

$$Rrm = (rI)\,M \subseteq IM$$

olduğundan

$$(rm)^k = (rI)^k\,M \subseteq I^k M = 0$$

ve böylece $rm \in N_M$ elde edilir. O halde N_M, M nin alt modülü olur.

Şimdi $\overline{x} = x + N_M$, M/N_M nin nilpotent elemanı olsun. Bu durumda

$$(\overline{x})^n = x^n + N_M = \overline{0}$$

olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan $x^n \in N_M$ ve $(x^n)^k = 0$ olacak biçimde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece $x \in N_M$ ve $\overline{x} = 0$ olur. ∎

Önerme III.17 *M çarpımsal bir $R-$modül olsun. Bu durumda*

$$M - rad\ \ (N_1N_2) = M - rad\ \ (N_1 \cap N_2) \tag{III.17}$$

gerçeklenir.

İspat. $N_1N_2 \subseteq N_1 \cap N_2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} M - rad\ \ (N_1 \cap N_2) &= \bigcap \{P : N_1 \cap N_2 \subseteq P,\ P\ asal\} \supseteq \bigcap \{Q : N_1N_2 \subseteq Q,\ Q\ asal\} \\ &= M - rad\ \ (N_1N_2) \end{aligned}$$

dır. Tersine, Önerme III.6 dan, Q asal olmak üzere, $N_1N_2 \subseteq Q$ iken $N_1 \subseteq Q$ veya $N_2 \subseteq Q$ gerçeklendiğinden $N_1 \cap N_2 \subseteq Q$ olur. O halde

$$\begin{aligned} M - rad\ \ (N_1 \cap N_2) &= \bigcap \{P : N_1 \cap N_2 \subseteq P,\ P\ asal\} \subseteq \bigcap \{Q : N_1N_2 \subseteq Q,\ Q\ asal\} \\ &= M - rad\ \ (N_1N_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece III.17 sağlanır. ■

Teorem III.21 *M çarpımsal bir $R-$modül ve N, M nin bir alt modülü olsun.*

$$B = \left\{m \in M : m^k \subseteq N, k \in \mathbb{Z}^+\right\}$$

olsun. Bu durumda B, M nin bir alt modülüdür ve $B = M - rad\ N$ dir.

İspat. $x, y \in M$; I ve J sırasıyla x ve y nin sunuş ideali olsun. olsun. Bu halde, $x^m = I^mM \subseteq N$ ve $y^n = J^nM \subseteq N$ olacak biçimde $m, n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. $k = m + n$ olsun. O zaman,

$$\begin{aligned} (x+y)^k &= (IM + JM)^k = ((I+J)\,M)^k = (I+J)^k\,M \\ &= \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} I^iJ^{k-i}\right) M \subseteq N \end{aligned}$$

ve böylece $x + y \in B$ olur. Şimdi$x \in B$, $r \in R$ ve I, x in bir sunuş ideali olsun. Bu durumda $x^n = I^nM \subseteq N$ olacak biçimde $n \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Buradan,

$$(rx)^n = (rI)^n\,M \subseteq I^nM \subseteq N$$

ve böylece $rx \in B$ olur. O halde B, M nin bir alt modülüdür. Şimdi $m \in B$ ve J, m nin bir sunuş ideali olsun. Bu halde $m^k = J^k M \subseteq N$ olacak biçimde $k \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Önerme III.17 den

$$M - rad\ \left(m^k\right) = M - rad\ (Rm)$$

olur. Böylece $J^k M \subseteq N$ olduğundan $\left(J^k M : M\right) \subseteq (N : M)$ ve Teorem III.15 ten

$$\begin{aligned} m &\in M - rad\ (Rm) = M - rad\ \left(m^k\right) = \sqrt{(J^k M : M)}M \\ &\subseteq \sqrt{(N : M)}M = M - rad\ N \end{aligned}$$

elde edilir. O halde $B \subseteq M - rad\ N$ olur.

Tersine, $x \in M - rad\ N = \sqrt{(N : M)}M$ olsun. Bu durumda, $x = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i$ olacak biçimde $r_i \in \sqrt{(N : M)}$ ve $m_i \in M$ vardır. Buradan, her i için $r_i^{n_i} \in (N : M)$ olacak biçimde $n_i \in \mathbb{Z}^+$ vardır. Böylece, yeterince büyük bir k için $x^k \subseteq (N : M)\, M = N$ ve böylece $M - rad\ N \subseteq B$ elde edilir. O halde $B = M - rad\ N$ olur. ■

Sonuç III.16 *M çarpımsal bir $R-$modül olsun. Bu durumda N_M, M nin bütün asal alt modüllerinin kesişimidir.*

İspat. Teorem III.21 den

$$M - rad\,(0) = N_M = \bigcap \{P : P\ asal\}$$

elde edilir. ■

Sonuç III.17 *M güvenilir bir çarpımsal $R-$modül olsun. Bu halde, $\check{N}$, R nin asal radikali olmak üzere $N_M = \check{N}M$ dir.*

İspat. Teorem III.15 ve Sonuç III.16 dan,

$$N_M = M - rad\,(0) = \sqrt{ann\,(M)}M = \sqrt{0}M = \check{N}M$$

elde edilir. ■

Teorem III.22 *M çarpımsal bir $R-$modül ve P, M nin has bir alt modülü olsun. Bu durumda P nin asal olması için gerek ve yeter koşul, M nin her bir U ve V alt modülü için*

$$UV \subseteq P \implies U \subseteq P \text{ veya } V \subseteq P \tag{III.22}$$

olmasıdır.

İspat. P, M nin asal bir alt modülü olsun. M nin $UV \subseteq P$, $U \nsubseteq P$ ve $V \nsubseteq P$ koşulunu sağlayan U ve V alt modüllerinin var olduğunu kabul edelim. I ve J sırasıyla U ve V nin sunuş ideali olsun. Bu halde, $UV = IJM \subseteq P$ olur. $ry \in U \diagdown P$ ve $sx \in V \diagdown P$ olacak biçimde $r \in I$, $s \in J$ ve $x, y \in M$ vardır. Buradan, $rsx \in P$ ve P asal olduğundan $r \in (P : M)$ veya $sx \in P$ dir. O halde $rM \subseteq P$ ve $ry \in P$ çelişkisi elde edilir. Böylece III.22 sağlanır.

Tersine, III.22 nin sağlandığını varsayalım. $r \in R$ ve $x \in M - P$ için $rx \in P$ olsun. $rM \nsubseteq P$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $rm \notin P$ olacak biçimde $m \in M$ vardır. I ve J sırasıyla rx ve m nin sunuş ideali olsun. O zaman

$$(Rrx)(Rm) = (Rx)(Rrm) = IJM \subseteq P$$

olur. Hipotezden, $Rx \subseteq P$ veya $Rrm \subseteq P$ olmalıdır. Bu halde $x \in P$ veya $rm \in P$ olur, çelişkidir. Böylece P asaldır. ■

Sonuç III.18 *M çarpımsal bir $R-$modül ve P, M nin has bir alt modülü olsun. Bu durumda P nin asal olması için gerek ve yeter koşul, her $m, m' \in M$ için,*

$$mm' \subseteq P \implies m \in P \text{ veya } m' \in P \tag{III.18}$$

olmasıdır.

İspat. Gereklilik açıktır. Tersine, III.18 in gerçeklendiğini varsayalım. M nin

$$UV \subseteq P, U \nsubseteq P \text{ ve } V \nsubseteq P$$

koşullaını sağlayan U ve V alt modüllerinin var olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $u \in U - P$ ve $v \in V - P$ olacak biçimde $u, v \in M$ vardır. O halde,

$$uv \in RuRv \subseteq UV \subseteq P$$

ve hipotezden $u \in P$ veya $v \in P$ olur, çelişkidir. Böylece P asaldır. ■

IV SONUÇLAR ve TARTIŞMA

[11] makalesinde ispatı verilen Teorem III.14 ün alternatif ispatı, H. İbrahim Karakaş'ın ispatladığı Teorem III.12 nin sonucu olarak aşağıdaki gibi verilebilir:

$M \neq \{0\}$ olduğunu kabul edebiliriz. M çarpımsal olduğundan, Teorem III.5 ten M nin bir L maksimal ideali vardır. L maksimal olduğundan $M = L + Rx$ olacak biçimde bir $x \in M$ vardır. Her maksimal alt modül aynı zamanda asal olduğundan L sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla M de sonlu üretilmiş olur. O halde Teorem III.12 den M noetheriandır.

Çalışmamızda sonlu üretilmiş modüller ile çarpımsal modüller arasındaki ilişkiye oldukça yer verilmiştir. Bazı teoremlerde modüllerin sonlu üretilmiş olma şartı yerine çarpımsal modül olma şartını koyduğumuzda teoremin halen sağlanıyor olması, her çarpımsal modülün sonlu üretilmiş veya her sonlu üretilmiş modülün çarpımsal olabileceği fikrini sorgulamamızı sağlar. A birimli ve değişmeli herhangi bir halka olmak üzere, $R = \prod_{n=1}^{\infty} A$ ve $M = \bigoplus_{n=1}^{\infty} A$ olsun. Bu durumda M çarpımsal bir $R-$modüldür, fakat sonlu üretilmemiştir. Dolayısıyla, her çarpımsal modülün sonlu üretilmiş olması gerekmez. Tersine, $\Bbbk$ bir cisim ve $2 \leq n < \infty$ olmak üzere, $\Bbbk$ cismi üzerindeki herhangi bir n boyutlu vektör uzayı çarpımsal değildir, fakat sonlu üretilmiştir.

Örnek III.7 de $\mathbb{Q}$ nun her asal idealinin sonlu üretilmiş olduğunu, fakat $\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{Z}$ üzerinde sonlu üretilmiş olmadığı için, noetherian olmadığını belirttik. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ üzerinde çarpımsal bir modül değildir. $\mathbb{Z}$ nin her I ideali için $I\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}$ olduğundan, $I^{-1}I\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{I}^{-1}\mathbb{Q}$ ve buradan $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{I}^{-1}\mathbb{Q}$ elde edilir. O halde, $\mathbb{Q} = \mathbb{I}^{-1}\mathbb{Q}$ ve $I\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ olur. Dolayısıyla $\mathbb{Q}$ nun herhangi bir N has alt modülü için $N = I\mathbb{Q}$ olacak biçimde $\mathbb{Z}$ nin bir I ideali yoktur.

V SON DEĞERLENDİRMELER ve ÖNERİLER

Yapılan çalışmada, birimli ve değişmeli bir halkanın idealleri ile çarpımsal modüllerin alt modülleri arasında benzerlik kuruldu. Örneğin, birimli ve değişmeli bir halkada her has ideal, bir maksimal ideal tarafından kapsanır. Benzer argümanın çarpımsal modüllerin has alt modülleri için de geçerli olduğu gösterildi. Yine halkalar için bilinen Cohen Teoremi'nde, asal idealler yerine çarpımsal modüllerin asal alt modülleri düşünüldüğünde, aradaki benzerlik aşikar biçimde gözlenmektedir.

Bu örneklerin yanı sıra, bir idealin radikali için bilinen karakterizasyona benzer bir karakterizasyonun, çarpımsal modülün bir alt modülünün $M-$radikali için de elde edildiği gösterildi. Ayrıca yine ideallerdekine benzer biçimde, bir çarpımsal modülün asal alt modüllerinin karakterizasyonu elde edildi.

Bundan sonra yapılacak olan, Örnek III.7 dekine benzer biçimde, çarpımsal modül olma koşulunun önemini ortaya koyan yeni örnekler bulmaktır. Ayrıca hangi halkalar üzerindeki modüllerin her zaman çarpımsal olacağı problemini ele almak ve çözmeye çalışmaktır.

KAYNAKLAR

[1] *Karakaş, H.İ.: "On Noetherian Modules", Metu Journal of Pure and Applied Sciences, Vol. 5, No. 2, (1972), 165-168.*

[2] *Barnard, A.: "Multiplication Modules", Journal of Algebra 71, (1981), 174-178.*

[3] *Abd El Bast, Z.; Smith, P.F.: "Multiplication Modules", Communications in Algebra, 16(4), (1988), 755-779.*

[4] *Smith, P.F.: "Some Remarks on Multiplications Modules", Arch. Math., Vol. 50, (1988), 223-235.*

[5] *Ali, M.M.: "Idempotent and Nilpotent Submodules of Multiplication Modules", Communications in Algebra, 36, (2008), 4620-4642.*

[6] *Ameri, R.: "On the Prime Submodules of Multiplications Modules", Ijmms 2003:27, (2002), 1715-1724.*

[7] *Hungerford, T.W.: "Algebra", (1980).*

[8] *Sharp, R.Y.: "Steps in Commutative Algebra", (1990).*

[9] *Azizi, A.: "Principal Ideal Multiplications Modules", Algebra Colloquium 15:4, (2008), 637-648.*

[10] *McCasland, R.L.; Moore, M.E.: "On Radicals of Submodules", Communications in Algebra, 19(5), (1991), 1327-1341.*

[11] *Gaur, A.; Kumar, A.; Parkash, A.: "Prime Submodules in Multiplication Modules", International Journal of Algebra, Vol. 1, No. 8, (2007), 375-380.*

ÖZGEÇMİŞ

Cemile NUR, 01.03.1986 yılında Antakya'da doğdu. 1999 yılında Serinyol İlköğretim Okulu'ndan, 2002 yılında Serinyol Lisesi'nden, 2006 yılında Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2006-2007 öğretim yılında Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisans yapmaya başladı.

KAYNAKLAR

[1] Karakaş, H.İ.: “On Noetherian Modules”, Metu Journal of Pure and Applied Sciences, Vol. 5, No. 2, **(1972)**, 165-168.

[2] Barnard, A.: “Multiplication Modules”, Journal of Algebra 71, **(1981)**, 174-178.

[3] Abd El Bast, Z. & Smith, P.F.: “Multiplication Modules”, Communications in Algebra, 16(4), **(1988)**, 755-779.

[4] Smith, P.F.: “Some Remarks on Multiplications Modules”, Arch. Math., Vol. 50, **(1988)**, 223-235.

[5] Ali, M.M.: “Idempotent and Nilpotent Submodules of Multiplication Modules”, Communications in Algebra, 36, **(2008)**, 4620-4642.

[6] Ameri, R.: “On the Prime Submodules of Multiplications Modules”, Ijmms 2003:27, **(2002)**, 1715-1724.

[7] Hungerford, T.W.: “Algebra”, **(1980)**.

[8] Sharp, R.Y.: “Steps in Commutative Algebra”, **(1990)**.

[9] Azizi, A.: “Principal Ideal Multiplications Modules”, Algebra Colloquium 15:4, **(2008)**, 637-648.

[10] McCasland, R.L. & Moore, M.E.: “On Radicals of Submodules”, Communications in Algebra, 19(5), **(1991)**, 1327-1341.

[11] Gaur, A. & Kumar, A. & Parkash, A.: “Prime Submodules in Multiplication Modules”, International Journal of Algebra, Vol. 1, No. 8, **(2007)**, 375-380.