JORDAN TÜREVLİ ASAL HALKALAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülten EROL
(201592171418)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI

SİVAS
ARALIK, 2018

T.C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

JORDAN TÜREVLİ ASAL HALKALAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülten EROL
(201592171418)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI

SİVAS
ARALIK, 2018

Gülten EROL'un hazırladığı ve "**JORDAN TÜREVLİ ASAL HALKALAR ÜZERİNE**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı	**Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Hasret DURNA** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Adem ŞAHİN** Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. İsmail ÇELİK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez,Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

ETİK

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)’nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

11.01.2019

Gülten EROL

TEŞEKKÜR

Bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren ve tezin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI'na; hayatımın her anında en büyük destekçim olan eşime ve değerli aileme çok teşekkür ederim.

ÖZET

JORDAN TÜREVLİ ASAL HALKALAR ÜZERİNE

Gülten EROL

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI

2018, 34+x sayfa

Asal halkalarda Jordan türevler konusunu araştıran bu tez iki bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez konusuyla ilgili genel tanım, teorem ve kavramlardan bahsedilerek örnekler verilmiştir. İkinci bölümde ise V. De Filippis ve arkadaşlarının 2015 yılında genelleştirilmiş Jordan yarı türevler için yapmış oldukları bir çalışmadan hareketle, "R karakteristiği ikiden farklı asal halka ve U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ ve $U \nsubseteq Z$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali olsun. Eğer (f, d, g) üçlüsü her $u \in U$ için sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş Jordan yarı türev ise bu durumda (f, d, g) genelleştirilmiş yarı türevdir" teoremi ispatlanmıştır.

Anahtar kelimeler: Asal Halka, Türev, Yarı Türev, Genelleştirilmiş Yarı Türev.

ABSTRACT

ON PRIME RINGS WITH JORDAN DERIVATIONS

Gülten EROL

Master of Science Thesis
Department of Mathematics
Supervisor: Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI
2018, 34+x pages

This thesis which investigates the subject of Jordan derivatives in prime rings consists of two parts. In the first part, general definitions, theorems, concepts related to the thesis topic and examples are given. In the second part inspired by the paper of V. De Filippis and his colleagues in 2015 about of generalized Jordan semiderivatives "Let R be a prime ring with characteristic different from two and U a noncentral Lie ideal of R such that $u^2 \in U$ for all $u \in U$. If R admits a nonzero generalized Jordan semiderivation (f, d) associated with d and g, then R admits a nonzero generalized semiderivation (f, d) associated with d and g." The theorem has proven.

Key Words: Prime Ring, Derivation, Semiderivation, Generalized Semiderivation.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\in$	:	Elemanı
$\notin$	:	Elemanı değil
$\forall$	:	Her
$\subseteq$	:	Alt küme veya eşit
$=$	:	Eşit
$\neq$	:	Eşit değil
$-$	:	Fark
$[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}]$	:	x, y elemanlarının komütatör çarpımı
$\emptyset$	:	Boş küme
$(\mathbf{0})$	:	Sıfır kümesi
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tam sayılar kümesi
$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g})$	:	g ile belirlenmiş f yarı türevi
$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{d})$	:	d ile belirlenmiş f genelleştirilmiş türevi
$(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{g})$	:	d ve g ile belirlenmiş f genelleştirilmiş yarı türevi

GİRİŞ

Asal halkaların türevleri üzerine ilk çalışma 1957 yılında E. C. Posner tarafından yapılmıştır. Posner bu çalışmada halkalar üzerinde türev tanımını vererek türev yardımıyla asal halkaların değişmeli olma durumunun araştırılabileceğini göstermiş ve bu konudaki çalışmalara öncülük etmiştir. Daha sonra halka üzerinde farklı türev tanımları yapılmış, asal ve yarı-asal halkalarda bu türevlerin sağladığı özellikler pek çok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Literatürde verilen Lie ideal tanımı ve her idealin bir Lie ideal olmasından hareketle, türevli asal halkaların Lie idealleri üzerinde yapılan çalışmalarla daha genel sonuçlara ulaşılmıştır. Öte yandan yapılan farklı türev tanımlarıyla da halkanın değişmeli olma koşulları araştırılmıştır.

İlk kez 1983 yılında J. Bergen, halkalarda yarı türev tanımını vermiş ve asal halkaların yarı türevlerinin cebirsel özelliklerini incelemiştir. Bu çalışmadan sonra asal ve yarı asal halkalarda türevler ile ilgili bulunan sonuçlar yarı türevler için araştırılmıştır. 1984 yılında J. C. Chang makalesinde türevle ilgili değişmeli olma koşullarından bazılarının yarı türevler için doğru olduğunu göstermiştir. 1988 yılında ise H. E. Bell ve W. S. Martindale bu koşulların doğruluğunu yarı türevler ve halkanın sıfırdan farklı idealleri için araştırmışlardır.

1957 yılında I.N. Herstein tarafından halkalarda Jordan türev tanımı ilk kez verilmiştir. Herstein her türevin bir Jordan türev olması fikrinden yola çıkarak bunun tersinin ne zaman sağlanacağını araştırmış ve 2-torsion free asal halkalarda her Jordan türevin bir türev olduğunu ispatlamıştır. Bu sonuçla ilgili olarak asal/ yarı asal halkaların farklı türevleri veya farklı alt kümeleri için literatürde pek çok çalışma yapılmıştır. 2015 yılında ise V. Filippis ve arkadaşları tarafından genelleştirilmiş yarı türev tanımlanmıştır. Böylece günümüze kadar türevle ilgili elde edilen sonuçların bir kısmının bu yeni türev tanımı için doğru olduğu gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasının amacı, Herstein'in Jordan türevlerle ilgili elde etmiş olduğu sonucunun, bir asal halkanın her $u \in U$ için $u^2 \in U$ şartını sağlayan bir U Lie ideali ve g epimorfizması, d yarı türevi ile belirlenen bir f genelleştirilmiş yarı türevi için sağlandığını göstermektir.

1.BÖLÜM

GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tezde kullanılan bazı temel tanım, teorem ve kavramlar verilmiştir.

Tanım 1.1: G boş olmayan bir küme ve $*$ G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun.

$(G1)$ Her $a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$ dir,

$(G2)$ Her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır,

$(G3)$ Her $a \in G$ için $a * x = x * a = e$ olacak şekilde bir $x \in G$ vardır,

$(G4)$ Her $a, b \in G$ için $a * b = b * a$ dır,

özelliklerinden yalnız $(G1)$ sağlanıyorsa G kümesine $*$ ikili işlemi altında bir **yarı grup**, $(G1)$ ve $(G2)$ koşulları sağlanıyorsa G kümesine $*$ ikili işlemi altında bir **monoid**, $(G1)$, $(G2)$ ve $(G3)$ koşulları sağlanıyorsa G kümesine $*$ ikili işlemi altında bir **grup** denir. $(G,*)$ gösterimi ile G kümesinin üzerinde tanımlı olan $*$ işlemi ile bir grup olduğu ifade edilir. Eğer bir G yarı grubu (monoidi, grubu) $(G4)$ özelliğini sağlıyorsa G ye $*$ ikili işlemine göre **değişmeli yarı grup** (değişmeli monoid, değişmeli grup) denir.

Tanım 1.2: H kümesi G grubunun $*$ ikili işlemine göre kapalı boş olmayan bir alt kümesi olsun. H kümesi $*$ işlemine göre bir grup oluyorsa H alt kümesine G grubunun bir **alt grubu** denir ve $H < G$ ile gösterilir.

Tanım 1.3: $H < G$ olsun. $H \neq G$ ve $H \neq \{e_G\}$ ise H alt grubuna G grubunun **öz alt grubu** denir.

Uyarı 1.4: $(G,*)$ bir grup ve boş kümeden farklı H, G grubunun bir alt kümesi olsun. H kümesinin bir alt grup olması için gerek ve yeter koşul her $a, b \in H$ için $a * b \in H$ ve her $a \in H$ için $a^{-1} \in H$ koşullarının sağlanmasıdır.

Tanım 1.5: Boş olmayan bir R kümesi üzerinde toplama ve çarpma ikili işlemleri verilsin.

i. $(R, +)$ değişmeli grup,

ii. Her $a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$,

iii. Her $a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$ dir.

Yukarıdaki koşulları sağlayan R kümesine **halka** denir ve $(R, +, .)$ ile gösterilir. Eğer her $a, b \in R$ için $ab = ba$ oluyorsa R halkasına **değişmeli (komütatif) halka** denir. Eğer her $a \in R$ için $a. 1_R = 1_R. a$ olacak şekilde $1_R \in R$ elemanı varsa R halkasına **birimli halka** denir.

Tanım 1.6: R bir halka ve S, R nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer S kümesi R deki toplama ve çarpma işlemleri altında bir halka ise S ye R nin **alt halkası** denir.

Tanım 1.7: R bir halka ve I, R nin bir alt halkası olsun.

i. Her $r \in R$ ve $a \in I$ için $ra \in I$ oluyorsa I ya R halkasının **sol ideali** denir.

ii. Her $r \in R$ ve $a \in I$ için $ar \in I$ oluyorsa I ya R halkasının **sağ ideali** denir.

iii. I ideali R nin hem sol, hem de sağ ideali ise I ya R halkasının **ideali** denir.

Tanım 1.8: R bir halka olmak üzere A, B, P kümeleri R nin idealleri ve $P \neq R$ olsun. Eğer $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa P idealine R halkasının **asal ideali** denir.

Tanım 1.9: Sıfır ideali asal ideal olan halkaya **asal halka** denir.

Tanım 1.10: R bir halka ve I kümesi R nin bir ideali olsun. Eğer $I^n = (0)$ olacak biçimde $\exists n \in Z^+$ varsa I idealine R nin **nilpotent ideali** denir.

Tanım 1.11: R bir halka olmak üzere A ve Q kümeleri R nin idealleri ve $Q \neq R$ olsun. Eğer $A^2 \subseteq Q$ olduğunda $A \subseteq Q$ oluyorsa Q idealine R halkasının **yarı asal ideali** denir.

Tanım 1.12: Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya **yarı asal halka** denir.

Tanım 1.13: R bir halka ve $m \neq 0$ bir tamsayı olsun. Her $a \in R$ için $ma = 0$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa R halkasına ***m*-torsion free halka** denir.

Tanım 1.14: R bir halka olsun. $\forall a \in R$ için $na = 0$ eşitliğini sağlayan n pozitif tamsayılarının en küçüğüne R halkasının **karakteristiği** denir ve $charR = n$ ile gösterilir. Eğer böyle bir n sayısı yok ise R halkasının karakteristiği sıfırdır denir.

Tanım 1.15: R bir halka, X, R halkasının boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun.

$$C_R(X) = \{a \in R : xa = ax, \forall x \in X\}$$

kümesine X kümesinin R halkasındaki **merkezleştiricisi** denir.

Tanım1.16: R bir halka olsun.

$$Z(R) = \{a \in R : xa = ax, \forall x \in R\}$$

kümesine R halkasının **merkezi** denir. R halkasının merkezi, R nin bir alt halkasıdır.

Tanım 1.17: R bir halka olsun. $x, y \in R$ için $xy - yx$ ifadesine x ile y elemanlarının **komütatör çarpımı** denir ve $[x, y]$ ile gösterilir.

Önerme 1.18: $\forall x, y, z \in R$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i. $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$

ii. $[x, yz] = y[x, z] + [x, y]z$

iii. $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$

Ayrıca $\big[[x, y], z\big] + \big[[y, z], x\big] + \big[[z, x], y\big] = 0$ eşitliğine **Jacobi eşitliği** denir.

İspat:

i. $[x + y, z] = (x + y)z - z(x + y) = xz + yz - zx - zy = xz - zx + yz - zy$

$= [x, z] + [y, z]$

dir.

ii.$[x, yz] = xyz - yzx = xyz - yzx + yxz - yxz = xyz - yxz + yxz - yzx$

$= (xy - yx)z + y(xz - zx) \;= y[x, z] + [x, y]z$

dir.

iii. $[xy,z] = xyz - zxy = xyz - zxy + xzy - xzy = xyz - xzy + xzy - zxy$

$= x(yz - zy) + (xz - zx)y = x[y,z] + [x,z]y$

dir.

Ayrıca

$$\begin{aligned}
&\big[[x,y],z\big] + \big[[y,z],x\big] + \big[[z,x],y\big] \\
&= [(xy - yx),z] + [(yz - zy),x] + [(zx - xz),y] \\
&= (xy - yx)z - z(xy - yx) \\
&+(yz - zy)x - x(yz - zy) \\
&+(zx - xz)y - y(zx - xz) \\
&= xyz - yxz - zxy + zyx \\
&+yzx - zyx - xyz + xzy \\
&+zxy - xzy - yzx + yxz \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur.

Tanım 1.19: R bir halka, $d: R \to R$ tanımlı bir dönüşüm olsun. Eğer $\forall x, y \in R$ için

i. $d(x + y) = d(x) + d(y)$
ii. $d(xy) = d(x)y + xd(y)$

oluyorsa d ye R halkasında bir **türev** denir (Posner, 1957).

Örnek 1.20: $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z} \right\}$ halkası verilsin. $d: R \to R$,

$d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ile tanımlı dönüşüm, R halkası üzerinde bir türevdir.

Çözüm:

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$ alalım.

$d(X + Y) = d(X) + d(Y)$ mi?

$$d(X+Y) = d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = d\left(\begin{pmatrix} a+x & b+y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & a+x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d(X) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$d(Y) = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$d(X) + d(Y) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d(X+Y) = d(X) + d(Y)$$

dir.

$$d(XY) = d(X)Y + Xd(Y)$$

mi?

$$d(XY) = d\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = d\left(\begin{pmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & ax \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dır.

$$d(X)Y = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Xd(Y) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ax \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d(XY) = d(X)Y + Xd(Y)$$

dir.

Tanım 1.21: R bir halka, $d: R \to R$ tanımlı bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in R$ için

i. $d(x+y) = d(x) + d(y)$
ii. $d(x^2) = d(x)x + xd(x)$

oluyorsa d ye R halkasında bir **Jordan türev** denir (Herstein, 1957).

Not 1.22: Her türev bir Jordan türevdir. Ancak tersi doğru değildir.

İspat: R bir halka, $d: R \rightarrow R$ tanımlı bir türev olsun. Bu durumda her $x, y \in R$ için

i. $d(x+y) = d(x) + d(y)$
ii. $d(xy) = d(x)y + xd(y)$

sağlanır. Şimdi d Jordan türev mi?

d türev olduğu için (i) koşulu zaten sağlanır. Ayrıca (ii) koşulunda $y = x$ yazılırsa

$$d(x^2) = d(x)x + xd(x)$$

elde edilir. Böylece her türev bir Jordan türevdir.

Tanım 1.23: $(A, +, \cdot)$ ve $(B, \oplus, \odot)$ iki halka olmak üzere bir $f: A \rightarrow B$ fonksiyonu $\forall x, y \in R$ için

i. $f(x+y) = f(x) \oplus f(y)$
ii. $f(x \cdot y) = f(x) \odot f(y)$

koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonuna bir **halka homomorfizması** denir.

Tanım 1.24: R bir halka ve $g: R \rightarrow R$ herhangi bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in R$ için

i. $f(xy) = f(x)g(y) + xf(y) = f(x)y + g(x)f(y)$

ii. $f(g(x)) = g(f(x))$

koşullarını sağlayan $f: R \rightarrow R$ toplamsal dönüşümüne R halkasında g ile belirlenmiş bir **yarı türev** denir (Bergen, 1983).

Uyarı 1.25: Her türev bir yarı türevdir. Ancak tersi doğru değildir.

İspat: R bir halka, $d: R \rightarrow R$ bir türev olsun bu durumda her $x, y \in R$ için

i. $d(x+y) = d(x) + d(y)$
ii. $d(xy) = d(x)y + xd(y)$

koşulları sağlanır. $g = I$ birim dönüşüm olarak düşünülerek (d, I) bir yarı türevdir.

Örnek 1.26: g , R halkasının birimden farklı bir homomorfizması ve I birim fonksiyon olmak üzere $f = g - I$ dönüşümü bir yarı türevdir, fakat türev değildir.

Çözüm: $f = g - I$ alalım.

i. $f = g - I$ dönüşümünün toplamsal olduğu açıktır.

ii. $f(xy) = (g - I)(xy) = (g - I)(x)g(y) + x(g - I)(y)$ mi?

$$(g - I)(xy) = g(xy) - I(xy) = g(x)g(y) - xy \quad [1.1]$$

olur. Öte yandan

$$f(xy) = (g - I)(x)g(y) + x(g - I)(y)$$
$$= g(x)g(y) - I(x)g(y) + xg(y) - xI(y)$$
$$= g(x)g(y) - xg(y) + xg(y) - xy$$
$$= g(x)g(y) - xy \quad [1.2]$$

bulunur. Böylece [1.1]=[1.2] olduğu için

$$f(xy) = f(x)g(y) + xf(y)$$

elde edilir.

iii. $(g - I)(g(x)) = g((g - I)(x))$ mi?

$$(g - I)\big(g(x)\big) = g\big(g(x)\big) - I\big(g(x)\big) = g\big(g(x)\big) - g(x) \quad [1.3]$$
$$g\big((g - I)(x)\big) = g(g(x) - I(x)) = g(g(x) - x) = g\big(g(x)\big) - g(x) \quad [1.4]$$

elde edilir ve [1.3]=[1.4] olur.

Tanım 1.27: R bir halka, $g: R \to R$ herhangi bir dönüşüm olsun. $\forall x \in R$ için

i. $f(x^2) = f(x)g(x) + xf(x) = f(x)x + g(x)f(x)$

ii. $f(g(x)) = g(f(x))$

koşullarını sağlayan $f: R \to R$ toplamsal dönüşümüne R halkasında g ile belirlenmiş bir **Jordan yarı türev** denir.

Uyarı 1.28: Her yarı türev bir Jordan yarı türevdir.

İspat: R bir halka, $f: R \to R$ toplamsal bir dönüşümü g fonksiyonu ile belirlenmiş yarı türev olsun. Bu durumda $\forall x, y \in R$ için

i. $f(x + y) = f(x) + f(y)$

ii. $f(xy) = f(x)g(y) + xf(y) = f(x)y + g(x)f(y)$

iii. $f(g(x)) = g(f(x))$

koşulları sağlanır. Şimdi (f, g) Jordan yarı türev mi?

f yarı türev olduğu için (i) koşulu zaten sağlanır. Ayrıca (ii) koşulunda $y = x$ yazılırsa

$$f(x^2) = f(x)g(x) + xf(x) = f(x)x + g(x)f(x)$$

elde edilir. Böylece her yarı türev bir Jordan yarı türevdir.

Tanım 1.29: R bir halka, $f: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. Eğer her $x, y \in R$ için $f(xy) = f(x)y + xd(y)$
koşulunu sağlayan bir $d: R \to R$ türevi varsa f ye d ile belirlenmiş **genelleştirilmiş türev** denir (Bresar, 1991).

Uyarı 1.30: Her türev bir genelleştirilmiş türevdir. Ancak tersi doğru değildir.

İspat: $d: R \to R$ bir türev olsun. d genelleştirilmiş türev mi?

d türev olduğundan

i. $d(x + y) = d(x) + d(y)$,

ii.$d(xy) = d(x)y + xd(y)$

koşulları sağlanır. Bu durumda d dönüşümü yine d ile belirlenmiş genelleştirilmiş türev olur.

Örnek 1.31: $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere R=$\left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi matrisler halkası üzerinde bilinen işlemler ile bir halkadır. $f, d: R \to R$, $f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a + b & 0 \end{pmatrix}$ ve $d\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$ olarak tanımlansın. Bu durumda f dönüşümü d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türevdir. Ancak bir türev değildir.

Çözüm: $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} m & 0 \\ n & k \end{pmatrix} \in R$ alalım.

$f(X + Y) = f(X) + f(Y)$ mi?

$$f(X + Y) = f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m & 0 \\ n & k \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} a + m & 0 \\ b + n & c + k \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a + m + b + n & 0 \end{pmatrix} \qquad [1.5]$$

olur. Öte yandan

$$f(X)+f(Y)=f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\right)+f\left(\begin{pmatrix} m & 0 \\ n & k \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+b & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m+n & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+b+m+n & 0 \end{pmatrix} \qquad [1.6]$$

[1.5]=[1.6] olduğu için f toplamsal dönüşümdür.

$f(XY)=f(X)Y+Xd(Y)$ mi?

$$f(XY)=f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ n & k \end{pmatrix}\right)$$

$$=f\left(\begin{pmatrix} am & 0 \\ bm+cn & ck \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ am+bm+cn & 0 \end{pmatrix} \qquad [1.7]$$

bulunur. Öte yandan

$$f(X)Y+Xd(Y)=f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} m & 0 \\ n & k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}d\left(\begin{pmatrix} m & 0 \\ n & k \end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ n & k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (a+b)m & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ cn & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ am+bm+cn & 0 \end{pmatrix} \qquad [1.8]$$

[1.7]=[1.8] olduğu için

$$f(XY)=f(X)Y+Xd(Y)$$

sağlanır. Yani f bir genelleştirilmiş türevdir. Ancak

$$f(XY)=f\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ n & k \end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ am+bm+cn & 0 \end{pmatrix}$$

ve

$$f(X)Y+Xf(Y)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a+b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 0 \\ n & k \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ m+n & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olduğundan

$$f(XY) = f(X)Y + Xf(Y)$$

sağlanmaz. Bu durumda f bir türev değildir.

Tanım 1.32: R bir halka, $f: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in R$ için

$$f(x^2) = f(x)x + xd(x)$$

koşulunu sağlayan bir $d: R \to R$ Jordan türevi varsa f ye d ile belirlenmiş **genelleştirilmiş Jordan türev** denir.

Not 1.33: Her genelleştirilmiş türev bir genelleştirilmiş Jordan türevdir. Ancak tersi doğru değildir.

İspat: (f, d) genelleştirilmiş bir türev olsun. Bu durumda genelleştirilmiş türev olduğu için (i) koşulu zaten sağlanır. Ayrıca (ii) koşulunda $y = x$ yazılırsa

$$f(x^2) = f(x)x + xd(x)$$

elde edilir. Böylece her genelleştirilmiş türev bir genelleştirilmiş Jordan türevdir.

Tanım 1.34: R bir halka, $f: R \to R$ ve $g: R \to R$ iki fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

i. $f(x + y) = f(x) + f(y)$

ii. $f(xy) = f(x)y + g(x)d(y) = f(x)g(y) + xd(y)$

iii. $f(g(x)) = g(f(x))$

koşullarını sağlayan bir $d: R \to R$ yarı türevi varsa bu durumda f ye g ile belirlenmiş **genelleştirilmiş yarı türev** denir (Filippis ve ark., 2015).

Uyarı 1.35: Her genelleştirilmiş türev bir genelleştirilmiş yarı türevdir.

İspat: Genelleştirilmiş türev tanımında $g = I$ birim dönüşümü olarak alınırsa ve her $d: R \to R$ tanımlı türevin bir yarı türev olduğu düşünülürse her genelleştirilmiş türevin bir genelleştirilmiş yarı türev olacağı açıktır.

Tanım 1.36: R bir halka, $f: R \to R$ve $g: R \to R$ iki fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

i. $f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii. $f(x^2) = f(x)x + g(x)d(x) = f(x)g(x) + xd(x)$

iii. $f(g(x)) = g(f(x))$

koşullarını sağlayan bir $d: R \to R$ Jordan yarı türevi varsa bu durumda f ye d ve g ile belirlenmiş **genelleştirilmiş Jordan yarı türev** denir (Filippis ve ark., 2015).

Uyarı 1.37: Her genelleştirilmiş yarı türev bir genelleştirilmiş Jordan yarı türevdir.

İspat: R bir halka, $f: R \to R$ tanımlı (f, d, g) genelleştirilmiş yarı türev olsun. Her $x, y \in R$ için $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ve $(g(x)) = g(f(x))$
koşulları sağlanır. Ayrıca (ii) koşulunda $y = x$ yazılırsa

$$f(x^2) = f(x)x + g(x)d(x) = f(x)g(x) + xd(x)$$

elde edilir. Böylece her genelleştirilmiş yarı türev bir genelleştirilmiş Jordan yarı türevdir.

Uyarı 1.38: Her yarı türev genelleştirilmiş yarı türevdir.

İspat: f yarı türevinin tanımında $f = d$ olarak alınırsa ve her $d: R \to R$ tanımlı türevin kendisi ile belirlenen bir genelleştirilmiş yarı türev olduğu açıktır.

Not 1.39: Tanımlanan türevler arasındaki ilişki aşağıdaki şema ile özetlenebilir.

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{Jordan yarı türev} & & \\
 & & \text{yarı türev} \arrow[u] \arrow[drr] & & \\
\text{türev} \arrow[urr] \arrow[drr] \arrow[dd] & & & & \text{genelleştirilmiş yarı türev} \arrow[ddd] \\
 & & \text{genelleştirilmiş türev} \arrow[urr] \arrow[dd] & & \\
\text{Jordan türev} & & & & \\
 & & \text{genelleştirilmiş Jordan türev} & & \text{genelleştirilmiş Jordan yarı türev}
\end{tikzcd}$$

Tanım 1.40: R bir halka, $U,\ R$ nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer

i)$\forall x, y \in U$ için $x - y \in U$

ii)$\forall x \in U$ ve $\forall r \in R$ için $[x, r] \in U$

koşulları sağlanıyorsa U kümesine R halkasının bir **Lie ideali** denir.

Not 1.41: Her ideal bir Lie idealdir.

İspat: I, R halkasının bir ideali olsun. Acaba I bir Lie ideal mi?

i) $\forall x, y \in I$ için I ideal olduğundan $x - y \in I$ sağlanır.

ii) $\forall x \in I$ ve $\forall r \in R$ için $[r, x] = rx - xr \in I$ mı?

I ideal olduğundan $r \in R,\ x \in I$ için $rx \in I$ ve $xr \in I$ olur. Böylece $[r, x] \in I$ dır.

I Lie idealdir.

Not 1.42: Her Lie ideal bir ideal değildir.

Örnek 1.43: $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere R=$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}$ halkası verilsin. U=$\left\{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in R \middle| x, y \in \mathbb{Z}\right\}$ kümesi R halkasının bir Lie idealidir ancak bir ideali değildir.

Çözüm:$X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in U$ ve $Z = \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & t \end{pmatrix} \in R$ alalım.

i. $X - Y \in U$ mu?

$X - Y = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - a & y - b \\ 0 & x - a \end{pmatrix} \in U$ dur.

ii. $[Z, X] \in U$ mu?

$[Z, X] = ZX - XZ = \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & t \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} mx & my+nx \\ 0 & tx \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} xm & xn+yt \\ 0 & xt \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} mx-xm & my+nx-xn-yt \\ 0 & tx-xt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & my+nx-xn-yt \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$$

olur. Böylece U Lie idealdir. Ancak $X = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in U,\ Z = \begin{pmatrix} m & n \\ 0 & t \end{pmatrix} \in R$ için

$$XZ = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xm & xn+yt \\ 0 & xt \end{pmatrix} \in U$$

olduğu için U ideal değildir.

Not 1.44: U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Bu durumda $\forall x \in U$, $\forall r \in R$ için $[r,x] \in U$ dur. U Lie ideal olduğundan R nin toplamsal alt grubudur. Lie ideal tanımının (i) şıkkından $[r,x] \in U$ iken $-[r,x] \in U$ dur.

Yani $-[r,x] = -(rx - xr) = xr - rx = [x,r] \in U$ sağlanır.

Lemma 1.45: (Brauer Trick) Bir grup iki öz alt grubunun birleşimi olarak yazılamaz.

İspat: $(G,*)$ bir grup olmak üzere A ile B, G grubunun iki öz alt grubu ve $G = A \cup B$ olsun. Kabul edelim ki $A \not\subset B$ ve $B \not\subset A$ olsun. Bu durumda $a \in A - B$ ve $b \in B - A$ olacak şekilde elemanlar vardır. G bir grup olduğundan $a * b \in G = A \cup B$ dir. O halde $a * b \in A$ veya $a * b \in B$ dir. $a * b \in A$ alalım. A, G grubunun bir alt grubu olduğundan $a^{-1} \in A$ ve $a * b \in A$ olduğu için $b = a^{-1} * (a * b) \in A$ dır. Bu durum $b \notin A$ olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Bu durumda $a * b \in B$ elde edilir. Yine B, G grubunun bir alt grubu olduğundan $b^{-1} \in B$ ve $a * b \in B$ olduğundan $a = (a * b) * b^{-1} \in B$ olur. Bu durum ise $a \notin B$ olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. Böylece $A \subset B$ veya $B \subset A$ dır. Şimdi kabul edelim ki $A \subset B$ olsun. Bu durumda $G = A \cup B$ olduğu için $G = B$ elde edilir. Benzer şekilde $B \subset A$ iken $G = A$ elde edilir. Yani $G = A \cup B$ ise $G = A$ veya $G = B$ olmalıdır.

2. BÖLÜM

LİE İDEALLER VE GENELLEŞTİRİLMİŞ JORDAN YARI TÜREVLER

1957 yılında I.N. Herstein tarafından ilk kez Jordan yarı türev tanımı verilerek, karakteristiği ikiden farklı asal halkalarda her Jordan türevin bir türev olduğu gösterilmiştir. Bu teorem 1984 yılında R. Awtar tarafından R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ şartını sağlayan bir Lie ideali için ispatlanmıştır. 2000 yılında M. Ashraf ve N. Rehman aynı teoremi genelleştirilmiş Jordan türevler için ele alırken, N. Aydın ve Ö. Gölbaşı ise 2005 yılında genelleştirilmiş Jordan türevler ve R halkasının bir Lie ideali için araştırmışlardır.

Bu bölümde, V. De Filippis ve arkadaşlarının 2015 yılında genelleştirilmiş Jordan yarı türevler için yapmış oldukları bir çalışmadan hareketle, karakteristiği ikiden farklı bir asal halkanın her $u \in U$ için $u^2 \in U$ şartını sağlayan U Lie ideali üzerinde verilen her genelleştirilmiş Jordan yarı türevin bir genelleştirilmiş yarı türev olduğu gösterilecektir.

Bu bölüm boyunca R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ şartını sağlayan bir Lie ideali, $g: R \to R$ bir epimorfizma olmak üzere $d: R \to R$ tanımlı g ile belirlenmiş bir Jordan yarı türevi ve $f: R \to R, d$ ve g ile belirlenmiş bir genelleştirilmiş Jordan yarı türevi olarak alınacaktır.

Tanım 2.1: R bir halka, $f: R \to R$ ve $g: R \to R$ iki fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

i. $f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii. $f(xy) = f(x)y + g(x)d(y) = f(x)g(y) + xd(y)$

iii. $f(g(x)) = g(f(x))$

koşullarını sağlayan bir $d: R \to R$ yarı türevi varsa bu durumda f ye g ile belirlenmiş **genelleştirilmiş yarı türev** denir.

Tanım 2.2: R bir halka, $f: R \to R$ve $g: R \to R$ iki fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in R$ için

i. $f(x+y) = f(x) + f(y)$

ii.$f(x^2) = f(x)x + g(x)d(x) = f(x)g(x) + xd(x)$

iii.$f(g(x)) = g(f(x))$

koşullarını sağlayan bir $d: R \to R$ Jordan yarı türevi varsa bu durumda f ye d ve g ile belirlenmiş **genelleştirilmiş Jordan yarı türev** denir.

Teorem 2.3: R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka; d, R halkasının bir Jordan yarı türevi ise bu durumda d, R halkasının bir türevidir **(**Herstein, 1957).

Teorem 2.4: R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka, $g: R \to R$ bir epimorfizma olmak üzere $d: R \to R$ tanımlı g ile belirlenmiş bir Jordan yarı türevi ve $f: R \to R, d$ ve g ile belirlenmiş bir genelleştirilmiş Jordan yarı türevi olsun. Bu durumda f, R halkasının bir genelleştirilmiş yarı türevi ve d, R halkasının bir yarı türevidir (Filippis ve ark., 2015).

Lemma 2.5: R bir 2-torsion free yarı asal halka ve U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali olsun. Eğer $[U, U] \subset Z$ ise bu durumda $U \subseteq Z$ dir **(**Herstein, 1957).

Lemma 2.6: R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve U, R halkasının merkezi olmayan bir Lie ideali olsun. Eğer $a, b \in R$ için $aUb = (0)$ ise bu durumda $a = 0$ veya $b = 0$ dır (Bergen, 1983).

Lemma 2.7: R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali olsun. Eğer (f, d, g) üçlüsü her $u \in U$ için $f(u^2) = f(u)u + g(u)d(u)$ olan sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş Jordan yarı türev ise bu durumda

i. $f(uv + vu) = f(u)v + g(u)d(v) + f(v)u + g(v)d(u)$

ii. $f(uvu) = f(u)vu + g(u)d(v)u + g(u)g(v)d(u)$

iii. $f(uvw + wvu) = f(u)vw + g(u)d(v)w + g(u)g(v)d(w)$

$$+f(w)vu + g(w)d(v)u + g(w)g(v)d(u)$$

sağlanır.

İspat:

i) Genelleştirilmiş Jordan yarı türev tanımından

$f(u^2) = f(u)u + g(u)d(u)$

dır. Bu ifadede u yerine $u + v$ yazılırsa

$$f((u+v)^2) = f(u+v)(u+v) + g(u+v)d(u+v)$$

$$= f(u)u + f(u)v + f(v)u + f(v)v$$

$+g(u)d(u) + g(u)d(v) + g(v)d(u) + g(v)d(v)$ [2.1]

elde edilir. Öte yandan

$f((u+v)^2) = f(u^2 + v^2 + uv + vu) = f(u^2) + f(v^2) + f(uv + vu)$

$= f(u)u + g(u)d(u) + f(v)v + g(v)d(v) + f(uv + vu)$ [2.2]

olur.

[2.1] ve [2.2] eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$f(uv + vu) = f(u)v + g(u)d(v) + f(v)u + g(v)d(u)$$

bulunur.

ii) (i) şıkkındaki ifadede v yerine $uv + vu$ yazılırsa ve her Jordan yarı türevin bir genelleştirilmiş Jordan yarı türev olması nedeniyle (i) eşitliğinin d Jordan yarı türevi için sağlandığı düşünülürse

$f(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = f(u)(uv + vu) + g(u)d(uv + vu)$

$+f(uv + vu)u + g(uv + vu)d(u)$

$= f(u)uv + f(u)vu + g(u)d(u)v + g(u)g(u)d(v)$

$+g(u)d(v)u + g(u)g(v)d(u) + g(u)g(v)d(u) + g(v)g(u)d(u)$

$+f(u)vu + g(u)d(v)u + f(v)uu + g(v)d(u)u$ [2.3]

elde edilir.

Öte yandan bu ifadeden

$$f(u(uv + vu) + (uv + vu)u) = f(u^2v + vu^2) + 2f(uvu)$$

$$= f(u^2)v + g(u^2)d(v) + f(v)u^2 + g(v)d(u^2)$$

$$= f(u)uv + g(u)d(u)v + g(u)g(u)d(v) + f(v)u^2 + g(v)d(u)u$$

$+g(v)g(u)d(u) + 2f(uvu)$ [2.4]

elde edilir.

[2.3] ve [2.4] eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$2f(uvu) = 2(f(u)vu + g(u)g(v)d(u) + g(u)d(v)u)$$

olur. $charR \neq 2$ olduğundan

$$f(uvu) = f(u)vu + g(u)g(v)d(u) + g(u)d(v)u$$

bulunur.

iii) (ii) şıkkındaki ifadede u yerine $u + w$ yazılırsa

$$f\big((u + w)v(u + w)\big) = f(u + w)v(u + w) + g(u + w)g(v)d(u + w)$$

$$+g(u + w)d(v)(u + w)$$

$$= f(u)vu + f(u)vw + f(w)vu + f(w)vw + g(u)d(v)u + g(u)d(v)w$$

$$+g(w)d(v)u + g(w)d(v)w + g(u)g(v)d(u) + g(u)g(v)d(w)$$

$+g(w)g(v)d(u) + g(w)g(v)d(w)$ [2.5]

elde edilir.

Öte yandan bu ifade (ii) eşitliği kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$f\big((u+w)v(u+w)\big) = f(uvu+uvw+wvu+wvw)$$

$$= f(uvu) + f(wvw) + f(uvw+wvu)$$

$$= f(u)vu + g(u)d(v)u + g(u)g(v)d(u) + f(w)vw$$

$$+g(w)d(v)w + g(w)g(v)d(w) + f(uvw+wvu) \qquad [2.6]$$

elde edilir.

Böylece [2.5] ve [2.6] eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$f(uvw+wvu) = f(u)vw + g(u)d(v)w + g(u)g(v)d(w) + f(w)vu$$

$$+g(w)d(v)u + g(w)g(v)d(u)$$

bulunur.

Sonuç 2.8: R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali olsun. Eğer (d, g) sıfırdan farklı bir Jordan yarı türev ise bu durumda $\forall\, u, v, w \in U$

i. $d(uv+vu) = d(u)v + g(u)d(v) + d(v)u + g(v)d(u)$

ii. $d(uvu) = d(u)vu + g(u)d(v)u + g(u)g(v)d(u)$

iii. $d(uvw+wvu) = d(u)vw + g(u)d(v)w + g(u)g(v)d(w)$

$$+d(w)vu + g(w)d(v)u + g(w)g(v)d(u)$$

sağlanır.

İspat: Her Jordan yarı türevin bir genelleştirilmiş Jordan yarı türev olması nedeniyle *Lemma 2.7* de $f = d$ alınarak bu sonuçlar elde edilir.

Lemma 2.9: R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali olsun. Eğer (f, d, g) üçlüsü her $u \in U$ için $f(u^2) = f(u)g(u) + ud(u)$ olan sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş Jordan yarı türev ise bu durumda

i. $f(uv+vu) = f(u)g(v) + ud(v) + f(v)g(u) + vd(u)$

ii. $f(uvu) = f(u)g(v)g(u) + ud(v)g(u) + uvd(u)$

iii. $f(uvw + wvu) = f(u)g(v)g(w) + ud(v)g(w) + uvd(w)$

$$+f(w)g(v)g(u) + wd(v)g(u) + wvd(u)$$

sağlanır.

İspat: i) f nin tanımından $\forall u, v \in U$,

$$f((u+v)^2) = f\big((u+v)(u+v)\big) = f(u^2) + f(v^2) + f(uv+vu)$$

$$= f(u)g(u) + ud(u) + f(v)g(v) + vd(v) \ + f(uv+vu) \quad [2.7]$$

dır. Diğer taraftan,

$$f((u+v)^2) = f(u+v)g(u+v) + (u+v)d(u+v)$$

$$= f(u)g(u) + f(u)g(v) + f(v)g(u) + f(v)g(v) + ud(u) + ud(v)$$

$$+vd(u) + vd(v) \quad [2.8]$$

dir.

[2.7] ve [2.8] nin eşitliğinden $\forall u, v \in U$ için

$$f(uv+vu) = f(u)g(v) + ud(v) + f(v)g(u) + vd(u)$$

elde edilir

ii) (i) şıkkındaki ifadede v yerine $uv + vu$ yazılırsa

$$f(u(uv+vu) + (uv+vu)u) = f(u)g(uv+vu) + ud(uv+vu)$$

$$+f(uv+vu)g(u) + (uv+vu)d(u)$$

elde edilir. Öte yandan ve her Jordan yarı türevin bir genelleştirilmiş Jordan yarı türev olması nedeniyle (i) eşitliğinin d Jordan yarı türevi için sağlandığı düşünülerek

(i) eşitiğinde $f = d$ yazılırsa

$$d(uv+vu) = d(u)g(v) + ud(v) + d(v)g(u) + vd(u)$$

sağlanır. Bu son ifadede kullanılırsa

$$f(u(uv+vu)+(uv+vu)u)$$

$$=f(u)g(uv)+f(u)g(vu)+ud(u)g(v)$$

$$+u^2d(v)+ud(v)g(u)+uvd(u)+f(u)g(v)g(u)+ud(v)g(u)$$

$$+f(v)g(u)g(u)+vd(u)g(u)+uvd(u)+vud(u) \qquad [2.9]$$

elde edilir.

Diğer taraftan

$$f(u(uv+vu)+(uv+vu)u)=f(u^2v+uvu+uvu+vu^2)$$
$$=f(u^2v+vu^2)+2f(uvu)$$

$$=f(u^2)g(v)+u^2d(v)+f(v)g(u^2)+vd(u^2)+2f(uvu)$$

$$=f(u)g(u)g(v)+ud(u)g(v)+u^2d(v)+f(v)g(u^2)$$

$$+vd(u)g(u)+vud(u)+2f(uvu) \qquad [2.10]$$

dir.

[2.9] ve [2.10] eşitliği ve $charR \neq 2$ olması kullanılırsa her $u,v \in U$için

$$f(uvu)=f(u)g(v)g(u)+ud(v)g(u)+uvd(u)$$

bulunur.

iii) (ii) eşitliği u ya göre lineerize edilirse

$$f\big((u+w)v(u+w)\big)$$

$$=f(u+w)g(v)g(u+w)+(u+w)d(v)g(u+w)+(u+w)vd(u+w)$$

$$=f(u)g(v)g(u)+f(u)g(v)g(w)+f(w)g(v)g(u)+f(w)g(v)g(w)$$

$$+ud(v)g(u)+ud(v)g(w)+wd(v)g(u)+wd(v)g(w)+uvd(u)+uvd(w)$$

$$+wvd(u)+wvd(w) \qquad [2.11]$$

elde edilir.

Diğer taraftan bu ifade (ii) kullanılarak düzenlenirse

$$f((u+w)v(u+w)) = f(uvu) + f(wvw) + f(uvw+wvu)$$

$$= f(u)g(v)g(u) + ud(v)g(u) + uvd(u)$$

$$+f(w)g(v)g(w) + wd(v)g(w) + wvd(w) + f(uvw+wvu) \qquad [2.12]$$

olur.

[2.11] ve [2.12] eşitlikleri $charR \neq 2$ olması kullanılarak karşılaştırılırsa

$\forall u, v, w \in U$ için

$$f(uvw+wvu) = f(u)g(v)g(w) + ud(v)g(w) + uvd(w) + f(w)g(v)g(u)$$

$$+wd(v)g(u) + wvd(u)$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 2.10: R karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali olsun. Eğer (d, g) ikilisi her $u \in U$ için $d(u^2) = d(u)g(u) + ud(u)$ olan sıfırdan farklı bir Jordan yarı türev ise bu durumda

i. $d(uv+vu) = d(u)g(v) + ud(v) + d(v)g(u) + vd(u)$

ii. $d(uvu) = d(u)g(v)g(u) + ud(v)g(u) + uvd(u)$

iii. $d(uvw+wvu) = d(u)g(v)g(w) + ud(v)g(w) + uvd(w)$

$$+d(w)g(v)g(u) + wd(v)g(u) + wvd(u)$$

sağlanır.

İspat: Her Jordan yarı türevin bir genelleştirilmiş Jordan yarı türev olması nedeniyle *Lemma 2.9* de $f = d$ alınarak bu sonuçlar elde edilir.

Uyarı 2.11: U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Her $u, v, w \in U$ için aşağıdaki kısaltmalar kullanılacaktır.

$$\delta(u,v) = f(uv) - f(u)v - g(u)d(v)$$

$$\phi_u(v) = d(uv) - d(u)v - g(u)d(v)$$

$$\rho(u,v) = f(uv) - f(u)g(v) - ud(v)$$

$$\psi_u(v) = d(uv) - d(u)g(v) - ud(v)$$

Not 2.12: $R, charR \neq 2$ olan bir asal halka ve U, Rhalkasının bir Lie ideali olsun. Genelleştirilmiş yarı türevin tanımından her $u, v \in U$ için

$$\delta(u,v) = 0 \Leftrightarrow \rho(u,v) = 0$$

sağlanır.

İspat: $\delta(u,v) = f(uv) - f(u)v - g(u)d(v) = 0$ olsun. Bu durumda

$$f(uv) = f(u)v + g(u)d(v)$$

olur. Öte yandan

$$f(uv) = f(u)g(v) + ud(v)$$

dir. Böylece

$$f(uv) - f(u)g(v) - ud(v) = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\rho(u,v) = f(uv) - f(u)g(v) - ud(v) = 0$$

bulunur.

Uyarı 2.13: $R, charR \neq 2$ olan bir asal halka ve U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali olsun.

$$\delta(u,v) = -\delta(v,u)$$

$$\rho(u,v) = -\rho(v,u)$$

$$\phi_u(v) = -\phi_v(u)$$

$$\psi_u(v) = -\psi_v(u)$$

sağlanır.

İspat: *Lemma 2.7* ve *Lemma 2.9 (i)* ile *Sonuç 2.8* ve *Sonuç 2.10* dan

$$\delta(u,v) = f(uv) - f(u)v - g(u)d(v)$$

ve

$$\delta(v,u) = f(vu) - f(v)u - g(v)d(u)$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanarak

$$\delta(u,v) + \delta(v,u) = f(uv) - f(u)v - g(u)d(v) + f(vu) - f(v)u - g(v)d(u)$$

$$= f(uv) + f(vu) - f(u)v - f(v)u - g(v)d(u) - g(u)d(v)$$

$$= f(uv + vu) - \big(f(u)v + f(v)u + g(v)d(u) + g(u)d(v)\big)$$

bulunur. Bu ifadede *Lemma 2.7 (i)* kullanılarak

$$\delta(u,v) + \delta(v,u) = f(u)v + g(u)d(v) + f(v)u + g(v)d(u)$$

$$-\big(f(u)v + f(v)u + g(v)d(u) + g(u)d(v)\big) = 0$$

elde edilir.

Buradan $\delta(u,v) = -\delta(v,u)$ olur.

Benzer şekilde

$$\rho(u,v) = f(uv) - f(u)g(v) - ud(v)$$

ve

$$\rho(v,u) = f(vu) - f(v)g(u) - vd(u)$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanarak

$$\rho(u,v)+\rho(v,u)=f(uv)-f(u)g(v)-ud(v)+f(vu)-f(v)g(u)-vd(u)$$

$$=f(uv+vu)-\big(f(u)g(v)+ud(v)+f(v)g(u)+vd(u)\big)$$

$$=\big(f(u)g(v)+ud(v)+f(v)g(u)+vd(u)\big)$$

$$-\big(f(u)g(v)+ud(v)+f(v)g(u)+vd(u)\big)=0$$

bulunur. Böylece $\rho(u,v)=-\rho(v,u)$ elde edilir.

Şimdi her $u,v\in U$ için

$$\phi_u(v)=d(uv)-d(u)v-g(u)d(v)$$

ve

$$\phi_v(u)=d(vu)-d(v)u-g(v)d(u)$$

dır. Bu eşitlikler taraf tarafa toplanarak

$$\phi_u(v)+\phi_v(u)=d(uv)-d(u)v-g(u)d(v)+\ d(vu)-d(v)u-g(v)d(u)$$

$$=d(uv)+d(vu)-d(u)v-d(v)u-g(v)d(u)-g(u)d(v)$$

$$=d(uv+vu)-\big(d(u)v+d(v)u+g(v)d(u)+g(u)d(v)\big)$$

olur. *Sonuç 2.8* (i) kullanılarak

$$\phi_u(v)+\phi_v(u)=d(u)v+g(u)d(v)+d(v)u+g(v)d(u)$$

$$-\big(d(u)v+d(v)u+g(v)d(u)+g(u)d(v)\big)=0$$

bulunur. Dolayısıyla $\phi_u(v)=-\phi_v(u)$ elde edilir.

Benzer şekilde

$$\psi_u(v)=d(uv)-d(u)g(v)-ud(v)$$

ve

$$\psi_v(u)=d(vu)-d(v)g(u)-vd(u)$$

eşitlikleri taraf tarafa toplanarak

$$\psi_u(v) + \psi_v(u) = d(uv) - d(u)g(v) - ud(v) + d(vu) - d(v)g(u) - vd(u)$$

$$= d(uv + vu) - \big(d(u)g(v) + ud(v) + d(v)g(u) + vd(u)\big)$$

$$= \big(d(u)g(v) + ud(v) + d(v)g(u) + vd(u)\big)$$

$$-\big(d(u)g(v) + ud(v) + d(v)g(u) + vd(u)\big) = 0$$

bulunur. Böylece $\psi_u(v) = -\psi_v(u)$ elde edilir.

Uyarı 2.14: R $charR \neq 2$ olan bir asal halka ve U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali olsun. Her $u, v, w \in U$için

$$\delta(u, v + w) = \delta(u, v) + \delta(u, w)$$

$$\rho(u, v + w) = \rho(u, v) + \rho(u, w)$$

$$\phi_u(v + w) = \phi_u(v) + \phi_u(w)$$

$$\psi_u(v + w) = \psi_u(v) + \psi_u(w)$$

dır.

İspat: $\delta(u, v + w) = f\big(u(v + w)\big) - f(u)(v + w) - g(u)d(v + w)$

$$= f(uv + uw) - f(u)v - f(u)w - g(u)d(v) - g(u)d(w)$$

$$= f(uv) - f(u)v - g(u)d(v) + f(uw) - f(u)w - g(u)d(w)$$

$$= \delta(u, v) + \delta(u, w)$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\rho(u, v + w) = f\big(u(v + w)\big) - f(u)g(v + w) - ud(v + w)$$

$$= f(uv + uw) - f(u)g(v) - f(u)g(w) - ud(v) - ud(w)$$

$$= f(uv) - f(u)g(v) - ud(v) + f(uw) - f(u)g(w) - ud(w)$$

$$= \rho(u,v) + \rho(u,w)$$

bulunur.

Ayrıca her $u, v, w \in U$ için

$$\phi_u(v+w) = d\big(u(v+w)\big) - d(u)(v+w) - g(u)d(v+w)$$

$$= d(uv+uw) - d(u)v - d(u)w - g(u)d(v) - g(u)d(w)$$

$$= d(uv) - d(u)v - g(u)d(v) + d(uw) - d(u)w - g(u)d(w)$$

$$= \phi_u(v) + \phi_u(w)$$

elde edilir.

Yine her $u, v, w \in U$ için

$$\psi_u(v+w) = d\big(u(v+w)\big) - d(u)g(v+w) - ud(v+w)$$

$$= d(uv+uw) - d(u)g(v) - d(u)g(w) - ud(v) - ud(w)$$

$$= d(uv) - d(u)g(v) - ud(v) + d(uw) - d(u)g(w) - ud(w)$$

$$= \psi_u(v) + \psi_u(w)$$

bulunur.

Lemma 2.15: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali olsun.
Bu durumda her $u, v, w \in U$ için

$$\phi_{v+w}(u) = \phi_v(u) + \phi_w(u)$$

olur.

İspat: Her $u, v, w \in U$ için

$$\phi_{v+w}(u) = d\big((v+w)u\big) - d(v+w)u - g(v+w)d(u)$$

$$= d(vu + wu) - d(v)u - d(w)u - g(v)d(u) - g(w)d(u)$$

$$= d(vu) - d(v)u - g(v)d(u) + d(wu) - d(w)u - g(w)d(u)$$

$$= \phi_v(u) + \phi_w(u)$$

bulunur.

Lemma 2.16: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali olsun. Eğer R nin sıfırdan farklı bir (f, d, g) genelleştirilmiş Jordan yarı türevi için her $u, v, w \in U$ olmak üzere

$$\delta(u, v)w[u, v] + g([u, v])g(w)\phi_u(v) = 0$$

sağlanır.

İspat: $\forall u, v, w \in U$ için $W = f(uvwvu + vuwuv)$ alalım *Lemma 2.7* (iii) kullanılarak

$$W = f(uvwvu + vuwuv)$$

$$= f((uv)w(vu) + (vu)w(uv))$$

$$= f(uv)wvu + g(uv)d(w)vu + g(uv)g(w)d(vu)$$

$$+f(vu)wuv + g(vu)d(w)uv + g(vu)g(w)d(uv) \qquad [2.13]$$

elde edilir.

Öte yandan *Lemma 2.7* (ii) ve *Sonuç 2.8* den

$$W = f(uvwvu + vuwuv)$$

$$= f(u(vwv)u) + f(v(uwu)v)$$

$$= f(u)vwvu + g(u)d(vwv)u + g(u)g(vwv)d(u)$$

$$+f(v)uwuv + g(v)d(uwu)v + g(v)g(uwu)d(v)$$

$$= f(u)vwvu + g(u)d(v)wvu + g(u)g(v)d(w)vu + g(u)g(v)g(w)d(v)u$$

$$+g(u)g(vwv)d(u) + f(v)uwuv + g(v)d(u)wuv + g(v)g(u)d(w)uv$$

$$+g(v)g(u)g(w)d(u)v + g(v)g(uwu)d(v) \qquad [2.14]$$

olur. [2.13] ve [2.14] eşitlikleri karşılaştırılarak düzenlenirse

$$0 = f(uv)wvu - f(u)vwvu - g(u)d(v)wvu + g(uv)g(w)d(vu)$$

$$-g(u)g(v)g(w)d(v)u - g(u)g(vwv)d(u)$$

$$+f(vu)wuv - f(v)uwuv - g(v)d(u)wuv$$

$$+g(vu)g(w)d(uv) - g(v)g(u)g(w)d(u)v - g(v)g(uwu)d(v)$$

$$= \big(f(uv) - f(u)v - g(u)d(v)\big)wvu + g(uvw)\big(d(vu) - d(v)u - g(v)d(u)\big)$$

$$+\big(f(vu) - f(v)u - g(v)d(u)\big)wuv + g(vuw)\big(d(uv) - d(u)v - g(u)d(v)\big)$$

elde edilir. Bu ifadede *Uyarı 2.11* deki gösterimler kullanılarak

$$0 = \delta(u,v)wvu + g(uvw)\phi_u(v) - \delta(u,v)wuv - g(vuw)\phi_u(v)$$

$$= \delta(u,v)(wvu - wuv) + \big(g(uvw) - g(vuw)\big)\phi_u(v)$$

$$= \delta(u,v)w(vu - uv) + \big(g(uv) - g(vu)\big)g(w)\phi_u(v)$$

$$= \delta(u,v)w[u,v] + g([u,v])g(w)\phi_u(v)$$

elde edilir. Böylece $\forall u, v, w \in U$ için

$$\delta(u,v)w[u,v] + g([u,v])g(w)\phi_u(v) = 0$$

sonucu ispatlanmış olur.

Lemma 2.17: R, karakteristiği ikiden farklı bir asal halka ve U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali olsun. Eğer (f, d, g) üçlüsü her $u \in U$ için $f(u^2) = f(u)g(u) + ud(u)$ olan sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş Jordan yarı türev ise bu durumda her $u, v, w \in U$ için

$\rho(u,v)g(w)g([u,v]) = 0$

sağlanır.

İspat: $\forall u,v,w \in U$ için $Y = f(uvwvu + vuwuv)$ olsun. *Lemma 2.9* (iii) kullanılarak

$$Y = f(uvwvu + vuwuv) = f((uv)w(vu) + (vu)w(uv))$$

$$= f(uv)g(w)g(vu) + uvd(w)g(vu) + uvwd(vu)$$

$$+f(vu)g(w)g(uv) + vud(w)g(uv) + vuwd(uv) \qquad [2.15]$$

elde edilir.

Öte yandan *Lemma 2.9* (ii) ve *Sonuç 2.10* dan

$$Y = f(uvwvu + vuwuv) = f(u(vwv)u) + f(v(uwu)v)$$

$$= f(u)g(vwv)g(u) + ud(vwv)g(u) + uvwvd(u)$$

$$+f(v)g(uwu)g(v) + vd(uwu)g(v) + vuwud(v)$$

$$= f(u)g(vwv)g(u) + ud(v)g(w)g(v)g(u)$$

$$+uvd(w)g(v)g(u) + uvwd(v)g(u) + uvwvd(u)$$

$$+f(v)g(uwu)g(v) + vd(u)g(w)g(u)g(v)$$

$$+vud(w)g(u)g(v) + vuwd(u)g(v) + vuwud(v) \qquad [2.16]$$

bulunur. [2.15] ve [2.16] eşitlikleri karşılaştırılarak düzenlenirse

$$f(uv)g(w)g(vu) - f(u)g(vwv)g(u) - ud(v)g(w)g(v)g(u)$$

$$+f(vu)g(w)g(uv) - f(v)g(uwu)g(v) - vd(u)g(w)g(u)g(v)$$

$$= \big(f(uv) - f(u)g(v) - ud(v)\big)g(wvu) + (f(vu) - f(v)g(u) - vd(u))g(wuv)$$

olur. *Uyarı 2.11* deki gösterimler kullanılarak

$$0 = \rho(u,v)g(w)g(vu) - \rho(u,v)g(w)g(uv)$$

$$= \rho(u,v)g(w)\big(g(vu) - g(uv)\big)$$

$$= \rho(u,v)g(w)(g(vu - uv))$$

$$= \rho(u,v)g(w)g([u,v])$$

olur. Böylece $\forall u, v, w \in U$ için

$$\rho(u,v)g(w)g([u,v]) = 0$$

bulunur.

Not 2.18: Aşağıda verilen teorem *Teorem 2.3* ve *Teorem 2.4* ün bir genelleştirmesini vermektedir.

Teorem 2.19: R, karakteristiği ikiden farklı asal halka ve U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ ve $U \nsubseteq Z$ koşulunu sağlayan bir Lie ideali olsun. Eğer (f, d, g) üçlüsü sıfırdan farklı bir genelleştirilmiş Jordan yarı türev ise bu durumda (f, d, g) bir genelleştirilmiş yarı türevdir.

İspat: İspat için $\forall u, v \in U$ için $\delta(u,v) = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. *Lemma 2.17* den her $u, v, w \in U$ için

$$\rho(u,v)g(w)g([u,v]) = 0$$

olur. $T = g(U)$ kümesi R halkasının bir Lie idealidir. Gerçekten;

Her $g(u), g(v) \in T$ ve $r \in R$ için $g(u) - g(v) \in T$ ve $[g(u), r] \in T$ mi?

U bir Lie ideal olduğundan $u - v \in U$ ve görüntü kümesi tanımından $g(u - v) \in T$ dir. Buradan g bir halka epimorfizması olduğu için

$g(u - v) = g(u) - g(v)$ olduğundan $g(u) - g(v) \in T$ dir.

Öte yandan $r \in R$ için g bir halka epimorfizması olduğundan $r = g(x)$ olacak biçimde en az bir $x \in R$ elemanı vardır. Böylece

$$[g(u), r] = [g(u), g(x)] = g(u)g(x) - g(x)g(u)$$

olur. Bu ifadede g nin bir halka epimorfizması olduğu kullanılarak

$$[g(u), r] = g([u, x])$$

yazılır. U, R halkasının bir Lie ideali olduğu için $u \in U, x \in R$ için $[u, x] \in U$ dur. Böylece $[g(u), r] = g([u, x]) \in g(U) = T$ elde edilir.

Lemma 2.6 dan her $u \in U$ için ve $v \in U$ için $\rho(u, v) = 0$ veya $g([u, v]) = 0$ elde edilir. Şimdi her $u \in U$ için

$K = \{v \in U | \rho(u, v) = 0\}$ ve $L = \{v \in U | g([u, v]) = 0\}$

kümelerini tanımlayalım. K ve L kümeleri U nun toplamsal alt gruplarıdır. Üstelik $U = K \cup L$ dır. Bu durumda *Lemma 1.45* e göre $U = K$ veya $U = L$ olmalıdır.

Kabul edelim ki $U = K$ olsun. Bundan dolayı $\rho(u, v) = 0$ ve dolayısıyla $\delta(u, v) = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanır.

Şimdi ise $U = L$ alalım. *Lemma 2.16* dan her $u, v \in U$ için

$$\delta(u, v)w[u, v] + g([u, v])g(w)\phi_u(v) = 0$$

sağlanır. Bu eşitlikte $g([u, v]) = 0$ olduğu kullanılarak $\forall w \in U$ için

$$\delta(u, v)w[u, v] = 0$$

bulunur. Böylece *Lemma 2.6* dan $\forall v \in U$ için $[u, v] = 0$ veya $\delta(u, v) = 0$ bulunur.

Eğer $\forall v \in U$ için $[u, v] = 0$ ise *Lemma 2.5* den $U \subseteq Z$ elde edilir bu hipotezde $U \nsubseteq Z$ oluşuyla çelişir. Dolayısıyla $\delta(u, v) = 0$ olmalıdır. Böylece R sıfırdan farklı bir (f, d, g) genelleştirilmiş Jordan yarı türev içermektedir. İspat tamamlanır.

KAYNAKLAR

Ashraf, M., Asma, A. ve Shakir, A. (2007). Some commutativity theorems for rings generalized derivations, *Southeast Asian Bulletin of Math.*, 31, 415-421.

Awtar, R.(1984). Lie ideal and Jordan derivations of prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* 90, 9-14.

Bell, H. E., Martindale III, W. S. (1988). On semi-derivations and commutativity in prime rings, *Canadian Math. Bull.*, 31.(4), 500-508.

Bergen, J. (1983). Derivations in prime rings, *Canad. Math. Bull.*, 26, 267-270.

Bresar, M. (1988). Jordan derivations on semiprime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* 104, 1003-1006.

Bresar, M. (1990). Semi-derivations of prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 108 (4), 859-860.

Bresar, M. and Vukman, J. (1988). Jordan derivations on prime rings, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 37, 321-322.

Bresar, M. (1991). On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations,*Glasgow Math. J.*, 33, 89-93.

Chang, J. C., (1984). On semi-derivations of prime rings: Chinese Journal Mathematics, 12(4), 255-262.

Filippis, V., Mamouni, A. and Oukhtite, L. (2015). Generalized Jordan semiderivations in prime rings, *Canad. Math. Bull.*, 58 (2), 263-270.

Gölbaşı, Ö. and Aydın, N. (2005). On Lie ideals of prime rings with generalized Jordan derivations, *East Asian Math. J.*, No:1, 21-26.

Herstein, I. N. (1957). Jordan derivations of prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.* 8, 1104-1110.

Herstein I. N., (1961). Theory of rings: *University of Chicago Press*.

Herstein I. N., (1969). Topics in ring theory: *University of Chicago Press.*

Nabiel, H., (2013). Semiderivations and commutativity in semiprime rings, *Gen. Math. Notes*, Vol. 19, No. 2, 71-82.

Posner, E. C. (1957). Derivations in prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8, 1093-1100.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Gülten EROL
Doğum Yeri ve Tarihi	Kastamonu , 1987
Medeni Hali	Evli, 2 çocuk
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Şarkışla Anadolu Lisesi Sivas
E-posta Adresi	gultnrol@gmail.com

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Kastamonu Göl Anadolu Öğretmen Lisesi,	2001-2005
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği,	2005-2010

İş Tecrübesi

Şarkışla Mehmet Akif Ersoy Anadolu Lisesi,	Matematik Öğretmeni,	2016-2017
Şarkışla Anadolu Lisesi,	Matematik Öğretmeni,	2017-...

Yayınları

Ulusal	-
Uluslararası	Erol, G.,Gölbaşı, Ö. (2018). Lie ideals and generalized Jordan semiderivations. *Jurnal of Mathematics & Statistics Science.*1 (1), 4-7.