T.C
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q-ORTOGONAL FONKSİYONLAR

Çağan KORKMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI
TEORİK MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN
Yard. Doç. Dr. Gülsen KÜREM TOKAT

İSTANBUL 2010

T.C

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q-ORTOGONAL FONKSİYONLAR

Çağan KORKMAZ

(141103020050004)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEORİK MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN

Yard. Doç. Dr. Gülsen KÜREM TOKAT

İSTANBUL 2010

TEŞEKKÜR

Bu tezin yazımında benden bilgi ve kaynaklarını esirgemeyen danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Gülsen Kürem'e ve çalışmam süresince sürekli desteklerinden ötürü Yavuz Gökçayır'a ve kardeşlerime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Quantum analizin oluşması, temel olarak klasik türev tanımındaki x yerine qx_0 alınıp limitin kaldırılmasıyla tanımlanan q-türevle başlar. Bu tanım yardımıyla analizdeki bazı kavramlar yeniden üretilmiştir. Buradaki esas, yeni kavramların belli koşullar altında analizdeki kavramlara yakınsamasıdır.

Bu tezde, öncelikle ortogonallik, ayrık değişkene göre ortogonallik ve sıfırlarına göre ortogonallik tanımları verilmiştir. Sonra, ilk iki ortogonallik tanımını incelemek amacıyla sırasıyla Jacobi polinomları, ultraküresel polinomlar ve Hermite polinomları ile bu polinomların q-benzerleri tanımlanıp bazı özellikleri, üreteç fonksiyonları ve sağladıkları bazı denklemler kanıtlarıyla birlikte anlatılmıştır. Bunun yanı sıra, farklı q-ortogonal polinomların birbirinden gerek tanım gerekse limit yardımıyla türetilişine örnekler verilmiştir. Daha sonra, sıfırlarına göre ortogonallik için bu özelliğe sahip tek fonksiyon türü olan Bessel fonksiyonu ve q-benzeri tanımlanıp ortogonallik kullanılarak sıfırların özelliklerinin gösterilebileceği üzerinde durulmuştur.

Böylece, ortogonalliğin klasik analizden q-analize neredeyse tümüyle taşınabilen özelliklerden biri olduğu ve ortogonal polinom dizileri arasındaki ilişkilerin daha da çeşitlenerek q-ortogonal dizilerde de bulunduğu gözlemlenmiştir.

Haziran, 2010 **Çağan KORKMAZ**

ABSTRACT

The construction of q-analysis is based on the definition of q-derivative by substitution of x by qx_0 in classical derivative. By the help of this definition, many concepts in analysis are translated to q-analysis. This translation depends on the idea that the new concepts converge to classical ones.

In this study, firstly the concepts of orthogonality, orthogonality with respect to discrete variable and orthogonality with respect to zeros are defined. Secondly, Jacobi, ultraspherical and Hermite polynomials and their q-analogues are defined respectively as an example of the first two of these definitions. Main properties, generating functions and some equations due to these polynomials are given with proofs. Throughout this process, the dervation of different q-orthogonal polynomials from each other by definition or by the help of limit procedures are exampled. After that, Bessel and q-Bessel functions, which are the only orthogonal functions with respect to their own zeros, are studied. It is mentioned that many properties of zeros of the Bessel functions can be obtained by this orthogonality relation.

Thus, it is observed that orthogonality is one of the properties which can almost completely be translated from classical analysis to q-analysis. Another observation is that not only the relations between the classical orthogonal polynomials, but also more specific ones exist between q-orthogonal polynomials.

June, 2010 **Çağan KORKMAZ**

SEMBOLLER

D_q	: q-Türev
$[n]$	: n sayısının q-benzeri
$(a)_n$	: Pochammer sembolü
$(a;q)_n$	: q-Pochammer sembolü
${}_rF_s(a_1,...,a_r;b_1,...,b_s;z)$	: Gauss hipergeometrik serisi
${}_r\phi_s(a_1,...,a_r;b_1,...,b_s;q,z)$	: Heine q-hipergeometrik serisi
${}_r\psi_s(a_1,...,a_r;b_1,...,b_s;q,z)$	: Ramanujan iki taraflı q-hipergeometrik serisi
d_qx	: q-Diferansiyeli
Γ_q	: q-Gamma fonksiyonu
β_q	: q-Beta fonksiyonu
$\delta_{m,n}$	: Kronecker deltası
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	: Jacobi polinomu
$p_n(x;a,b;q)$	: Küçük q- Jacobi polinomu
$P_n(x;a,b;q)$	: Büyük q- Jacobi polinomu
$C_n^{\lambda}(x)$	: Ultraküresel polinom
$C_n(x;\beta\mid q)$	: q- Ultraküresel polinom
$H_n(x)$	: Hermite polinomu
$H_n(x\mid q)$	: q- Hermite polinomu
$J_v(x)$	: Bessel fonksiyonu
$J_v(x;q)$	: Hahn-Exton q- Bessel fonksiyonu

T.C

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q-ORTOGONAL FONKSİYONLAR

Çağan KORKMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEORİK MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN

Yard. Doç. Dr. Gülsen KÜREM TOKAT

İSTANBUL 2010

T.C

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

q-ORTOGONAL FONKSİYONLAR

Çağan KORKMAZ

(141103020050004)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEORİK MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN

Yard. Doç. Dr. Gülsen KÜREM TOKAT

İSTANBUL 2010

I GİRİŞ VE AMAÇ

I.1 GİRİŞ

Quantum analizin oluşması, temel olarak klasik türev tanımındaki

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ifadesinde x yerine qx_0 alınıp limitin kaldırılmasıyla tanımlanan q-türevle başlar.

Yani f fonksiyonunun x_0 noktasındaki q-türevi, q 1'den farklı olmak üzere

$$(D_q f)(x_0) = \frac{f(qx_0) - f(x_0)}{qx_0 - x_0}$$

ile verilir. q 1'e yaklaşırken q-Türev, f fonksiyonunun sürekli olması koşuluyla klasik türeve yakınsar. Bu tanım yardımıyla analizdeki bazı kavramlar yeniden tanımlanmıştır. Bu tanımlamalardaki esas, yeni kavramların q 1'e yaklaşırken belli koşullar altında analizdeki kavramlarla örtüşmesidir.

Klasik analizde hipergeometrik seriler ve bunlara karşılık gelen fonksiyonlar önemli bir yer tutmaktadır. Bu fonksiyonlar yardımıyla birçok başka fonksiyonun seri açılımları yazılabilmektedir. Quantum analizde de bu serilere karşılık gelen q-hipergeometrik seriler tanımlanmış ve yakınsaklık yardımıyla birçok fonksiyonun q-benzeri oluşturulmuştur. Böylece klasik analizdeki fonksiyonların taşıdığı özellikler ve sağladığı teoremler q-analize aktarılabilmektedir. Bu tez çalışmasının çerçevesini, bu özelliklerden biri olan ortogonallik özelliği oluşturmaktadır.

Bu tezde, öncelikle fonksiyonlarda ortogonallik ve sıfırlara göre ortogonallik tanımlanıp ortogonal polinomlara ait bazı özellikler sıralanmıştır. Daha sonra sırasıyla Jacobi polinomları, ultraküresel polinomlar, Hermite polinomları ve Bessel fonksiyonu ve bunların q-benzerleri tanımlanıp taşıdıkları özelliklerin kanıtları verilmiştir. Bu çalışmanın en temel amacı, analiz ve q-analiz disiplinleri arasında ortogonallik özelliği ile kurulan köprüyü ana hatlarıyla çizmektir.

II GENEL BİLGİLER

II.1 q-ANALİZDEKİ ÖN KAVRAMLAR ve GÖSTERİMLER

Analizde $f(x)$ fonksiyonunun x_0'daki türevi, $\lim_{x \to x_0} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ile tanımlanır. Türevin varlığı, bu limitin varlığına bağlıdır. $q-$ Analizde ise, bu ifadedeki limit kavramı ortadan kalkar ve $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ türev oranında $0 < q < 1$ olmak üzere $x = qx_0$ yazılarak, limitten bağımsız bir türev tanımı elde edilir. Bu yolla elde edilen

$$(D_q f)(x_0) = \frac{f(qx_0) - f(x_0)}{x_0(q-1)}$$

değerine, $f(x)$'in x_0 daki q-türevi denir. Bu tanım

$$\lim_{q \to 1^-} (D_q f)(x_0) = f'(x_0)$$

eşitliğinden dolayı, türevin q-analizdeki karşılığı olarak kabul edilmiştir. Bu kavram yardımıyla analizdeki bir çok olgu tekrar oluşturularak, kuantum analize geçiş yapılır.

Özel olarak, x^n'nin q-türevi bize, birçok gerekli kavramın q-benzerini sağlar. Tanım yardımıyla bu türevi bulalım. $x \neq 0$ için,

$$D_q(x^n) = \frac{(qx)^n - x^n}{x(q-1)} = \frac{1-q^n}{1-q} x^{n-1}$$

elde edilir. $\lim_{q \to 1^-} \dfrac{1-q^n}{1-q} = n$ olduğundan $\dfrac{1-q^n}{1-q}$ ifadesine n doğal sayısının q-benzeri denir ve bu benzerlikten dolayı $[n]$ ile gösterilir. Dolayısıyla, analizdeki türev ifadesine benzer olarak

$$D_q(x^n) = [n]x^{n-1}$$

elde edilir. Böylece q-analizin "doğal sayıları" oluşturulur. Bu tanım, tüm sayılara genelleştirilebilir. α herhangi bir sayı olmak üzere

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{1-q^\alpha}{1-q} = \alpha \tag{II.1}$$

eşitliği kullanılarak, yukarıdaki gibi $\dfrac{1-q^{\alpha}}{1-q}$ ifadesine α nın q-benzeri denir ve bu ifade kısaca $[\alpha]$ ile gösterilir. Ayrıca $[n]$ tanımı kullanılarak, faktöriyel kavramının q-benzeri

$$[n]! = \begin{cases} 1 & n=0 \\ [n]\times[n-1]\times\ldots\times 1 & n=1,2,\ldots \end{cases} \tag{II.2}$$

ile verilir. Bu tanım yardımıyla $k=0,1,\ldots,n$ için, $\binom{n}{k}$ binom katsayısının q-benzeri

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!} = \frac{(1-q)\,(1-q^2)\ldots(1-q^n)}{(1-q)\,(1-q^2)\ldots(1-q^k)\,(1-q)\,(1-q^2)\ldots(1-q^{n-k})} \tag{II.3}$$

ifadesiyle verilir.

Analizdeki ötelenmiş faktöriyel tanımı veya diğer adıyla Pochhammer sembolü, her a sayısı ve n doğal sayısı için

$(a)_0 = 1$ ve $(a)_n = (a)\,(a+1)\ldots(a+n-1), n = 1,2,...$ şeklinde tanımlanır. Pochammer sembolünün q-benzeri

$$(a,q)_n = \begin{cases} 1 & n=0 \\ (1-a)\,(1-qa)\ldots(1-q^{n-1}a) & n=1,2,\ldots \end{cases} \tag{II.4}$$

ile verilir. Buna q-Pochammer sembolü adı verilir. Burada q-benzerliğin çıkış noktası, a yerine q^a alınıp (II.1) kullanılarak elde edilen

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{(q^a;q)_n}{(q;q)_n} = \lim_{q\to 1^-} \frac{(1-q^a)\,(1-q^{a+1})\ldots(1-q^{a+n-1})}{(1-q)\,(1-q^2)\ldots(1-q^n)} = \frac{(a)_n}{n!} \tag{II.5}$$

eşitliğidir.

Bu tanımdan gelen birçok özellik içinde en sık rastlananı,

$$(a;q)_{k+n} = (a;q)_k \left(aq^k;q\right)_n \tag{II.6}$$

eşitliğidir. (II.4) tanımının genelleştirilmiş hali

$$(a;q)_\infty = \lim_{k\to\infty} (a;q)_k = \prod_{k=0}^{\infty} \left(1-q^k a\right), |q|<1$$

ile verilir.

Bu tezde q-hipergeometrik serileri incelerken sıklıkla karşılaşılacak bu tanım, birçok fonksiyon ve seride kullanılmaktadır. Örneğin, analizdeki $|z| < 1$ için yakınsak olan

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} z^k = \frac{1}{(1-z)^a} \tag{II.7}$$

serisinde, $a = -n$ ve $z = -x/y$ yazıldığında, n'inci kuvvetin binom açılımı formülüne ulaşılır:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Bu formül, analizdei binom teoremidir. Buradan, (II.7)'deki seri ve fonksiyonun q-benzerini inşa ederek, q-binom teoremini elde edebiliriz.

Bunun için, öncelikle $|q| < 1$ alalım. $|z| < 1$ için yakınsak olan

$$f(a;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} z^k \tag{II.8}$$

serisinde a yerine q^a yazılıp $q \to 1^-$ limiti alındığında, (II.5)'ten,

$$\lim_{q \to 1^-} f(q^a;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} z^k = \frac{1}{(1-z)^a} \tag{II.9}$$

eşitliği ortaya çıkar. Şimdi, $f(a;z)$ fonksiyonunu bulalım. (II.8)'de (II.6)'yı n kez arka arkaya uygularsak,

$$f(a;z) = (az;q)_n f(aq^n;z), n = 1, 2, \ldots$$

elde ederiz. Bu ifadenin $n \to \infty$ limitini aldığımızda, $|q| < 1$ olduğundan $q^n \to 0$ ve,

$$f(a;z) = (az;q)_\infty f(0;z)$$

olarak bulunur. $a = q$ alınırsa,

$$f(0;z) = \frac{1}{(z;q)_\infty}$$

bulunur. Bunu yerine yazdığımızda, q-binom teoremi adı verilen

$$f(a;z) = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} z^k \tag{II.10}$$

eşitliği elde edilir. Ters taraftan,

$$g(a;z) = \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$$

tanımlarsak, gerekli hesaplamalar sonucunda $b_i = \dfrac{(a;q)_i}{(q;q)_i}$ bulunur. Böylece, (II.10) ile verilen q-binom teoremi kanıtlanmış olur [2].

Bu teoremin bir uygulaması, analizdeki $(1-z)^{-a}(1-z)^{-b} = (1-z)^{-a-b}$ eşitliğinin q-benzerinin bulunmasıdır. Bunun için (II.10) kullanılarak $|z| < 1$ için,

$$\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\frac{(bz;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a;q)_i}{(q;q)_i} z^i\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b;q)_k}{(q;q)_k} (az)^k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ab;q)_n}{(q;q)_n} z^n = \frac{(abz;q)_\infty}{(z;q)_\infty}$$

eşitliğindeki seriler, $i = n-k$ alınarak çarpıldığında,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(a;q)_{n-k}(b;q)_k}{(q;q)_{n-k}(q;q)_k} a^k = \frac{(ab;q)_n}{(q;q)_n} \tag{II.11}$$

formülü çıkar. Bu formülü bir önceki eşitlikte yerine yazarsak,

$$\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\frac{(bz;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ab;q)_n}{(q;q)_n} z^n = \frac{(abz;q)_\infty}{(z;q)_\infty}$$

ifadesi bize istenen q-benzeri verir [2].

Ayrıca, analizde (II.7) binom formülünün türetilişine benzer şekilde, (II.11)'de her iki taraf $(q;q)_n$ ile çarpılarak

$$(ab;q)_n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (a;q)_{n-k}(b;q)_k a^k$$

ile verilen q-binom formülü elde edilir.

Bu formül yalnızca $|q| < 1$ için geçerlidir. q-Pochammer sembolünün

$$(a;q)_n = \left(a^{-1};q^{-1}\right)_n (-a)^n q^{\binom{n}{2}} \tag{II.12}$$

özelliği yardımıyla $|q| > 1$ için q-binom formülü

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n}{(q;q)_n} z^n = \frac{(z/q;q^{-1})_\infty}{(az/q;q^{-1})_\infty}$$

şeklindedir ve bu seri $|az/q| < 1$ için yakınsaktır.

(II.10) eşitliğinin bir başka uygulaması da, üstel fonksiyon e^z'nin iki tane q-benzerini verir. Bunları oluşturmak için, (II.10)'da $a = 0$ alınarak elde edilen

$$\frac{1}{(z;q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n}, |z| < 1 \tag{II.13}$$

fonksiyonunda z yerine z/a yazılıp $a \to \infty$ limiti alınarak,

$$(z;q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{z^n}{(q;q)_n}, |z| < \infty \tag{II.14}$$

fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyonlardan (II.13)'te $z = (1-q)x$ ve (II.14)'te $z = (q-1)x$ yazarsak, sırasıyla

$$\lim_{q \to 1^-} \frac{1}{((1-q)x;q)_\infty} = e^x$$

ve

$$\lim_{q \to 1^-} ((q-1)x;q)_\infty = e^x$$

olduğundan bu serilere üstel fonksiyonun q-benzerleri denir ve sırayla $e_q(x)$ ve $E_q(x)$ ile gösterilir [2].

(II.13) ve (II.14) eşitliklerinden kolayca görülür ki

$$e_q(ax) = \frac{1}{E_q(ax)}$$

dir. (II.6) eşitliğinde $n \to \infty$ limit alındığında,

$$(a;q)_n = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^n;q)_\infty} \tag{II.15}$$

eşitliği ve buradan da

$$E_q(x) = E_{q^r}(x) E_{q^r}(qx) \ldots E_{q^r}\left(q^{r-1}x\right)$$

formülü elde edilir.

Analizdekine benzer şekilde, q-üstel fonksiyonları yardımıyla q-trigonometrik ve q-hiperbolik fonksiyonlar şöyle tanımlanır [2]:

$$\sin_q ax = \frac{e_q(iax) - e_q(-iax)}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ax)^{2n+1}}{(q;q)_{2n+1}}, |ax| < 1$$

$$\cos_q ax = \frac{e_q(iax) + e_q(-iax)}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ax)^{2n}}{(q;q)_{2n}}, |ax| < 1$$

$$\sinh_q ax = \frac{e_q(ax) - e_q(-ax)}{2}, |ax| < 1$$

$$\cosh_q ax = \frac{e_q(ax) + e_q(-ax)}{2}, |ax| < 1$$

$$\mathrm{Sin}_q ax = \frac{E_q(iax) - E_q(-iax)}{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^n q^{n(2n+1)} \frac{(ax)^{2n+1}}{(q;q)_{2n+1}}$$

$$\mathrm{Cos}_q ax = \frac{E_q(iax) + E_q(-iax)}{2} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i q^{i(2i-1)} \frac{(ax)^{2i}}{(q;q)_{2i}}$$

q-trigonometrik fonksiyonların q-türevleri, q-türev tanımı yardımıyla hesaplandığında şu formüller elde edilir:

$$D_q e_q(ax) = \frac{a}{1-q} e_q(ax)$$

$$D_q \sin_q ax = \frac{a}{1-q} \cos_q ax \text{ ve } D_q \cos_q ax = -\frac{a}{1-q} \sin_q ax$$

$$D_q \sinh_q ax = \frac{a}{1-q} \cosh_q ax \text{ ve } D_q \cosh_q ax = \frac{a}{1-q} \sinh_q ax$$

$$D_q E_q(ax) = \frac{a}{q-1} E_q(aqx)$$

$$D_q \mathrm{Sin}_q ax = \frac{a}{1-q} \mathrm{Cos}_q aqx \text{ ve } D_q \mathrm{Cos}_q ax = -\frac{a}{1-q} \mathrm{Sin}_q aqx$$

II.2 q-HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR ve $q-$İKİ TARAFLI HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLAR

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

kuvvet serisi için, ardışık katsayıların oranı n'e bağlı bir rasyonel fonksiyon ise, yani $A(n)$ ve $B(n)$ iki polinom ve $B(n) \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = \frac{A(n)}{B(n)}, \alpha_0 = 1$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu seriye hipergeometrik seri denir. Bu serinin yakınsak olduğu durumlarda,

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$$

fonksiyonuna hipergeometrik fonksiyon denir.

Bu tür serilere ilk örnek, Gauss'un 1813'te tanımladığı

$$F(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n \tag{II.16}$$

serisidir. Burada, paydayı sıfırlamamak açısından $c \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ alınır. Gauss, bu serinin $|z| < 1$ için mutlak yakınsak, $|z| = 1$ içinse $\mathrm{Re}(c-a-b) > 0$ koşuluyla yakınsak olduğunu kanıtlamıştır. Yakınsak olduğu durumlarda, seri toplamını veren fonksiyon da $F(a,b;c;z)$ ile gösterilir.

Hipergeometrik serilere bu isim, $a = 1$, $b = c$ alındığında,

$$F(1,b;b;z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

formülünde görülen geometrik seriler elde edildiği için verilmiştir.

Gauss serisinin yakınsaklığı kullanılarak, birçok fonksiyon bu seriyle ifade edilebilir. Örneğin, $|z| < 1$ için yakınsak olan

$$(1+z)^{-a} = F(a, b; b; -z),$$

$$\log(1+z) = F(1, 1; 2; -z)$$

ve her z için yakınsak olan

$$e^z = \lim_{a \to \infty} F(a, b; b; z/a)$$

bu formüllerden bazılarıdır [2].

Gauss serisinin ve fonksiyonunun genelleştirilmiş hali, $1 \leq i \leq r$ ve $1 \leq j \leq s$, $a_i \neq b_j$ ve $b_j \notin \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ için tanımlanan ve katsayıları

$$\alpha_n = \frac{(a_1)_n (a_2)_n \ldots (a_r)_n}{(b_1)_n (b_2)_n \ldots (b_s)_n\, n!} \frac{1}{n!}$$

ifadesiyle verilen

$$ {}_rF_s\left(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_s; z\right) = {}_rF_s\left[\begin{matrix} a_1, \ldots, a_r \\ b_1, \ldots, b_s \end{matrix}; z\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \ldots (a_r)_n}{(b_1)_n \ldots (b_s)_n\, n!} z^n \qquad \text{(II.17)}$$

hipergeometrik serisidir. Oran kriterinden, ${}_rF_s\left(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_s; z\right)$ serileri için yakınsaklık koşulları şu şekildedir:

1) $r \leq s$ ise her z için mutlak yakınsaktır.

2) $r = s+1$ ise $|z| < 1$ için yakınsak, aynı zamanda Raabe kriteriyle $r = s+1$ ve $\mathrm{Re}(b_1 + \ldots + b_s - (a_1 + \ldots + a_r)) > 0$ ise $|z| = 1$ için mutlak yakınsaktır.

3) $r > s+1$ ise sadece $z = 0$ için yakınsaktır.

Yakınsaklık durumunda seri toplamını veren fonksiyon da ${}_rF_s\left(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_s; z\right)$ ile gösterilir.

Bu serilerde katsayıda pay yoksa, yani $r = 0$ ise, ya da payda yoksa, yani $s = 0$ ise, bunu ifade etmek için tire kullanılır.

Genelleştirilmiş Gauss serisi ile birçok özel fonksiyon ifade edilebilir. Bunlara örnek olarak, üstel fonksiyon

$$e^z =_0 F_0(-;-;z),$$

trigonometrik fonksiyonlar

$$\sin z = z._0F_1\left(-;\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4}\right) \text{ ve } \cos z =_0 F_1\left(-;\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4}\right),$$

Bessel Fonksiyonu

$$J_\alpha(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\alpha \ _0F_1\left(-;\alpha+1;-\frac{z^2}{4}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}, \tag{II.18}$$

Hermite Polinomları

$$H_n(x) = (2x)^n \ _2F_0\left(-\frac{n}{2},\frac{(1-n)}{2};-;-\frac{1}{x^2}\right), \tag{II.19}$$

ve Laguerre Polinomları

$$L_n^\alpha(x) = \frac{(\alpha+1)^n}{n!} \ _1F_1\left(-n,\alpha+1;x\right) \tag{II.20}$$

verilebilir [3].

Gauss serisinin q- benzeri Heine tarafından

$$\phi(a,b;c;q,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a;q)_n\,(b;q)_n}{(c;q)_n\,(q;q)_n} z^n$$

şeklinde ile tanımlanmıştır. Burada,

$$n = m+1, m+2, \ldots \text{ için } \ (q^{-m};q)_n = 0$$

olacağından, Heine serisi $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $c \neq q^{-m}$ koşuluyla tanımlanmıştır. Bu seri $|z| < 1$ ve $|q| < 1$ için mutlak yakınsaktır. Yakısaklık durumunda seri toplamını veren fonksiyon da $\phi(a,b;c;q,z)$ ile gösterilir. Ayrıca (II.1)'den dolayı her terimi q 1'e yaklaşırken Gauss serisinin terimlerine yakınsar. Bu nedenle Heine serisine, q-hipergeometrik seri ya da temel hipergeometrik seri de denir.

Heine serileri de, Gauss serileri gibi genelleştirilebilir. $1 \leq i \leq r$ ve $1 \leq j \leq s$ olmak üzere,

$$ {}_r\phi_s\left(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_s; q, z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(a_1;q\right)_n \ldots \left(a_r;q\right)_n}{\left(b_1;q\right)_n \ldots \left(b_s;q\right)_n} \left[(-1)^n q^{\binom{n}{2}}\right]^{1+r-s} z^n \qquad \text{(II.21)} $$

ifadesi ile verilir. Heine'nin ϕ serisi bu tanıma göre ${}_2\phi_1$ ile gösterilir. Genelleştirilmiş Heine serileri, katsayıların hepsini sıfırlamamak için $q \neq 0$ ve paydayı sıfırlayan değer olmaması için, $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere $b_k \neq q^{-m}$, $1 \leq k \leq s$ koşullarıyla tanımlanır.

$|q| < 1$ için yakınsaklık koşulları, oran kriteriyle şu şekilde belirlenir:

1) $r \leq s$ ise her z için mutlak yakınsaktır.

2) $r = s + 1$ ise $|z| < 1$ için mutlak yakınsaktır.

3) $r > s + 1$ ise sadece $z = 0$ için yakınsaktır.

Yakınsaklık durumunda, daha önce olduğu gibi, seri toplamını veren fonksiyon da ${}_r\phi_s\left(a_1, \ldots, a_r; b_1, \ldots, b_s; q, z\right)$ ile gösterilir [2].

q-hipergeometrik serileri şimdiye kadar $|q| < 1$ için inceledik. Ancak, $|q| > 1$ için de (II.12) formülü yardımıyla yakınsaklık koşulları bulunabilir. Bu yüzden genel olarak, $|q| < 1$ alacağız.

İki taraflı q-hipergeometrik serileri tanımlayabilmek için, öncelikle Pochammer sembolü ve q-Pochammer sembolünün negatif altindisler için de tanımlamak gerekir. Bu tanım, $n \in \mathbb{N}$ için sırasıyla

$$ (a)_{-n} = \frac{1}{(a-1)(a-2)\ldots(a-n)} = \frac{1}{(a-n)_n} = \frac{(-1/a)^n}{(1-a)_n} \qquad \text{(II.22)} $$

$$ (a;q)_{-n} = \frac{1}{(1-aq^{-1})(1-aq^{-2})\ldots(1-aq^{-n})} = \frac{1}{(aq^{-n};q)_n} = \frac{(-q/a)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q/a;q)_n} \qquad \text{(II.23)} $$

formülleriyle verilir. (II.23) formülü, (II.15) özelliği herhangi bir α sayısı için genelleştirilerek

$$ (a;q)_\alpha = \frac{(a;q)_\infty}{(aq^\alpha;q)_\infty} $$

şeklinde verilmiş genel q-Pochammer sembolünde $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha = -n$ alarak bulunur. (II.23)'ten

$$\frac{1}{(q^n;q)_k} = \left(q^{n+k};q\right)_{-k} = 0, n \geq 1, k = -n, -n-1, \ldots \tag{II.24}$$

formülüne ulaşılır. Bu bilgilerle, q-hipergeometrik seriler iki taraflı hale getirilebilir.

Bunun için, $0 < |q| < 1$, $0 < |z| < 1$ ve $n = 0, 1, 2, \ldots$ alalım. (II.10) eşitliğinde verilen q-binom teoremine negatif indisli katsayılar eklenip (II.24) uygulanırsa,

$$\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_k}{(q;q)_k} z^k$$

bulunur. Burada $k = j + n - 1$ alıp (II.6) kullanıldığında,

$$\begin{aligned}
\frac{(ax;q)_\infty}{(x;q)_\infty} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_j}{(q;q)_j} z^j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_{j+n-1}}{(q;q)_{j+n-1}} z^{j+n-1} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_{n-1}\left(aq^{n-1};q\right)_j}{(q;q)_{n-1}\left(q^n;q\right)_j} z^{j+n-1} \\
&= \frac{(a;q)_{n-1}}{(q;q)_{n-1}} z^{n-1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\left(aq^{n-1};q\right)_j}{(q^n;q)_j} z^j
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte a yerine aq^{1-n} yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_j}{(q^n;q)_j} z^j &= \frac{(aq^{1-n}z;q)_\infty}{(x;q)_\infty} \frac{(q;q)_{n-1}}{(aq^{1-n};q)_{n-1}} \frac{1}{z^{n-1}} \\
&= \frac{(1-aq^{1-n}z)\ldots(1-aq^{-1}z)}{(1-aq^{1-n})\ldots(1-aq^{-1};q)} \frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty} \frac{(q;q)_\infty}{(q^n;q)_\infty} \frac{1}{z^{n-1}} \\
&= \frac{(az;q)_\infty (q;q)_\infty}{(z;q)_\infty (q^n;q)_\infty} \frac{(1-q/az)\ldots(1-q^{n-1}/az)}{(1-q/a)\ldots(1-q^{n-1}/a)} \\
&= \frac{(az;q)_\infty (q;q)_\infty}{(z;q)_\infty (q^n;q)_\infty} \frac{(q/az;q)_\infty}{(q/a;q)_\infty} \frac{(q^n/a;q)_\infty}{(q^n/az;q)_\infty}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$(a_1;q)_\infty (a_2;q)_\infty \ldots (a_k;q)_\infty = (a_1, a_2, \ldots, a_k;q)_\infty$$

gösterimi kullanılıp q^n yerine b yazılarak,

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(a;q)_j}{(b;q)_j} x^j = \frac{(q, b/a, az, q/az;q)_\infty}{(b, q/a, z, b/az;q)_\infty} \tag{II.25}$$

formülü elde edilir. Eşitliği yalnız q^n için gösterdik. Tüm b sayılarına genelleştirmek için öncelikle soldaki serinin negatif ve pozitif indisli terimlerini ayırdığımızda,

$$\begin{aligned}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(a;q)_j}{(b;q)_j}z^j &= \sum_{j=-\infty}^{-1}\frac{(a;q)_j}{(b;q)_j}z^j+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a;q)_j}{(b;q)_j}z^j\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(q/b;q)_j}{(q/a;q)_j}\left(\frac{b}{az}\right)^j+\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a;q)_j}{(b;q)_j}z^j \qquad \text{(II.26)}\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki birinci seri, $0<|b/az|<1$ için, ikinci seri ise $0<|z|<1$ için yakınsaktır. Buradan (II.26)'daki seriyi b nin bir fonksiyonu olarak düşündüğümüzde, seri $|z|<1$ ve $|b|<\min\{1,|az|\}$ için yakınsaktır ve b'nin analitik bir fonksiyonudur. O zaman, q^n için geçerliliğini kanıtladığımız seri toplamının, her b sayısı için analitik devamını alabiliriz. Buradan da (II.25) elde edilir. Öyleyse, q-binom teoreminin genelleştirilmiş hali

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(a;q)_j}{(b;q)_j}z^j=\frac{(q,b/a,az,q/az;q)_\infty}{(b,q/a,z,b/az;q)_\infty},|b/a|<|z|<1,|q|<1 \qquad \text{(II.27)}$$

formülü ile verilir [2].

(II.25) inşa yoluyla, yani

$$g(z)=\frac{(az,q/az;q)_\infty}{(z,b/az;q)_\infty}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_kz^k$$

fonksiyonunda c_k katsayılarını bulunarak kantılanabilir. g fonksiyonu, q-Pochammer sembolünün özelliklerinden dolayı,

$$q(1-z)\,g(z)=(b-aqz)\,g(qz)$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitlik $g(z)$ ve $g(qz)$ için yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty}q\left[\left(1-bq^{k-1}\right)-\left(1-aq^k\right)z\right]c_kz^k &= 0\\ \sum_{k=-\infty}^{\infty}q\left[\left(1-bq^{k-1}\right)c_k-\left(1-aq^{k-1}\right)c_{k-1}\right]z^k &= 0\end{aligned}$$

bulunur. Bu serinin her katsayısı sıfır olmalıdır, yani,

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1-aq^{k-1}}{1-bq^{k-1}}c_{k-1} \\ &= \frac{1-aq^{k-1}}{1-bq^{k-1}}\frac{1-aq^{k-2}}{1-bq^{k-2}}\cdots\frac{1-a}{1-b}c_0 \\ &= \frac{(a;q)_k}{(b;q)_k}c_0 \end{aligned}$$

buradan da

$$g(z) = c_0\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(b;q)_k}z^k$$

elde edilir. Geriye yalnızca c_0 katsayısı bulmak kaldı. Bunun için,

$$\frac{(az;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\frac{(q/az;q)_\infty}{(b/az;q)_\infty} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}z^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q/b;q)_k}{(q;q)_k}\left(\frac{b}{az}\right)^k\right)$$

çarpımı yapılırsa,

$$c_0 = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k}{(q;q)_k}\frac{(q/b;q)_k}{(q;q)_k}\left(\frac{b}{a}\right)^k = {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, q/b \\ q \end{matrix}; q, b/a\right)$$

elde edilir. Ek I'deki (3) dönüşüm formülü ve (II.10) binom teoremi yardımıyla,

$$c_0 = \frac{(b, q/a; q)_\infty}{(q, b/a; q)_\infty}$$

olarak bulunur. Bu katsayılar $g(z)$ tanımında yerine yazılarak (II.25) formülüne ulaşılır.

Bu seri genelleştirilerek, Ramanujan serisi olarak adlandırılan

$${}_r\Psi_s\left[\begin{matrix} a_1,\ldots,a_r \\ b_1,\ldots,b_s \end{matrix}; q, z\right] = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{(a_1,\ldots,a_r;q)_k}{(b_1,\ldots,b_s;q)_k}\left((-1)^k q^{\binom{k}{2}}\right)^{(s-r)} z^k \qquad \text{(II.28)}$$

iki taraflı q-hipergeometrik serileri tanımlanır. (II.27)'ye bu gösterimden dolayı Ramanujan ${}_1\Psi_1$ serisi de denir. Bu serinin yakınsaklık koşulları, ${}_1\Psi_1$ için (II.27)'de verilen yakınsaklık koşulları genelleştirilerek elde edilir. Bunun için öncelikle, (II.28)'in pozitif ve negatif indisli terimleri ayrılırsa,

$$\begin{aligned} {}_r\Psi_s(z) &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(q/b_1,\ldots,q/b_s;q)_k}{(q/a_1,\ldots,q/a_r;q)_k}\left((-1)^k q^{\binom{k}{2}}\right)^{(s-r)}\left(\frac{b_1\ldots b_s}{a_1\ldots a_r z}\right)^k \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_1,\ldots,a_r;q)_k}{(b_1,\ldots,b_s;q)_k}\left((-1)^k q^{\binom{k}{2}}\right)^{(s-r)} z^k \end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

Bu iki seri için yakınsaklık koşulları şu şekildedir:

1) $r < s$ ise $\left|\dfrac{b_1 \dots b_s}{a_1 \dots a_r}\right| < |z|$ için yakınsaktır.

2) $r = s$ ise $\left|\dfrac{b_1 \dots b_s}{a_1 \dots a_r}\right| < |z| < 1$ için yakınsaktır.

3) $r > s$ ise hiçbir z için yakınsak değildir.

Bazı temel fonksiyonların q-hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden yazılışları ise şu şekildedir:

$$e_q\left(az\right) = {}_1\phi_0\left(0; -; q, az\right)$$

$$E_q\left(az\right) = {}_0\phi_0\left(-; -; q, az\right).$$

Ayrıca

$$(q;q)_{2k} = \left(q^2;q^2\right)_k \left(q;q^2\right)_k$$

eşitliği yardımıyla,

$$\sin_q az = \frac{az}{1-q}\ {}_2\phi_1\left(0,0;q^3;q^2,-a^2z^2\right)$$

$$\cos_q az = {}_2\phi_1\left(0,0;q;q^2,-a^2z^2\right)$$

$$\mathrm{Sin}_q\, az = \frac{az}{1-q}\ {}_0\phi_1\left(-;q^3;q^2,-q^3a^2z^2\right)$$

$$\mathrm{Cos}_q\, az = {}_0\phi_1\left(-;q;q^2,-qa^2z^2\right)$$

ifadeleri elde edilir [2].

II.3 q-İNTEGRAL

Tanım II.1 *Bir f fonksiyonunun q-karşıt türevi, $D_qF\left(x\right) = f\left(x\right)$ koşulunu sağlayan $F(x)$ fonksiyonu olarak tanımlanır ve*

$$\int f\left(x\right)\ d_qx \tag{II.29}$$

ile gösterilir.

Klasik analizdeki belirsiz integral sabiti kuantum analizde de vardır. Bunu görmek için, bir $g(x)$ fonksiyonu için $D_q g(x) = 0$ olsun. $g(x) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ formel kuvvet serisi yazılıp q-türevi alınırsa, $q^i a_i = a_i, i = 0, 1, ...$ bulunur. Bu durumda $a_1 = a_2 = ... = 0$ ve $g(x) = a_0$ elde edilir. Öyleyse (II.29)'da

$$\int f(x) \ d_q x = F(x) + c$$

yazılabilir.

Teorem II.1 *(Jackson İntegrali)*

$$\int f(x) \ d_q x = (1-q)\, x \sum_{i=0}^{\infty} q^i f\left(q^i x\right) \tag{II.30}$$

İspat. $f(x)$ fonksiyonunun q-karşıt türevi $F(x)$ olsun. $M_q g(x) = g(qx)$ lineer operatörünü tanımlayalım. q-türev tanımından

$$\frac{1}{(q-1)\,x} \left(M_q - 1\right) F(x) = \frac{F(qx) - F(x)}{(q-1)\,x} = D_q F(x) = f(x)$$

eşitliği ilde edilir.Bu eşitlikte $F(x)$'i yalnız bırakırsak,

$$\begin{aligned}
F(x) &= \frac{1}{1-M_q}\left((1-q)\, x f(x)\right) \\
&= (1-q) \sum_{i=0}^{\infty} M_q^i \left(x f(x)\right) \\
&= (1-q)\left(x f(x) + q x f(qx) + q^2 x f\left(q^2 x\right) + \cdots\right) \\
&= (1-q)\, x \sum_{i=0}^{\infty} q^i f\left(q^i x\right)
\end{aligned}$$

buradan da,

$$\int f(x) \ d_q x = (1-q)\, x \sum_{i=0}^{\infty} q^i f\left(q^i x\right) \tag{II.31}$$

bulunur. ■

(II.31)'formülüne f fonksiyonunun Jackson integrali denir [1]. Jackson integralinin bu teoremdeki tanımı formel bir tanımdır. (II.30)'daki serinin hangi koşullarda bir q-ters türeve yakınsadığını göstermek gerekir.

Teorem II.2 $0 < q < 1$ *olsun.* $0 \leq \alpha < 1$ *için* $|f(x)\, x^{\alpha}|$, $(0, A]$ *aralığı üzerinde sınırlıysa, (II.31) ile tanımlanan Jackson integrali,* $(0, A]$ *üzerinde* f *fonksiyonunun q-karşıt türevi olan bir* F *fonksiyonuna yakınsar. Ayrıca,* $F(0) = 0$ *olmak üzere* F *fonksiyonu* $x = 0$ *da süreklidir.*

İspat. $(0, A]$ üzerinde $|f(x)\, x^{\alpha}| < M$ olsun. Herhangi $0 \leq x < A$ ve $i = 1, 2, ...$ için $\left|(q^i x)^{\alpha} f(q^i x)\right| < M$ eşitsizliğinden $|f(q^i x)| < M (q^i x)^{-\alpha}$ olmalıdır. Eşitsizliği q^i ile genişleterek, $0 < x \leq A$ için

$$\left|q^i f\left(q^i x\right)\right| < M q^i \left(q^i x\right)^{-\alpha} = M x^{-\alpha} \left(q^{1-\alpha}\right)^i$$

bulunur. $1 - \alpha > 0$ ve $0 < q < 1$ olduğundan, bu eşitsizliğe göre (II.31)'deki seri, yakınsak bir geometrik seri ile üstten sınırlıdır ve bu yüzden bir F fonksiyonuna noktasal olarak yakınsar. (II.31)'de $x = 0$ yazarak $F(0) = 0$ bulunur.

Keyfi bir $\epsilon > 0$ için $\delta < (\epsilon / M(1-q)^{\alpha})^{1/1-\alpha}$ seçildiğinde, her $|x| < \delta$ için

$$\begin{aligned} |F(x) - F(0)| &= |F(x)| = \left|(1-q)\, x \sum_{i=0}^{\infty} q^i f\left(q^i x\right)\right| \\ &< (1-q)\, |x| \sum_{i=0}^{\infty} M x^{-\alpha} \left(q^{1-\alpha}\right)^i \\ &< \frac{M \delta^{1-\alpha} (1-q)}{1 - q^{1-\alpha}} < \epsilon \end{aligned}$$

sağlanır. Yani, F fonksiyonun $x = 0$ da süreklidir. Ayrıca $0 < qx \leq A$ olduğundan F fonksiyonu q-türevlenebilirdir. (II.31)'deki serinin q-türevini aldığımızda, $D_q F(x) = f(x)$ elde ederiz. Böylece F fonksiyonunun f'nin q-karşıt türevi olduğu da kanıtlanmış olur. ■

Tanım II.2 $0 < a < b$ *olsun. Belirli q-integral,*

$$\int_0^b f(x)\ d_q x = b(1-q) \sum_{i=0}^{\infty} q^i f\left(q^i b\right) \tag{II.32}$$

olmak üzere

$$\int_a^b f(x)\ d_q x = \int_0^b f(x)\ d_q x - \int_0^a f(x)\ d_q x \tag{II.33}$$

eşitliğiyle tanımlanır.

Bu tanımın q-analiz açısından önemi, (II.32)'deki seri toplamının $[0, b]$ aralığının $x_i = q^i b$ parçalanışı alındığında ortaya çıkan Riemann toplamı olmasıdır. Burada $q \to 1$ için $b(1-q)q^i \to 0$ dır ve ve seri toplamı, $[q^i b, b]$ üzerinde Riemann integraline yakınsar. Bu argümanla, f fonksiyonunun $[0, b]$ kapalı aralığında sürekli olduğu görülür ve buradan da

$$\lim_{q\to 1} \int_0^b f(x)\ d_q x = \int_0^b f(x)\ dx$$

eşitliği elde edilir. Böylece Jackson integralinin Riemann integralinin q-benzeri olduğu kanıtlanmış olur.

Tanım II.3 *f fonksiyonunun $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ daki genelleştirilmiş q-integrali,*

$$\int_0^\infty f(x)\ d_q x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{q^{i+1}}^{q^i} f(x)\ d_q x$$

toplamıyla tanımlanır.

$$\int_{q^{i+1}}^{q^i} f(x)\ d_q x = (1-q)\, q^i f\left(q^i\right)$$

olduğundan

$$\int_0^\infty f(x)\ d_q x = (1-q) \sum_{i=-\infty}^{\infty} q^i f\left(q^i\right) \qquad \text{(II.34)}$$

formülü elde edilir.

Teorem II.3 *$x^\alpha f(x)$, $\alpha < 1$ iken $x = 0$ noktasının bir komşuluğunda ve $\alpha > 1$ iken yeterince büyük x ler için sınırlıysa genelleştirilmiş q-integrali yakınsaktır.*

İspat. (II.34)'te sağdaki serinin pozitif ve negatif indisli terimleri ayrılarak

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} q^i f\left(q^i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} q^{-i} f\left(q^{-i}\right) + \sum_{i=0}^{\infty} q^i f\left(q^i\right)$$

şeklinde yazılabilir. Bu iki toplamın yakınsaklığını ayrı ayrı göstereceğiz. İkinci toplam, $(0, 1]$ aralığındaki q-integralidir. Teorem II.2'deki işlemler, verilen koşullardan ilki gözönüne alınarak yapıldığında toplamın yakınsaklığı kanıtlanır. Birinci toplam ise, ikinci koşullarda, yani x'in yeterince büyük olması ve bir $\alpha > 1$ için $|x^{\alpha} f(x)| < M$ koşulları altında i ler için

$$\left|q^{-i} f\left(q^{-i}\right)\right| = q^{i(\alpha-1)} \left|q^{-\alpha i} f\left(q^{-i}\right)\right| < M q^{i(\alpha-1)}$$

eşitliği ve Teorem II.2'deki argüman uygulanarak bulunur. Buna göre birinci seri, yakınsak bir geometrik seri ile üstten sınırlandığından mutlak yakınsaktır. ■

Teorem II.4 (q-***İntegralin Temel Teoremi***)*: $0 \leq a < b \leq \infty$ ve F, f fonksiyonunun bir karşıt türevi olsun. F, $x = 0$ da sürekliyse,*

$$\int_a^b f(x)\ d_q x = F(b) - F(a)$$

sağlanır.

İspat. F fonksiyonu, $x = 0$ da sürekli olduğundan, bir sabit farkıyla Jackson formülünden

$$F(x) = (1-q)\, x \sum_{i=0}^{\infty} q^i f\left(q^i x\right) + F(0).$$

eşitliğiyle verilir. Buradan

$$\int_0^a f(x)\ d_q x = F(a) - F(0) \text{ ve } b \in \mathbb{R} \text{ için } \int_0^b f(x)\ d_q x = F(b) - F(0)$$

ifadeleri birbirinden çıkarılarak istenen formül elde edilir. ■

Sonuç II.1 *$x = 0$ noktasının bir komşuluğunda $f'(x)$ (f'nin klasik türevi) tanımlı ve $x = 0$ da sürekliyse*

$$\int_a^b D_q f(x)\ d_q x = f(b) - f(a) \tag{II.35}$$

sağlanır.

İspat. L'Hospital kuralıyla

$$\lim_{x\to 0} D_q f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{f(qx) - f(x)}{x(q-1)} = f'(0)$$

elde edilir. $D_q f(0) = f'(0)$ tanımlanarak, $D_q f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ da sürekli hale getirildiğinde, teorem uygulanarak istenen eşitlik elde edilir. ■

Kısmi integralin q-benzerini tanımlamak için, öncelikle iki fonksiyonun çarpımının q-türevi,

$$D_q(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot D_q g(x) + g(qx) \cdot D_q f(x)$$

olarak hesaplanır. Bu eşitliğe (II.35) uygulanırsa, q-analizdeki kısmi integral formülü

$$\int_a^b f(x) \cdot D_q g(x)\, d_q x = f(b) g(b) - f(a) g(a) - \int_a^b g(qx) \cdot D_q f(x)\, d_q x \qquad \text{(II.36)}$$

şeklinde elde edilir.

II.4 q-GAMMA VE $q-$BETA FONKSİYONLAR

Gamma fonksiyonunun q-benzeri:

$$\Gamma_q(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\, E_q((1-q)qt)\, d_q t, x > 0 \qquad \text{(II.37)}$$

integraliyle tanımlanır. (II.34) ile verilen Jackson integrali yardımıyla $x > 0$ için,

$$\begin{aligned}
\Gamma_q(x) &= \int_0^\infty t^{x-1}\, E_q((1-q)qt)\, d_q t \\
&= \left(\frac{1}{1-q}\right)^x \int_0^\infty t^{x-1}\, E_q(qt)\, d_q t \\
&= \left(\frac{1}{1-q}\right)^{x-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} q^{xi} \left(q^{i+1}; q\right)_\infty \\
&= \frac{(q;q)_\infty}{(1-q)^{x-1}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{q^{xi}}{(q;q)_i}
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur ve buradaki q-gamma fonksiyonu, kutupları hariç genişletilirse

$$\Gamma_q(x) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x} \tag{II.38}$$

formülüyle verilir.

Klasik analizdeki gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

ve

$$\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}$$

fonksiyonel eşitliklerini sağlar. Bu eşitliklerin q-benzerleri,

$$\begin{aligned}
\Gamma_q(x) &= \frac{(q;q)_\infty}{(q^x;q)_\infty}(1-q)^{1-x} \\
&= \frac{(q;q)_\infty}{(1-q^x)(q^{x+1};q)_\infty}(1-q)^{1-x-1}(1-q) \\
&= \frac{1-q}{1-q^x}\Gamma_q(x+1)
\end{aligned}$$

ve

$$\Gamma_q(n+1) = \frac{(q;q)_\infty}{(q^{n+1};q)_\infty}(1-q)^{-n} = \frac{(q;q)_n}{(1-q)^n} = [n]!$$

olarak elde edilir.

Beta fonksiyonunun q-benzeri:

$$\beta_q(x,y) = \frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(y)}{\Gamma_q(x+y)} \tag{II.39}$$

olarak tanımlanır. Tanımdan

$$\beta_q(x,y) = \frac{\Gamma_q(x)\Gamma_q(y)}{\Gamma_q(x+y)} = \beta_q(y,x)$$

simetri özelliği kolayca görülür.

(II.38) ile verilen q-gamma tanımı (II.39)'da yerine yazılırsa,

$$\beta_q(x,y) = (1-q)\frac{(q,q^{x+y};q)_\infty}{(q^x,q^y;q)_\infty}$$

bulunur. $x > 0$ için q-binom teoreminden,

$$\begin{aligned}\beta_q(x,y) &= (1-q)\frac{(q;q)_\infty}{(q^y;q)_\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(q^y;q)_\infty}{(q;q)_\infty}q^{xi} \\ &= (1-q)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(q^{i+1};q)_\infty}{(q^{i+y};q)_\infty}q^{xi} \qquad \text{(II.40)}\end{aligned}$$

elde edilir. q-beta fonksiyonunun simetri özelliği ve q-binom teoremi kullanılarak $y > 0$ için,

$$\beta_q(x,y) = (1-q)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(q^{i+1};q)_\infty}{(q^{i+x};q)_\infty}q^{yi} \qquad \text{(II.41)}$$

olduğu görülür.

(II.40)'ta $q^i = x$ değişimi yapıldığında,

$$\beta_q(x,y) = (1-q)\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(qx;q)_i}{(q^y x;q)_i}q^{xi}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte belirli q-integral tanımı uygulandığında, q-beta fonksiyonunun integral tanımı

$$\beta_q(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\frac{(tq;q)_\infty}{(tq^y;q)_\infty}d_q t \qquad x,y>0 \qquad \text{(II.42)}$$

formülüyle elde edilir. Bu formül, klasik gamma ve beta fonksiyonları için sağlanan

$$\beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad \text{(II.43)}$$

eşitliğinin q- benzeridir.

III ÇALIŞMALAR

Bu bölümde ilk olarak ortogonal fonksiyonların tanımı yapılacaktır. Daha sonra sırasıyla Jacobi polinomları, ultraküresel polinomlar, Hermite polinomları ve bu polinomların q-benzerleri ele alınıp her birinin ortogonalliği gösterilecektir. Her bölümde, incelenen fonksiyonların ortogonal olmalarından dolayı sağladıkları üç terimli indirgeme bağıntıları ve üreteç fonksiyonları da ayrıca verilecektir.

III.1 ORTOGONAL ve q-ORTOGONAL FONKSİYONLAR

Tanım III.1 *Bir $f_0(x), f_1(x), ...$ fonksiyon dizisi, n ve m'den bağımsız ve negatif olmayan bir $\omega(x)$ fonksiyonu için*

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x)\ \omega(x)dx = 0 \quad m \neq n \tag{III.1}$$

koşulunu sağlıyorsa, $\omega(x)$'e ağırlık fonksiyonu, $\{f_n(x)\}$ dizisine $[a,b]$ aralığında $\omega(x)$'e göre ortogonal dizi denir.

Örneğin, $f_n(x) = \cos(nx)$, $n = 0, 1, 2, ...$ dizisini alalım. Bu dizi için $\omega(x) \equiv 1$ alırsak,

$$\int_0^\pi f_m(x) f_n(x)\ \omega(x)dx = \int_0^\pi \cos(mx)\cos(nx)dx = 0 \quad m \neq n$$

koşulu sağlandığından, $[0,\pi]$ aralığında ağırlığı 1 olan bir ortogonal dizi elde ederiz.

Eğer $\omega(x)$, $x = x_j$'deki basamağı ω_j olan bir basamak fonksiyonu ise, (III.1) orto gonallik bağıntısı

$$\sum_j f_m(x_j) f_n(x_j)\ \omega_j = 0, \qquad m \neq n \tag{III.2}$$

toplamına dönüşür. Bu tanıma göre ortogonal olan $\{f_n(x)\}$ dizilerine ayrık değişkene göre ortogonal dizi denir [3].

Burada sözü geçen ortogonallik dışında, fonksiyonların sıfırlarına göre verilen bir ortogonallik tanımı daha vardır.

Tanım III.2 $\lambda_1, \lambda_2, ...$ *sayıları* $f(x)$ *fonksiyonunun sıfırları,* $\mu(x)$ *pozitif tanımlı bir ölçü olmak üzere,*

$$\int_0^1 f(\lambda_m x) f(\lambda_n x)\ d\mu(x) = 0 \quad m \neq n$$

eşitliğini sağlayan $f(x)$ *fonksiyonlarına sıfırlarına göre ortogonal fonksiyon denir.*

Bu tanımdaki ölçünün özel seçimiyle bu integral Jackson q-integraline dönüştürülebilir. Böylece sıfırlarına göre ortogonalliğin

$$\int_0^1 f(\lambda_m x) f(\lambda_n x) d_q x = 0 \quad m \neq n$$

q-benzeri elde edilir.

Ortogonal fonksiyon dizileri arasında en sık rastlanan ve üzerinde en çok çalışılan, polinom dizileridir. Ortogonal polinom dizilerinin [4]'te verilen bazı özelliklerini inceleyeceğiz. Burada, $\deg P_k(x) = k$ koşuluyla oluşturulan $\{P_k(x)\}$ polinom dizileri ele alınır. Bu polinom dizilerinde kullanılmak üzere ortogonallik tanımı

$$\int_a^b P_m(x) P_n(x)\ \omega(x) dx = h_n \delta_{m,n} \tag{III.3}$$

şeklinde yazılabilir. Burada tanım gereği $h_n = \int_a^b P_n^2(x)\ \omega(x) dx$ tir ve $\delta_{m,n}$ Kronecker deltasını temsil eder.

Yar.Teorem III.1 $\{P_k(x)\}$ *bir ortogonal polinom dizisi ise, derecesi* n *olan her* $P(x)$ *polinomu,* $P_0, P_1, ..., P_n$ *polinomlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.*

İspat. $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(x)$ olacak şekilde $\alpha_k, k = 0, 1, ..., n$ sabitlerinin varlığını göstereceğiz. $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k$ olsun. κ_n sayısı $P_n(x)$'in başkatsayısı olmak üzere, $\alpha_n = c_n/\kappa_n$ alınırsa, x^n teriminin katsayısı eşitlenmiş olur. Aynı işlemi $P(x) - \alpha_n P_n(x)$ polinomuna uygulayarak α_{n-1}, ve böylece tümevarımla tüm α_k'lar elde edilir. ■

Yar.Teorem III.2 $\{P_k(x)\}$ *bir ortogonal polinom dizisi ise, bu dizinin her terimi, derecesi daha küçük olan her* $P(x)$ *polinomu ile ortogonaldir.*

İspat. Derecesi n olan bir $P(x)$ polinomu verilsin. Bu polinom, Yardımcı Teorem III.1'den dolayı $P_0, P_1, ..., P_n$ polinomlarının bir lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. $m > n$ olmak üzere her $P_m(x)$ polinomu, $P_0, P_1, ..., P_n$ polinomları ile ortogonal olduğundan,

$$\begin{aligned} \int_a^b P(x)P_m(x)\ \omega(x)dx &= \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(x) \right) P_m(x)\ \omega(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \int_a^b P_k(x)P_m(x)\ \omega(x)dx = 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. ■

Teorem III.1 $\{P_k(x)\}$ *bir ortogonal polinom dizisi ise, bu dizi için* $P_{-1}(x) \equiv 0, n \in \mathbb{N}$, A_n, B_n, C_n *reel sayıları için* $A_{n-1}A_nC_{n+1} > 0$ *koşullarıyla*

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_n P_{n-1}(x) \tag{III.4}$$

ile verilen üç terimli indirgeme bağıntısı sağlanır. Ayrıca, $P_n(x)$*'in başkatsayısı* κ_n *ise,*

$$A_n = \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}, \quad C_n = \frac{A_n h_n}{A_{n-1}h_{n-1}} \tag{III.5}$$

İspat. $P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x)$ polinomunun derecesini n yapacak şekilde uygun bir A_n seçilirse, bu polinom Yardımcı Teorem III.1'den, lineer kombinasyonla

$$P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafını $k < n-1$ olmak üzere $P_k(x)$ ile çarpıp iki tarafın da integrali alındığında, Yardımcı Teorem III.2'den, $k < n-1$ için $\alpha_k = 0$ bulunur. Öyleyse üstteki eşitlik

$$P_{n+1}(x) - A_n x P_n(x) = \alpha_n P_n(x) + \alpha_{n-1} P_{n-1}(x)$$

eşitliğine dönüşür. $\alpha_n = B_n$ ve $\alpha_{n-1} = C_n$ tanımlanırsa, (III.4) elde edilir. (III.5)'i kanıtlamak için üstteki eşitlikte başkatsayılar eşitlenirse, $\kappa_{n+1} - A_n \kappa_n = 0$ ve buradan da A_n için verilen formül elde edilir. C_n'i bulmak için (III.4)'te her iki tarafı $P_{n-1}(x)\omega(x)$ ile çarpıp integral aldığımızda Yardımcı Teorem III.2'den,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b P_{n-1}(x) P_{n+1}(x) \omega(x) dx \\ &= \int_a^b P_{n-1}(x)(A_n x + B_n) P_n(x) \omega(x) dx - \int_a^b P_{n-1}(x) C_n P_{n-1}(x) \omega(x) dx \\ &= A_n \int_a^b x P_{n-1}(x) P_n(x) \omega(x) dx - C_n h_{n-1} \end{aligned} \tag{III.6}$$

elde edilir. Kanıtın başındaki lineer kombinasyonu $xP_{n-1}(x)$ için yazılarak

$$xP_{n-1}(x) = \frac{\kappa_{n-1}}{\kappa_n} P_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k P_k(x)$$

eşitliği bulunur. (III.6)'da yerine yazarsak,

$$C_n h_{n-1} = \frac{A_n}{A_{n-1}} h_n$$

bulunur, bu da (III.5)'i verir. ■

Teorem III.2 *Bir $\{P_k(x)\}$ ortogonal polinom dizisindeki her $P_n(x)$ polinomunun n tane reel, birbirinden farklı ve ortogonalliğin tanımlandığı $[a, b]$ aralığının içinde kalan sıfırı vardır.*

İspat. $[a, b]$ aralığında $P_n(x)$ polinomunun işaret değiştirdiği noktaların sayısı m olsun. Bu noktalar $x_1, ..., x_m$ olsun. Bu noktaların her biri polinomun sıfırıdır ve

Cebirin Temel Teoremi gereğince, $m \leq n$ olmalıdır. $m = n$ olduğunu göstereceğiz.

$$P(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - x_i)$$

polinomunun derecesi m ve işaret değiştirdiği noktalar $x_1, ..., x_m$ dir. Bu durumda, $P(x)P_n(x)$ polnomu, x_j'ler dışında her yerde ya tamamen pozitif ya da tamamen negatiftir. $\omega(x) > 0$ olduğundan,

$$\int_a^b P(x)P_n(x)\omega(x)dx > 0 \text{ veya } \int_a^b P(x)P_n(x)\omega(x)dx < 0$$

eşitsizliklerinden biri sağlanmalıdır. Eğer $m < n$ olsaydı, P'nin derecesi P_n'nin derecesinden küçük olurdu ve Yardımcı Teorem III.2'den dolayı bu integralin sıfır olması gerekirdi. Öyleyse $m < n$ olamaz. Buradan da $n = m$ sonucuna ulaşılır. ■

Yar.Teorem III.3 *Bir $\{P_k(x)\}$ ortogonal polinom dizisinde her x ve her $n = 0, 1, 2, ...$ için*

$$P'_{n+1}(x)P_n(x) > P_{n+1}(x)P'_n(x)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Sıfırları etkilemeyeceği için, polinomlar gerektiğinde -1 ile çarpılarak başkatsayıları pozitif olacak şekilde düzenlenebilir. Kanıtı tümevarımla yapacağız.

$n = 0$ için $P'_1(x) > 0$, $P_0(x) > 0$ ve $P'_0(x) = 0$ olduğundan, istenen eşitlik sağlanır. Tümevarım varsayımında $P'_n(x)P_{n-1}(x) > P_n(x)P'_{n-1}(x)$ olsun. Teorem III.1'deki üçlü indirgeme bağıntısında $A = \kappa_n/\kappa_{n+1}$, $B = \kappa'_n/\kappa_n - \kappa'_{n+1}/\kappa_{n+1}$ ve $C = \kappa_{n-1}h_n/\kappa_n h_{n-1}$ alındığında $A > 0$ ve $C > 0$ ve $a = 1/A$ olmak üzere,

$$P_{n+1}(x) = a\left[(x - B)P_n(x) - CP_{n-1}(x)\right]$$

eşitlği yazılır. Türev aldığımızda

$$P'_{n+1}(x) = a\left[(x - B)P'_n(x) + P_n(x) - CP'_{n-1}(x)\right]$$

ve buradan da

$$\begin{aligned} P'_{n+1}P_n - P_{n+1}P'_n &= a\left[(x-B)P'_n + P_n - CP'_{n-1}\right]P_n - a\left[(x-B)P_n - CP_{n-1}\right]P'_n \\ &= a\left[P_n^2 + C(P_{n-1}P'_n - P_nP'_{n-1})\right] \geqslant aC(P_{n-1}P'_n - P_nP'_{n-1}) \end{aligned}$$

Tümevarım varsayımından gelen $P_{n-1}P'_n - P_nP'_{n-1} > 0$ eşitsizliği yukarıda yerine yazılırsa, $P'_{n+1}P_n - P_{n+1}P'_n > 0$ elde edilir. ■

Teorem III.3 *Bir $\{P_k(x)\}$ ortogonal polinom dizisindeki $P_n(x)$ polinomunun her bir sıfır, $P_{n+1}(x)$ polinomunun ardışık iki sıfırının arasında kalır.*

İspat. Burada da polinomları başkatsayıları pozitif olacak şekilde düzenleyelim. x_j ve x_{j+1}, P_{n+1}'in ardışık iki sıfırı olsun. Yardımcı Teorem II.3'ten,

$$P'_{n+1}(x_j)P_n(x_j) > P_{n+1}(x_j)P'_n(x_j) = 0$$

Öyleyse, $P'_{n+1}(x_j)$ ile $P_n(x_j)$'nin işaretleri aynıdır. x_j'den x_{j+1}'e geçerken, P'_{n+1} işaret değiştirir. Yukarıdaki eşitsizlik x_{j+1} için de sağlanacağından, P_n de işaret değiştirmelidir. Buna göre P_n'in, x_j ile x_{j+1} arasında bir sıfırı olmalıdır. ■

Ortogonal polinomlar, aynı zamanda en çok ikinci dereceden bir $Q(x)$ polinomu ve birinci dereceden bir $L(x)$ polinomu ile tanımlanan

$$Q(x)f'' + L(x)f' + \lambda f = 0 \tag{III.7}$$

diferansiyel denkleminin çözümleridir. Bu denklem Sturm-Liouville tipi diferansiyel denklemdir. Buna göre, bu denklemin $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$ olmak üzere, her λ_k özdeğeri için bir P_k çözümü vardır ve bu çözümler için (III.1) denklemi sağlanır.

III.2 JACOBİ VE q-JACOBİ POLİNOMLARI

Jacobi polinomları, $\alpha > -1$ ve $\beta > -1$ reel sabitler ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\ {}_2F_1(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}) \tag{III.8}$$

şeklinde tanımlanır. Bu polinomların ortogonalliğini kanıtlamak için, (II.16)'daki seri toplamı ile tanımlanan Gauss hipergeometrik fonksiyonun [4]'te bulunan bazı özelliklerini kanıtlamalıyız.

Gauss hipergeometrik fonksiyonu için (III.7)'de tanımlanan diferansiyel denklem

$$x(1-x)y'' + [c-(a+b+1)x]y' - aby = 0 \tag{III.9}$$

formülüyle verilen denklemdir. Buna Euler hipergeometrik diferansiyel denklemi adı verilir. Bu denklemin her iki tarafını $M = x^{c-1}(1-x)^{a+b-c}$ ile çarparak,

$$x^c(1-x)^{a+b-c+1}y'' + [c-(a+b+1)x]x^{c-1}(1-x)^{a+b-c}y' = abx^{c-1}(1-x)^{a+b-c}y$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sol tarafı $x(1-x)My'$ ifadesinin türevi olduğundan,

$$\frac{d}{dx}[x(1-x)My'] = abMy$$

elde edilir.

$$\frac{d}{dx}\ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{ab}{c}\ {}_2F_1(a+1,b+1;c+1;x)$$

eşitliğinden görüldüğü üzere, Gauss fonksiyonunun türevi de bir sabit farkıyla Gauss fonksiyonu olduğundan, a, b ve c yerine sırasıyla $a+1$, $b+1$ ve $c+1$ yazılarak oluşan Euler diferansiyel denklemini sağlar. Aynı işlemler, M ifadesi yeni Gauss fonksiyonlarına göre yeniden tanımlanmak suretiyle y'nin türevleri için tekrarlanıp k kere türev alınırsa, tümevarımdan

$$\frac{d^k}{dx^k}[x^k(1-x)^kMy^{(k)}] = (a+k-1)(b+k-1)My^{(k-1)} = (a)_k(b)_kMy$$

eşitliği elde edilir.

$$y^{(k)} = \frac{d^k}{dx^k}\ {}_2F_1(a,b;c;x) = \frac{(a)_k(b)_k}{(c)_k}\ {}_2F_1(a+k,b+k;c+k;x)$$

eşitliğini denklemde yerine koyarak,

$$\frac{d^k}{dx^k}[x^k(1-x)^kM\ {}_2F_1(a+k,b+k;c+k;x)] = (c)_k\ M\ {}_2F_1(a,b;c;x)$$

ifadesine ulaşılır. Eğer $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $b = -n$ alınırsa, $k = n$ için

$$ {}_2F_1(-n, a; c; x) = \frac{x^{1-c}(1-x)^{c+n-a}}{(c)_n} \frac{d^n}{dx^n}[x^{c+n-1}(1-x)^{a-c}] $$

formülü elde edilir. Jacobi formülüne ulaşmak için $x = (1-y)/2$, $a = n + \alpha + \beta + 1$, $c = \alpha + 1$ yazılırsa,

$$ {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-y}{2}\right) = \frac{(-1)^n (1-y)^{-\alpha}(1+y)^{-\beta}}{(\alpha+1)_n 2^n} \frac{d^n}{dy^n}[(1-y)^{n+\alpha}(1+y)^{n+\beta}] \tag{III.10} $$

elde edilir. Buradan, Jacobi polinomlarının başka bir ifadesi olan ve Rodrigues formülü olarak da bilinen

$$ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}] \tag{III.11} $$

eşitliği elde edilir. Bu bilgilerle, Jacobi polinomlarının ortogonalliğine dair [5]'teki verilerden derlenen aşağıdaki teoremi kanıtlayabiliriz:

Teorem III.4 *Jacobi polinomları $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ fonksiyonuna göre ortogonaldir ve*

$$ \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!} \delta_{mn} \tag{III.12} $$

ile verilen ortogonallik bağıntısını sağlar.

İspat. Yazımın kısalması için öncelikle

$$ f_n(x) = (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta} \quad \text{ve} \quad g_n(x) = (1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n} f_n(x) $$

tanımlayalım. Bu durumda (III.11) Rodrigues formülünden

$$ c_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!} $$

olmak üzere

$$ P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = c_n g_n(x) \tag{III.13} $$

olur. Öyleyse yeni yazımla

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\omega(x)dx &= c_n c_m \int_{-1}^{1} g_m(x)g_n(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx \quad \text{(III.14)}\\ &= c_n c_m \int_{-1}^{1} g_m(x)\frac{d^n}{dx^n}f_n(x)dx\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Genelliği bozmadan $m \leq n$ alalım.

$$I = \int_{-1}^{1} g_m(x)\frac{d^n}{dx^n}f_n(x)dx \quad \text{(III.15)}$$

integralini kısmi integrasyonla hesaplamak için

$$\begin{aligned} u &= g_m(x) & dv &= \frac{d^n}{dx^n}f_n(x)dx \\ du &= g_m'(x)dx & v &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f_n(x)\end{aligned}$$

alalım.

$$I = uv|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} vdu$$

ifadesinde $k < n$ için $f_n^{(k)}(x) = \frac{d^k}{dx^k}f_n(x)$ fonksiyonu, çarpım türevi tanımından

$$(1-x)^{\alpha+n-k}(1+x)^{\beta+n-k}$$

çarpanını içerir. $\alpha + n - k \geq \alpha + 1 > 0$ ve $\beta + n - k \geq \beta + 1 > 0$ olduğundan, $x = \pm 1$ için $f_n^{(k)}(x) = 0$ olur.

Buradan,

$$I = -\int_{-1}^{1} g_m'(x)f_n^{(n-1)}(x)dx$$

elde edilir. Aynı kısmi integrasyon işlemini m kez uygularsak,

$$I = (-1)^m \int_{-1}^{1} g_m^{(m)}(x)f_n^{(n-m)}(x)dx \quad \text{(III.16)}$$

eşitliği elde edilir.

Durum 1: $m < n$ için (III.16)'da bir kısmi integral daha alırsak, $g_m(x) = P_m^{(\alpha,\beta)}(x)/c_m$ polinomu derecesi m olan bir polinom olduğundan $g_m^{(m+1)}(x) \equiv 0$ ve buradan da

$$I = (-1)^{m+1} \int_{-1}^{1} g_m^{(m+1)}(x) f_n^{(n-m-1)}(x) dx = 0$$

olur. Bunu (III.14)'de yerine yazılırsa,

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = 0, \qquad n \neq m$$

elde edilir.

Durum 2: $m = n$ için (III.16) eşitliği

$$I = (-1)^n \int_{-1}^{1} g_n^{(n)}(x) f_n(x) dx$$

şeklini alır. $g_n(x)$ polinomunda başkatsayına a_n denise,

$$I = a_n\ n!(-1)^n \int_{-1}^{1} f_n(x) dx = a_n\ n!(-1)^n \int_{-1}^{1} (1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta} dx$$

elde edilir. Burada, (II.43) ile verilen beta integralinde $t = (1+x)/2$, $y - 1 = n + \alpha$ ve $x - 1 = n + \beta$ alındığında

$$\begin{aligned} I &= a_n\ n!(-1)^n \int_{-1}^{1} 2^{2n+\alpha+\beta+1} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{n+\alpha} \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n+\beta} dx \\ &= a_n\ n!(-1)^n \frac{2^{2n+\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \end{aligned} \tag{III.17}$$

denklemi elde edilir. İntegrali hesaplamak için geriye sadece a_n'yi bulmak kaldı. Bunun için $g_n(x)$ polinomu $x > 1$ alınıp açıldığında,

$$\begin{aligned} g_n(x) &= (-1)^n (x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x-1)^{n+\alpha}(x+1)^{n+\beta}\right] \\ &= (-1)^n x^{-\alpha-\beta} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n}\left[x^{\alpha+\beta+2n}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{n+\alpha}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+\beta}\right] \\ &= (-1)^n x^{-\alpha-\beta} \left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\beta} \left[(\alpha+\beta+n+1)_n x^{\alpha+\beta+n} + \cdots\right] \\ &= (-1)^n \left(1+\frac{\alpha}{x}+\cdots\right)\left(1-\frac{\beta}{x}+\cdots\right)\left[(\alpha+\beta+n+1)_n x^n + \cdots\right] \\ &= (-1)^n (\alpha+\beta+n+1)_n x^n + \cdots \end{aligned}$$

hesabından

$$a_n = (-1)^n (n+\alpha+\beta+1)_n = (-1)^n \frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$$

olarak bulunur. Bu ve (III.17)'daki bulgular $n = m$ için (III.14)'te yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapıldığında,

$$\int_{-1}^{1} \left[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = c_n^2 I = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}$$

elde edilir. Durum 1 ve Durum 2'deki sonuçlar birleştirildiğinde teoremdeki (III.12) formülü oluşur. ■

Jacobi polinomlarının üreteç fonksiyonu, $R = (1-2xr+r^2)^{1/2}$ olmak üzere

$$F(x,r) = \frac{2^{\alpha+\beta}}{R}(1-r+R)^{-\alpha}(1+r+R)^{-\beta}$$

ile verilir. Yani, $F(x,r)$'nin seri açılımında r^n teriminin katsayısı $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ polinomudur. Bunu

$$F(x,r) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) r^n \qquad \text{(III.18)}$$

şeklinde yazabiliriz. [4] 'teki bölüm 6.42'de bunun kanıtı verilmiştir. Jacobi polinomlarının bu tanımı kullanılarak ortogonalliğin bir kanıtı daha verilebilir [4].

Teorem III.5 *(III.18) ile tanımlanan Jacobi polinomları,* $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ *ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.*

İspat. Genelliği bozmadan $0 \leq m \leq n$ alınabilir.

$$I = \int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$$

integralinde $P_m^{(\alpha,\beta)}(x)$ polinomunu açıp terimleri çarptığımızda bu integral, $k = 0, 1, \cdots, m$ için

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$$

terimlerinin bir lineer kombinasyonu şeklinde yazılır. Bu integralin değerini hesaplamak için (III.18) tanımından,

$$I_k = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \int_{-1}^{1} x^k P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \tag{III.19}$$

$$= \int_{-1}^{1} x^k F(x,r)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \tag{III.20}$$

eşitliği yazılır. $R = (1-2xr+r^2)^{1/2} = 1-ry$ değişken dönüşümü yapıldığında,

$$x = y + \frac{r}{2}(1-y^2)$$

ve

$$dx = (1-ry)dy,\ 1-x = \frac{1}{2}(1-y)(2-r-ry),\ \ 1+x = \frac{1}{2}(1+y)(2+r-ry)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu bilgiler (III.20)'de yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} I_k &= \int_{-1}^{1} x^k \frac{2^{\alpha+\beta}}{R}(1-r+R)^{-\alpha}(1+r+R)^{-\beta}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left[y + \frac{r}{2}(1-y^2)\right]^k \frac{2^{\alpha+\beta}}{1-ry} \quad \times \\ &\quad \frac{\left(\frac{1}{2}(1-y)(2-r-ry)\right)^\alpha \left(\frac{1}{2}(1+y)(2+r-ry)\ \right)^\beta}{(2-r+ry)^\alpha(2+r+ry)^\beta}(1-ry)dy \\ &= \int_{-1}^{1} \left[y + \frac{r}{2}(1-y^2)\right]^k (1-y)^\alpha\,(1+y)^\beta\,dy \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede görüldüğü üzere, I_k integrali, r'nin derecesi k olan bir polinomudur. Bu bilgi ışığında (III.19) ifadesindeki katsayılara bakıldığında, $n = k+1, k+2, ...$ için

$$\int_{-1}^{1} x^k P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = 0$$

olduğunu görürüz. Öyleyse, tekrar I integraline dönüldüğünde, $0 \leq k \leq m < n$ için tüm terimler sıfırlanacağından,

$$\int_{-1}^{1} P_m^{(\alpha,\beta)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = 0, \quad n \neq m$$

elde edilir. Bu da ortogonallik tanımı olduğundan teorem kanıtlanmış olur. ■

q-JACOBİ POLİNOMLARI

Jacobi polinomlarının iki tane q-benzeri tanımlanmıştır. Küçük q-Jacobi polinomları

$$p_n(x;a,b;q) = {}_2\phi_1\left(\begin{array}{c} q^{-n}, abq^{n+1} \\ \\ aq \end{array}; q; xq\right) \tag{III.21}$$

ile, büyük q-Jacobi polinomları ise

$$P_n(x;a,b,c;q) = {}_3\phi_2\left(\begin{array}{c} q^{-n}, abq^{n+1}, x \\ \\ aq, cq \end{array}; q, q\right) \tag{III.22}$$

ile tanımlanır. Küçük q-Jacobi polinomlarının, Jacobi polinomlarının q-benzeri olduğu

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to 1} p_n(\frac{1-x}{2}; q^\alpha, q^\beta; q) &= \lim_{q\to 1} {}_2\phi_1\left(\begin{array}{c} q^{-n}, q^{n+\alpha+\beta+1} \\ \\ q^{\alpha+1} \end{array}; q, \frac{1-x}{2}q\right) \\
&= {}_2F_1\left(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2}\right) \\
&= \frac{n!}{(\alpha+1)_n} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}
\end{aligned}$$

eşitliklerinden görülür. Büyük q-Jacobi polinomları için benzer şekilde,

$$\lim_{q\to 1} P_n(x; q^\alpha, q^\beta, -q^\gamma; q) = \lim_{q\to 1} {}_3\phi_2\left(\begin{array}{c} q^{-n}, q^{n+\alpha+\beta+1}, x \\ \\ q^{\alpha+1}, -q^{\gamma+1} \end{array}; q, q\right) = \frac{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)}{P_n^{(\alpha,\beta)}(1)}$$

eşitliği sağlandığından q-benzerliği gösterilmiş olur.

q-Jacobi polinomları, (III.2)'de verilen ayrık değişkene göre ortogonallik tanımını sağlar [3].

Teorem III.6 *Küçük q-Jacobi polinomları, $0 < q$, $aq < 1$ ve*

$$h_n(a,b;q) = \frac{(1-abq^{2n+1})(abq;q)_n(aq;q)_n(aq;q)_\infty}{(1-abq)(q;q)_n(bq;q)_n(abq^2;q)_\infty}(aq)^{-n} \tag{III.23}$$

olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(bq;q)_i}{(q;q)_i}(aq)^i p_m(q^i;a,b;q)p_n(q^i;a,b;q) \;=\; \frac{\delta_{m,n}}{h_n(a,b;q)} \tag{III.24}$$

eşitliği ile verilen ortogonallik bağıntısını sağlar.

İspat. (III.24) ifadesinde genelliği bozmadan $0 \le m \le n$ alınıp p_n açılarak

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(bq;q)_i}{(q;q)_i}(aq)^i p_m(q^i;a,b;q)p_n(q^i;a,b;q) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(bq;q)_i}{(q;q)_i}(aq)^i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-n}, abq^{n+1};q)_k}{(aq;q)_k(q;q)_k} \left(q^{i+1}\right)^k p_m(q^i;a,b;q) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-n}, abq^{n+1};q)_k}{(aq;q)_k(q;q)_k} q^k \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(bq;q)_i}{(q;q)_i}(aq)^i q^{ik} p_m(q^i;a,b;q) \end{aligned} \tag{III.25}$$

elde edilir. (III.25) ifadesinde iç kısımdaki toplamı hesaplamak için önce p_m açılıp q-binom teoremi uygulandığında,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(bq;q)_i}{(q;q)_i}(aq)^i q^{ik} p_m(q^i;a,b;q) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(bq;q)_i}{(q;q)_i}(aq)^i q^{ik} \sum_{j=0}^{m} \frac{(q^{-m}, abq^{m+1};q)_j}{(aq,q;q)_j} \left(q^{i+1}\right)^j \\ &= \sum_{j=0}^{m} \frac{(q^{-m}, abq^{m+1};q)_j}{(q,aq;q)_j} q^j \ {}_1\phi_0(bq;-;q,aq^{1+k+j}) \\ &= \sum_{j=0}^{m} \frac{(q^{-m}, abq^{m+1};q)_j}{(q,aq;q)_j} q^j \ \frac{(abq^{k+j+2};q)_\infty}{(aq^{k+j+1};q)_\infty} \\ &= \sum_{j=0}^{m} \frac{(q^{-m}, abq^{m+1};q)_j}{(q,aq;q)_j} q^j \ \frac{(abq^{k+2};q)_\infty}{(aq^{k+1};q)_\infty} \frac{(aq^{k+1};q)_j}{(abq^{k+2};q)_j} \\ &= \frac{(abq^{k+2};q)_\infty}{(aq^{k+1};q)_\infty} \ {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-m}, abq^{m+1}, aq^{k+1} \\ aq, abq^{k+2} \end{matrix} ; q, q \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada ${}_3\phi_2$ ifadesi Ek I'deki formül (5) ile açıldığında, $0 \le k \le m$ için

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(bq;q)_i}{(q;q)_i}(aq)^i q^{ik} p_m(q^i;a,b;q) = \frac{(q,bq;q)_m(abq^2;q)_\infty}{(abq^2;q)_{2m}(aq;q)_\infty}(-aq)^m q^{\binom{m}{2}} \delta_{k,m}$$

bulunur. Bu eşitlik (III.25)'te yerine yazılarak,

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(q^{-n}, abq^{n+1};q)_k}{(aq;q)_k(q;q)_k} q^k \frac{(q,bq;q)_m(abq^2;q)_\infty}{(abq^2;q)_{2m}(aq;q)_\infty}(-aq)^m q^{\binom{m}{2}} \delta_{k,m}$$

elde edilir. Toplam içindeki terimler $k \neq m$ için sıfırlanacağından, yalnızca $k = n = m$ durumu için sıfırdan farklı sonuç elde edilir. Gerekli düzenleme ve sadeleştirmeler yapıldığında, (III.24) bulunur. ■

Teorem III.7 *Büyük q-Jacobi polinomları için,*

$$h_n(a,b,c;q) = M^{-1}\frac{(1-abq^{2n+1})(abq;q)_n(aq,cq;q)_n}{(1-abq)(q;q)_n(bq,abq/c;q)_n}(-ac)^n q^{-\binom{n}{2}}$$

ve

$$M = \int_{cq}^{bq} \frac{(x/a,x/c;q)_\infty}{(x,bx/c;q)_\infty} d_q x = \frac{aq(1-q)(q,c/a,aq/c,abq^2;q)_\infty}{(aq,bq,cq,abq/c;q)_\infty} \tag{III.26}$$

olmak üzere

$$\int_{cq}^{bq} P_m(x;a,b,c;q)P_n(x;a,b,c;q)\ \frac{(x/a,x/c;q)_\infty}{(x,bx/c;q)_\infty} d_q x = \frac{\delta_{m,n}}{h_n(a,b,c;q)} \tag{III.27}$$

eşitliği ile verilen ortogonallik bağıntısı sağlanır.

İspat. (III.27)'deki integralde P_m Ek I'deki formül (9) ile, P_n ise (III.22) tanımı ile açılırsa,

$$\begin{aligned} I &= \int_{cq}^{bq} P_m(x;a,b,c;q)P_n(x;a,b,c;q)\ \frac{(x/a,x/c;q)_\infty}{(x,bx/c;q)_\infty} d_q x \\ &= \int_{cq}^{bq} \frac{(bq,abq/c;q)_m}{(aq,cq;q)_m}(c/b)^m\ {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-m},abq^{m+1},bx/c \\ bq,abq/c \end{matrix};q,q\right) \times \\ &\quad {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-n},abq^{n+1},x \\ aq,cq \end{matrix};q,q\right)\frac{(x/a,x/c;q)_\infty}{(x,bx/c;q)_\infty} d_q x \end{aligned}$$

elde edilir. Bu integralde

$$\frac{(x/a,x/c;q)_\infty}{(x,bx/c;q)_\infty} = A \quad \text{ve} \quad \frac{(bq,abq/c;q)_m}{(aq,cq;q)_m}(c/b)^m = B$$

denip ${}_3\phi_2$ fonksiyonlarının seri açılımları yazılırsa,

$$I = \int_{cq}^{bq} A \times B \times \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-m},abq^{m+1},bx/c;q)_j(q^{-n},abq^{n+1},x;q)_k}{(bq,abq/c;q)_j(q;q)_j(q;q)_k(aq,cq;q)_k} q^{j+k}$$

elde edilir. Bu ifadede x içeren terimler bir araya toplanıp integral seri toplamının içine alınırsa,

$$\begin{aligned}\int_{cq}^{bq}(bx/c;q)_j(x;q)_k\frac{(x/a,x/c;q)_\infty}{(x,bx/c;q)_\infty}d_qx &= \int_{cq}^{bq}\frac{(x/a,x/c;q)_\infty}{(xq^k,bxq^j/c;q)_\infty}d_qx\\ &= M\frac{(bq,abq/c;q)_j(aq,cq;q)_k}{(abq^2;q)_{j+k}}\end{aligned}$$

integral hesabından,

$$I=M\frac{(bq,abq/c;q)_m}{(aq,cq;q)_m}(c/b)^m\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-m},abq^{m+1};q)_j(q^{-n},abq^{n+1};q)_k}{(q;q)_j(q;q)_k(abq^2;q)_{j+k}}q^{j+k} \tag{III.28}$$

bulunur. Genelliği bozmadan $0\leq m\leq n$ alalım. Ek - I'deki formül (7)'den elde edilen

$$\sum_{j=0}^{m}\frac{(q^{-m},abq^{m+1};q)_j}{(q;abq^{k+2};q)_j}q^j=\frac{(q^{1+k-m};q)_m}{(abq^{k+2};q)_m}(abq^{m+1})^m$$

eşitliği, (III.28)'deki serileri toplamak için kullanılırsa,

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-m},abq^{m+1};q)_j(q^{-n},abq^{n+1};q)_k}{(q;q)_j(q;q)_k(abq^2;q)_{j+k}}q^{j+k}\\ =&\ \frac{(q^{-n},abq^{n+1};q)_m}{(abq^2;q)_{2m}}(abq^{m+2})^m\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(q^{m-n},abq^{m+n+1};q)_k}{(q,abq^{2m+2};q)_k}q^k\\ =&\ \frac{(q^{-n},abq^{n+1};q)_n}{(abq^2;q)_{2n}}(abq^{n+2})^n\ \delta_{m,n}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sonuç (III.28)'de yerine yazıldığında, (III.27)'nin sağ tarafına ulaşılır.

■

Küçük q-Jacobi polinomları, ortogonal polinom dizileri olarak, (III.4) ile verilen bir üç terimli indirgeme bağıntısını sağlarlar. Bu bağıntı, Teorem III.1'deki hesaplamalar,

$$A_n=\frac{1}{a_n}\ ,\ C_n=\frac{c_n}{a_n}\qquad \text{ve}\qquad B_n=\frac{c_n}{a_n}+1$$

olmak üzere yapıldığında,

$$a_n=\frac{(1-abq^{n+1})(1-aq^{n+1})}{(1-abq^{2n+1})(1-abq^{2n+2})}(-q^n) \tag{III.29}$$

ve

$$c_n = \frac{(1-q^n)(1-bq^n)}{(1-abq^{2n})(1-abq^{2n+1})}(-aq^n) \tag{III.30}$$

olmak üzere

$$xp_n(x) = a_n\left[p_{n+1}(x) - p_n(x)\right] - c_n\left[p_n(x) - p_{n-1}(x)\right] \tag{III.31}$$

formülüyle verilir. Teorem III.1'deki $A_nC_{n+1} > 0$ koşulunun sağlanması için $0 < q < 1$, $0 < aq < 1$ ve $bq < 1$ olmalıdır.

q-Jacobi polinomları, için ileride çeşitli uygulamalarını yapacağımız daha genel bir ortogonallik bağıntısı [6]'da verilmiştir. Bu bağıntıyı bir teorem altında inceleyelim:

Teorem III.8 *Küçük q-Jacobi polinomları için ortogonallik bağıntısı,*

$$K = \frac{(1/b, 1/abcq, abcq^2, q; q)_\infty}{(aq, cq, 1/abq, 1/bc; q)_\infty} \tag{III.32}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} &\sum_{i=-\infty}^{\infty} p_m(cq^i; a, b; q)p_n(cq^i; a, b; q)\ \frac{(bcq;q)_i}{(cq;q)_i}(aq)^i \\ = \ & K\frac{(q;q)_n(bq;q)_n(1-abq)(aq)^n}{(aq;q)_n(abq;q)_n(1-abq^{2n+1})}\delta_{m,n}. \end{aligned} \tag{III.33}$$

İspat. (III.33) ifadesine kısaca S denip küçük q-Jacobi polinomlarını yerine yazıldığında,

$$S = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{(bcq;q)_i}{(cq;q)_i}(aq)^i \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(q^{-n}, abq^{n+1};q)_r}{(aq,q;q)_r}\frac{(q^{-m}, abq^{m+1};q)_s}{(aq,q;q)_s}(cq^{i+1})^{r+s}$$

ifadesi elde edilir. Burada i'den bağımsız kısımlar dışarı alınıp

$$N = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(q^{-n}, abq^{n+1};q)_r}{(aq,q;q)_r}\frac{(q^{-m}, abq^{m+1};q)_s}{(aq,q;q)_s}(cq)^{r+s}$$

yazıldığında, (II.27) ile verilen Ramanujan ${}_1\Psi_1$ formülünden

$$\begin{aligned} S &= N \times \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{(bcq;q)_i}{(cq;q)_i}(aq^{1+r+s})^i = N \times\ {}_1\Psi_1\left[\begin{matrix} bcq \\ \\ cq \end{matrix}\ ; q, aq^{1+r+s}\right] \\ &= N \times \frac{(q, 1/b, abcq^{2+r+s}, 1/abcq^{1+r+s};q)_\infty}{(cq, 1/bc, aq^{1+r+s}, 1/abq^{1+r+s};q)_\infty} \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu formülde q-Pochammer sembollerini (II.15)'in değişik versiyonlarını kullanarak gereken şekillerde açıp sadeleştirmeler yapıldığında,

$$S = N \times \left(K \cdot \frac{(aq;q)_{r+s}(1/abcq^{1+r+s};q)_{r+s}}{(abcq^2;q)_{r+s}(1/abq^{2+r+s};q)_{r+s}} \right)$$

bulunur. N yerine yazıldıktan sonra, bu formüldeki kesirli ifade (II.6) ve (II.12) eşitlikleriyle açılıp sadeleştirmeler yapıldığında

$$\begin{aligned} S &= K \cdot \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(q^{-n}, abq^{n+1};q)_r}{(abq^2, q;q)_r} q^r \right) \times \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(q^{-m}, abq^{m+1}, aq^{1+r};q)_s}{(aq, q, abq^{2+r};q)_s} q^s \right) \\ &= K \cdot \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(q^{-n}, abq^{n+1};q)_r}{(abq^2, q;q)_r} q^r \right) \times {}_3\phi_2 \left[\begin{matrix} q^{-m}, abq^{m+1}, aq^{1+r} \\ aq, abq^{2+r} \end{matrix} ; q, q \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki ${}_3\phi_2$ ifadesi Ek I'de (5) ile verilen q-Saalchütz toplam formülüyle açılırsa,

$$S = K \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(q^{-n}, abq^{n+1};q)_r}{(abq^2, q;q)_r} q^r \frac{(b^{-1}q^{-m}, q^{-r};q)_m}{(aq, abq^{1+m+r};q)_s}$$

elde edilir. Genelliği bozmadan $n \leq m$ alabiliriz. Bu durumda, son formüldeki katsayılara bakıldığında $n < r$ için $(q^{-n};q)_r = 0$ ve $r < m$ için $(q^{-r};q)_m = 0$ olacağından, $n \neq m$ için katsayılar sıfırlanır. Dolayısıyla,

$$S = 0, \qquad n \neq m$$

bulunur. $n = m$ için ise, son formül (II.12) kullanarak açılıp sadeleştirmeler yapıldığında,

$$S = K \frac{(q;q)_n (bq;q)_n (1 - abq)(aq)^n}{(aq;q)_n (abq;q)_n (1 - abq^{2n+1})}$$

formülü elde edilir. Böylece (III.33) kanıtlanmış olur. ■

Bu teoremde $c = 1$ alındığında Teorem III.6 elde edilir. Bu yüzden bu teoreme Teorem III.6'nın genelleştirilmiş versiyonu denebilir.

III.3 ULTRAKÜRESEL VE q-ULTRAKÜRESEL POLİNOMLAR

Jacobi polinomları kullanılarak başka polinomlar tanımlanabilir. Bunlardan biri ultraküresel polinomlardır [4].

Tanım III.3 *$\lambda > -1$ bir reel sayı olmak üzere*

$$C_n^{\lambda}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)_n} P_n^{(\lambda-(1/2),\lambda-(1/2))}(x) \tag{III.34}$$

şeklinde tanımlanan polinomlara ultraküresel polinom denir.

Ultraküresel polinomlar, tanımları gereği Jacobi polinomlarının $\alpha = \beta$ için özel durumudur. Ultraküresel polinomların üreteç fonksiyonu, Jacobi polinomları yardımıyla bulunabilir [4].

Teorem III.9 *(III.34) ile verilen ultraküresel polinomlar*

$$U(x,r) = (1 - 2xr + r^2)^{-\lambda} \tag{III.35}$$

fonksiyonu tarafından üretilirler.

İspat. Öncelikle, Jacobi polinomları için (III.18)'de verilenden farklı bir üreteç fonksiyonunu bulmak gerekir. Bunun için Teorem III.4'ten $\alpha, \beta > -1$ ve

$$\begin{aligned} h_k &= \int_{-1}^{1} \left[P_k^{(\alpha,\beta)}(x)\right]^2 (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} dx \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)k!} \end{aligned}$$

olmak üzere Jacobi polinomlarında "Poisson çekirdeği" adı verilen

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k^{(\alpha,\beta)}(x) P_k^{(\alpha,\beta)}(y) r^k / h_k$$

toplamı yazılır. Bu ifadede $y = 1$ alındığında $P_k^{(\alpha,\beta)}(1) = (\alpha+1)_k/k!$ yerine yazılıp gamma fonksiyonları da açılarak

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta+1)_k}{(\beta+1)_k}P_k^{(\alpha,\beta)}(x)r^k$$

Buradaki seri,

$$r^{(\alpha+\beta+1)/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+1)_n}{(\beta+1)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)r^n$$

serisinde türev alınarak elde edilmiş bir seridir. Bu seride $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ polinomunun (III.8) ile verilen hipergeometrik açılımı, $(1+x)/2$'nin kuvvetleri için yapılıp yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+1)_n}{(\beta+1)_n}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)r^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(\alpha+\beta+1)_{n+k}\left((1+x)/2\right)^k}{(n-k)!k!(\beta+1)_k}(-1)^n r^n\\ &= \sum_{k,n}\frac{(\alpha+\beta+1)_{n+2k}\left(1+x\right)^k}{n!k!(\beta+1)_k 2^k}(-1)^n r^{n+k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2k+\alpha+\beta+1)_n}{n!}(-1)^n r^n\cdot\frac{(\alpha+\beta+1)_{2k}\left(1+x\right)^k}{k!(\beta+1)_k 2^k}r^k\end{aligned}$$

elde edilir. Binom teoremi ve $(a)_{2k} = 2^{2k}(a/2)_k((a+1)/2)_k$ eşitliğini kullanılarak sondaki ifade

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+1)_{2k}\left(1+x\right)^k r^k}{k!(\beta+1)_k 2^k(1+r)^{2k+\alpha+\beta+1}}\\ =\ &\frac{1}{(1+r)^{\alpha+\beta+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{((\alpha+\beta+1)/2)_k((\alpha+\beta+2)/2)_k 2^k\left(1+x\right)^k r^k}{k!(\beta+1)_k(1+r)^{2k}}\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu seri hipergeometrik seri şeklinde yazıldığında tüm bu işlemlerin sonucu olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+\beta+1)_n P_n^{(\alpha,\beta)}(x)r^n}{(\beta+1)_n} = \frac{1}{(1+r)^{\alpha+\beta+1}}\,{}_2F_1\left[\begin{matrix}(\alpha+\beta+1)/2,(\alpha+\beta+2)/2\\ \beta+1\end{matrix};\frac{2r(1+x)}{(1+r)^2}\right] \tag{III.36}$$

elde edilir. Böylece başta ihtiyaç duyulan üreteç fonksiyonu oluşturulmuş oldu. Ultraküresel polinomlara geçiş yapmak için (III.36)'da $\alpha = \beta$ alındığında,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\alpha+1)_n}{(\alpha+1)_n} P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) r^n &= \frac{1}{(1+r)^{2\alpha+1}} \, {}_2F_1 \left[\begin{matrix} (2\alpha+1)/2, \alpha+1 \\ \alpha+1 \end{matrix} ; \frac{2r(1+x)}{(1+r)^2} \right] \\ &= \frac{1}{(1+r)^{2\alpha+1}} \left(1 - \frac{2r(1+x)}{(1+r)^2} \right)^{-\alpha-\frac{1}{2}} = (1-2xr+r^2)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\lambda = \alpha + \frac{1}{2}$ alınarak (III.35) eşitliği elde edilir. ■

Teorem III.10 *Ultraküresel polinomlar, $\lambda > -1$, $\lambda \neq 0$ olmak üzere $(1-x^2)^{\lambda-(1/2)}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Bu ortogonallik,*

$$\int_{-1}^{1} C_n^{\lambda}(x) C_m^{\lambda}(x) (1-x^2)^{\lambda-(1/2)} dx = \left[\frac{(2\lambda)_n}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n} \right]^2 \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{(n+\lambda)\,\Gamma(\lambda)} \delta_{m,n}$$

bağıntısıyla verilir.

İspat. Teorem III.4'te $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$alınırsa

$$\begin{aligned}&\int_{-1}^{1} C_n^{\lambda}(x) C_m^{\lambda}(x) (1-x^2)^{\lambda-(1/2)} dx \\ &= \int_{-1}^{1} \frac{(2\lambda)_n}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n} \frac{(2\lambda)_m}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_m} P_n^{(\lambda-(1/2),\lambda-(1/2))}(x) P_m^{(\lambda-(1/2),\lambda-(1/2))}(x) (1-x^2)^{\lambda-(1/2)} dx \\ &= \left[\frac{(2\lambda)_n}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_n} \right]^2 \frac{2^{2\lambda}\left(\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})\right)^2}{(2n+2\lambda)\Gamma(n+2\lambda)n!} \delta_{m,n} \\ &= \sqrt{\pi} \frac{(2\lambda)_n\ \Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{(n+\lambda)\ \Gamma(\lambda)} \delta_{m,n}\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. ■

Bu kanıttakine benzer şekilde, Jacobi polinomları için Bölüm III.2'deki formüller kullanılarak ultraküresel polinomların özellikleri çıkarılır. (III.11) ile verilen Rodrigues formülü ultraküresel polinomlar için

$$(1-x^2)^{\lambda-(1/2)} C_n^{\lambda}(x) = \frac{(-2)^n (\lambda)_n}{n!(n+2\lambda)_n} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n+\lambda-(1/2)} \qquad \text{(III.37)}$$

şeklini alır. Üç terimli indirgeme bağıntısı ise, $n \geq 2$, $C_0^\lambda(x) = 1$ ve $C_1^\lambda(x) = 2x$ olmak üzere

$$nC_n^\lambda(x) = 2(n+\lambda-1)xC_{n-1}^\lambda(x) - (n+2\lambda-2)C_{n-2}^\lambda(x) \tag{III.38}$$

formülüyle verilir [4].

Ultraküresel polinomlar hipergeometrik serilerle ifade edilebilirler.

Teorem III.11 *Ultraküresel polinomlar için*

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(\lambda)_n}{n!}(2x)^n \; {}_2F_1\left(\begin{array}{c} -n/2, (1-n)/2 \\ \\ 1-n-\lambda \end{array} ; x^{-2}\right) \tag{III.39}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Üreteç fonksiyonu $U(x,r)$ ile başlayarak

$$\begin{aligned}
(1-2xr+r^2)^{-\lambda} &= (1+r^2)^{-\lambda}\left(1-\frac{2xr}{1+r^2}\right)^{-\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_k}{k!}\frac{(2xr)^k}{(1+r^2)^{k+\lambda}} \\
&= \sum_{n,k}\frac{(\lambda)_k}{k!}\frac{(\lambda+k)_n}{n!}(-1)^n(2x)^k r^{k+2n} = \sum_{n,k}\frac{(\lambda)_{k+n}}{k!n!}(-1)^n(2xr)^k r^{2n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda)_n}{n!}(2x)^n r^n \; {}_2F_1\left[\begin{array}{c} -n/2, (1-n)/2 \\ \\ 1-n-\lambda \end{array} ; x^{-2}\right]
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan da teoremde istenen eşitlik çıkar. ■

Jacobi polinomlarının bir özel durumu olmasının yanısıra, ultraküresel polinomlar kendilerine özgü kullanışlı ve güzel özellikleri de taşırlar. Bunlara bir örnek olarak, (III.35) ile verilen üreteç fonksiyonunda $x = \cos\theta$ yazılırsa,

$$(1-2xr+r^2)^{-\lambda} = (1-2r\cos\theta+r^2)^{-\lambda} = (1-re^{i\theta})^{-\lambda}(1-re^{-i\theta})^{-\lambda}$$

elde edilir. Binom teoremine göre bu ifadeler açılarak

$$C_n^\lambda(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda)_k(\lambda)_{n-k}}{k!(n-k)!}e^{i(n-2k)\theta} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda)_k(\lambda)_{n-k}}{k!(n-k)!}\cos(n-2k)\theta$$

formülü çıkarılır.

$q-$ULTRAKÜRESEL POLİNOMLAR:

Tanım III.4 *Sürekli q-ultraküresel polinomlar, $x = \cos\theta$ olmak üzere,*

$$C_n(x;\beta|q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\beta;q)_k(\beta;q)_{n-k}}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} \cos(n-2k)\theta \tag{III.40}$$

ile tanımlanır.

Bu tanımın q-hipergeometrik serilerle yazılışı

$$C_n(x;\beta|q) = \frac{(\beta;q)_n}{(q;q)_n} e^{in\theta} \, {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q^{-n}, \beta \\ q^{1-n}/\beta \end{matrix} ; q, q/\beta e^{2i\theta} \right) \tag{III.41}$$

$$= \frac{(\beta^2;q)_n}{(q;q)_n} e^{-in\theta} \, {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, \beta, \beta e^{2i\theta} \\ \beta^2, 0 \end{matrix} ; q, q \right) \tag{III.42}$$

şeklindedir [3]. q-Benzerliği limit hesabıyla aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} \lim_{q\to 1} C_n(x;q^\lambda|q) &= \lim_{q\to 1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\beta;q)_n(\beta;q)_{n-k}}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} \cos(n-2k)\theta \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda)_k(\lambda)_{n-k}}{k!(n-k)!} \cos(n-2k)\theta \\ &= C_n^\lambda(x) \end{aligned}$$

Teorem III.12 *q-Ultraküresel polinomlar*

$$\omega_\beta(\cos\theta) = \left| \frac{(e^{2i\theta};q)_\infty}{(\beta e^{2i\theta};q)_\infty} \right|^2 \tag{III.43}$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Ortogonallik bağıntısı

$$\int_0^\pi C_m(\cos\theta;\beta|q)C_n(\cos\theta;\beta|q)\omega_\beta(\cos\theta)d\theta \tag{III.44}$$

$$= \frac{2\pi(1-\beta)}{(1-\beta q^n)} \frac{(\beta^2;q)_n}{(q;q)_n} \frac{(\beta;q)_\infty(\beta q;q)_\infty}{(\beta^2;q)_\infty(q;q)_\infty} \delta_{m,n}$$

İspat. (III.40) kullanılarak $C_m(\cos\theta;\beta|q)$ yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi C_m(\cos\theta;\beta|q)C_n(\cos\theta;\beta|q)\omega_\beta(\cos\theta)d\theta \\
=& \int_0^\pi \left(\sum_{k=0}^m \frac{(\beta;q)_k(\beta;q)_{n-k}}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}\cos(m-2k)\theta\right) C_n(\cos\theta;\beta|q)\omega_\beta(\cos\theta)d\theta \\
=& \sum_{k=0}^m \frac{(\beta;q)_k(\beta;q)_{n-k}}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} \int_0^\pi \cos(m-2k)\theta C_n(\cos\theta;\beta|q)\omega_\beta(\cos\theta)d\theta
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradaki toplamın içindeki integrale J denirse, integralin içindeki ifade θ yerine $-\theta$ alındığında değişmediğinden,

$$\begin{aligned}
J &= \int_0^\pi \cos(m-2k)\theta C_n(\cos\theta;\beta|q)\omega_\beta(\cos\theta)d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi e^{i(m-2k)\theta}\sum_{l=0}^n \frac{(\beta;q)_l(\beta;q)_{n-l}}{(q;q)_l(q;q)_{n-l}} e^{i(n-2l)\theta}\omega_\beta(\cos\theta)d\theta
\end{aligned}$$

yazılır. Bu integral $i\theta$'nın tek katsayıları için sıfırlanacağından, bir s tamsayısı için $m-n-2k=-2s$, yani $m-2k=n-2s$ olmalıdır. Bu durumda bir üstteki ifade

$$J = \frac{1}{2}\sum_{l=0}^n \frac{(\beta;q)_l(\beta;q)_{n-l}}{(q;q)_l(q;q)_{n-l}} \int_{-\pi}^\pi e^{2i(n-l-s)\theta}\omega_\beta(\cos\theta)d\theta$$

şeklinde yazılabilir. Bu toplamın içindeki integrale I denirse,

$$I = \int_{-\pi}^\pi e^{ik\theta}\omega_\beta(\cos\theta)d\theta = \int_{-\pi}^\pi e^{ik\theta}\frac{(e^{2i\theta};q)_\infty(e^{-2i\theta};q)_\infty}{(\beta e^{2i\theta};q)_\infty(\beta e^{-2i\theta};q)_\infty}d\theta$$

bulunur. Buradan, $|\beta|<1$ için q-binom teoreminden

$$I = \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{(1/\beta;q)_n}{(q;q)_n}\beta^n\right)\left(\sum_{m=0}^\infty \frac{(1/\beta;q)_m}{(q;q)_m}\beta^m\right)\int_{-\pi}^\pi e^{i(k+2n-2m)\theta}d\theta$$

integrali gelir. k tek olduğunda bu integral sıfırlanacağından, $k=2l$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi\sum_{n=0}^\infty \frac{(1/\beta;q)_\infty(1/\beta;q)_{l+n}}{(q;q)_n(q;q)_{l+n}}\beta^{2n+l} \\
&= 2\pi\frac{(1/\beta;q)_l}{(q;q)_l}\beta^l\ {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} 1/\beta, q^l/\beta \\ q^{l+1}\end{matrix}; q, \beta^2\right)
\end{aligned}$$

sonucu bulunur. Buradaki Heine serisi Ek I'deki formül (3) ile açıldığında,

$$
{}_2\phi_1\left(\begin{array}{c} 1/\beta, q^l/\beta \\ \\ q^{l+1} \end{array}; q, \beta^2\right) = \frac{(\beta q^l;q)_\infty(\beta q;q)_\infty}{(\beta^2;q)_\infty(q^{l+1};q)_\infty}\, {}_2\phi_1\left(\begin{array}{c} 1/q, q^l/\beta \\ \\ \beta q^l \end{array}; q, \beta q\right)
$$

bulunur. Bu ${}_2\phi_1$ yalnızca iki terim içerdiği için, bunlar I'da yerine yazılırsa,

$$
I = \frac{2\pi\beta^l(1/\beta;q)_l(1+q^l)}{(\beta q;q)_l}\frac{(\beta q;q)_\infty(\beta;q)_\infty}{(\beta^2;q)_\infty(q;q)_\infty}
$$

sonucu bulunur. Teoremde verilen integrale dönüş yapmak için I için bulunan sonuç J'de yerine yazılıp gerekli sadeleştirme ve dönüşümler uygulandığında, $s=1,2,...,n-1$ için $J=0$ ve

$$
J = \pi\frac{(\beta q;q)_\infty(\beta;q)_\infty(\beta^2;q)_n}{(\beta^2;q)_\infty(q;q)_\infty(\beta q;q)_n}, \quad s=0,n
$$

bulunur. Baştaki integrale dönülüp J yerine yazıldığında,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\pi C_n(\cos\theta;\beta|q)C_m(\cos\theta;\beta|q)\omega_\beta(\cos\theta)d\theta \\
=\;& 2\pi\frac{(\beta q;q)_\infty(\beta;q)_\infty(\beta^2;q)_n(\beta;q)_n}{(\beta^2;q)_\infty(q;q)_\infty(\beta q;q)_n(q;q)_n}\delta_{m,n} \\
=\;& \frac{2\pi(1-\beta)}{(1-\beta q^n)}\frac{(\beta^2;q)_n}{(q;q)_n}\frac{(\beta;q)_\infty(\beta q;q)_\infty}{(\beta^2;q)_\infty(q;q)_\infty}\delta_{m,n}
\end{aligned}
$$

eşitlikleri yazılarak (III.44) elde edilir. ∎

q-ultraküresel polinomların üreteç fonksiyonu, $0<r<1$ için,

$$
\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\cos\theta;\beta|q)r^n = \frac{(\beta re^{i\theta};q)_\infty(\beta re^{-i\theta};q)_\infty}{(re^{i\theta};q)_\infty(re^{-i\theta};q)_\infty} \tag{III.45}
$$

ile verilen fonksiyondur. Üç terimli indirgeme bağıntısı,

$$
\begin{aligned}
2(1-\beta q^n)xC_n(x;\beta|q) &= (1-q^{n+1})C_{n+1}(x;\beta|q) \\
&\quad +(1-\beta^2q^{n-1})C_{n-1}(x;\beta|q)
\end{aligned} \tag{III.46}
$$

ifadesiyle verilir [4].

III.4 HERMİTE VE q-HERMİTE POLİNOMLARI

Hermite polinomları $e^{-x^2/2}$fonksiyonunun türevlerinden ortaya çıkmıştır [5]. $\omega(x) = e^{-x^2/2}$ olsun. Birkaç kez türev alınırsa:

$$\omega'(x) = -xe^{-x^2/2}, \quad \omega''(x) = (x^2-1)e^{-x^2/2}, \quad \omega'''(x) = (-x^3+3x)e^{-x^2/2}, ...$$

Türev almaya devam edilirse, n'inci türevde $e^{-x^2/2}$'nin yanındaki çarpanın, x'in derecesi n olan bir polinomu olduğu görülür. Bu polinoma $H_n(x)$ denirse

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\omega^{(n)}(x)$$

ve buradan

$$\omega^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x^2/2} H_n(x)$$

olduğu görülür. Bu ifadenin türevi alınırsa,

$$\omega^{(n+1)}(x) = (-1)^n \left[-xH_n(x) + H_n'(x)\right] e^{-x^2/2}$$

elde edilir. Aynı zamanda

$$\omega^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{-x^2/2} H_{n+1}(x)$$

olduğundan, bu iki ifade eştilenerek

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - H_n'(x) \tag{III.47}$$

elde edilir. Bu formülle, $H_0(x) = 1$'den başlanarak hesaplanırsa, $H_n(x)$ polinomunun derecesi n ve başkatsayısı 1 olan bir polinom olduğu görülür. Bu işlemlerle elde edilen

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} \tag{III.48}$$

polinomlarına Hermite polinomları denir.

Hermite polinomlarının açık yazılışı, $e^{-x^2/2}$ fonksiyonunun formel kuvvet serisi açılımı yazılarak

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k} \tag{III.49}$$

şeklinde verilir [7]. (Burada, [.] gösterimi tamdeğer fonksiyonunu ifade eder.)

Hermite polinomları, en temel ortogonal polinomlardan biridir. Ortogonalliği aşağıdaki teoremle kanıtlayalım:

Teorem III.13 *Hermite polinomları, $(-\infty,\infty)$ aralığında $\omega(x)=e^{-x^2/2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Ortogonallik bağıntısı*

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2/2}dx = n!(2\pi)^{1/2}\delta_{m,n} \tag{III.50}$$

şeklindedir.

İspat. Hermite polinomlarının tanımından,

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2/2}dx = (-1)^n\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)\omega^{(n)}(x)dx$$

şeklinde yazılır. Genelliği bozmadan $m \le n$ alınabilir. Kısmi integral almak için

$$\begin{aligned} u &= H_m(x) & dv &= \omega^{(n)}(x)dx \\ du &= H'_m(x)dx & v &= \omega^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

denirse,

$$I = uv|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} vdu$$

integralinde uv ifadesi $e^{-x^2/2}$ ile bir polinomun çarpımı olduğundan, $x=\pm\infty$ için sıfırlanır. Aynı kısmi integrali m defa uygulayarak

$$I=(-1)^{n+m}\int_{-\infty}^{\infty} H_m^{(m)}(x)\omega^{(n-m)}(x)dx \tag{III.51}$$

elde edilir.

$n-m>0$ durumunda bir kere daha aynı kısmi integral uygulandığında $H_m^{(m+1)}(x)\equiv 0$ olacağından, $I=0$ sonucuna ulaşılır. Böylece Hermite polinomlarının ortogonalliği kanıtlanmış olur.

$n = m$ durumunda ise (III.51) integrali

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2/2} dx = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(x)\omega(x)dx$$
$$= n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = n!(2\pi)^{1/2}$$

bulunur ve böylece (III.50) değeri hesaplanmış olur. ∎

Hermite polinomları, her ortogonal polinom dizisi gibi (III.4) ile verilen bir üç terimli indirgeme bağıntısını sağlarlar. Bu bağıntıyı bulmak için öncelikle

$$\omega'(x) + x\omega(x) = 0$$

denklemine bakılır. Bu denklemin n defa türevi alındığında

$$\omega^{(n+1)}(x) + x\omega^{(n)}(x) + n\omega^{(n-1)}(x) = 0$$

elde edilir. Hermite polinomları cinsinden ifade edilirse,

$$e^{-x^2/2} \left[(-1)^{n+1} H_{n+1}(x) + x(-1)^n H_n(x) + n(-1)^{n-1} H_{n-1}(x) \right] = 0$$

ve buradan da

$$H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0 \qquad \text{(III.52)}$$

ile verilen üç terimli indirgeme bağıntısı bulunur.

Hermite polinomlarının, ortogonal polinom dizileri için verilen (III.7) türündeki diferansiyel denklemini bulmak için (III.47) ifadesi (III.52) ile karşılaştırılıp n yerine $n + 1$ alınırsa

$$H'_{n+1}(x) = (n + 1)H_n(x)$$

bulunur. $H'_{n+1}(x)$'in bu denklemdeki ve (III.47)'in türevindeki ifadeleri eşitlenirse, Hermite polinomlarının diferansiyel denklemi için

$$H''_{n+1}(x) - xH'_n(x) + nH_n(x) = 0 \qquad \text{(III.53)}$$

ifadesi elde edilmiş olur.

Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$H(x,t) = e^{xt-(t^2/2)} \qquad \text{(III.54)}$$

şeklinde tanımlanır. Bu fonksiyonun Hermite polinomlarını ürettiğini görmek için, $H(x,t)$'nin t için kuvvet serisi açılımına bakmak gerekir.

$$H(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{1}{n!} t^n$$

olsun. (III.54)'ten gelen $\partial H/\partial t = (x-t)H$ eşitliğinde bu seri açılımını yerine yazıp katsayıları eşitlediğimizde,

$$\frac{1}{n!} f_{n+1}(x) = \frac{x}{n!} f_n(x) - \frac{1}{(n-1)!} f_{n-1}(x)$$

eşitliği bulunur. Eşitlik $n!$ ile çarpıldığında

$$f_{n+1}(x) - x f_n(x) + n f_{n-1}(x) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu da (III.52) ile verilen indirgeme bağıntısıdır. (III.54) ile yapılan hesaplamayla $f_0(x) = 1 = H_0(x)$, $f_1(x) = x = H_1(x)$ bulunacağından, tümevarımla her $n \in \mathbb{N}$ için $f_0(x) = H_0(x)$ olduğu görülür. Elde edilen

$$e^{xt-(t^2/2)} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{1}{n!} t^n$$

ifadesinden, (III.54) ile verilen $H(x,t)$ fonksiyonunun, Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonu olduğu kanıtlanmış olur [5].

Hermite polinomları hipergeometrik fonksiyonlarla (II.19)'da verilen şekilde ifade edilebillir. (III.48) tanımı seri açılımıyla yazılırsa,

$$\begin{aligned} H_n(x) &= (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2} \\ &= (-1)^n \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i i!} x^{2i} \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(2j-n+1)_n}{2^j j!} x^{2j-n} \right) \end{aligned}$$

Bu çarpımı yapıp gereken katsayılar hesaplandığında,

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k(n)_{2k}(2x)^{n-2k} = (2x)^n\ {}_2F_0(-n/2,(1-n)/2;-;-x^{-2}) \qquad \text{(III.55)}$$

elde edilir .

q-HERMİTE POLİNOMLARI:

Sürekli q-Hermite polinomları, (sürekli) q-ultraküresel polinomların $\beta = 0$ alınarak yazılan özel durumudur [4].

Tanım III.5 *C_n q-ultraküresel polinom olmak üzere,*

$$H_n(x|q) = (q;q)_n C_n(x;0|q) \qquad \text{(III.56)}$$

ile verilen polinomlara q-Hermite polinomları denir.

Bu tanımda, ultraküresel polinomlarda olduğu gibi $x = \cos\theta$ alınırsa, q-Hermite polinomları için eşdeğer bir tanım,

$$\begin{aligned} H_n(\cos\theta|q) &= (q;q)_n C_n(\cos\theta;0|q) \\ &= (q;q)_n \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(n-2k)\theta}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(q;q)_n e^{i(n-2k)\theta}}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} \end{aligned} \qquad \text{(III.57)}$$

Bu tanımdaki polinomların Hermite polinomları ile q-benzerliği

$$\lim_{q\to 1^-} \frac{H_n\left(x\left(\frac{1-q}{2}\right)^{1/2}|q\right)}{\left(\frac{1-q}{2}\right)^{n/2}} = H_n(x)$$

eşitliğinden çıkarılır.

Teorem III.14 *q-Hermite polinomları, $\omega_0(\cos\theta) = \left|(e^{2i\theta};q)_\infty\right|^2$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Ortogonallik bağıntısı*

$$\int_0^\pi H_n(\cos\theta|q)H_m(\cos\theta|q)\omega_0(\cos\theta)d\theta = \frac{2\pi}{(q^{n+1};q)_\infty}\delta_{m,n} \qquad \text{(III.58)}$$

ile verilir.

İspat. q-Hermite polinomlarının (III.56) tanımı yerine yazıldığında

$$\begin{aligned}\int_0^\pi H_n(\cos\theta|q)H_m(\cos\theta|q)\omega_0(\cos\theta)d\theta &= \int_0^\pi (q;q)_n C_n(x;0|q)(q;q)_m C_m(x;0|q)\omega_0(\cos\theta)d\theta \\ &= (q;q)_n(q;q)_m \int_0^\pi C_n(x;0|q)C_m(x;0|q)\omega_0(\cos\theta)d\theta\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu ifadedeki integral (III.44) formülünde $\beta = 0$ alarak hesaplanırsa

$$\int_0^\pi H_n(\cos\theta|q)H_m(\cos\theta|q)\omega_0(\cos\theta)d\theta = \frac{(q;q)_n(q;q)_m 2\pi}{(q;q)_n(q;q)_\infty}\delta_{m,n} = \frac{2\pi}{(q^{n+1};q)_\infty}\delta_{m,n}$$

elde edilir. ■

q-Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonu, $x = \cos\theta$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x|q)}{(q;q)_n} r^n = \frac{1}{(re^{i\theta};q)_\infty (re^{-i\theta};q)_\infty} \tag{III.59}$$

ile, üç terimli indirgeme bağıntısı ise

$$2xH_n(x|q) = H_{n+1}(x|q) + (1-q^n)H_{n-1}(x|q) \tag{III.60}$$

ifadesiyle verilir.

q-HERMİTE TİPİ POLİNOMLAR:

[6]'da, küçük q-Jacobi polinomları kullanılarak tanımlanan q-Hermite tipi bir polinom dizisi tanımlanıp Teorem III.8'den bu yeni polinomların ortogonalliği ve üreteç fonksiyonları bulunmuştur. Bu bulguları açmak için

$$H_n(x;c;q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n};q)_k}{(q^2;q^2)_k}(-cx)^k q^{nk+k(k-1)/2} \tag{III.61}$$

polinomlarını ele alalım. Bu polinomlar, $c = 1$ için Hermite polinomlarının q-benzeridir. Aynı zamanda, küçük q-Jacobi polinomları ile de ifade edilebilirler. Bunu görmek için

$$\begin{aligned}\lim_{b\to\infty} p_n(-\frac{cx}{bq^2};-1,b;q) &= \lim_{b\to\infty} {}_2\phi_1\left(q^{-n},-bq^{n+1};-q;-cx/bq\right) \\ &= \lim_{b\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(q^{-n};q)_k}{(q;q)_k(-q;q)_k}\frac{(-bq^{n+1};q)_k}{(bq)^k}(-cx)^k \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(q^{-n};q)_k}{(q^2;q^2)_k}(-cx)^k q^{nk+k(k-1)/2}\end{aligned}$$

eşitlikleri hesaplanır.

Bu limit ile $H_n(x;c;q)$ polinomlarının ortogonalliğini hesaplamak için, Teorem III.8'de c yerine $-c/bq^2$, a yerine -1 yazıldıktan sonra $b \to \infty$ limiti alınırsa,

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} (-c/q;q)_i (-q)^i H_n(q^i;c;q) H_m(q^i;c;q) \tag{III.62}$$

$$= \lim_{b\to\infty} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{(-c/q;q)_i}{(-c/bq;q)_i} (-q)^i p_n(-\frac{cq^i}{bq^2};-1,b;q) p_m(-\frac{cq^i}{bq^2};-1,b;q)$$

eşitliği yazılır. Teorem III.8'in sonucu kullanılarak, (III.32)'de verilen K için bu ifade

$$\lim_{b\to\infty} K \frac{(q;q)_n (bq;q)_n (1-abq)(aq)^n}{(aq;q)_n (abq;q)_n (1-abq^{2n+1})} \delta_{m,n}$$

olarak yazılır. Limit hesabı yapıldığında,

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} (-c/q;q)_i (-q)^i H_n(q^i;c;q) H_m(q^i;c;q) = \frac{(q/c,c,q;q)_\infty}{(-q,-q^2/c;q)_\infty} \frac{(q;q)_n}{(-q;q)_n q^n} \delta_{m,n} \tag{III.63}$$

ile verilen ayrık ortogonallik bağıntısı bulunur.

Ayrıca, $H_n(x;c;q)$ polinomlarının üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(q;q)_n} H_n(x;c;q) = \frac{(-cxz;q^2)_\infty}{(z;q)_\infty}$$

da [6]'da verilmiştir.

q-Hermite polinomları kullanılarak oluşturulan bir diğer ortogonal polinom dizisi de [8]'de verilen ve Al-Salam Chihara polinomları olarak da bilinen polinom dizisidir.

III.5 BESSEL VE q-BESSEL FONKSİYONLARI

Ortogonallik sadece polinomlar için değil, genel olarak fonksiyonlar için tanımlanır. Bu fonksiyonlar arasında en bilineni, hipergeometrik fonksiyonlarla yazılımı (II.18) ile verilen Bessel fonksiyonlarıdır. Bessel fonksiyonları için (III.7)'de tanımlanan diferansiyel denklem, z bir kompleks değişken ve ν reel ya da kompleks değerler alan bir parametre olmak üzere

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0 \tag{III.64}$$

ile verilen ikinci dereceden diferansiyel denklemdir. Bu denkleme ikinci dereceden ν mertebeli Bessel denklemi denir.

Bu denklemin çözümlerinden biri, $\nu = n \in \mathbb{N}$ alındığında bulunan

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}, |z| < \infty \tag{III.65}$$

ile verilmiş birinci türde n mertebeli Bessel fonksiyonlarıdır. Oran kriterinden, bu serinin tüm kompleks düzlemde yakınsak olduğu ve dolayısıyla z'nin bir tam fonksiyonu olduğu görülür. Bu serinin (III.64) denkleminin bir çözümü olduğunu görmek için öncelikle katsayıları

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k}{2^{n+2k} k!(n+k)!}$$

ile gösterilip (III.64)'ün sağ tarafına $u = u_1 = J_n$ yazıldığında

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \left[(n+2k)(n+2k-1) + (n+2k) - n^2\right] \alpha_k z^{n+2k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{n+2k} \\
= &\sum_{k=1}^{\infty} 4\alpha_k k(n+k) z^{n+2k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^{n+2k} \\
= &\sum_{k=1}^{\infty} \left[4\alpha_{k+1}(k+1)(n+k+1) + \alpha_k\right] z^{n+2k}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son serideki katsayı sıfırlanacağından, sondaki seri toplamı sıfır olur ve (III.64) sağlanır.

Birinci türde doğal sayı mertebeli Bessel fonksiyonlarının üç terimli indirgeme bağıntısını bulmak için, (III.65)'in her iki tarafı z^n ile çarpılıp türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left[z^n J_\nu\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2n+2k)}{2^{n+2k} k!(n+k)!} z^{2n+2k-1} \\
&= z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k-1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k-1} \\
&= z^n J_{n-1}(z)
\end{aligned}$$

elde edilir. Baştaki türev çarpım türevi formülüyle alınıp elde edilen ifadenin her iki tarafı z^n ile bölünerek

$$J_n'(z) + \frac{n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z)$$

formülü elde edilir. Aynı işlemleri z^{-n} için yaparak

$$J_n'(z) - \frac{n}{z}J_n(z) = -J_{n+1}(z)$$

bulunur. Bu iki formül birbirinden çıkarılarak

$$J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}J_n(z) - J_{n-1}(z), n = 1, 2, 3, ... \qquad \text{(III.66)}$$

ile verilen üç terimli indirgeme bağıntısı bulunmuş olur.

Bessel fonksiyonlarının üreteç fonksiyonu

$$w(z,t) = e^{z(t-t^{-1})/2}, 0 < |t| < \infty \qquad \text{(III.67)}$$

ile verilen fonksiyondur. t'nin bir fonksiyonu olarak görüldüğünde $0 < \delta \leq t \leq A < \infty$ için analitik olduğundan, Laurent açılımı

$$w(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z)t^n$$

olarak yazılabilir. $c_n(z)$ katsayıları, $e^{zt/2}$ ve $e^{-z/2t}$ fonksiyonlarının t değişkenine göre kuvvet serileri yazılıp birbiriyle çarpıldığında katsayılar eşitlenerek

$$\begin{aligned} c_n(z) &= J_n(z), n = 0, 1, 2, ... \\ c_n(z) &= (-1)^n J_{-n}(z), n = -1, -2, ... \end{aligned}$$

bulunur. Bunlar Laurent açılımında yerine yazıldığında, üreteç fonksiyonu için

$$w(z,t) = J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(z)\left[t^n + (-1)^n t^{-n}\right], 0 < |t| < \infty$$

eşitliği elde edilir.

(III.64) Bessel denkleminin genel çözümü için, J_n ile lineer bağımsız bir çözüm daha bulunur. Bu çözüm [7]'de verilen, γ Euler sabiti ve $\psi(1) = -\gamma,\ \psi(m+1) = -\gamma + \sum\limits_{i=1}^{m} 1/i$ olmak üzere

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \frac{2}{\pi}J_n(z)\log\frac{z}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \\ &\quad -\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n}\left[\psi(k+1) + \psi(k+n+1)\right] \end{aligned}$$

ile verilen ikinci türde Bessel fonksiyonudur. Bu fonksiyon $[-\infty, 0]$ hariç analitiktir. Doğal sayı mertebeli Bessel denkleminin genel çözümleri, A ve B sabit olmak üzere

$$u = AJ_n(z) + BY_n(z)$$

şeklindedir.

Kompleks mertebeli birinci türde Bessel fonksiyonları $[-\infty, 0]$ boyunca kesilen komp leks düzlemde

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2k}, |z| < \infty, |\arg z| < \pi \qquad \text{(III.68)}$$

şeklinde tanımlanır. Tanımdaki seri her z ve ν için yakınsaktır. Aynı zamanda, yeterince büyük R ve N için $|z| \leq R$ ve $|\nu| \leq N$ alındığında, oran kriterine göre düzgün yakınsaktır. Serinin her terimi $[-\infty, 0]$ boyunca kesilen kompleks düzlemde analitik olduğundan, bu fonksiyon da aynı bölgede analitiktir.

(III.68) ile verilen fonksiyonun, (III.64) Bessel denklemini sağladığını göstermek için, doğalsayı mertebeli durum için yapılan kanıtın aynısı

$$\alpha_k = \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k}\Gamma(k+1)\Gamma(\nu+k+1)}$$

alınarak tekrarlanır [7].

Bessel fonksiyonları, sıfırlarına göre ortogonaldir [7]. Bunu aşağıdaki teoremle kanıtlayalım:

Teorem III.15 *$\nu \geq -\frac{1}{2}$ için $J_\nu(z)$ birinci türde reel mertebeli Bessel fonksiyonları için,*

$$0 < j_1^\nu < j_2^\nu < \cdots < j_m^\nu < \cdots$$

sayıları $J_\nu(z)$'nin pozitif reel sıfırları olmak üzere,

$$\int_0^1 zJ_\nu(j_m^\nu z)J_\nu(j_n^\nu z)dz = \frac{1}{2}\left[\left(J_\nu'(j_m^\nu)\right)^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{(j_m^\nu)^2}\right)\left(J_\nu(j_m^\nu)\right)^2\right]\delta_{n,m} \qquad \text{(III.69)}$$

sıfırlarına göre ortogonallik bağıntısı sağlanır.

İspat. α ve β sıfırdan ve birbirinden farklı reel sayılar olmak üzere, çözümleri sırasıyla $u_\alpha = J_\nu(\alpha z)$ ve $u_\beta = J_\nu(\beta z)$ olan

$$u''_\alpha + \frac{1}{z}u'_\alpha + \left(\alpha^2 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u_\alpha = 0, \quad \text{ve} \quad u''_\beta + \frac{1}{z}u'_\beta + \left(\beta^2 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u_\beta = 0$$

diferansiyel denklemleri yazılsın. Bu denklemlerden ikincisi zu_α ile çarpılıp ilkinden çıkarıldıktan sonra sonucun integrali alındığında

$$\left(\alpha^2 - \beta^2\right)\int_0^1 zu_\alpha u_\beta dz = z\left(u_\alpha u'_\beta - u'_\alpha u_\beta\right)|_0^1$$

ve buradan da $\nu > -1$ için

$$\int_0^1 zJ_\nu(\alpha z)J_\nu(\beta z)dz = \frac{\beta J_\nu(\alpha)J'_\nu(\beta) - \alpha J'_\nu(\alpha)J_\nu(\beta)}{\alpha^2 - \beta^2} \tag{III.70}$$

elde edilir. Burada $\alpha = j_m^\nu$ ve $\beta = j_n^\nu$ alındığında,

$$\int_0^1 zJ_\nu(j_m^\nu z)J_\nu(j_n^\nu z)dz = 0, \qquad m \neq n$$

bulunur. (III.70)'in $\beta \longrightarrow \alpha$ limiti L'Hospital kuralıyla alınıp (III.64) diferansiyel denklemi yardımıyla J''_ν içeren terimler yok edilerek sıfırlar yerine yazılırsa

$$\int_0^1 zJ_\nu(j_m^\nu z)J_\nu(j_n^\nu z)dz = \frac{1}{2}\left[\left(J'_\nu(j_m^\nu)\right)^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{(j_m^\nu)^2}\right)\left(J_\nu(j_m^\nu)\right)^2\right]$$

eşitliği elde edilir ve böylece Bessel fonksiyonlarının $w(z) = z$ ağırlık fonksiyonuyla sıfırlarına göre ortogonal olduğu gösterilmiş olur. ■

q-BESSEL FONKSİYONLARI:

Bessel fonksiyonları için birçok q-benzer tanımlanmıştır. Burada, kompleks x değerleri için Hahn-Exton q-Bessel fonksiyonlarının [9]'de verilen özelliklerini inceleyeceğiz.

Tanım III.6 *Hahn-Exton q-Bessel fonksiyonu, $z \in \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} J_\nu(z;q) &= z^\nu \frac{(q^{\alpha+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{(q^{\nu+1};q)_k(q;q)_k}\left(qz^2\right)^k && \textit{(III.71)} \\ &= z^\nu \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\,{}_1\phi_1(0;q^{\nu+1};q,qz^2) && \textit{(III.72)} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Burada, $z^{-\nu}J_\nu(z;q^2)$ fonksiyonu sıfıra denk olmayan analitik bir fonksiyon olduğundan, $J_\nu(z;q)$ fonksiyonu $\mathbb{C}-\{0\}$'da analitiktir.

q-Benzerliği,

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1^-} J_\nu((1-q)z;q) &= \lim_{q\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{\nu+2k}q^{k(k+1)/2}}{\frac{(q;q)_k}{(1-q)^k}\frac{(q;q)_\infty}{(q^{k+\nu+1};q)_\infty}(1-q)^{-\nu-k}}\\ &= \lim_{q\to 1^-}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-q)^k(-1)^k z^{\nu+2k}q^{k(k+1)/2}}{(q;q)_k\Gamma_q(\nu+k+1)}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^\nu z^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)} = J_\nu(2z)\end{aligned}$$

eşitliklerinden kanıtlanır.

Bu fonksiyonunun q-türevine ait iki formül aşağıdaki teoremle verilmiştir.

Teorem III.16 *Hahn-Exton q-Bessel fonksiyonunun q-türevi*

$$D_q\left[(.)^\nu J_\nu(.;q^2)\right](z) = \frac{z^\nu}{1-q}J_{\nu-1}(z;q^2) \qquad (III.73)$$

$$D_q\left[(.)^{-\nu} J_\nu(.;q^2)\right](z) = -\frac{q^{1-\nu}z^{-\nu}}{1-q}J_{\nu+1}(zq;q^2) \qquad (III.74)$$

özelliklerini sağlar.

İspat. 1) (III.73) formülünü bulmak için, $J_\nu(z,q^2)$ ifadesi (III.71) ile açıldıktan sonra Bölüm II.1'de q-türev için verilen $D_q(z^\nu)=[\nu]z^{\nu-1}$ tanımından

$$\begin{aligned}D_q\left[(.)^\nu J_\nu(.;q^2)\right](z) &= D_q\left[z^\nu z^\nu\frac{(q^{2\nu+2};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{k(k-1)}}{(q^{2\nu+2};q^2)_k(q^2;q^2)_k}\left(q^2z^2\right)^k\right]\\ &= D_q\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{k(k-1)}q^{2k}}{(q^2;q^2)_\infty(q^2;q^2)_k}\frac{(q^{2\nu+2};q^2)_\infty}{(q^{2\nu+2};q^2)_k}z^{2\nu+2k}\right]\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k q^{k(k-1)}q^{2k}}{(q^2;q^2)_\infty(q^2;q^2)_k}\frac{(q^{2\nu};q^2)_\infty}{(1-q)(q^{2\nu};q^2)_k}z^{2k}x^\nu x^{\nu-1}\\ &= \frac{z^\nu}{1-q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{\nu-1}(q^{2\nu};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\frac{(-1)^k q^{k(k-1)}}{(q^2;q^2)_k(q^{2\nu};q^2)_k}(qz)^{2k}\\ &= \frac{z^\nu}{1-q}J_{\nu-1}(z;q^2)\end{aligned}$$

eşitlikleri yazılarak kanıt yapılır.

2) (III.74) formülü de benzer şekilde kanıtlanır. ■

(III.64) ile verilen Bessel denkleminin q-benzeri, (III.73) ve (III.74) kullanıldıktan sonra $q \to 1^-$ limiti alınarak bulunan

$$J_\nu(q^2z;q^2) + q^{-\nu}(q^2z^2 - 1 - q^{2\nu})J_\nu(qz;q^2) + J_\nu(z;q^2) = 0 \tag{III.75}$$

ifadesiyle verilmiş q-fark denklemidir.

Bu denklem yardımıyla, Hahn-Exton q-Bessel fonksiyonunun

$$J_\nu(z;q^2) = \left(\frac{1-q^{2\nu}}{z} + z\right) J_\nu(z;q^2) - J_{\nu-1}(z;q^2) \tag{III.76}$$

$$J_\nu(qz;q^2) = q^{-\nu-1}\left(\frac{1-q^{2\nu}}{z} J_\nu(z;q^2) - J_{\nu-1}(z;q^2)\right) \tag{III.77}$$

ifadeleriyle verilen iki özelliği çıkarılır.

Bessel fonksiyonunun sıfırlarına göre ortogonal olmasını q-analize taşımak için q-Bessel fonksiyonunun sıfırları ile ilgili özelliklerine bakmak gerekir.

Önerme III.1 Re$(\nu) > -1$, $z > 0$ *ve* $a, b \in \mathbb{C} - \{0\}$ *için*

$$\begin{aligned} &(a^2 - b^2)\int_0^z xJ_\alpha(aqx;q^2)J_\alpha(bqx;q^2)d_qx \\ = \;& (1-q)q^{\alpha-1}\left[aJ_{\alpha+1}(aqz;q^2)J_\alpha(bz;q^2) - bJ_{\alpha+1}(bqz;q^2)J_\alpha(az;q^2)\right] \end{aligned} \tag{III.78}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Verilen integrale I deyip $x^\nu x^{-\nu}$ ile çarpıldıktan sonra (II.36) ile verilen q-kısmi integral tanımında

$$f(qx) = x^{-\nu}J_\nu(aqx;q^2) \text{ ve } (D_qg)(x) = x^{\nu+1}J_\nu(bqx;q^2),$$

yazılırsa

$$\begin{aligned} f(x) &= q^\nu x^{-\nu}J_\nu(ax;q^2) \text{ ve (III.73)'ten } (D_qf)(x) = -\frac{aqx^{-\nu}}{1-q}J_{\nu+1}(bqx;q^2), \\ \text{(III.74)'ten } g(x) &= \frac{1-q}{bq}x^{\nu+1}J_{\nu+1}(bqx;q^2) \end{aligned}$$

bulunur. Bu bilgiler q-integral tanımında yerine yazılıp integral hesaplandığında, gerekli sadeleştirmeler sonucunda

$$\begin{aligned}\frac{I}{(a^2-b^2)} &= \frac{1-q}{b}q^{\nu-1}zJ_{\nu+1}(bqz;q^2)J_\nu(az;q^2)\\ &+\frac{a}{b}\int\limits_0^z xJ_{\nu+1}(aqx;q^2)J_{\nu+1}(bqx;q^2)d_qx\end{aligned}$$

bulunur. a ve b'nin yerini değiştip aynı işlemleri uygulayarak elde edilen eşitlik yukarıdaki eşitlikten çıkarıldığında I (III.78)'de istenen şekilde elde edilir.

Teoremdeki $\mathrm{Re}(\nu) > -1$ kısıtlamasının gerekliliğini göstermek için $J_\nu(x;q^2)$ fonksiyonunun 0 civarındaki x'ler için, bir sabitle çarpılmış x^α fonksiyonu gibi davrandığını gözlemek gerekir. Bu gözleme göre A ve B sabitler olmak üzere

$$\frac{I}{(a^2-b^2)} \approx x\ Ax^\nu Bx^\nu d_qx = AB\int\limits_0^z x^{2\nu+1}d_qx = AB(1-q)z\sum_{k=0}^{\infty}(q^kz)^{2\nu+1}q^k$$

eşitliği, (II.32) kullanılarak bulunur. Bu serinin yakınsak olması için ise oran testinden

$$\left|\frac{q^{(2k+2)(\nu+1)}}{q^{2k(\nu+1)}}\right| = \left|q^{2(\nu+1)}\right| = q^{2\,\mathrm{Re}(\nu+1)} < 1$$

olmalıdır. Bu durum da ancak ve ancak $2\,\mathrm{Re}(\nu+1) > 0$ yani $\mathrm{Re}(\nu) > -1$ olduğunda gerçekleşir. ■

Sonuç III.1 *ν reel sayı ve $\nu > -1$ koşuluyla $J_\nu(z;q^2)$ fonksiyonunun sıfırları reeldir.*

İspat. Öncelikle ν reel olduğunda sıfırların varlığını göstermek gerekir. Bunun için (III.75)'te $t = q^{-1}\sqrt{1+q^{2\nu}}$ alınırsa $J_\nu(q^2t;q^2) = -J_\nu(t;q^2)$ bulunur. J_ν fonksiyonu reel eksende pozitif reel değerli ve sürekli olduğundan, $(q^2t;t)$ aralığında bir sıfırı olmalıdır. Sıfırların reel olduğunu kanıtlamak için $a \neq 0$ sayısı J_ν'nın bir sıfırı olsun. ν reel olduğundan,

$$J_\nu(\overline{a};q^2) = \overline{J_\nu(a;q^2)} = 0$$

olur. Önerme'de $z = 1$ ve $b = \overline{a}$ alınırsa (III.78)'in sağ tarafı sıfırlanacağından,

$$(a^2-\overline{a}^2)\int\limits_0^1 x\left|J_\nu(aqx;q^2)\right|^2 d_qx = 0$$

olur. Eğer $a \neq \overline{a}$ olursa,

$$\int_0^1 x \left|J_\nu(aqx;q^2)\right|^2 d_qx = (1-q)\sum_{k=0}^{\infty}\left|J_\nu(aq^{k+1};q^2)\right|^2 = 0$$

eşitliğinden her k için $J_\nu(aq^{k+1};q^2) = 0$ olmalıdır. Fakat o zaman $\mathbb{C}-\{0\}$'da analitik olan $x^{-\nu}J_\nu(x;q^2) \equiv 0$ ve dolayısıyla $J_\nu(x;q^2) \equiv 0$ olduğundan, çelişki elde ederiz. Öyleyse $a = \overline{a}$, yani $a \in \mathbb{R}$ veya $a \in i\mathbb{R}$ olmalıdır. Fakat, $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x = ic$ alınırsa,

$$J_\nu(ic;q^2) = (ic)^\nu \frac{(q^{2\nu+2};q^2)_\infty}{(q^2;q^2)_\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{k(k+1)}c^{2k}}{(q^{2\nu+2};q^2)_k(q^2;q^2)_k}$$

ifadesinde $\nu > -1$ olduğundan, her terim pozitif reel sayı olur. Bu durumda sağ taraf asla sıfır olamayacağından, $a \in i\mathbb{R}$ olamaz. Öyleyse $a \in \mathbb{R}$, yani bütün sıfırlar reel olmalıdır. ∎

Eğer $a \in \mathbb{R}$ J_ν'nın sıfırı ise, $-a$ da sıfırıdır. Öyleyse, sıfırları çalışırken yalnızca pozitif olanlara çalışılabilir. $a \neq 0$ bir pozitif sıfır olmak üzere,

$$\int_0^1 x\left(J_\nu(aqx;q^2)\right)^2 d_qx = -\frac{1}{2}(1-q)q^{\nu-1}J_{\nu+1}(aq;q^2)J'_\nu(a;q^2) \qquad \text{(III.79)}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik, Jackson integrali ile klasik türevi ilişkilendirmesi bakımından önemlidir.

Yar.Teorem III.4 *$\nu > -1$ olmak üzere J_ν'nün herhangi bir $a \neq 0$ sıfırı basit sıfırdır.*

İspat. Teoremdeki koşullarla Sonuç 1'in kanıtında kullanılan çelişki yaratan argüman uygulanarak

$$\int_0^1 x\left|J_\nu(aqx;q^2)\right|^2 d_qx = \int_0^1 x\left(J_\nu(aqx;q^2)\right)^2 d_qx > 0$$

olması gerektiği görülür. Bu bilgi ile (III.79)'a bakıldığında, $J'_\nu(a;q^2) \neq 0$ olması gerektiği, yani a'nın basit sıfır olduğu görülür. ∎

Teorem III.17 *$\nu > -1$ olmak üzere Hahn-Exton q-Bessel fonksiyonu J_ν'nün sayılabilir sonsuz çoklukta pozitif basit sıfırı vardır.*

İspat. Sonuç 1 ve Yardımcı Teorem 1'den dolayı tüm sıfırlar reel ve basit olduğu için yalnızca sonsuz çoklukta sıfır oladuğunu kantılamak yeterli olacaktır. Çelişki elde etmek için sonlu sayıda sıfır olduğunu varsayalım. En büyük sıfır a olsun.

$$x^2q^2 - 1 - q^{2\nu} > 0 \quad \text{ve} \quad q^2x > a$$

eşitliklerini sağlayan pozitif bir x sabitlenirse,

$$J_\nu(q^2x; q^2),\ J_\nu(qx; q^2) \text{ ve } J_\nu(x; q^2)$$

ifadelerinin sıfırdan farklı ve aynı işaretli olduğu görülür. Öyleyse, (III.75) ile verilen q-fark denklemi yazıldığında

$$J_\nu(q^2x; q^2) + q^{-\nu}(q^2x^2 - 1 - q^{2\nu})J_\nu(qx; q^2) + J_\nu(x; q^2)$$

ifadesi sıfırdan farklı olur. Bu durum da (III.75) denklemi ile çelişki yaratır. Öyleyse en büyük sıfır olamaz, dolayısıyla sonlu sayıda sıfır olamaz. ■

Bu teoreme göre, $\nu > -1$ olmak üzere Hahn-Exton q-Bessel fonksiyonu $J_\nu(z; q^2)$'nin sıfırları $j_k^\nu(q^2)$ veya kısaca j_k ile gösterilip

$$0 < j_1 < j_2 < \cdots < j_k < j_{k+1} < \cdots$$

şeklinde sırayla yazılabilir.

Şimdiye kadar elde ettiğimiz bulgularla, Hahn-Exton q-Bessel fonksiyonunun sıfırlarına göre ortogonal olduğunu kanıtlayabiliriz.

Teorem III.18 *$\nu > -1$ ve $0 < j_1 < j_2 < \cdots$ sayıları $J_\nu(z; q^2)$ fonksiyonunun pozitif* *sıfırları olsun. Aşağıdaki eşitlikler sağlanır:*

$$\int_0^1 xJ_\nu(qj_nx;q^2)J_\alpha(qj_mx;q^2)dx \tag{III.80}$$

$$= -\frac{1}{2}(1-q)q^{\nu-1}J_{\nu+1}(qj_n;q^2)J'_\nu(j_n;q^2)\delta_{m,n} \tag{III.81}$$

$$= \frac{1}{2}(1-q)^2q^{\nu-2}\left(D_qJ_\nu(.;q^2)\right)(j_n)J'_\nu(j_n;q^2)\delta_{m,n} \tag{III.82}$$

$$= -\frac{1}{2}(1-q)q^{\nu-2}j_n^{-1}J_\nu(qj_n;q^2)J'_\nu(j_n;q^2)\delta_{m,n} \tag{III.83}$$

$$= -\frac{1}{2}(1-q)q^{-2}J_{\nu+1}(j_n;q^2)J'_\nu(j_n;q^2)\delta_{m,n} \tag{III.84}$$

İspat. *i)* (III.80)=(III.81) : $n \neq m$ için Önerme 1'den (III.80) integrali 0 olur. $n = m$ olduğunda ise, bu integral (III.79)'daki integrale dönüşür ve değerler yerine yazıldığında (III.81)'e ulaşılır.

ii) (III.81)=(III.82) : $f(z) = J_\nu(z;q^2)$ ve $g(z) = z^{-\nu}$ alınıp Bölüm II'de tanımlanan çarpma q-türevi ve (III.74) uygulandığında,

$$\left(D_qJ_\nu(.;q^2)\right)(z) = \frac{-q}{1-q}J_{\nu+1}(qz;q^2) + \frac{1-q^\nu}{z(1-q)}J_\nu(z;q^2)$$

formülü elde edilir. Bu formülde z yerine j_n yazılırsa

$$\begin{aligned}\left(D_qJ_\nu(.;q^2)\right)(j_n) &= \frac{-q}{1-q}J_{\nu+1}(qj_n;q^2) + \frac{1-q^\nu}{j_n(1-q)}J_\nu(j_n;q^2)\\ &= \frac{-q}{1-q}J_{\nu+1}(qj_n;q^2)\end{aligned}$$

bulunur. Bu sonuç (III.81)'de yerine yazılarak (III.82) elde edilir.

iii) (III.82)=(III.83) : q-Türev tanımından

$$\begin{aligned}\left(D_qJ_\nu(.;q^2)\right)(j_n) &= \left(\frac{J_\nu(.;q^2) - J_\nu(q.;q^2)}{(1-z)}\right)(j_n)\\ &= \frac{J_\nu(qj_n;q^2)}{(1-x)}\end{aligned}$$

bulunur. Bu değer (III.82)'de yerine yazıldığında (III.80)'e ulaşılır.

iv) (III.80)=(III.84) : (III.77) eşitliğini $-q^{\nu+1}$ ile çarpıp (III.76) eşitliği ile taraf tarafa toplayarak

$$J_{\nu+1}(z;q^2) - q^{\nu+1}J_{\nu+1}(qz;q^2) = zJ_\nu(z;q^2)$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikte z yerine j_n yazılırsa sağ taraf sıfırlanır ve

$$J_{\nu+1}(j_n; q^2) = q^{\nu+1} J_{\nu+1}(qj_n; q^2)$$

eşitliği elde edilir. Bu bilgi (III.80)'de yerine yazılarak (III.84) elde edilir. ■

Bu teoremle verilen eşitliklere Fourier-Bessel ortogonallik bağıntıları adı verilir [9]. Bu bağıntılar, Hahn-Exton q-Bessel fonksiyonunun sıfırlarının ortogonallikteki önemini açıklamaktadır. Bu teorem yardımıyla bu fonksiyonun sıfırları ile ilgili bazı bilgileri elde ederiz.

Yar.Teorem III.5 *$\nu > -1$ olmak üzere $J_\nu(z; q^2)$ fonksiyonunun iki ardışık sıfırının arasında $J_{\nu-1}(z; q^2)$ ve $J_{\nu+1}(z; q^2)$ fonksiyonlarının her ikisinin de en az birer tane sıfırı vardır.*

İspat. (III.73) kullanarak tanımlanan

$$g(z) = \frac{x^\nu}{1-q} J_{\nu-1}(z; q^2) = D_q \left[(.)^\nu J_\nu(.; q^2) \right](z)$$

fonksiyonuna bakıldığında, a sayısı $J_\nu(z; q^2)$ fonksiyonunun bir sıfırı ise q-türev tanımından

$$g(a) = -\frac{(aq)^\nu J_\nu(aq; q^2)}{(1-q)a}$$

eşitliği elde edilir. Buna göre, eğer $0 < a < b$ sayıları $J_\nu(z; q^2)$ fonksiyonunun ardışık sıfırları ise, Yardımcı Teorem III.4 ve Teorem III.8'den $g(a)g(b) < 0$ eşitsizliği görülür. Buna göre, $g(z)$'nin tanımından, $J_{\nu-1}(a; q^2)$ ile $J_{\nu-1}(b; q^2)$ değerleri ters işaretlidir. Böylece teorem $J_{\nu-1}(z; q^2)$ için kanıtlanmış olur.

(III.76) eşitliğine bakıldığında, $J_{\nu-1}(a; q^2) = -J_{\nu+1}(a; q^2)$ eşitliği bulunur. bir önceki kanıtı uygulayarak, teorem $J_{\nu+1}(z; q^2)$ için kanıtlanır. ■

Teorem III.19 *$J_\nu(z; q^2)$ ile $J_{\nu+1}(z; q^2)$ fonksiyonlarının pozitif sıfırları arasında*

$$0 < j_1^\nu < j_1^{\nu+1} < j_2^\nu < j_2^{\nu+1} < j_3^\nu \cdots$$

eşitsizlikleriye verilen bir ilişki vardır.

İspat. Yardımcı Teorem III.5'ten dolayı yalnızca $j_1^\nu < j_1^{\nu+1}$ eşitsizliğini göstermek yeterli olacaktır. Tanım III.6'daki ${}_1\phi_1$ fonksiyonunda $x = z = 0$ alındığında 1 değeri bulunur. Süreklilikten, $z \in (0, j_1^\nu)$ için $J_\nu(z; q^2) > 0$ olması gerekir. Dolayısıyla $J_\nu(z; q^2)$ bu aralıkta azalan bir fonksiyondur, yani $J'_\nu(j_1^\nu; q^2) < 0$. Öyleyse, Yardımcı Teorem III.4 ve Teorem III.18'e göre $J_{\nu+1}(j_1^\nu; q^2) > 0$ olmalıdır. Öyleyse, $J_{\nu+1}(z; q^2)$ fonksiyonunun $(0, j_1^\nu)$ aralığında çift sayıda sıfırı olması gerekir. j_1^ν en küçük pozitif sıfır olduğundan ve Yardımcı Teorem III.5'ten dolayı, hiç sıfır olmadığı sonucuna varılır. ■

Bu bilgilerin bir uygulaması olarak, j_1^ν için bir üst sınır elde edilebilir. [9]'te tarif edilen işlemler açılırsa, (III.75) q- fark denkleminde $z = j_1^z$ için,

$$J_\nu(q^2 j_1^\nu; q^2) + q^{-\nu}(q^2 (j_1^\nu)^2 - 1 - q^{2\nu}) J_\nu(q j_1^\nu; q^2) = 0$$

eşitliği bulunur. $z \in (0, j_1^\nu)$ için $J_\nu(z; q^2) > 0$ olduğundan $J_\nu(q^2 j_1^\nu; q^2) > 0$ ve $J_\nu(q j_1^\nu; q^2) > 0$ olur. Dolayısıyla

$$q^{-\nu}(q^2 (j_1^\nu)^2 - 1 - q^{2\nu}) < 0$$

olmalıdır. Buradan da

$$j_1^\nu < \frac{\sqrt{1 + q^{2\nu}}}{q}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem III.19'un bir başka sonucu da, $J_\nu(z; q^2)$ ile $J_{\nu+1}(z; q^2)$ fonksiyonlarının 0'dan farklı ortak sıfırının olmamasıdır.

Önerme III.2 *$\nu > 0$ için $D_q J_\nu(.; q^2)$ fonksiyonunun 0'dan farklı kökleri reel ve basittir.*

İspat. Sonuç III.1'in kanıtındaki argümanları yeri geldiğinde $\nu > 0$ ifadesi eklenerek uygulandığında köklerin reel olduğu aynı şekilde kanıtlanır. Basit kökler olduğunu kantılamak için ise öncelikle bir integral hesabı yapmak gerekir. Önerme III.1'de $z = 1$

yazılıp Teorem III.18'deki eşitlikler kullanılırsa

$$\begin{aligned}
& (a^2-b^2)\int_0^1 xJ_\nu(aqx;q^2)J_\nu(bqx;q^2)d_qx \\
= \;& (1-q)q^{\nu-1}\left[aJ_{\nu+1}(aq;q^2)J_\nu(b;q^2)-bJ_{\nu+1}(bq;q^2)J_\nu(a;q^2)\right] \\
= \;& (1-q)^2q^{\nu-2}\left[b\left(D_qJ_\nu(.;q^2)\right)(b)J_\nu(a;q^2)-a\left(D_qJ_\nu(.;q^2)\right)(a)J_\nu(b;q^2)\right]
\end{aligned} \tag{III.85}$$

elde edilir. Baştaki ifadeyi önce (a^2-b^2)'ye bölüp $b \to a$ limitini L'Hospital kuralıyla alıp a'yı $D_qJ_\nu(.;q^2)$ fonksiyonunun 0'dan farklı bir sıfırı olarak kabul edersek, işlemler sonucunda

$$\int_0^1 x\left|J_\nu(aqx;q^2)\right|^2 d_qx = -\frac{1}{2}(1-q)^2q^{\nu-2}J_\nu(a;q^2)\left(D_qJ_\nu(.;q^2)\right)'(a)$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafı sıfır olamayacağından, sağ taraf da sıfır olamaz. Dolayısıyla $\left(D_qJ_\nu(.;q^2)\right)'(a) \neq 0$, yani a basit sıfırdır. ■

IV SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Bu çalışmada öncelikle, negatif olmayan $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonu yardımıyla

$$\int_a^b f_m(x)f_n(x)\omega(x)dx = 0, \quad m \neq n$$

$[a, b]$ aralığında $\omega(x)$'e göre ortogonal dizi tanımı ve λ_n, $f(x)$ fonksiyonunun n. sıfırı olmak üzere

$$\int_0^1 f(\lambda_m x)f(\lambda_n x)d\mu(x) = 0, \quad m \neq n$$

sıfırlarına göre ortogonallik tanımı verildi. Ayrıca, Jackson integrali yardımıyla

$$\int_0^1 f(\lambda_m x)f(\lambda_n x)d_q x = 0, \quad m \neq n$$

sıfırlarına göre q-ortogonallik tanımı verildi.

Sonra, ortogonal polinom dizileri çalışıldı. $\{P_k(x)\}$ dizisinde $\deg P_k(x) = k$ olmak üzere ortogonallik

$$\int_a^b P_m(x)P_n(x)\omega(x)dx = h_n\delta_{m,n}, \quad m \neq n$$

ile yazıldı. Burada

$$h_n = \int_a^b (P_n(x))^2\,\omega(x)dx$$

Herhangi bir $P(x)$ polinomunun $\{P_k(x)\}$ ortogonal dizisinin lineer kombinasyonu olarak yazılabileceğinin ve $\deg P(x) < n$ olan her polinomun bu dizi ile ortogonal olduğunun kanıtı verildi. $\{P_k(x)\}$ ortogonal dizisinin $P_{-1}(x) \equiv 0, n \in \mathbb{N}$, A_n, B_n, C_n reel sayıları için $A_{n-1}A_nC_{n+1} > 0$ koşullarıyla

$$P_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)P_n(x) - C_nP_{n-1}(x)$$

ile verilen bir üç terimli indirgeme bağıntısını sağladığı ve buradaki katsayıların, $P_n(x)$'in başkatsayısı κ_n olmak üzere,

$$A_n = \frac{\kappa_{n+1}}{\kappa_n}, \quad C_n = \frac{A_n h_n}{A_{n-1}h_{n-1}}$$

olduğu gösterildi. $\{P_k(x)\}$ ortogonal dizisindeki her $P_k(x)$'in $[a,b]$ aralığında k tane reel ve farklı sıfırının olduğu görüldü. Yine bu diziden $P_k(x)$'in sıfırlarının $P_{k+1}(x)$'in sıfırlarının arasında olduğu anlaşıldı. Ayrıca bu dizinin elemanlarının Sturm-Liouville diferansiyel denkleminin çözümleri olduğu ifade edildi.

Daha sonra aşağıdaki bazı özel ortogonal polinom aileleri, q-benzerleriyle birlikte tanıtıldı:

1) a) $\alpha > -1$ ve $\beta > -1$ reel sabitler ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}\ {}_2F_1(-n, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \frac{1-x}{2})$$

şeklinde tanımlan Jacobi polinomlarının $\omega(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olduğu ve ortogonallik bağıntısının

$$\int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = \frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!}\ \delta_{mn}$$

olduğu gösterildi. Jacobi polinomlarının üreteç fonksiyonunun $R = (1-2xr+r^2)^{1/2}$ olmak üzere

$$F(x,r) = \frac{2^{\alpha+\beta}}{R}(1-r+R)^{-\alpha}(1+r+R)^{-\beta}$$

olduğu ifade edildi.

b) Küçük q-Jacobi polinomları

$$p_n(x;a,b;q) = {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1} \\ aq \end{matrix}; q; xq\right)$$

ile, büyük q-Jacobi polinomları

$$P_n(x;a,b,c;q) = {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-n}, abq^{n+1}, x \\ aq, cq \end{matrix}; q, q\right)$$

olmak üzere Jacobi polinomlarının iki tane q-benzerinin tanımı verildi. Bu iki polinom dizisinin Jacobi polinomlarının q-benzeri olduğu gösterildi.

Küçük q-Jacobi polinomları için $0 < q\ , aq < 1$ ve

$$h_n(a,b;q) = \frac{(1-abq^{2n+1})(abq;q)_n(aq;q)_n(aq;q)_\infty}{(1-abq)(q;q)_n(bq;q)_n(abq^2;q)_\infty}(aq)^{-n}$$

olmak üzere

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_m(q^i;a,b;q)p_n(q^i;a,b;q)\ \frac{(bq;q)_i}{(q;q)_i}(aq)^i = \frac{\delta_{m,n}}{h_n(a,b;q)}$$

eşitliği ile, büyük q-Jacobi polinomları için,

$$h_n(a,b,c;q) = M^{\ -1}\frac{(1-abq^{2n+1})(abq;q)_n(aq,cq;q)_n}{(1-abq)(q;q)_n(bq,abq/c;q)_n}(-ac)^n q^{-\binom{n}{2}}$$

ve

$$M = \int_{cq}^{bq} \frac{(x/a,x/c;q)_\infty}{(x,bx/c;q)_\infty} d_qx = \frac{aq(1-q)(q,c/a,aq/c,abq^2;q)_\infty}{(aq,bq,cq,abq/c;q)_\infty}$$

olmak üzere

$$\int_{cq}^{bq} P_m(x;a,b,c;q)P_n(x;a,b,c;q)\ \frac{(x/a,x/c;q)_\infty}{(x,bx/c;q)_\infty}d_qx = \frac{\delta_{m,n}}{h_n(a,b,c;q)}$$

eşitliği ile ortogonallik bağıntıları verildi.

2) a) $\lambda > -1$ bir reel sayı olmak üzere, Jacobi polinomları yardımıyla

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(2\lambda)_n}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^n}P_n^{(\lambda-(1/2),\lambda-(1/2))}(x)$$

ultraküresel polinomlar tanımlandı. Ultraküresel polinomların üreteç fonksiyonu

$$U(x,r) = (1-2xr+r^2)^{-\lambda}$$

ile verildi. $\lambda > -1$, $\lambda \neq 0$ olmak üzere ultraküresel polinomların ortogonalliği, $(1-x^2)^{\lambda-(1/2)}$ağırlık fonksiyonuna göre

$$\int_{-1}^{1} C_n^\lambda(x)C_m^\lambda(x)(1-x^2)^{\lambda-(1/2)}dx = \frac{\pi\Gamma(n+2\lambda)2^{1-2\lambda}}{(\Gamma(\lambda))^2\,(n+\lambda)n!}\delta_{m,n}$$

bağıntısıyla verildi. Bu polinomların üç terimli indirgeme bağıntısı, $n \geq 2$, $C_0^\lambda(x) = 1$ ve $C_1^\lambda(x) = 2x$ olmak üzere

$$nC_n^\lambda(x) = 2(n+\lambda-1)xC_{n-1}^\lambda(x) - (n+2\lambda-2)C_{n-2}^\lambda(x)$$

formülüyle, hipergeometrik serilerle temsili de

$$C_n^\lambda(x) = \frac{(\lambda)_n}{n!}(2x)^n \; {}_2F_1 \left[\begin{array}{c} -n/2, (1-n)/2 \\ \\ 1-n-\lambda \end{array} ; x^{-2} \right]$$

eşitliğiyle ifade edildi. $x = \cos\theta$ yazılarak,

$$C_n^\lambda(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda)_k(\lambda)_{n-k}}{k!(n-k)!} e^{i(n-2k)\theta} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda)_k(\lambda)_{n-k}}{k!(n-k)!} \cos(n-2k)\theta$$

başka bir yazılış elde edildi.

b) Sürekli q-ultraküresel polinomların tanımı, $x = \cos\theta$ olmak üzere,

$$C_n(x;\beta|q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\beta;q)_k(\beta;q)_{n-k}}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} \cos(n-2k)\theta$$

ile verildi [4]. Bu tanımın q-hipergeometrik serilerle yazılışı

$$\begin{aligned} C_n(x;\beta|q) &= \frac{(\beta;q)_n}{(q;q)_n} e^{in\theta} \; {}_2\phi_1 \left(\begin{array}{c} q^{-n}, \beta \\ \\ q^{1-n}/\beta \end{array} ; q, q/\beta e^{2i\theta} \right) \\ &= \frac{(\beta^2;q)_n}{(q;q)_n} e^{-in\theta} \left({}_3\phi_2 \begin{array}{c} q^{-n}, \beta, \beta e^{2i\theta} \\ \\ \beta^2, 0 \end{array} ; q, q \right) \end{aligned}$$

ifade edildi [3]. q-Ultraküresel polinomların

$$\omega_\beta(\cos\theta) = \left| \frac{(e^{2i\theta};q)_\infty}{(\beta e^{2i\theta};q)_\infty} \right|^2$$

ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olduğu ve ortogonallik bağıntısının

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi C_n(\cos\theta;\beta|q) C_m(\cos\theta;\beta|q) \omega_\beta(\cos\theta) d\theta \\ = \; & \frac{2\pi(1-\beta)}{(1-\beta q^n)} \frac{(\beta^2;q)_n}{(q;q)_n} \frac{(\beta;q)_\infty(\beta q;q)_\infty}{(\beta^2;q)_\infty(q;q)_\infty} \delta_{m,n} \end{aligned}$$

olduğu kanıtıyla yazıldı. Bu polinomların üreteç fonksiyonunun, $0 < r < 1$ için,

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\cos\theta;\beta|q) r^n = \frac{(\beta r e^{i\theta};q)_\infty(\beta r e^{-i\theta};q)_\infty}{(re^{i\theta};q)_\infty(re^{-i\theta};q)_\infty}$$

ve üç terimli indirgeme bağıntısının,

$$\begin{aligned} 2(1-\beta q^n)xC_n(x;\beta|q) &= (1-q^{n+1})C_{n+1}(x;\beta|q) \\ &\quad +(1-\beta^2 q^{n-1})C_{n-1}(x;\beta|q) \end{aligned}$$

olduğu gözlendi.

3) a) Hermite polinomları için

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2/2}$$

tanımı ve

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k n!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}$$

seri tanımı yapıldı. Hermite polinomlarının $(-\infty,\infty)$ aralığında $\omega(x) = e^{-x^2/2}$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonal olduğu ortogonallik bağıntısının

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2/2}dx = n!(2\pi)^{1/2}\delta_{m,n}$$

olduğu gösterildi. Bu polinomların üç terimli indirgeme bağıntısının

$$H_{n+1}(x) - xH_n(x) + nH_{n-1}(x) = 0$$

ve üreteç fonksiyonunun

$$H(x,t) = e^{xt-(t^2/2)}$$

olduğu kanıtıyla yazıldı.

b) C_n, q-ultraküresel polinom olmak üzere,

$$H_n(x|q) = (q;q)_n C_n(x;0|q)$$

eşitliği ile q-Hermite polinomlarının tanımı yazıldı. $x = \cos\theta$ alınarak bu tanım

$$H_n(\cos\theta|q) == \sum_{k=0}^{n} \frac{(q;q)_n e^{i(n-2k)\theta}}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}}$$

düzenlendi. Bu polinomlar için ağırlık fonksiyonu $\omega_0(\cos\theta) = \left|(e^{2i\theta}; q)_\infty\right|^2$ ve ortogonallik bağıntısı

$$\int_0^\pi H_n(\cos\theta|q)H_m(\cos\theta|q)\omega_0(\cos\theta)d\theta = \frac{2\pi}{(q^{n+1}; q)_\infty}\delta_{m,n}$$

ile verildi. q-Hermite polinomlarının üreteç fonksiyonu, $x = \cos\theta$ olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x|q)}{(q; q)_n} r^n = \frac{1}{(re^{i\theta}; q)_\infty (re^{-i\theta}; q)_\infty}$$

ile, üç terimli indirgeme bağıntısı da,

$$2xH_n(x|q) = H_{n+1}(x|q) + (1 - q^n)H_{n-1}(x|q)$$

ilebelirtildi. Böylece, bir ortogonal polinom dizisinden bir başka ortogonal polinom dizisinin türetilişine örnek verilmiş oldu.

c) [6]'da, küçük q-Jacobi polinomları kullanılarak tanımlanan q-Hermite tipi bir polinom dizisi

$$H_n(x; c; q) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(q^{-n}; q)_k}{(q^2; q^2)_k}(-cx)^k q^{nk+k(k-1)/2}$$

şeklinde tanımlandı ve ortogonallik bağıntısı verildi. Böylece, limit yardımıyla ortogonal polinomların birinden diğerinin elde edilişine ve özelliklerin birbirine aktarılışına örnek verilmiş oldu.

Son olarak, z bir kompleks değişken ve ν reel ya da kompleks değerler alan bir parametre olmak üzere

$$u'' + \frac{1}{z}u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)u = 0$$

ile verilen ikinci dereceden ν mertebeli Bessel denklemi verildi ve bu denklemin $\nu = n \in \mathbb{N}$ için çözümü olan

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}, |z| < \infty$$

ile verilmiş birinci türde n mertebeli Bessel fonksiyonları tanımlandı.

Birinci türde doğal sayı mertebeli Bessel fonksiyonlarının üç terimli indirgeme bağıntısını veren

$$J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z), n = 1, 2, 3, ...$$

eşitliğinin kanıtı verildi.

Bessel fonksiyonlarının üreteç fonksiyonu

$$w(z,t) = e^{z(t-t^{-1})/2}, 0 < |t| < \infty$$

ile verildi.

Bessel denkleminin genel çözümü için, J_n ile lineer bağımsız bir çözüm olan ikinci türde Bessel fonksiyonunun,

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \frac{2}{\pi} J_n(z) \log \frac{z}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k-n} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+n} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)] \end{aligned}$$

tanımı verildi.

Bessel fonksiyonlarının $\nu \geq -\frac{1}{2}$ için $J_\nu(z)$ birinci türde reel mertebeli Bessel fonksiyonları için,

$$0 < j_1^\nu < j_2^\nu < \cdots < j_m^\nu < \cdots$$

sayıları $J_\nu(z)$'nin pozitif reel sıfırları olmak üzere,

$$\int_0^1 z J_\nu(j_m^\nu z) J_\nu(j_n^\nu z) dz = \frac{1}{2} \left[\left(J_\nu'(j_m^\nu)\right)^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{(j_m^\nu)^2}\right) \left(J_\nu(j_m^\nu)\right)^2 \right] \delta_{n,m}$$

sıfırlarına göre ortogonallik bağıntısını sağladığı gösterildi.

Bessel fonksiyonlarının q-benzerlerinden biri olan Hahn-Exton q-Bessel fonksiyonunun, $x \in \mathbb{C} - \{0\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} J_\nu(x;q) &= x^\nu \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\binom{k}{2}}}{(q^{\nu+1};q)_k (q;q)_k} \left(qx^2\right)^k \\ &= x^\nu \frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty} \, {}_1\phi_1(0; q^{\nu+1}; q, qx^2) \end{aligned}$$

tanımları yazıldı. Bu fonksiyonunun q-türevine ait şu iki formülün

$$\begin{aligned}
D_q\left[(.)^{\nu} J_{\nu}(.;q^2)\right](x) &= \frac{x^{\nu}}{1-q} J_{\nu-1}(x;q^2) \\
D_q\left[(.)^{-\nu} J_{\nu}(.;q^2)\right](x) &= -\frac{q^{1-\nu}x^{-\nu}}{1-q} J_{\nu+1}(xq;q^2)
\end{aligned}$$

kanıtları aktarıldı. Bessel denkleminin q-benzeri olan

$$J_{\nu}(q^2x;q^2) + q^{-\nu}(q^2x^2 - 1 - q^{2\nu})J_{\nu}(qx;q^2) + J_{\nu}(x;q^2) = 0$$

q-fark denklemi ve bu denklemden çıkan

$$\begin{aligned}
J_{\nu}(x;q^2) &= \left(\frac{1-q^{2\nu}}{x} + x\right) J_{\nu}(x;q^2) - J_{\nu-1}(x;q^2) \\
J_{\nu}(qx;q^2) &= q^{-\nu-1}\left(\frac{1-q^{2\nu}}{x} J_{\nu}(x;q^2) - J_{\nu-1}(x;q^2)\right)
\end{aligned}$$

özellikleri belirtildi. Bessel fonksiyonlarının $\mathrm{Re}(\nu) > -1$, $z > 0$ ve $a, b \in \mathbb{C} - \{0\}$ için

$$\begin{aligned}
& (a^2 - b^2)\int_0^z x J_{\nu}(aqx;q^2) J_{\nu}(bqx;q^2) d_q x \\
= \; & (1-q)q^{\nu-1}\left[aJ_{\nu+1}(aqz;q^2)J_{\nu}(bz;q^2) - bJ_{\nu+1}(bqz;q^2)J_{\nu}(az;q^2)\right]
\end{aligned}$$

eşitliği gösterildi. ν reel sayı ve $\nu > -1$ koşuluyla $J_{\nu}(x;q^2)$ fonksiyonunun sıfırlarının reel, 0'dan farklı ise basit ve sayılabilir sonsuz çoklukta olduğunun kanıtı aktarıldı. $\nu > -1$ ve $0 < j_1 < j_2 < \cdots$ sayıları $J_{\nu}(x;q^2)$ fonksiyonunun pozitif sıfırları ise, Fourier-Bessel ortogonallik bağıntıları adı verilen

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 x J_{\nu}(qj_n x;q^2) J_{\nu}(qj_m x;q^2) dx \\
= \; & -\frac{1}{2}(1-q)q^{\nu-1} J_{\nu+1}(qj_n;q^2) J'_{\nu}(j_n;q^2)\delta_{m,n} \\
= \; & \frac{1}{2}(1-q)^2 q^{\nu-2}\left(D_q J_{\nu}(.;q^2)\right)(j_n) J'_{\nu}(j_n;q^2)\delta_{m,n} \\
= \; & -\frac{1}{2}(1-q)q^{\nu-2} j_n^{-1} J_{\nu}(qj_n;q^2) J'_{\nu}(j_n;q^2)\delta_{m,n} \\
= \; & -\frac{1}{2}(1-q)q^{-2} J_{\nu+1}(j_n;q^2) J'_{\nu}(j_n;q^2)\delta_{m,n}
\end{aligned}$$

eşitlikleri kanıtlarıyle birlikte verildi. Bu bağıntılar yardımıyla, $\nu > -1$ olmak üzere $J_\nu(x;q^2)$ fonksiyonunun iki ardışık sıfırının arasında $J_{\nu-1}(x;q^2)$ ve $J_{\nu+1}(x;q^2)$ fonksiyonlarının her ikisinin de en az birer tane sıfırının varlığı ve $J_\nu(x;q^2)$ ile $J_{\nu+1}(x;q^2)$ fonksiyonlarının pozitif sıfırları ile ilgili

$$0 < j_1^\nu < j_1^{\nu+1} < j_2^\nu < j_2^{\nu+1} < j_3^\nu \cdots$$

eşitsizlikleri gösterildi. Bu bilgilerin bir uygulaması olarak, j_1^ν için bir üst sınır veren

$$j_1^\nu < \frac{\sqrt{1+q^{2\nu}}}{q}$$

eşitsizliği aktarıldı [9]. Sıfırlarla ilgili son olarak $\nu > 0$ için $D_q J_\nu(.;q^2)$ fonksiyonunun 0'dan farklı köklerinin reel ve basit olduğu belirtildi. Böylece, ortogonal polinomlar ile sıfırlarına göre ortogonal fonksiyonların bir yönüyle ortak olan özellikleri derlenmiş oldu.

V SON DEĞERLENDİRMELER ve ÖNERİLER

Bu çalışmada bazı ortogonal polinom dizilerinin ve sıfırlarına göre ortogonal fonksiyonların q- benzerleri üzerine çalışılmıştır. Çalışma sırasında üç ayrı ortogonallik tanımını irdelemek için ayrı ayrı fonksiyonlar ele alınmış, özellikle ortogonal ve q-ortogonal polinomların üreteç fonksiyonları ve sağladığı bazı denklemler açıklanmıştır. Bunun yanı sıra, farklı q- ortogonal polinomların birbirinden gerek tanım gerekse limit yardımıyla türetilişine örnekler verilmiştir. Ayrıca, sıfırlarına göre ortogonallik incelenirken elde edilen verilerle, fonksiyonun sıfırların sayısı, birbirine göre durumları ve bir üst sınırı üzerinde durulmuştur. Böylece, ortogonalliğin klasik analizden q-analize neredeyse tümüyle taşınabilen özelliklerden biri olduğu ve ortogonal polinom dizileri arasındaki ilişkilerin daha da çeşitlenerek q-ortogonal dizilerde de bulunduğu gözlemlenmiştir.

q-Ortogonal polinomlar oldukça zengin bir konudur. Bu tezde yalnızca birkaçı işlenen bağıntı ve ilişkiler, [10] kaynağında etraflıca listelenmiştir. Bu listeden en temel bazı elemanlar, konunun zenginliğine ışık tutması bakımından Ek II'de verilmiştir. İleriki çalışmalar, yeni ve daha genel ortogonallik bağıntıları bulmak ve bu bağıntıları özel koşullarda var olan bağıntılara indirgemek üzerine olabileceği gibi, q-hipergeometrik ifadeleri henüz bulunmayan ya da çok karmaşık olan bazı ortogonal polinom dizilerinin hipergeometrik ifadesi ile ilgilenilebilir. Ayrıca, q-ortogonal bir polinom dizisinin bir diğeri cinsinden ifadesi yoluyla, özelliklerin birinden diğerine taşınmasını kapsayan bir çalışma da ele alınabilir.

KAYNAKLAR

[1] Kac, V.; Cheung P.: "*Quantum Calculus*", Springer-Verlag, New York, USA, (**2002**).

[2] Gasper , G.: "*Lecture Notes For An Introductory Minicourse on q-Series*", (**1995**).

[3] Gasper , G.; Rahman M.: "*Basic Hypergeometric Series*", Cambridge University Press, New York, USA, **(1990)**.

[4] Andrews, G. E.; Askey, R.; Ranjan, R.: "*Special Functions*", Cambridge University Press, New York, USA, **(1999)**.

[5] Jackson, D.: "*Fourier Series and Orthogonal Polynomials*", The Mathematical Association of America, Wisconsin, USA, **(1948)**.

[6] Jain, V. K.: "Some q-Orthogonal Polynomials", *Indian J. pure appl. Math.*, 16(8) **(1985)** 875-881.

[7] Lebedev, N. N.: "*Special Functions and Their Applications*", Prentice-Hall Inc., New Jersey, USA, (**1965**).

[8] Berg, C.; Ismail, M. E. H.: "Q-Hermite Polynomials and Classical Orthogonal Polynomials", *Can. J. Math.*, 48(1) **(1996)** 43-63.

[9] Koelink, H. T.; Swarttouw, R. F.: "On the zeros of the Hahn-Exton q-Bessel function and associated q-Lommel polynomials", *J. Math. Anal. Appl.*, 186 **(1994)** 690-710.

[10] Koekoek, R.; Swarttouw, R.: "The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue", *Delft University of Technology*, Report no. 98-17, **(1998).**

EKLER

Ek I q-Hipergeometrik Serilerinin Bazı Dönüşüm Formülleri

Bu bölümde [4] ve [2] da verilen bazı eşitlikleri ve dönüşüm formüllerini kanıtlayacağız.

1) (II.10) ile verilen q-binom teoremi, Heine serileri ile

$$ {}_2\phi_1(a, c; c; q, z) = {}_1\phi_0(a; -; q, z) = \frac{(az; q)_\infty}{(z; q)_\infty} $$

şeklinde gösterilir.

2) $|z| < 1$, $b > 0$ ve $c - b \neq 0, -1, -2, ...$ koşuluyla,

$$ {}_2\phi_1(q^a, q^b; q^c; q, z) = \frac{\Gamma_q(c)}{\Gamma_q(b)\Gamma_q(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} \frac{(tzq^a, tq; q)_\infty}{(tz, tq^{c-b}; q)_\infty} d_q t $$

İspat. q-Beta fonksiyonunun (II.39) ve (II.42) ile verilen tanımlarında $x = b + n$ ve $y = c - b$ alırsak,

$$ \beta_q(b+n, c-b) = \int_0^1 t^{b+n-1} \frac{(tq; q)_\infty}{(tq^{c-b}; q)_\infty} d_q t = \frac{\Gamma_q(b+n)\Gamma_q(c-b)}{\Gamma_q(c+n)} $$

olarak yazılır. q-Gama fonksiyonunun $n \in \mathbb{N}$ için

$$ \Gamma_q(x+n) = \frac{(q^x; q)_n}{(1-q)^n} \Gamma_q(x) $$

özelliği kullanıldığında, $n \in \mathbb{N}, c - b \neq 0, -1, -2, ...$ için,

$$ \frac{(q^b; q)_n}{(q^c; q)_n} = \frac{\Gamma_q(c)}{\Gamma_q(b)\Gamma_q(c-b)} \int_0^1 t^{b+n-1} \frac{(tq; q)_\infty}{(tq^{c-b}; q)_\infty} d_q t $$

eşitliği elde edilir. Buradan da, $|x| < 1$ koşulu eklenerek

$$ \begin{aligned} {}_2\phi_1(q^a, q^b; q^c; q, z) &= \frac{\Gamma_q(c)}{\Gamma_q(b)\Gamma_q(c-b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^a; q)_n}{(q; q)_n} z^n \int_0^1 t^{b+n-1} \frac{(tq; q)_\infty}{(tq^{c-b}; q)_\infty} d_q t \\ &= \frac{\Gamma_q(c)}{\Gamma_q(b)\Gamma_q(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} \frac{(tq; q)_\infty}{(tq^{c-b}; q)_\infty} {}_1\phi_0(q^a; -; q, tz) d_q t \end{aligned} $$

Buradan da formül (1)'deki ${}_1\phi_0$ toplamını yazdığımızda, istenen eşitlik elde edilir. ■

3)

$$ {}_2\phi_1(a,b;c;q,z) = \frac{(b,az;q)_\infty}{(c,z;q)_\infty}\ {}_2\phi_1(c/b,z;az;q,b) $$

İspat. q-İntegral tanımı $[0,1]$ aralığında yazılırsa,

$$ \int_0^1 f(t)d_qt = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} f(q^n)q^n $$

eşitliği elde edilir. Bunu formül (2)'deki integrale uyguladığımızda gerekli işlemler yapılarak

$$ {}_2\phi_1(q^a,q^b;q^c;q,z) = \frac{(q^b,q^az;q)_\infty}{(q^c,z;q)_\infty}\ {}_2\phi_1(q^{c-b},z;q^az;q,q^b) $$

eşitliği, bu eşitlikte $q^a=a$, $q^b=b$, $q^c=c$ yazarak istenen eşitlik elde edilir. ■

4) Formül (3) üç kez arka arkaya uygulandığında

$$ {}_2\phi_1(a,b;c;q,z) = \frac{(abz/c;q)_\infty}{(z;q)_\infty}\ {}_2\phi_1(c/a,c/b;c;q,abz/c) $$

eşitliğine ulaşılır.

5) (q-Saalschütz toplam formülü)

$$ {}_3\phi_2(a,b,q^{-n};c,q^{1-n}ab/c;q,q) = \frac{(c/a,c/b;q)_n}{(c,c/ab;q)_n} $$

İspat. Formül (4)'teki ifadeler q-binom teoremi ve ${}_2\phi_1$ tanımıyla açılırsa,

$$ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a;q)_k(b;q)_k}{(c;q)_k(q;q)_k}z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ab/c;q)_k}{(q;q)_k}z^k\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c/a;q)_k(c/b;q)_k}{(c;q)_k(q;q)_k}\left(\frac{abz}{c}\right)^k $$

eşitliğine ulaşılır. Eşitliğin her iki tarafında z^n teriminin katsayıları eşitlenip $(a;q)_n = (a;q)_k(aq^k;q)_{n-k}$ eşitliği kullanılırsa,

$$ \begin{aligned} \frac{(a;q)_n(b;q)_n}{(c;q)_n(q;q)_n} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(c/a;q)_k(c/b;q)_k}{(c;q)_k(q;q)_k}\left(\frac{ab}{c}\right)^k\frac{(ab/c;q)_{n-k}}{(q;q)_{n-k}} \\ &= \frac{(ab/c;q)_n}{(q;q)_n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(c/a;q)_k(c/b;q)_k(q^{-n};q)_k}{(c;q)_k(q^{1-n}c/ab;q)_k}q^k \end{aligned} $$

elde edilir. Burada a yerine c/a, b yerine c/b yazılırsa

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(a;q)_k(b;q)_k(q^{-n};q)_k}{(c;q)_k(q^{1-n}ab/c;q)_k} q^k = \frac{(c/a;q)_n(c/b;q)_n}{(c;q)_n(c/ab;q)_n}$$

eşitliği elde edilir. Bu da formül (5)'in açık yazılışıdır. ■

6)

$${}_2\phi_1(a,b;c;q,c/ab) = \frac{(c/a,c/b;q)_\infty}{(c,c/ab;q)_\infty}, \quad |c/ab| < 1$$

İspat. Formül (3)'te $z = c/ab$ alınırsa,

$${}_2\phi_1(a,b;c;q,c/ab) = \frac{(b,c/b;q)_\infty}{(c,c/ab;q)_\infty}\,{}_2\phi_1(c/b,c/ab;c/b;q,b) = \frac{(b,c/b;q)_\infty}{(c,c/ab;q)_\infty}\,{}_1\phi_0(c/ab;-;q,b)$$

elde edilir. Formül (1) ile ${}_1\phi_0$ yerine yazıldığında analitik devamla istenen eşitlik $|c/ab| < 1$ için sağlanır. ■

7)Formül (6)'da $b = q^{-n}$ alınarak,

$${}_2\phi_1(a,q^{-n};c;q,q^n c/a) = \frac{(c/a;q)_n}{(c;q)_n}$$

formülü elde edilir.

8)

$${}_2\phi_1(a,q^{-n};c;q,q) = \frac{(c/a;q)_n}{(c;q)_n}\ a^n$$

İspat. Formül (3)'te $z = q$, $b = q^{-n}$ yazılıp (II.12) uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
{}_2\phi_1\left(a,q^{-n};c;q,q\right) &= \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(a,q^{-n};q\right)_i}{\left(c,q;q\right)_i} q^i = \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(a,q^{-n};q\right)_{n-i}}{\left(c,q;q\right)_{n-i}} q^{n-i} \\
&= \frac{\left(a;q\right)_n\left(q^{-n};q\right)_n}{\left(c;q\right)_n\left(q;q\right)_n} q^n \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(q^{-n},c^{-1}q^{1-n};q\right)_i}{\left(a^{-1}q^{1-n},q;q\right)_i}\left(\frac{cq^n}{a}\right)^i \\
&= \frac{\left(a;q\right)_n\left(q^{-n};q\right)_n}{\left(q;q\right)_n\left(c;q\right)_n} q^n\ {}_2\phi_1\left(c^{-1}q^{1-n},q^{-n};a^{-1}q^{1-n};q,cq^n/a\right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte, formül (7) yerine yazılarak istenen sonuca ulaşılır. ■

9) [3, s.61]

$${}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-n},a,b \\ \\ c,d \end{matrix}\ ;q,q\right) = \frac{(d/a;q)_n}{(d;q)_n} a^n\ {}_3\phi_2\left(\begin{matrix} q^{-n},a,c/b \\ \\ c,aq^{1-n}/d \end{matrix}\ ;q,q\right)$$

Ek II Bazı q-Ortogonal Polinomlar ve Limit Bağıntıları

Bu bölümde q-ortogonal polinomlar tanımlanıp farklı polinomlar arasındaki [10]'da verilen bazı bağınıtları sıralayacağız.

1) **Askey-Wilson Polinomları:**

Tanım:

$$\frac{a^n p_n(x;a,b,c,d|q)}{(ab,ac,ad;q)_n} = {}_4\phi_3\left(\begin{array}{c} q^{-n}, abcdq^{n-1}, ae^{i\theta}, ae^{-i\theta} \\ ab, ac, ad \end{array}; q; q\right), \quad x = \cos\theta$$

Ortogonallik:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\omega(x)}{\sqrt{1-x^2}} p_m(x;a,b,c,d|q) p_n(x;a,b,c,d|q) dx = h_n \delta_{m,n}$$

Burada

$$\omega(x) = \left| \frac{(e^{2i\theta};q)_\infty}{(ae^{i\theta}, be^{i\theta}, ce^{i\theta}, de^{i\theta};q)_\infty} \right|^2$$

ve

$$h_n(x,\alpha) = (\alpha e^{i\theta}, \alpha e^{-i\theta}; q)_\infty.$$

Limit Bağıntıları:

a) Askey-Wilson Polinomlarında x yerine $x/2a$, $b = \alpha q/a$, $c = \gamma q/a$ ve $d = a\beta/\gamma$ alındıktan sonra elde edilen polinomun $a \to 0$ limiti alındığında $P_n(x;\alpha,\beta,\gamma;q)$ büyük q-Jacobi polinomu elde edilir.

b) Askey-Wilson Polinomlarında $a = \beta^{1/2}$, $b = \beta^{1/2}q^{1/2}$, $c =, \beta^{1/2}$ ve $d = -\beta^{1/2}q^{1/2}$ alındığında $C_n(x;\beta|q)$ q-ultraküresel polinomu elde edilir.

2) Al Salam-Chihara Polinomları:

Tanım:

$$Q_n(x;a,b|q) = \frac{(ab;q)_n}{a^n}\ {}_3\phi_2\left(\begin{array}{c} q^{-n}, ae^{i\theta}, ae^{-i\theta} \\ ab, 0 \end{array}; q; q\right), \quad x = \cos\theta$$

Ortogonallik: a ve b kompleks eşlenikler ve $\max(|a|,|b|) < 1$ olmak üzere

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\omega(x)}{\sqrt{1-x^2}} Q_m(x;a,b|q)Q_n(x;a,b|q)dx = \frac{\delta_{m,n}}{(q^{n+1},abq^n;q)_\infty}$$

ortogonallik bağıntısı sağlanır. Burada ağırlık fonksiyonu,

$$\omega(x) = \left| \frac{(e^{2i\theta};q)_\infty}{(ae^{i\theta},be^{i\theta};q)_\infty} \right|^2$$

ile verilmiştir.

Limit Bağıntıları:

Al Salam-Chihara Polinomlarında $b \to 0$ limit alındığında $H_n(x;a|q)$ q-Hermite polinomu elde edilir.

3) q-Laguerre Polinomları:

Tanım:

$$P_n^{\alpha}(x|q) = \frac{(q^{\alpha+1};q)_n}{(q;q)_n} \, {}_3\phi_2 \left(\begin{matrix} q^{-n}, q^{(2\alpha+1)/4}e^{i\theta}, q^{(2\alpha+1)/4}e^{-i\theta} \\ q^{\alpha+1}, 0 \end{matrix} ; q; q \right), \quad x = \cos\theta$$

Ortogonallik:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\omega(x|q)}{\sqrt{1-x^2}} P_m^{\alpha}(x|q)P_n^{\alpha}(x|q)dx = \frac{(q^{\alpha+1};q)_n}{(q;q)_n} \frac{1}{(q^{\alpha+1},q;q)_\infty} q^{(\alpha+1/2)n}\delta_{m,n}$$

ortogonallik bağıntısı sağlanır. Burada ağırlık fonksiyonu,

$$\omega(x) = \left| \frac{(e^{2i\theta};q)_\infty}{(q^{(2\alpha+1)/4}e^{i\theta}, q^{(2\alpha+3)/4}e^{i\theta};q)_\infty} \right|^2$$

ile verilmiştir.

Limit Bağıntıları:

q-Jacobi polinomlarında $\beta \to \infty$ limiti alındığında, q-Laguerre polinomları elde edilir.

ÖZGEÇMİŞ

Çağan Korkmaz, 1980 yılında Malatya'da dünyaya gelmiştir. İlk ve ortaöğrenimini Sivas'ta, lisans eğitimini Ankara Bilkent Üniversitesi Matematik Bölümünde tam burslu olarak tamamlamıştır. Yüksek lisans eğitimine Marmara Üniversitesi Matematik Bölümü Teorik Matematik Programında devam etmektedir. 2004 - 2008 yılları arasında İstanbul Bilgi Üniversitesi bünyesinde araştırma görevlisi olarak çalışmış, 2008 - 2010 yılları arasında TED Ankara Koleji Vakfı Özel Lisesinde lise matematik öğretmeni olarak görev yapmıştır.