



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERDE
OLASALLIK EVRİMİ TABANLI
İNCELEMELER: VAN DER POL
DİZGELERİNİN İZGESEL VE EVRİMSEL
ÖZELLİKLERİNİN SAYISAL OLARAK
İNCELENMESİ**

FATİH HUNUTLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Programı

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nâsır Abdülbâki BAYKARA

EŞ-DANIŞMAN
Prof. Dr. Metin DEMİRALP

İSTANBUL, 2013



MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



**SIRADAN TÜREVLİ DENKLEMLERDE
OLASALLIK EVRİMİ TABANLI
İNCELEMELER: VAN DER POL
DİZGELERİNİN İZGESEL VE EVRİMSEL
ÖZELLİKLERİNİN SAYISAL OLARAK
İNCELENMESİ**

FATİH HUNUTLU
(521110001)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Anabilim Dalı
Uygulamalı Matematik Programı

DANIŞMAN
Prof. Dr. Nâsır Abdülbâki BAYKARA

EŞ-DANIŞMAN
Prof. Dr. Metin DEMİRALP

İSTANBUL, 2013

TEŞEKKÜR

Yaşamım boyunca sürmesini hedeflediğim matematik öğrenimimin önemli bir basamağı sayılan lisansüstü eğitimimi bitirmiş bulunmaktayım. Yüksek lisans eğitimim süresince engin deneyimiyle bana örnek olmasının yanında sonsuz desteğiyle eğitimime katkısı olan çok değerli hocam Prof.Dr. Nâsır Abdülbâki Baykara'ya teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca beni Prof.Dr. Metin Demiralp'ce kurulan Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu (BEBBYT) ile tanıştırmak üzere üyesi olmamı sağlamasıyla öğrenimime çok değerli bir boyut katmıştır. Bu bağlamda bilimsel çalışma, bilimsel düşünme anlamlarında bana katkı sağlayan çok değerli hocam Prof.Dr. Metin Demiralp'e çok teşekkür ederim. Lisansüstü eğitimim ve bilimsel çalışma süresince yardımlarını esirgemeyen Ercan Gürvit, Zeynep Gündoğar, Ayla Okan, Süha Tuna, Derya Bodur'a teşekkür ederim. Bünyesinde bulunmaktan sevinç duyduğum BEBBYT üyelerine katkılarından dolayı teşekkür ederim. Üniversite ve yüksek lisans dönemim boyunca fikir alışverişinde olduğum, beraber çalışmalarımızda birbirimize çok şey kattığımız değerli arkadaşlarım Gözde Aydın, Fatih Erbay, Abdullah Bahadır Şahin, Fatma Ortaç, Orhan Erselçuk, Hüseyin Kaş, Atakan Enül ve diğer tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim. Ve eğitim hayatım boyunca yanımda yer alan kıymetli annem Filis Hunutlu, babam Aytekin Hunutlu, kardeşlerim Hakan Hunutlu ve Emre Hunutlu'ya teşekkür ederim.

Ocak 2013

Fatih Hunutlu

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vii
SEMBOLLER	ix
KISALTMALAR	xi
ŞEKİL LİSTESİ	xiii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	5
2.1. Türevli Denklemler	5
2.1.1. Sıradan türevli denklemler	6
2.1.2. Göre türevli denklemler	7
2.2. Van Der Pol Denklemi	7
2.3. Zorlamalı Van Der Pol Denklemi	10
3. OLASILIKSAL EVRİM KURAMI	13
3.1. Olasılıksal Evrim Yaklaşım Yöntemi	13
3.2. İkinci Derecelilik	20
3.3. Olasılıksal Evrim Yaklaşımı'nın Birinci Kerteden İki Bilinmeyenli Açık Yapılı Sıradan Türevli Denklemlere Uygulanımı	25

3.4. Olasılıksal Evrim Yaklaşım Yönteminin Van der Pol Denklemine Uygulanması	32
3.5. İki Köşegenli Evrim Dizeyleri İçin Kesme Yaklaştıranları Belirlenimi . .	42
3.6. Kesme Yaklaştıranlarının Yakınsaklığı ve Niteliği	45
3.7. Uygulama	48
3.8. Asıl Sıradan Türevli Denklemin Başlangıç Değer Sorununun Kesin Çözümü	53
3.9. Van der Pol Denklemi İçin Tek Yönlü Yarı Çözümçül Uzanım	54
4. SONUÇLAR	59
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	71

ÖZET

Sıradan Türevli Denklemlerde Olasallık Evrimi Tabanlı İncelemeler: Van der Pol Dizgelerinin İzgesel ve Evrimsel Özelliklerinin Sayısal Olarak İncelenmesi

Bu tez çalışmasında Olasallık Evrim Kuramı sıradan türevli denklemlerin çözüm yöntemi olarak kullanılmıştır. Bu kuramın felsefesinde yatan amaç, elimizde bulunan doğrusal olmayan türevli denklem takımını sonsuz boyutlu doğrusal türevli denklem takımına dönüştürmektir. Bu işlemi yaparken uygun başlangıç koşulları da gözönüne alınarak adımlar atılmaktadır. Olasallık Evrim Yaklaşım yöntemini uyguladığımız sıradan türevli denklem takımı tek değişkenli veya çok değişkenli, birinci veya daha yüksek kereden olabilir. Bu tez çalışmasında ikinci kereden bir sıradan türevli denklem olan Van der Pol denklemi ele alınmaktadır.

Van der Pol denkleminde uygulanan Olasallık Evrim Yaklaşım yöntemi sonucunda elde edilen bulgular farklı açılardan yorumlanmaktadır. Van der Pol denkleminde ait dizgenin (sistemin) dizeyi, özdeğer ve özyöneş gibi öğeleri belirlenmiş olup sayısal olarak incelenmektedir. Evrim olgusunun bu yapılar üzerindeki etkisi incelenmektedir.

Tez çalışması sırasında, bir yandan Olasallık Evrim Kuramı da gelişmiş ve Nicem İşleyibilim alanlarında da uygulamalara geçilmiştir. Önü açık olan bu kuram, matematik alanında birçok yapı üzerine uygulanabilirliğini göstermektedir ve gelişmeye devam etmektedir.

Ocak 2013

Fatih Hunutlu

ABSTRACT

The Probabilistic Evolution in the Ordinary Differential Equations Based Studies: Analysis for Spectral and Evolutionary Characteristics of Van der Pol Systems within Numerical Approximation Perspective

In this thesis, Probabilistic Evolution Theory is used as a solution method for ordinary differential equations. The aim of this theory is to convert a nonlinear differential equation set into a linear one with infinite dimension. Appropriate initial conditions are regarded while converting a nonlinear differential equation set into a linear one. Nonlinear differential equation set, which is applied to Probabilistic Evolution Approach method, can be single or multi variable, first or higher degree. In this thesis; Van der Pol equation, second degree ordinary differential equation, is deal with.

Analysis, acquired by Probabilistic Evolution Approach method applied to Van der Pol equation, are interpreted from different points of view. Matrix of Van der Pol equations' system, whose eigenvalue and eigenvector elements are specified, are numerically analyzed. Effect of Evolution on these structures, is analyzed.

During these studies, Probabilistic Evolution Theory has progressed and applied on the fields of Quantum Mechanics. This improving theory (Probabilistic Evolution Theory) shows us the applicability of it on structures in mathematics.

January 2013

Fatih Hunutlu

SEMBOLLER

\mathbf{E} : Evrim Dizeyi

λ : Özdeğer

ξ : Özyöneş

$\mathbf{x}^{(r)}$: Taylor açılım noktası

\mathcal{I} : Tümlev işleci

Γ : Gama işlevi

$(\mathbf{a})_n$: Pochhammer simgesi

${}_1\mathbf{F}_0$: Genelleştirilmiş Aşkınuzamcıl (Hipergeometrik) İşlev

KISALTMALAR

- OE** : Olasılıksal Evrim
- STD** : Sıradan Türevli Denklem
- GTD** : Göre Türevli Denklem
- OEK** : Olasılıksal Evrim Kuramı
- OED** : Olasılıksal Evrim Denklemleri
- OEY** : Olasılıksal Evrim Yaklaşımı

ŞEKİL LİSTESİ

SAYFA

Şekil 3.1. $a = 0.4$ başlangıç değeri için ($n = 0, 1, 2, 5$) kesme boyutlu $x_1(t)$ ile $x(t)$ kesin çözüm eğrisi	49
Şekil 3.2. Kesme derecesi $n = 5$ ve yakınsaklık tekeri içindeki $a = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ başlangıç değerleri için kesin çözüm ile $x_1(t)$ kesme yaklaştıranları	50
Şekil 3.3. $a = 0.4$ başlangıç değeri için ($n = 0, 1, 2, 5$) kesme boyutlu $x_2(t)$ ile $x(t)$ kesin çözüm eğrisi	51
Şekil 3.4. Kesme derecesi $n = 5$ ve yakınsaklık tekeri içindeki $a = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ başlangıç değerleri için kesin çözüm ile $x_2(t)$ kesme yaklaştıranları	52

1. GİRİŞ

Öncelikle belirtmek gerekir ki tez çalışması sırasında kullandığımız, tezin başlığını da oluşturan “Olasallık” kelimesi yerine İngilizce “Probabilistic” kelimesinin karşılığı olan “Olasılıksal” kelimesinin daha uygun olduğu kararlaştırılmış olup bu andan itibaren bu kavram için “Olasılıksal” kelimesi kullanılacaktır.

Günümüzde birçok bilimsel alanda sıradan türevli denklemler karşımıza çıkmaktadır. Çünkü bilimin birçok alanındaki olguyu türev alma işlemi kullanarak uzbilimsel (matematiksel) tanımlamalarla anlatmak en yaygın yöntemlerden biridir. Bu tanımlamalar arasında denklemler yardımıyla çeşitli ilişkiler kurulabilir ve sonunda türevli denklemler elde edilir. Bilimsel yazında sıradan türevli denklemlerin çözümü ile ilgili çokça yöntem mevcuttur [3, 5–7]. Bu tezde konu edilen çözüm yöntemi olan Olasılıksal Evrim (OE) (ing: Probabilistic Evolution), sıradan türevli denklemler başta olmak üzere birçok yapıya farklı bir bakış açısı getirmektedir.

Çok yeni olarak Metin Demiralp ve Emre Demiralp tarafından ortaya atılan Olasılıksal Evrim kavramı ile, ister doğrusal olsun isterse olmasın, açık yapılı (ing: explicit) tüm sıradan türevli denklemlerin sonsuz ögeli doğrusal ve değişmez katsayılı bir sıradan türevli yöney (vektör) denkleme karşılık getirilebileceği gösterilmiştir [1, 2]. Ayrıca bu olgu göre türevli denklemlere, kuantum mekaniğinde Schrödinger denklemine, Hamilton sistemine yeni bakış açıları getirmektedir [10–15]. Bu konuda yapılan çalışmaların yanı sıra çok sayıda araştırmalar da tasarlanmaktadır.

Sıradan türevli sonsuz yöney denklemin başlangıç değerlerinin sendelenim (ing: fluctuation) kavramı ile çok yakından ilişkili olduğu da gösterilmiştir [44–49]. Üstelik başlangıç değerlerine sendelenim katarak sözü edilen sonsuz denklemden sonlu kesmelerle eniyileme yapılabileceği de ortaya çıkarılmıştır. Böylece, yeni ve çok etkin iş görmesi olası bir kuram ufukta belirmiştir. Bu çalışma yukarıda sözü edilen ilk adımlardan

birini oluşturma amaçlı olup sendelenim kavramı ile burada ilgilenilmeyecektir.

Çalışmada tek değiştirgeli (ing: parameter) Van der Pol denkleminin izgesel (ing: spectral) ve evrimsel özellikleri hem sayısal taban örnekleme olarak incelenecek hem de kuramsal kavram ya da olguların oluşturulmasına çalışılacaktır. Çözömlere izgesel ayırıtımdan üstel işlev yapılı yaklaştırmalar getirilmesi ve bunların başlangıç değerlerine nasıl bağımlı olduklarının incelenmesi büyük önem kazanmaktadır [16–21].

Amaç, sıradan türevli denklemlerde, doğrusal olmama niteliğinden kaçınmaktır. Aslında bir anlamda doğrusal olmamanın sonsuz boyutlu bir doğrusallığın katlanmış biçimi olduğu yorumu gündemdedir [36–43]. Katlama ve sonsuz denklem ilişkileri ve kesme yaklaştıranlarında yakınsama incelemeleri çok önemli olgular olup tezde bu odaklara yoğunlaşılmaya çalışılacaktır. Böylece açık yapılı sıradan türevli denklemlere gerçek anlamda doğrusal uzaylar eşlik ettirip doğrusal yapılarla çalışabilmek olanaklı duruma getirilecektir ve bu büyük önem taşımaktadır.

Olasılıksal Evrim Kuramı'nın (OEK) ilk temel taşları [1, 2] çalışmaları ile ortaya konulmuştur. Bu çalışmalara da temel oluşturan Lie Cebiri (ing: Lie Algebra) çerçevesinde Metin Demiralp ve Herschel Rabitz tarafından 1993 yılında yayınlanan [29, 30] yazılarıdır. Daha sonra bu kuram [8, 9] yazıları ile geliştirilmiştir. Tez çalışması sırasında katılan bilimsel toplantılar aracılığı ile yayınlanan bildiriler [16–21] bu tezin içeriğini oluşturmuştur.

Bilimsel yazında da sözedilen sıradan türevli denklemler ile ilgili birçok bilgi [3, 5–7, 22, 23] kaynaklarından yararlanılarak alınmış ve bu bilgiler ışığında Olasılıksal Evrim Yaklaşım yöntemi uygulanmıştır. Tez çalışması kapsamında özellikle ikinci kereden (ing: order) olması nedeniyle Van der Pol denklemi incelendiğinden, sıradan türevli denklemlerde ikinci kerteli yapılar daha çok odağa alınmıştır. Bu yüzden Van der Pol ile ilgili olarak [24–28] kaynakları başta olmak üzere gözönüne alınmıştır.

Olasılıksal Evrim Kuramı gereğince uzay genişletme, kesme yaklaştıranları gibi iş-

lemler [31–35] kaynaklarında oldukça çalışılmış ve geliştirilmiştir. Van der Pol dizgeleri kapsamında uygulanan uzay genişletme ve belirlenen kesme yaklaşıtlarına ışık tutması bakımından bu kaynaklar gözönünde bulundurulmuştur.

Ayrıca tezin yazım aşamasında Olasılıksal Evrim Kuramı'nın Nicem İşleybilim (ing: Quantum Mechanics) ve Sayıtsal İşleybilim (ing: Statistical Mechanics) alanlarında uygulanması sonucu üretilen [10, 11, 13, 14] ve [12, 15] yazıları da bu kuramın önünün ne kadar açık olduğunu göstermekte olup bu çalışmaya kuramsal ve uygulamalı görüşleri açısından oldukça yararları dokunmuştur.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Türevli Denklemler

Türevli denklemlerin ortaya çıkışı aslında 17. yüzyıla dek dayanmaktadır. Birbirlerinden bağımsız olarak Newton ve Leibniz tarafından tabanı oluşturulan çözümleyim (ing: analysis) alanıyla birlikte de gelişmeye başlamıştır. Çağcıl uzbilimsel fizik ise aslında Newton İlkeleri ile birlikte yaşama geçmiştir. Aynı zamanda Newton'un Devinim (Hareket) Yasaları'ı ışığında fiziksel olguların uzbilimsel biçeleym (modelleme) kullanılarak anlatımı gündeme gelmiştir. Tarihsel açıdan bakacak olursak türevli denklemler kuramının getirileri, fiziksel biçem (model) kurarken bize kazandırmış olduğu varsıl (zengin) görüşlerdir. Bu gelişmeler kesim kesim olsa da, asıl amaç iyi tanımlı ve tutarlı bir uzbilimsel anlatım elde etmektir.

Birbirleriyle ilişkisi sürekli değişen varlıkların oluşturduğu bir dünyada yaşıyoruz. Dünyanın yörüngesi zamanla değişiyor, düşen bir cismin hızı yer ile uzaklığına göre değişiyor, bir çember yarıçapına göre değişiyor, atılan bir nesnenin yörüngesi hızına ve atıldığı açıya göre değişiyor. Tüm bunlara benzer birçok ilişki örnek olarak verilebilir. Özenle bakılacak olursa bu ilişkilerde değişen değerler varolmaktadır. Uz bilimde bu değerleri değişkenler (ing: variables) ile anlatırız. Bir değişkenin diğerine göre değişim oranını türev ile anlatırız. Biçeleym (Modelleme) yaparak kurduğumuz denklemler bu değişkenlerin birbiriyle olan ilişkilerini anlatır ve onların türevlerini içeren denklemlere de türevli denklemler deriz.

Türevli denklemler içerdiği işlevin biçimine göre isimlendirilirler. Eğer bu türevli denklemlerde yer alan işlevin yalnız tek bir değişkene bağlı türevi varsa bu denklemlere sıradan türevli denklem (STD), türevli denklemlerdeki işlevin birden çok değişkene bağlı türevi varsa göre türevli denklem (GTD) denir. Dolayısıyla türevli denklemleri temel olarak ikiye ayırabiliriz:

- 1) Sıradan (Adi) türevli denklemler
- 2) Göre (Kısmî) türevli denklemler

Türevli denklemler bilinmeyenlerin birbirlerine ve katsayılarla ilgili konumlarına göre:

- 1) Doğrusal türevli denklemler
- 2) Doğrusal olmayan türevli denklemler

olarak ikiye ayırabiliriz. Doğrusal türevli denklemler ile ilgili oluşturulan kuram oldukça gelişmiş olmasına karşın doğrusal olmayan türevli denklemlerin çözümlemeyi zordur. Biz bu çalışmada doğrusal olmayan sıradan türevli denklemlerin doğrusal sıradan türevli denklemlere dönüştürülmesini sağlayan Olasılıksal Evrim Kuramı altında, ikinci kereden (mertebesi) doğrusal olmayan sıradan türevli denklem olan Van der Pol denklemini inceleyeceğiz.

2.1.1. Sıradan türevli denklemler

Sıradan türevli denklemler, içerdiği işlevin tek değişkenli olmasına ve bu değişkene bağlı türev veya türevleri içermesine bağlıdır. En yüksek türev derecesine göre denklemin kertesini belirlenir. Bir sıradan türevli denklemi kapalı biçimde anlatacak olursak

$$F(y, y', y'', \dots, y^n) = f(x) \quad (2.1)$$

yazabiliriz. Sıradan türevli denklemdeki işlev gerçel değerli ya da karmaşık değerli olabilir gibi yöney veya dizey (matris) değerli de olabilir. Sıradan türevli denklemin anlattığı dizge gözönüne alınarak bu işlev seçilir.

(2.1) eşitliğinin sağ yanındaki $f(x)$ işlevi sıfıra eşit olursa bağdaşık (homojen) türevli denklem, değilse bağdaşık olmayan türevli denklem denir.

2.1.2. Göre türevli denklemler

Bilinmeyen çok değişkenli işlevleri ve onların göre türevlerini içeren türevli denklemlere göre türevli denklemler denir. Bir göre türevli denklemdeki işlevi $u(x_1, \dots, x_n)$ ile simgeleyecek olursak göre türevli denklemleri kapalı biçimde

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_1}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \dots\right) = 0 \quad (2.2)$$

yazabiliriz. Aslında göre türevli denklemler sürekli değişkenlerle ilgili değişim oranlarını içerir. Göre türevli denklemler genellikle sürekliliğin söz konusu olduğu ses, sıvı akışı, elektrodinamik, ısı iletimi vb. konularda kullanılır. Sıradan türevli denklemlerde olduğu gibi göre türevli denklemlerde de doğrusallık söz konusu olabilir. Dalga denklemi, ısı denklemi, Laplace denklemi bilinen doğrusal göre türevleri denklemlere örnek olarak verilebilir.

Bu konu ile ilgili daha fazla bilgi verilmeyecek olup tezin çalışma konusu olan ikinci kereden doğrusal olmayan Van der Pol sıradan türevli denklemine geçmek yerinde olacaktır.

2.2. Van Der Pol Denklemi

Hollandalı bir fizikçi ve elektrik mühendisi olan Balthasar Van der Pol'ün (27 Ocak 1889 - 6 Ekim 1959) ortaya attığı bu denklem, elektrik devreleri üzerinde yaptığı çalışmalar sonucu betimlenmiştir. Balthasar Van der Pol radyo dalgalarının yayılımı, boşluk tüplerinin (ing: vacuum tubes) fiziği, elektriksel salınımların kuramı ile ilgilenmekteydi. Van der Pol denklemi genellikle fizikte, biyolojide sinir gözeleri (ing: neuron) üzerinde, deprem biliminde (ing: seismology) kırıklar (faylar) üzerinde yapılan çalışmalarda kullanılmaktadır.

Kendi adıyla bilinen Van der Pol denklemi aslında basit bir kendiliğinden salınan triyot (ing: triode) devresini betimler. Bu denklem aslında triyodun bir ark lambası

(ing: arc lamp), bir akkor boşalmalı tüp (ing: glow discharge tube) veya elektronik boşluk tübü gibi birçok elektroteknik aygıtlar yerine bir prototip biçim (ing: model) olarak kullanıldığını söyler. Bu denklem şu anda kargaşalı (ing: chaotic) davranış üreten bir değerlendirme dizgesi olarak biliniyorsa, salınımları sınıflandırmasından dolayıdır. Burada bahsedilen salınımlar bir sığanın (ing: capacitor) boşalmasını anlatan gevşeme salınımlarıdır (ing: relaxation oscillations). Aslında Van der Pol doğrusal olmayan salınımların triyot devresi gibi kendiliğinden salınımlı dizgelerce üretilmesini anlatmasıyla bilinmiştir. 19. yüzyıldan beri bilimsel yazında yer alan gevşeme salınımlarına ait dört adet kendiliğinden salınımlı dizge tanımlanmıştır: Gérard-Lescuyer'in (1880) ortaya attığı seri bağlı dinamo makineleri, Duddell'in (1901) keşfettiği ve Blondel'in (1905) incelediği arp (ing: musical arc), de Forest'in (1907) tasarladığı triyot, Abraham ve Bloch'ın (1919) ayrıntılandırılmış çok katlı titreşicisi (ing: multivibrator). Kendiliğinden salınımlı dizgeyi tanımlayan türevli denklem 1908 yılında ilk olarak Poincaré arp için ortaya atmıştır. Seri bağlı dinamo makineleri için Janet (1919), triyot için Blondel (1919) ilgili denklemleri anlatmışlardır. Janet (1919) bu üç adet kendiliğinden salınımlı dizgeyi ifade eden denklemin aynı olduğunu vurgulamıştır. 1926 yılında ise Van der Pol bu dizgeler tarafından paylaşılan ilgili dinamik özellikleri de içeren genel bir boyutsuz denklem betimlemiştir.

20. yüzyılın ilk yarısı boyunca Balthasar Van der Pol, radyo ve uziletişim (ing: telecommunication) alanlarında önemli bir rol oynadı. Boşluk tüpleri üzerindeki çalışmalarıyla birlikte bir yüzyılda kayda değer gelişmeler oluşturmuştur. Bugün bu boşluk tüpleri, gönderici ve alıcıların (ing: transmitters and receivers) devrelerindeki akışın denetimini sağlamaktadır. Çağdaşları Lorenz, Thompson ve Appleton ile birlikte bir elektron boşluk tüpündeki salınımlar üzerinde deneyler yaptılar. Sonuç olarak tüm başlangıç koşullarının, sonlu genişlikteki aynı devirli (ing: periodic) yörüngeye yakınsadığını belirlediler. Bu davranış doğrusal denklemlerin çözümünün davranışından değişik

olduğu için doğrusal olmayan bir türevli denklem ile anlatılması gerekiyordu.

Balthasar Van der Pol'ün betimlediği bu doğrusal olmayan denklemin zamana bağlı türevli anlatımını açık biçimde yazacak olursak

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0, \quad \mu > 0 \quad (2.3)$$

elde edilir. Burada x bağımsız konum değişkeni, t zaman değişkeni, μ ise değişmez (sabit) katsayıdır ve dizgenin azalan gücünü gösterir. Van der Pol denklemini zamana bağlı türevlemeye göre daha kısa biçimde

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0 \quad (2.4)$$

yazabiliriz. Bu anlatıma bakacak olursak şu değişik durumları gözlemleyebiliriz.

a) Eğer x^2 terimi gözardı edilebilirse yani x yeteri kadar küçükse, dizge $(-\mu\dot{x})$ terimini içerecektir. Böylece durum uzayındaki (ing: phase space) $(x = 0, \dot{x} = 0)$ değişmez noktası kararsızlığı (ing: instability) gösterecektir. Buna karşın x^2 terimi 1'e göre baskın olursa dizgedeki azalma artı (ing: positive) olacaktır.

b) μ değişmez teriminin sıfırlanması durumunda denklem $\ddot{x} + x = 0$ yapısına dönüşecektir ve salıngaç “Basit Uyumlu Salıngaç” (ing: Simple Harmonic Oscillator) adını alacaktır. Bu dizgenin çözümü çok iyi bilinen $x(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t)$ ucaysal (kutupsal) yapısında olacaktır. Buradaki c_1 ve c_2 değişmez katsayıları başlangıç koşulları altında verilir.

c) $(-\mu(1 - x^2)\dot{x})$ teriminin katsayısı direnç ya da sürtünme olarak adlandırılır. Olağan durumda $(-\mu(1 - x^2))$ terimi artıdır. Eğer bu terim eksi ise “eksi direnç” olarak adlandırılır.

Aslında Van der Pol denklemi Rayleigh türevli denkleminin özel bir durumudur.

$$\ddot{y} - \mu\left(1 - \frac{1}{3}\dot{y}^2\right)\dot{y} + y = 0, \quad \mu > 0 \quad (2.5)$$

2.3. Zorlamalı Van Der Pol Denklemi

Van der Pol ve Van der Mark (1927) bir elektrik devresinin bir direnç (ing: resistance), bir sığa (ing: capacitance) ve bir Neon lambasından (ing: Neon lamp) oluştuğunu varsaydılar. Daha sonra elektrik devresine bir telefon alıcısının eklenmesiyle dizgenin yanıtını duydular. Bunun yanısıra, dizgenin devir atlamadan önce çıkardığı düzensiz (ing: irregular) gürültüyü duydular. Ancak bu gürültü sürekli frekansın yanında duyulmaktaydı. Bugün ise onların duydukları bu gürültü belirleyici kargaşa (ing: deterministic chaos) olarak nitelendiriliyor.

Van der Pol çalıştığı konularda gevşeme salınımlarının öneminin ayırdına varmıştı ve, deyim yerindeyse, tekil saptırım kuramının (ing: singular perturbation theory) bir köşetaşı olduğunu kavramıştı.

Van der Pol denkleminde eşitliğin sağ yanına devirli ve bağdaşık (homojen) olmayan bir zorlama terimi eklenerek “Zorlamalı Van der Pol Denklemi” elde edilir.

$$\ddot{x}(t) + \mu(x^2 - 1)\dot{x}(t) + x(t) = a \sin(2\pi\nu t), \quad \mu > 0 \quad (2.6)$$

(2.6) eşitliğindeki μ terimi ile zorlamayı getiren sinüs işlevinden dolayı dizgedeki frekans (ing: frequency) belirlenir. Denklemlerdeki a ve ν değişmez katsayılarıdır, sırasıyla genlik (ing: amplitude) ve sıklığı ifade eder. Ayrıca çözümün belirtkisi (ing: characteristic) de bu katsayılarla bağlıdır, kargaşalı davranış veya çatallanma (ing: bifurcation) gibi durumlarla karşılaşılabilir.

Van der Pol'ün doğrusal olmayan salınımlar ve devreler kuramı üzerindeki çalışmaları Cartwright ve Littlewood'un ufuk açan çalışmalarına öncü olmuştur. 2. Dünya Savaşı'ndan hemen önce, 1938'de İngiliz Radyosu Araştırma Kurulu (ing: British Radio Research Board) radyo mühendisliğinde ortaya çıkarılan türevli denklemler için uzbilimcilere öneri yaptı. Bu öneriye yanıt olarak Cartwright ve Littlewood Zorlamalı Van der Pol denklemi üzerinde çalışmaya başladılar ve bu denklemin iki durumlu (ing: bistable) değişken dizgeli olduğunu gösterdiler. Ek olarak, kararlı devirli yörüngelerin

arasında düz bir sınır olmadığını gösterdiler. Böylece bu dizgenin ayrıntılı bir biçimde araştırılmasıyla kargaşalı devinimlerini bulmuş oldular.

Van der Pol'ün 1920'li yıllardaki bu girişimi Van der Pol denklemini, özünden uyarımlı erey (ing: limit) döngülü salınımlar (ing: self-excited limit cycle oscillations) için bir biçem (ing: prototype) yapmıştır. Böylece bu denklem saptırımdan uyumlu devinim alanına, gevşeme salınımlarına dek geniş çaplı bir değişken dizgesi üzerinde çalışılmasını sağlamıştır. Fiziksel ve biyolojik biçe çeşitleri oluşturmak için de yaygın bir biçimde kullanılmaktadır.

3. OLASILIKSAL EVRİM KURAMI

3.1. Olasılıksal Evrim Yaklaşım Yöntemi

Olasılıksal Evrim olgusu son zamanlarda gelişen ve türevli denklemlerin çözümüne yardımcı olmakla birlikte, türevli denklemlerin birçok alanında uygulayımı olan bir yaklaşım yöntemidir. Metin Demiralp tarafından ortaya atılan ve topluluğu BEBBYT (Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi Yöntemleri Topluluğu) ile birlikte geliştirilmekte olan bir yaklaşım yöntemidir. Günden güne geliştirilen bu yaklaşım yöntemi [8,9], doğrusal olmayan sıradan türevli denklemleri, doğrusal ve bağıdaşık olan sonsuz boyutlu sıradan türevli denklem takımına dönüştürmektedir. Bu işlem sonunda oluşan sonsuz boyutlu doğrusal ve bağıdaşık sıradan türevli denklem takımı, uygun başlangıç koşulları altında sonsuz ögeli değışmez katsayılı bir dizey ile gösterilmektedir. Bu sonsuz ögeli katsayıları bilinen dizeyin en genel durumu üst Hessenberg [18,21] yapısında olacaktır. Çalışmalarımız da Hessenberg yapı yerine üçgensel yapılar oluşturarak ilerleyeceğiz. Nedeni de, üçgensel yapılı bir dizey ile çalışmanın, kesme yaklaştıranlarının daha kolay ve çözümcül (analitik) olarak belirlenmesinde önemli konum almasıdır. Bu arada sağ yan işlevinde oluşacak tekilliklerden veya genellik yitimlerinden uzak durulacak, bu durumlar olabildiğince başlangıç koşullarına aktarılmaya çalışılacaktır. Oluşturulan üçgensel yapılı dizeylerle çalışmak yerine iki köşegenli dizeylerle çalışmak adına ikinci dereceden çokçokterimli (ing: multinomial) işlevler elde edilecektir. Bunun için uzay genişletme olgusu kullanılacak, sağ yan işlevinin durumuna göre uzay genişletme adımları da değışkenlik gösterecektir.

Olasılıksal Evrim Yaklaşım yöntemini daha iyi kavramak adına kolay yapılı sayılabilecek bir bilinmeyenli sıradan türevli denklem ve buna eşlik eden uygun bir başlangıç koşuluna yöntemimizi uygulayalım.

$$\dot{x}(t) = f(x(t)); \quad x(0) = a, \quad t \in [0, \infty) \quad (3.1)$$

Bu yöntem kabaca doğrusal olmayan bir işlevi doğrusal bir yapıya dönüştüreceğinden, (3.1) anlatımı için, sol yanda bir bilinmeyenli birinci kereden doğrusal olmayan sıradan türevli denklemin var olduğunu söyleyebiliriz. Eşitliğin sağ yanında ise betimleyici işlev (ing: descriptive function) olarak bizim belirlediğimiz ve karmaşık düzlemde çözümcül olan bir işlev yer almaktadır.

Betimleyici işlev olarak belirlediğimiz f işlevi aynı zamanda açıkça t zaman değişkenine bağlı olmadığı için özerk (otonom) yapıdadır. Ancak bu durum bize genellikle hiçbir şey kaybettirmez. t zaman değişkenine denk düşen yeni bir bilinmeyen tanımlayarak sıradan türevli denklem takımına kazandırdığımız bu yeni durum ile özerk olmayan bir yapı elde edebiliriz. Bunun sonucunda ise iki bilinmeyene ve iki başlangıç koşuluna sahip olacağız.

f 'nin x -karmaşık düzleminde çözümcül bir işlev olduğu öngörümünü yeğliyoruz. x -karmaşık düzlemi, bu düzlemin $(0, 0)$ başlangıç noktasındaki birim çemberli Riemann yuvarına denk düşer. Tüm karmaşık düzlemin dış kesimindeki noktalar kuzey yarım yuvarı, iç kesimindeki noktalar ise güney yarım yuvarı betimler. Düzlemlerle arakesit çemberindeki (ekvatordaki) tüm noktalar ise hem Riemann yuvarının her iki yarım yuvarında hem de karmaşık düzlemedirler. Riemann yuvarının kuzey ucayı, x -karmaşık düzlemindeki hiçbir noktaya karşılık gelmemektedir. Bu durum karmaşık düzlemdeki sonsuzluk demektir. Eğer sonsuzluğu karmaşık düzleme katmak istersek, yeni oluşan genişlemiş düzleme “Genişletilmiş Karmaşık Düzlem” denir. Ancak biz yalnızca karmaşık düzlem üzerinde çalışıyoruz. Dolayısıyla karmaşık düzlemdeki çözümcüllüğün (ing:analyticity) tam işlev (ing: entire function) olması demektir.

f işlevimizi, tam işlev olduğundan, Taylor toplam dizisini (serisini) kullanarak $x^{(r)}$ dolaylarında açalım. Böylece

$$f(x(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j (x(t) - x^{(r)})^j \quad (3.2)$$

eşitliğini yazabiliriz. Eşitliğin sağ yanında bir sonsuz doğrusal birleşim gözlenir.

$$x_k(t) \equiv (x(t) - x^{(r)})^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

ile tanımlanan işlevler doğrusal bağımsız olmalarına karşın işlevsel (fonksiyonel) bağımlıdır. Bu işlevlerin doğrusal bağımsız olması, tam işlev uzayı için taban işlevleri olarak kullanım olanağını sağlar. Dolayısıyla bir sıradan türevli denklem takımı kurmak olasıdır. Bu yapıyı oluşturmak adına (3.3) eşitliğinin her iki yanının t değişkenine göre türevini alarak

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= k \sum_{j=0}^{\infty} f_j (x(t) - x^{(r)})^{k+j-1} \\ &= k \sum_{j=0}^{\infty} f_j x_{k+j-1}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.4)$$

denklem takımını oluşturabiliriz. Dizey gösterilimini kullanabilmek adına bu denklemlerden birkaçını yazacak olursak

$$\begin{aligned} \dot{x}_0(t) &= 0 \\ \dot{x}_1(t) &= \sum_{j=0}^{\infty} f_j x_j(t) \\ \dot{x}_k(t) &= k \sum_{j=0}^{\infty} f_j x_{k+j-1}(t) \quad k = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

anlatımlarını gözlemleyebiliriz. Bu durum bizi dizey cebiri kullanarak

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \cdots \\ 0 & 2f_0 & 2f_1 & 2f_2 & 2f_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 3f_0 & 3f_1 & 3f_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 4f_0 & 4f_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

eşitliğini yazmaya zorlar. Aslında (3.6) eşitliğinin sol yanında bir yöneyin birinci kereden türevli anlatımı, sağ yanında ise bir dizey ile türevli anlatımı gösterilen yöneyin

kendisinin çarpımı bulunmaktadır. Bu eşitlikte dizeyin öğeleri bilinmektedir, bu öğeler Taylor açılımından gelen katsayılardır. Dolayısıyla bulunması gereken değerler yöneyin öğeleridir. Bu amaçla sağ yandaki yöneyi

$$\mathbf{x}(t) = [x_0(t) \ x_1(t) \ x_2(t) \ \dots]^T \quad (3.7)$$

yapısında tanımlayarak, (3.6) eşitliğini daha kapalı biçimde yazıp

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{E}\mathbf{x}(t) \quad (3.8)$$

“Olasılıksal Denklemi” ni elde edebiliriz. Burada \mathbf{E}

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & \dots \\ 0 & 2f_0 & 2f_1 & 2f_2 & 2f_3 & \dots \\ 0 & 0 & 3f_0 & 3f_1 & 3f_2 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 4f_0 & 4f_1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

ile verilen bir dizeyi simgeler ve bu dizeyin tüm öğeleri bilinen değişmez değerlerdir.

Çözülmesi gereken sorun artık (3.8) denklemdir. Bu denklemin biçimsel çözümünü (ing: formal solution)

$$\mathbf{x}(t) = e^{t\mathbf{E}}\mathbf{x}(0) \quad (3.10)$$

yapısında yazabiliriz. Yani $\mathbf{x}(t)$ yöneyini, bir üstel işlev ve bu yöneyin başlangıç noktasında aldığı değerleriyle elde edilen başlangıç yöneyinin çarpılmasıyla elde edebiliriz. Başlangıç yöneyi bildiğimiz bir değeri olan veya duruma uygun seçilmiş bir yöneydir.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(0) &= [x_0(0) \ x_1(0) \ x_2(0) \ \dots]^T \\ &= \left[1 \quad (a - x^{(r)}) \quad (a - x^{(r)})^2 \quad \dots \right]^T \end{aligned} \quad (3.11)$$

Başlangıç yöneyinin öğelerini, (3.11) eşitliğindeki gibi, $(a - x^{(r)})$ anlatımının artan eksi olmayan tamsayı üslüleri olarak seçersek, \mathbf{E} dizeyine “Evrım Dizeyi” denir. Çünkü bu başlangıç koşulları altında \mathbf{E} dizeyi dizgenin evrimini tanımlamaktadır.

“Evrim” kavramının nereden geldiğini açıklamış olduk, “Olasılıksal” kavramının nereden geldiğini anlayabilmek için başlangıç yöneyine odaklanım gerekir. Başlangıç yöney öğelerinin özel olarak $(a - x^{(r)})$ teriminin artan üslüleri yapısında seçilmiş olması (3.8) denkleminin çözümüne bir kısıt getirmektedir. Bu öğeler üslülerin birleşiminden oluşabileceği gibi genelde değişik değerler de alabilirler. Eğer başlangıç yöneyini

$$\mathbf{x}(0) = [a_0 \ a_1 \ a_2 \ \dots]^T \quad (3.12)$$

olarak yazarsak bu başlangıç yöneyinin genel terimini, tümlevli yapıda,

$$a_k \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha w(\alpha) \alpha^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

ile verebiliriz. Burada bir ağırlık işlevi altında beklem (ing: moment) söz konusudur.

Bu durum bizi

$$x_k(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha W(\alpha, t) \alpha^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.14)$$

eşitliğini

$$W(\alpha, 0) = w(\alpha) \quad (3.15)$$

koşulu altında yazmaya zorlar. (3.14) eşitliği çözüm yöneyinin k . öğesinin t anındaki beklenen değeri demektir yani $W(\alpha, t)$ ağırlığı altında α^k 'nin beklenen değeridir. Genel olarak $w(\alpha)$ ağırlığı yapısında yazılan $W(\alpha, t)$ ağırlık işlevi aynı zamanda olasılık yoğunluğunu da anlattığından dolayı bu beklenen değerlerin zamanla evrimleşmesi, olasılık yoğunluğunun evrimiyle ilişkilidir. Bu ilişki nedeniyle ilgili denklemlere “Olasılıksal Evrim Denklemleri (OED)” diyoruz. Başta verilen uygun başlangıç koşullu tek bilinmeyenli sıradan türevli denklem, ağırlık işlevinin $(a - x^{(r)})$ 'deki Dirac delta işlevi olmasıyla uyumludur.

Olasılıksal Evrim Denklemi'nin çözümü (3.10) eşitliği ile anlatılmıştı. Çözüm yöneyi öğelerinin üsleri de aslında artan doğal sayılardan oluşmaktadır. Özellikle çözüm

yöneynin ikinci ögesi $(x(t) - x^{(r)})$ dir. Böylece verilen tek bilinmeyenli sıradan türevli denkleminin asıl çözümünü

$$x(t) = \mathbf{e}_2^T \mathbf{x}(t) + x^{(r)} \quad (3.16)$$

olarak yazabiliriz. Artık $x(t)$, başta verilen tek bilinmeyenli sıradan türevli denkleminin kesin çözümüdür.

(3.16) çözümünü inceleyecek olursak $\mathbf{x}(t)$ yöneynin tanımının yapılması gerektiği ortaya çıkar. Çünkü $\mathbf{x}(t)$ sonsuz boyutlu bir yöneydir ve sonsuz boyutla çalışmak türlü zorluklar getirir. Bu zorlukları en aza indirmek adına sonlu boyutta kesmeler yapmak olası yollardan biridir. Sonsuz boyutta yapılan kesmeler bir dizi yaklaşımlar ve yakınsaklık incelemeleri gerektirecektir. Daha sonra bu konulara ayrıntılı bir biçimde değineceğiz.

Olasılıksal Evrim Denklemi'nde sol baştan olmak üzere $(n + 1)$ boyutlu kesmeler yapacak olursak

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

sonlu boyutlu eşitliğini elde ederiz. Şimdi eşitliğin sağ yanındaki sonlu $\mathbf{x}(t)$ yöneyni

$$\mathbf{x}^{(n+1)}(t) = [x_0(t) \ x_1(t) \ \dots \ x_n(t)]^T \quad (3.18)$$

yapısında tanımlamak gerekir. Bu tanım ışığında (3.17) eşitliğine dayanarak Olasılıksal Evrim Denklemi'ni sonlu boyut için

$$\dot{\mathbf{x}}^{(n+1)}(t) = \mathbf{E}^{(n+1)} \mathbf{x}^{(n+1)}(t) \quad (3.19)$$

yapısında yazabiliriz. Eğer bu denklemin biçimsel çözümünü sonlu boyut için yazmak istersek

$$\mathbf{x}^{(n+1)}(t) = e^{t\mathbf{E}^{(n+1)}} \mathbf{x}^{(n+1)}(0) \quad (3.20)$$

eşitliğini elde ederiz. Buradaki sonlu boyutlu başlangıç yöneyi ise apaçıktır ki

$$\mathbf{x}^{(n+1)}(0) = \left[1 \quad (a - x^{(r)}) \quad \dots \quad (a - x^{(r)})^n \right]^T \quad (3.21)$$

yapısında yazılır.

(3.20) eşitliğindeki sonlu üstel dizeyin belirleniminin birkaç yolu olsa da burada “Kesilmiş Evrim Dizeyi” nin izgesel ayrıştırımını (ing: spectral decomposition) kullanacağız. İzgesel ayrıştırım yöntemi gereği

$$\mathbf{E}^{(n+1)} \boldsymbol{\xi}_i^{(n+1)} = \lambda_i \boldsymbol{\xi}_i^{(n+1)}; \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad (3.22)$$

eşitliğini yazarız. Burada λ_i , i . özdeğer, $\boldsymbol{\xi}_i^{(n+1)}$ ise i . özyöneiy (özvektör) göstermektedir. Ayrıca $\mathbf{E}^{(n+1)}$ dizeyi bakışık (simetrik) olmak zorunda olmadığından sağ ve sol özyöneiylerin ayrı ayrı belirlenmesi gerekmektedir. $\mathbf{E}^{(n+1)}$ dizeyinin sağ ve sol özyöneiylerini sırasıyla \mathbf{Q}_R dizeyinin düşey sıraları (sütunları) ve \mathbf{Q}_L dizeyinin yatay sıraları (satırları) oluşturmak koşulu ile ve \mathbf{I} , $(n + 1) \times (n + 1)$ boyutlu birim dizey olmak üzere $\mathbf{Q}_L \mathbf{Q}_R = \mathbf{I}$ eşitliği sağlanmalıdır. Diğer bir deyişle, $\mathbf{E}^{(n+1)}$ dizeyinin düşey sıraları ayrılarak Gram-Schmidt yöntemi uygulanır ve dikgenleştirilir. Oluşan dizeyin düşey sıraları \mathbf{Q}_R dizeyini oluşturur. $\mathbf{E}^{(n+1)}$ dizeyinin yatay sıraları ayrılarak Gram-Schmidt yöntemi uygulanır ve dikgenleştirilir. Oluşan dizeyin yatay sıraları \mathbf{Q}_L dizeyini oluşturur.

Böylelikle özdeğerlerin köşegene oturduğu

$$\boldsymbol{\Lambda}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n+1} \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

dizeyini tanımlayabiliriz. Çözümünü aradığımız işlev üstel yapıda olduğu için $\boldsymbol{\Lambda}^{(n+1)}$ dizeyinin de üsteli alınması gerekir.

$$e^{t\mathbf{\Lambda}^{(n+1)}} = \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{t\lambda_{n+1}} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Böylelikle sonlu yapıdaki $\mathbf{x}^{(n+1)}(t)$ çözüm yöneyi için gerekli olan

$$e^{t\mathbf{E}^{(n+1)}} = \mathbf{Q}_R^{(n+1)} e^{t\mathbf{\Lambda}^{(n+1)}} \left(\mathbf{Q}_R^{(n+1)} \right)^T \quad (3.25)$$

üstel işlev belirlenmiş olur. (3.25) eşitliği \mathbf{Q}_L dizeyi kullanılarak da yazılabilirdi. Bu durumda eşitliğin sol yanındaki çarpımın ilk ögesi \mathbf{Q}_L dizeyinin devriği (ing: transpose), üçüncü ögesi ise \mathbf{Q}_L dizeyi olacaktı. Artık çözüm hakkında belirlenimler yapabilmek adına kesme yaklaşımlarının incelenmesi gerekecektir.

3.2. İkinci Derecelilik

Betimleyici işlevler x değişkenine göre çokçokterimlilerse (ing: multinomials) özyinelemeli (ing: recursive) yapılarla uğraşmak kesme yaklaşımlarının üretimi açısından daha elverişlidir. İleride yapacağımız yalınlaştırmalarla göreceğiz ki Evrim Dizeyi üçgensel yapıda olacaktır. Evrim Dizeyi üzerinde herhangi bir işlem gerçekleştirilmezse üst Hessenberg yapıda olduğu görülmektedir. Ancak Hessenberg yapıyla çalışmak üçgensel yapıyla karşılaştırıldığında dizey cebiri açısından birçok zorluk getirecektir. Bu yüzden üçgensel yapıya geçmek yeğlenir. \mathbf{E} Evrim Dizeyi'nde f_0 ögesi sıfırlanırsa dizeyin üst üçgensel yapıya kavuşacağı apaçıktır. f_0 değeri, betimleyici işlevin $x^{(r)}$ Taylor açılım noktasındaki aldığı değerdir. Eğer f , $x^{(r)}$ değerini alarak en azından bir sıfırı varsa, f_0 sıfırlanır ve \mathbf{E} üçgensel yapıya kavuşur. Ancak f 'nin herhangi bir $x^{(r)}$ değeri için hiçbir zaman sıfırlanmayacağı zamanlar da olabilir. Böylesine durumlarda uygun uzay genişletim adımları atılarak daha yüksek boyutlarda üçgensellik sağlanabilir.

Kesme yaklaştıranları üçgensel durumlarda daha kolay belirlenir. Ancak üçgensel dizeyin ögeleri seyrek değildir, yani yarı dolu bir dizeydir ve çözümlenimi de zor olabilir. Ancak uzay genişletim yöntemi [31–35] neredeyse tüm ikinci dereceli çokçokterimli tanımlayıcı işlevlerden oluşan sıradan türevli denklem takımlarını elde etmek amacıyla kullanılabilir. Böylelikle ikinci derecelilik çok önemli bir konuma gelir.

Bu tez çalışması çerçevesinde ilgilenilen Van der Pol denklemi için ikinci derecelilik elde etmek amacıyla uygun uzay genişletim adımlarını atacağız. Uygulanacak uzay genişletim yönteminde izlenen yol eşsiz olmayıp ilk göze çarpan adımlarla ilerleyeceğiz. Van der Pol denklemini yeniden anımsayacak olursak

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\dot{x} + x = 0, \quad \mu > 0 \quad (3.26)$$

yazarız.

$$y = x - \frac{x^3}{3} - \frac{\dot{x}}{\mu} \quad (3.27)$$

Liénard dönüşümü [16] altında Van der Pol denklemi

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu \left(x - \frac{1}{3}x^3 - y \right) \\ \dot{y} &= \frac{1}{\mu}x \end{aligned} \quad (3.28)$$

iki boyutlu biçime dönüştürölür. Burada amaç denklemi çözümlenebileceğimiz en basit duruma getirmektir. Liénard dönüşümünden değişik dönüşümler tanımlayarak da yol alınabilir. Bu iki boyutlu durumu inceleyecek olursak ilk eşitliğin sağ yanında üçüncü dereceden bir terim vardır ve ikinci dereceliliği elde etmek adına bu terimden kurtulmak gerekir. Bir terimin derecesini düşürmek için uzay genişletim yöntemine sıkça başvurulur. Bu amaçla ilk olarak dönüşüm yapılacak terim seçilmelidir. Sorun yaratan terim x^3 olduğundan, dönüşüm yapılacak terim olarak seçilmesi akılcı olacaktır. Böylece,

$$u_1 \equiv x^2 \quad \Rightarrow \quad \dot{u}_1 = 2x\dot{x} \quad (3.29)$$

dönüşümü ile yeni bir bilinmeyen tanımlayarak devam edilir ve

$$\dot{u}_1 = 2\mu \left(u_1 - \frac{1}{3}u_1^2 - xy \right) \quad (3.30)$$

eşitliği yazılır. Böylece eşitliğin sağ yanında ikinci derecelilik elde edilmiş olur. Tüm takımımızı yazacak olursak

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu \left(x - \frac{1}{3}xu_1 - y \right) \\ \dot{y} &= \frac{1}{\mu}x \\ \dot{u}_1 &= 2\mu \left(u_1 - \frac{1}{3}u_1^2 - xy \right) \end{aligned} \quad (3.31)$$

üç boyutlu yeni bir yapı elde etmiş oluruz. Bu denklem takımına başlangıç koşulları da eşlik etmektedir ancak başlangıç koşullarını ilerleyen aşamada inceleyeceğiz, burada konunun ayrıntısına girilmeyecektir. Sonuç olarak, Van der Pol denkleminin bir bilinmeyen eklenerek üç boyutlu yapı kazanılmış ve ikinci derecelilik elde edilmiştir.

Benzer işlemler Zorlamalı Van der Pol denkleminin için de yapılabilir. Bu denklemi yeniden anımsayalım.

$$\ddot{x}(t) + \mu(x^2 - 1)\dot{x}(t) + x(t) = a \sin(2\pi\nu t) \quad (3.32)$$

Denklemi çözümlenebilmek için yine uygun dönüşümler

$$\begin{aligned} t &\equiv \frac{\tau}{\mu}, & \dot{x} &\rightarrow \frac{x'}{\mu}, & \ddot{x} &\rightarrow \frac{x''}{\mu^2} \\ y &= \frac{x'}{\mu^2} + \frac{x^3}{3} - x \end{aligned} \quad (3.33)$$

yazılabilir. Buradaki türevleyim τ simgesine göredir. Bu dönüşümler

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu^2}x' &= y - \frac{x^3}{3} + x \\ y' &= -x + a \sin(2\pi\nu\mu t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

altında iki boyutlu yapıya erişilmiş olur. Ancak takımın daha yalın olması adına $\varepsilon \equiv \frac{1}{\mu^2}$ ve $\omega \equiv \nu\mu$ değiştirgeleri ile $\theta \equiv \omega t$ diye yeni üretilen bağımsız değişken tanımları

yapılarak

$$\begin{aligned}\varepsilon x' &= y + x - \frac{x^3}{3} \\ y' &= -x + a \sin(2\pi\theta) \\ \theta' &= \omega\end{aligned}\tag{3.35}$$

üç boyutlu dizgeye ulaşılır. Burada ilk denklem yine üçüncü dereceden bir çokçokterimlidir. Bu durum bizi uzay genişletim yapmaya zorlar ve benzer mantıkla

$$u_1 \equiv x^2 \quad \Rightarrow \quad u_1' = 2xx'\tag{3.36}$$

$$u_1' = \frac{2}{\varepsilon} \left(xy + u_1 - \frac{u_1 x}{3} \right)\tag{3.37}$$

dönüşümü ile

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{\varepsilon} \left(y + x - \frac{xu_1}{3} \right) \\ y' &= -x + a \sin(2\pi\theta) \\ \theta' &= \omega \\ u_1' &= \frac{2}{\varepsilon} \left(xy + u_1 - \frac{u_1^2}{3} \right)\end{aligned}\tag{3.38}$$

dört boyutlu yapıya ulaşılır. Burada θ bilinmeyen ikinci derecelilikten gelen bir değişkendir. Ancak (3.38) takımının sağ yanındaki sinüs işlevli yapısı çokçokterimlilikten uzak bir yapıdadır. Amacımız ikinci derecelilik elde etmek olsa da sıradan türevli denklem takımlarının çokçokterimli olması yeğlenir. Bu yüzden sinüs işlevinden kurtulmak gerekir. Uzay genişletim ile bu terimden kaçınılabileceği gibi kosinüs işlevini de göz önünde bulundurmak gerekir. Dolayısıyla

$$u_2(t) \equiv \sin(2\pi\theta), \quad u_3(t) \equiv \cos(2\pi\theta)\tag{3.39}$$

tanımlanarak yapılan uzay genişletim adımları ile (3.38) takımı

$$\begin{aligned}x' &= \frac{1}{\varepsilon} \left(y + x - \frac{xu_1}{3} \right) \\y' &= -x + au_2 \\ \theta' &= \omega \\u_1' &= \frac{2}{\varepsilon} \left(xy + u_1 - \frac{u_1^2}{3} \right) \\u_2' &= 2\omega\pi u_3 \\u_3' &= -2\omega\pi u_2\end{aligned}\tag{3.40}$$

altı boyutlu yapısına ulaşır.

(3.31) ve (3.40) denklem takımları ile sırasıyla Van der Pol ve Zorlamalı Van der Pol denklemleri ikinci dereceli duruma getirilmiş oldu. Artık Olasılıksal Evrim Yaklaşımı'mı (OEY) (ing: Probabilistic Evolution Approach) uygulayabileceğimiz bir durumdayız. Tez çalışmasında yalnızca Van der Pol denklemi üzerinde yoğunlaşılacağından Zorlamalı Van der Pol denklemi için başka bir işlem yapılmayacaktır. Yalnızca uzay genişletim ve ikinci derecelilik kavramlarının daha iyi anlaşılabilmesi adına Zorlamalı Van der Pol denklemi üzerinde de çalışılmıştır.

Şimdi Van der Pol denkleminin ikinci dereceli duruma getirilen (3.31) yapısı üzerine Olasılıksal Evrim Yaklaşım yöntemini uygulayacağız. Ancak (3.31) yapısında Van der Pol denklemi x, y ve u_1 ile simgelenen üç bilinmeyen içerir. Olasılıksal Evrim Yaklaşımı'nın daha iyi kavranabilmesi adına önce iki bilinmeyenli yapılara uygulanabilirliğini inceleyelim.

3.3. Olasılıksal Evrim Yaklaşımı'nın Birinci Kerteden İki Bilinmeyenli Açık Yapılı Sıradan Türevli Denklemlere Uygulanımı

Emre Demiralp, Metin Demiralp ve Luis Hernandez-Garcia üçlüsünün bilimsel yazına sunduğu bu yöntemin uygulayımını [1, 2] yazılarında görebiliriz. İki bilinmeyen için yapılacak bu inceleme aslında çok bilinmeyenli durumlar için temel oluşturacaktır.

Eğer iki bilinmeyenli açık yapılı sıradan türevli denklemler için bir başlangıç değeri sorunu tanımlamak istersek

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t)), & x_1(0) &= a_1 \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t)), & x_2(0) &= a_2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

yazabiliriz. Olasılıksal Evrim Kuramı'nda belirttiğimiz gibi sağ yandaki f_1 ve f_2 işlevlerini betimleyici işlev olarak adlandırıyoruz ve bunların özerklik, tam işlev olma gibi özellikleri yine korunmaktadır. Olasılıksal Evrim Kuramı'nda izlediğimiz adımları sırasıyla uygulayacak olursak öncelikle betimleyici işlevleri Taylor toplam dizisine açacağız.

$(x_1^{(r)}, x_2^{(r)})$ açılım noktası olmak üzere

$$f_i(x_1(t), x_2(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_{j,k}^{(i)} (x_1(t) - x_1^{(r)})^j (x_2(t) - x_2^{(r)})^k, \quad i = 1, 2 \quad (3.42)$$

Taylor toplam dizisine açabiliriz. $f_{j,k}^{(i)}$ ile anlatılan değerler ilgili Taylor katsayılarıdır.

Bundan sonra kullanılacak anlatımları daha derli toplu bir biçimde yazabilmek adına

$$\begin{aligned} \mathbf{s}(t) &= \begin{bmatrix} x_1(t) - x_1^{(r)} \\ x_2(t) - x_2^{(r)} \end{bmatrix} \\ \mathbf{f}(t) &= \begin{bmatrix} f_1(x_1(t), x_2(t)) \\ f_2(x_1(t), x_2(t)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.43)$$

yöneysel öge tanımlarını yapalım. Burada \mathbf{s} simgesine “dizge yöneyi” (ing: system vector) diyeceğiz ve $\mathbf{f}(t)$ yi de bu bilgiler ışığında dış üslü toplam dizisine (ing: outer power

series)

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}^{(k)} \mathbf{s}^{\otimes k} \quad (3.44)$$

açalım. \mathbf{s} 'nin k . dışüslüsü ise

$$\mathbf{s}^{\otimes k} \equiv \bigotimes_{j=1}^k \mathbf{s} \quad (3.45)$$

eşitliğiyle tanımlanır. Dış çarpım (outer product) aslında “Kronecker Çarpımı” na (ing: Kronecker Product) denktir, çoğu zaman dolaysız çarpım (ing: direct product) adıyla da anılır. Kronecker çarpımı, iki yöneysel veya dizeysel ya da karışık çarpım arasında tanımlanır. Çarpımdaki birinci çarpanın her ögesi ikinci çarpan ile çarpılır ve bir altkesim (ing: block) oluşur. Tüm çarpımlar sırasıyla bu altkesim içine yerleşir. Çarpanın durumuna göre oluşan altkesim öge yöney veya dizey olabilir. Bundan sonra \otimes ile gösterilen çarpımları Kronecker çarpımı olarak adlandıracağız.

Kronecker çarpımını şöylesine açık olarak dile getirebiliriz: \mathbf{s} 'nin 0. üslüsü her zaman 1'e eşittir. 1. üslü ise \mathbf{s} 'nin kendisine eşittir. \mathbf{s} 'nin 2. üslüsü ise s_1^2 , $s_1 s_2$, $s_2 s_1$ ve s_2^2 olmak üzere dört öge içerir. Bu biçimde devam ederek \mathbf{s} 'nin k . üslüsünün 2^k adet öge içerdiğini görebiliriz.

Şimdi (3.44) eşitliği ile seriye açılan \mathbf{f} betimleyici işlev yöneyinin katsayıları olan $\mathbf{f}^{(k)}$ değerlerini bulmalıyız.

İlk katsayı olan $\mathbf{f}^{(0)}$, açılım noktasında aldığı değerlerin belirlenimiyle yazılan

$$\mathbf{f}^{(0)} = \begin{bmatrix} f_1(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}) \\ f_2(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}) \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

iki ögeli yöneydir.

İkinci öge olan $\mathbf{f}^{(1)}$, 2×2 boyutlu bir dizey olmalıdır. Bu dizeyin ögelerini $f_{1,1}^{(1,c)}$, $f_{1,2}^{(1,c)}$, $f_{2,1}^{(1,c)}$, $f_{2,2}^{(1,c)}$ ile gösterecek olursak alt sırasayıda virgül ile ayrılmış sayılar ögelerin yataysıra ve düşey sıralarını, üst sırasayıda virgül ile ayrılmış anlatım ise kaçınıcı öge olduğunu ve katsayı olduğunu gösteren c simgesi yer almaktadır. Toplamdizi açılımın-

daki ikinci terim

$$\mathbf{f}^{(1)} \mathbf{s}^{\otimes 1} = \begin{bmatrix} f_{1,1}^{(1,c)} (x_1(t) - x_1^{(r)}) + f_{1,2}^{(1,c)} (x_2(t) - x_2^{(r)}) \\ f_{2,1}^{(1,c)} (x_1(t) - x_1^{(r)}) + f_{2,2}^{(1,c)} (x_2(t) - x_2^{(r)}) \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

biçiminde belirlenir. (3.47) eşitliğine karşılık gelen Taylor açılımının birinci dereceli terimi ise

$$\mathbf{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right)_r & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right)_r \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right)_r & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right)_r \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

ile anlatılır. Buradaki r alt sırasayısı açılım noktasındaki belirlenmiş değeri göstermektedir. Aslında $\mathbf{f}^{(1)}$, betimleyici işlevin bilinmeyenlerine göre Jacobiyen dizeyidir.

Üçüncü öge $\mathbf{f}^{(2)}$ ise 2×4 boyutlu bir dizeydir ve öğelerini $f_{1,1}^{(2,c)}$, $f_{1,2}^{(2,c)}$, $f_{1,3}^{(2,c)}$, $f_{1,4}^{(2,c)}$, $f_{2,1}^{(2,c)}$, $f_{2,2}^{(2,c)}$, $f_{2,3}^{(2,c)}$, $f_{2,4}^{(2,c)}$ ile gösterecek olursak

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}^{(2)} \mathbf{s}^{\otimes 2})_1 &= f_{1,1}^{(2,c)} (x_1(t) - x_1^{(r)})^2 + (f_{1,2}^{(2,c)} + f_{2,1}^{(2,c)}) (x_1(t) - x_1^{(r)}) (x_2(t) - x_2^{(r)}) \\ &\quad + f_{1,4}^{(2,c)} (x_2(t) - x_2^{(r)})^2 \end{aligned} \quad (3.49)$$

yazılır. Eşitliğin sol yanındaki 1 alt sırasayısı birinci ögeyi anlatmaktadır. İkinci öge ile ilgilenilmeyecek, yalnızca, katsayılarıdaki belirsizlik vurgulanacaktır. Eşitliğin sağ yanındaki anlatımları, açık yapıli Taylor açılımının ikinci dereceden terimlerinden f_1 için

$$f_{1,1}^{(2,c)} = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2} \right)_r, \quad f_{1,4}^{(2,c)} = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2^2} \right)_r \quad (3.50)$$

$$f_{1,2}^{(2,c)} + f_{2,1}^{(2,c)} = \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_r \quad (3.51)$$

karşılaştırmalarını yaparak yazabiliriz. (3.51) eşitliğinde bir karışık toplam söz konusudur. Bu durum açıkça ortaya koyuyor ki, dış çarpımda derece büyüdükçe katsayılarıdaki

keyfilğin artmasının yanında eşsiz olmamak da ortaya çıkıyor. Yani eşitliğin sol yanındaki katsayıların değerlerini eşit düşünebiliriz. Dolayısıyla

$$f_{1,2}^{(2,c)} = f_{2,1}^{(2,c)} = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_r \quad (3.52)$$

eşitliğini yazabiliriz. Eğer iki farklı sırada karışık göre türevleyim (ing: partial differentiation) yazılacaksa

$$f_{1,2}^{(2,c)} = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right)_r, \quad f_{2,1}^{(2,c)} = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_2 \partial x_1} \right)_r \quad (3.53)$$

ile anlatılır. Ancak (3.52) eşitliğindeki gibi karışık türevlerde sıra önemli değildir (işlevlerdeki çözümcüllük Taylor toplam dizisine genişletildiğinde türevleyimlerdeki sıra değişiminin önemi yoktur).

Dış üslü katsayısı $\mathbf{f}^{(2)}$ 'nin ilk yataysırası aslında betimleyici işlev f_1 'in katsızlaştırılmış (ing: unfolded) biçiminin açılım noktasındaki Hess dizeyinin [21] belirlenen değeridir. Burada çalışılan yapı katlı (ing: folded) olduğu için izlenen yöntem katlılığı ortadan kaldırmaktır. Böylece katlı yapı tek bir boyuta indirgenir, yani katsızlaştırılır. Benzer biçimde dış üslü katsayısı $\mathbf{f}^{(2)}$ 'nin ikinci yataysırası da f_2 'nin katsızlaştırılmış biçiminin açılım noktasındaki Hess dizeyinin belirlenen değeridir. Bu yöntemle bir katsızlaştırılmış dizey yapısı elde edilir. Bu yapı yalnızca bu katsayılara özgü değildir. Bu dizey biçimi üç yönlü bir dizinin (ing: three-way array) düzlemsel izdüşümü olarak düşünülebilir. Böylece yukarıda söz edilen Hess dizeylerini katlılaştırarak $2 \times 2 \times 2$ boyutlu çoklu dizi (ing: multilinear array) elde edilir. Benzer anlayışla $\mathbf{f}^{(3)}$ için de belirlenimler yapılır ve $2 \times 2 \times 2 \times 2$ boyutlu çoklu dizinin katsızlaştırılmış durumu elde edilir. Dış üslü katsayısı $\mathbf{f}^{(k)}$ 'nin boyutu k olduğundan $\times_{j=1}^{j=k} 2$ boyutlu bir çoklu dizinin katsızlaştırılmış durumu gündeme gelecektir. Yani \times ile gösterilen j yönlü ve 2^k boyutlu bir çoklu dizinin daha derli toplu yazılmış biçimidir. Tüm bu sonuçlar aslında Kronecker çarpımının doğasından gelen özelliklerdir. Kronecker çarpımı için, dizi teriminin boyutluluğunu arttıran dış çarpımın düzlemsel izdüşümü denilebilir.

Zamansal değişkenliği vurgulamak adına $\mathbf{s}^{\otimes k}$ ifadesinin zamana bağımlılığını

$$\mathbf{s}_k(t) \equiv \mathbf{s}^{\otimes k}(t) \quad (3.54)$$

biçiminde yazabiliriz. Zamansal bağımlılığın anlamı aslında bu dış üslülerin, bir taban takımının öğeleri biçiminde düşünülmesi demektir. Bu yöneyler zamanla değişen işlev öğeleri olduğundan işlevsel bağımlıdır ancak doğrusal bağımsızdır. Zaten bu yöneylerin doğrusal bağımsızlığı, bize dış üslü açılımı olarak yazabilmemizi sağlamaktadır.

Bir sonraki adım Olasılıksal Evrim Kuramı'nda olduğu gibi taban takımı oluşturulduğundan, öğelerinin zamana göre türevlenimi olacaktır. Dolayısıyla

$$\dot{\mathbf{s}}_k(t) = \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{s}^{\otimes j}(t) \otimes \left(\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{f}^{(m)} \mathbf{s}^{\otimes m}(t) \right) \otimes \mathbf{s}^{\otimes (k-j-1)}(t), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.55)$$

zamana bağlı türevleyimi Leibniz kuralına uygun olarak yazabiliriz. Çarpımlar üzerindeki bu türevleyimde, Kronecker çarpımı genelde değişimli (ing: commutative) olmadığından sıraya özen gösterilmesi gerekmektedir. (3.55) eşitliğindeki öğeleri tek tek tanımlayacak olursak

$$\mathbf{s}^{\otimes j}(t) \equiv (\mathbf{I}\mathbf{s}(t))^{\otimes j} = \mathbf{I}^{\otimes j} \mathbf{s}^{\otimes j}(t) \quad (3.56)$$

yazarız. \mathbf{I} dizeyi, 2×2 boyutlu birim dizeydir. Ayrıca (3.56) eşitliğinde dış üslünün dizey-yöney çarpımı üzerine dağılma özelliği kullanılmıştır. Bu özellik dizey-dizey veya dizey-yöney çarpımları üzerindeki Kronecker çarpımın özelliğinden türetilmiştir. Ayrıca (3.56) eşitliği

$$\mathbf{s}^{\otimes j}(t) \otimes \mathbf{f}^{(m)} \mathbf{s}^{\otimes m}(t) = (\mathbf{I}^{\otimes j} \mathbf{s}^{\otimes j}(t)) \otimes (\mathbf{f}^{(m)} \mathbf{s}^{\otimes m}(t)) = (\mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(m)}) \mathbf{s}^{\otimes (j+m)}(t) \quad (3.57)$$

ve

$$\mathbf{s}^{\otimes j}(t) \otimes \mathbf{f}^{(m)} \mathbf{s}^{\otimes m}(t) \otimes \mathbf{s}^{\otimes (k-j-1)}(t) = (\mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(m)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes (k-j-1)}) \mathbf{s}^{\otimes (k+m-1)}(t) \quad (3.58)$$

eşitliklerini yazmamızı sağlar. Bu anlatımlardan yararlanarak (3.55) eşitliğini yeniden şöyle

$$\dot{\mathbf{s}}_k(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{E}_{k,m} \mathbf{s}^{\otimes m}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.59)$$

yazabiliriz. \mathbf{s} 'nin m . dış üslüsünü elde edebilmek için toplamın sırasayısını m yerine $m - k + 1$ olacak biçimde değiştirerek

$$\mathbf{E}_{k,m} \equiv \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(m-k+1)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes(k-j-1)}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.60)$$

olarak yazılabilir. Burada dış üslü açılım katsayısı $\mathbf{f}^{(m)}$, m 'nin eksi değerleri için var olmaz. Bu yüzden tüm $\mathbf{E}_{k,m}$ altkesim öğeleri, m 'nin $k - 1$ değerinden küçük olduğu yerlerde sıfırlanır. Son bulguları uygun dizey ve yöney biçiminde yazacak olursak

$$\mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mathbf{E}_{1,0} & \mathbf{E}_{1,1} & \mathbf{E}_{1,2} & \cdots \\ 0 & \mathbf{E}_{2,1} & \mathbf{E}_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

$$\mathbf{s}(t) = [\mathbf{s}^{\otimes 0} \ \mathbf{s}^{\otimes 1} \ \mathbf{s}^{\otimes 2} \ \cdots]^T \quad (3.62)$$

elde ederiz. Kolayca ayırđına varılabileceği üzere, $m < k - 1$ değerleri için \mathbf{E} dizeyi üst altkesim Hessenberg biçimindedir.

Sonuç olarak (3.61) ve (3.62) anlatımları, bize

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = \mathbf{E}\mathbf{s}(t) \quad (3.63)$$

değişmez katsayılar içeren \mathbf{E} dizeyli, sonsuz boyutlu, doğrusal ve bağdaşık olan yöney yapılı sıradan türevli denklemini yazmamıza olanak sağlamaktadır. Yine Olasılıksal Evrim Kuramı'ndan bildiğimiz üzere bu denklemin biçimsel çözümü

$$\mathbf{s}(t) = e^{t\mathbf{E}}\mathbf{s}(0) \quad (3.64)$$

olarak yazabiliriz. $\mathbf{s}(0)$ ile anlatılan $\mathbf{s}(t)$ yöneyinin başlangıç değeridir. \mathbf{E} dizeyi çözümün ve devinimin niteliğini, diğer bir deyişle evrimini belirttiği için “Evrim Dizeyi” diyoruz.

Üst altkesim Hessenberg yapısındaki Evrim Dizeyi, izgesel incelemeye ve kesme yaklaştıranlarını belirlemeye izin vermemektedir. Dolayısıyla Evrim Dizeyi'nin yapısında

üçgensellik aranmaktadır. Bu amaçla $m = k - 1$ için

$$\mathbf{E}_{k,k-1} \equiv \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(0)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes(k-j-1)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.65)$$

$\mathbf{f}^{(0)}$ katsayısının sıfırlandığı yerlerde altkesim üçgensel yapıya kavuşulur. Yani betimleyici işlevin açılım noktasında sıfırlanması gerekir. Bu durum her zaman geçerli olmayacağı için yeni bilinmeyenler tanımlayarak uzay genişletim yardımıyla daha yüksek boyutta $\mathbf{f}^{(0)}$ katsayısının sıfırlanmasını sağlayacağız. Böylece sistemimize iki yeni bilinmeyen eklenerek dört başlangıç koşullu dört bilinmeyenli bir açık yapılı sıradan türevli denklem takımı oluşacaktır. Böylece Olasılıksal Evrim Yaklaşım yöntemi altında dört betimleyici işlevin de kesin sıfırının var olduğu dış üslü açılımını kullanabileceğiz ve Evrim Dizeyi'nde üçgensel yapıya kavuşacağız. Üçgensel yapı nedeniyle dizeyin evriği varsa elde edilebilmesi, ayrıca özdeğerler ve özyöneylemlerin bulunması sağlanacaktır.

İlk olarak dizeyin evriğinin olma olasılığını inceleyelim. $m = k$ için

$$\mathbf{E}_{k,k} \equiv \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(1)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes(k-j-1)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.66)$$

yazılır. $\mathbf{f}^{(1)}$ evirtildikçe her toplam da evirtilebilir. $\mathbf{f}^{(1)}$ bilinmeyenlerine göre betimleyici işlevin Jacobiye dizeyidir. Ayrıca $\mathbf{f}^{(1)}$, betimleyici işlevlerin işlevsel bağımsızlığı sürdürdükçe tekil olmamayı da sürdürecektir.

Aslında $\mathbf{E}_{k,k}$ altkesim ögesinin sıfır uzay özelliklerini anlamak için toplamın evriğinin alınması yerine izgesel inceleme yapmak daha doğru bir yöntemdir. $\mathbf{f}^{(1)}$ katsayısının özdeğerlerini ve özyöneylemlerini sırasıyla λ_1, λ_2 ve $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ ile gösterecek olursak $\mathbf{E}_{k,k}$ 'nin özyöneylemleri, dizeylerdeki Kronecker çarpım kuramından bilindiği üzere, k . dış çarpım için bu özyöneylemlerin tüm olası birleşimleri söz konusudur ve 2^k sayıdadır. Bunun anlamı ise $\mathbf{E}_{k,k}$ 'nin özdeğerleri, toplamı k olacak şekilde λ_1 ve λ_2 simgelerinin tüm doğrusal birleşim katsayılarından oluşmaktadır. Eğer Jacobiye'nin özdeğerleri birbirleri ile evrik imliyse bu doğrusal birleşimler sıfırlanabilir. Bu durum Evrim Dizeyi'nin ana köşegen altkesim ögelerinin evriltilememesi yani Evrim Dizeyi'nin evriltilememesi demektir.

Başal işleybilim (ing: classical mechanics) sorunlarından alınan, iki veya daha çok bilinmeyenli açık yapılı sıradan türevli denklemlerin başlangıç değer sorunlarında dizgenin yörüngesinin belirlenimi çok önem kazanmaktadır. Ayrıca betimleyici işlevler bir tek sayıl işlevin yöneleğim (ing: gradient) öğeleri olarak ortaya çıkar ve Jacobiyen dizeyi bilinmeyenlerine göre sayıl işlevin Hess dizeyine dönüşür. Bu dönüşüm bize bakışım özelliği kazandırır ve bakışımdan dolayı $\mathbf{f}^{(1)}$ 'in gerçel özdeğerleri olur. Böylece artı tanımlılık olması durumunda özelliklerinden yararlanılabilir.

Diğer önemli bir konu da bilinmeyenlerine göre tüm betimleyici işlevlerin en çok ikinci dereceden çokçokterimli olmalarıdır, yani ikinci dereceliliktir. İkinci derecelilikte asıl kolaylaştırım aslında Evrim Dizeyi üzerinde en çok üç sıfırlanmayan altkesim köşegenli yapıya geçmektir. Eğer bu yapı üçgensellik ile birlikte sağlanırsa altkesim köşegenlilik bize özylenelemelerle kesme yaklaşıranlarının belirlenimine kolaylık getirecektir.

3.4. Olasılıksal Evrim Yaklaşım Yönteminin Van der Pol Denklemine Uygulanması

(3.31) denklemi ile Van der Pol denklemi birinci kereden üç boyutlu bir sıradan türevli denklem takımına dönüştürülmüştü. 3.3 bölümünde sözedilen birinci kereden iki bilinmeyenli sıradan türevli denklem takımına Olasılıksal Evrim Yaklaşım yönteminin uygulanmasını taban alarak ve bu bölümde iki bilinmeyen yerine üç bilinmeyen gözönüne alınarak devam edilecektir. Burada önemli olan denklem sayısı değil bilinmeyen sayısıdır. Yani üç tane denklemden daha çok denklem de var olabilirdi, değişen tek şey bu dizge için yazılacak olan betikleme (ing: scripting) veya uziş (ing: algorithm) daha karmaşık olurdu.

3.3 bölümünde atılan adımlara koşut olarak öncelikle Olasılıksal Evrim Yaklaşımı

için tanımlamalar yapmalıyız. (3.31) denklemini gözönüne alınarak

$$\begin{aligned}
f_1(x, y, u_1) &= \mu \left(x - \frac{1}{3}xu_1 - y \right) \\
f_2(x, y, u_1) &= \frac{1}{\mu}x \\
f_3(x, y, u_1) &= 2\mu \left(u_1 - \frac{1}{3}u_1^2 - xy \right)
\end{aligned} \tag{3.67}$$

yazılır. f_1, f_2 ve f_3 işlevleri sağ yan betimleyici işlevlerdir. Böylece Taylor toplamdizisine açılacak $\mathbf{f}(t)$ yöneysel ögesini

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \mu \left(x - \frac{1}{3}xu_1 - y \right) \\ \frac{1}{\mu}x \\ 2\mu \left(u_1 - \frac{1}{3}u_1^2 - xy \right) \end{bmatrix}_{3 \times 1} \tag{3.68}$$

biçiminde yazabiliriz. Aslında Taylor açılımını Kronecker üslü toplamdizisi olarak yazacağız. Daha sonra açılım yeniden belirtilecektir. Takımımız üç bilinmeyenli olacağı için dizge yöneyi de

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} x - x_1^{(r)} \\ y - x_2^{(r)} \\ u_1 - x_3^{(r)} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \tag{3.69}$$

3×1 boyutlu bir yöney olacaktır. Yine üç bilinmeyenli bir dizge olduğundan, $x_1^{(r)}, x_2^{(r)}$ ve $x_3^{(r)}$ Taylor açılımının yapıldığı konaçları (ing: coordinate) simgelemek üzere

$$\mathbf{x}^{(r)} = \begin{bmatrix} x_1^{(r)} \\ x_2^{(r)} \\ x_3^{(r)} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \tag{3.70}$$

üç açılım noktasını belirten $\mathbf{x}^{(r)}$ yöneyi yazılır. Açılım konumunu belirten $\mathbf{x}^{(r)}$ yöneyi bu an için tanımlanmayacak olup elde edilen uygun sonuçlar en genel durumuyla bırakılacaktır.

Üç boyutlu dizgemiz ikinci dereceden sıradan türevli denklemlerden oluştuğu için belirlenmesi gereken $\mathbf{f}^{(0)}$, $\mathbf{f}^{(1)}$ ve $\mathbf{f}^{(2)}$ Kronecker üslü katsayılarıdır. Bunun nedeni de ($l = 3, 4, \dots$) değerleri için $\mathbf{f}^{(l)}$ katsayılarının sıfırlanacak oluşudur. $\mathbf{f}^{(0)}$ katsayısı için

$$\mathbf{f}^{(0)} = \begin{bmatrix} \mu \left(x_1^{(r)} - \frac{1}{3} x_1^{(r)} x_3^{(r)} - x_2^{(r)} \right) \\ \frac{x_1^{(r)}}{\mu} \\ 2\mu \left(x_3^{(r)} - \frac{1}{3} \left(x_3^{(r)} \right)^2 - x_1^{(r)} x_2^{(r)} \right) \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (3.71)$$

3×1 boyutlu yöneyi yazılır. Burada $\mathbf{f}(t)$ yöneyinde bilinmeyen değişkenler yerine açılım konumu bileşenlerinin değerleri yazılarak \mathbf{s} 'nin 0. Kronecker üslüsünün katsayısı olan $\mathbf{f}^{(0)}$ hesaplanır. $\mathbf{f}^{(1)}$ için

$$\mathbf{f}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mu \left(1 - \frac{x_3^{(r)}}{3} \right) & -\mu & -\frac{\mu}{3} x_3^{(r)} \\ \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ -2\mu x_2^{(r)} & -2\mu x_1^{(r)} & \mu \left(1 - \frac{2}{3} x_3^{(r)} \right) \end{bmatrix}_{3 \times 3} \quad (3.72)$$

3×3 boyutlu dizeyi yazılır. Yani $\mathbf{f}(t)$ yöneyinin her bir ögesinin üç bilinmeyene göre türevi alınır ve ilgili bilinmeyenler yerine yine açılım konumundaki bileşenlerin değerleri yazılarak $\mathbf{f}^{(1)}$ belirlenir.

Benzer şekilde $\mathbf{f}^{(2)}$ için

$$\mathbf{f}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\mu}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\mu & 0 & -2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\mu}{3} \end{bmatrix}_{3 \times 9} \quad (3.73)$$

3×9 boyutlu dizeyi yazılır. Burada da $\mathbf{f}(t)$ yöneyinin yine her bir ögesinin üç bilinmeyene göre sırayla ikinci kereden türevi alınır ve açılım konumundaki bileşenlerin değerlerinin ilgili bilinmeyenlerde yerine konulmasıyla $\mathbf{f}^{(2)}$ katsayısı belirlenir.

Şimdi Kronecker üslü toplam dizisi açılımındaki \mathbf{s} 'nin Kronecker üslülerini belirleyelim. Dış çarpım olarak burada Kronecker çarpımını kullandığımızdan dolayı $\mathbf{f}(t)$ yöneyini Kronecker üslü toplam dizisine açıyoruz. Kronecker çarpımının tanımını (3.45)

eşitliği ile yapmıştık. Bu tanım ışığında

$$\mathbf{s}^{\otimes 0} = 1 \quad (3.74)$$

uylaşımı yazılır. Bunun nedeni de, \mathbf{s} 'nin 0. Kronecker üslüsünü her zaman 1 olarak öngörmüş olmamızdır.

$\mathbf{s}^{\otimes 1}$ değerini belirleyecek olursak

$$\mathbf{s}^{\otimes 1} = \begin{bmatrix} x - x_1^{(r)} \\ y - x_2^{(r)} \\ u_1 - x_3^{(r)} \end{bmatrix}_{3 \times 1} \quad (3.75)$$

3×1 türünde yöney eşitliği yazılır. \mathbf{s} 'nin 1. Kronecker üslüsünün özüne yani dizge yöneyine eşit olduğunu söylemiştik.

Devam edecek olursak $\mathbf{s}^{\otimes 2}$ için

$$\mathbf{s}^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} (x - x_1^{(r)}) (x - x_1^{(r)}) \\ (x - x_1^{(r)}) (y - x_2^{(r)}) \\ (x - x_1^{(r)}) (u_1 - x_3^{(r)}) \\ (y - x_2^{(r)}) (x - x_1^{(r)}) \\ (y - x_2^{(r)}) (y - x_2^{(r)}) \\ (y - x_2^{(r)}) (u_1 - x_3^{(r)}) \\ (u_1 - x_3^{(r)}) (x - x_1^{(r)}) \\ (u_1 - x_3^{(r)}) (y - x_2^{(r)}) \\ (u_1 - x_3^{(r)}) (u_1 - x_3^{(r)}) \end{bmatrix}_{9 \times 1} \quad (3.76)$$

9 öğeli yöneyi yazılır. $\mathbf{s}^{\otimes 2}$ yöneyi de \mathbf{s} 'nin öğelerinin karışık çarpımlarından oluşmaktadır. ($l = 3, 4, \dots$) değerleri için $\mathbf{f}^{(l)}$ katsayıları sıfırlandığından $\mathbf{s}^{\otimes l}$ değerlerini belirlemeye gerek yoktur.

Anımsayacak olursak Evrim Dizeyi'nin en genel biçimi üst Hessenberg yapısındaydı. Ancak çeşitli dizey cebiri belirlenimlerinde karşılaşılan zorluklar nedeniyle üçgensel ya-

pya geçmek eğilimindeydik. Üçgensel yapıya geçebilmek için asal köşegenin bir altındaki köşegenin sıfırlanması gerekir. Bu durum ancak betimleyici işlevin açılım noktasında sıfırlanmasıyla elde edilir. Van der Pol denkleminin üç boyutlu duruma getirilmiş yapısına bakacak olursak $(x, y, u_1) = (0, 0, 0)$ noktasında sağ yan işlevleri sıfırlanmaktadır. Dolayısıyla $(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, x_3^{(r)})$ açılım noktası da $(0, 0, 0)$ seçilecek olursa (yani başlangıç (ing: origin) noktasında) $\mathbf{f}^{(0)}$ sıfırlanır. Dolayısıyla asal köşegenin altındaki köşegen sıfırlanır ve Evrim Dizeyi üst üçgensel yapıya bürünmüş olur.

Bu bilgiler ışığında $\mathbf{f}(t)$ yöneyini Kronecker üslü toplam dizisine açacak olursak

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{f}^{(k)} \mathbf{s}^{\otimes k} = \mathbf{f}^{(0)} \mathbf{s}^{\otimes 0} + \mathbf{f}^{(1)} \mathbf{s}^{\otimes 1} + \mathbf{f}^{(2)} \mathbf{s}^{\otimes 2} + \dots \quad (3.77)$$

eşitliğini elde ederiz. Taban takımı olarak aldığımız $\mathbf{s}^{\otimes k}$ anlatımını türevleyimle

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{s}^{\otimes k}] = \dot{\mathbf{s}}_k = \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(m-k+1)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes (k-j-1)} \right] \mathbf{s}^{\otimes m}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.78)$$

ve bunun da kullanımıyla Evrim Dizeyi'nin altkesim biçimindeki öğelerini

$$\mathbf{E}_{k,m} \equiv \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(m-k+1)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes (k-j-1)}, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.79)$$

yapısında buluruz.

Evrim Dizeyi'ni en genel durumda altkesim öğeler türünden yazacak olursak

$$\mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \mathbf{E}_{1,0} & \mathbf{E}_{1,1} & \mathbf{E}_{1,2} & 0 & \dots \\ 0 & \mathbf{E}_{2,1} & \mathbf{E}_{2,2} & \mathbf{E}_{2,3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

eşitliğini elde ederiz. Evrim Dizeyi'nin (3.79) eşitliği ile belirleyebildiğimiz altkesim öğelerinin birkaçını tek tek yazacak olursak

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{1,0} &= \mathbf{I}^{\otimes 0} \otimes \mathbf{f}^{(0)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes 0} = \mathbf{f}^{(0)} \\
\mathbf{E}_{1,1} &= \mathbf{I}^{\otimes 0} \otimes \mathbf{f}^{(1)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes 0} = \mathbf{f}^{(1)} \\
\mathbf{E}_{1,2} &= \mathbf{I}^{\otimes 0} \otimes \mathbf{f}^{(2)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes 0} = \mathbf{f}^{(2)} \\
\mathbf{E}_{2,1} &= \mathbf{I}^{\otimes 0} \otimes \mathbf{f}^{(0)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes 1} + \mathbf{I}^{\otimes 1} \otimes \mathbf{f}^{(0)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes 0} \\
\mathbf{E}_{2,2} &= \mathbf{I}^{\otimes 0} \otimes \mathbf{f}^{(1)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes 1} + \mathbf{I}^{\otimes 1} \otimes \mathbf{f}^{(1)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes 0} \\
\mathbf{E}_{2,3} &= \mathbf{I}^{\otimes 0} \otimes \mathbf{f}^{(2)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes 1} + \mathbf{I}^{\otimes 1} \otimes \mathbf{f}^{(2)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes 0}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

değerlerini elde ederiz. Sırasıyla $\mathbf{E}_{1,0}$ ögesi

$$\mathbf{E}_{1,0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3 \times 1} \tag{3.82}$$

aslında bir $\mathbf{0}$ yöneyidir. $\mathbf{E}_{1,1}$ ise

$$\mathbf{E}_{1,1} = \begin{bmatrix} \mu & -\mu & 0 \\ \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix}_{3 \times 3} \tag{3.83}$$

yapısında bir dizeydir. $\mathbf{E}_{1,2}$ açık olarak

$$\mathbf{E}_{1,2} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\mu}{3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\mu & 0 & -2\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4\mu}{3} \end{bmatrix}_{3 \times 9} \tag{3.84}$$

yapısında yazılabilir. $\mathbf{E}_{2,1}$ ise

$$\mathbf{E}_{2,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{9 \times 3} \quad (3.85)$$

diğer bir deyişle, bir $\mathbf{0}$ dizeyidir. $\mathbf{E}_{2,2}$ ise

$$\mathbf{E}_{2,2} = \begin{bmatrix} 2\mu & -\mu & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\mu} & \mu & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mu & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\mu} & 0 & 0 & \mu & -\mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 & 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\mu & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4\mu \end{bmatrix}_{9 \times 9} \quad (3.86)$$

şeklinde belirlenen bir dizeydir.

Evrin Dizeyi'nin buraya kadar belirlenen altkesim öğelerine bakılacak olursa asal köşegenin altında kalan köşegene ait altkesim öğeler ya $\mathbf{0}$ yöneyi ya da $\mathbf{0}$ dizeyidir. Yani asal köşegenin altında kalan köşegen sıfırlanmıştır. Dolayısıyla Evrim Dizeyi'nin üst üçgensel yapısını

$$\mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mathbf{E}_{1,1} & \mathbf{E}_{1,2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mathbf{E}_{2,2} & \mathbf{E}_{2,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

anlatımı ile verebiliriz.

(3.87) ile belirlenmiş olan dizeyi, \mathbf{E} dizeyimizin 13×13 boyutunda “Kesilmiş Evrim Dizeyi” olarak adlandırabiliriz. Sonlu boyutlu Kesilmiş Evrim Dizeyi’nin özdeğerlerini belirleyebilmek için Mathematica ile buyrukdizileyim (programlama) gerçekleştirilmiştir. Bu dizeyin özdeğerlerini \mathbf{E}_λ yöneyinin bileşenleri olarak gösterirsek

$$\mathbf{E}_\lambda \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \\ \mu \\ 2\mu \\ 4\mu \\ \frac{1}{2} \left(\mu - \sqrt{-4 + \mu^2} \right) \\ \mu - \sqrt{-4 + \mu^2} \\ \frac{1}{2} \left(5\mu - \sqrt{-4 + \mu^2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(5\mu - \sqrt{-4 + \mu^2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\mu + \sqrt{-4 + \mu^2} \right) \\ \mu + \sqrt{-4 + \mu^2} \\ \frac{1}{2} \left(5\mu + \sqrt{-4 + \mu^2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(5\mu + \sqrt{-4 + \mu^2} \right) \end{bmatrix}_{13 \times 1} \quad (3.88)$$

yapısına ulaşırız.

(3.88) ile 3×3 boyutlu Kesilmiş Evrim Dizeyi’nin özdeğerlerini belirlemiş olmamıza karşın, Evrim Dizeyi’nin tüm özdeğerlerini belirlemek zor değil. Bu amaçla Evrim Di-

zeyi'nin ana köşegendeki altkesim öğelerini gözönünde bulundurmak yeterli olacaktır.

(3.79) eşitliğinde $m = k$ seçilerek,

$$\mathbf{E}_{k,k} \equiv \sum_{j=0}^{k-1} \mathbf{I}^{\otimes j} \otimes \mathbf{f}^{(1)} \otimes \mathbf{I}^{\otimes(k-j-1)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.89)$$

yapısı elde edilir. Burada $\mathbf{f}^{(1)}$, $\mathbf{E}_{1,1}$ ile eşleşen 3×3 boyutlu bir dizeydir. $\mathbf{f}^{(1)}$ dizeyinin özdeğerlerini $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ile özyöneylemlerini ise ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 ile gösterecek olursak, $\mathbf{E}_{k,k}$ altkesim öğelerinin özdeğerlerinin bu üç eksi olmayan tamsayı özdeğerin doğrusal birleşimi olduğunu göstermek hiç de zor değildir. Ayrıca, $\mathbf{E}_{k,k}$ altkesim öğelerinin özyöneylemleri, bu üç özyöneylemin Kronecker çarpımına denk düşer. $\mathbf{f}^{(1)}$ dizeyinin özyöneylemlerini

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2\mu, \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2} \left(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4} \right) \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2} \left(\mu - \sqrt{\mu^2 - 4} \right) \end{aligned} \quad (3.90)$$

ile gösterebiliriz. Bu bilgiler doğrultusunda Kesilmiş Evrim Dizeyi'nin özyöneylemlerini yeniden Mathematica ile buyrukdizileyim gerçekleştirerek bulabiliriz. 13×13 boyutlu dizey biçimindeki özyöneylemleri daha derli toplu yazabilmek için aşağıdaki kısaltmalar yapılmıştır:

$$\begin{aligned} A &= -\mu + \sqrt{\mu^2 - 4} \\ B &= \mu + \sqrt{\mu^2 - 4} \\ C &= -2\mu + \sqrt{\mu^2 - 4} \\ D &= 2\mu + \sqrt{\mu^2 - 4} \\ E &= -5\mu + \sqrt{\mu^2 - 4} \\ F &= 5\mu + \sqrt{\mu^2 - 4} \\ K &= -2\mu^2 + \mu^4 - \mu^3 \sqrt{\mu^2 - 4} \\ L &= -2\mu^2 + \mu^4 + \mu^3 \sqrt{\mu^2 - 4} \end{aligned} \quad (3.91)$$

Bu kısaltmaları kullanarak Kesilmiş Evrim Dizeyi'nin özyöneylelerini \mathbf{E}_ν dizeyinin öğeleri olarak

$$\mathbf{E}_\nu \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu^2 & \mu^2 & \mu^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2}\mu A & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\mu^2 \frac{A}{B} & \frac{1}{2}K & -\frac{1}{2}\mu A & 0 & -\frac{1}{2}\mu A & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu AE}{24C} & -\frac{A}{12C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\mu A & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\mu AE}{24C} & -\frac{A}{12C} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\mu A & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\mu B & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\mu^2 \frac{B}{A} & \frac{1}{2}L & \frac{1}{2}\mu B & 0 & \frac{1}{2}\mu B & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu FB}{24D} & -\frac{B}{12D} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\mu B & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\mu FB}{24D} & -\frac{B}{12D} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\mu B & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{13 \times 13} \quad (3.92)$$

yapısında elde ederiz. Bu dizeye bakarak $\mu = 2$ seçiminin özel bir durum olduğunu söyleyebiliriz. (3.91) kısaltmalarını gözönünde bulundurarak $\mu = 2$ durumunda kökün içi sıfırlanacak ve dizeyin tüm öğeleri gerçel ifadelerden oluşacaktır. $\mu \neq 2$ durumunda ise köklü sayıdan dolayı dizey karmaşık öğeler de içerecektir.

Şimdi özel olarak iki köşegenli yapısı olan Evrim Dizeyi için kesme yaklaşımlarını belirleyeceğiz.

3.5. İki Köşegenli Evrim Dizeyleri İçin Kesme Yaklaştıranları Belirlenimi

Bu bölümde Evrim Dizeyi'nin özel durumu olan iki köşegenli biçimini [17, 19] inceleyeceğiz. Bu durumu en genel yapıda anlatabilmek için (3.4) eşitliği ile oluşturduğumuz yapı üzerine kısıtlama getirmemiz gerekir. Eğer bu eşitlikteki f_j katsayılarından yalnızca herhangi ikisi sıfırdan farklı bir değere sahip, diğerleri ise sıfır olursa Evrim Dizeyi iki köşegenli yapıya bürünür. Ancak Evrim Dizeyi'nin asal köşegeninin dolu olması yeğlendiğinden f_1 katsayısının sıfırdan farklı olması gerekir. İkinci olarak f_{m+1} katsayısını sıfırdan değişik seçerek asal köşegenen m köşegen uzaklıkta bir köşegen yaratmış oluruz. Böylece Evrim Dizeyi'nin iki köşegenli biçimini genelleştirmiş oluruz. Örneğin m değeri 1 seçilerek yalnızca asal köşegen ve bir üstteki köşegeni dolu olan bir Evrim Dizeyi oluşturulur, m değeri 2 seçilerek asal köşegen ile onun iki üstteki köşegeni dolu olan bir Evrim Dizeyi oluşturulur. Benzer seçimlerle üst üçgensel yapıda iki köşegenli Evrim Dizeyleri oluşturulabilir. İki köşegenli bu yapıyı en genel durumda

$$\dot{x}_k(t) = k [f_1 x_k(t) + f_{m+1} x_{k+m}(t)], \quad f_1, f_{m+1} \neq 0, \quad k, m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.93)$$

ile anlatırız. Bu eşitliği bağıntılandırarak olursak

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & f_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & f_{m+1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2f_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2f_{m+1} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 3f_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 3f_{m+1} & \cdots \\ & & & & \ddots & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

eşitliğini yazabiliriz. (3.94) eşitliğindeki dizeyin dolu köşegenleri olan asal köşegen ve m köşegen uzaklıktaki köşegen sıfırdan değişik f_1 ve f_{m+1} sayıl katsayılarını içermektedir. $f(x)$ betimleyici işlevi $f_1 (x - x^{(r)}) + f_{m+1} (x - x^{(r)})^{m+1}$ anlatımlı bir çokterimli (ing:

polynomial) yapısındadır. Bu çokterimli yapısındaki betimleyici işlevin sıfırlarından biri $x^{(r)}$ 'de, diğer sıfırları ise gerçel eksendeki $x = x^{(r)}$ özekli (merkezli), $|f_1/f_{m+1}|^{1/m}$ yarıçaplı çemberin üzerine eşit açılı aralıklarla yerleşmiştir.

(3.94) denklemi ile verilen sonsuz boyutlu yöney eşitliğinin elimizde oluşuna karşın, (3.93) eşitliğindeki gibi özyineli sıradan türevli denklem yapısı, daha özel nitelikli olduğundan, yeğlenebilir. Aslında bu özyineleme uygun tanımlamalar yapılarak alt özyinelemelere bölünebilir. Asıl amacımız $x_1(t)$ çözümünü bulmak olduğundan (3.93) eşitliğinde tüm k değerleri yerine $mk + 1$ yazılır ve

$$\begin{aligned} \dot{x}_{mk+1}(t) &= (mk + 1) [f_1 x_{mk+1}(t) + f_{m+1} x_{m(k+1)+1}(t)], \\ f_1, f_{m+1} &\neq 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.95)$$

sonsuz sayılabilir sayıda denklem elde edilir. Bu, sıradan türevli bir özyineleyimdir. Sıradan türevli işleçler (operatörler), çok özel kısıtlayıcılar olmadıkça, boyca sonsuza gidebilen niteliktedirler. Sonsuzluktan kaçınmak için bu özyineleyimlerden sıradan türevli işleçleri gidermekte yarar vardır. Bu yapılrırsa tümlev işleçleri (ing: integral operator) görünebilir. Ama, onların tümlevlenenleri tekillik içermedikçe, işleç boyları sonlu kalır. Bu da işleri kolaylaştıran bir olgudur. Böylece, ilk olarak $x_{mk+1}(t)$ için çözüm arayacağız. Bu yüzden, $x_{mk+1}(t)$ bilinmeyenine göre kolay bir sıradan türevli denklem yapılı anlatımı çözebilmek için

$$x_{mk+1}(t) = x_{mk+1}(0)e^{(mk+1)f_1 t} + \mathcal{I}_k x_{m(k+1)+1}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.96)$$

eşitliğine ulaşırız. (3.96) eşitliğinin sağ yanındaki ikinci terimi

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_k x_{m(k+1)+1}(t) &\equiv (mk + 1) f_{m+1} \int_0^t d\tau e^{(mk+1)f_1(t-\tau)} x_{m(k+1)+1}(\tau), \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.97)$$

olarak açık biçimde yazabiliriz. (3.11) eşitliğinde belirtildiği gibi $x_{mk+1}(t)$ için,

$$x_{mk+1}(0) = (a - x^{(r)})^{mk+1} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.98)$$

başlangıç koşulunu yazabiliriz. Bu bilgiler ışığında (3.96) eşitliğini

$$x_{mk+1}(t) = (a - x^{(r)})^{mk+1} e^{(mk+1)f_1 t} + \mathcal{I}_k x_{m(k+1)+1}(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.99)$$

yapısında yeniden yazabiliriz. Böylece asıl amacımız olan $x_1(t)$ çözümünü, $k = 0$ seçimi için

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (a - x^{(r)}) e^{f_1 t} + \mathcal{I}_0 x_{m+1}(t) \\ &= (a - x^{(r)}) e^{f_1 t} + \mathcal{I}_0 (a - x^{(r)})^{m+1} e^{(m+1)f_1 t} + \mathcal{I}_0 \mathcal{I}_1 x_{2m+1}(t) \\ &= (a - x^{(r)}) e^{f_1 t} + \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{I}_0 \dots \mathcal{I}_j (a - x^{(r)})^{(j+1)m+1} e^{(j+1)m+1)f_1 t} \end{aligned} \quad (3.100)$$

yapısında elde ederiz. Bu çözüm aslında Olasılıksal Evrim Denklemi'nin ikinci ögesini betimler. (3.100) eşitliğindeki üçüncü anlatım ise, tek bir değer olarak belirlenebilirse, kesin sonucu verir. Bu amaçla sonsuz toplamın genel terimini belirleyebilmek için

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_j e^{[(j+1)m+1]f_1 t} &= (jm + 1) f_{m+1} e^{[jm+1]f_1 t} \int_0^t d\tau e^{mf_1 \tau} \\ &= (jm + 1) f_{m+1} e^{[jm+1]f_1 t} \left(\frac{e^{mf_1 t} - 1}{mf_1} \right) \end{aligned} \quad (3.101)$$

ilk verilen \mathcal{I}_j tümlev işlecini kullanacağız. Genel terimi belirleyebilmek adına aynı anlatıma yeniden tümlev işlecini uygulayacağız. Böylece,

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{j-1} \mathcal{I}_j e^{[(j+1)m+1]f_1 t} &= (jm + 1) ((j-1)m + 1) \frac{f_{m+1}^2}{2!} e^{[(j-1)m+1]f_1 t} \left(\frac{e^{mf_1 t} - 1}{mf_1} \right)^2 \\ &= \frac{\Gamma(j + 1 + \frac{1}{m})}{\Gamma(j + 1 + \frac{1}{m} - 2)} \frac{f_{m+1}^2}{2!} e^{[(j+1-2)m+1]f_1 t} \left(\frac{e^{mf_1 t} - 1}{f_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.102)$$

eşitliğine ulaşırız. Bu yoldan ilerleyerek,

$$\mathcal{I}_{j-k+1} \dots \mathcal{I}_j e^{[(j+1)m+1]f_1 t} = \frac{\Gamma(j + 1 + \frac{1}{m})}{\Gamma(j + 1 + \frac{1}{m} - k)} \frac{f_{m+1}^k}{k!} e^{[(j+1-k)m+1]f_1 t} \left(\frac{e^{mf_1 t} - 1}{f_1} \right)^k \quad (3.103)$$

ve sonuç olarak

$$\mathcal{I}_0 \dots \mathcal{I}_j e^{[(j+1)m+1]f_1 t} = \frac{\Gamma(j + 1 + \frac{1}{m})}{\Gamma(\frac{1}{m})} \frac{f_{m+1}^{j+1}}{(j+1)!} e^{f_1 t} \left(\frac{e^{mf_1 t} - 1}{f_1} \right)^{j+1} \quad (3.104)$$

genel anlatımını elde ederiz. Yukarıda belirtilen Γ ile Gama işlevi simgelenmektedir. İki Gama işlevinin oranını Pochhammer simgesi ile anlatabiliriz. Pochhammer simgesinin [17, 19] tanımı bilimsel yazında

$$(a)_n \equiv a(a+1)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad (3.105)$$

olarak yapılır. Bu tanım aracılığı ile Gama işlevlerinin oranını

$$\frac{\Gamma(j+1+\frac{1}{m})}{\Gamma(\frac{1}{m})} = \left(\frac{1}{m}\right)_{j+1} \quad (3.106)$$

olarak yazabiliriz. Bu bilgiler ışığı altında (3.104) eşitliğini

$$\mathcal{I}_0 \dots \mathcal{I}_j e^{[(j+1)m+1]f_1 t} = \left(\frac{1}{m}\right)_{j+1} \frac{f_{m+1}^{j+1}}{(j+1)!} e^{f_1 t} \left(\frac{e^{mf_1 t} - 1}{f_1}\right)^{j+1} \quad (3.107)$$

diye de yazabiliriz.

Sonuç olarak belirlemek istediğimiz genel anlatımı elde etmiş olduk. Böylece (3.100) eşitliğindeki $x_1(t)$ terimini

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (a - x^{(r)}) e^{f_1 t} + \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)_{j+1} \frac{f_{m+1}^{j+1}}{(j+1)!} (a - x^{(r)})^{(j+1)m+1} e^{f_1 t} \left(\frac{e^{mf_1 t} - 1}{f_1}\right)^{j+1} \\ &= (a - x^{(r)}) e^{f_1 t} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\right)_j \frac{f_{m+1}^j}{j!} (a - x^{(r)})^{mj} \left(\frac{e^{mf_1 t} - 1}{f_1}\right)^j \\ &= (a - x^{(r)}) e^{f_1 t} {}_1F_0 \left(\frac{1}{m} \middle| f_{m+1} (a - x^{(r)})^m \left(\frac{e^{mf_1 t} - 1}{f_1}\right) \right) \end{aligned} \quad (3.108)$$

bütüncül yapısında yeniden anlatabiliriz. (3.108) eşitliğindeki ${}_1F_0$ ile Genelleştirilmiş Aşkınuzamcıl İşlevler'in (ing: Generalized Hypergeometric Functions) [17, 19] özel bir durumudur. Bu işlev tek değişkenlidir, işlevin değişkeni ise $1/m$ dir.

3.6. Kesme Yaklaştıranlarının Yakınsaklığı ve Niteliği

${}_1F_0$ işlevinin değeri değişkenin bazı değerlerine göre çözümcül olarak belirlenebilir. Çözümcüllüğe her zaman ulaşamayabileceğimizden burada bu konu üzerinde durulmayacaktır. Aslında (3.108) ile yeniden vurgulanan toplamdizi, yaklaşım kuramı açısından

daha önemlidir. Üstelik bu toplamdizinin yakınsaması ile ilgili bilgi elde bulunmakta ve yakınsamadan doğan yanılı da denetlenebilecektir [17, 19].

(3.100) ile elde edilen çözüm üzerinde kesme yaparak

$$x_1^{(n)}(t) \equiv (a - x^{(r)}) e^{f_1 t} + \sum_{j=0}^n \mathcal{I}_0 \dots \mathcal{I}_j (a - x^{(r)})^{(j+1)m+1} e^{[(j+1)m+1]f_1 t} \quad (3.109)$$

eşitliğini kolayca yazabiliriz. Yeniden ürettiğimiz (3.108) eşitliğindeki ikinci anlatımı gözönüne alarak yukarıda yapılan kesmeyi

$$x_1^{(n)}(t) = (a - x^{(r)}) e^{f_1 t} + \sum_{j=0}^n \left(\frac{1}{m}\right)_j \frac{f_{m+1}^j}{j!} (a - x^{(r)})^{mj} \left(\frac{e^{mf_1 t} - 1}{f_1}\right)^j \quad (3.110)$$

yapısında elde edebiliriz.

(3.108) eşitliğindeki toplamdizi aşağıdaki koşul altında yakınsamaktadır. Bir yakınsaklık düzey sınavımı olarak bu koşulu şöyle yazabiliriz.

$$\left| \frac{f_{m+1}}{f_1} (a - x^{(r)})^m (e^{mf_1 t} - 1) \right| < 1 \quad (3.111)$$

Tam bu noktada kararlılık konusu öne çıkmaktadır. Kararlılığı denetleyen tek ölçüt f_1 'in değeridir. t sonsuza gittiğinde çözümün davranışını etkileyecektir. Eğer f_1 eksi değer alırsa, $f_1 t$ 'nin üstel işlevi tüm eksi olmayan zaman durumları için 1 ile sınırlı olacaktır. Dolayısıyla, (3.111) eşitliğini

$$\left| \frac{f_{m+1}}{f_1} (a - x^{(r)})^m (e^{mf_1 t} - 1) \right| < \left| \frac{f_{m+1}}{f_1} (a - x^{(r)})^m \right| < 1, \quad t \in [0, \infty), \quad f_1 < 0 \quad (3.112)$$

diye yeniden yazabiliriz. Ortadaki anlatımı gözönünde bulundurarak

$$|a - x^{(r)}| < \left| \frac{f_1}{f_{m+1}} \right|^{\frac{1}{m}}, \quad f_1 < 0 \quad (3.113)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Sağ yandaki anlatım asıl sıradan türevli denklemin betimleyici işlevi olan $f(x)$ ile eksiksiz bir biçimde belirlenebilir. $f(x)$ 'in açık biçimini

$$f(x) \equiv f_1 (x - x^{(r)}) + f_{m+1} (x - x^{(r)})^{m+1} \quad (3.114)$$

olarak yazmıştık. $f(x)$ 'in sıfırlarından biri gerçel eksen üzerindeki $x^{(r)}$ noktasında, diğer sıfırları ise gerçel eksendeki $x = x^{(r)}$ özekli, $|f_1/f_{m+1}|^{1/m}$ yarıçaplı çemberin üzerine eşit açılı aralıklarla yerleşmiştir. (3.113) eşitliği aslında a başlangıç değeri üzerinde bir kısıt getirmektedir. Yani bu noktanın gerçel eksendeki $x = x^{(r)}$ özekli, $|f_1/f_{m+1}|^{1/m}$ yarıçaplı çember içinde bir nokta olması gerekmektedir. Diğer bir deyişle, betimleyici işlevin bir sıfırında oluşturulan Olasılıksal Evrim Denklemleri'nin toplamdizi çözümü, verilen başlangıç noktasının yukarıda sözedilen teker içinde olduğu sürece yakınsadığını söyleyebiliriz. Yani betimleyici işlevin en yakın sıfırı yakınsaklığı belirleyen asıl ölçüttür.

Eğer f_1 sıfır veya artı değerler alırsa dizge kararsız bir yapıda olur ve $f_1 t$ 'nin üstel işlevinin sınırsız büyümesi, tüm zaman durumlarında yakınsama için çözüme izin vermez. Yakınsama yalnızca sol yandan $t = 0$ ile sınırlı bir zaman aralığında gözlenebilir. Bu durumu göz önünde bulundurarak (3.111) eşitsizliğini

$$\left| \frac{f_{m+1}}{f_1} (a - x^{(r)})^m (e^{mf_1 t} - 1) \right| < \left| \frac{f_{m+1}}{f_1} (a - x^{(r)})^m (e^{mf_1 T} - 1) \right| < 1, \\ f_1 \geq 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.115)$$

olarak yeniden yazabiliriz ve

$$|a - x^{(r)}| < \left| \frac{f_1}{f_{m+1}} \right|^{\frac{1}{m}} |e^{mf_1 T} - 1|^{-\frac{1}{m}}, \quad f_1 \geq 0, \quad t \in [0, T] \quad (3.116)$$

elde ederiz. Bu eşitsizlik yakınsaklığın $[0, T]$ ile belirtilen zaman aralığının büyüklüğüne bağlı olduğunu anlatır. $\frac{f_1}{m} \ln 2$ sayılından büyük tüm T değerleri için yakınsaklık tekeri küçülür. T sonsuza tekdüze (monoton) giderken bu yakınsaklık tekeri gittikçe küçülerek bir ve sonunda yalnızca bir nokta olacaktır. Bu küçülmenin düzeyi f_1 'e bağlıdır. Daha büyük f_1 değerleri, daha küçük yakınsama tekerleri demektir. En küçük daralmanın düzeyi doğaldır ki f_1 'in sıfırdaki değeridir.

Bu çözümleyim amacımız için yeterli olacaktır. Yeniden vurgulamak gerekirse, en önemli nokta, kesme yaklaşıranlarının niteliği zaman aralığının uzunluğuna ve kararlılık durumunda f_1 'in değerine bağlıdır.

(3.108) ve (3.110) eşitliklerinden yararlanarak

$$\begin{aligned} \left| x_1(t) - x_1^{(n)}(t) \right| &\leq |(a - x^{(r)})| |e^{f_1 t}| \\ &\times \sum_{j=n+1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{m} \right)_j \right| \frac{|f_{m+1}|^j}{j!} |(a - x^{(r)})|^{mj} \left| \left(\frac{e^{mf_1 t} - 1}{f_1} \right) \right|^j \end{aligned} \quad (3.117)$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizlikte, özenle bakarsak,

$$\left| \frac{\left(\frac{1}{m} \right)_j}{j!} \right| < 1 \quad (3.118)$$

koşulunu gözlemleyebiliriz. Bu koşul bize (3.117) eşitsizliğini

$$\begin{aligned} \left| x_1(t) - x_1^{(n)}(t) \right| &< |(a - x^{(r)})| |e^{f_1 t}| \sum_{j=n+1}^{\infty} |f_{m+1}|^j |(a - x^{(r)})|^{mj} \left| \left(\frac{e^{mf_1 t} - 1}{f_1} \right) \right|^j \\ &= |(a - x^{(r)})| |e^{f_1 t}| |f_{m+1}|^{n+1} |(a - x^{(r)})|^{m(n+1)} \left| \left(\frac{e^{mf_1 t} - 1}{f_1} \right) \right|^{n+1} \\ &\times \left[1 - |f_{m+1}| |(a - x^{(r)})|^m \left| \left(\frac{e^{mf_1 t} - 1}{f_1} \right) \right| \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.119)$$

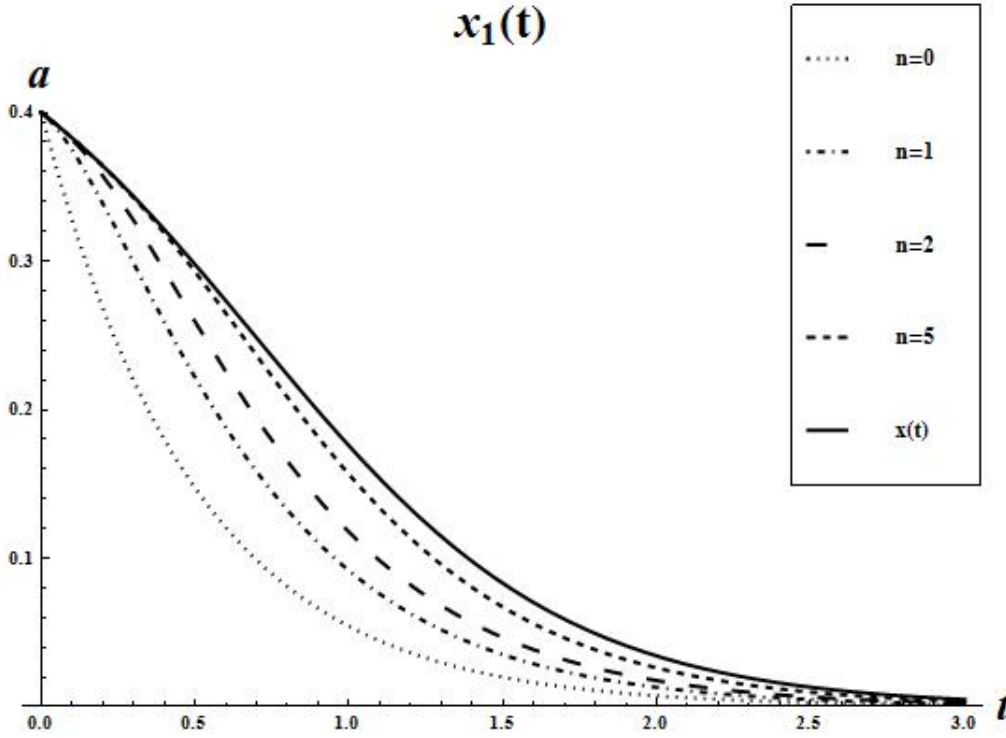
yeniden yazdırır. (3.119) eşitsizliğinin en sağ yanındaki terim yapılan kesmeden kaynaklanan yanılgi için üst sınırları göstermektedir. Bu bağıntı yakınsaklık incelemesi için iyi bir anlatımdır.

3.7. Uygulama

Bu bölümde şimdiye kadar sözedilen tüm olguları kesin açıklayıcı uygulamalarla destekleyeceğiz. Yukarıda sözedildiği gibi $x_1(t)$ işlevi, $x_1^{(n)}(t)$ kesme yaklaşımlarıyla belirlenebilirdi. Bu yaklaşımların zamana bağıllığı asıl analitik çözümün zamana bağıllı davranışı ile karşılaştırılabilir.

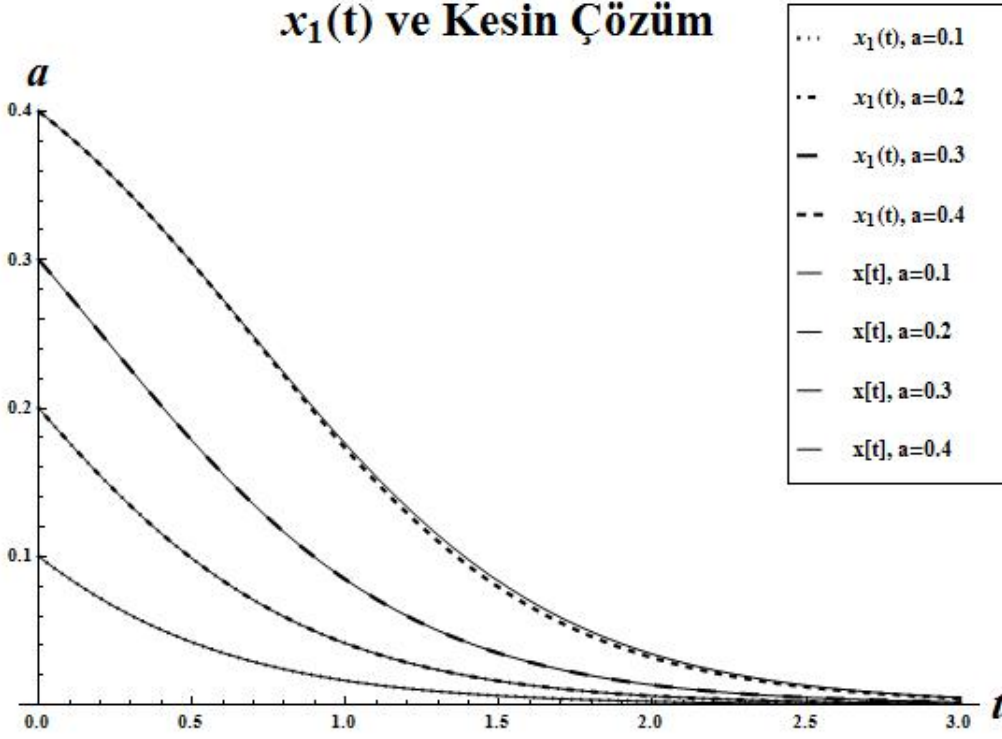
Şekil 3.1.'de $x_1(t)$ için belirlenen 4 farklı kesme yaklaşımının zamana bağıllığı ile aynı zaman aralığındaki kesin çözümünün karşılaştırılması gösterilmektedir. Bu uygulamalarda a başlangıç değeri için 0.4 değeri seçilmiştir. Bu seçimin nedeni başlangıç değerinin yakınsaklık tekeri içinde kalmasıdır. Eğer yakınsama bekleniyorsa yakınsaklık

bölgesi olan bu teker içinde çalışmak gerekecektir. Ayrıca $x^{(r)} = 0$, $f_1 = -2$ ve $f_2 = 4$ seçilmiştir. f_1 katsayısını eksi seçmemizin nedeni, bir önceki bölümde belirttiğimiz gibi, $f_1 t$ 'nin üstel işlevinin tüm eksi olmayan zaman durumları için 1 ile sınırlı olmasıdır. Ayrıca başlangıç değerinin $x = x^{(r)}$ özekli, $|f_1/f_{m+1}|^{1/m}$ yarıçaplı çember içinde içinde olabilmesi için f_2 'nin de bu koşula uygun seçimi söz konusudur. Buradaki seçim bu koşulları sağlamakta, $a = 0.4$ başlangıç değeri $(0, \frac{1}{2})$ çemberi içinde kalmaktadır.



Şekil 3.1. – $a = 0.4$ başlangıç değeri için ($n = 0, 1, 2, 5$) kesme boyutlu $x_1(t)$ ile $x(t)$ kesin çözüm eğrisi

Öte yandan Şekil 3.2., her bir kesme yaklaşımının kesme düzeyi 5 olan farklı başlangıç değerli eğriler ile kesin çözümleri karşılaştırmaktadır. Gözönüne alınan tüm başlangıç değerleri elbette yakınsaklık tekeri içinde kalacaktır. Şekil 3.1.'de olduğu gibi yine $x^{(r)} = 0$, $f_1 = -2$ ve $f_2 = 4$ seçilmiştir.



Şekil 3.2. – Kesme derecesi $n = 5$ ve yakınsaklık tekeri içindeki $a = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ başlangıç değerleri için kesin çözüm ile $x_1(t)$ kesme yaklaşımları

Şekil 3.1. ve Şekil 3.2.'den de görülebileceği gibi kesme yaklaşımlarında hızlı bir yakınsama vardır. $n = 5$ gibi küçük bir kesimde bile neredeyse kesin çözüm ile aynı eğri yakalanmıştır. Aslında $n = 3, 4$ kesimlerinde de kesin çözüme çok yakın eğriler elde edilmiştir. Yakınsamanın bu denli etkili olmasının sebebini başlangıç değerinin yakınsaklık tekeri içinde kalması veya betimleyici işlevin sıfırının civarında (yakınsaklık koşullarını gözönüne alarak) çalışmamız olarak söyleyebiliriz.

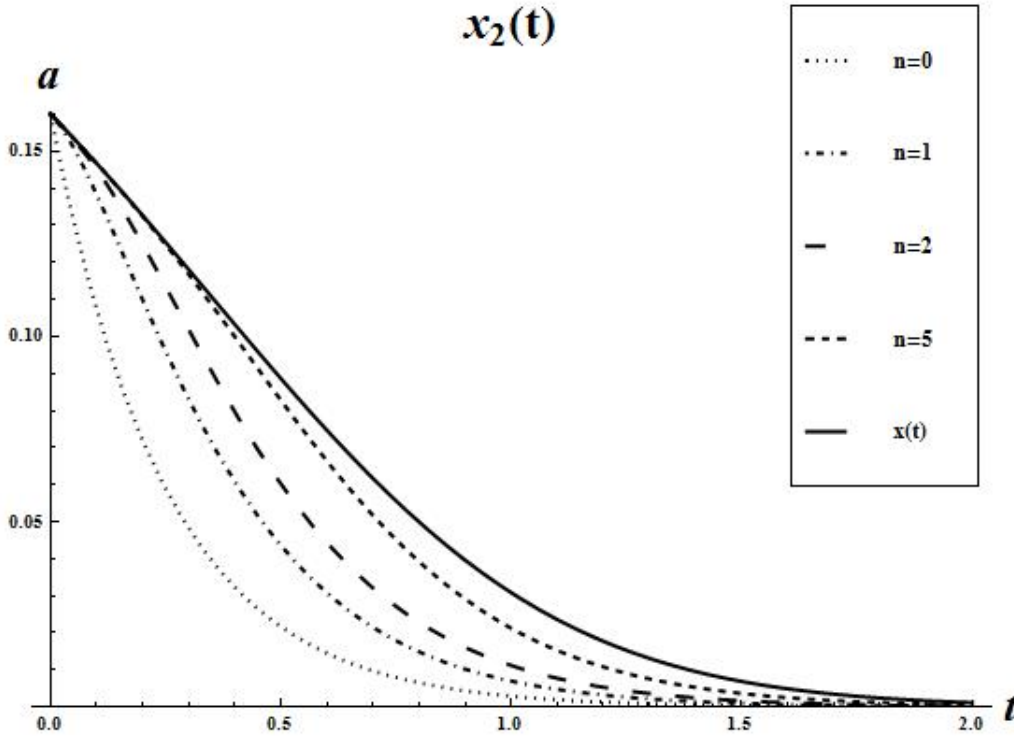
Ayrıca belirtmek gerekir ki tüm bu yapılar asal köşegen ve üstündeki köşegeni içeren iki köşegenli bir dizey için incelendiğinden f_1 ve f_2 katsayıları seçilmiştir. Eğer aralarında m köşegen fark olan bir Evrim Dizeyi incelenseydi, f_1 katsayısı ile f_{m+1} katsayılarının seçimi söz konusu olacaktı.

Şekil 3.3. ve Şekil 3.4. de benzer düşünceyle $x_2(t)$ kesme yaklaşırını için oluşturulmuştur. Ancak $x_2(t)$ için kesme yaklaşırınlarının niteliğinin $x_1(t)$ için olanlar düzeyinde iyi olmadığı hemen gözlenmektedir. Yine de $n = 5$ kesme düzeyinde oldukça iyi bir yakınsama gözlenebilmektedir. Burada iki köşegenli yapının kolay durumu olan yani asal köşegeni ve bir üstündeki köşegeni dolu olan Evrim Dizeyi ile çalıştığımızdan dolayı $m = 1$ alacağız. Bu öngörüm ile $x_2(t)$ işlevinin çözümcül anlatımını

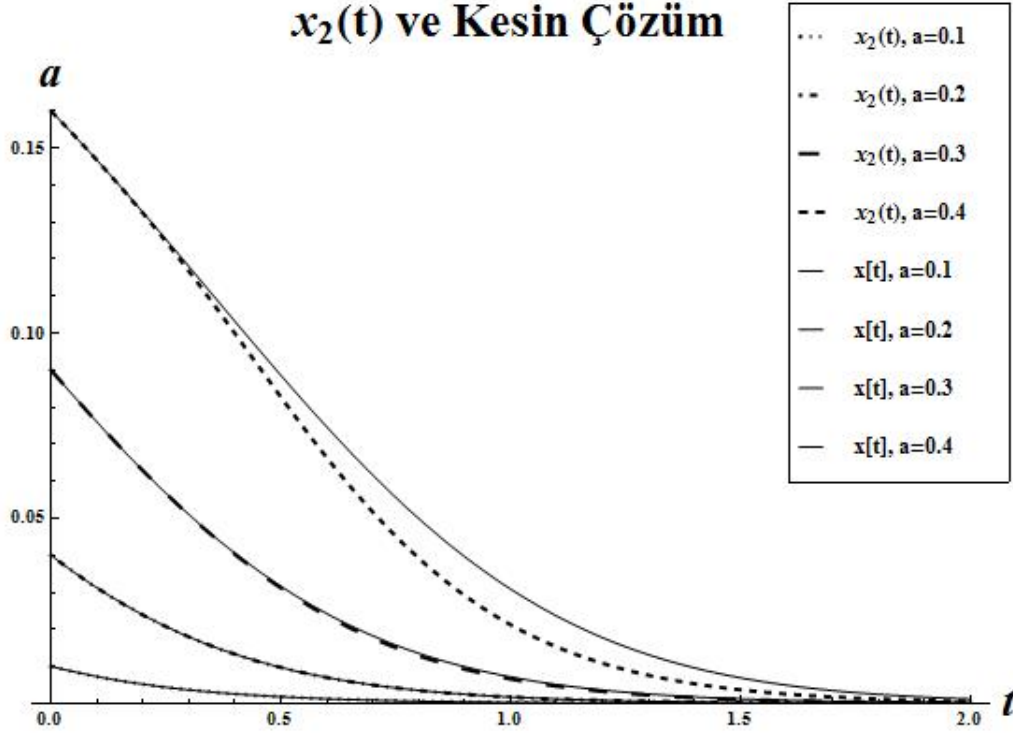
$$x_2(t) = (a - x^{(r)})^2 e^{2f_1 t} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) f_2^j (a - x^{(r)})^j \left(\frac{e^{f_1 t} - 1}{f_1} \right)^j \quad (3.120)$$

olarak yazabiliriz. (3.120) eşitliğindeki diğer bilinenler $x_1(t)$ kesme yaklaşırının bilinenleriyle aynı tutulmuştur, yine $x^{(r)} = 0$, $f_1 = -2$ ve $f_2 = 4$ seçimleri söz konusudur.

Şimdi sırasıyla Şekil 3.3. ve Şekil 3.4.'ü artık belirleyebiliriz.



Şekil 3.3. – $a = 0.4$ başlangıç değeri için ($n = 0, 1, 2, 5$) kesme boyutlu $x_2(t)$ ile $x(t)$ kesin çözüm eğrisi



Şekil 3.4. – Kesme derecesi $n = 5$ ve yakınsaklık tekeri içindeki $a = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ başlangıç değerleri için kesin çözüm ile $x_2(t)$ kesme yaklaşımları

Bu kesimde, kesme yaklaşımlarının sayısal duyarlık ve nitelik açısından nasıl bir etkinlik sergilediği, sayısal uygulamalar sonuçlarının çizimleriyle gösterilmeye çalışılmıştır. Sonuçlar, yakınsaklık tekeri özeğine yaklaşıldıkça yakınsayımın ivmelendiği ve, dolayısıyla, yaklaştırım niteliğinin yükseldiği savını desteklemektedir. Başlangıç değerinin özekten uzaklaşıp yakınsaklık çemberine yaklaşımı durumunda ise hem yakınsayım yavaşlamakta, hem de buna bağımlı olarak, yaklaştırım niteliğinde düşme söz konusu olmaktadır. Sonuç olarak, sayısal uygulama sonuçları, kuramsal beklentileri karşılar niteliktedirler.

3.8. Asıl Sıradan Türevli Denklemin Başlangıç Değer Sorununun Kesin Çözümü

Tek bilinmeyenli sıradan türevli denklemler ilkesel olarak değişkenlere ayırım yöntemi kullanılarak çözülebilir. Bu yöntem çerçevesinde atacağımız adımlardan kısaca söz etmek gerekirse, bu yöntem aracılığı ile bilinmeyen değişkene göre alınan tümlev (3.122) ile belirtilecek ve zamana eşit olduğu gözlemlenecektir. Daha sonra bir işlevin evriği ve tümlevin yakınsaklığına bağlılığı söz konusu olacaktır.

Şimdi aralarında m köşegen fark olan iki köşegenli Evrim Dizeyi'ni betimleyen asıl sıradan türevli denkleminimize odaklanalım. Bu yapıyı

$$\dot{x}(t) = f_1x + f_{m+1}x^{m+1}, \quad x(0) = a \quad (3.121)$$

ile betimliyorduk. Burada gözlemleyebildiğimiz gibi betimleyici işlevin sıfırlarından biri 0 noktasında olduğundan çözümlene yapmaya yardımcı olmaktadır. Dolayısıyla

$$\int_a^x \frac{d\xi}{f_1\xi + f_{m+1}\xi^{m+1}} = t \quad (3.122)$$

şeklinde değişkenlerine ayırım yöntemini kolayca uygulayabiliriz. Basit bir uzbilimsel işlem ile

$$\int_a^x \frac{d\xi}{\xi} - \int_a^x d\xi \frac{f_{m+1}\xi^{m-1}}{f_1 + f_{m+1}\xi^m} = f_1t \quad (3.123)$$

elde edebiliriz. Daha açık bir biçimde yazmak adına elde edilen tümlevler alınır ve

$$\ln\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{m} \ln\left(\frac{f_1 + f_{m+1}a^m}{f_1 + f_{m+1}x^m}\right) = f_1t \quad (3.124)$$

eşitliği gözlenir. Bu eşitlik aracılığı ile

$$\frac{x^m}{f_1 + f_{m+1}x^m} = \frac{a^m e^{mf_1t}}{f_1 + f_{m+1}a^m} \quad (3.125)$$

eşdeğerliliği gerçekleşir. (3.125) eşitliğinden $x(t)$ işlevinin gerçek köklerini

$$x(t) = ae^{f_1t} \left[1 - \frac{f_{m+1}}{f_1} a^m (e^{mf_1t} - 1) \right]^{-\frac{1}{m}} \quad (3.126)$$

olarak belirleyebiliriz. İkinci bir öge ise bu eşitlik ile ${}_1F_0$ Genelleştirilmiş Aşkınuzamcıl İşlevi'nin açık yapılı çözümcül anlatımıdır. Dolayısıyla Olasılıksal Evrim Denklemi'nin çözümü (3.126) ile üretilebilir.

3.9. Van der Pol Denklemi İçin Tek Yönlü Yarı Çözümcül Uzanım

Bu ana dek yaptığımız incelemeler sonucunda söyleyebiliriz ki kesme yaklaştıranlarının yakınsaklığı yalnızca Evrim Dizeyi'nce belirlenmemektedir. Başlangıç verisi yakınsaklık konusunda önemli bir görev üstlenmektedir. Eğer betimleyici işlev yalnızca tek bir noktada sıfırlanırsa, tüm başlangıç verileri için yakınsama güvence altına alınır. Diğer yandan, betimleyici işlevin birden fazla sıfırı varsa yakınsama yalnızca özeği bu işlevin bir sıfırında yerleşen, yarıçapı bir diğer sıfıra uzanan tekerlerin oluşturduğu sınırlı bir bölgede geçerli olacaktır. Bu durum üslü taban takımının etkili olmadığı yarı sonsuz bir bölge oluşturacaktır. Dolayısıyla çözümcül uzanım (ing: analytic continuation) gereksinim duyulacaktır. Bu bölümde de çözümcül uzanım durumu incelenecektir.

Çözümcül uzanım [20] konusunu genel bir çerçevede anlatarak bu yöntemin Van der Pol denklemine uygulanabilirliğinden söz edeceğiz. Bu yöntemi sıradan türevli bir denklem olan Van der Pol denklemine uygulamadan önce uygun başlangıç koşulları seçilmelidir. Van der Pol denklemi ikinci kereden iki bilinmeyenli bir sıradan türevli denklem takımındır. Ancak çözümcül uzanım konusunun daha iyi anlaşılabilmesi için yine benzer biçimde ilk önce bir bilinmeyenli sıradan türevli denklem için ayrıntılandıracağız.

Kısaca anımsatmak adına uygun başlangıç koşullu bir bilinmeyenli sıradan türevli denklemi

$$\dot{x}(t) = f(x(t)); \quad x(0) = a, \quad t \in [0, \infty) \quad (3.127)$$

ile anlatıyorduk. Betimleyici işlev f 'nin tekilliklerinin varlığından dolayı sonsuzluktan

ayrılarak x - karmaşık düzleminde çözümcül kabul edilebilecektir. x uzayında tanımlı çözümcül uzanım için yeni bir bilinmeyeni

$$y(t) \equiv \frac{1}{x(t) + \alpha}, \quad t \in [0, \infty) \quad (3.128)$$

olarak tanımlayabiliriz. Bu yeni bilinmeyeni uygun başlangıç koşulları eşliğinde (3.127) eşitliğinde yerine yazarak

$$\dot{y}(t) = -y(t)^2 f \left(\frac{1}{y(t)} - \alpha \right) \equiv g(y(t)), \quad y(0) = \frac{1}{a + \alpha} \quad (3.129)$$

elde ederiz. Artık yeni sıradan türevli denklemin betimleyici işlevi, f 'nin durumuna bağlı olarak $y = 0$ için tekillik içerebilir. Bununla birlikte çoğu durumda betimleyici işlevler uygun uzay genişletim adımları kullanılarak ikinci dereceli duruma getirilebilir. f işlevinde tekilliğin yarattığı olumsuzluk kaldırıldığında g işlevi ikinci dereceli yapılabilir. Böylelikle g işlevinin, belki sonsuzluk dışında, her yerde çözümcül olduğu durumları düşünerek Taylor toplam dizisine açılımını yazarak

$$g(y(t)) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j (y(t) - y^{(r)})^j \quad (3.130)$$

anlatabiliriz. Burada artık yeni betimleyici işlevimiz g , g_j 'ler ise Taylor katsayılarıdır. Olasılıksal Evrim Kuramı'ndan bildiğimiz gibi g işlevi için kurduğumuz bu dizgede de $(y(t) - y^{(r)})^j$ üslü işlevleri de doğrusal bağımsız, işlevsel bağımlıdırlar. Dolayısıyla bu işlevleri çözümcül bir taban takımının üyeleri olarak kabul edebiliriz ve

$$y_k(t) \equiv (y(t) - y^{(r)})^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.131)$$

anlatımını yazabiliriz. Yine Olasılıksal Evrim Kuramı'ndan yola çıkarak, bu anlatımın her iki yanının türevini alırız ve

$$\dot{y}_k(t) = k \sum_{j=0}^{\infty} g_j (y(t) - y^{(r)})^{k+j-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.132)$$

yapısını elde ederiz. Böylece (3.132) eşitliği çok iyi bildiğimiz Evrim Dizeyi'ni oluşturur. Ancak Evrim Dizeyi'nin öğeleri artık f 'nin değil g 'nin katsayılarından oluşmaktadır.

(3.132) bizi

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{E}\mathbf{y}(t) \quad (3.133)$$

eşitliğine kavuşturur. Bu eşitlikteki Evrim Dizeyi'ni

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & \cdots \\ 0 & 2g_0 & 2g_1 & 2g_2 & 2g_3 & \cdots \\ 0 & 0 & 3g_0 & 3g_1 & 3g_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \quad (3.134)$$

ile anlatabiliriz. \mathbf{E} 'nin tüm öğeleri bilinen değişmez değerlerdir. Olasılıksal Evrim Kuramı'nda sözedilen \mathbf{E} 'nin üst Hessenberg veya üst üçgensel yapıda olması eş biçimde burada da geçerlidir. Tek koşul burada f değil g işlevi olduğu için g_0 katsayısının sıfırlanmasıdır. (3.133) eşitliği ile betimlediğimiz ana denklemimizin biçimsel çözümünü

$$\mathbf{y}(t) = e^{t\mathbf{E}}\mathbf{y}(0) \quad (3.135)$$

yazabiliriz. (3.135) çözümünde sözedilen y işlevindeki başlangıç koşullu değeri

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(0) &= [y_0(0) \ y_1(0) \ y_2(0) \ \dots]^T \\ &= \left[1 \ \left(\frac{1}{a+\alpha} - y^{(r)} \right) \ \left(\frac{1}{a+\alpha} - y^{(r)} \right)^2 \ \dots \right]^T \end{aligned} \quad (3.136)$$

olarak yazabiliriz. Çözümçül uzanım adına bu ana dek yapılan çözümleyim ilerleyebilmemiz için yeterlidir. Şimdi ikinci dereceli sıradan türevli denklem yapılarındaki çözümçül uzanımı inceleyeceğiz.

Açık yapılı sıradan türevli denklemlerin ikinci dereceli bir kümesini en genel biçimde

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \phi_{i,0}(x_1(t), \dots, x_{N-1}(t)) + \phi_{i,1}(x_1(t), \dots, x_{N-1}(t))x_N(t) + \phi_{i,2}x_N(t)^2 \\ i &= 1, \dots, N \end{aligned} \quad (3.137)$$

anlatabiliriz. Bu eşitlikte $\phi_{i,0}$ x 'ler türünden ikinci dereceden çokçokterimliler, $\phi_{i,1}$ birinci dereceden çokçokterimli, $\phi_{i,2}$ ise sıfırıncı dereceden bir çokçokterimli yani aslında bir katsayıdır.

Çözümçül uzanımda (3.128) eşitliği ile elde ettiğimiz yeni bilinmeyeni göz önünde bulundurarak özel olarak $i = N$ için

$$y_N(t) \equiv \frac{1}{x_N(t)} \quad (3.138)$$

tanımını yapabiliriz. Daha sonra bu terimin her iki yanının türevini alıp (3.137) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\dot{y}_N(t) = -\phi_{N,0}y_N^2 - \phi_{N,1}y_N - \phi_{N,2} \quad (3.139)$$

eşitliğini elde ederiz. Sağ yanda son terim dışında diğer terimler çokçokterimli yapıdadır.

Eğer N için yazdığımız (3.138) tanımlamasını daha genel olarak yapmak istersek

$$y_i(t) \equiv \frac{x_i(t)}{x_N(t)} \quad (3.140)$$

elde ederiz. Yine aynı yöntemle türev alarak ve (3.137) eşitliğinde yerine yazarak

$$\begin{aligned} \dot{y}_i(t) &= -\phi_{N,0}x_iy_N^2 - \phi_{N,1}x_iy_N - \phi_{N,2}x_i + \phi_{i,0}y_N + \phi_{i,1} + \phi_{i,2}\frac{1}{y_N}, \\ &i = 1, \dots, N - 1 \end{aligned} \quad (3.141)$$

yapısına ulaşırız.

Bu son eşitlik bize şunu gösterir: $\frac{1}{y_N}$ terimi çokçokterimliliği bozduğundan, eğer $\phi_{i,2}$ sıfırlanırsa (3.141) eşitliği çokçokterimli yapıya kavuşur. $\phi_{i,2}$ 'nin sıfırlanmadığı durumlarda başka yöntemler aranmalıdır ancak bu an için bu konu ile ilgili herhangi bir araştırma yapılmamıştır. Çokçokterimli yapıya geçmek istememizin nedeni ikinci dereceliliktir. Uygun uzay genişletim adımları kullanılarak çokçokterimli yapıyı ikinci dereceli duruma dönüştürebiliriz. Böylece kesme yaklaşımlarını üretme işlemine geçilebilir. Sonuç olarak tek yönlü yarı çözümçül uzanım işlemi, genişletilmiş uzayda Van der Pol denkleminin Olasılıksal Evrim Denklemleri'ne uygulayabiliriz.

Özet olarak Van der Pol denklemi ikinci dereceli yapıya dönüştürüldükten sonra x değişkenlerinden biri seçilerek y 'ye göre evriğinin tanımı yapılır. Böylece bu yöntem

belirtilen denklem takımlarına uygulanabilir. Bunun anlamı ise tek yönlü yarı çözümcül uzanımın x ve y yönlerinde gerçekleştirimi demektir.

4. SONUÇLAR

Bilimsel yazında, sürekli ilerleyen bilimin ve teknolojinin gelişmelerinin tıkanıdığı noktalarda ortaya çıkan sorunları çözmek adına çeşitli uzbilimsel yöntemler bulunmaktadır. Günümüzde de bilimin birçok alanında benzer sorunlar vardır ve çözümleri için çeşitli yöntemler geliştirilmektedir. Çağımızda, çoğu alanda uygulayımı olan Nicem İşleybilim ve Sayıtsal İşleybilim'in de çeşitli sorunları vardır. Olasılıksal Evrim Kuramı da başta bu alanlarda geliştirilmiş olup, sonrasında daha değişik alanlarda da uygulamaya konulmuştur. Bu tezin içeriğini de oluşturan Olasılıksal Evrim Yaklaşım yöntemi sözedilen alanlara uygulanmış ve başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Kuram gün geçtikçe gelişmekte ve bu çalışmanın yazım aşamasında Nicem İşleybilim ağırlıklı olmak üzere birçok alanda önemli bulgular ortaya çıkarılmıştır.

Bu çalışmada önce Olasılıksal Evrim Kuramı hakkında ayrıntılı bilgi verilmiş ve Sayıtsal İşleybilim'den bir örnek sayılabilecek Uyumlu Salingaç'ı niteleyen Van der Pol denklemi ele alınmıştır. Olasılıksal Evrim Kuramı oluşturulurken önce birinci kereden türevli denklemler için uygulamalar yapılmıştır. Kuram geliştikçe daha yüksek kereden türevli denklemler gözönüne alınmıştır. Van der Pol denklemi de ikinci kereden bir türevli denklem olması sebebiyle seçilmiştir. Ayrıca denklemin yapısında bulundurduğu belirleyici kargaşa, salingacın sönümü veya patlaması durumları Olasılıksal Evrim yöntemini uygulama açısından oldukça yatkın duruma getirmiştir.

Van der Pol denklemini Olasılıksal Evrim Kuramı bağlamında işleyebilmek için çeşitli adımlar mevcuttur. İkinci kereden olan denklem önce birinci kerteğe uzay genişletim adımları uygulanarak düşürülmüştür. İkinci derecelilik kavramının gerekliliği ve önemi vurgulanmıştır. Gerekli olduğu durumlarda ikinci dereceli yapıya geçilmiştir. Daha sonra Olasılıksal Evrim yöntemi uygulanmıştır. Olasılıksal Evrim Kuramı'nın ilk olarak birinci kereden türevli denklemlerin içerdiği işlevlerin tek değişkene bağlı olanlarına uygulamalı işlemler yapılmıştır. Ancak Van der Pol denklemi ikinci kerte-

den tek değişkenli olduğu için ya birinci kerteye indirgenecekti ya da ikinci kereden olan yapısı korunarak devam edilecekti. İlk yol daha uygulayıcıl olduğundan birinci kerteli yapı tercih edilmiştir. Kuram şu anda üçten daha çok değişkene sahip denklemlere bile uygulamaya uygundur. Bu çerçevede yazılan makaleler, bildiriler bu savı desteklemektedir.

Olasılıksal Evrim yöntemi bağlamında Van der Pol denklemi için belirlenen Evrim Dizeyi sonsuz öğeli olduğundan belirli bir düzeyde kesme yapılmış olup kesme yaklaştıranları belirlenmiştir. Bu kesme yaklaştıranlarının yakınsaklığı ve yine bu bağlamda niteliği araştırılmıştır. Belirlenen yanılığ düzeyine bağlı olarak yakınsaklık niteliğinin değerlendirilmesi söz konusudur. Yakınsaklık için bir üst sınır belirleyerek somut koşullar ortaya çıkarılmıştır.

Belirlenen kesme yaklaştıranları ile kesin çözümlerin karşılaştırmaları 4 ayrı çizimde verilmiştir. Bu çizimlerden ilk olarak göze çarpan ise yakınsaklık tekerinde çalışıldığı takdirde çok küçük kesme boyutlarında dahi yakınsamanın çok iyi olduğu, hatta kesin çözümlerle örtüşebilecek kadar yakınsamalar gözükmemektedir. Burada iki adet kesme yaklaştırıcı belirlenimine gidilmiş olup daha fazla kesme yaklaştıranları hakkında yorum yapabilecek kadar sonuç elde edilmiştir. $x_2(t)$ kesme yaklaştırıcısının niteliği $x_1(t)$ kesme yaklaştırıcısının niteliği düzeyinde olmadığı gözlenmiştir, bu beklenen bir sonuçtur. Yakınsaklık tekerinin özeğine yaklaşıldıkça yakınsamanın iyileştiği anlaşılmaktadır.

Son olarak kesme yaklaştıranlarının belirleniminde yalnızca Evrim Dizeyi'nin rolü değil başlangıç değerlerinin de ne kadar etkili olduğunu gösterebilmek için çözümcül uzanım konusuna değinilmiştir. Betimleyici işlevin sıfırlandığı nokta sayısına göre yakınsaklığın değişkenliği gözlenmiştir. Eğer betimleyici işlevin tek bir noktada sıfırı varsa yakınsama tüm başlangıç verileri için geçerlidir. Birden fazla sıfır olması durumunda yakınsaklık yalnızca, sıfırları merkez kabul eden ve yarıçapları bir diğer sıfıra dek uzanan tekerlerin oluşturduğu bölgelerde geçerli olduğu gösterilmiştir.

Bu çalışma sonunda söyleyebiliriz ki, şimdiye dek ortaya konan çalışmalara koşut olarak hem kuramsal hem de uygulamı yönünden önu oldukça açık olan Olasılıksal Evrim Yaklaşım yönteminin yalnızca bir ayağını oluşturan bu çalışma, kuramın savını doğrular nitelikte sonuçlar ortaya koymuştur. Yöntemin uygulanabilirliğini somut adımlar atarak göstermiştir. Var olan sorunları ortadan kaldırmaya yönelik bulguları belirtmiş ve iyileştirme sağlamıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Demiralp, M., Demiralp, E., Hernandez-Garcia, L., (2012). A probabilistic foundation for dynamical systems: theoretical background and mathematical formulation. *J. Math. Chem.*, **58**, pp 850-869.
- [2] Demiralp, E., Demiralp, M., Hernandez-Garcia, L. (2012). A probabilistic foundation for dynamical systems: phenomenological reasoning and principal characteristics of probabilistic evolution. *J. Math. Chem.*, **58**, pp 870-880.
- [3] Birkhoff, G., Rota, G. C., (1984). Ordinary Differential Equations, Fourth Edition, *Wiley*.
- [4] Tenenbaum, M., Pollard H., (1985). Ordinary Differential Equations, *Dover*.
- [5] Boyce, W. E., DiPrima, R. C., (1996). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. 6th Edition, *Wiley*.
- [6] Butcher, J. C., (2003). Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. *New York, John Wiley-Sons* ISBN: 978-0-471-96758-3.
- [7] Store, J., Bulirsch, R., (2002). Introduction to Numerical Analysis. (3rd ed.), *Berlin, New York, Springer-Verlag* ISBN: 978-0-521-88068-8.
- [8] Demiralp, M., Demiralp, E., (2012). A Contemporary Linear Representation Theory for Ordinary Differential Equations: Probabilistic Evolutions and Related Approximants for Unidimensional Autonomous Systems. *J. Math. Chem.* DOI: 10.1007/s10910-012-0070-2.
- [9] Demiralp, M., Demiralp, E., (2012). A Contemporary Linear Representation Theory for Ordinary Differential Equations: Multilinear Algebra in Folded Arrays

- (Folarrs) Perspective and Its Use in Multidimensional Case. *J. Math. Chem.* DOI: 10.1007/s10910-012-0064-0.
- [10] Demiralp, M., (2012). A Probabilistic Evolution Approach Trilogy, Part 1: Quantum Expectation Value Evolutions, Block Triangularity and Conicality, Truncation Approximants and Their Convergence. *Journal of Mathematical Chemistry* DOI: 10.1007/s10910-012-0079-6.
- [11] Demiralp, M., Baykara, N.A., (2012). A Probabilistic Evolution Approach Trilogy, Part 2: Spectral Issues For Block Triangular Evolution Matrix, Singularities, Space Extension. *Journal of Mathematical Chemistry* DOI: 10.1007/s10910-012-0080-0.
- [12] Demiralp, M., Tunga, B., (2012). A Probabilistic Evolution Approach Trilogy, Part 3: Temporal Variation of State Variable Expectation Values From Liouville Equation Perspective. *Journal of Mathematical Chemistry* DOI: 10.1007/s10910-012-0081-z.
- [13] Demiralp, M., (2012). Quantum Expected Value Dynamics in Probabilistic Evolution Perspective. *International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, **2**, pp 449-459.
- [14] Baykara, N.A., Demiralp, M., (2012). Taking Care of the Singularities in the Probabilistic Evolutionary Quantum Expectation Value Dynamics. *International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering*, **1**, pp 153-156.
- [15] Tunga, B., Demiralp, M., (2012). Probabilistic Evolution of the State Variable Expected Values in Liouville Equation Perspective, for a Many Particle System Interacting Via Elastic Forces. *International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering* **3**, pp 1186-1197.

- [16] Hunutlu, F., Baykara, N. A. and Demiralp, M., (2012). Conicalization of the Probabilistic Evolutions for the Ordinary and Forced Van der Pol Equation Under Given Initial Conditions. *MATHEMATICAL MODELS and METHODS in APPLIED SCIENCES Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry (MCBC'12), 13-15 Haziran, Yaş, Romanya*, pp 39-44.
- [17] Hunutlu, F., Baykara, N. A. and Demiralp, M., (2012). Truncation Approximants to Probabilistic Evolution for ODEs Having Two Diagonal Banded Evolution Matrices Under Initial Conditions: Simple Case. *Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2012, 2-5 Temmuz, Murcia, İspanya*, **2**, pp 720-731 ISBN: 978-84-615-5392-1.
- [18] Hunutlu, F., Baykara, N. A. and Demiralp, M., (2012). Truncation Approximants and Their Qualities in the Probabilistic Evolution of Van der Pol Equation Under Initial Conditions. *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation, ISTASC12, 21-23 Ağustos, İstanbul, Türkiye*, pp 256-261 ISBN: 978-1-61804-115-9.
- [19] Hunutlu, F., Baykara, N. A. and Demiralp, M., (2012). Truncation Approximants to Probabilistic Evolution of ODEs Under Initial Conditions via Bidiagonal Evolution Matrices: Simple Case. *International Journal of Computer Mathematics. (İnceleme Altında)*.
- [20] Hunutlu, F., Baykara, N. A., (2012). Unidirectional Semi-Analytic Continuation in the Probabilistic Evolution Approach to Van der Pol Equation. *Proceedings of the 10th International Conference of Numerical Analysis and Applied Mat-*

hematics, *ICNAAM 2012, 19-25 Eylül, Kos, Yunanistan*, pp 2011-2014 DOI: 10.1063/1.4756583.

- [21] Bodur, D., Demiralp, M., (2012). Probabilistic Evolution Approach to First Order Explicit Ordinary Differential Equations for Two Unknown Case. *Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation, ISTASC12, 21-23 Ağustos, İstanbul, Türkiye*, pp 203-207 ISBN: 978-1-61804-115-9.
- [22] Hairer, E., Nørsett, S.P., Wanner, G., (1993). Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems. *Berlin, New York, Springer-Verlag* ISBN: 978-3-540-56670-0.
- [23] Hairer, E., Wanner, G., (1996). Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems. (*2nd ed.*), *Berlin, New York, Springer-Verlag* ISBN: 978-3-540-60452-5.
- [24] Guckenheimer, J., Hoffman, K., Weckesser, W., (2003). The Forced van der Pol Equation I: The Slow Flow and Its Bifurcations. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, **2(1)**, pp 1-35.
- [25] Bold, K., Edwards, C., Guckenheimer, J., Guharay, S., Hoffman, K., Hubbard, J., Oliva, R., Weckesser, W., (2003). The Forced van der Pol Equation II: Canards in the Reduced System. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*, **2(4)**, pp 570-608.
- [26] Ginoux, J.M., Letellier, C., (2012). Van der Pol and the history of relaxation oscillations: Toward the emergence of a concept. *Chaos*, **22(2)** DOI: 10.1063/1.3670008.

- [27] Vigo-Aguiar, J., Ferrándiz, J. M., (1998). VSVO Multistep Formulae Adapted to Perturbed Second-Order Differential Equations. *Appl. Math. Lett.*, **11(3)**, pp 83-87.
- [28] Yuan, H., Zhao, J., Xu, Y., (2012). Some Stability and Convergence of Additive Runge-Kutta Methods for Delay Differential Equations with Many Delays. *Journal of Applied Mathematics* (Article ID 456814).
- [29] Demiralp, M. and Rabitz, H., (1993). Lie Algebraic Factorization of Multivariable Evolution Operators: Definition and the Solution of the Canonical Problem. *Int. J. Eng. Sci.*, **31**, pp 307.
- [30] Demiralp, M. and Rabitz, H., (1993). Lie Algebraic Factorization of Multivariable Evolution Operators: Convergence Theorems for the Canonical Case. *Int. J. Eng. Sci.*, **37**, pp 333.
- [31] Kurşunlu, A., Yaman, İ., and Demiralp, M., (2004). A Space Extension Reductive Approach to the Solution of Eigenvalue Problems: Anharmonic Oscillator. *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics (ICNAAM 2004)*, 10-15 Eylül, Chalkis, Yunanistan, Wiley, pp 224-227.
- [32] Altınbaşak, S. Ü. and Demiralp, M., (2007). Transformation of Ordinary Differential Equations into Okubo Universal Form with Space Extension and its Truncating Approximations. *Numerical Analysis and Applied Mathematics, AIP Proceedings, International Conference on Numerical Analysis and Applied Mathematics, (ICNAAM2007)*, 16-20 Eylül, Corfu, Yunanistan, pp. 562-565.
- [33] Altınbaşak, S. Ü. and Demiralp, M., (2007). Conversion of Matrix ODEs to Certain Universal and Easily Handleable Forms Via Space Extension. *Applied Mathema-*

tics for Science and Engineering, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS) Conference on Applied Mathematics (MATH'07), 29-31 Aralık, Cairo, Mısır, pp. 43-47.

- [34] Altınbaşak, S. Ü. and Demiralp, M., (2008). Conversion of PDEs to Certain Universal and Easily Handleable Forms Via Space Extension. *Multivariate Analysis and Its Application for Science and Engineering, World Scientific and Engineering Academy and Society (WSEAS) Conference on Multivariate Analysis and Its Application for Science and Engineering (MAASE'08), 29-31 Mayıs, İSTANBUL, Türkiye*, pp. 179-182.
- [35] Altınbaşak, S. Ü., (2011). The Conversion of Ordinary Differential Equations to a Universal Form via Space Extension and Truncation Approximations. *Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.*
- [36] Kolda, G. T. and Bader, W. B., (2009). Tensor Decompositions and Applications. *SIAM Review*, **51(3)**, pp 455-500 DOI: 10.1137/07070111X.
- [37] Dunlavy, M. D., Kolda, G. T. and Acar, E., (2011). Temporal Link Prediction Using Matrix and Tensor Factorizations. *ACM Transactions on Knowledge Discovery from Data*, **5(2)** Article 10, DOI: 10.1145/1921632.1921636.
- [38] Acar, E., Dunlavy, M. D. and Kolda, G. T., (2011). A Scalable Optimization Approach for Fitting Canonical Tensor Decompositions. *Journal of Chemometrics*, **25(2)**, pp 67-86 DOI: 10.1002/cem.1335.
- [39] Ai, D., Duan, G., Han, X and Chen, Y. W., (2011). Generalized N-dimensional Independent Component Analysis and Its Application to Multiple Feature Selection and Fusion for Image Classification. *Neurocomputing*, **103**, pp 186-197 DOI: 10.1016/j.neucom.2012.09.020.

- [40] De Lathauwer L., (2008). Decompositions of a Higher-Order Tensor in Block Terms - Part I: Lemmas for Partitioned Matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Special Issue on Tensor Decompositions and Applications*, **30(3)**, pp 1022-1032 DOI: 10.1137/060661685.
- [41] De Lathauwer L., (2008). Decompositions of a Higher-Order Tensor in Block Terms - Part II: Definitions and Uniqueness. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Special Issue on Tensor Decompositions and Applications*, **30(3)**, pp 1033-1066 DOI: 10.1137/070690729.
- [42] De Lathauwer L., (2008). Decompositions of a Higher-Order Tensor in Block Terms - Part III: Alternating Least Squares Algorithms. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, Special Issue on Tensor Decompositions and Applications*, **30(3)**, pp 1067-1083 DOI: 10.1137/070690730.
- [43] Tuna, S., Baykara, N. A. and Demiralp, M., (2011). Weighted Singular Value Decomposition for Folded Matrices. *Proceedings of the 2nd International Conference on Applied Informatics and Computing Theory (AICT'11), IEEEAM, Prag, Çek Cumhuriyeti, 26-28 Eylül*, pp 70-75 ISBN: 978-1-61804-034-3.
- [44] Demiralp, M., (2005). Convergence issues in the Gaussian weighted multidimensional fluctuation expansion for the univariate numerical integration. *WSEAS Transactions on Mathematics*, **4**, pp 486-492.
- [45] Demiralp, M., (2009). Fluctuationlessness theorem to approximate univariate functions' matrix representations. *WSEAS Transactions on Mathematics*, **8(6)**, pp 258-267.

- [46] Altay, N. and Demiralp, M., (2009). Fluctuationlessness theorem and its application to boundary value problems of ODEs. *WSEAS Transactions on Mathematics*, **8(5)**, pp 199-204.
- [47] Demiralp, M., (2010). No Fluctuation Approximation in Any Desired Precision for Univariate Matrix Representations. *J. Math. Chem.*, **47(1)**, pp 99-110 DOI: 10.1007/s10910-009-9533-5.
- [48] Altay, N. and Demiralp, M., (2010). Numerical Solution of Ordinary Differential Equations by Fluctuationlessness Theorem. *J. Math. Chem.*, **47(4)**, pp 1323-1344 DOI: 10.1007/s10910-009-9657-7.
- [49] Tunga, B., (2010). Fluctuationless Matrix Representation Based Weight Optimisation in High Dimensional Model Representation. *Doktora Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi Bilişim Enstitüsü, İstanbul, Türkiye.*

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Fatih Hunutlu
Doğum yeri ve Tarihi : Samsun / 06.05.1987
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : fatihhunutlu@gmail.com

Öğrenim Durumu

Derece	Bölüm/Program	Üniversite/Lise	Mezuniyet Yılı
Lise	Fen-Matematik	Y.D.A. Ayvalık Lisesi	2005
Üniversite	Matematik	İstanbul Üniversitesi	2010

İş Deneyimi

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2009-2012	TEB A.Ş.	Operasyon Yetkilisi

Bilimsel Eserler:

1. F. Hunutlu, N. A. Baykara, and M. Demiralp. Conicalization of the Probabilistic Evolutions for the Ordinary and Forced Van der Pol Equation Under Given Initial Conditions. Proceedings of the 13th WSEAS International Conference on Mathematics and Computers in Biology and Chemistry (MCBC '12), p. 39-44 ISBN: 978-1-61804-098-5.
2. F. Hunutlu, N. A. Baykara, and M. Demiralp. Truncation Approximants to Probabilistic Evolution for ODEs Having Two Diagonal Banded Evolution Matrices Under Initial Conditions: Simple Case. Proceedings of the 12th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering, CMMSE 2012 v:2 p.720-731 ISBN: 978-84-615-5392-1.

3. F. Hunutlu, N. A. Baykara, and M. Demiralp. Truncation Approximants and Their Qualities in the Probabilistic Evolution of Van der Pol Equation Under Initial Conditions. Proceedings of the 12th WSEAS International Conference on Systems Theory and Scientific Computation. p.256-261 ISBN: 978-1-61804-115-9.
4. F. Hunutlu and N. A. Baykara. Unidirectional Semi-Analytic Continuation in the Probabilistic Evolution Approach to Van der Pol Equation. Proceedings of the International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2012 (ICNAAM-2012). p.2011-2014 ISBN: 978-0-7354-1091-6.
5. F. Hunutlu, N. A. Baykara, and M. Demiralp. Truncation Approximants to Probabilistic Evolution of ODEs Under Initial Conditions via Bidiagonal Evolution Matrices: Simple Case. International Journal of Computer Mathematics.
(*İnceleme Altında*).

Bilimsel Kuruluşlara Üyelikler

1. Bilişim Enstitüsü Bilgisayım Bilimi ve Yöntemleri Topluluğu (BEBBYT) 2011-