BAZI MATRİSLER İÇİN ALT SINIRLAR

ÖZKAN KARADAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

2018

T. C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI MATRİSLER İÇİN ALTSINIRLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özkan KARADAŞ
(201392170021)

Matematik Ana Bilim Dalı
Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa YILDIRIM

SİVAS
EKİM 2018

Özkan KARADAŞ'ın hazırladığı ve **"Bazı matrisler için alt sınırlar"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı :	**Prof. Dr. Mustafa YILDIRIM** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	....
Jüri Üyelesi :	**Prof. Dr. İlhan DAĞADUR** Mersin Üniversitesi	....
Jüri Üyelesi :	**Dr.Öğr.Üyesi Nuh DURNA** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	....

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. İsmail ÇELİK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (CÜBAP) Komisyonu tarafından F-530 Nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

ETİK

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

17.10.2018

Özkan KARADAŞ

ÖZET

BAZI MATRİSLER İÇİN ALT SINIRLAR

Özkan KARADAŞ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Mustafa YILDIRIM

2018, 122+xi sayfa

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezde kullanılan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde, Hardy eşitsizliğine kısa bir giriş yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, Ağırlıklı Ortalama Matrisinin ℓ_p üzerindeki sınırlılığı araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde, ℓ_p üzerindeki sınırlı matrisler ile ilgili alt sınır problemi için yöntemler verilmiştir. Ayrıca Cesàro Matrisi, p-Cesàro Matrisi, Terraced Matrisleri, Ağırlıklı Ortalama Matrisi, Hausdorff Matrisleri ve Hilbert Matrisi ile ilgili ℓ_p üzerindeki alt sınırları belirlenmiştir.

Beşinci bölümde, Ağırlıklı Ortalama Matrisleri ve Nörlund Matrisleri için Copson tipli alt sınırlar aratırılmıştır.

Altıncı bölümde, Ağırlıklı uzaylar üzerinde integral operatörleri için alt ve üst sınırlar belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cesaro operatörü, p-Cesaro operatörü, Rhaly operatörü, Terraced matrisi, Genelleştirilmiş Rhaly Cesaro operatörü, alt sınırlar.

ABSTRACT

LOWER BOUNDS FOR SOME MATRIXS

Özkan KARADAŞ

Master of Science Thesis

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Mustafa YILDIRIM

2018, 122+xi pages

This thesis consists of six chapters.

In the first part, basic definitions and theorems used in the thesis are given.

In the second chapter, a short introduction was given to Hardy inequality.

In the third chapter, the boundedness of the Weighted Mean Matrix on ℓ_p were investigated.

In the fourth chapter, methods for the lower bound problem related to the bounded matrices on ℓ_p are given. In addition, the lower bounds of the Cesaro Matrix, p-Cesàro Matrix, Terraced Matrices, Weighted Mean Matrix, Hausdorff Matrices and Hilbert Matrix on ℓ_p were investigated.

In the fifth chapter, the upper and lower bounds for integral operators on weighted spaces were determined.

Keywords: Cesaro operator, p-Cesaro operator, Rhaly operator, Terraced matrices, Generalized Rhaly Cesaro operator, lower bound.

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof.Dr. Mustafa YILDIRIM'a, yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma çok teşekkür ederim. Ayrıca bu yoğun süreçte tüm sıkıntılarımı paylaşan ve manevi desteğiyle her zaman yanımda olan eşime minnet, şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbf{B}(X,Y)$	X uzayından Y uzayı üzerinde verilen bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$\mathbf{B}(X)$	X uzayı üzerinde verilen bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$\Vert T\Vert$	sınırlı lineer T operatörünün normu
$\overline{N}(a_k)$	Ağırlıklı Ortalama Matrisi
$\mathbf{R}_a$	Rhaly (Terraced) Matrisi
$\mathbf{C}=(C,1)$	Cesàro Matrisi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar cismi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi
ℓ^p	p. kuvvetten mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı
$\Vert Ax\Vert \geq \mathbf{L}\Vert x\Vert$	ile en büyük alt sınırı göstereceğiz.

1. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ VE SINIRLI LİNEER OPERATÖRLER

Şimdi Fonksiyonel Analiz ve Matris dönüşümleri hakkında bazı hatırlatmalar verelim:

Tanım 1.1 *$A = (a_{nk}), (n, k = 0, 1, 2, \ldots)$ kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. Verilen bir $x = (x_n)$ dizisi için*

$$y_n := A_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k, \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{1.1}$$

mevcut ise $Ax = (A_n(x))$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir. Eğer X ve Y, s nin iki alt cümlesi olmak üzere her $x \in X$ için $(A_n(x))$ dönüşüm dizisi mevcut ve $(A_n(x)) \in Y$ ise A matrisi X den Y ye bir dönüşüm tanımlar denir ve $A \in (X, Y)$ ile gösterilir. Toplamı veya limiti koruyan matrislerin sınıfı ise $(X, Y; p)$ ile gösterilir.
Eğer $A \in (c, c)$ ise A ya $konservatif$, $A \in (c, c; p)$ ise A ya regüler matris denir. (1.1) serisinin her n için yakınsak olması gerektiğinden matris dönüşümlerinin lineer olduğu açıktır. ([43] , Petterson, 1966)

Tanım 1.2 (Sınırlı Lin. Op) *X, Y iki normlu uzay, $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $x \in D(T)$ için*

$$\|Tx\|_Y \leq C \|x\|_X \tag{1.2}$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı varsa T ye sınırlı lineer dönüşümü denir.
Eğer T sınırlı ve $\|x\| \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq C$ olacak şekildeki en küçük C sayısına T nin normu denir ve $\|T\|$ ile gösterilir. Buna göre,

$$\|T\| := \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq \theta}} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \tag{1.3}$$

dır. Eğer T sınırlı ise

$$\|Tx\|_Y \leq \|T\| \|x\|_X \tag{1.4}$$

([43] , Kreyzing, 1978).

Teorem 1.1 *X, Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ sınırlı bir lineer operatör olsun.*
a) $\|T\|$ (1.3) ile verilen) ifadesi

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|_Y \tag{1.5}$$

ye denktir.
b) X ten Y ye tüm sınırlı lineer dönüşümler kümesini

$$B(X, Y) := \left\{ T \mid T : X \overset{\text{sınırlı lineer}}{\longrightarrow} Y \right\} \tag{1.6}$$

ile gösterelim. $B(X, Y)$, (1.5) normu ile birlikte bir normlu uzaydır.
c) Eğer X normlu uzay ve Y bir Banach uzayı ise $B(X, Y)$ de (1.5) normuyla bir Banach uzayıdır. ([43] , Kreyzing, 1978)

- $0 < p < 1$ ise $\ell^p = \{x = (x_k) : \sum |x_k|^p < \infty\}$,

$$d_p(x, y) = \|x - y\|_p^p = \sum |x_k - y_k|^p$$

  ile birlikte bir metrik uzaydır. Fakat bir Banach uzayı değildir. Çünkü bu norm bir metrikten elde edilmemiştir (yani öteleme değişmezliğini sağlamaz).

- $1 \leq p < \infty$ için $\ell^p = \{x = (x_k) : \sum |x_k|^p < \infty\}$,

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{1.7}$$

  normu ile birlikte Banach uzayıdır.

- $p = \infty$ için ℓ^∞, $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$ normu ile birlikte Banach uzayıdır.

Sonsuz matrislerin çeşitli uzaylar üzerinde sınırlılığı 80 yıldır devam etmektedir. Burada bize gerekenleri aşağıdaki lemmalarda sıralayacağız.

Lemma 1.1 *$A = (a_{ij})$ sonsuz matrisi verilsin.*
i. $A \in B(\ell_p)$ ise bu durumda $\sup_j \sum_{i=0}^{\infty} |a_{ij}|^p < \infty$ dur, aslında

$$\sup_j \sum_{i=0}^{\infty} |a_{ij}|^p \leq \|A\|_p^p$$

dir.

ii. $A \in B(\ell_1)$ *dir* $\Leftrightarrow$

$$\sup_j \sum_{i=0}^{\infty} |a_{ij}| = \|A\|_1 < \infty \tag{1.8}$$

dir.

iii. $A \in B(\ell_\infty)$ *dir* $\Leftrightarrow$

$$\sup_i \sum_{j=0}^{\infty} |a_{ij}| = \|A\|_\infty < \infty$$

dir. ([14] , Cardlidge, 1978)

Lemma 1.2 $A = (a_{ij})$ *ve* $B = (b_{ij})$ *iki matris olsun. Eğer* $B \in B(\ell_p)$ *ve her* i *ve* j *için* $|a_{ij}| \leq k\,|b_{ij}|$ *olacak şekilde* $k > 0$ *sayısı var ise bu durumda* $A \in B(\ell_p)$ *dir. ([14] , Cardlidge, 1978)*

Lemma 1.3 $A = (a_{ij})$ *ve* $B = (b_{ij})$ *iki matris olsun. Eğer* $B \in B(\ell_p)$, $j < N$ *için* $(a_{ij})_{j=0}^{\infty} \in \ell_p$ *ve* $j \geq N$ *ve her* i *için* $|a_{ij}| \leq k\,|b_{ij}|$ *olacak şekilde* $k > 0$ *sayısı var ise bu durumda* $A \in B(\ell_p)$ *dir. ([14] , Cardlidge, 1978)*

Lemma 1.4 *Eğer* $T = (t_{ij})$ *bir matris,* $D = (d_{ij})$

$$d_{ij} = \begin{cases} t_{ii} & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

ile tanımlanan köşegen matris ve $S = T - D$ *ise, bu durumda* $T \in B(\ell_p)$ *dir ancak ve ancak* $S \in B(\ell_p)$ *ve* $\sup_i |t_{ii}| < \infty$ *dur. ([14] , Cardlidge, 1978)*

Lemma 1.5 (Riesz-Thorin Theorem) *Eğer* $A \in B(\ell_1)$ *ve* $A \in B(\ell_\infty)$ *ise* $1 < p < \infty$ *için* $A \in B(\ell_p)$ *dir. ([20] , Dunford, 1958, Theorem 11, sayfa 523)*

Teorem 1.2 (Abel Kısmi toplam Formülü) (a_k), (b_k) *herhangi reel dizi ve*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \text{ ve } \Delta b_k = b_k - b_{k+1}$$

olsun Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = s_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} s_k \Delta b_k$$

dır. ([1] , Balcı, 2016)

Lemma 1.6 *$x, y \in \ell_2$ olmak üzere*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right)^{1/2}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Not: İleride kullanacağımız için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

olduğunu not edelim.

2. HARDY EŞİTSİZLİĞİ

Teorem 2.1 *Eğe* $0 < r < s$ *ise, bu durumda* $f(x,y) \equiv \phi(x)\psi(y)$ *olmadıkça* $\mathcal{M}_r(a) = \mathcal{M}_r(a,p) = \left(\frac{\sum pa^r}{\sum p}\right)^{1/r}$ *olmak üzere,*

$$\mathcal{M}_s(y)\mathcal{M}_r(x)f(x,y) < \mathcal{M}_r(x)\mathcal{M}_s(y)f(x,y)$$

dir. ([33] , Hardy ve ark, 1934)

Teorem 2.2 *Eğe* $p > 1,\ f \in L_p(0,\alpha)$ *ve*

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

ise yeterince küçük x *için*

$$F(x) = o\left(x^{1/q}\right)$$

dir. ([33] , Hardy ve ark, 1934)

Teorem 2.3 *Eğer*

$$p > 1,\ q = p/(p-1)$$

ve

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p \leq A,\ \sum_{m=1}^{\infty} b_m^q \leq B$$

ise bu durumda $(a_m) = (0)$ *veya* $(b_m) = (0)$ *olmadıkça*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_m}{m+n} < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}A^{1/p}B^{1/q}$$

dir. ([33] , Hardy ve ark, 1934)

Teorem 2.4 *Eğer*

$$p > 1,\ q = p/(p-1)$$

ve

$$\int_0^{\infty} f^p(x)\,dx \leq F,\ \int_0^{\infty} g^q(x)\,dx \leq G$$

ise bu durumda $f \equiv 0$ *veya* $g \equiv 0$ *olmadıkça*

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(x)\,g(x)}{x+y}dx < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}F^{1/p}G^{1/q}$$

dir. ([33] , Hardy ve ark, 1934)

Daha sonra tartışacağımız iki teorem, Hilbert teoremlerinin bilinen ispatlarını basitleştirmek için yapılan girişimler sırasında keşfedilmiştir.

Sadece Teorem 2.3 in esik bir formunu isteyebiliriz: Çift serisi $\sum a_n^p$ ve $\sum b_n^q$ serileri yakınsak olduğunda çift seri de yakınsaktır. Bu durumu aşağıdaki gibi tartışmak doğal olurdu:

Çift seriyi, $m = n$ diyagonali ile iki S_1 ve S_2 parçasına ayıralım, ve $m \leq n$ olanı S_1 ile gösterelim. Bu durumda

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

olmak üzere

$$S_1 = \sum\sum_{m\leq n} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \sum\sum_{m\leq n} \frac{a_m b_n}{n} = \sum \frac{A_n}{n} b_n$$

dir. $\sum b_n^q$ serisi yakınsak olduğundan, $\sum n^{-p} A_n^p$ yakınsak olduğunda son seri yakınsaktır, ve S_1 in yakınsaklığını ispatlamak için, son serinin yakınsaklığı, sonuç olarak $\sum a_n^p$ nin yakınsak olduğunu ispatlamak yeterlidir. Bu durumda S_2 nin yakınsaklığı aynı yolla ispatlanabilir.

Bu argüman dizisi, aşağıdaki teorem ile sonuçlanır ve aşağıdaki teoremi ispatlar.

Teorem 2.5 ***(Hardy esitsizligi):*** *Eğer $p > 1$, $a_n \geq 0$, and $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ise, bu durumda bütün a_n ler 0 olmadıkça,*

$$\sum \left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum a_n^p \tag{2.1}$$

eşitsizli geçerlidir. Sabit mümkün olan en iyi sabittir. ([33] *, Hardy ve ark, 1934)*

İntegraller için ilgili teorem şu şekildedir:

Teorem 2.6 ***(Hardy esitsizligi):*** *Eğer $p > 1$, $f(x) \geq 0$, and $F(x) = \int_0^x dt$ ise, bu durumda $f \equiv 0$ olmadıkça,*

$$\int_0^\infty \left(\frac{F}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty f^p dx \tag{2.2}$$

eşitsizli geçerlidir. Sabit mümkün olan en iyi sabittir. ([33] *, Hardy ve ark, 1934)*

Bu teoremler Hardy [29] tarafından ispatlandı, Hardy, Teorem 2.5 daki sabiti sabitleyememişti.

Bu eksiklik Landau [45] tarafından kaldırıldı. Teoremlerin pek çok alternatif ispatı, örneğin Broadbent [12] , Elliott [35] , Grandjot [36] , Hardy [30] , Kaluza ve Szego [41] , Knopp [42] gibi çeşitli yazarlar tarafından verildi. Elhott'un Teorem 2.5 nın ispatını ve Hardy'nin Teorem 2.6 nin ispatını vererek başlıyoruz.

İspat. (i) Teorem 2.5 yı ispatlarken $a_1 > 0$ olduğunu kabul edeceğiz. Çünkü eğer $a_1 > 0$ olduğunu kabul edersek ve b_n ile a_{n+1} i yerdeğiştirirsek, (2.1)

$$\left(\frac{b_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_1+b_2}{3}\right)^2 + \cdots < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (b_1^p + b_2^p + \cdots)$$

olur, eşitsizliğin kendisi (2.1) den daha zayıftır. $\frac{A_n}{n}$ yerine α_n yazalım ve indisi 0 olan herhangi bir sayının 0 olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\alpha_n^{p-1}a_n &= \alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\left\{n\alpha_n - (n-1)\,\alpha_{n-1}\right\}\alpha_n^{p-1} \\
&= \alpha_n^p\left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{(n-1)\,p}{p-1}\alpha_n^{p-1}\alpha_{n-1} \\
&\leq \alpha_n^p\left(1 - \frac{np}{p-1}\right) + \frac{n-1}{p-1}\left\{(p-1)\,\alpha_n^p + \alpha_{n-1}^p\right\}^c \\
&= \frac{1}{p-1}\left\{(n-1)\,\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p\right\}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$\sum_1^N \alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\sum_1^N \alpha_n^{p-1}a_n \leq -\frac{N\alpha_N^p}{p-1} \leq 0$$

dır; ve böylece Teorem 2.5 ile

$$\sum_1^N \alpha_n^p \leq \frac{p}{p-1}\sum_1^N \alpha_n^{p-1}a_n \leq \frac{p}{p-1}\left(\sum_1^N a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_1^N \alpha_n^p\right)^{1/q} \tag{2.3}$$

elde ederiz. Her iki tarafı en sağdaki çarpana bölüp p. kuvvet alırsak

$$\sum_1^N \alpha_n^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_1^N a_n^p \tag{2.4}$$

N yi sonsuza götürürsek, (2.1) elde ederiz, ancak $<$ yerine 'N' yi sonsuza götürdüğümüz zaman (2.1) elde ederiz, ancak '$<$' yerine '$\leq$' aldık. Özellikle $\sum \alpha_n^p$ ın sonlu olduğunu görüyoruz. ■

(2.3) e dönersek ve N yi ∞ a götürürsek,

$$\sum \alpha_n^p \leq \frac{p}{p-1} \sum \alpha_n^{p-1} a_n \leq \frac{p}{p-1} \left(\sum a_n^p\right)^{1/p} \left(\sum \alpha_n^p\right)^{1/q} \tag{2.5}$$

(a_n^p) ve (α_n^p) orantılı olmadıkça yani C n den bağımsız olmak üzere $a_n = C\alpha_n$ olmadıkça, ikincide eşitsizlik vardır. Böylece ($a_1 = \alpha_1 > 0$ olduğundan) C, 1 olmalı ve bu durumda her n için $A_n = na_n$ olmalıdır. Bu sadece tüm a ların eşit olması durumunda sağlanır ve Bu, $\sum a_n^p$ nin yakınsamasıyla çelişir. Böylece (2.1), (2.6) dan

$$\sum \alpha_n^p < \frac{p}{p-1} \left(\sum a_n^p\right)^{1/p} \left(\sum \alpha_n^p\right)^{1/q} \tag{2.6}$$

dır ve çünkü (2.4), (2.3) dan izlenir.

Sabit çarpanın mümkün olan en iyi çarpan olduğunu ispatlamak için,

$$a_n = \begin{cases} n^{-1/p} & , n \leq N \\ 0 & , n > N \end{cases}$$

alalım. Bu durumda $\sum a_n^p = \sum_1^N \dfrac{1}{n}$ dir,

$$A_n = \sum_1^n \frac{1}{v^p} > \int_1^n \frac{dx}{x^p} = \frac{p}{p-1} \left\{n^{(p-1)/p-1}\right\}, \, n \leq N$$

ve $n \to \infty$ iken $\varepsilon_n \to 0$ olmak üzere

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{1-\varepsilon_n}{n}, \, n \leq N$$

dır. Buradan $N \to \infty$ iken $\eta_n \to 0$ olmak üzere

$$\sum \left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \sum_1^N \left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (1-\eta_n) \sum a_n^p$$

olduğunu görürüz. Eğer a_n yukarıdaki gibi seçilirse ve N yeterince büyük alınırsa, bu durumda

$$\sum \left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p (1-\varepsilon) \sum a_n^p$$

tipli her eşitsizlik yanlıştır.

Alternatif bir prosedür, her n için $a = n^{-(1/p)-\varepsilon}$ almak ve ε nuküçük yapmaktır.

(ii) Eğer $0 < \xi < X$,

$$\begin{aligned} \textstyle\int_\xi^X \left(\frac{F}{x}\right)^p dx &= -\frac{1}{p-1} \textstyle\int_\xi^X F^p \frac{d}{dx} x^{1-p} dx \\ &= \frac{\xi^{1-p} F^p(\xi)}{p-1} - \frac{X^{1-p} F^p(X)}{p-1} + \frac{p}{p-1} \textstyle\int_\xi^X x^{1-p} F^{p-1} f dx \end{aligned}$$

elde ederiz. Fakat Teorem 2.2 den, f^p integrallanebilir ve $\xi \to 0$ olduğunda $\xi^{1-p}F^p(\xi) \to 0$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} \int_0^X \left(\tfrac{F}{x}\right)^p dx &\leq \frac{p}{p-1}\int_0^X \left(\tfrac{F}{x}\right)^{p-1} f dx \\ &\leq \frac{p}{p-1}\left\{\left[\int_0^X \left(\tfrac{F}{x}\right)^p dx\right]^{1/q}\left[\int_0^X f^p dx\right]^{1/p}\right\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

dir. Eğer $(0,X)$ de f sıfır değilse (2.7) nin sol-tarafı pozitiftir. Böylece

$$\int_0^X \left(\frac{F}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^X f^p dx \tag{2.8}$$

ve $X \to \infty$ yaptığımızda, (2.2) yi elde ederiz, fakat '$<$', '$\leq$' ile yerdeğiştirecektir. Özellikle (2.2) nin solundaki integral sonludur.

X ile ∞ yerdeğiştirdiği zaman, (2.7) deki bütün integraller sonlu olur, ve

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left(\tfrac{F}{x}\right)^p dx &\leq \frac{p}{p-1}\int_0^\infty \left(\tfrac{F}{x}\right)^{p-1} f dx \\ &\leq \frac{p}{p-1}\left\{\left[\int_0^\infty \left(\tfrac{F}{x}\right)^p dx\right]^{1/q}\left[\int_0^\infty f^p dx\right]^{1/p}\right\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

olduğu görülür. Eşitsizlikteki son işaret, $x^{-p}F^p$ ve f^p etkin orantılı olmadıkça '$<$' ile yerdeğiştirebilir. Bu, f yi x in kuvveti yapar ve bu durumda $\int f^p dx$ ıraksak olur. Böylece f sıfır olmadıkça

$$\int_0^\infty \left(\frac{F}{x}\right)^p dx \leq \frac{p}{p-1}\left\{\left[\int_0^\infty \left(\frac{F}{x}\right)^p dx\right]^{1/q}\left[\int_0^\infty f^p dx\right]^{1/p}\right\} \tag{2.10}$$

olur. Sol taraftaki integral pozitif ve sonlu olduğu için, şimdi (2.2), (2.10) dan elde edilir; çünkü (2.8), (2.9) den görülür.

Sabitin mümkün olan en iyi sabit olmasının ispatı daha önce olduğu gibidir:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ x^{-(1/p)-\varepsilon} & , x \geq 1 \end{cases}$$

almak yeterlidir.

Teori 2.5 nın Elliott'un ispatı, Teorem 2.6 için de bariz değişikliklerle birlikte geçerlidir. (ii) de verilen Teoremin 2.6 ispatı seriye uyarlanabilir, ancak sabitin mümkün olan en iyi değerini vermez.

(iii) Teorem 2.6 nin aşağıdaki ispatı da ilginçtir: $\leq$ li formun sağlanması ile yetineceğiz. İntegrasyon aralıklarının her biri $(0,1)$, Ağırlık fonksiyonları 1ve

$$r = 1,\ s = p > 1,\ f(x,y) = f(xy)$$

olduğunu kabul ederek, Teorem 2.1 ü uygulayabiliriz. Bu durumda $x \leq 1$ için,

$$\mathfrak{M}_1^{(x)} f(xy) = \int_0^1 f(xy)\,dx = \frac{F(y)}{y},$$

$$\mathfrak{M}_p^{(y)} f(xy) = \left\{\int_0^1 f^p(xy)\,dy\right\}^{1/p} = \left\{\frac{1}{x}\int_0^x f^p(t)\,dt\right\}^{1/p} \leq \left\{\frac{1}{x}\int_0^1 f^p(t)\,dt\right\}^{1/p}$$

olur. Böylece Teorem 2.1 ile

$$\left\{\int_0^1 \left(\frac{F}{y}\right)^p dy\right\}^{1/p} \leq \left(\int_0^1 f^p dt\right)^{1/p} \int_0^1 x^{-1/p} dx = \frac{p}{p-1}\left(\int_0^1 f^p dt\right)^{1/p}$$

olur. Bu durumda

$$x = X/c,\ f(X/c) = g(X)$$

yazarak, x, f ile X, g yi yerdeğiştirerek ve $c \to \infty$ alarak istenen sonucu elde ederiz.

3. AGIRLIKLI ORTALAMA (RİESZ) MATRİSİNİN ℓ_P UZAYI ÜZERİNDEKİ SINIRLILIĞI

Tanım 3.1 *$a_0 > 0$, $n \geq 1$ için $a_n \geq 0$ ve $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ olmak üzere*

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{a_k}{A_n} & , 0 \leq k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases} \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan matrise, yani

$$\overline{N}(a_k) = (a_{nk}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \dfrac{a_0}{A_1} & \dfrac{a_1}{A_1} & 0 & \cdots \\ \dfrac{a_0}{A_2} & \dfrac{a_1}{A_2} & \dfrac{a_2}{A_2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

matrisine ağırlıklı ortalama matrisi denir. ([14] , Cardlidge, 1978)

Bu bölümde (3.2) da tanımlanan $\left(\overline{N}, p\right)$ Ağırlıklı ortalama matrisinin ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ dizi uzayı üzerinde sınırlılığını araştıracağız. Buradaki teoremleri ispatsız olarak vereceğiz. Teoremlerin ispatları Cardlidge[14] de bulunabilir.

Teorem 3.1 *$\overline{N} \in B(\ell_\infty)$ ve $\left\|\overline{N}\right\|_\infty = 1$ dir.([14] , Cardlidge, 1978)*

Teorem 3.2 *$(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi her n için $a_n > 0$ ve*

$$I = \inf_{n \geq 0} \frac{1}{p} \left\{ \frac{A_n}{a_n} - \frac{A_{n+1}}{a_{n+1}} \right\} > -1$$

ise bu durumda $\overline{N} \in B(\ell_p)$ dir ve $K = \dfrac{1}{1+I}$ olmak üzere $\left\|\overline{N}\right\|_p \leq K$ dır. ([14] , Cardlidge, 1978)

Teorem 3.3 *$n \geq N$ için ve $a_n > 0$ ve $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{1}{p}\left(\frac{A_n}{a_n} - \frac{A_{n+1}}{a_{n+1}}\right) > -1$ ise bu durumda $\overline{N} \in B(\ell_p)$ dir.([14] , Cardlidge, 1978)*

Yukarıdaki önermeler bir matrisin sınırlılığını incelerken diğer matrislerle olan ilişkilerine bakılmaksızın Lemma 1.3 deki karşılaştırma testinden daha kullanışlı olacaktır. Elbette bu lemmayı kullanmak için $\overline{N}(a_n)$ matrisinin sütun elemanlarının ℓ_p

üzerinde olup olmadığını belirlemek gereklidir. k nci sütun elemanlarının p toplamları $(a_k)^p \sum_{n=k}^{\infty}\left(\frac{1}{A_n^p}\right)$ şeklinde verilir. Gerçekten bu elemanların ℓ_p üzerinde olması için gerekli ve yeterli durum $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{A_n^p}\right) < \infty$ olmasıdır.

Bütün n ler için $\frac{1}{A_n} > 0$ olduğundan $(n+1)$ nci terimin (n) nci terime oranını kapsayan yakınsama testlerini sıklıkla kullanacağız. Dikkat edersek

$$\frac{\left(\frac{1}{A_{n+1}}\right)^p}{\left(\frac{1}{A_n}\right)^p} = \left(\frac{A_n}{A_{n+1}}\right)^p = \left(1 - \frac{a_{n+1}}{A_{n+1}}\right)^p$$

şeklindedir. Tekrar burada $\frac{a_n}{A_n}$ oranı önemlidir.

Aşağıdaki önerme $(q_n)_{n=0}^{\infty}$ ağırlık dizisi ve $Q_n = \sum_{j=0}^{n} q_j$ olan ağırlıklı ortalama matrisleri için esas olan karşılaştırma testidir.

Teorem 3.4 *Eğer $n \geq N$ için $\frac{q_n}{Q_n} \leq \frac{a_n}{A_n} \leq m\frac{q_n}{Q_n}$ ve $\overline{N}(q_n) \in B(\ell_p)$ ise bu durumda $\overline{N}(a_n) \in B(\ell_p)$ dir.([14] , Cardlidge, 1978)*

Belki de bir ağırlıklı ortalama matrisinin tüm p ler için sınırlılığını garanti etmenin en kolay yolu aşağıda verilmiştir.

Teorem 3.5 *Eğer $\underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n} = k > 0$ ise bu durumda $\overline{N} \in B(\ell_p)$ dir. ([14] , Cardlidge, 1978)*

Örnek 3.1 *$b > 1$ olmak üzere $a_n = b^n$, $n = 0, 1, 2, \cdots$ verilsin. O halde*

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} b^k = \frac{b^{n+1}-1}{b-1}$$

olur öyleki

$$\frac{a_n}{A_n} = \frac{b^n(b-1)}{b^{n+1}-1}$$

olur. $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n} = 1 - \frac{1}{b} > 0$ *olduğundan Teorem 3.5 den bütün p ler için $\overline{N}(b^n) \in B(\ell_p)$ $(1 \leq p < \infty)$ olur. Bu durumda sınırlılığı göstermek için ayrıca Teorem 3.2 yi kullanabiliriz ve*

$$\frac{1}{p}\left(\frac{A_n}{a_n} - \frac{A_{n+1}}{a_{n+1}}\right) = \frac{-1}{pb^{n+1}} \geq \frac{-1}{pb} > -1$$

olduğundan normun bir üst sınırının tahmininde bulunabiliriz. Böylece

$$\left\|\overline{N}(b^n)\right\|_p \leq \frac{pb}{pb-1}$$

elde edilir.

Teorem 3.5 in hipotezini sağlayan bir çok ağırlıklı ortalama matrislerini köşegen elemanları yardımıyla tanımlayarak bulabiliriz.
Bununla beraber, genellikle esas köşegen elemanlarıyla ilgilenmemize rağmen bazen ağırlıklı dizinin davranışları da sınırlılığını garanti etmek için bilgi verir.

Teorem 3.6 *Eğer $n \geq N$ için $a_{n+1} \geq a_n > 0$ ise bu durumda $1 < p < \infty$ iken $\overline{N} \in B(\ell_p)$ dir.([14] , Cardlidge, 1978)*

Teorem 3.6 nin ifadesine uygun en basit örnek $a_n = 1$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ifadesine sahip olan Cesaro matrisidir. Kıyaslama yapmak için bu matrisi kullanarak aşağıdaki önermeyi gösterebiliriz.

Teorem 3.7 *Eğer her n için $m \leq a_n \leq M$ olacak şekilde pozitif m ve M sabitleri var ise bu durumda $\overline{N} \in B(\ell_p)$ $(1 < p < \infty)$, fakat $\overline{N} \notin B(\ell_1)$ dir. ([14] , Cardlidge, 1978)*

Cesaro matrisi, köşegen limitleri sıfır olan ağırlıklı ortalama matrislerinin kullanışlı bir örneğidir. Eğer $\alpha > 0$ olmak üzere

$$a_n = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha)}$$

alınırsa bu durumda $A = \overline{N}(a_n)$ ağırlıklı ortalama matrisi, Hausdorff matrislerinin bir sınıfını oluşturur ve bu matrislerin daha önce sınırlılığı ve spektrumu Rhoades ve Kutner tarafından çalışılmıştır. Ancak burada biz bu matrislerin bu girişlerle bir ağırlıklı ortalama matrisi olarak düşünüp yeni bir yöntemle sınırlılığına bakabiliriz.

Teorem 3.8 *Eğer $\dfrac{a_n}{A_n} = \dfrac{\alpha}{n+\alpha}$ ise $\alpha > \dfrac{1}{p}$ için $\overline{N} \in B(\ell_p)$ ve*

$$\left\|\overline{N}\right\|_p \leq \frac{p\alpha}{p\alpha - 1}$$

dir. Eğer $\alpha < \frac{1}{p}$ ise $\overline{N} \notin B(\ell_p)$ dir. ([14] , Cardlidge, 1978)

Şimdi ise Teorem 3.8 ve Teorem 3.4 ü kullanarak aşağıdaki daha genel olarak iki önermeyi verelim.

Teorem 3.9 *$\underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{A_n} = \alpha > \dfrac{1}{p}$ ve $\overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{A_n} = \beta < \infty$ ise bu durumda $\overline{N} \in B(\ell_p)$ dir. ([14] , Cardlidge, 1978)*

Teorem 3.10 *Eğer* $\overline{\lim}_{n\to\infty} n\dfrac{a_n}{A_n} = \alpha < \dfrac{1}{p}$ *ise bu durumda* $\overline{N}(a_n) \notin B(\ell_p)$ *dir. Böylece* $\overline{N} \in B(\ell_p)$ *ise* $\overline{\lim}_{n\to\infty} n\dfrac{a_n}{A_n} \geq \dfrac{1}{p}$ *dir. ([14] , Cardlidge, 1978)*

Yukarıda verilen son iki önermeden aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz.

Teorem 3.11 *Eğer* $\lim_{n\to\infty} n\frac{a_n}{A_n} = \alpha$ *ise bu durumda* $\alpha > \frac{1}{p}$ *iken* $\overline{N} \in B(\ell_p)$ *ve* $\alpha < \frac{1}{p}$ *iken* $\overline{N} \notin B(\ell_p)$ *dir. ([14] , Cardlidge, 1978)*

Teorem 3.6 ve Teorem 3.7 gereği (a_n) dizisi artan veya pozitif iki tam sayı arasında sınırlı ise $1 < p < \infty$ için $\overline{N}$ sınırlıdır. Bu ise eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n \geq m > 0$ ise $1 < p < \infty$ için $\overline{N}$ nin ℓ_p üzerinde sınırlı olduğunu bize gösterir. İlave olarak şimdiye kadar ki durumlarda

$$\begin{array}{ll} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{A_n}\right)^p < \infty & \Rightarrow \overline{N} \in B(\ell_p) \\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{A_n}\right)^p = \infty & \Rightarrow \overline{N} \notin B(\ell_p) \end{array}$$

olduğunu gösterdik. Burada $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{A_n}\right)^p < \infty$ olması $\overline{N}$ nin ℓ_p de olması için yeterli şart olduğu varsayımında bulunabiliriz. ([14] , Cardlidge, 1978)

Cardlidge tezinde bu varsayımın yanlış olduğunu göstermek için iki örnek vermiştir. Teorem 3.9 ve Teorem 3.10 den $\overline{N} \in B(\ell_p)$ olması için $\underline{\lim}_{n\to\infty} n\frac{a_n}{A_n} = \alpha > \frac{1}{p}$ olması yeterli bir durum olduğu görülebilir. Fakat Cardlidge tezinde bu varsayımın çok yanlış olduğunu göstermek için bir örnek vermiştir.

4. BAZI MATRİSLER İÇİN ALT SINIRLAR

4.1 Giriş

Tanım 4.1 *Bir $x = (x_n)$ dizisini, onun aritmetik ortalaması olan*

$$\sigma_n = \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1}$$

dizisine dönüştüren operatöre Cesàro operatörü denir ve $(C, 1)$ veya C_1 veya C ile gösterilir. Bu operatöre karşılık gelen matrisi

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , 0 \leq k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases} \tag{4.1}$$

şeklinde veya,

$$C = (C, 1) = (c_{nk}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

şeklinde göstereceğiz. ([43] , Petterson, 1966)

Lyons, C Cesaro matrisi için ilginç bir alt sınır keşfetti. Onun sonucu, $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq 0$ olan her $x \in \ell^2$ için

$$\|Cx\|_2 \geq \left(\pi / \sqrt{6}\right) \|x\|_2$$

olduğunu gösterdi. Bu Bölümün amacı her $1 \leq p \leq \infty$ için ℓ^p yi kendi üzerine dönüştüren keyfi matrisler için (negatif girişli olmayan) benzer alt sınırlar oluşturmaktır. Daha sonraki bölümlerde bu sonuçlar uygulanacaktır.

$$\|x\|_p = \left(\sum |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \tag{4.3}$$

yi sağlayan reel sayı dizilerinin ℓ^p, $0 < p < \infty$, uzayı ile ilgileneceğiz. $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq 0$ olan her $x \in \ell^p$ için

$$\|Ax\|_q \geq L \|x\|_p \tag{4.4}$$

yi sağlayan L lerin en büyüğünü bulmaya çalışacağız. Burada, A, negatif olmayan girişli, ℓ^p yi ℓ^q ya dönüştüren bir matris ve L de x e bağlı olmayan bir sabittir. (1.5) de olduğu gibi

- A nın operatörünün normu

$$\|A\|_{p,q} = \sup_{x\neq\theta} \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_q$$

  biçiminde tanımlanır.

(4.4) formunun sonuçlarının birkaç önemli matris sınıfı için kolaylıkla kurulabileceğini not edelim. Örneğin, A, alt üçgensel ve satır toplamları 1 eşit bir matris ise bu durumda $\|Ax\|_p \geq \|x\|_p$ dir. Dolayısıyla (4.4) deki tek ilgi çekiçi gerçek, L için mümkün olan en iyi değeri bulmaktır. $p = \infty$ durumunda görmezden geleceğiz, çünkü L nin en büyük değerinin A nın ilk sütununun supremum normu olduğu açıktır.

Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoreminden C nin ℓ^2 den ℓ^2 ye sınırlı lineer bir operatör olduğu kolaylıkla görülür. Bu da Cauchy-Buniakowski-Schwarz eşitsizliği [13] kullanılarak doğrudan da ispatlanabilir. Tabii ki C, alttan sınırlandırılmamıştır, fakat aşağıdaki özellik Allen, Shields ve Sheldon Axler in bir tahminini doğrulu-yarak elde edilir.

Teorem 4.1 (Lyons Teoremi) *Eğer $x_0 \geq x_1 \geq \cdots \geq 0, x = (x_n)_0^\infty$ ise bu durumda $\|Cx\|^2 \geq \pi^2/6\|x\|^2$ dir, eşitlik vardır ancak ve ancak $x_1 = x_2 = \cdots = 0$ dir. ([50] , Lyons , 1982)*

İspat. Eğer Kareleri ve grup terimlerini genişletirsek,

$$\begin{aligned} \|Cx\|^2 &= \tfrac{\pi^2}{6}\|x\|^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{k^2}\right)x_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)\sum_{j=0}^{n-1}x_jx_n \\ &\geq \tfrac{\pi^2}{6}\|x\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2n\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{k=|}^{n}\frac{1}{k^2}\right)x_n^2. \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$2n\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2} > 2n\int_{n+1}^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \frac{2n}{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2},$$

oluğundan, sonuç elede edilir. ■

İspatta karelerin guruplandırılması, ℓ^2 deki iççarpım kullanılarak yapılmaktadır ve oldukça karmaşıktır. Biz burada Lyons un ispatını direkt olarak aldık.

Lyons un bu Teoremi ile Cesáro matrisi için ilginç bir alt sınır keşfedildi. Bu bölümün amacı $1 \leq p \leq \infty$ için keyfi ℓ^p uzayları üzerinde alınan keyfi negatif olmayan matrisler için benzer alt sınırları bulmaktır.

Bazı önemli matris sınıfları için (4.4) formunun sonuçlarını belirlemek kolaydır. Örneğin; A matrisi satır toplamları 1 olan alt üçgensel matris ise $\|Ax\|_p \geq \|x\|_p$ dir.

Örneğin $\forall x \in \ell^2$ için

$$\|Cx\| \geq \frac{\pi}{\sqrt{6}} \|x\| \sim \frac{\pi}{2,45} \|x\| \geq \|x\|$$

Böylece (4.4) deki ilginçlik sadece reel olma durumunda L nin en iyi değerini bulmada yatar. Burada $p = \infty$ durumunu ele almayacağız. Çünkü L nin en büyük değeri, A nın ilk kolonunun supremum normu olduğu açıktır.

4.2 Lyons Teoremi

Bu bölümde sadece ℓ^2 uzayını düşüneceğiz. Bu özel durumu almamızın sebebi birçok sonucun ispatı kolay ve kullanışlı olmasıdır. Ayrıca bu ispatlar sonraki iki kısımda daha genel sonuçları ortaya çıkaracaktır.

Lemma 4.1 *B diagonal girişlerinin dışındakiler negatif olmayacak şekilde bir matris olsun, yani;*

$$|j-k| > 0 \text{ ise } b_{jk} \geq 0 \tag{4.5}$$

olsun. Bu durumda $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq 0$ olmak üzere

$$< Bx, x > \geq 0 \tag{4.6}$$

dır $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{j,k=1}^{r} b_{jk} \geq 0 \quad (r = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4.7}$$

olmasıdır. ([2] , Bennett, 1986)

İspat. ($\Leftarrow$:) (4.5) ve (4.7) den $\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} b_{jk}$ dikdörtgen toplamlarının hepsi negatif olmayandır. Parçaları iki kez toplarsak,

$$< Bx, x >= \sum_{j,k} b_{jk}x_j x_k \geq \sum_{r,s} \left(\underbrace{\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} b_{jk}}_{\geq 0} \right) \underbrace{(x_r - x_{r+1})}_{\geq 0}\underbrace{(x_s - x_{s+1})}_{\geq 0} \geq 0$$

olduğunu elde ederiz ve (4.6) elde edilmiş olur.

($\Rightarrow$:)

$$< Bx, x >\geq 0$$

olsun. Bu durumda (4.6) daki toplamın içinde (4.7) toplamı mevcuttur. Dolayısı ile (4.7) sağlanır. (ve aşağıdakine ihtiyacımız yoktur. ■

Lemma 4.1 aşağıdaki doğal sonuçları doğurur.

Sonuç 4.1 *(4.6) ü sağlayan B matrisi $< Bx, x >\geq 0$ ile karekterize edilir.* ([2] , *Bennett, 1986)*

Teorem 4.2 *A negatif olmayan girişli ve A, ℓ^2 den kendi içine bir dönüşüm olsun. Bu durumda*

$$\lambda^2 = \inf \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{r} a_{jk} \right)^2 \tag{4.8}$$

olmak üzere $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq 0$ olan $\forall x \in \ell^2$ için

$$\|Ax\|_2 \geq \lambda \|x\|_2 \tag{4.9}$$

sağlanır. λ nın yukarıdaki değeri mümkün olanların en iyisidir. ([2] , *Bennett, 1986)*

İspat. $B = A^tA - \lambda^2 I$ alarak Lemma 4.1 i uygulayalım. (4.8) deki λ nın en iyi değer olduğunu görmek için, (4.9) da verilen x i

$$x_k = \begin{cases} 1 & , k \leq r \\ 0 & , k > r \end{cases}$$

şeklinde almamız yeterlidir. ■

$\|Ax\|_2 < \infty$ olması durumunda (4.9) nın anlamlı olduğunu not edelim. $\forall x \in \ell^2$ için $\|Ax\|_2 < \infty$ olmasını garanti eden, A, ℓ^2 den kendi içine bir dönüşüm olması gerekliliği, sadece A^tA nın mevcut olmasını garanti etmek için Teorem 4.2 in ispatında kullanıldı.

Aşağıda Lyons Teoreminin İspatını Teorem 4.2 i kullanarak aşağıda bir kez daha verelim. İspat Bennett tarafından [2] de verilmiştir.

Lyons Teoreminin İspatı. C Cesaro matrisi için; yani

$$c_{jk} := \begin{cases} 1/n & , k \leq j \\ 0 & , k > j \end{cases}$$

için (4.8) ifadesi

$$L^2 = 1 + \inf_r r \sum_{k>r} k^{-2}$$

olmasını sağlar. $L^2 = \frac{\pi^2}{6}$ olduğunu görmek için,

$$f(r) = r \sum_{k>r} k^{-2}$$

fonksiyonunun r ye göre artan olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} f(r+1) - f(r) &= \sum k^{-2} - \frac{r}{(r+1)^2} \\ &> \sum \left(k^{-1} - (k+1)^{-1}\right) - \tfrac{r}{(r+1)^2} \\ &= (r+2)^{-1} - \frac{r}{(r+1)^2} > 0 \end{aligned}$$

dır. ■

Eğer p her hangi bir pozitif tamsayı ise bir benzer argümanla (p kez tarafları toplayarak) ℓ^p için Teorem 4.2 in bir versiyonu elde edilir. Fakat açıkça bir yeni yaklaşım, p nin daha genel değerlerini gerektirir. Daha tatmin edici olması için, aşağıdaki metodu verebiliriz.

4.3 ℓ^p deki Kısmi Toplamlar

Aşağıdaki elementer bilgilere ihtiyacımız var.

Lemma 4.2 *$a \geq b$ olmak üzere $a, b, c \geq 0$ olsun. Eğer $p > 1$ ise bu durumda $a = b$ veya $c = 0$ olmadıkça*

$$(a+c)^p - a^p > (b+c)^p - b^p \tag{4.10}$$

dir. Eğer $0 < p < 1$ *ise (4.10) deki eşitsizlik tersine çevrilecektir. (* [2] *, Bennett, 1986)*

İspat. İspat için $f(x) = (x+c)^p - x^p$ olmak üzere $f'(x) = p(x+c)^{p-1} - px^{p-1} = 0$ alalım. Bu durumda $c = 0$ kritik noktadır ve $c > 0$ için f monoton artandır. Zaten $c > 0$ olduğundan f, $(0, \infty)$ da artandır. ■

Sonraki sonuç $p = q = 1$ olduğunda Abel kısmi toplam formülünden (Teorem 1.2 den) elde edilir.

Önerme 4.1 $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$ *olsun ve* $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$ *verilsin. Eğer* $p \geq 1$ *ve* $0 < q \leq p$ *ise bu durumda*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^q \|x\|_p^{p-q} \geq \sum_{r=1}^{n-1} r^{1-\frac{q}{p}} \left(\sum_{k=1}^{r} a_k\right)^q \left(x_r^p - x_{r+1}^p\right) + n^{1-\frac{q}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^q x_n^p \quad (4.11)$$

dir. Eğer $p \leq 1$ *ve* $q \geq p$ *ise (4.11) eşitsizliği tersine çevrilir. (4.11) (un diğer versiyonu) da eşitlik vardır* $\Longleftrightarrow$ *aşağıdaki* $(i) - (ii)$ *ve* $(iii) - (iv)$ *çiftlerin en az biri sağlanır:*

$$\begin{cases} (i)\ p = 1 & \\ (ii)\ a_k x_k > 0 & \text{olacak şekilde } u,\ k \text{ nın en küçük} \\ & \text{ve } v, k \text{ nın en büyük değeri olmak üzere } x_u = \cdots = x_v \text{ dir,} \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} (iii)\ p = q \\ (iv)\ r^{-1} \left(\sum a_k\right)^p \quad , 1 \leq r \leq n \text{ için } x_r > x_{r+1} \text{ yi sağlayan } r \text{ değerleri için sabittir.} \end{cases}$$

([2] *, Bennett, 1986)*

İspat. İspatı sadece $p > 1$ için vereceğiz, $0 < p \leq 1$ durumu için ispat benzerdir.

$$x_{n+1} = 0,\ s_r = a_1 + a_2 + \cdots + a_r$$

almak ve ilk $p = q$ özel durumunu düşünmek uygundur. Bu durumda (4.11) denklemi

$$\left(\sum_{k=1}^{r} a_k x_k\right)^p \geq \sum_{r=1}^{n} s_r^p \left(x_r^p - x_{r+1}^p\right) \quad (4.12)$$

ye indirgenir.

m yi $1 \leq m < n$ ye sabitleyerek,

$$a = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k,\ b = s_m x_{m+1},\ c = a_{m+1} x_{m+1}$$

alarak, Lemma 4.2 yi uygulayarak,

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1} a_k x_k\right)^p - \left(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right)^p \geq \left(s_{m+1}^p - s_m^p\right) x_{m+1}^p$$

olduğunu göreceğiz. m üzerinden toplam alarak,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^p - (a_1 x_1)^p \geq \sum_{m=1}^{n-1} \left(s_{m+1}^p - s_m^p\right) x_{m+1}^p$$

elde ederiz. Her iki tarafa $(a_1 x_1)^p = (s_1 x_1)^p$ ekleyerek ve sağ taraftakileri tekrar guruplandırarak, (4.12) u elde ederiz.

$q < p$ genel durumunu ispatlamak için, (4.11) denkleminin sağ tarafını

$$\sum_{r=1}^{n} (s_r^q) \left(x_r^p - x_{r+1}^p\right)^{\frac{q}{p}} . \left[r \left(x_r^p - x_{r+1}^p\right)\right]^{1-\frac{q}{p}}$$

olarak tekrar yazalım. $p' = \frac{p}{q}$ ve $q' = \frac{p}{p-q}$ alırsak

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1$$

olur ve Hölder eşitsizliği ile

$$\begin{aligned} &\sum_{r=1}^{n} (s_r^q) \left(x_r^p - x_{r+1}^p\right)^{\frac{q}{p}} . \left[r \left(x_r^p - x_{r+1}^p\right)\right]^{1-\frac{q}{p}} \\ &\leq \left[\sum_{r=1}^{n} \left(s_r^{q\frac{p}{q}}\right) \left(x_r^p - x_{r+1}^p\right)\right]^{\frac{q}{p}} \left[\sum_{r=1}^{n} r \left(x_r^p - x_{r+1}^p\right)\right]^{\frac{p-q}{p}} \\ &= \left[\sum_{r=1}^{n} (s_r^p) \left(x_r^p - x_{r+1}^p\right)\right]^{\frac{q}{p}} \left[\sum_{r=1}^{n} r \left(x_r^p - x_{r+1}^p\right)\right]^{\frac{p-q}{p}} \quad (4.12) \text{ dan} \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^q \|x\|_p^{p-q} \end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz. ■

Uzun, fakat rutin bir argüman gerektirdiğinden, eşitlik durumlarını tartışmaktan kaçındık.

Önerme 4.1 de "atlanılan" $1 < p < q$ ve $1 > p > q$ durumlarının hiçbir versiyonu doğru olmadığını not edelim.

Bu, Kısım 1.4 ün sonundaki açıklamalardan sonra daha belirgin hale gelecektir.

4.4 Bir Genel Alt Sınır

Metotlarımız doğada sonlu boyutludur ve ana sonucumuzu daha temel formda belirtmeyi uygun buluyoruz. Buna göre, bu bölüm boyunca, A yı elemanları negatif olmayan $m \times n$ tipinde matris olarak kabul edeceğiz.

Teorem 4.3 *Kabul edelim ki $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$, $p \geq 1$ ve $0 < q \leq p$ olsun. Bu durumda*

$$L^q = \min_{1 \leq r \leq n} r^{-\frac{q}{p}} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{r} a_{jk} \right)^q \tag{4.13}$$

olmak üzere

$$\|Ax\|_q \geq L \|x\|_p \tag{4.14}$$

dir.

s, (4.13) de minimum olacak şekilde r nin herhangi bir değeri olmak üzere, eğer x,

$$x_k = \begin{cases} x_1 & , k \leq s \\ 0 & , k > s \end{cases} \tag{4.15}$$

formuna sahip ise (4.14) de eşitlik vardır.

Ayrıca eğer $p > 1$ ve A nın iki bitişik sütunu ortogonal değilse, bu durumda eşitlik durumlarının hepsi (4.15) ile verilir. ([2] , Bennett, 1986)

İspat. Homojenlik ile, $\|x\|_p = 1$ olduğunu kabul edebiliriz. Önerme 4.1 i uygularsak,

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_p^q &= \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k \right)^q \geq \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{n} r^{1-\frac{q}{p}} \left(\sum_{k=1}^{r} a_{nk} \right)^q \left(x_r^p - x_{r+1}^p \right) \\
&= \sum_{r=1}^{n} r^{-\frac{q}{p}} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{r} a_{jk} \right)^q r \left(x_r^p - x_{r+1}^p \right) \\
&\geq L^q \sum_{r=1}^{n} r \left(x_r^p - x_{r+1}^p \right) \\
&= L^q \|x\|_p^p
\end{aligned}$$

elde ederiz. $\|x\|_p = 1$ olduğunu hatırlayarak, q. kök alarak (4.14) in doğruluğunu görürüz. Kontrol ederek, (4.15) sağlandığında (4.14) de eşitlik olduğu açıktır. ■

Atladığımız rutin bir argüman, teoremin son kısmı için gereklidir. Daha zayıf hipotezler aynı sonuca götürürken, Teorem 4.3 nin ortogonallik şartı en basitlerinden biridir. Ayrıca, o, pratik ilginçliklerin her durumunda sağlanır.

Aşağıdaki gibi x dizisinin azalan olma kısıtlaması kaldırılabilir.

Teorem 4.4 *Kabul edelim ki $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$, $p \geq 1$ ve $0 < q \leq p$ olsun. Bu durumda,*

$$L^q = \min_{1 \leq r \leq n} \sum_{j=1}^{m} a_{jr}^q \tag{4.16}$$

olmak üzere,

$$\|Ax\|_q \geq L\,\|x\|_p \tag{4.17}$$

dir. s, (4.16) de minimum olan r nin herhangi bir değeri olmak üzere $k \neq s$ olduğunda $x_k = 0$ sağlanmak koşulu ile (4.17) te eşitlik vardır. Ayrıca, eğer $p > 1$ ve A nın iki sütunu ortogonal değilse, bu durumda eşitlikteki bütün durumlar yukarıdaki gibi verilir. ([2] , Bennett, 1986)

A nın sütunlarını yeniden düzenleyerek, Teorem 4.3 den bu sonucu çıkarmak mümkündür; ancak doğrudan devam etmek daha etkilidir. ($q \geq 1$ ve $q < 1$ durumlarını ayrı ayrı incelemeyi daha uygun bulduk)

Alt sınırlar yerine üst sınırları alarak $0 < p < 1$ ve $q \geq p$ için Teorem 4.3 ve Teorem 4.4 e benzer sonuçlar vardır. Dahası, bütün bu sonuçları sonsuz matrislere genişletmekte zorluk yoktur. Ayrıntılara bakılabilir.

Teoremlerin 4.3 ve 4.4 ve dolayısıyla 4.1 in hepsi $1 < q < p$ ve $1 > p > q > 0$ durumlarında başarısız olur ve her iki yönde de başarısız olduğunu gözlemleyerek bu bölümü kapatacağız.

Örnek 4.1 (Ters) *Bunu görmek için, ilk durumda*

$$0 < a < b \text{ için } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

matrisini ele alalım. $x_1 > x_2 > 0$ olan bir x noktasında $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_1^p + x_2^p = 1$ kümesi üzerinde $\|Ax\|_q$ nun bir tek minimuma ulaştığını görürüz. Diğer taraftan,

$$(b \ a)$$

matrisi böyle bir benzer noktada tek maksimuma ulaşır.

$1 > p > q > 0$ durumu, $a > b > 0$ alınarak benzer şekilde çözülür.

4.5 Cesaro Matrisi

Bennett in teoremini aşağıdaki şekillde olduğunu hatırlatalım ve en iyi altsınır bulma problemini buna göre yapalım.

- (x_n) monoton azalan negatif olmayan dizi $1 < p < \infty$ olmak üzere, $A \in B(\ell^p)$ negatif olmayan girişli bir matris olsun. Bu durumda

$$L^p = \inf_r (r+1)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{r} a_{jk} \right)^p =: \inf_r (f(r)) \tag{4.18}$$

olmak üzere,

$$\|Ax\|_p \geq L \|x\|_p$$

dir. ([2] , Bennett, 1986)

Bu bölümde Lyons un Teoremini ℓ^p ye genişleteceğiz. Tekrar belirtelim ki, burada C Cesaro matrisini gösteriyor. Bu durumda C, ℓ^p de sınırlı ve onun normu

$$\|C\|_{p,p} = p^* = \frac{p}{p-1}, \ (1 < p \leq \infty). \tag{4.19}$$

olduğu Rhoades tarafından [61] de gösterildi.
Alışıldığı gibi, $\xi(p)$, $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}$ serilerinin toplamını göstersin.

Teorem 4.5 *Sabit bir p $(1 < p \leq \infty)$ için $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq 0$ koşulunu sağlayan $\forall x \in \ell^p$ için*

$$\|Cx\|_p \geq \xi(p)^{\frac{1}{p}} \|x\|_p \tag{4.20}$$

dir. (4.20) de eşitlik olması için ancak ve ancak $x_2 = x_3 = \cdots = 0$ olmalıdır. ([2] , Bennett, 1986)

İspat. Teorem 4.3 de $q = p$ alırsak, C nin alt sınırı,

$$L^p = 1 + \inf_r r^{p-1} \sum_{k>r} k^{-p} \tag{4.21}$$

ile verilir.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} r^{-1} \sum_{k=nr+1}^{(n+1)r} \left(\frac{r}{k}\right)^p &= \frac{1}{r} \sum_{k=r+1}^{2r} \left(\frac{r}{k}\right)^p + \frac{1}{r} \sum_{k=2r+1}^{3r} \left(\frac{r}{k}\right)^p + \cdots \\
&= \frac{r^p}{r} \left[\sum_{k=r+1}^{2r} \frac{1}{k^p} + \sum_{k=2r+1}^{3r} \frac{1}{k^p} + \cdots \right] \\
&= r^{p-1} \sum_{k=r+1}^{\infty} \frac{1}{k^p}
\end{aligned}$$

olur. Eğer $r>1$ ise bu durumda

$$r^{p-1}\sum_{k>r}\frac{1}{k^p}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sum_{k=nr+1}^{(n+1)r}\left(\frac{r}{k}\right)^p>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^p}$$

dir. Böylece $r=1$ olduğunda (4.21) de infimum oluşur ve (4.20) hemen görülür. ■
$\xi(\infty)^{\frac{1}{\infty}}$ yi doğal olarak $\lim_{p\to\infty}\xi(p)^{\frac{1}{p}}=1$ olarak yorumlamayı kabul edersek, $p=\infty$ olduğunda, (4.20) nin geçerli kalacağını belirtmek isteriz.
Teorem 4.5 ün ispatında aşağıdaki lemma da kullanılabilir. Bu Lemmayı ispatsız olarak verelim.

Lemma 4.3 *p $(1<p<\infty)$ sabit olsun. Bu durumda*

$$f(r)=r^{p-1}\sum_{k>r}k^{-p}$$

r, $(r=1,2,...)$ nin monoton artan bir fonksiyonudur. ([2] , Bennett, 1986)

4.6 $p-$Cesàro matrisleri

Matrislerin sonraki sınıfları, Rhaly [58] tarafından verilen $p-$Cesàro matrisleri matrislerdir. Onlar, sıfırdan farklı girişleri $b_{nk}=(n+1)^{-p}$ ile verilen alt üçgensel matrislerdir; yani

$$C_p=(c_{nk})=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots\\1/2^p&1/2^p&0&\cdots\\1/3^p&1/3^p&1/3^p&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}\tag{4.22}$$

Rhaly, bu operatörlerin $p>1$ için, ℓ^p üzerinde kompak olduğunu gösterdi. ℓ^p üzerindeki operatörlere baktığımız zaman, bunlar operatörler için p ile karışmasın diye indis olarak s kullanacağız.

Teorem 4.6 *$s\geq 2$ için B bir s-Cesàro matrisi olsun. Bu durumda $p\geq 2$ için, $L^p=f(\infty)$ dır. ([65] , Rhoades, 1990)*

İspat.

$$\begin{aligned}f(r)&=\frac{1}{r+1}\sum_{j=0}^{r}\left(\sum_{k=0}^{j}\frac{1}{(j+1)^s}\right)^p+\frac{1}{r+1}\sum_{j=r+1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{r}\frac{1}{(j+1)^s}\right)^p\\&=\frac{1}{r+1}\sum_{j=0}^{r}\frac{1}{(j+1)^{p(s-1)}}+(r+1)^{p-1}\sum_{j=r+1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^{ps}}\end{aligned}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} f(r)-f(r+1) &= \left[\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r+2}\right]\sum_{j=0}^{r}\frac{1}{(j+1)^{p(s-1)}}-\frac{1}{(r+2)^{p(s-1)+1}} \\ &- \left[(r+2)^{p-1}-(r+1)^{p-1}\right]\sum_{j=r+2}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^{ps}}+\frac{(r+1)^{p-1}}{(r+2)^{ps}} \\ &= \frac{1}{(r+1)(r+2)}\sum_{j=0}^{r}\frac{1}{(j+1)^{p(s-1)}} \\ &- \left[(r+2)^{p-1}-(r+1)^{p-1}\right]\sum_{j=r+1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^{ps}} \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} & g(r) \\ &= (r+1)(r+2)\left[f(r)-f(r+1)\right] \\ &= \sum_{j=0}^{r}\frac{1}{(j+1)^{p(s-1)}}-(r+1)(r+2)\left[(r+2)^{p-1}-(r+1)^{p-1}\right]\sum_{j=r+1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^{ps}} \end{aligned}$$

tanımlayalım. Buradan

$$\begin{aligned} & g(r)-g(r+1) \\ &= -\frac{1}{(r+2)^{p(s-1)}}-\frac{(r+1)(r+2)\left[(r+2)^{p-1}-(r+1)^{p-1}\right]}{(r+2)^{sp}} \\ &+ \left\{(r+2)(r+3)\left[(r+3)^{p-1}-(r+2)^{p-1}\right]\right. \\ &- \left.(r+1)(r+2)\left[(r+2)^{p-1}-(r+1)^{p-1}\right]\right\}\sum_{j=r+2}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^{ps}} \\ &= \frac{(r+2)\,\Delta(r+1)^{p}}{(r+2)^{ps}}+(r+2)\,\Delta^{2}(r+1)^{p}\sum_{j=r+2}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^{ps}} \end{aligned}$$

elde ederiz.

$$h(r)=\frac{g(r)-g(r+1)}{(r+2)\,\Delta^{2}(r+1)^{p}}=\frac{\Delta(r+1)^{p}}{(r+2)^{ps}\,\Delta^{2}(r+1)^{p}}+\sum_{j=r+2}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^{ps}}$$

tanımlayalım. Böylece

$$h(r)-h(r+1)=\frac{\Delta(r+1)^{p}}{(r+2)^{ps}\,\Delta^{2}(r+1)^{p}}-\frac{\Delta(r+2)^{p}}{(r+3)^{ps}\,\Delta^{2}(r+2)^{p}}+\frac{1}{(r+2)^{ps}}$$

olur. $h(r)-h(r+1)\geq 0$ olduğunu göstermek için,

(i)

$$\Delta(r+1)^{p}\geq\Delta(r+2)^{p}$$

ve

(ii)

$$\Delta^2 (r+2)^p \geq \Delta^2 (r+1)^p \geq 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir. (i) yi ispatlamak için, $l(r) = (r+1)^p$ tanımlayalım. Bu durumda $l''(r) = p(p-1)(r+1)^{p-2}$ dir. l'' ve $\Delta^2 (r+1)^p$ aynı işaretli olduğundan, $\Delta^2 (r+1)^p \geq 0$ ve $\Delta (r+1)^p \geq \Delta (r+2)^p$ dır.

(ii) yi ispatlamak için, $p \geq 2$ için $l''' = p(p-1)(p-2)(r+1)^{p-3} \geq 0$ dır. Bu yüzden $\Delta^3 (r+1)^p \leq 0$ olur, ki bu $\Delta^2 (r+1)^p \leq \Delta^2 (r+2)^p$ olmasını sağlar.

Böylece h, r ye göre monoton azalandır. Buradan

$$\begin{aligned} \lim_r h(r) &= \lim_r \frac{(r+1)^p - (r+2)^p}{(r+2)^{ps}\left[(r+1)^p - 2(r+2)^p + (r+3)^p\right]} \\ &= \lim_r \left[\left(\frac{r+1}{r+2}\right)^p - 1\right] \lim_r \frac{1}{(r+2)^{ps}\left[\left(\frac{r+1}{r+2}\right)^p - 2 + \left(\frac{r+3}{r+2}\right)^p\right]} \end{aligned}$$

dır. İlk limitin değeri sıfırdır, ve ikinci ifadedeki paydanın limiti sonsuzdur. Bu yüzden h, her r için pozitiftir ve g, r de monoton azalandır. $p, s \geq 2$ olduğundan,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_r (r+1)(r+2)^p \sum_{j=r+1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^{ps}} = \lim_r \sum_{j=r+1}^{\infty} \frac{(r+1)(r+2)^p}{(j+1)^{ps}} \\ &\leq \lim_r \sum_{j=r+1}^{\infty} \frac{(r+2)^{p+1}}{(j+1)^{ps}} = 0 \end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\lim_r g(r) = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)^{-p(s-1)} > 0 \text{ ve } L^p = f(\infty)$$

olur. ■

4.7 Terraced matrisleri

Tanım 4.2 *(a_n) kompleks herhangi bir dizi olmak üzere,*

$$a_{nk} = \begin{cases} a_n & , 0 \leq k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases} \tag{4.23}$$

şeklinde tanımlanan matrise, yani

$$R_a = (a_{nk}) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots \\ a_1 & a_1 & 0 & \cdots \\ a_2 & a_2 & a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

şeklindeki matrise terraced veya Rhaly matrisi denir. ([57] , Rhaly, 1986)

Cesàro matrisinin üçüncü genelleştirmesi, [57] den bir terraced matrisi olarak adlandırılır. Bir terraced matrisi, $\{a_n\}$ kompleks sayıların bir dizisi olmak üzere $D \in B(\ell^p)$ olacak şekilde sıfır olmayan girişleri $d_{nk} = a_n$ olan bir alt üçgensel D matrisidir. Rhaly [57] de, D yi hyponormal yapacak $\{a_n\}$ üzerindeki şartları belirlemeye çalışmıştır. Onun tahmini, $\{(n+1)\,a_n\}$, $0 < L < \infty$ olmak üzere L limitine monoton artacak şekilde $\{a_n\}$ pozitif ve sıfıra monoton azalan şartları D nin hyponormaliğini sağladığıdır. Biz burada sadece bu monoton özelliklerini sağlayan bu D matrislerini düşüneceğiz.

Teorem 4.7 *D, $\{a_n\}$ sıfıra monoton azalan ve $\{(n+1)\,a_n\}$, L $(0 < L < \infty)$ limitine monoton artan olarak yakınsak olan bir terraced matris olsun. Bu durumda, için her $p > 1$, $L^p = f(0)$ dır. ([65] , Rhoades, 1990)*

İspat. İlk olarak $\{a_n\}$ üzerindeki şartların $0 \leq a_n \leq L/(n+1)$ olmasını sağladığını not edelim ve böylece her $p > 1$ için $D \in B(\ell^p)$ dir.

<u>Durum I</u> Kabul edelim ki, $1 < p \leq 2$ olsun. Buradan

$$f(r) = \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^{r} ((j+1)\,a_j)^p + (r+1)^{p-1} \sum_{j=r+1}^{\infty} a_j^p$$

dir. Dolayısı ile

$$f(r) - f(r+1) = \frac{1}{(r+1)(r+2)} \sum_{j=0}^{r} ((j+1)\,a_j)^p - \left[(r+2)^{p-1}\,(r+1)^{p-1}\right] \sum_{j=r+1}^{\infty} a_j^p$$

bulunur. $\{(n+1)\,a_n\}$ monoton artan olduğundan,

$$\begin{aligned} f(r) - f(r+1) &< \frac{a_r^p\,(r+1)^p}{r+2} - \left[(r+2)^{p-1} - (r+1)^{p-1}\right](r+2)^p\,a_{r+1}^p \sum_{j=r+1}^{\infty} \frac{1}{(j+1)^p} \\ &< \frac{a_r^p\,(r+1)^p}{r+2} - \left[(r+2)^{p-1}\,(r+1)^{p-1}\right](r+2)^p\,a_{r+1}^p \int_{r+1}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^p} \end{aligned}$$

dir.

$\{(n+1)\,a_n\}$ monoton artan olduğundan, $\{f\,(r)\}$ nin monoton artan olduğunu göstermek için,

$$\frac{1}{r+2} < \frac{(r+2)^{p+1} - (r+1)^{p-1}}{(p-1)\,(r+2)^{p-1}}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$g\,(r) = 1 - \left(\frac{r+1}{r+2}\right)^{p-1} - \frac{p-1}{r+2}$$

tanımlayalım. $1 < p \leq 2$ için,

$$g'\,(r) = \frac{p-1}{(r+2)^2}\left[1 - \left(\frac{r+1}{r+2}\right)^{p-2}\right] \leq 0$$

dir, ve g, r ye göre monoton azalandır. $\lim_r g\,(r) = 0$ olduğundan sonuç elde edilir.

<u>Durum II</u> Kabul edelim ki, $p > 2$ olsun.

$$\begin{aligned} g\,(r) &= (r+1)\,(r+2)\,[f\,(r) - f\,(r+1)] \\ &= \sum_{j=0}^{r} ((j+1)\,a_j)^p - (r+1)\,(r+2)\left[(r+2)^{p-1} - (r+1)^{p-1}\right] \sum_{j=r+1}^{\infty} a_j^p \end{aligned}$$

tanımlayalım.

$$\begin{aligned} g\,(r) - g\,(r+1) &= -\left((r+2)\,a_{r+1}\right)^p + \left[(r+2)\,(r+3)\left\{(r+3)^{p-1} - (r+2)^{p-1}\right\}\right. \\ &\quad \left. - (r+1)\,(r+2)\left\{(r+2)^{p-1} - (r+1)^{p-1}\right\}\right] \sum_{j=r+2}^{\infty} a_j^p \\ &\quad - (r+1)\,(r+2)\left[(r+2)^{p-1} - (r+1)^{p-1}\right] a_{r+1}^p \\ &= (r+2)\,a_{r+1}^p \Delta\,(r+1)^p + (r+2)\,\Delta^2\,(r+1)^p \sum_{j=r+2}^{\infty} a_j^p \end{aligned}$$

elde edilir.

$$h\,(r) = \frac{g\,(r) - g\,(r+1)}{(r+2)\,\Delta^2\,(r+1)^p} = a_{r+1}^p \frac{\Delta\,(r+1)^p}{\Delta^2\,(r+1)^p} + \sum_{j=r+2}^{\infty} a_j^p$$

tanımlayalım. Buradan

$$h\,(r) - h\,(r+1) = \frac{a_{r+1}^p \Delta\,(r+1)^p}{\Delta^2\,(r+1)^p} - a_{r+2}^p \frac{\Delta\,(r+3)^p}{\Delta^2\,(r+2)^p}$$

elde ederiz.

$\{a_n\}$ pozitif ve monoton azalan olduğundan, h ın monoton azalan olduğunu göstermek için

$$\Delta\,(r+1)^p\,\Delta^2\,(r+2)^p \geq \Delta\,(r+3)^p\,\Delta^2\,(r+1)^p$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Onu sağlayan yukarıdaki eşitsizlik için

(i) $\Delta (r+1)^p$, r de monoton azalan, ve

(ii) $\Delta^2 (r+1)^p$, r de monoton artan

olduğunu göstermek yeterlidir.

(i) şartı , $\Delta^2 (r+1)^p \geq 0$ olmasına denktir. $m(r) = (r+1)^p$ tanımlayalım. $m''(r) = p(p-1)(r+1)^{p-2} > 0$ dır. m" ve $\Delta^2 (r+1)^p$ aynı işaretli olduğundan, (i) sağlanır. (ii) için, $m'''(r) = p(p-1)(p-2)(r+1)^{p-3} > 0$ dır. Bu yüzden $\Delta^3 (r+1)^p < 0$ ve buradan (ii) doğrudur.

$$
\begin{aligned}
\lim_r h(r) &= \lim_r \frac{\Delta (r+1)^p L}{\Delta^2 (r+1)^p (r+2)^p} \\
&= L \lim_r \frac{(r+1)^p - (r+2)^p}{(r+2)^p \left[(r+1)^p - 2(r+2)^p + (r+3)^p\right]} \\
&= L \lim_r \frac{\left(\dfrac{r+1}{r+2}\right)^p - 1}{(r+1)^p - 2(r+2)^p + (r+3)^p} \\
&= L \lim_r \frac{\left(\dfrac{r+1}{r+2}\right)^p \dfrac{1}{(r+2)^p} - \dfrac{1}{(r+2)^p}}{\left(\dfrac{r+1}{r+2}\right)^p - 2 + \left(\dfrac{r+3}{r+2}\right)^p} \\
&= L \lim_r \frac{\left(\dfrac{r+1}{r+2}\right)^{p-1} \dfrac{1}{(r+2)} - \left(\dfrac{r+1}{r+2}\right)^p + 1}{(r+1)^{p-1} - (r+3)^{p-1}} \\
&= L \lim_r \frac{\dfrac{1}{(r+2)^p} - \dfrac{r+1}{(r+2)^p} + \dfrac{1}{(r+1)^{p-1}}}{1 - \left(\dfrac{r+3}{r+1}\right)^{p-1}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= L \lim_r \frac{-\dfrac{p}{(r+2)^{p+1}} - \dfrac{1}{(r+2)^p} + \dfrac{p(r+1)}{(r+2)^{p+1}} - \dfrac{p-1}{(r+1)^p}}{-(p-1)\left(\dfrac{r+3}{r+1}\right)^{p-2}\left(-\dfrac{2}{(r+1)^2}\right)} \\
&= L \lim_r \frac{-\dfrac{p}{r+2}\left(\dfrac{r+1}{r+2}\right)^p - \left(\dfrac{r+1}{r+2}\right)^p + p\left(\dfrac{r+1}{r+2}\right)^{p+1} - (p-1)}{2(p-1)(r+3)^{p-2}} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

dır. Böylece h pozitif ve g, r de monoton azalandır.$p > 2$ olduğundan,

$$
g(0) = a_0^p - 2\left[2^{p-1} - 1\right] a_1^p - 2\left[2^{p-1} - 1\right] \sum_{j=0}^{\infty} a_j^p < 2a_1^p \left[1 - 2^{p-1} + 1\right] < 0,
$$

dır. ■

$1 < p < 2$ için üzerinde hem Rhaly genelleştirilmiş Cesàro matrisleri, hem de s-Cesàro matrisleri için alt sınır elde elde etmek açık bir problem olarak durmaktadır.

4.8 Ağırlıklı Ortalama Matrisi için alt sınır

Ağırlıklı ortalama matrisi için altsınırı bulurken (4.18) yi kullanacağız.

Bu kısımda matrislerin indislenmesi 0 dan başlanarak indislendirdik.

Bu kısmın ilk sonucu gösteriyor ki ağırlıklı ortalama metodlarının büyük bir sınıfı için $L^p = f(0)$ dır. Kalan sonuçlar özel matrisler ile ilgilidir.

- Şimdi ağırlıklı ortalama matrisinin tanımını tekrar hatırlayalım:

$\{d_n\}$, $d_0 > 0$ ile negatif olmayan dizileri göstersin.

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} d_k$$

olmak üzere A nın elemanları $0 \leq k \leq n$ için, $a_{nk} = \dfrac{d_k}{D_n}$ olan alt üçgensel matrise ağırlıklı ortalama matrisi denir. Yani;

$$A = \left(\overline{N}, d\right) = \begin{pmatrix} \frac{d_0}{D_0} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{d_0}{D_1} & \frac{d_1}{D_1} & 0 & \cdots \\ \frac{d_0}{D_2} & \frac{d_1}{D_2} & \frac{d_2}{D_2} & \cdots \end{pmatrix}$$

dır.

3. Bölümde da Ağırlıklı ortalama matrisinin sınırlılık durumları tartışılmıştı. Aşağıdaki teorem bu matris için en iyi alt sınırı belirlemektedir.

Teorem 4.8 *$1 < p < \infty$ ve $\{d_n\}$ monoton artan ve*

$$\left\{(n+1)\left(D_{n+1}/D_n\right)^P - (n+2)\right\}, \text{ } n \text{ ye göre monoton azalan} \tag{4.25}$$

sağlayan bir dizi olmak üzere, A ağırlıklı ortalama metodu olsun. Bu durumda $L^p = f(0)$ dır. (,[63] Rhoades, 1987)

İspat. Her n için $d_{n+1} > d_n$ olduğundan, Teorem 3.6 den, her $p > 1$ için $\left(\bar{N}, d\right) \in B\left(\ell^p\right)$ dir. A nın satır toplamları 1 olduğundan,

$$\begin{aligned} f\left(r\right) &= 1 + \frac{1}{r+1} \sum_{j=r+1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{r} a_{jk} \right)^p \\ &= 1 + \frac{1}{r+1} \sum_{j=r+1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{d_k}{D_j} \right)^p \\ &= 1 + \frac{D_r^P}{r+1} \sum_{j=r+1}^{\infty} D_j^{-p} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$f\left(r\right) - f\left(r+1\right) = \frac{D_r^p}{\left(r+1\right) D_{r+1}^p} + \left(\frac{D_r^p}{r+1} - \frac{D_{r+1}^p}{r+2} \right) \sum_{j=r+2}^{\infty} \frac{1}{D_j^p}$$

elde edilir.

$$g(r) := \frac{f(r) - f\left(r+1\right)}{\dfrac{D_r^p}{r+1} - \dfrac{D_{r+1}^p}{r+2}} \tag{4.26}$$

diyelim.

$$\begin{aligned} g(r) - g\left(r+1\right) &= \frac{f(r) - f\left(r+1\right)}{\dfrac{D_r^p}{r+1} - \dfrac{D_{r+1}^p}{r+2}} - \frac{f\left(r+1\right) - f\left(r+2\right)}{\dfrac{D_{r+1}^p}{r+2} - \dfrac{D_{r+2}^p}{r+3}} \\ &= \frac{\dfrac{D_r^p}{\left(r+1\right) D_{r+1}^p} + \left(\dfrac{D_r^p}{r+1} - \dfrac{D_{r+1}^p}{r+2} \right) \displaystyle\sum_{j=r+2}^{\infty} \frac{1}{D_j^p}}{\dfrac{D_r^p}{r+1} - \dfrac{D_{r+1}^p}{r+2}} \\ &\quad - \frac{\dfrac{D_{r+1}^p}{\left(r+2\right) D_{r+2}^p} + \left(\dfrac{D_{r+1}^p}{r+2} - \dfrac{D_{r+2}^p}{r+3} \right) \displaystyle\sum_{j=r+3}^{\infty} \frac{1}{D_j^p}}{\dfrac{D_{r+1}^p}{r+2} - \dfrac{D_{r+2}^p}{r+3}} \\ &= \frac{\left\{ \dfrac{D_r^p}{\left(r+1\right) D_{r+1}^p} + \left(\dfrac{D_r^p}{r+1} - \dfrac{D_{r+1}^p}{r+2} \right) \displaystyle\sum_{j=r+2}^{\infty} \frac{1}{D_j^p} \right\} (r+1)(r+2)}{(r+2) D_r^p - (r+1) D_{r+1}^p} \\ &\quad - \frac{\left\{ \dfrac{D_{r+1}^p}{\left(r+2\right) D_{r+2}^p} + \left(\dfrac{D_{r+1}^p}{r+2} - \dfrac{D_{r+2}^p}{r+3} \right) \displaystyle\sum_{j=r+2}^{\infty} \frac{1}{D_j^p} \right\} (r+2)(r+3)}{(r+3) D_{r+1}^p - (r+2) D_{r+2}^p} \\ &= \frac{D_r^p \left(r+1\right)\left(r+2\right)}{\left(r+1\right) D_{r+1}^p \left[\left(r+2\right) D_r^p - \left(r+1\right) D_{r+1}^p \right]} \\ &\quad - \frac{D_{r+1}^p \left(r+2\right)\left(r+3\right)}{\left(r+2\right) D_{r+2}^p \left[\left(r+3\right) D_{r+1}^p - \left(r+2\right) D_{r+2}^p \right]} + \sum_{j=r+2}^{\infty} \frac{1}{D_j^p} - \sum_{j=r+3}^{\infty} \frac{1}{D_j^p} \\ &= \frac{D_r^p \left(r+2\right)}{D_{r+1}^p \left[\left(r+2\right) D_r^p - \left(r+1\right) D_{r+1}^p \right]} \\ &\quad - \frac{D_{r+1}^p \left(r+3\right)}{D_{r+2}^p \left[\left(r+3\right) D_{r+1}^p - \left(r+2\right) D_{r+2}^p \right]} + \frac{1}{D_{r+2}^p} \end{aligned}$$

olur. Son iki terimi toplarsak

$$\begin{aligned} g(r)-g(r+1) &= \frac{D_r^p (r+2)}{D_{r+1}^p \left((r+2) D_r^p - (r+1) D_{r+1}^p\right)} - \frac{r+2}{(r+3) D_{r+1}^p - (r+2) D_{r+2}^p} \\ &= \frac{r+2}{D_{r+1}^p}\left[\frac{1}{(r+2)-(r+1)\left(\frac{D_{r+1}}{D_r}\right)^p} - \frac{1}{(r+3)-(r+2)\left(\frac{D_{r+2}}{D_{r+1}}\right)^p}\right] \end{aligned}$$

elde ederiz. $p > 1$ ve $x > -1$ için $(1+x)^p \geq 1+px$ Bernoulli eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} (r+2)-(r+1)\left(\tfrac{D_{r+1}}{D_r}\right)^p &= (r+2)-(r+1)\left(1+\frac{d_{r+1}}{D_r}\right)^p \\ &\leq (r+2)-(r+1)\left[1+p\frac{d_{r+1}}{D_r}\right] \\ &= r+2-r-1-p(r+1)\frac{d_{r+1}}{D_r} \\ &= 1-p(r+1)\frac{d_{r+1}}{D_r} \end{aligned}$$

sağlanır. (d_r) monoton artan olduğundan,

$$D_r = d_0 + d_1 + \cdots + d_r \leq (r+1) d_r \leq (r+1) d_{r+1} \Rightarrow 1 \leq \frac{(r+1) d_{r+1}}{D_r}$$

$$\Rightarrow 1 < p \leq \frac{p(r+1) d_{r+1}}{D_r} < 0 \Rightarrow 1 - \frac{p(r+1) d_{r+1}}{D_r} < 0$$

dir. Böylece

$$g(r)-g(r+1) = \frac{r+1}{D_{r+1}^P}\left[\frac{1}{(r+2)\left(\frac{D_{r+2}}{D_{r+1}}\right)^p - (r+3)} - \frac{1}{(r+1)\left(\frac{D_{r+1}}{D_r}\right)^p - (r+2)}\right]$$

olur. (4.25) den,

$$\left\{(r+1)\left(\frac{D_{r+1}}{D_r}\right)^P - (r+2)\right\}_{r=0}^{\infty}$$

r ye göre monoton azalan olduğundan,

$$\left\{\frac{1}{(r+1)\left(\frac{D_{r+1}}{D_r}\right)^p - (r+2)}\right\}$$

monoton artandır.

$$\Rightarrow g(r)-g(r+1) \geq 0$$

dir, böylece $\{g(r)\}_{r=0}^{\infty}$ monoton azalandır.

$$\begin{aligned}
\lim_{r\longrightarrow\infty}|g(r)| &= \lim_{r\longrightarrow\infty}\left|\frac{D_r^p(r+2)}{D_{r+1}^p[(r+2)D_r^P-(r+1)D_r^p]}+\sum_{j=r+2}^{\infty}\frac{1}{D_j^p}\right| \\
&\leq \lim_{r\longrightarrow\infty}\left|\frac{D_r^p(r+2)}{D_{r+1}^p\left((r+2)D_r^p-(r+1)D_{r+1}^p\right)}\right|+\lim_{r\longrightarrow\infty}\sum_{j=r+2}^{\infty}\left(\frac{1}{D_j^p}\right) \\
&= \lim_{r\longrightarrow\infty}\left|\frac{D_r^p(r+2)}{D_{r+1}^p\left((r+2)D_r^p-(r+1)D_{r+1}^p\right)}\right| \\
&\leq \lim_{r\longrightarrow\infty}\frac{r+2}{D_{r+1}^p\left|\underbrace{(r+2)-(r+1)\left(\frac{D_{r+1}}{D_r}\right)^p}_{<0}\right|} \\
&= \lim_{r\longrightarrow\infty}\frac{r+2}{D_{r+1}^p\left[(r+1)\left(\frac{D_{r+1}}{D_r}\right)^p-(r+2)\right]} \\
&= \lim_{r\longrightarrow\infty}\frac{r+2}{D_{r+1}^p}\frac{1}{(r+1)\left(1+\frac{d_{r+1}}{D_r}\right)^p-(r+2)} \\
&= \lim_{r\longrightarrow\infty}\frac{r+2}{D_{r+1}^p(r+1)\left(1+p\frac{d_{r+1}}{D_r}\right)-(r+2)} \\
&= \lim_{r\longrightarrow\infty}\frac{r+2}{D_{r+1}^p\left[(r+1)p\frac{d_{r+1}}{D_r}-1\right]}
\end{aligned}$$

elde ederiz. Fakat $D_r \leq (r+1)\,d_r$ olduğundan, $(r+1)\,d_r/D_r \geq 1$ dir ve böylece

$$\lim|g(r)| \leq \lim\frac{r+2}{(p-1)\,D_r^{p-1}D_r}$$

olur. Aynı zamanda, $D_r \geq (r+1)\,d_0$ olduğundan,

$$\lim|g(r)| \leq \lim\frac{d_0}{(p-1)\,D_r^{p-1}}\left[\frac{r+2}{r+1}\right]=0$$

dır. $\lim g(r)=0$ ve g pozitiftir. Fakat $D_r^p/(r+1) < D_{r+1}^p/(r+2)$ dir. Böylece (4.26) den her r için $f(r) < f(r+1)$ dir. Dolayısı ile $L^p = f(0)$ dır. ■

- İleride $\{p_n\}$ dizisi monoton artan ve

$$\text{her } r\geq 0, p>1 \text{ için } 1+(r+1)\left(\frac{D_{r+1}}{D_r}\right)-(r+2)\left(\frac{D_{r+2}}{D_{r+1}}\right)^p \geq 0$$

şartını sağlarsa A ağırlıklı ortalama matrisi için de $L^p = f(0)$ olduğu gösterilecektir.

4.9 Ağırlıklı ortalama ile uyumlu Hausdorff Matrisleri için alt sınır

Tanım 4.3 (İleri fark operatörü, fark matrisi) *$x = (x_k) \in w$ ve $k \in \mathbb{N}$ için $\Delta^n x_k$ ileri fark operatörü $\forall n \in \mathbb{N}$ için*

$$\Delta^0 x_k := x_k \ ve \ \Delta^n x_k = \Delta^{n-1} x_k - \Delta^{n-1} x_{k-1} \tag{4.27}$$

biçiminde tanımlanır.

İleri fark operatörünün bir kaç terimini yazalım

$$\begin{aligned}
\Delta^0 x_k &= x_k \\
\Delta x_k &= \Delta^0 x_k - \Delta^0 x_{k+1} = x_k - x_{k+1} \\
\Delta^2 x_k &= \Delta x_k - \Delta x_{k+1} = x_k - x_{k+1} - x_{k+1} + x_{k+2} = x_k - 2x_{k+1} - x_{k+2} \\
&\vdots \\
\Delta^n x_k &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \tbinom{n}{j} x_{k+j} \text{ ve} \\
\Delta^n x_0 &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x_j
\end{aligned} \tag{4.28}$$

eşitlikleri elde edilir.

Tanım 4.4 (Fark matrisi) *Bu eşitlik yardımıyla bu, s den s ye bir matris dönüşümü verilir. Bu normal matrise fark matrisi denir ve fark matrisinin girişi;*

$$a_{nk} = \Delta_{nk} := \begin{cases} (-1)^k \dbinom{n}{k} & , \ k \leq n \\ 0 & , \ k > n \end{cases} \tag{4.29}$$

biçimindedir. Biz fark matrisini $\Delta = (\Delta_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ ile göstereceğiz.

Şimdi Hausdorff matrislerini tanımlayabiliriz.

Tanım 4.5 (Hausdorff matrisleri) *$p = (p_n) \in s$ dizisi verilsin. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{nn} = p_n$ ve $\forall n, k \in \mathbb{N}$, $n \neq k$ için $a_{nk} = 0$ olmak üzere $diag\,(p_n) := (a_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ matrisini tanımlayalım. Budurumda*

$$(H, P) := \Delta diag\,(p_n)\,\Delta \tag{4.30}$$

biçiminde tanımlanan matrise p ile üretilen Hausdorff matrisi denir.

Teorem 4.9 *Eğer* $p, q \in w$ *için* pq *ile* $(p_n q_n)$ *dizisini ve* p^{-1} *ile de her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $p_n \neq 0$ *olmak üzere* $\left(\dfrac{1}{p_n}\right)$ *dizisini gösterirsek,* (H, p) *ve* (H, q) *Hausdorff matrisleri için yukarıdaki açıklamalar yardımıyla aşağıdaki ifadeler elde edilir.*

(a) $(H, p) = (h_{nk})_{n,k\in\mathbb{N}}$ *için*

$$h_{nk} := \begin{cases} \dbinom{n}{k} \Delta^{n-k} p_k & , \quad k \leq n \\ \quad 0 & , \quad k > n \end{cases} \tag{4.31}$$

geçerlidir. (H, p) , $h_{nn} = p_n$ *diagonal kümenin elemanları ile bir alt üçgensel matristir.*

(b) *Eğer her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $p_n \neq 0$ *ise* (H, p) *normaldir.*

(c) $(H, p) + (H, q) = (H, p + q)$

(d) $\Delta\Delta = I$, $\Delta^{-1} = \Delta$

(e) $(H, p)(H, q) = (H, pq)$ *ve* $(H, p)^r = (H, p^r)$, $r = 0, 1, 2, \ldots$ *geçerlidir.*

(f) (H, p) *normal olsun. Bu durumda* $(H, p)^{-1} = (H, p^{-1})$ *geçerlidir.*

Örnek 4.2 $t \in K$ *sabit ve* $\mu_n = t^n$ *olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} \Delta\mu_n &= \Delta^0\mu_n - \Delta^0\mu_{n+1} = \mu_n - \mu_{n+1} = t^n - t^{n+1} = (1-t)\, t^n \\ \Delta^2\mu_n &= \Delta(1-t)\, t^n = \Delta^0 (1-t)\, t^n - \Delta^0 (1-t)\, t^{n+1} \\ &= (1-t)\, t^n - (1-t)\, t^{n+1} = (1-t)\left(t^n - t^{n+1}\right) = (1-t)^2\, t^n \\ &\vdots \\ \Delta^k\mu_n &= (1-t)^k\, t^n \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$h_{nk}(t) := \Delta_k^{n-k}\mu_k = \binom{n}{k} (1-t)^{n-k}\, t^k, \;\; (k \leq n \text{ için})$$

matrisi olur.

Örnek 4.3 $\mu_n = \int\limits_0^1 t^n dt$ *olsun. Böylece,*

$$h_{nk} = \int\limits_0^1 h_{nk}(t)dt = \int\limits_0^1 \binom{n}{k}(1-t)^{n-k}t^k dt = \frac{1}{n+1}, \;\; (k \leq n \text{ için})$$

dir. Böylece $\mu_n = \int\limits_0^1 t^n dt$ *ile* $H_\mu = (C, 1)$ *elde edilir. Yani; Cesáro Matrisi bir özel Hausdorff matrisidir.*

Örnek 4.4 *Q matrisi; $Q_1 x = 0$ ve $n \geq 2$ iken $Q_n x = \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$ ile tanımlansın. Bu durumda Q bir Hausdorff matrisi değildir. Çünkü Q , $(C,1)$ ile değişmeli değildir.*

Teorem 4.10 *Aynı zamanda Hausdorff matrisi de olan tek $\left(\overline{N}, p_n\right)$ ağırlıklı ortalama matrisleri, $n > 0$ için $p_n = 0$ veya $p_n = \Gamma(n+\alpha)/\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha), \alpha > 0$ şeklindedir. ([44] , Kutner ve Rhoades, 1968)*

İspat. A, bir $\left(\overline{N}, p_n\right)$ metoduna karşılık gelen matrisi göstersin. Aynı zamanda A, bir μ dizi tarafından üretilen bir Hausdorff matrisi olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$a_{nn} = \frac{p_n}{P_n} = \mu_n,\ a_{n,n-1} = \frac{p_{n-1}}{P_n} = n\Delta\mu_{n-1} = n\left(\mu_{n-1} - \mu_n\right)$$

dir.

$$\frac{p_{n-1}}{P_n} = \frac{p_{n-1}}{P_{n-1}}\frac{P_{n-1}}{P_n} = \mu_{n-1}(1-\mu_n)$$

yazabiliriz. Bu durumda

$$\mu_{n-1}(1-\mu_n) = n\left(\mu_{n-1} - \mu_n\right) \text{ veya } (n-1)\mu_{n-1} = \left(n - \mu_{n-1}\right)\mu_n \tag{4.32}$$

elde ederiz. $\mu_0 = c$ olsun. Bu durumda (4.32) dan $(1-\mu_0)\mu_1 = 0$ ve buradan ya $\mu_1 = 0$ veya $\mu_0 = 1$ dir. Eğer $\mu_1 = 0$ ise bu durumda her $n > 1$ için $\mu_n = 0$ dır ve dizi dizi $p_0 = \mu_0 = c$, $n > 0$ için $p_n = \mu_n = 0$ dır. Eğer $\mu_1 \neq 0$ ise bu durumda $\mu_0 = 1$ dir. Bu durumda μ_1 keyfidir. $\mu_1 = \alpha \neq 0$ olsun. Her $n > 1$ için (4.32) dan

$$\mu_n = \frac{(n-1)\mu_{n-1}}{n - \mu_{n-1}}$$

veya

$$\mu_n = \frac{\alpha}{n-(n-1)\alpha} = \frac{\alpha}{(1-\alpha)n + \alpha} = \frac{a}{n+a} \ni a = \frac{\alpha}{1-\alpha} \tag{10}$$

(10) dan $\alpha = 1$ olamaz, tüm n ler için $\mu_n = 1$ olur ki, bu da birim matrisi verir. Fakat $\left(\overline{N}, p_n\right)$ metodunun birim matris üretmesi imkansızdır. Basit bir hesaplama, (10) a karşılık gelen (p_n) dizisi,

$$p_n = \frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+1)\Gamma(a)}$$

dır, böylece kendimizi $a > 0$ a kısıtlayabiliriz. ■

Şimdi Teorem 4.8 in bir sonucunu aşağıda verebiliriz.

Sonuç 4.2 *$1 < p < \infty$ ve H, $\mu_n = a/(n+a)$, $a > 1/p$ ile üretilen Hausdorff matrisi olsun. Bu durumda $L^p = f(0)$ dır. ([63] , Rhoades, 1987) ve ([55] , Renaud, 1986)*

(,[61] sh. 92) den, $H \in B(\ell^p)$ dir. Teorem 4.10 den, H aynı zamanda $d_n/D_n = a/(n+a)$ ile ağırlıklı ortalama matrisidir. Böylece,

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{d_0(n+a)}{\Gamma(a)(n+1)}, \\ D_n &= \frac{d_0\Gamma(n+a+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(n+1)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} h(r) &= (r+1)\left(1+\frac{a}{r+1}\right)^p - (r+2) \\ h'(r) &= \left(1+\frac{a}{r+1}\right)^p - \frac{ap}{r+1}\left(1+\frac{a}{r+1}\right)^{p-1} - 1 \\ h''(r) &= \frac{a^2p(p+1)}{(r+1)^3}\left(1+\frac{a}{r+1}\right)^{p-2} \end{aligned}$$

dir. $p > 1$ olduğundan, h', r ye göre monotone azalandır. Fakat $\lim h'(r) = 0$ dır; böylece h, r ye göre monoton artandır.

Sonuç 4.3 *C için $L^p = f(0)$ dır. ([63] , Rhoades, 1987)*

(,[61] p. 92) de, her $p > 1$ için $C \in B(\ell^p)$ olduğu gösterildi. Cesaro matrisi her n için $d_n = 1$ olan bir ağırlıklı ortalama matrisidir. Sonuç 4.2 i uygulamak yeterlidir. Ağırlıklı ortalama metodunda $d_n = (n+1)^\alpha$, $\alpha = 1, 2, 3$ alarak $L^p = f(0)$ olduğunu görürüz. Makul bir varsayım, tüm pozitif α için de aynıdır.

Teorem 4.11 *$(C, 2)$ için $L^2 = f(0)$ dır. ([63] , Rhoades, 1987)*

(C, α) nın girişleri,

$$a_{nk} = \frac{\alpha\Gamma(n+1)\Gamma(n-k+\alpha)}{\Gamma(n-k+1)\Gamma(n+\alpha+1)} = \frac{\alpha\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)}.\frac{\Gamma(n-k+\alpha)}{\Gamma(n-k+1)}$$

ve

$$\sum_{k=0}^{r} a_{jk} = 1 - \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(j-r+\alpha)}{\Gamma(j+\alpha+1)\Gamma(j-r)}$$

$\alpha = p = 2$ için,

$$\begin{aligned} f(r) &= 1+\frac{1}{r+1}\sum_{j=r+1}^{\infty}\tfrac{1}{D_j^2} \\ &= 1+\frac{1}{r+1}\sum_{j=r+1}^{\infty}\left[\frac{(r+1)(r+2)}{j+2}-\frac{r(r+1)}{j+1}\right]^2 \\ &= 1+(r+1)\sum_{j=r+1}^{\infty}\left[\frac{(r+2)^2}{(j+2)^2}+\frac{r^2}{(j+1)^2}\right]-2r(r+1) \\ &= 1-2r(r+1)+\frac{(r+1)r^2}{(r+2)^2}+(r+1)\left((r+2)^2+r^2\right)\sum_{j=r+2}^{\infty}(j+1)^{-2} \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} f(r)-f(r+1) &= 4(r+1)+\frac{(r+1)r^2}{(r+2)^2}+\frac{(r+1)(r^2+r+2)}{(r+3)^2} \\ &\quad -2(3r^2+9r+8)\textstyle\sum_{j=r+3}^{\infty}(j+1)^{-2} \end{aligned}$$

olur.

$$g(r):=\frac{f(r)-f(r+1)}{3r^2+9r+8}$$

alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} &g(r)-g(r+1) \\ &= \frac{r+1}{3r^2+9r+8}\left[4+\frac{r^2}{(r+2)^2}+\frac{r^2+r+2}{(r+3)^2}\right] \\ &-\frac{(r+2)}{3(r+1)^2+9(r+1)+8}\left[4+\frac{(r+1)^2}{(r+3)^2}+\frac{(r+1)^2+r+3}{(r+4)^2}\right]-\frac{2}{(r+4)} \\ &= \frac{(r+1)(6r^4+51r^3+167r^2+252r+152)}{(3r^2+9r+8)(r+2)^2(r+3)^2} \\ &-\frac{(r+2)\left[6(r+1)^4+51(r+1)^3+167(r+1)^3+252r+404\right]}{(3r^2+15r+20)(r+3)^2(r+4)^2}-\frac{2}{(r+4)} \end{aligned}$$

Bu nedenle g, r ye göre monoton artandır. $\lim g(r)=0$ olduğundan, g negatiftir ve f, r ye göre artandır.

Sonuç 4.4 *$\alpha > 0$ olmak üzere, (C,α) için $L^p = f(0)$ dir. ([63] , Rhoades, 1987)*

4.10 Bazı Factorable matrisler için alt sınırlar

Tanım 4.6 *(a_n) ve (b_n) kompleks herhangi iki dizi olmak üzere,*

$$a_{nk}=\begin{cases} a_k b_n & , 0\le k\le n \\ 0 & , k>n \end{cases} \tag{4.33}$$

şeklinde tanımlanan matrise, yani

$$A = (a_{nk}) = \begin{pmatrix} a_0 b_0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 a_0 & a_1 b_1 & 0 & \cdots \\ b_2 a_0 & b_2 a_1 & b_2 a_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

şeklindeki matrise çarpım (Factorable) matrisi denir. ([3] , Bennett, 1987)

Uyarı. Bu matrisler arasında en genel matris çarpım matrisidir. Mesela Factorable matriste $a_n = 1/(n+1)$, $b_k = 1$ alınırsa Cesaro matrisi, $a_k = a_k$ ve $b_n = 1/\sum_{k=0}^{n} a_k$ alınırsa Ağırlıklı ortalama matrisini elde ederiz. Dolayısı ile ileride bu matris için elde edeceğimiz sonuçlar, onun Cesaro matrisi, p-Cesaro matrisi, Rhaly matrisi ve Ağırlıklı ortalama matrisine indirgendiğinden daha önce bu matrisler için elde edilen sonuçlarla uyuşması gerektiğine de dikkat edilmelidir.
ℓ_p üzerinde sınırlı lineer operatör olarak düşünülen Rhaly matris sınıfları için alt sınırları belirlenecek ve Rhoades [65] ın sonuçlarının ispatlarını sağlatılacak ve düzeltilecek.

Teorem 4.12 *(x_n) monoton azalan negatif olmayan bir dizi ve $1 < p < \infty$ olmak üzere negatif olmayan girişler ile $A \in B(\ell^p)$ olsun. Bu durumda*

$$L^p := \inf_r (r+1)^{-1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{r} a_{jk} \right)^p = \inf_r f(r) \tag{4.35}$$

olmak üzere

$$\|Ax\|_p \geq L \|x\|_p \tag{4.36}$$

dir. ([2] , Bennett, 1986)

$A = C$ için, C nin ilk kolonunun p. kuvvetlerinin toplamı olan minimum $f(0)$ da oluşur. Bennett in sonuçunun ispatı, belirli bir matris veya matris sınıfı için L^p bulma göreviyle karşılaştırıldığında nispeten kolaydır.
a_n sadece n ye bağlı ve b_k sadece k ya bağlı olmak üzere sıfır olmayan a_{nk} girişleri $a_n b_k$ formunda yazılabilen bir factorable matrisi bir alt üçgensel matristir. Rhaly[57, 58, 59] üç sınıf matris sınıfını tanımlamıştır; bunların hepsi factorable niteliktedir.

[65] de Rhoades, Rhaly matrisleri için alt sınır sorularını araştırdı ve bazı kısmi sonuçlar elde etti. Bu bölümde, factorable matrislerin özel durumları olarak Rhaly matrislerinin çalışmasına geri döneceğiz. Bu bölüm üç önemli açıdan [65] den farklıdır. Birincisi, genel bir sonuç ispatlanmış ve [65] in teoremleri özel haller olarak ele alınmıştır. İkinci olarak, [65] in sonuçlarının tümü $p > 1$ e genişletildi. Üçüncü olarak, burada geliştirilen genel prosedürün bir uygulaması olarak [**?**] nin yeni bir ispatı yapılacak ve $p_n = (n+1)\,\alpha$, $\alpha \geq 1$ olan ağırlıklı ortalama metotları için, $L^p = f(0)$ olduğu doğrulanacak.

Her (x_n) dizi için, Δ ileri fark operatorü $\Delta x_n = x_n - x_{n+1}$, ve $\Delta^{m+1} x_n = \Delta(\Delta^m x_n)$ ile tanımlanır.

Teorem 4.13 *A, pozitif girişli, satır toplamları t_n bir factorable matris, ve (a_n) monoton azalan olsun. Bu durumda $f(0) = L^p$ için gerekli şartlar $y_r = t_r / a_r$,*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{a_{r+1}^p \Delta y_{r+1}^p}{\Delta^2 y_r^p} \geq 0 \tag{4.37}$$

$$t_0^p + 2\Delta y_0^p \sum_{j=1}^{\infty} a_j^p \leq 0 \tag{4.38}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Delta y_r^p &< 0 && (4.39)\\ \Delta^2 y_r^p &> 0 \\ \Delta^2 \left(\frac{1}{\Delta y_r^p}\right) &\leq 0 && (4.40) \end{aligned}$$

olmasıdır ([66] , Rhoades ve Sen,2006).

İspat.

$$t_n = a_n \sum_{k=0}^{n} b_k,\; y_n = \frac{t_n}{a_n}$$

ile

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{r} a_{jk} \right)^p \\ &= \frac{1}{r+1} \left[\sum_{j=0}^{r} \left(\sum_{k=0}^{j} a_{jk} \right)^p + \sum_{j=r+1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{r} a_{jk} \right)^p \right] && (4.41) \\ &= \frac{1}{r+1} \left[\sum_{j=0}^{r} t_j^p + y_r^p \sum_{j=r+1} a_j^p \right] \end{aligned}$$

$$f(r)-f(r+1)=\frac{1}{(r+1)(r+2)}\sum_{j=0}^{r}t_j^p-\frac{t_{r+1}^p}{r+2}+\frac{y_r^pa_{r+1}^p}{r+1}+\Delta\left(\frac{y_r^p}{r+1}\right)\sum_{j=r+2}^{\infty}a_j^p$$

dir.

$$-\frac{t_{r+1}^p}{r+2}+\frac{y_r^pa_{r+1}^p}{r+1}=\frac{y_r^pa_{r+1}^p}{r+1}-\frac{(a_{r+1}y_{r+1})^p}{r+2}=a_{r+1}^p\Delta\left(\frac{y_r^p}{r+1}\right) \tag{4.42}$$

olduğunu not edelim. Böylece

$$f(r)-f(r+1)=\frac{1}{(r+1)(r+2)}\sum_{j=0}^{r}t_j^p+\Delta\left(\frac{y_r^p}{r+1}\right)\sum_{j=r+1}^{\infty}a_j^p \tag{4.43}$$

dir.

$$\begin{aligned} g(r) &:= (r+1)(r+2)\left[f(r)-f(r+1)\right] \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^{r}t_j^p+(r+1)(r+2)\Delta\left(\frac{y_r^p}{r+1}\right)\displaystyle\sum_{j=r+1}^{\infty}a_j^p \end{aligned} \tag{4.44}$$

tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} &g(r)-g(r+1) \\ &=-t_{r+1}^p+(r+2)\left[(r+1)\Delta\left(\tfrac{y_r^p}{r+1}\right)-(r+3)\Delta\left(\tfrac{y_{r+1}^p}{r+2}\right)\right]\textstyle\sum_{j=r+2}^{\infty}a_j^p \\ &+(r+1)(r+2)\Delta\left(\tfrac{y_r^p}{r+1}\right)a_{r+1}^p \end{aligned} \tag{4.45}$$

dir, fakat

$$\begin{aligned} (r+1)\Delta\left(\tfrac{y_r^p}{r+1}\right) &-(r+3)\Delta\left(\tfrac{y_{r+1}^p}{r+2}\right) \\ &=(r+1)\left[\tfrac{y_r^p}{r+1}-\tfrac{y_{r+1}^p}{r+2}\right]-(r+3)\left[\tfrac{y_{r+1}^p}{r+2}-\tfrac{y_{r+2}^p}{r+3}\right] \\ &=y_r^p-\tfrac{(r+1)y_{r+1}^p}{r+2}-\tfrac{(r+3)y_{r+1}^p}{r+2}+y_{r+2}^p=\Delta^2y_r^p \\ &-t_{r+1}^p+(r+1)(r+2)\Delta\left(\tfrac{y_r^p}{r+1}\right)a_{r+1}^p \\ &=-(a_{r+1}y_{r+1})^p+(r+1)(r+2)\left(\tfrac{y_r^p}{r+1}-\tfrac{y_{r+1}^p}{r+2}\right)a_{r+1}^p \\ &=a_{r+1}^p\left[-y_{r+1}^p+(r+2)y_r^p-(r+1)y_{r+1}^p\right]=a_{r+1}^p(r+2)\Delta y_r^p \end{aligned} \tag{4.46}$$

dir. Böylece

$$g(r)-g(r+1)=(r+2)a_{r+1}^p\Delta y_r^p+(r+2)\Delta y_r^p\sum_{j=r+2}^{\infty}a_j^p \tag{4.47}$$

dır.

$$h(r):=\frac{g(r)-g(r+1)}{(r+2)\Delta^2y_r^p}=\frac{a_{r+1}^p\Delta y_r^p}{\Delta^2y_r^p}+\sum_{j=r+2}^{\infty}a_j^p$$

tanımlayalım.

$$\begin{aligned} h(r)-h(r+1) &= \frac{a^p_{r+1}\Delta y^p_r}{\Delta^2 y^p_r} + a^p_{r+2}\left(1-\frac{\Delta y^p_{r+1}}{\Delta^2 y^p_{r+1}}\right) \\ &= \frac{1}{\Delta^2 y^p_r \Delta^2 y^p_{r+1}}\left[a^p_{r+1}\Delta^2 y^p_{r+1}\Delta y^p_{r+1} + a^p_{r+2}\Delta^2 y^p_r\left(-\Delta y^p_{r+2}\right)\right] \\ &= \frac{\Delta y^p_r \Delta y^p_{r+2}}{\Delta^2 y^p_r \Delta^2 y^p_{r+1}}\left[\frac{a^p_{r+1}\Delta^2 y^p_{r+1}}{\Delta^2 y^p_{r+2}} - a^p_{r+2}\left(1-\frac{\Delta y^p_{r+1}}{\Delta^2 y^p_r}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.48}$$

ve $h(r)-h(r+1)\geq 0$ dir ancak ve ancak

$$a^p_{r+1}\left(\frac{\Delta y^p_{r+1}}{\Delta y^p_{r+2}}-1\right) - a^p_{r+2}\left(1-\frac{\Delta y^p_{r+1}}{\Delta y^p_r}\right)\geq 0 \tag{4.49}$$

dır. (a_r) monoton azalan olduğundan,

$$\frac{\Delta y^p_{r+1}}{\Delta y^p_{r+2}}-1\geq 1-\frac{\Delta y^p_{r+1}}{\Delta y^p_r}; \tag{4.50}$$

yani,

$$\Delta y^p_{r+1}\left(\frac{1}{\Delta y^p_r}+\frac{1}{\Delta y^p_{r+2}}\right)\geq 2 \tag{4.51}$$

elde etmek yeterlidir. (4.39) kullanılarak, $\Delta y^p_{r+1} > \Delta y^p_{r+2}$ ve $\Delta y^p_{r+1} < \Delta y^p_r$ elde edilir. $\Delta y^p_r < 0$ olduğundan, yukarıdaki eşitsizlik (4.40) e denktir. Böylece h, r de monoton azalandır. (4.37) dan, h negatif olmayandır, böylece g, r de monoton azalandır. (4.38) den, $g(0)$ negatiftirtir, böylece f, r de monoton artandır. ■

Lemma 4.4 *$u(r)=1/\Delta v(r)$ ile $(u(r))$ ve $(v(r))$ dizilerini tanımlayalım. Bu durumda $\Delta^2 u(r)$,*

$$\Delta^2 u(r) = \frac{1}{\Delta v(r)}\left[\frac{2\Delta^2 v(r)\,\Delta^2 v(r+1)}{\Delta v(r+1)\,\Delta v(r+2)} - \frac{\Delta^3 v(r)}{\Delta v(r+2)}\right] \tag{4.52}$$

formunda yazılabilir ([66] , Rhoades ve Sen,2006).

İspat. $u(r)=1/\Delta v(r)$ denklemi

$$\Delta u(r)\,\Delta v(r) + u(r+1)\,\Delta^2 v(r) = 0 \tag{4.53}$$

veya

$$\Delta u(r) = \frac{u(r+1)\,\Delta^2 v(r)}{\Delta v(r)} \tag{4.54}$$

olmasını sağlar. Böylece

$$\Delta^2 u(r)\,\Delta v(r) + 2\Delta u(r+1)\,\Delta^2 v(r) + u(r+2)\,\Delta^3 v(r) = 0 \tag{4.55}$$

veya

$$\Delta^2 u(r) = \frac{1}{\Delta v(r)}\left[-2\Delta^2 v(r)\left(-\frac{u(r+2)\,\Delta^2 v(r+2)}{\Delta v(r+1)}\right) - \frac{\Delta^3 v(r)}{\Delta v(r+2)}\right] \tag{4.56}$$

dır. ■

Lemma 4.5 *Kabul edelim ki $v \in C^3[0,\infty)$ olsun. Eğer, her $r > 0$, $p > 1$ için*
(a) $v' > 0$,
(b) $v'' > 0$,
(c) $2(v'')^2 - v'v' > 0$,
den biri sağlanırsa, bu durumda $\Delta^2 u(r) \leq 0$ dir ([66] , Rhoades ve Sen,2006).

İspat. (a) ve (b) şartları $\Delta v(r) < 0$ ve $\Delta^2 v(r) > 0$ olmasını sağlar. Bu yüzden, (4.52) den, $\Delta^2 u(r) \leq 0$ dır. ■
Rhaly genelleştirilmiş Cesàro matrisleri [57] , $0 < t < 1$ olmak üzere $a_n = t^n/(n+1)$, $b_k = t^{-k}$ ile sıfır olmayan girişli factorable matristir. Eğer $t = 1$ ise, matris C ye indirgenir.

Teorem 4.14 *$p > 1$ olsun. Bu durumda, Rhaly genelleştirilmiş Cesàro matrisleri için, t_0 olmak üzere $t_0 \leq t < 1$ için $L^p = f(0)$,*

$$1 - 2\left[\left(\frac{1+t_0}{t_0}\right)^p - 1\right]\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{t_0^j}{j+1}\right)p = 0 \tag{4.57}$$

olmasını sağlar ([66] , Rhoades ve Sen,2006).

İspat. İlk olarak, Lemma 4.5 ün (a)–(c) şartlarının sağlandığını gösterelim. Açıkça,

$$t_n = \frac{1-t^{n+1}}{(n+1)(1-t)},\ y_n = \frac{1-t^{n+1}}{t^n(1-t)} \tag{4.58}$$

dır. Böylece

$$\begin{aligned} v(r) &= \frac{1}{(1-t)^p}\left(\frac{1-t^{n+1}}{t^r}\right)^p, \\ v'(r) &= \frac{pt^{-r}\log(1/t)}{(1-t)^p}\left(t^{-r}-t\right)^{p-1}, \\ v''(r) &= p(1-t)^{-p}\left(t^{-r}-t\right)^{p-2}\left(pt^{-2r}-t^{-r+1}\right)\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 \end{aligned} \tag{4.59}$$

ve (a) ve (b) sağlanır.

$$\begin{aligned} v'''(r) &= p(1-t)^{-p}\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 (p-2)(t^{-r}-t)^{p-3}(-t^{-r}\log t)(pt^{-2r}-t^{-r+1}) \\ &\qquad + (t^{-r}-t)^{p-2}(-2pt^{-2r}\log t + t^{-r+1}\log t) \\ &= p(1-t)^{-p}(t^{-r}-t)^{p-3}t^{-3r}\left(\log\left(\tfrac{1}{t}\right)\right)^3 \\ &\quad \times\left[(p-2)(p-t^{r+1}) + (t^{-r}-t)(2pt^r - t^{2r+1})\right] \end{aligned} \tag{4.60}$$

Bu durumda

$$w(r) = p^2 - (p+1)t^{r+1} + t^{2r+2} \tag{4.61}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} 2(v'')^2 - v'v''' &= 2\left[p(1-t)^{-p}(t^{-r}-t)^{p-2}(pt^{-2r}-t^{-r+1})\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2\right]^2 \\ &\quad - p(1-t)^{-p}t^{-r}\log\left(\frac{1}{t}\right)(t^{-r}-t)^{p-1} \\ &\quad \times p(1-t)^{-p}(t^{-r}-t)^{p-3}t^{-3r}\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^3 \\ &\quad \times\left[p^2-(3p-1)t^{r+1}+t^{2r+2}\right] \\ &= p^2t^{-4r}(1-t)^{-2p}\left(\log\left(\frac{1}{t}\right)\right)^4 (t^{-r}-t)^{2p-4}w(r,p) \end{aligned} \tag{4.62}$$

olduğu görülür. $p \geq 1$ için $w(r) > 0$ olduğunu not edelim. Bu yüzden, w, r de monoton artandır. $w(r) > 0$ olduğundan, $0 < t < 1$, $r \geq 0$ için w positiftir ve (4.40) şartı sağlanır. Böylece h, r de monoton azalandır:

$$\begin{aligned} \lim_{r\to\infty} h(r) &= \lim_{r\to\infty}\left(\tfrac{t^{r+1}}{r+2}\right)^p \times \\ &\times\frac{\left[(1/(1-t)^p)\left\{(1-t^{r+2}/t^{r+1})^p - (1-t^{r+3}/t^{r+2})^p\right\}\right]}{\left[(1/(1-t)^p)\left\{(1-t^{r+1}/t^r)^p - 2(1-t^{r+2}/t^{r+1})^p + (1-t^{r+3}/t^{r+2})^p\right\}\right]} \end{aligned} \tag{4.63}$$

dir.

Parantezdeki ifadenin limiti $(t^p-1)/(t^p-1)^2$ olduğundan, $\lim_{r\to\infty} h(r) = 0$ dir ve Teorem **??** nin (4.37) şartı of sağlanır; yani, g, p de monoton azalandır,

$$g(0) = t_0^p + 2\left[y_0^p - y_1^p\right]\sum_{j=1}^{\infty} a_j^p = 1 - 2\left[\left(\frac{1+t}{t}\right)^p - 1\right]\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{t^j}{j+1}\right)^p =: q(t,p)$$

diyelim.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial t} &= -2p\left(\frac{1+t}{t}\right)^{p-1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{t^j}{j+1}\right)^p \\
&-2\left[\left(\frac{1+t}{t}\right)^p-1\right]\sum_{j=1}^{\infty}\frac{pjt^{j-1}}{(j+1)p} \\
&= 2p\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{t^j}{j+1}\right)^p\left[\left(\frac{1+t}{t}\right)^{p-1}\frac{1}{t^2}-\left(\left(\frac{1+t}{t}\right)^p-1\right)\frac{j}{t}\right]
\end{aligned}
\tag{4.64}
$$

dir. j nin katsayısı negatif olduğundan, parantezdeki ifade j ye göre monoton azalandır. $j=1$ için,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{t^2}\left[\left(\frac{1+t}{t}\right)^{p-1}+t-t\left(\frac{1+t}{t}\right)^p\right] &= \frac{1}{t^2}\left[\left(\frac{1+t}{t}\right)^{p-1}(1-1-t)+t\right] \\
&= \tfrac{1}{t}\left[1-\left(\frac{1+t}{t}\right)^{p-1}\right]<0
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

olur ve q, t ye göre monoton azalandır.

$$
q\left(1,p\right)=1-2\left[2^p-1\right]\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(j+1)^p}
\tag{4.66}
$$

dir. parantezdeki fonksiyon $p>1$ için p de konvekstir. Böylece aynı zamanda seride öyledir. Bu yüzden, çarpım da öyledir. -1 ile çarparak, fonksiyon konkav olur. 1 de konkav olduğundan, $q\left(1,p\right)$, $p>1$ için p nin konkav fonksiyonudur.

$$
\lim_{p\to\infty}q\left(1,p\right)=0
\tag{4.67}
$$

olduğundan, t_0 (4.57) ü sağlamak üzere bütün $t>t_0$ için $g\left(0\right)$ negatiftir; yani, Teorem **??** nin (4.38) sağlanır ve $L^p=f\left(0\right)$ olur. ■

Rhaly $s-$Cesàro matrisleri, $a_n=(n+1)^{-s}$ ve her $b_k=1$ sıfır olmayan girişleri ile factorable matristir.[58] Böylece $t_n=(n+1)^{1-s}$ ve $y_n=n+1$ dir.

Teorem 4.15 *Rhaly $s-$Cesàro matrisleri için, $p,s>1$ olmak üzere $L^p=f\left(\infty\right)$ dir ([66] , Rhoades ve Sen,2006).*

İspat.

$$
A=\frac{-s(r+2-s\left(r+1\right))}{2p(p-1)\left(r+2\right)^{s-1}}\left(\left(\frac{r+1}{r+2}\right)^p-1\right)
\tag{4.68}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
\lim_r h(r) &= \lim_r \tfrac{a_{r+1}^p \Delta y_r^p}{\Delta^2 y_r^p} \\
&= \lim_r \frac{\left[(r+1)^P - (r+2)^p\right]}{(r+2)^s\left[[(r+1)^p - 2(r+2)^p + (r+3)^p\right]} \\
&= \lim_r \frac{(1/(r+2)^s)\left[1-((r+2)/(r+1))^p\right]}{(1-2((r+2)/(r+1))^p + ((r+3)/(r+2))^p)} \\
&= \lim_r((-s/(r+2)^{s+1})\left[1-((r+2)/(r+1))^p\right] \\
&\quad -(-p/(r+2)^s)((r+2)/(r+1))^{p-1}(-1/(r+1)^2)) \\
&\quad /(-2p((r+2)/(r+1))^{p-1}(-1/(r+1)^2) \\
&\quad +p((r+3)/(r+1))^{p-1}(-2/(r+1)^2)) \\
&= \lim_r((-s(r+1)^2/2p(r+2)^{s+1})[1-((r+2)/(r+1))^p] \\
&\quad +(1/(r+2)^s)((r+2)/(r+1))^{p-1}) \\
&\quad /(((r+2)/(r+1))^{p-1} - ((r+3)/(r+1))^{p-1}) \\
&= \lim_r \frac{(-s(r+1)/2p(r+2)^{s+1})[(r+1)^p-(r+2)^p] + ((r+2)^{p-1}/(r+2)^s)}{(r+2)^{p-1}-(r+3)^{p-1}} \\
&= \lim_r \frac{(-s(r+1)/2p(r+2)^s)[((r+1)/(r+2))^p - 1] + 1/(r+2)^s}{1-((r+3)/(r+2))^{p-1}} \\
&= \lim_r(-s(r+2)^2/2p)((r+2-s(r+1))/(r+2)^{s+1})((r+1)/(r+2))^p - 1) \\
&\quad -(s/2p(r+2)^{s-1})((r+1)/(r+2))^p - (s/(r+2)^{s-1}) \\
&\quad /(p-1)((r+3)/(r+2))^{p-2} = \lim_r A,
\end{aligned}
\tag{4.69}
$$

Eğer $s \geq 2$ ise bu durumda açıkça $\lim_r A = 0$ dır. Kabul edelimki $1 < s < 2$ olsun.

$$
\begin{aligned}
\lim_r A &= \lim_r \tfrac{(-s/2p(p-1))[((r+1)/(r+2))^p - 1]}{(r+2)^{s-1}/(r+2-s(r+1))} \\
&= \tfrac{(-s/2)((r+1)/(r+2))^{p-1}}{((r+2)^2(s-1)/(r+2-s(r+1))^2)[r+2-s(r+1)+r+2]} = 0
\end{aligned}
\tag{4.70}
$$

dır. Böylece g, r de monoton artandır. 4.12 den ispat tamamlanır ve $L^p = f(\infty)$ dır. ■

Rhaly terraced matrisleri, (a_n) monoton azalan pozitif bir dizi ve $\lim(n+1)a_n$ mevcut olmak üzere her $b_k = 1$ ve $a_n = a_n$ olan factorable matristir.[59] Açıkça, $t_n = (n+1)a_n$ ve $y_n = n+1$ dir.

Teorem 4.16 *Rhaly terraced matrisleri için $p > 1$ olmak üzere $L^p = f(0)$ dır ([66] , Rhoades ve Sen,2006).*

İspat. Teorem 4.15 daki aynı h da s ile p yerdeğiştirirse,

$$h(r) = \frac{[(r+1)^p - (r+2)^p]}{(r+1)^p\,[(r+1)^p - 2(r+2)^p + (r+3)^p]}$$

olur, böylece $\lim_r h(r) = 0$ dır. g, r ye göre monoton azalandır, (a_n) monoton azalan olduğundan,

$$\begin{aligned} g(0) &= a_0^p + 2\left[1 - 2^{p-1}\right]\sum_{j=1}^{\infty} a_j^p \\ &= a_0^p - 2\left(2^{p-1} - 1\right)a_1^p - 2\left(2^{p-1} - 1\right)\sum_{j=2}^{\infty} a_j^p < 0 \end{aligned} \tag{4.71}$$

dır. Bu yüzden $L^p = f(0)$ dır. ■

Bir ağırlıklı ortalama matrisi, $\{d_k\}$, $a_0 > 0$ ve $D_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$ olacak şekilde bir negatif olmayan dizi olmak üzere $a_n = 1/D_n$, $b_k = d_k$ ile bir factorable matristir. Teorem 4.8 de, $1 < p < \infty$ ve $\{d_n\}$ monoton artan ve

$$\left\{(n+1)\left(D_{n+1}/D_n\right)^P - (n+2)\right\},\ n \text{ ye göre monoton azalan} \tag{4.72}$$

sağlayan bir dizi olmak üzere, A ağırlıklı ortalama metodu için $L^p = f(0)$ olduğu gösterildi. Aşağıdaki teotem başka bir şart altında da teoremin sağlanacağını göstermektedir.

Teorem 4.17 *(p_n) azalmayan olmak üzere $\left(\overline{N}, a_n\right)$ bir ağırlıklı ortalama method olsun. Bu durumda*

$$\text{her } r \geq 0, p > 1 \text{ için } 1 + (r+1)\left(\frac{D_{r+1}}{D_r}\right) - (r+2)\left(\frac{D_{r+2}}{D_{r+1}}\right)^p \geq 0 \tag{4.73}$$

$L^p = f(0)$ için bir yeter şarttır ([66] , Rhoades ve Sen,2006).

İspat. (4.43) dan bir ağırlıklı ortalama matrisi 1 satır toplamına sahip olduğundan,

$$f(r) - f(r+1) = \frac{1}{r+2} + \Delta\left(\frac{D_r^p}{r+1}\right)\sum_{j=r+1}^{\infty}\frac{1}{D_j^p} \tag{4.74}$$

Böylece

$$\begin{aligned}
m(r) &= D_{r+1}^{p}(r+3)\,\Delta\left(\tfrac{P_{r+1}^{p}}{r+2}\right) - D_{r+1}^{p}(r+2)\,\Delta\left(\frac{D_{r}^{p}}{r+1}\right) \\
&+ (r+2)(r+3)\,\Delta\left(\frac{D_{r}^{p}}{r+1}\right)\Delta\left(\frac{D_{r+1}^{p}}{r+2}\right) \\
&= D_{r+1}^{p}\left[(r+3)\left(\frac{D_{r+1}^{p}}{r+2}-\frac{D_{r+2}^{p}}{r+3}\right)-(r+2)\left(\frac{D_{r}^{p}}{r+1}-\frac{D_{r+1}^{p}}{r+2}\right)\right] \\
&+ (r+2)(r+3)\left(\frac{D_{r}^{p}}{r+1}-\frac{D_{r+1}^{p}}{r+2}\right)\left(\frac{D_{r+1}^{p}}{r+2}-\frac{D_{r+2}^{p}}{r+3}\right) \\
&= D_{r+1}^{p}\left[\left(\frac{r+3}{r+2}\right)D_{r+1}^{p}-D_{r+2}^{p}-\left(\frac{r+2}{r+1}\right)D_{r}^{p}+D_{r+1}^{p}\right] \\
&+ \left(\frac{r+3}{r+1}\right)D_{r}^{p}D_{r+1}^{p}-\left(\frac{r+3}{r+2}\right)\left(D_{r+1}^{p}\right)^{2}-D_{r}^{p}D_{r+2}^{p}\left(\frac{r+2}{r+1}\right)+D_{r+1}^{p}D_{r+2}^{p} \\
&= D_{r+1}^{p}\left[\left(\frac{r+3}{r+2}\right)D_{r+1}^{p}-D_{r+2}^{p}-\left(\frac{r+2}{r+1}\right)D_{r}^{p}+D_{r+1}^{p}\right. \\
&+ \left.\left(\frac{r+3}{r+1}\right)D_{r}^{p}-\left(\frac{r+3}{r+2}\right)D_{r+1}^{p}+D_{r+2}^{p}\right] \\
&- \left(\frac{r+2}{r+1}\right)D_{r}^{p}D_{r+2}^{p} \\
&= D_{r+1}^{p}\left[\frac{1}{r+1}D_{r}^{p}+D_{r+1}^{p}\right]-\left(\frac{r+2}{r+1}\right)D_{r}^{p}D_{r+2}^{p} \\
&= \frac{1}{r+1}\left[D_{r}^{p}D_{r+1}^{p}+(r+1)\left(D_{r+1}^{p}\right)^{2}-(r+2)\,D_{r}^{p}D_{r+2}^{p}\right] \\
&= \frac{D_{r}^{p}D_{r+1}^{p}}{r+1}\left[1+(r+1)\left(\frac{D_{r+1}}{D_{r}}\right)^{p}-(r+2)\left(\frac{D_{r+2}}{D_{r+1}}\right)^{p}\right] \geq 0
\end{aligned} \tag{4.75}$$

olmak üzere

$$g(r) = \frac{f(r)-f(r+1)}{\Delta\left(D_{r}^{p}/(r+1)\right)} = \frac{1}{(r+2)\,\Delta\left(D_{r+1}^{p}/(r+1)\right)} + \sum_{j=r+1}^{\infty}\frac{1}{D_{j}^{p}}, \tag{4.76}$$

$$\begin{aligned}
g(r)-g(r+1) &= \frac{1}{(r+2)\,\Delta\left(D_{r}^{p}(r+1)\right)} - \frac{1}{(r+3)\,\Delta\left(D_{r+1}^{p}/(r+2)\right)} + \frac{1}{D_{r+1}^{p}} \\
&= \frac{1}{D_{r+1}^{p}(r+2)(r+3)\,\Delta\left(D_{r}^{p}/(r+1)\right)\Delta\left(D_{r+1}^{p}/(r+2)\right)}m(r)
\end{aligned} \tag{4.77}$$

olur ki; bu (p_n) üzerine herhangi bir monotonluk şartı konulmaksızın, [**?**] sağlanır. Böylece g, r de monoton azalandır.

(p_n) azalmayan dizi olduğundan, $D_r \leq (r+1)\,p_r$ dir; yani, $d_r/D_r \geq (r+1)^{-1}$ dir. Böylece

$$\frac{D_{r+1}}{D_r} = 1 + \frac{D_{r+1}}{D_r} \geq 1 + \frac{D_r}{D_r} \geq \frac{r+2}{r+1} \tag{4.78}$$

ve $D_{r+1}/D_r\,(r+2) \geq 1/(r+1)$ dir.

(4.76) kullanılarak, $p > 1$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \lim |g(r)| &= \lim \left| \frac{(r+1)}{\left[(r+2) D_r^p - (r+1) D_{r+1}^p\right]} \right| \\ &= \lim \left| \frac{r+1}{D_r^p \left[(r+2) - (r+1)(D_{r+1}/D_r)^p\right]} \right| \\ &= \lim \frac{(r+1)}{D_r^p \left[(r+1)(D_{r+1}/D_r)^p - (r+2)\right]} \end{aligned} \tag{4.79}$$

elde edilir.

$p > 1, x > -1$ için $(1+x)^p \geq 1 + px$ olduğu gerçeği kullanılarak,

$$\begin{aligned} \lim |g(x)| &\leq \lim \frac{(r+1)}{D_{r+1}^p \left[(r+1)(1 + pd_{r+1}/D_r) - (r+2)\right]} \\ &= \lim \frac{r+1}{D_r \left[p(r+1) d_{r+1}/D_r - 1\right]} \\ &\leq \lim \frac{r+1}{D_r (p-1)} = 0 \end{aligned} \tag{4.80}$$

bulunur. Bu yüzden $\lim g(r) = 0$ ve g her r için pozitiftir. (4.76) den, $\Delta(D_r^p/(r+1)) < 0$ olduğundan, $L^p = f(0)$ dır. ■

Sonuç 4.5 *Kabul edelim ki $d_n = (n+1)^\alpha$, $\alpha \geq 1$ ile $\left(\bar{N}, d\right)$ bir ağırlıklı ortalama methodu olsun. Bu durumda $L^p = f(0)$ dır ([66] , Rhoades ve Sen,2006).*

İspat. (4.73) nin sağlandığını göstermek için,

$$(r+1)\left(\frac{D_{r+1}}{D_r}\right)^p \tag{4.81}$$

nin konveks olduğunu göstermek yeterlidir. $r = 1$ fonksiyonu aşikar olarak convekstir. $p > 1$ olduğundan, D_{r+1}/D_r nin konveks olduğunu göstermek yeterlidir.

$$n(r) = 1 + \frac{D_{r+1}}{D_r} = 1 + \frac{(r+2)^\alpha}{\sum_{k=0}^{r} (k+1)^\alpha} \tag{4.82}$$

tanımlayalım. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
n(r) &= (r+2)^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{r+1}(k+1)^{\alpha}\right)\left(\sum_{k=0}^{r+2}(k+1)^{\alpha}\right) \\
&\quad -2(r+3)^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{r}(k+1)^{\alpha}\right)\left(\sum_{k=0}^{r+2}(k+1)^{\alpha}\right) \\
&\quad +(r+4)^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{r}(k+1)^{\alpha}\right)\left(\sum_{k=0}^{r+1}(k+1)^{\alpha}\right) \\
&= (r+2)^{\alpha}\left[\sum_{k=0}^{r}(k+1)^{\alpha}+(r+2)^{\alpha}\right]\times\left[\sum_{k=0}^{r}(k+1)^{\alpha}+(r+2)^{\alpha}+(r+3)^{\alpha}\right] \\
&\quad -2(r+3)^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{r}(k+1)^{\alpha}\right)\left(\sum_{k=0}^{r}(k+1)^{\alpha}+(r+2)^{\alpha}+(r+3)^{\alpha}\right) \\
&\quad +(r+4)^{\alpha}\left(\sum_{k=0}^{r}(k+1)^{\alpha}\right)\left(\sum_{k=0}^{r}(k+1)^{\alpha}+(r+2)^{\alpha}\right) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{r}(k+1)^{\alpha}\right)^{2}\left[(r+2)^{\alpha}-2(r+3)^{\alpha}(r+4)^{\alpha}\right] \\
&\quad +(r+2)^{2\alpha}+(r+2)^{2\alpha}+((r+2)(r+3))^{\alpha} \\
&\quad -2((r+2)(r+3))^{\alpha}-2(r+3)^{\alpha}-2(r+3)^{2\alpha} \\
&\quad +((r+4)(r+2))^{\alpha}\times\left(\sum_{k=0}^{r}(k+1)^{\alpha}\right)+(r+2)^{3\alpha}+(r+2)^{2\alpha}(r+3)^{\alpha}
\end{aligned}
\tag{4.83}
$$

olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
\Delta^{2}n(r) &= \frac{(r+2)^{\alpha}}{\sum_{k=0}^{r}(k+1)^{\alpha}}-\frac{2(r+3)^{\alpha}}{\sum_{k=0}^{r+1}(k+1)^{\alpha}}+\frac{(r+4)^{\alpha}}{\sum_{k=0}^{r+2}(k+1)^{\alpha}} \\
&= \frac{n(r)}{\left(\sum_{k=0}^{r}(k+1)^{\alpha}\right)\left(\sum_{k=0}^{r+1}(k+1)^{\alpha}\right)\left(\sum_{k=0}^{r+2}(k+1)^{\alpha}\right)}
\end{aligned}
\tag{4.84}
$$

dir. $\alpha \geq 1$ olduğundan, $(r+2)^{\alpha}$ konvekstir, böylece parantezdeki ilk eşitlik pozitiftir. parantezdeki ikinci eşitlik

$$
(r+2)^{\alpha}\left\{(r+2)^{\alpha}-2(r+3)^{\alpha}+(r+4)^{\alpha}\right\}+(r+2)^{2\alpha}+(r+3)^{\alpha}\left((r+2)^{\alpha}-2\right) \tag{4.85}
$$

formunda yazılabilir, ki bu pozitiftir. Bu yüzden $n(r)$ konvekstir ve (4.73) sağlanır.

■

Sonuç 4.6 *$1 < p < \infty$ olsun, $\mu_n = a/(n+a)$, $a \geq 1$ ile üretilmiş H Hausdorff matrisidir. Bu durumda $L^p = f(0)$ dır ([66] , Rhoades ve Sen,2006).*

İspat. H , $d_n = d_0\Gamma(n+a)/\Gamma(a+1)\Gamma(n+1)$ ve $D_n = d_0\Gamma(n+a+1)/\Gamma(a+1)\Gamma(n+1)$ ile bir ağırlıklı ortalama matrisidir. (4.73) de yerine koyarak,

$$1+(r+1)\left(\frac{r+a+1}{r+1}\right)^p-(r+2)\left(\frac{r+a+2}{r+2}\right)^p \tag{4.86}$$

elde edilir ve $(r+a+1)/(r+1)$ konveks olduğunu ispatlamak için yeterlidir, ki ispat biter. ■

Bir mertebeli $(C,1)$ Cesáro matrisi, $\mu_n = (n+1)^{-1}$ üreteç dizisi ile bir Hausdorff matristir.

Sonuç 4.7 *$(C,1)$ için, $L^p = f(0)$ dır ([66] , Rhoades ve Sen,2006).*

İspat. $a=1$ ile Use Sonuç 4.6 dan ispat tamamlanır. ■

4.10.1 Uyarılar ve Sonuçlar.

- (p_n) nin azalmayan olma şartı $L^p = f(0)$ için bir gerekli şart değildir.
  Ters Örnek. $p_n = 2/(n+1)(n+2)$ alalım. Bu durumda (d_n) monoton azalan ve (4.73) ve
  $$\Delta\left(\frac{D_r}{r+1}\right)<0 \tag{4.87}$$
  sağlanır.

- Bennett[2] de, Hilbert matris için $L^p = f(0)$ olduğunu ispatladı.

- Bennett[6] de, negatif olmayan girişler ile her $H \in B(\ell^p)$ Hausdorff matrisi için $L^p = f(0)$ olduğunu gösterdi.

- Nörlund matrisleri için hiç bir sonuç verilmedi.

- Eğer (p_n) azalıyor ise, (4.73) nin mutlaka sağlanıp sağlanmaması açık bir sorudur.

4.11 Hausdorff Matrisleri için alt sınır

4.11.1 Giriş

Bu kısımda ana sonucumuz, μ moment dizileri için aşağıdaki monotonluk özelliğidir. p, $1 \leq p < \infty$ sabit olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{r}\sum_{n=r}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{r-1}\binom{n}{k}\Delta^{n-k}\mu_k\right)^p$$

r $(r = 1, 2, \ldots)$ nin artan bir fonksiyonudur. Buradan, ℓ^p üzerinde keyfi bir Hausdorff matrisi için keskin bir alt sınır türettik. Karşılık gelen üst sınır problemi Hardy tarafından çözüldü.

Bununla birlikte problemi tekrar ele alalım, gerçekten de, belirli örnekler için (**??**) değerlendirmeye çalıştığımızda, "güzel" A matrisleri için bile infimumun kontrol edilmesi zor olabilir.

Birçok durumda şüphesiz $f(r)$ fonksiyonunun r ye göre arttığı ortaya çıkar. Bunlar ele alınacak en kolay durumlardır, çünkü (**??**) deki infimum $r = 0$ da elde edilir, ve L alt sınırı sadece A nın ilk sütununun ℓ^p-normudur. Sonuçlarımızın çoğu bu türdendir.

Gerçek zorluk, (**??**) te verilen fonksiyonların monotonluk özelliklerini incelemektir. Bu durumun, literatürde gösterilenlerden farklı olarak, birçok ilginç temel eşitsizliğe yol açtığını göreceğiz. Bu eşitsizliklerin sağlanmasında kullanılan temel araç, majörleştirme teorisidir.

[2] deki detaylarda sadece iki alt sınır çalışıldı. Bu sonuçları, x in monotonluğunu içermeyen bir formda yeniden yazıyoruz. Birincisi, Hardy nin (,[33] § 9.8) eşitsizliği için, ikincisi Hilbert in (,[33] Bölüm IX) eşitsizliği için bir doğal tamamlayıcı sağlar. x negatif olmayan bir dizi ve $p > 1$ olduğunu kabul edelim. Eğer $x \in \ell^p$ ise, bu durumda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}x_k\right)^p \geq \zeta(p)\sum_{n=0}^{\infty}\min_{k\leq n}x_k^p \tag{4.88}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_k}{n+k+1}\right)^p \geq \zeta(p)\sum_{n=0}^{\infty}\min_{k\leq n}x_k^p \tag{4.89}$$

sağlanır. Her iki durumda da

$$\zeta(p)\left(=\sum_{k=1}^{\infty}k^{-p}\right)$$

en iyi mümkün olan sabitttir ve yalnızca $x_1 = x_2 = \cdots = 0$ olduğunda eşitlik vardır. (4.88) eşitsizliğinin $p = 2$ özel durumu, Axler ve Shields tarafından öne sürülmüş ve Lyons[50] tarafından kanıtlanmıştır. Genel durum Bennett[2] ve Renaud[55] tarafından eşzamanlı olarak keşfedildi. Copson-Etlion eşitsizliklerine (,[33] Teorem 338, 344 ve 345) doğal bir tamamlayıcı sağlayan $0 < p < 1$ için ilgili sonuç[4] de verilmiştir.

,[2] sayfa 90 da, diğer "klasik" A matrisleri için (**??**) değerlendirilmesi problemini gündeme getirdik. Bu, Rhoades[63] tarafından ve Lenard[**?**] tarafından ortaya çıkarıldı, sonuçları daha ayrıntılı olarak aşağıda açıkladık.

Bu bölümün temel amacı, Hausdorff matrisleri için alt sınır problemini çözmektir. Bu, $\mu_0 = 1$ olacak şekilde normalleştirilmiş $\mu = (\mu_k)$ bir reel sayı dizilerii ve Δ ileri fark operatörü

$$\Delta\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1} \tag{4.90}$$

olmak üzere,

$$h_{nk} = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \Delta^{n-k}\mu_k & , k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases} \tag{4.91}$$

şeklindeki $H = (h_{nk})$ matrisidir. Hausdorff matrislerinin teorisi,,[26].[31],[71][**?**] te tanımlanmıştır.

Buraya yalnızca negatif olmayan girişleri olan matriste ilgileniyoruz ve bu nedenle μ yü total monoton dizilerii olarak alıyoruz, yani

$$\Delta^n\mu_k \geq 0 \ (n, k = 0, 1, \ldots) \tag{4.92}$$

dır. Şimdi $[0, 1]$ üzerinde $d\mu(\theta)$, bir (Borel) olasılık ölçüsüne göre μ,

$$\mu_k = \int_0^1 \theta^k d\mu(\theta), \ (k = 0, 1, \ldots) \tag{4.93}$$

ilişkili moment dizilerii alındığında, (4.92) tam olarak Hausdorff un bir temel teoremine[?] göre elde edilir. Böylece, (4.91) yi

$$h_{nk} = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \int_0^1 \theta^k (1-\theta)^{n-k} \, d\mu(\theta) & , k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases} \tag{4.94}$$

eşdeğeri biçiminde tekrar yazabiliriz. $d\mu(\theta)$ yı Lebesgue ölçümü alarak, (1 mertebeli) Cesaro matrisi elde edilir, böylece bizim ana sonucumuz, Teorem 1, (4.89) in bir genelleştirilmesidir. Diğer seçenekler (C, α), α $(\mu(\theta) = 1 - (1-\theta)^{\alpha})$ mertebeden Cesâro matrisi, (H, α), α $(\Gamma(\alpha) \, d\mu(\theta) = |\log \theta|^{\alpha - 1} \, d\theta)$ mertebeden Hilbert matrisine ve (E, α), $(d\mu(\theta) = ($ $\theta = \alpha$ noktasında değerlendirir$))$ Euler matrislerine karşılık gelir. Böylece, alt sınır problemi bu matris sınıfları için tamamen çözülmüştür.

Bunlar, hali hazırda Hausdorff matrisleri ile olasılık teorisi (Bernoulli denemeleri için düzenlenebilir olaylar) arasında zaten açıkça görülen bağlantılardır ve eşitsizliklerin bu yönde de uygulamaları vardır (bkz. Kısım 7 ve özel olarak,[5]).

Hausdorff matrisleri için alt sınır hesaplamanın başlıca engeli, (**??**) te görülen

$$\sum_{k=0}^{n} h_{nk}$$

kısmi satır-toplamı için kapalı form ifadesinin bilinmemesi gerçeğidir. Bununla birlikte, eğer p pozitif bir tam sayı ise, bu zorluk önlenebilir, çünkü $f(r)$ yi bir p katma toplamı olarak yeniden yazabilir ve sonra toplamı sırasını değiştirebiliriz. Lenard,[?] (**??**) ℓ^p $(p = 1, 2, \ldots)$ üzerinde düşünülen Euler matrisleri için bu yaklaşımı benimser. Onun sonraki analizleri oldukça etkindir ve üreteç fonksiyonlarla becerikli manipülasyonlar gerektirir. Metodumuzun onunla ortak hiçbir özelliği yoktur, fakat onun sonucunda daha güçlü eşitsizliklerin (aşağıda ki Teorem 1 ve 5) geçerliliğinden şüphelendiğimizden dolayı, ona çok şey borçluyuz. Lenard ın analizi bu bölüm sonunda verilmektedir.

Bu kısmın ana sonuç Kısım 2 de ispat metodu hakkındaki ön uyarılardan sonra 3. ve 4. kısımlarda ispatlanmıştır. Quasi-Hausdorff matrisleri, kısım 5 de ve ağırlıklı ortalama matrisleri 6. kısımda incelenmiştir. Moment dizileri ile ilgili bazı ek eşitsizlikler kısım 7 de verilmektedir

4.11.2 Majörleştirme konusundaki ön bilgiler

$$\frac{1}{r+1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{r}\int_{0}^{1}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\theta^{k}\left(1-\theta\right)^{n-k}d\mu\left(\theta\right)\right)^{p}$$

ifadesinin r ye göre arttığını göstermek istiyoruz (bkz. (**??**) ve (4.94)). İlk adım p yi ortadan kaldırmaktır. Bunu kısaca aşağıda tanımlanan majörleştirme teorisine başvurarak yapacağız. Bu arada, bu adım, $d\mu\left(\theta\right)$ yi de ortadan kaldırmamıza izin verir ve yalnızca $\binom{n}{k}\theta^{k}\left(1-\theta\right)^{n-k}$ binom olasılıklarını içeren (4.102) "gösterişsiz" bir eşitsizliğe bizi götürür. Eşitsizlik, ilk önce oldukça gizemli bir polinom özdeşliğini kurarak (Lemma 4.6) ve daha sonra bazı terimlerini çıkararak ispatlanır. (Eşitsizliğin basit olasılıklı bir ispatı olmalı, fakat biz bunları keşfedemedik.)
Majörleştirme teorisi,

$$\phi\left(x_{1}\right)+\cdots+\phi\left(x_{N}\right)\leq\phi\left(y_{1}\right)+\cdots+\phi\left(y_{N}\right) \tag{4.95}$$

tipi eşitsizliklerle ilgilidir. Burada x ve y, negatif olmayan girişleri olan sabit $N-$li lerdir ve eşitsizlik tüm sürekli, konveks ϕ fonksiyonları için geçerlidir (ki onun tanım bölgesi x ve y leri içerir). Eğer (4.95) sağlanır ise, x, y ile mojoritlenir denir ve $x\preceq y$ ile gösterilir. Bu fikirlerin mükemmel bir açıklaması[51] deki monografide verilmiştir. Teorinin önemi, büyük oranda Hardy, Littlewood ve Polya (,[33] Teorem 108) nın sonucudur.

Teorem 4.18 *x ve y negatif olmayan girişlerle $N-$liler olsun. Bu durumda, eğer x^{*} lar, x lerin azalan mertebede düzenlenmesi olmak üzere,*

$$x_{1}^{*}+\cdots+x_{k}^{*}\leq y_{1}+\cdots+y_{k},\ \left(1\leq k\leq N\right) \tag{4.96}$$

ve

$$x_{1}+\cdots+x_{N}=y_{1}+\cdots+y_{N} \tag{4.97}$$

koşullarının her ikisi de sağlanır ise $x\preceq y$ dir. (Hardy ve ark,,[33] *1967)*

Majorizasyon, 6. ve 7. bölümlerde (Lemma 4.13 ve Teorem 6) kullanılır, ancak ana sonucumuz için daha az katı bir şart gereklidir. Marshall ve Olkin[51] in ardından, x in y tarafından zayıf olarak altmajorize edildiğini söyleyebiliriz ve eğer (4.96) koşulu sağlanırsa $x \prec_w y$ yazacağız. Bu durumda (4.95) nin tüm artan, sürekli, konveks ϕ fonksiyonları için geçerli olduğu Tomic[68] (aynı zamanda[51] a bakınız) in bir Teoremi ile görüldü. Polya,[52] Tomic in sonucunun Teorem 4.18 nin bir sonucu olduğunu göstermiştir: Aslında iki sonuç eşdeğerdir.

4.11.3 Bir Eşitlik

N ve r, pozitif tam sayı olsun. a ve α tamsayıları

$$N = a\,(r+1) + \alpha,\ (0 \leq \alpha < r+1) \tag{4.98}$$

ile ve b ve β tamsayıları

$$N = br + \beta,\ (0 \leq \beta < r) \tag{4.99}$$

ile belirlensin. O halde aşağıdaki eşitliğe sahibiz.

Lemma 4.6 *h_{nk} (4.94) ile verilmek üzere,*

$$\begin{aligned}(r+1)\sum_{n=0}^{a-1}\sum_{k=0}^{r-1} h_{nk} \quad &+\alpha\sum_{k=0}^{r-1} h_{nk} + r\sum_{n=a+1}^{b-1}(r+1-N/n)\,h_{nr} + \tfrac{\beta}{b}(b-r)\,h_{br} \\ &= r\sum_{n=0}^{b-1}\sum_{k=0}^{r} h_{nk} + \beta\sum_{k=0}^{r} h_{bk}\end{aligned}$$

dır. (Bennet,,[6] 1992)

Aşağıdaki gösterimleri kabul etmek uygundur:

$$L = (r+1)\sum_{n=0}^{a-1}\sum_{k=0}^{r-1} h_{nk} + \alpha\sum_{k=0}^{r-1} h_{ak}, \tag{17}$$

$$R = r\sum_{n=0}^{b-1}\sum_{k=0}^{r} h_{nk} + \beta\sum_{k=0}^{r} h_{bk}, \tag{4.100}$$

$$D = r\sum_{n=a+1}^{b-1}(r+1-N/n)\,h_{nr} + \frac{\beta}{b}(b-r)\,h_{br} \tag{4.101}$$

(L "sol", R "sağ" ve D "fark" için, son terim ise Lemma 4.6 tarafından gösterilir.) Nihai amacımız,

$$L \leq R \tag{4.102}$$

eşitsizliğini ispatlamaktır. ((4.98), (4.99) ve (4.94) ile) $D \geq 0$ olduğundan, bu Lemma 4.6 den görülür.

Lemma 4.6, aşağıdaki Lemma 4.8 ile verilen bir kolay eşitlik manipüle edilerek ispatlanmıştır. Eğer ilk olarak, Euler matrisleri ile çalışmayı düşünürsek, bu durumfa $d\mu(\theta)$ ya göre $0 \leq \theta < 1$ ortalamasını alarak Hausdorff matrislerine geçersek, argüman en verimli şekilde kullanılır. Bir Euler matrisinin girişlerinin, $E = E(\theta)$,

$$e_{nk} = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \theta^k (1-\theta)^{n-k} & , 0 \leq k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases} \tag{4.103}$$

ile verildiğini hatırlatalım. Eşitliklerimizden üçü, Lemma 4.8-4.10, açıkça θ parametresini içerir ve ortalama etkilenmeden önce bunun ortadan kaldırılması gerekir. Bu adım için aşağıdakilere ihtiyacımız var.

Lemma 4.7 *$n, k \geq 0$ olduğunda $(k+1)\, e_{n+1,k+1} = \theta\,(n+1)\, e_{nk}$ dır. (Bennet,*[6] *,1992)*

İspat. (4.103) den

$$\begin{aligned} e_{n+1,k+1} &= \begin{cases} \begin{pmatrix} n+1 \\ k+1 \end{pmatrix} \theta^{k+1} (1-\theta)^{n-k} & , 0 \leq k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases} \\ &= \begin{cases} \theta \dfrac{n+1}{k+1} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \theta^k (1-\theta)^{n-k} & , 0 \leq k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases} \\ &= \theta . \frac{n+1}{k+1} e_{nk} \end{aligned}$$

olduğundan sonuç elde edilir. ■

Lemma 4.8 *$n, r \geq 1$ iken*

$$\sum_{k=0}^{r-1} e_{nk} + \theta \sum_{j=0}^{n-1} e_{j,r-1} = 1$$

dir. (Bennet,[6] *,1992)*

İspat. E nin satırları "binom olasılık vektörleri" dir, böylece yukarıdaki ilk teriminin olan $\sum_{k=0}^{r-1} e_{nk}$, "n denemelerdeki r başarılarından daha azının" olasılığı olarak yorumlanabilir. Hepsi $1/\theta$ toplamıyla E nin kolanları, her biri θ ile çarparsak benzer bir yorum kabul eder. Gerçekten de, E nin k. ıncı kolonu (θ kez), "$(k+1)$ başarıların gözlem zamanı" $(i = 0, 1, \ldots)$ nı temsil eder. Böylece, yukarıdaki ikinci terim olan $\theta \sum_{j=0}^{n-1} e_{j,r-1}$, r **başarılarının bekleme süresinin** n **i geçmemesi ihtimalidir** veya denk olarak, **en azından** r **başarı n denemede oluşur**. İki bold olay tümleyendir ve dolayısıyla olasılıkları birbirine eklenir. ■

Lemma 4.6 ve 4.11 nın benzer bir olasılıksal yorumunun yapılması çok doyurucu olacaktır.

Lemma 4.9 *$n, r \geq 0$ ve $m \geq n$ iken*

$$\sum_{k=0}^{r-1} e_{nk} = \sum_{k=0}^{r-1} e_{mk} + \theta \sum_{j=n}^{m-1} e_{j,r-1}$$

dir. (Bennet,[6] *,1992)*

İspat. Lemma 4.8 ü iki kez uygulayıp; daha önce olduğu gibi, bir kez n nin yerini m ile değiştirmek yeterlidir. ■

Lemma 4.10 *$n, r \geq 1$ iken*

$$\sum_{j=0}^{r-1} e_{j,r-1} = \sum_{j=0}^{n-1} e_{jr} + \frac{e_{nr}}{\theta}$$

dir. (Bennet,[6] *, 1992)*

İspat. Lemma 4.8 ü iki kez uygulayıp; daha önce olduğu gibi, bir kez r nin yerini $r+1$ ile değiştirilmesi yeterlidir. (e_{nr} nin θ ile bölünebildiğini ve böylece $\theta = 0$ olduğunda bile, Lemma 4.10 in sağlandığını görürülür.) ■

Lemma 4.11 *$r, s \geq 1$ iken*

$$\sum_{n=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{r-1} h_{nk} = s \sum_{k=0}^{r-1} h_{sk} + r \sum_{n=0}^{s} h_{nr}$$

dir. (Bennet,[6] *,1992)*

İspat. Bunu sadece (4.103) Euler matrisleri için ispatlayacağız, genel sonuç, $d\mu(\theta)$ ye göre $0 \leq \theta \leq 1$ üzerinden integral alınarak görülür. m yi s ile değiştirerek Lemma 4.9 ü uygularsak,

$$\sum_{k=0}^{r-1} e_{nk} = \sum_{k=0}^{r-1} e_{sk} + \theta \sum_{j=n}^{s-1} e_{j,r-1} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{s-1}\sum_{k=0}^{r-1} e_{nk} &= \sum_{n=0}^{s-1}\left(\sum_{k=0}^{r-1} e_{sk} + \theta \sum_{j=n}^{s-1} e_{j,r-1}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} e_{sk} + \theta \sum_{j=0}^{s-1} (j+1)\, e_{j,r-1}\end{aligned}$$

elde ederiz ve Lemma 4.7 den sonuç elde edilir. ■

Lemma 4.7, Lemma 4.8-4.10 den θ yı ortadan kaldırılmamızı ve böylece Hausdorff matrisleri için bu sonuçların sürümlerini elde etmemizi sağlıyor

Lemma 1 in ispatı. Yine, Euler matrislerini dikkate almak yeterlidir. Lemma 4.11 yı hem R hem de L ye uygulayarak ve (4.98) ve (4.99) hatırlatarak,

$$\begin{aligned}R - L &= N \sum_{k=0}^{r} e_{bk} + r(r+1) \sum_{n=0}^{b} e_{n,r+1} \\ &\quad - N \sum_{k=0}^{r-1} e_{ak} - (r+1)\, r \sum_{n=0}^{a} e_{nr}\end{aligned}$$

olduğunu görürüz.

$$\begin{aligned}
R-L &= N\sum_{k=0}^{r} e_{bk} + r\left(r+1\right)\sum_{n=0}^{b} e_{n,r+1} - N\sum_{k=0}^{r-1} e_{ak} - \left(r+1\right) r \sum_{n=0}^{a} e_{nr} \\
&\text{Lemma 4.9 ile} \\
&= Ne_{br} + N\left[\sum_{k=0}^{r-1} e_{bk} + \theta\sum_{j=n}^{b-1} e_{j,r-1}\right] - N\left[\sum_{k=0}^{r-1} e_{ak} + \theta\sum_{j=n}^{a-1} e_{j,r-1}\right] \\
&+ r\left(r+1\right)\left(\sum_{n=0}^{b} e_{n,r+1} - \sum_{n=0}^{a} e_{nr}\right) \\
&= Ne_{br} - N\theta\sum_{n=a}^{b-1} e_{n,r-1} + r\left(r+1\right)\left(\sum_{n=0}^{b} e_{n,r+1} - \sum_{n=0}^{a} e_{nr}\right) \\
&\text{Lemma 4.10 ile} \\
&= Ne_{br} - N\theta\sum_{n=a}^{b-1} e_{n,r-1} + r\left(r+1\right)\sum_{n=a+1}^{b} e_{n,r} - \frac{r\left(r+1\right)}{\theta} e_{b+1,r+1} \\
&\text{iki kez Lemma 4.7 ile} \\
&= Ne_{br} - Nr\sum_{n=a+1}^{b} \frac{e_{nr}}{n} + r\left(r+1\right)\sum_{n=a+1}^{b} e_{n,r} - \left(b+1\right) r e_{br} \\
&\text{(4.99) ve (4.101) ile} \\
&= D
\end{aligned}$$

elde edilir. ■

4.11.4 Hausdorff matrisleri

Bu kısımda, Hausdorff matrisleri için alt sınır problemini çözeceğiz. h_{nk} girişlerinin (4.94) ile verildiğini hatırlatalım.

Burada, üst sınır probleminin Hardy nin bir sonucu ile kolaylıkla çözülebileceğine işaret etmek faydalı olabilir (bkz. aşağıdaki Teoreme). Problem, $x_0 \geq x_1 \geq \cdots \geq 0$ i sağlayan her $x \in \ell^p$ için

$$\left\| Hx \right\|_p \leq U \left\| x \right\|_p \tag{4.104}$$

olacak şekilde en küçük U sabitini bulmaktır. Bu Hardy nin ispatının bir sonucudur, yani H nın operatör normu olan $U = \left\| H \right\|_{p,p}$ dir. Böylece üst sınır problemi aşağıdaki denklem (4.105) eşitliği ile çözülür.

Teorem 4.19 *$1 \leq p < \infty$ için p yi sabitleyelim ve H, (4.94) ile verilen Hausdorff matrisi olsun. Bu durumda H, ℓ_p üzerinde sınırlıdır ancak ve ancak $\int_0^1 \theta^{-1/p} d\mu\left(\theta\right) <$*

∞ *dır ve*

$$\|H\|_{p,p} = \int_0^1 \theta^{-1/p} d\mu(\theta) \tag{4.105}$$

elde edilir. (Hardy,[31] *, 1963)*

Teorem 4.19,[31] , [?] de ispatlandı (Ayrıca,[32] in Teoremi 216 ya bakınız). İspat, Euler matrisleri için Bochner ve Knopp dan dolayı (4.105) un özel versiyonuna dayanır.

Şimdi ana sonucu verelim.

Teorem 4.20 *$1 \leq p < \infty$ ve p sabit olsun ve H, ℓ^p üzerinde sınırlı Hausdorff matrisi olsun. Bu durumda*

$$L^p = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 (1-\theta)^n d\mu(\theta) \right)^p \tag{4.106}$$

olmak üzere $x_0 \geq x_1 \geq \cdots \geq 0$ ı sağlayan her $x \in \ell^p$ için

$$\|Hx\|_p \geq L \|x\|_p \tag{4.107}$$

Eğer $x_0 = x_1 = \cdots = 0$ ise veya $p = 1$ ise veya $d\mu(\theta)$, 1 noktasında nokta kütlesi ise burada eşitlik vardır. (Bennet,[6] *,1992)*

İspat. (4.106) ile belirlenen L değeri, H nin ilk sütununun ℓ^p-normudur. Böylece $f(r)$ fonksiyonu r ye göre artan olduğunu gösterdiğimizde (4.107), (**??**) ve (**??**) formundan izlenir. Bunu yapmak için, ϕ, $[0, \infty)$ üzerinde tanımlanmış herhangi artan konveks fonksiyon olmak üzere, daha genel, $r = 1, 2, \ldots$ için

$$(r+1) \sum_{n=0}^{\infty} \phi\left(\sum_{k=0}^{r-1} h_{nk} \right) \leq r \sum_{n=0}^{\infty} \phi\left(\sum_{k=0}^{r} h_{nk} \right) \tag{4.108}$$

eşitsizliğini düşünürüz.

r yi sabitleyerek, her terim $(r+1)$ kez tekrarlama ile oluşan $\left(\sum_{k=0}^{r-1} h_{nk}\right)_{n=0}^{\infty}$ dizileriini x ile ve her terim r kez tekrarlama ile oluşan $\left(\sum_{k=0}^{r} h_{nk}\right)_{n=0}^{\infty}$ dizileriini y ile gösterelim. Bu durumda, Tomic teoremine (bkz. Bölüm 2) göre, (4.108), x in y ile zayıf alt majorentliğini, bir başka ifade ile

$$\sum_{n=0}^{N} x_n^* \leq \sum_{n=0}^{N} y_n \tag{4.109}$$

olduğunu iddia etmeye denktir.

N verildiğinde, (4.98) ve (4.99) daki gibi, a, α, b, β tamsayılarını belirleriz ve (4.109) nin (4.102) ye denk olduğuna dikkat edelim. Burada, r sabiti ile $\sum_{k=0}^{r} h_{nk}$ ifadesinin n ye göre azalan bir fonksiyon olduğu gerçeğini kullandık. Bu, Lemma 4.9 ten "θ-terimi" bırakılarak ve $0 \leq \theta \leq 1$ üzerinden integral edilerek çıkarılabilir.

(4.106) te verilen sabit değeri tabii ki mümkün olan en iyisidir, çünkü (4.107) deki x i $x = (1, 0, 0, \ldots)$ olarak alabiliriz. Eşitlik durumu ile ilgili teoremin son maddesi,[2] sonuçlarının bir sonucudur. Ayrıntıları burada vermeye gerek yoktur. ■

Teorem 4.20 de, H nın ℓ^p den kendi içine olduğunu kabul etmek doğaldır, çünkü (4.107) deki tüm terimler, $x \in \ell^p$ olduğunda sonludur. Bununla birlikte, bu kabul, aşağıdaki gibi (4.107) yorumlamayı kabul etmemiz şartıyla, gerekli değildir: Eğer bazı x ler için sol taraf sınırlıysa, böylece sağ tarafta sonludur, ve (4.107) eşitsizliği elde edilir. (Tabii ki, herhangi bir sıfır olmayan x için anlamlı bir sonuç elde etmek için $L < \infty$ varsaymalıyız.)

Şimdiden, H yerine $(C, 1)$ matrisi olarak, (4.88) eşitsizliğinin Teorem 4.20 nın özel bir durumu olduğunu gözlemledik. Rhoades ([63] , Teorem 2 *) onun alt sınırının "birinci sütunda ulaşıldığını" da göstererek, $(C, 2)$ matrisi çalıştı. Ancak yaptığı analiz çok karmaşıktır ve sadece $p = 2$ durumunda geçerlidir. O, aynı sonucun tüm $p > 1$ için de geçerli olması gerektiği görüşündedir ve gerçekten de, tüm (C, α). $\alpha > 0$ matrisleri için geçerlidir. Teorem 4.20, bunu doğrular.

4.11.5 Yarı-Hausdorff matrisleri.

Bu kısımda, yarı-Hausdorff matrisleri için alt sınır problemi incelenmiştir. Bunlar sadece (4.94) deki Hausdorff matrislerinin H^t transpozudur. Terminoloji Hardy nin terminolojisidir ([32] , Kısım 11.19).

Yarı-Hausdorff matrislerinin ℓ^p-dönüşümünün özellikleri, $q = p/(p-1)$, p nin üstel eşleniği olmak üzere,

$$\left\| H^t \right\|_{p,p} = \left\| H \right\|_{q,q} \tag{4.110}$$

aşina olunan ilişki kullanılarak (kısım 4) Hardy nin sonucundan belirlenebilir.

Bir matrisin ve onun tranpozunun alt sınırı arasında hiçbir benzer ilişki yoktur. Bu, C Cesâro matrisi göz önüne alınarak kolaylıkla görülebilir. (4.88) eşitsizliği, alt sınırın $\varsigma(p)^{1/p}$ olduğunu gösterir, oysa Renaud ([55] , Teorem 2 de) C^t için alt sınırın 1 olduğunu göstermiştir.

Renaud un ispatı, Cesaro matrisinin özel yapısı üzerinde önemli bir yola bağlıdır. Burada basit bir alternatif ispat sunacağız: bu daha genel sonuçlara yol açacak. Teoremin ifadesi için, A, üst üçgensel ve sütun toplamları 1 oluyorsa, bir A matrisine bir yarı-toplamlanabilme matrisi demek uygundur. Bu sınıf, Hausdorff matrislerinin, ağırlıklı ortalama matrislerinin (Bölüm 6) ve Nörlund matrislerinin transpozlarını içerir (tanımlar için bkz.[32] ,[**?**]).

Teorem 4.21 *$1 \leq p < \infty$ ve p sabit olsun ve A bir yarı-toplanabilme matrisi olsun. Eğer $x \in \ell_p$ $x_0 \geq x_1 \geq \cdots \geq 0$ yi sağlarsa, bu durumda*

$$\|Ax\|_p \geq \|x\|_q \tag{4.111}$$

dır. Aşağıdaki şartlardan en az biri sağlandığı zaman (4.111) da eşitlik vardır: $p = 1$; $A = I$ birim matrisi; A nın ilk n sütunu I nın ki ile çakışır ve $x_n = x_{n+1} = \cdots = 0$ dır. (Bennet,[6] ,1992)

İspat. (**??**) ve (4.88) e göre, her r doğal sayısı için,

$$(r+1) \leq \sum_{n=0}^{r} \left(\sum_{k=0}^{r} a_{nk} \right)^{p} \tag{4.112}$$

olduğunu göstermeliyiz. Hölder eşitsizliği ile

$$r+1 = \sum_{k=0}^{r} \sum_{n=0}^{k} a_{nk} = \sum_{n=0}^{r} \sum_{k=n}^{r} a_{nk} \leq (r+1)^{1/q} \left\{ \sum_{n=0}^{r} \left(\sum_{k=n}^{r} a_{nk} \right)^{p} \right\}^{1/p}$$

elde ederiz ve bu (4.112) a denktir.

Teoremin son ifadesi[2] Önerme 1 den veya Teorem 2 sinden izlenir. ■

Teorem 4.21, (**??**) te infimumun $r = 0$ da oluştuğunu gösterir, fakat ispat (**??**) deki fonksiyonunun monotonluk özelliklerinden hiçbir şey söylemez. Gerçekten, Quasi-Hausdorff matrisleri için, $f(r)$ fonksiyonunun r ye göre arttığını gösterebiliriz. İspat, Teorem 4.20 e benzemektedir, altmajörizasyon yerine majörleştirme kullanılarak ispat yapılabir. (Kısım 7 deki Teorem 6 ya bak)

4.11.6 Ağırlıklı Ortalama matrisi

Bu kısımda Ağırlıklı ortalama matrisleri için alt sınır problemi incelenilcektir. Bunlar, a_k ların negatif olmayan sayılar ve $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ olduğunda

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{a_k}{A_n} & ,1 \leq k \leq n \\ 0 & , k > n \end{cases}$$

formlu girişleri olan matrislerdir. (A_n lerin hiçbirinin sıfır olmaması için a_1 i pozitif alıyoruz. Ayrıca, bundan böyle matrisin indislerinin sıfırdan değil de 1 den başladığını not edelim.)

Ağırlıklı ortalama matrisi toplanabilirlik teorisinde doğal olarak ortaya çıkar[32] ,[?] ve bu açıdan kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Üstelik, onların ℓ_p-dönüşüm özellikleri, tamamen[3] de tanımlanmıştır.

Onların basit yapıları, onları mevcut tartışmada da doğal nesneler yapar. Özellikle, Hausdorff matrisleri için biraz sorun yaratan (**??**) de görülen kısmi toplamlar kolayca hesaplanabilir ve (**??**),

$$L^p = 1 + \inf_{n \geq 1} A_n^q \sum_{k>n} A_k^{-p} \tag{4.113}$$

basit formda olur. Ne yazık ki, infimum $n = 1$ olduğunda elde edilmesi gerekli değildir ve genel olarak, a_n ler için onun değerlendirilmesi zor görünmektedir. İspatımızda, başlı başına bazı ilginçliklerin olabileceği aşağıdaki temel sonuçu içerir.

Lemma 4.12 *$\sum_n^\infty x_n$ pozitif terimli yakınsak bir seri olsun. Eğer*

$$n\left(\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}}\right), \ n \text{ ye göre azalan} \tag{4.114}$$

ise bu durumda

$$\frac{1}{nx_n} \sum_{k \geq n} x_k, \ n \text{ ye göre artan} \tag{4.115}$$

dır. (Bennet,[6] ,1992)

İspat. İlk olaral, eğer (4.114) sağlanırsa, bu durumda

$$n \to \infty \text{ iken } nx_n \to 0 \tag{4.116}$$

olduğunu gösterelim. Bunu görmek için,

$$\frac{nx_n - (n+1)\,x_{n+1}}{x_{n+1}} = n\overbrace{\left(\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}}\right)}^{\text{artan}} - 1$$

n ye göre artan olduğunu görürüz. Sonuç olarak, eğer bir n tamsayısı için $nx_n < (n+1)\,x_{n+1}$ ise, aynı eşitsizlik, n nin yeterince büyük tüm değerleri için de geçerlidir. Fakat, bu durumda, her $j > n$ için $x_j > nx_n/j$ dir, ve bu $\sum x_j$ nin ıraksaklığını gerektirir. nx_n nin n ye göre azaldığını ve dolayısıyla yakınsak olduğu sonucuna varırız. Limit 0 olmalıdır, aksi taktirde $\sum x_j$ ıraksak olur.

Şimdi de $n \leq j \leq m$ olan üç pozitif n, j, m tamsayılarını düşünelim. (4.114) ü

$$nx_n x_{j+1} \geq x_{n+1}\left(jx_j - (j+1)\,x_{j+1}\right) + (n+1)\,x_{n+1}x_{j+1}$$

formunda yeniden yazabiliriz. $j = n+1$ den m ye toplam alırsak,

$$nx_n \sum_{j=n+1}^{m} x_{j+1} \geq x_{n+1}\left((n+1)\,x_{n+1} - (m+1)\,x_{m+1}\right) + (n+1)\,x_{n+1} \sum_{j=n+1}^{m} x_{j+1}$$

elde ederiz. $m \to \infty$ için limit alarak ve (4.116) i kullanarak,

$$nx_n \sum_{j>n+1} x_j \geq (n+1)\,x_{n+1}^2 + (n+1)\,x_{n+1} \sum_{j>n+1} x_j$$

olduğunu görürüz ve bu (4.115) e denktir. ■

Uyarı. Daha sonra ihtiyacımız olacak olan Lemma 4.12 ile uyuşan bir sonucumuz var: "Eğer (4.114) dizilerii n ye göre artarsa, bu durumda (4.115) dizilerii n ye göre azalır ". İspat Lemma 4.12 ye benzerdir, fakat biraz daha kolaydır, çünkü (4.116) in gerçeklendiğini kontrol etmek zorunda değiliz.

(4.115) deki toplamda "$k > n$", "$k \geq n$" ile yer değiştirildiğinde bir başka sonuç elde edilir. Bu detayları şimdilik bırakıyoruz.

Teorem 4.22 *p,$1 \leq p < \infty$ olacak şekilde sabit olsun ve A, (**??**) ile verilen ağırlıklı ortalama matrisi olsun. Kabul edelim ki,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^{-p} < \infty \tag{4.117}$$

ve

$$n\left(\frac{A_{n+1}^p - A_n^p}{A_n^p}\right), \text{ } n \text{ ye göre azalan} \tag{4.118}$$

olsun. Bu durumnda

$$L^p = a_1^p \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{-p}$$

olmak üzere, $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq 0$ *ı sağlayan her* $x \in \ell_p$ *için*

$$\|Ax\|_p \geq L\,\|x\|_p \tag{4.119}$$

sağlanır. Sadece $x_2 = x_3 = ... = 0$ *olduğunda (4.119) de eşitlik vardır. (Bennet,*[6] *,1992)*

İspat.

$$\frac{A_n^p}{n}\sum_{k>n} A_k^{-p},\ n \text{ ye göre artan}$$

olduğunu görmek için, $x_n = A_n^{-p}$ ile Lemma 4.12 yi uygulayacağız. Bu durumda (4.119) eşitsizliği (4.113) den görülür.

(4.119) deki eşitlik durumu hakkında ifade, Teorem 4.3 nin bir sonucudur. ∎

Teorem 4.22, 4.8 in bir sonucunun hafif bir gelişmedir, ancak burada verilen ispat onun verdiği ispattan daha basittir. Rhoades in versiyonu[2] nın orijinal taslağında verilen (4.88) in ispatına dayanan, "$p > 1$" ve "a_n nin n ye göre artan olduğu" gibi ek varsayımları gerektirir.

İlk kez Rhoades tarafından formüle edilen hipotez (4.118), oldukça merak uyandırıcı bir varsayımdır ve daha ayrıntılı olarak incelenecektir. Buna göre, eğer

$$n\left(\frac{x_n^p - x_{n+1}^p}{x_{n+1}^p}\right),\ n \text{ ye göre azalıyorsa,} \tag{4.120}$$

pozitif terimli $x = (x_n)$ dizileriine Rhoades koşulunu sağlıyordur ($R(p)$ dedir) diyeceğiz, ve $x \in R(p)$ yazacağız.

Şimdi (4.120),

$$\left\{\frac{n}{n+1}(x_n x_{n+2})^p + \frac{1}{n+1}(x_{n+1}x_{n+2})^p\right\}^{1/p} \geq x_{n+1}^2 \tag{4.121}$$

formunda daha akılcı bir biçimde yazılabilir. Sol tarafı, bir iki noktalı olasılık uzayı üzerinde bir L^p-normu olarak algılarız ve eğer $p \leq q$ ise, bu durumda $R(p) \subseteq R(q)$ olur. Böylece, p arttıkça $R(p)$ koşulları daha az kısıtlayıcı hale gelir. (4.121) da $p \to \infty$ limit alındığı bunu $R(\infty)$ ile göstereceğiz. Eğer x artarsa, bu şart otomatik olarak sağlanır, oysa eğer x azalırsa, $R(\infty)$-şartı

$$x_n x_{n+2} \geq x_{n+1}^2 \tag{4.122}$$

dır, diğer adı logaritmik konveksliktir. Benzer şekilde, (4.121) da $p \to -\infty$ için limit alarak, tüm $R(p)$ lerin en katı olan $R(-\infty)$ durumunu tanımlarız. Eğer x artarsa, $R(-\infty)$-şartı (4.122) dir, oysa eğer x azalırsa koşul x_n nin $n > 1$ için sabit olmasıdır. Böylece, artan diziler için, logaritmik konvekslikten daha zayıf ve dizileri azaltmak için daha güçlü olan koşullara ihtiyacımız var.
Rhoades, sonuçlarını kuvvetli ortalamaya, nihayetinde

$$a_n = n^\alpha \tag{4.123}$$

olan (**??**) matrislerine uyguladı. O, (4.123) dizileriinin, $\alpha = 1, 2$ ya da 3 olduğunda $p > 1$ için $R(p)$ ye ait olduğunu gösterdi (elbette o, bu terminolojiyi kullanmadı). Böylece, α nın bu değerleri üzerinden, alt sınırın A nın ilk sütununda elde edildiği sonucuna varmıştır. O, bütün pozitif α için aynı sonucun geçerli olduğunu iddia etti (Rhoades,[63] , 1987, sayfa 351). (Elbette, sadece $\alpha = 0$ durumda (4.88) de eşitsizlik vardır).
Olası sonuçların $0 < \alpha < 1$ için yanlış, $\alpha \geq 1$ için doğru, ve $-1/q < \alpha \leq 0$ için de doğrudur (Teorem 4.23). Burada, anlamlı sonuçlar elde etmek için, $\alpha > -1/p^*$ kısıtlaması gereklidir; çünkü o, A nın ilk kolonunun sonlu olmasına denktir (ℓ^p-norm (4.117) ile karşılaştır). Aynı kısıtlama, tesadüfen, A nın ℓ^p den kendi içine dönüşüm olmasını garanti eder.

Lemma 4.13 *α sabit bir reel sayı olsun. Bu durumda $0 < \alpha < 1$ ise*

$$\frac{n(n+1)^\alpha}{1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha}, \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{4.124}$$

dizileri n ye göre artandır, ve aksi durumda azalandır. (Bennet,[6] ,1992)

İspat. $n = 1, 2, \ldots$ için

$$(n+1)(n+2)^\alpha (1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha) \leq n(n+1)^\alpha (1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + (n+1)^\alpha) \tag{4.125}$$

sağlandığında (4.124) dizileri n ye göre azalandır ve (4.117) tersine çevrildiğinde artandır. x $n-$linin her terimi $(n+1)$ kez yerdeğiştirerek oluşturulan $(n+1)\,n-$li olsun:

$$(1.(n+2), 2.(n+2), \ldots, n.(n+2)).$$

Benzer şekilde, $y\,(n+1)$ −linin her terimi n kez yerdeğiştirerek oluşturulan $n\,(n+1)$ −li olsun:

$$(1.\,(n+1)\,, 2.\,(n+1)\,, \ldots, (n+1)\,.\,(n+1))\,.$$

Bir rutin (fakat daha ziyade sıkıcı) hesaplama x in y ile majoritlendiğini gösterir, böylece (4.95), her $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ sürekli konveks fonksiyonları için elde edilir. $\alpha \geq 1$ veya $\alpha < 0$ durumunda $\phi\,(t) = t^{\alpha}$ alarak α nın bu değerleri için, (4.125) eşitliğinin elde edilir. Diğer yandan, $\phi\,(t) = -t^{\alpha}$ alarak, $0 < \alpha < 1$ olduğunda (4.125) ün tersine çevrilebildiği görülür. Bu lemmanın ispatını tamamlar. ■

Teorem 4.23 *$p \geq 1$ ve $\alpha \geq -1/q$ ile α, p sabit reel sayılar olsun olsun ve olsun A girişleri (42) ile verilen ağırlıklı ortalama matrisi olsun. Bu durumda A, ℓ^p de hareket ederek, alt sınırına ilk sütununda $\alpha \leq 0$ veya $\alpha \geq 1$ olması koşuluyla ulaşır. Eğer $0 < \alpha < 1$ ise sonuç yanlıştır. (Bennet,[6] ,1992)*

İspat. $a_n = \alpha^n$ ($\alpha \leq 0$ veya $\alpha \geq 1$) ile, Lemma 4.13 ile (na_{n+1}/A_n) dizi n ye göre azalan olduğunu görülür. Böylece, (A_n^{-1}) dizi $R\,(1)$ e aittir, ve böylece $R\,(p))$ ye aittir. Sonuç şimdi Teorem 4.22 den görülür. ■

$0 < \alpha < 1$ olduğunda durum çok daha karmaşıktır. Kesinlikle, $p = 1$ olduğunda Teorem bütün bu aralıktaki α lar için yanlıştır. Bunu görmek için, artık (A_n^{-1}) dizisinin $R\,(1)$ e ait olmadığını not etmeliyiz, gerçekten; Lemma 4.13 ile, $R\,(1)$ için tanımlayıcı eşitsizlik tersidir. Lemma 4.12 den sonraki uyarıdan (4.113) deki infimumun $r = \infty$ da oluştuğu görülür, böylece A nın alt sınırı asla elde edilemez.

Diğer yandan, (A_n^{-1}) dizisinin logaritmik konveks olduğu, yani (A_n^{-1}) in $R\,(\infty)$ a ait olduğu görülür. Bu, $0 < \alpha < 1$ olan her sabit α için uygun büyük p (α ya bağlı) için teoremin doğru olabileceğini önerir. Teorem küçük p (sadece $p = 1$ için değil) için kesinlikle yanlıştır. Tam "kırılma" noktasını belirlemek ilginç olurdu. Burada konu aşağıdaki problemdedir.

$p > 1$ ve $\alpha > -\frac{1}{q}$ ile α ve p reel sayılar olsun.

$$\frac{(1^{\alpha} + \cdots + n^{\alpha})^{p}}{n} \sum_{k>n} (1^{\alpha} + \cdots + n^{\alpha})^{-p}$$

dizinin monotonluk özelliklerini tamamen belirleyin. (öne çıkan durum $0 < \alpha < 1 < p$ dir)

4.11.7 Moment dizileri

Bu kısımda, moment dizileri ile sağlanan bazı elementer eşitsizlikleri vereceğiz. (4.93) da verilen dizilerin var olduğunu hatırlayalım.
Bizim ilk eşitsizliğimiz, kısım 2 ve 4 deki sonuçların sadece özetidir.

Teorem 4.24 *$\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ negatif olmayan, $\phi(0) = 0$ ile konveks fonksiyon ve μ bir moment dizisi olsun. Bu durumda*

$$\frac{1}{r+1} \sum_{n=0}^{\infty} \phi \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \Delta^{n-k} \mu_k \right)$$

r $(r = 0, 1, \ldots)$ nin artan bir fonksiyonudur. (Bennet,[6] ,1992)
Bizim sonraki sonucumuz quasi-Hausdorff matrisleri için Teorem 4.24 in bir benzeridir. İspatı atlayacağız.

Teorem 4.25 *$\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ve μ bir moment dizisi olsun. Bu durumda*

$$\frac{1}{r+1} \sum_{n=0}^{r} \phi \left(\sum_{k=n}^{r} \binom{k}{n} \Delta^{k-n} \mu_n \right)$$

r $(r = 0, 1, \ldots)$ nin artan bir fonksiyonudur. (Bennet,[6] ,1992)
Bizim sonraki toeremlerimiz Rhoades in,[60][62] ve[64] makaleleri ile motive edilmiştir. Bu kısmın diğer sonuçları yöntem olarak benzerdir, fakat alt sınır probleminde doğrudan bir yöntemi yoktur.
Rhoades (,[64] Problem 1), her tolally monoton dizinin karekökünün tekrar tamamen monoton olup olmadığını sorar (karekök koordinatsal olarak alınır). Cevap olumsuzdur. Burada dolaylı bir ispat veriyoruz, çünkü ihtiyaç duyulandan çok daha fazla bilgi sağlayan metodumuz, bir başka Rhoades sorusunu yanıtlamamıza olanak sağlıyor (,[64] Problem 2).
Öyleyse, tüm mononton dizilerinin karekökünün tamamen monoton olduğunu varsayalım. Eğer μ böyle bir dizi ise bu durumda bazı pozitif r tamsayılar için, $p = 2^{-r}$ formunda olduğu zaman,

$$\Delta^n \left(\mu_k^p\right) > 0, \; (n, k = 0, 1, \ldots) \tag{4.126}$$

elde etmeliyiz.

Şimdi (4.126) iki olasılık uzayında L_p-normlarının bir karşılaştırması olarak tanıdığımız

$$\left(2^{1-n}\sum_{j\text{ even}}\binom{n}{j}\mu_{k+j}^{p}\right)^{1/p}\geq\left(2^{1-n}\sum_{j\text{ odd}}\binom{n}{j}\mu_{k+j}^{p}\right)^{1/p} \tag{4.127}$$

yi daha anlamlı bir şekilde yeniden yazabiliriz. $p\to 0$ (1/2, 1/4,...) kabul ederek, ve[33] nin Teorem 3 ünü uygulayarak

$$\prod_{j\text{ even}}\mu_{k+j}^{\binom{n}{j}}\geq\prod_{j\text{ odd}}\mu_{k+j}^{\binom{n}{j}},\ (n,k=0,1,\ldots) \tag{4.128}$$

$n=0$ olduğunda, (4.128) nin sağında görünen boş çarpım "sıfır" olarak yorumlanacaktır. Bu, (4.127) nın bir limiti olarak (4.128) nin türevi ile uyumludur. Biz, (4.128) yi sağlayan bir μ dizisine logaritmik olarak tamamen (totally) monotondur deriz.

Şimdi (4.128) de verilen ilk üç eşitsizlik ($n=0,1$ ve 2), tamamen monoton her dizi tarafından sağlanır. ($n=2$ için[70] ve[**?**] ye bak). Ama dördüncü eşitsizlik,

$$\mu_k\mu_{k+2}^{3}\geq\mu_{k+1}^{3}\mu_{k+3} \tag{4.129}$$

doğru değildir, bu gerçek, Rhoades'in karekök problemini çözmemizi sağlıyor.

Teorem 4.26 *Logaritmik olarak tamamen monoton olmayan tamamen monoton bir dizi vardır. (Bennet,*[6] *,1992)*

İspat. (4.129) i sağlamayan bir moment dizisi örneği vereceğiz. Örnek, $0\leq\theta\leq 1$ üzerinde sürekli f için

$$\int_0^1 f(\theta)\,d\mu(\theta)=\alpha f(x)+bf(y)$$

ile belirlenen ölçüm ile iki noktalı bir olasılık uzayından ortaya çıkar.

Burada $b=1-a$ dır ve geriye kalan a, x, y sayıları sonra belirlenecek. (4.129) eşitsizliği

$$(a+b)\left(ax^2+by^2\right)^3-(ax+by)^3\left(ax^3+by^3\right)\geq 0$$

ve bu

$$ab\,(x-y)^3\left(a^2x^3-b^2y^3\right)\geq 0 \tag{4.130}$$

olarak yeniden yazılabilir. Eğer $x = 1/3$, $y = 2/3$, $a = 3/4$, ve $b = 1/4$ ise, bu durumda (4.130) un bozulduğu kolayca kontrol edilebilir. Böylece μ, $d\mu(\theta)$ ile ilişkili moment dizisi, logaritmik olarak tamamen monoton olmayacaktır. Karşılık gelen "momentler" $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 5/12$, $\mu_2 = 7/36$, $\mu_3 = 11/108$ dir. ■
Teorem 7 den önceki tartışmadan aşağıdakini çıkardık.

Sonuç 4.8 *Karekökü tamamen monoton olmayan tamamen monoton bir dizi vardır. (Bennet,[6] ,1992)*

Bir sonraki sonucumuz, Teorem 7 için doğal bir tamamlayıcıdır.

$$\Delta^n(\mu_k v_k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \left(\Delta^{n-j}\mu_{k+j}\right)\left(\Delta^j v_k\right), \ (n, k = 0, 1, \ldots) \tag{4.131}$$

farkları için iyi bilinen Leibnitz formülüne ihtiyacımız olacak.
(4.131) den, tamamen monoton diziler kümesi çarpım altında kapalı olduğu görülür. Onun toplamlar altında da kapalı olduğundan başlayarak, exponent altında kapalıdır. Başka bir deyişle, eğer μ_k tamamen monoton ise, bu durumda e^{μ_k} da öyledir.

Teorem 4.27 *Pozitif terimlerle logaritmik olarak tamamen monoton dizi, tamamen monotondur. (Bennet,[6] ,1992)*

İspat. μ (4.128) yi sağlasın ve her k için $\mu_k > 0$ olsun. (4.128) de logaritma alarak,

$$\Delta^n(\log \mu_k) \geq 0, \ (n \geq 1,\ k \geq 0) \tag{4.132}$$

elde edilir. ■
$\log\left(\mu_k/\mu_{k+1}\right)$ dizisinin totall monoton olduğu görülür ve böylece, exponent alarak, μ_k/μ_{k+1} de öyledir. (4.132) den $n = 1$ ile, μ_k/μ_{k+1} olduğunu görürüz„ buradan $\mu_k/\mu_{k+1} - 1 := v_k$ dizisi de totall monotondur. $\Delta\mu_k = v_k\mu_{k+1}$ yazarak, ve tümevarımsal olarak (4.131) yi uygulayarak, μ_k nın totall monoton olduğunu görürüz.
Uyarı. Teorem 8 için kredi Rhoades den kaynaklanmaktadır. O, Teoremi ispatlamaz, hatta bu durumu bildirmez, ancak ispatta kullanılan fikirler makalesinde tartışılır.[60]
Bir μ dizisi verildiğinde, μ^α ile onun k. terimi olan μ_k^α terimli diziyi göstereceğiz.

Sonuç 4.9 *μ totall monoton dizi olsun. Bu durumda Aşağıdaki koşullar denktir:*
(i) μ^{α}, $\alpha > 0$ için totall monotondur,
(ii) μ logarithmik olarak totall monotondur. (Bennet,[6] ,1992)

İspat. (i)⇒(ii): Teorem 6 dan sonraki uyarıların sadece bir ifadesidir.
(ii)⇒(i): Eğer μ totall monoton ise, bu durumda μ ($\mu(0+) = \mu(1)$ veya değil olup olmamasına bağlı olarak) ya $(c, 0, 0, \ldots)$, veya her k için $\mu_k > 0$ dır. İlk durumda istenen sonuç açıktır; ikincisinde Teorem 8 i kullanırız - sonra eğer o μ için elde edilir ise bu durumda (4.128) tanımı μ^{α} için sağlandığını not edelim. ■
Sonuç,[64] deki Sonuç 1 ile çelişir. Burada "$\mu \in Q$" hipotezi, "μ, logaritmik olarak tamamen monoton" ile değiştirilmelidir. (Ayrıca bkz. Teorem 9 un sonucuna)
Bir sonraki teoremimiz, Hausdorff matrislerinin çarpımları ile ilgilidir ve Rhoades in başka bir problemini çözmemizi sağlıyor ([64] , Problem 2). İki Hausdorff matrisinin $H_\mu H_v$ çarpımı yine bir Hausdorff matrisi olduğunu ve ilişkili moment dizisi

$$\lambda_k = \mu_k v_k \tag{4.133}$$

ile verildiğini hatırlatırız (,[32] Teorem 197).
Lemma 4.9 ile bağlantılı olarak, Hausdorff matrislerinin "azalan dizileri azalan dizilere dönüştürdüğünü" gösteren aşağıdaki sonuca ihtiyacımız olacaktır.

Lemma 4.14 *$A = (a_{nk})$ negatif olmayan girişler içeren bir matris olsun ve $x \to y$ ile ilgili dönüşümü $y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$ olarak verilsin. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:*
(i) $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq 0$ olduğund $y_1 \geq y_2 \geq y_3 \geq \cdots \geq 0$ dır,
(ii) $\sum_{k=1}^{r} a_{nk} \geq \sum_{k=1}^{r} a_{n+1,k}$, $(n, r = 1, 2, \ldots)$. (Bennet,[6] ,1992)

İspat. (i) ⇒(ii) x dizisini $(1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$ alarak durum görülmüş olur.
(ii) ⇒(i) Parçaların toplanması ile durum görülür. ■

Teorem 4.28 *$p \geq 1$, ve olsun H_λ,H_μ, H_v, $H_\lambda = H_\mu H_v$ olan Hausdorff matrisleri olsun. Bu durumda H_λ, ℓ_p üzerinde sınırlıdır ancak ve ancak hem H_μ hem de H_v sınırlıdır. Ayrıca,*

$$\|H_\lambda\|_{p,p} = \|H_\mu\|_{p,p} \|H_v\|_{p,p} \tag{4.134}$$

dir. (Bennet,[6] ,1992)

İspat. Eğer H_μ ve H_v, ℓ_p üzerinde sınırlı ise bu durumda H_λ da açıkça sınırlıdır , ve böylece

$$\|H_\lambda\|_{p,p} \leq \|H_\mu\|_{p,p} \|H_v\|_{p,p} \tag{4.135}$$

dir. Öte yandan, H_λ ℓ_p üzerinde sınırlı olduğunu varsayalım. Eğer x, $\|x\|_p = 1$ ile azalan bir dizi ise, Lemma 4.14 ile,

$$\|H_\lambda\|_{p,p} \geq \|H_\lambda x\|_p = \|H_\mu H_v x\|_p \geq (H_\mu \text{ nün alt sınırı}) \|H_v x\|_p \geq \|H_v x\|_p$$

ye sahibiz.

Bütün x ler üzerinden supremum alarak, ve (4.104) yi uygulayarak $\|H_v\|_{p,p} \leq \|H_\lambda\|_{p,p}$ elde ederiz. Hausdorff matrisleri değişmeli (,[32] Theorem 197) olduğundan, $\|H_v\|_{p,p} \leq \|H_\lambda\|_{p,p}$ bulunur. Bu teoremin ilk kısmının ispatını tamamlar.

(4.134) ü ispatlamak için, bazı küçük değişiklikler ile Hardy nin (,[31] sayfa 48) argümanlarını izleriz. $0 < \varepsilon < 1/p$,, $x_n = (n+1)^{-\varepsilon - 1/p}$ alalım ve δ, $0 < \delta < 1$ herhangi pozitif sayı olsun.

$$(1 + 1/\alpha)^{-2/p} > \delta,$$

$$\int_{\sqrt{\alpha/N}}^1 \int_{\sqrt{\alpha/N}}^1 (\theta\phi)^{-1/p} \, d\mu(\theta) \, dv(\phi) > \delta \int_0^1 \int_0^1 (\theta\phi)^{-1/p} \, d\mu(\theta) \, dv(\phi)$$

ve

$$\sum_{n=N}^{\infty} x_n^p > \delta \sum_{n=0}^{\infty} x_n^p$$

sağlanması için α, N ve ε seçelim. Hardy nin ispatındaki gibi $\alpha/n < \theta\phi < 1$ olmak üzere

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (\theta\phi)^m (1-\theta)^{n-m} x_m > \delta (\theta\phi)^{-1/p} x_n$$

elde ederiz.

$$(H_\lambda x)_n = \int_0^1 \int_0^1 \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} (\theta\phi)^m (1-\theta)^{n-m} x_m d\mu(\theta) \, dv(\phi)$$

olduğu (4.133) den görülür. Eğer $n \geq N$ ise, bu durumda

$$\begin{aligned}(H_\lambda x)_n &\geq \delta x_n \textstyle\int_{\sqrt{\alpha/N}}^1 \int_{\sqrt{\alpha/N}}^1 (\theta\phi)^{-1/p} \, d\mu(\theta) \, dv(\phi) \\ &\geq \delta^2 x_n \textstyle\int_0^1 \int_0^1 (\theta\phi)^{-1/p} \, d\mu(\theta) \, dv(\phi)\end{aligned}$$

elde ederiz ve

$$\|H_\lambda x\|_p \geq \delta^{2+1/p} \|H_\mu\|_{p,p} \|H_v\|_{p,p} \|x\|_p$$

olduğu (4.105) den görülür. Bu

$$\|H_\lambda\|_{p,p} \geq \delta^{2+1/p} \|H_\mu\|_{p,p} \|H_v\|_{p,p}$$

olmasını sağlar ve $\delta \to 1$ iken limit alarak (4.134) elde edilir. ■

Sonuç 4.10 $1 \leq p < \infty$ *olmak üzere* p *sabit olsun ve* H, ℓ^p *üzerinde sınırlı bir Hausdorff matrisi olsun. Eğer* μ, *logaritmik total monoton ise bu durumda* H_{μ^α} *her* $\alpha > 0$ *için* ℓ^p *üzerinde sınırlıdır ve*

$$\|H_{\mu^\alpha}\|_{p,p} = \|H_\mu\|_{p,p}^\alpha \tag{4.136}$$

dır. (Bennet,[6] *,1992)*

İspat. Eğer α, m ve n pozitif sayılar olmak üzere $\alpha = m/n$ şeklinde ise bu durumda

$$(H_{\mu^\alpha})^n = H_{\mu^m} = (H_\mu)^m$$

ve bir basit süreklilik argümanı ile (4.136), α irrasyonel sayı olsa bile eşitliğinin korunduğu gösterilebilir. ■
Sonucun cevapları olumlu bir soru olarak Rhoades tarafından değerlendirildi (,[68] sh 296). Rhoades (4.136) i yalnızca $p = 2$ için ve 2^{-k} ($k = 1, 2, \ldots$) formundaki α lar için elde etti. (Yukarıdaki Teorem 8 in ardından aşağıdaki açıklamalara da bakınız.).
Şimdi alt sınırlarda çalışmamıza geri dönüyoruz. Burada Lemma 4.15 ile, matris normlarının (4.135) alışılmış "altçarpımsallığının" bir benzeri elde edilir. Bu analog, Hausdorff matrislerinin çarpımlarına uygulandığında, moment dizileri için bazı şaşırtıcı eşitsizliklere yol açar.

Lemma 4.15 $1 \leq p < \infty$ *olmak üzere* p *sabit olsun.* A *ve* B,ℓ^p *üzerinde sınırlı ve negatif olmayan girişli matrisler olsun. İlave olarak* B *azalan dizileri azalan dizilere dönüştürsün. Bu durumda*

$$L(AB) \geq L(A)\, L(B)$$

dir. (Bennet,[6] *,1992)*

İspat. This is an immediate consequence of the definition, (**??**), of lower bound. Bu, alt sınırın (**??**) ile verilen tanımının açık bir sonucudur. ■

Teorem 4.29 *μ ve ν moment dizileri olsun. Bu durumda, $p \geq 1$ olduğunda*

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\Delta^m \mu_0)^p \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^m \nu_0)^p \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\Delta^m (\mu\nu)_0)^p$$

dır. (Bennet,[6] *,1992)*

İspat. Verilen moment dizileriyle ilişkili olan H_μ, H_ν Hausdorff matrislerinini göz önününe alalım. Lemma 4.9 den bu matrislerin Lemma 4.14 un (ii) şartını sağladığı görülür ve bu nedenle azalan dizileri azalan dizilere dönüştürür. İlave olarak, $H_\mu H_\upsilon$ çarpım matrisi çarpım dizisi tarafından üretilen bir genelleştirmedir, yavi $H_{(\mu\upsilon)}$ dir. Şimdi Lemma 4.15, Teorem 4.20 ve (4.91) gösterimini uygulayalım. ■

Teorem 4.29 un çeşitli şaşırtıcı sonuçları vardır. Burada, bunlardan en basitlerinden biri olan, $\mu_n = \upsilon_n = 1/(n+1)$ (Lebesgue ölçüsüne karşılık gelen moment dizisi) alınarak elde edilden bir sonuçtan bahsedeceğiz.

Sonuç 4.11 $H_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$ *olmak üzere* $\zeta^2(p) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{H_n}{n}\right)^p \quad (p > 1)$ *n. harmonik sayısını gösterir. (Bennet,*[6] *,1992)*

Bu kısmın önceki sonuçlarıyla ilgili deneyimlerimize dayanarak, Teorem 4.29 un konveks fonksiyonlara genişletilip genişletilemeyeceğini sormak doğaldır.
Bu gerçekten de aşağıdaki Teoremde verilir.

Teorem 4.30 *μ, υ moment dizileri olsun ve $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\phi(0) = 0$ olan negatif olmayan konvek fonksiyon olsun. Bu durumda*

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \phi(\Delta^m \mu_0 \Delta^n \upsilon_0) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \phi(\Delta^n (\mu\upsilon)_0)$$

dır. (Bennet,[6] *,1992)*

Teorem 4.30, elbette, bir majör eşitsizliğine bağlıdır ve bu, en temel haliyle aşağıda verilmiştir. Ancak majörleşme, bu kısımda karşılaştığımızdan farklıdır. Majoretlenecek dizisi (bu durumda, iki kat-sonsuz) azalan sırada değildir, ve azalan yeniden düzenlemeye hiç erişilebilir değildir. Öyleyse, Teorem 4.31 daha çok karmaşık bir yaklaşım gerektirir ve bu tanımlanmak zorundadır (bkz..[26]

Teorem 4.31 *$0 \leq x, y \leq 1$ olmak üzere x ve y sabit olsun, N herhangi pozitif sayı olsun. Bu durumda $\{x^m y^m : n, m = 0, 1, 2, \ldots\}$ kümesinden her N terim toplamı $1 + (x + y - xy) + \cdots + (x + y - xy)^{N-1}$ toplamını aşamaz. (Bennet,*[6] *,1992)*

4.12 Genelleştirilmiş Rhaly Cesàro Matrisleri

Matrislerin ilk ailesi, sıfır olmayan $a_{nk} = t^{n-k}/(n+1), 0 < t \leq 1$ girişleri ile alt üçgensel bir matristir, bu matrise genelleştirilmiş Rhaly Cesàro matrisleri denir. Bu matriste $t = 1$ alınarak Cesàro matrisine indirgenir.

Teorem 4.32 *A bir genelleştirilmiş Rhaly Cesàro matrisi olsun. Bir $p \geq 2$ sabiti için,*

$$1 + \left[2 - \left(\frac{1 + t_0}{t_0}\right)^p\right] \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{t_0^j}{j+1}\right)^p = 0 \tag{4.137}$$

i sağlayan bir tek t değeri t_0 olsun. Bu durumda, $t_0 \leq t \leq 1$ için, $L^p = f(0)$ dır. ([65] *, Rhoades, 1990)*

İspat. $t = 1$ için sonuç halihazırda bilindiğinden, $0 < t < 1$ kabul edeceğiz.

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^{r} \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{t^{j-k}}{j+1}\right)^p + \frac{1}{r+1} \sum_{j=r+1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{t^{j-k}}{j+1}\right)^p \\ &= \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^{r} \frac{t^{pj}}{(j+1)^p} \left(\sum_{k=0}^{j} t^{-k}\right)^p + \frac{1}{r+1} \sum_{j=r+1}^{\infty} \left(\frac{t^j}{j+1}\right)^p \left(\sum_{k=0}^{r} t^{-k}\right)^p \\ &= \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^{r} \left(\frac{1 - t^{j+1}}{(j+1)(1-t)}\right)^p + \frac{1}{r+1} \left(\frac{1 - t^{r+1}}{t^r (1-t)}\right)^p \sum_{j=r+1}^{\infty} \left(\frac{t^j}{j+1}\right)^p, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &(1-t)^p [f(r) - f(r+1)] \\ &= \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+2}\right) \sum_{j=0}^{r} \frac{(1 - t^{j+1})^p}{(j+1)^p} - \frac{1}{r+2} \left(\frac{1 - t^{r+2}}{r+2}\right)^p \\ &+ \left[\frac{(1 - t^{r+1})}{(r+1) t^{pr}} - \frac{(1 - t^{r+2})^p}{(r+2) t^{p(r+1)}}\right] \sum_{j=r+2}^{\infty} \left(\frac{t^j}{j+1}\right)^p \\ &+ \frac{(1 - t^{r+1})^p t^{p(r+1)}}{(r+1)(r+2)^p t^{pr}} \\ &= \frac{1}{(r+1)(r+2)} \sum_{j=0}^{r} \frac{(1 - t^{r+1})^p}{(j+1)^p} \\ &+ \left[\frac{(1 - t^{r+1})^p}{(r+1) t^{pr}} - \frac{(1 - t^{r+2})^p}{(r+2) t^{p(r+1)}}\right] \sum_{j=r+1}^{\infty} \left(\frac{t^j}{j+1}\right)^p. \end{aligned}$$

dir.

$$
\begin{aligned}
&g(r) \\
&= (1-t^{p})(r+1)(r+2)[f(r)-f(r+1)] \\
&= \sum_{j=0}^{r}\frac{(1-t^{j+1})^{p}}{(j+1)^{p}}+\left[\frac{(r+2)(1-t^{r+1})^{p}}{t^{pr}}-\frac{(r+1)(1-t^{r+2})^{p}}{t^{p(r+1)}}\right]\sum_{j=r+1}^{\infty}\left(\frac{t^{j}}{j+1}\right)^{p}
\end{aligned}
$$

tanımlayalım. Δ, her $\{\mu_k\}$ dizi için $\Delta_{\mu_k}=\mu_k-\mu_{k-1}$ ile tanımlanan ileri fark operatörü olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
&g(r)-g(r+1) \\
&= -\frac{(1-t^{r+2})^{p}}{(r+2)^{p}}+\left[\frac{(r+2)(1-t^{r+1})^{p}}{t^{pr}}-\frac{(r+1)(1-t^{r+2})^{p}}{t^{p(r+1)}}\right]\left(\frac{t^{r+1}}{r+2}\right)^{p} \\
&+\left[\frac{(r+2)(1-t^{r+1})^{p}}{t^{pr}}-\frac{(r+1)(1-t^{r+2})^{p}}{t^{p(r+1)}}\right. \\
&\left.-\frac{(r+3)(1-t^{r+2})^{p}}{t^{p(r+1)}}+\frac{(r+2)(1-t^{r+3})^{p}}{t^{p(r+2)}}\right]\sum_{j=r+2}^{\infty}\left(\frac{t^{j}}{j+1}\right)^{p} \\
&= \frac{(r+2)\,t^{p(r+1)}}{(r+2)^{p}}\left[\frac{(1-t^{r+1})^{p}}{t^{pr}}-\frac{(1-t^{r+2})^{p}}{t^{p(r+1)}}\right] \\
&+(r+2)\left[\frac{(1-t^{r+1})^{p}}{t^{pr}}-\frac{2(1-t^{r+2})^{p}}{t^{p(r+1)}}+\frac{(1-t^{r+3})^{p}}{t^{p(r+2)}}\right]\sum_{j=r+2}^{\infty}\left(\frac{t^{j}}{j+1}\right)^{p} \\
&= \frac{1}{(r+2)^{p-1}}\left[t^{p}(1-t^{r+1})^{p}-(1-t^{r+2})^{p}\right] \\
&+(r+2)\,\Delta^{2}\left(\frac{(1-t^{r+1})^{p}}{t^{pr}}\right)\sum_{j=r+2}^{\infty}\left(\frac{t^{j}}{j+1}\right)^{p}
\end{aligned}
$$

dir.

$$
h(r)=\frac{g(r)-g(r+1)}{(r+1)\,\Delta^{2}\left(\dfrac{1-t^{r+1}}{t^{r}}\right)^{p}}=\frac{t^{p(r+1)}\Delta\left(\dfrac{1-t^{r+1}}{t^{r}}\right)^{p}}{(r+2)^{p}\,\Delta^{2}\left(\dfrac{1-t^{r+1}}{t^{r}}\right)^{p}}+\sum_{j=r+2}^{\infty}\left(\frac{t^{j}}{j+1}\right)^{p}
$$

tanımlayalım.

$$
\begin{aligned}
&m(r) \\
&= t^{p}\Delta^{2}\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^{r}}\right)^{p}\left[\Delta^{2}\left(\frac{1-t^{r+2}}{t^{r+1}}\right)^{p}-\Delta\left(\frac{1-t^{r+2}}{t^{r+1}}\right)^{p}\right] \\
&+\left(\frac{r+3}{r+2}\right)^{p}\Delta\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^{r}}\right)^{p}\Delta^{2}\left(\frac{1-t^{r+2}}{t^{r+1}}\right)^{p} \\
&= \left(\frac{r+3}{r+2}\right)^{p}\Delta\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^{r}}\right)^{p}\Delta^{2}\left(\frac{1-t^{r+2}}{t^{r+1}}\right)^{p}-t^{p}\Delta^{2}\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^{r}}\right)^{p}\Delta\left(\frac{1-t^{r+3}}{t^{r+2}}\right)^{p}
\end{aligned}
$$

olmak üzere,

$$
h(r)-h(r+1)
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{t^{p(r+1)}\Delta\left(\dfrac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^p}{(r+2)^p\,\Delta^2\left(\dfrac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^p} - \frac{t^{p(r+2)}\Delta\left(\dfrac{1-t^{r+2}}{t^{r+1}}\right)^p}{(r+3)^p\,\Delta^2\left(\dfrac{1-t^{r+2}}{t^{r+1}}\right)^p} + \left(\frac{t^{r+2}}{r+3}\right)^p \\
&= \frac{t^{p(r+1)}}{(r+3)^p}\left\{t^p + \left(\frac{r+3}{r+2}\right)^p \frac{\Delta\left(\dfrac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^p}{\Delta^2\left(\dfrac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^p} - t^p\frac{\Delta\left(\dfrac{1-t^{r+2}}{t^{r+1}}\right)^p}{\Delta^2\left(\dfrac{1-t^{r+2}}{t^{r+1}}\right)^p}\right\} \\
&= \frac{t^{p(r+1)}m(r)}{(r+3)^p\,\Delta^2\left(\dfrac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^p\Delta^2\left(\dfrac{1-t^{r+2}}{t^{r+1}}\right)^p}
\end{aligned}
$$

dir. $0<t<1$ olduğundan, $((r+3)/(r+2))^p\rangle t^p$ dir. Şimdi

(i)

$$
\Delta\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^p > \Delta\left(\frac{1-t^{r+3}}{t^{r+2}}\right)^p
$$

ve

(ii)

$$
\Delta^2\left(\frac{1-t^{r+2}}{t^{r+1}}\right)^p > \Delta^2\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^p
$$

olduğunu göstereceğiz.

(i) yi ispatlamak için, $\Delta\left(\dfrac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^p$ nin r de monoton azalan veya denk olarak, $\Delta^2\left(\left(1-t^{r+1}\right)/t^r\right)^p > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $n(r) = \left(\left(1-t^{r+1}\right)/t^r\right)^p$ tanımlayalım. Bu durumda

$$
n'(r) = p\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^{p-1} t^{-1}\log(1/t) \text{ ve}
$$

$$
\begin{aligned}
n''(r) &= p(p-1)\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^{p-2}\left(t^{-r}\log(1/t)\right)^2 + p\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^{p-1} t^{-r}\left(\log 1/t\right)^2 \\
&= p\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^{p-2} t^{-1}\left(\log 1/t\right)^2\left[(p-1)\,t^{-r} + \left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)\right] > 0
\end{aligned}
$$

dir. $\Delta^2\left(\dfrac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^p$ ve $n''(r)$e aynı işarete sahip olduğundan, (i) sağlanır.

(ii) yi ispatlamak için,

$$
n''(r) = p\left(\log 1/t\right)^2\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^{p-2} t^{-2r}\left(p-t^{r+1}\right),
$$

ve

$$\begin{aligned}
n'''(r) &= p(\log 1/t)^2 \left\{ (p-2)\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^{p-3} t^{-3r}(\log 1/t)(p-t^{r+1}) \right. \\
&\left. + \left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^{p-2} pt^{-2r} 2\log(1/t) - \left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^{p-2} t^{-r+1}\log(1/t) \right\} \\
&= \frac{p(\log(1/t))^3}{t^{3t}} \left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^{p-3} \left\{ (p-2)(p-t^{r+1}) \right. \\
&\left. + 2pt^r \left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right) - t^{2r+1}\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right) \right\}
\end{aligned}$$

ve eğer $p \geq 2$ ise $n'''(r) > 0$ dir. Bu yüzden $\Delta^3((1-t^{r+1})/t^r)^p < 0$ dır ve (ii) doğrudur.

Böylece h da r de monoton azalandır.

$$\lim_r h(r) = \lim_r \frac{t^{p(r+1)}}{(r+2)^p} \lim_r \frac{\Delta\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^p}{\Delta^2\left(\frac{1-t^{r+1}}{t^r}\right)^p}$$

dır. ilk limit sıfırdır ve ikinci limit $-t^p/(1-t^p)$ dir. Bu yüzden h pozitiftir ve g, r de monoton azalandır.

$$q(t,p) = 1 + \left[2 - \left(\frac{1+t}{t}\right)^p\right] \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{t^j}{j+1}\right)^p,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q}{\partial t} &= -p\left(\frac{1+t}{t}\right)^{p-1}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{t^j}{j+1}\right)^p + \left[2-\left(\frac{1+t}{t}\right)^p\right]\sum_{j=1}^{\infty}\frac{pjt^{pj-1}}{(j+1)^p} \\
&= p\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{t^j}{j+1}\right)^p \left[\left(\frac{1+t}{t}\right)^{p-1}\frac{1}{t^2} + \left(2-\left(\frac{1+t}{t}\right)^p\right)\frac{j}{t}\right]
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$g(0) = (1-t)^p + \left[2(1-t)^p - \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^p\right]\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{t^j}{j+1}\right)^p = (1-t)^p q(t,p)$$

dir. j nin katsayısı negatif olduğundan, köşeli parantezdeki ifade j de monoton azalandır. $j=1$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^2}\left[\left(\frac{1+t}{t}\right)^{p-1} + 2t - t\left(\frac{1+t}{t}\right)^p\right] &= \frac{1}{t^2}\left[\left(\frac{1+t}{t}\right)^{p-1}(1-1-t)+2t\right] \\
&= \frac{1}{t}\left[2-\left(\frac{1+t}{t}\right)^{p-1}\right] \leq 0
\end{aligned}$$

olur ve q, t de monoton azalandır.

$$q\left(1,p\right)=1+\left[2-2^{p}\right]\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\left(j+1\right)^{p}}\text{ ve}$$

$$\begin{aligned}\tfrac{\partial q(1,p)}{\partial p} &= -2^{p}\log 2\sum_{j=1}^{\infty}\left(j+1\right)^{-p}+\left(2-2^{p}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left(j+1\right)^{-p}\log\left(\frac{1}{j+1}\right)\\ &= -2^{1-p}\log 2+\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{\left(j+1\right)^{p}}\left[\left(2^{p-2}\right)\log\left(j+1\right)-2^{p}\log 2\right].\end{aligned}$$

dir.

Köşeli parantezdeki ifade p de monoton artandır, $p=1$ de onun değeri $-2\log 2$ dir, ve p ile sonsuza yaklaşır. Bu yüzden, q, $p=1$ sağında bir minimuma sahiptir. $q\left(1,2\right)=\left(9-\pi^{2}\right)/3<0$ ve $\lim_{p}q\left(1,p\right)=0$ olduğundan, her $p\geq 2$ için, $q\left(1,p\right)\langle\max_{p\geq 2}q\left(1,p\right)=\max\left\{q\left(1,2\right),0\right\}=0$ dir.

$$q\left(t,p\right)=1+2\left(\frac{t}{2}\right)^{p}-\left(\frac{1+t}{2}\right)^{p}+2\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{t^{j}}{j+1}\right)^{p}-\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\left(t+1\right)t^{p(j-1)}}{\left(j+1\right)^{p}}$$

yazarak,

$$q\left(0,p\right)=1-2^{-p}>0$$

elde edilir. Bu yüzden, t_0 (4.137) i sağlamak üzere, $t_0\leq t\leq 1$ için, $g\left(0\right)<0$ ve $L^{p}=f\left(0\right)$ dir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Rassias[54] de, $p=2$ durumu için bir genelleştirilmiş Cesàro operatorü için bir altsınır sınır elde etti, ve C için doğru değeri hesapladı. ([54] ün (4.137) formülünde, t nin kuvveti n den ziyade $n-1$ olmalıdır. Bununla beraber, onun Teoremi $\{x_n\}$ dizisini içeren bir eşitsizliği sağlaması gerekir. Bu makalenin Teorem 1 i sadece $p=2$ için onun sonucunun önemi, doğru değeri elde etmekle kalmaz, aynı zamanda $p>2$ için L^{p} nin doğru değerini belirler.

Teorem 4.32, $t=0$ için yanlıştır, bu durumda $L^{p}=f\left(\infty\right)$ olur. Böylece, 0 ve 1 arasında bir t_0 sayısının var olma şartı, yani Teorem 4.32, $t_0\leq t\leq 1$ için doğru olması doğal birşeydir. (4.137) ile belirlenen t_0 değeri, Teoremin doğru olduğu t nin en küçük değeri olmayabilir.

4.13 Hilbert Matrisi

Teorem 4.3 de verilen alt sınırı, C Cesaro matrisini kolayca uygulandığını gördük. Maalesef, diğer "klasik" matrislere karşılık gelen sınır çok kolay bulunamaz, çünkü elimizde r. kısmi satır toplamı kesin değeri her zaman elde edilemeyebilir. Bu kısımdaki amacımız, bu tarz zorluklardan en azından Hilbert matrisi için nasıl kaçınılacağını göstermektir.

Şimdi Teorem 2.3 i tekrar katırlayalım:

Eğer $p > 1$, $p' = p/(p-1)$ ve

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m^p \leq A, \ \sum_{m=1}^{\infty} b_m^{p'} \leq B,$$

ise bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} < \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} A^{1/p}.B^{1/p'} \tag{4.138}$$

dir. (a_n) veya (b_n) dizileri sıfır olmadıkça eşitsizlik kesindir.

Tanım 4.7 *H Hilbert matrisini*

$$\forall j, k = 1, 2, \ldots \ \text{için} \ h_{jk} = (j + k - 1)^{-1}$$

ile göstereceğiz, yani;

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 4.33 *H, ℓ^p $(1 < p < \infty)$ de sınırlı lineer bir operatördür ve*

$$\|H\|_{p,p} = \pi \csc\left(\frac{\pi}{p}\right) \tag{4.139}$$

normu ile sınırlıdır.([33] , Hardy ve ark. 1967)

İspat. İspat Teorem 2.3 den görülür. ■

Lemma 4.16 *p sabit ve $1 < p < \infty$ olsun. $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq 0$ olan $\forall x \in \ell^p$ için*

$$\|Hx\|_p \geq \|Cx\|_p \tag{4.140}$$

*dir; (**??**) de eşitlik olması için k nın en fazla bir değeri için $x_k > 0$ olmalıdır. ([2] , Bennett, 1986)*

İspat. a_k ve x_k ların rollerini değiştirip Önerme 4.1 i tekrar uygulayalım.

$$\begin{aligned}
\|Hx\|_p^p &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\tfrac{x_k}{j+k-1}\right)^p \\
&\geq \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right)^p \left[(j+r-1)^{-p} - (j+r)^{-p}\right] \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right)^p \sum_{j=1}^{\infty} \left[(j+r-1)^{-p} - (j+r)^{-p}\right] \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{r} x_k\right)^p r^{-p} \\
&= \|Cx\|_p^p
\end{aligned}$$

elde ederiz. ■

Teorem 4.34 *p sabit ve $1 < p < \infty$ olsun.$\forall x \in \ell^p$ ve $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq 0$ için*

$$\|Hx\|_p \geq \xi(p)^{\frac{1}{p}} \|x\|_p \tag{4.141}$$

vardır. Burada eşitlik olması için $x_2 = x_3 = \cdots = 0$ olmalıdır. ([2] , Bennett, 1986)

İspat. İspat yukarıdaki Lemmadan ve Teorem 4.5 ten görülür. ■

$p = \infty$ için Lemma **??** doğru olduğunu hatırlatalım. [(**??**) in sol tarafı bazı $x \in \ell^\infty$ lar için sonsuz olduğundan sonuç aşikardır.] $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots$ kısıtlaması gereklidir, fakat bu Lemma **??** ün ilgi çekiciliğini azaltmaz.

(4.140) eşitsizliğinden, Hilbert eşitsizliğinin (H, ℓ^p de sınırlı) Hardy eşitsizliğini (C, ℓ^p de sınırlı) sağladığını görürüz. Hardy nin sonuçlarının orijinal nedenlerini düşündüğümüz zaman bu gözlemler tarihi ilgiden doğar. Hilbert eşitsizliğinin basit bir ispatı ([33] , sh.239) bulunabilir.

$$h_{jk} \leq c_{jk} + c_{kj}, \qquad j,k = 1,2,\ldots$$

olduğundan,

$$\|H\|_{p,p} \leq \left\|C + C^t\right\|_{p,p} \leq \|C\|_{p,p} + \|C\|_{p^*,p^*}$$

dır.

Böylece ℓ^p den ℓ^q ya C nin sınırlılığından H ın ℓ^p deki sınırlılığı elde edilir. [Bir alternatif yaklaşım, $h_{jk} \leq \left(C^t C\right)_{j,k^*}$ oluğunu gözlemlemektir.]

Gelecek kısımda, Hardy nin programını Hardy nin eşitsizliğinin keskin versiyonunun **(4.19)** Hilbertin keskin versiyonunu **(4.139)** sağladığını göstererek tamamlayacağız.

4.14 Hardy Eşitsizliğinin Hilbert Eşitsizliği ile KarşIlaştırılması

Bu kısımda, **(4.140)** in tamamlayıcısı olan $\|Hx\|_p \leq K(p)\|Cx\|_p$ biçimindeki eşitsizliklerle inceleyeceğiz.

Teorem 4.35 *p sabit, $1 < p < \infty$ ve $x \in \ell^p$ olsun*

$$\|Hx\|_p \leq \frac{\pi}{q} \csc\left(\frac{\pi}{p}\right) \|Cx\|_p \tag{4.142}$$

dir. Sabit en iyi sabittir ($x \geq 0$ veya $x \downarrow 0$ ilave hiptezleri koyararak veya koymayarak)([2] , Bennett 1986)

İspat.

$$b_{jk} = \frac{1}{(j+k-1)(j+k)}, \quad (j,k = 1,2\ldots \text{ için}) \tag{4.143}$$

şeklinde verilen B matrisi için, $H = BC$ Hilbert matrisi, bir çarpım matrisi olduğunu görelim. Buradan (4.142), hemen aşağı verilecek olan Önermenin doğal bir sonucudur.

Sabitin en iyi ihtimal olduğunu görebilmek için, (4.142), (4.139) Hilbert eşitsizliğinin keskin versiyonunu (4.19) Hardy eşitsizliğinin keskin bir versiyonu olmasını sağladığını görmek gerekir. ■

Şimdi aşağıdaki Önermenin ispatında kullanacağımız Riesz konvekslik teoremini ispatsız olarak verelim.

Teorem 4.36 (Riesz Konvekslik Teoremi)

$$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$$

olsun. Kabul edelim ki $M_{\alpha,\beta}$*,*

$$\sum_{i=1}^{m}|x_i|^{1/\alpha}\leq 1,\ \sum_{i=1}^{m}|y_i|^{1/\beta}\leq 1$$

için A *nın maksimumu olsun.,* $\alpha=0$ *veya* $\beta=0$ *ise, bu eşitsizliklerin yerine* $|x_i|\leq 1$ *veya* $|y_i|\leq 1$ *ile değiştirilir. Bu durumda* $\log M_{\alpha,\beta}$

$$0\leq\alpha\leq 1,\ 0\leq\beta\leq 1,\ \alpha+\beta\geq 1$$

üçgeninde konvekstir. ([33] , Hardy ve ark, 1967)

Önerme 4.2 *p sabit,* $1<p<\infty$ *ve* B *matrisi (4.143) deki gibi olsun. Bu durumda,*

$$\|B\|_{p,p}=\frac{\pi}{q}\csc\left(\frac{\pi}{p}\right)$$

dir. ([2] , Bennett, 1986)

İspat. Yukarıdaki uyarılarla $\|B\|_{p,p}\leq\frac{\pi}{q}\csc\left(\frac{\pi}{p}\right)$ olduğunu göstermek yeterlidir. $0<w\leq 1$ olmak üzere,

$$b(w)_{jk}=\begin{pmatrix}j+k-2\\k-1\end{pmatrix}w^{j-1}(1-w)^k,\ \ (j,k=1,2,\ldots\ \text{için}$$

$B(w)$ matrisler ailesini düşünelim. Satır toplamları $(1-w)/w$ ve kolon toplamları 1, yani;

$$\|B\|_{\infty,\infty}=\frac{1-w}{w},\ \|B\|_{1,1}=1$$

dir. m. Riesz konvekslik teoremi ile

$$\|B\|_{p,p}\leq 1^{1/p}\left(\frac{1-w}{w}\right)^{1/q}$$

dir. Diğer yandan

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^1 b(w)_{j,k}\,dw &= \begin{pmatrix}j+k-2\\k-1\end{pmatrix}\textstyle\int_0^1 w^{j-1}(1-w)^k\,dw\\ &= \begin{pmatrix}j+k-2\\k-1\end{pmatrix}\beta(j,k+1)\\ &= \frac{(j+k-2)!}{(k-1)!\,(j-1)!}\frac{(j-1)!k!}{(j+k)!}=b_{jk}\end{aligned}$$

dır. Bötlece

$$\begin{aligned}
\|B\| &= \left\| \int_0^1 B(w)\, dw \right\| \\
&\leq \int_0^1 \|B(w)\|\, dw \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1-w}{w} \right)^{1/q} dw \\
&= \beta \left(1 - \frac{1}{q}, 1 + \frac{1}{q} \right) \\
&= \Gamma \left(\frac{1}{p} \right) \Gamma \left(\tfrac{1}{q} \right) \frac{1}{q} \\
&= \frac{\pi}{q} \csc \left(\frac{\pi}{p} \right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. ■

Önerme 4.2 nin ispatının arkasındaki fikir yaygın olarak uygulanabilir. Diğer yandan, $[0,1]$ üzerinde dw Lebesgue ölçüm yerine, herhangi bir $d\mu(w)$ pozitif ölçüm ile değiştirebiliriz, böylece ℓ^p üzerinde sınırlı yeni matris aileleri üretebiliriz. Diğer taraftan, yardımcı $B(w)$ matrislerini diğer koleksiyonlar ile değiştirebiliriz. (Kesin sonuçlar elde etmek için, satır toplamları her sabit w için sabit olmalıdır, ya da hemen hemen aynı ve sütun toplamları için benzer şekilde ilginç sonuçlar elde etmek için, satır toplamı sütun toplamından farklı olmalıdır.)

Örneğin, (4.139) Hilbert eşitsizliğinin son derece basit bir ispatını elde etmek için, $0 < w < 1$ olmak üzere

$$h(w)_{jk} = \begin{pmatrix} j+k-2 \\ k-1 \end{pmatrix} w^{j-1} (1-w)^k, \quad (j,k = 1,2,\ldots \text{ için}$$

ile werilen $H(w)$ matrislerini düşünelim. Burada satır toplamları $1/w$, sütun toplamları $1/(1-w)$ dır, ve

$$\|H\|_{p,p} \leq \int_0^1 \frac{dw}{(1-w)^{1/p} w^{1/q}} = \pi \csc \left(\frac{\pi}{p} \right)$$

olduğunu elde ettik.

Yine, (4.19) Hardy eşitsizliğini ispatlamak için, $0 < w < 1$ olmak üzere,

$$c(w)_{jk} = \begin{pmatrix} j-1 \\ k-1 \end{pmatrix} w^{j-1} (1-w)^{j-k}, \quad (j,k = 1,2,\ldots \ (k \leq j) \text{ için}$$

ile verilen $C(w)$ matrislerini düşünelim ve önceki gibi devam edelim. Bu matrisler, Euler matrisleri denir ve bunlar klasik toplanabilme teorisinde yaygın olarak kullanılır, bunun için ([32] , Bölüm VIII, IX) e bakılabilir.

$$H(\mu) = \int_0^1 C(w)\, d\mu(w)$$

ile üretilen (negatif olmayan) herhangi bir Hausdorff matrisinin normunun

$$\|C(w)\|_{p,p} = w^{-1/p}$$

olduğunu Hardy, doğrudan göstermiştir. Çalışması interpolasyon teorisinden hiç bahsetmiyor olsa da, bu bölüm onun fikirlerine çok şey borçludur bunun için ([32] , Bölüm 11.17) ye bakılabilir.

4.15 p rasyonel olmak üzere ℓ^p için abel özdeşliği

(4.12) daki gibi, yeni bir eşitsizliği keşfettikten sonra, altta yatan cebirsel bir özdeşlik aramak doğaldır. Özdeşlik, eşitsizliğin belirli terimlerin atılmasıyla bir kerede görülecek şekilde olmalıdır. Böyle bir özdeşlik aşağıdadır.

Önerme 4.3 *$a_1, a_2, \ldots, a_n$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ herhangi bir reel sayı (pozitif veya değil) olsun. Eğer p pozitif bir tamsayı ise, bu durumda*

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^p &= \sum_{r=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{r} a_k\right)^p \left(x_r^p - x_{r+1}^p\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p x_n^p \\ &+ \sum_{r=1}^{n} \sum_{p_1+p_2+\cdots+p_n=p}^{r} \frac{p!}{p_1! \ldots p_r!} \times a_1^{p_1} \cdots a_r^{p_r} \left(x_1^{p_1} \ldots x_{r-1}^{p_{r-1}} - x_r^{p-p_r}\right)\end{aligned}$$

dir. ([2] , Bennett, 1986)

İspat. Multinomal teoremi ile,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k x_k\right)^p$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{p_1+p_2+\cdots+p_n=p \\ p_r>0 \\ p_{r+1}=\cdots=p_n=0}} \frac{p!}{p_1!\ldots p_r!} a_1^{p_1}\cdots a_r^{p_r}.x_1^{p_1}\cdots x_r^{p_r}$$

$$= \sum_{r=1}^{n} \sum_{\substack{p_1+p_2+\cdots+p_n=p \\ p_r>0 \\ p_{r+1}=\cdots=p_n=0}} \frac{p!}{p_1!\ldots p_r!} \times a_1^{p_1}\cdots a_r^{p_r}.x_r^{p_r}\left(x_1^{p_1}\cdots x_{r-1}^{p_{r-1}} - x_r^{p-p_r}\right)$$

$$+\sum_{r=1}^{n}\left(\sum_{\substack{p_1+p_2+\cdots+p_n=p \\ p_{r+1}=\cdots=p_n=0}} - \sum_{\substack{p_1+p_2+\cdots+p_n=p \\ p_r=\cdots=p_n=0}}\right)$$

$$\times \frac{p!}{p_1!\ldots p_r!} a_1^{p_1}\cdots a_r^{p_r} x_r^{p_r}$$

elde ederiz. İlk toplamda, $p_r = p$ nin hiçbir katkısı olmadığından terimler ihmal edilebilir. Multinomyal teoremi tekrar uygulayarak, ikinci toplam

$$\sum_{r=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{r} a_k\right)^p - \left(\sum_{k=1}^{r-1} a_k\right)^p\right] x_r^p,$$

olarak yeniden yazılabilir ve bu terimler yeniden gruplandırılarak önerme elde edilir.

■

$p = 1$ olduğunda, özdeşliğin son teriminin ortadan kalkar ve Abel özdeşliği ile durum açıktır. Diğer yandan, genel p için, son terim, a_1,a_2,...,$a_n \geq 0$ ve $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$ olması koşuluyla negatif değildir. Bu nedenle (4.12) eşitsizliği, bu terimi çıkararak elde edilir.

Eğer a_1,$a_2, \ldots, a_n$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_n$ negatif olmadığını kabul edersek, Önerme 4.3 ün bir versiyonu, q bir (pozitif) rasyonel sayı olduğu durumda mevcuttur. Bu genel özdeşlik, (4.12) un kolay bir ispatına yol açmayacağı için, detayları atlıyoruz.

4.16 İntegral Benzerleri

Bu kısımda,

$$f(x) = \int_0^a K(x,y)\, g(y)\, dy, \ \ (\ 0 < x < a\ )$$

formundaki $f = Kg$ dönüşümleri için keskin alt sınırlar arayacağız.

Bu kısım boyunca, p $(1 \leq p < \infty)$ nin sabit olduğunu $K(x,y) \geq 0$ ve ölçülebilir olduğunu ve K nın $L^p(0,a)$ dan kendi içine dönüşüm olduğunu kabul edeceğiz.

Teorem 4.37 *Eğer $f,\ g \in L^p(0,a)$ negatif olmayan ve $(0,a)$ üzerinde azalan ise, bu durumda*

$$\lambda^p := \inf_{0<t<a} \int_0^a \frac{1}{t} \left(\int_0^t K(x,y)\, g(y)\, dy \right)^p dx \tag{4.144}$$

olmak üzere

$$\|f\|_p \geq \lambda \|g\|_p \tag{4.145}$$

dir. ([2] , Bennett, 1986)

İspat. Buradaki ispat, Teorem 4.3 dekine benzer olarak, bu kez $L^p(0,a)$ da parçanma ile interasyon benzeri kullanır. Buna göre, g nin kesinlikle sürekli olduğunu ve $[0,a]$ da azaldığını varsaymak uygun olacaktır. Bu varsayım, standart yaklaşım argümanları yoluyla, genellik bozmaksızın içerilir.

Sabit x, y için

$$\int_0^y K(x,t)\, g(t)\, dt \geq g(y) \int_0^y K(x,t)\, dt,$$

yani;

$$\left(\int_0^y K(x,t)\, g(t)\, dt \right)^{p-1} K(x,y)\, g(y) \geq g^p(y) \left(\int_0^y K(x,t)\, dt \right)^{p-1} K(x,y),$$

elde ederiz. Her iki yanı y ye göre ve sonra sağdaki kısımları kısmi integralleyerek,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^a K(x,y)\, g(y)\, dy \right)^p &\geq \int_0^a g^p(y) \frac{d}{dy} \left(\int_0^y K(x,t)\, dt \right)^p dy \\ &= \left(g(a) \int_0^a K(x,t)\, dt \right)^p - \int_0^a \left(\int_0^y K(x,t)\, dt \right)^p \frac{d}{dy} [g^p(y)]\, dy \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi x e göre integrasyon ile,

$$\begin{aligned} \|f\|_p^p &\geq g^p(a) \int_0^a \left(\int_0^a K(x,t)\, dt \right)^p dx \\ &\quad - \int_0^a \int_0^a \left(\int_0^y K(x,t)\, dt \right)^p \frac{d}{dy} [g^p(y)]\, dy dx \end{aligned}$$

elde edilir. (Tonnelli teoremine göre) son terimde integrasyon sırasını değiştirerek ve ardından (4.144) i her iki terime de uygulayarak,

$$\|f\|_p^p \geq g^p(a).a.\lambda^p - \lambda^p \int_0^a y \frac{d}{dy}[g^p(y)]\,dy$$

olur. Son bir kısmi integrasyon ile (4.145) elde edilir. ■

Yukarıdaki ispatta kısmen, sonlu olduğunu varsaydık. Bununla birlikte, standart limitleme argümanları, Teorem 4.37 nin, $a = \infty$ olduğunda geçerli olduğunu göstermektedir. Bu durum, Hardy nin $K(x,y) = 1/x$, $(0 < y < x) < \infty)$ ve Hilbertin $K(x,y) = 1/(x+y)$, $(0 < x,\, y < \infty)$ klasik çekirdeğini içerdiğinden uygulamalarda özellikle önemlidir (Bkz[32] , Bölüm IX). Bu çekirdeklerin her ikisi de -1 dereceden homojendir ve $a = \infty$ olduğundan, bu, λ, t den bağımsız olduğu için, ifade (4.144) i verir. Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.12 $1 < p < \infty$ *olmak üzere* p *sabitlesin ve* f, $g \in L^p(0,a)$ *negatif olmayan ve azalan olsun. Bu durumda*

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x \frac{g(y)}{x} dy \right)^p dx \geq q \int_0^\infty g^p(y)\,dy \tag{4.146}$$

ve

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x \frac{g(y)}{x+y} dy \right)^p dx \geq \Gamma(p+1)\,\xi(p) \int_0^\infty g^p(y)\,dy \tag{4.147}$$

dir. (4.146) ve (4.147) de eşitlik vardır ancak ve ancak g*, bazı* α*,* β *sabitleri için* $x > \beta$ *için* $g(x) = 0$*,* $0 < x < \beta$ *için* $g(x) = \alpha$ *formuna sahiptir. ([2] , Bennett, 1986)*

İspat. Yukarıdaki açıklamalara göre, her iki durumda da, $\lambda^p = \int_0^\infty \left(\int_0^1 K(x,y)\,dy \right)^p dx$ dir. Hardy çekirdeği için, bu integral $(= q)$ değerlendirmek için önemsizdir. Hilbert çekirdeği için şu şekilde ilerleyeceğiz:

$$\lambda^p = \int_0^\infty \log^p\left(1 + \frac{1}{x}\right) dx = \int_0^\infty \frac{u^p e^u}{(e^u - 1)^2} du$$

alacağız. Son integral, e^u da bir kuvvet serisi olarak

$$(e^u - 1)^{-2} = e^{-2u}\left(1 - e^{-u}\right)^{-2}$$

genişletilmesiyle değerlendirilebilir. Bu $\lambda^p = \Gamma(p+1)\,\xi(p)$, Γ-fonksiyonunun (integral) tanımından gelir (Bkz. örneğin ,[67] sh. 181). ■

5. AĞIRLIKLI ORTALAMA MATRİSLERİ VE NÖRLUND MATRİSLERİ İÇİN COPSON TİPLİ ALTSINIRLAR

5.1 Notlar

$1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq p$, ve $A = (a_{n,k})_{n,k\geq 0} \geq 0$ olsun. $X = (x_n)_{n=0}^{\infty} \in \ell_p$ ve $X \geq 0$ olmak üzere

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k\right)^q\right]^{1/q} \geq L\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k^p\right)^{1/q}$$

eşitsizliğini sağlayan her L lerin supremumunu $L_{p,q}(A)$ ile gösterelim. Bu kısımda, $L_{p,q}(A)$ nin dağılım değeri ağırlıklı ortalama matrisleri, Nörlund matrisleri ve onların transpozları için belirlenir. $L_{p,q}(A)$ nın tam değerini ilişkili ağırlık dizi bakımından ifade edeceğiz. Nörlund matrisleri ve transpozlarının bazı çeşitleri için, böyle bir ağırlık dizisinin normlarının bir bölümüne indirgenir. Bu kısımdaki bazı sonuçlar, Bennett in sonuçlarını genelleştirir.

$0 < p \leq \infty$ olmak üzere $\|X\|_p := \{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\}^{1/p} < \infty$ olacak şekilde her $X = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ kompleks diziler uzayını ℓ_p ile gösterelim. $p = \infty$ için, $\{\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\}^{1/p}$ yi $\sup_{n\geq 0} |x_n|$ olarak anlayacağız. eğer her n için $x_n \geq 0$ ise $X \geq 0$. yazarız. Aynı zamanda $x_0 \geq x_1 \geq \cdots$ olması durumunda $X \downarrow$ yazacağız. $0 < p, q \leq \infty$ için, $A \geq 0$ olmak üzere, yani, $A = (a_{n,k})_{n,k\geq 0}$ negatif olmayan matris olmak üzere,

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}x_k\right)^q\right\}^{1/q} \geq L\left(\sum_{k=0}^{\infty} x_k^p\right)^{1/p} \quad (X \in \ell_p,\ X \geq 0) \tag{5.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bu L lerin supremumunu $L_{p,q}(A)$ ile gösterelim. Açıkça, $L_{p,q}(A)$, $X \neq 0$ olan $\|AX\|_q / \|X\|_p$ bölümlerinin en büyük altsınırıdır. Böylece,

$$L^{\downarrow}_{p,q}(A) = \inf_{\|X\|_p=1, X\geq 0, X\downarrow} \|AX\|_q \text{ ve } \|A\|_{p,q} = \sup_{\|X\|_p=1} \|AX\|_q.$$

olmak üzere

$$L_{p,q}(A) \leq L^{\downarrow}_{p,q}(A) \leq \|A\|_{p,q}$$

dır. İlave olarak,,[2] her $m \geq 0$ ve $1 \leq p < \infty$ için

$$|A|_{p,p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_{n,k}|^p\right)^{q/p}\right)^{1/q}$$

olmak üzere $L_{pp}(A) \leq \frac{1}{(m+1)^{1/p}} |A|_{p,p}$ olmasını sağlar. $1 \leq p < \infty$ için, $L_{p,p}(A) > 0$ olduğu açıktır. $\Rightarrow |A|_{p,p} = \infty$ dur. Kısım 3 de açıklandığı gibi, aynı zamanda $0 < L_{pp}(A_W^{NM}) < \infty$ elde ederiz $\Rightarrow A_W^{NM}$ herhangi bir Nörlund matrisi olmak üzere $\left\| A_W^{NM} \right\|_{p,p} < \infty$ dır. Bu $L_{p,q}(A)$ nun çalışılmasının önemini gösterir. (ilave referenslar için bak[8] ve[50]). Özellikle, $\|A\|_{p,q}$ ve $|A|_{p,p}$ arasında eşdeğer sabitler sonlu matrisler için bulunur.[22, 23, 28, 69] Artık bu olay $|A|_{p,p}$ veya $\|A\|_{p,q}$ nin $L_{p,q}(A)$ ile yerdeğişirdiğ zaman sonlu ağırlıklı ortalama matrisleri ve sonlu Nörlund matrisleri için mevcuttur. Bu Kısıms 2 ve 3 de ele alınacaktır. Fakat o hala matrislerin bu iki çeşitinin transpozları için oluşur. $L_{pq}^{\downarrow}(A)$ seğeri için, bu yöndeki çeşitli sonuçlar görünür. Bunun için[2, 6, 27, 50, 54, 55, **?**, **?**] e bakılabilir. Bu bölümde, $L_{p,q}(A)$ ya odaklanacağız.

[18] de, Copson $0 < p \leq 1$olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{x_k}{k+1} \right)^p \geq p^p \sum_{k=0}^{\infty} x_k^p, \; (X \in \ell_p, \; X \geq 0), \tag{5.2}$$

Copson eşitsizliği denen eşitsizliğ elde etmiştir (aynı zamanda[33]). (5.2) eşitsizliği, Hardy eşitsizliğinin doğal bir benzeridir ve $(\cdot)^t$, (.) nin transpozunu göstermek üzere ve $C(1) = (a_{n,k})_{n,k \geq 0}$ Cesàro matrisi

$$a_{n,k} = \begin{cases} 1/(n+1) & \text{if } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{diğeryerde} \end{cases}$$

ile tanımlanmak üzere $L_{p,p}(C(1)^t) = p$ yazılabilir. Copsonun sonucu Bennett[8] tarafından satırları artan veya azalan olan bu toplanabilme A matrislerine genişletildi. O, böyle A matrisleri için $L_{p,p}(A^t)$ ye alt sınırlar ve üst sınırlarını vermiştir. Özellikle, $\zeta(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ Riemann zeta functionu, A, $W = \{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ ağırlıklı dizi ile ilişkili A_W^{NM} Nörlund matrisi ve

$$w_n \leq K \left(\frac{w_0 + \cdots + w_n}{n+1} \right), \; (n \geq 0) \tag{5.3}$$

(A_W^{NM} nin tanımı Kısım 3 de verilecek) olmak üzere,

$$L_{p,p}\left(A^t\right) \geq (K+1)^{-1/p} \left(\zeta \left(\frac{1}{1-p} \right) \right)^{\frac{p-1}{p}}, \; (0 < p < 1)$$

dır. Son zamanlarda, Chen ve Wang, A bir negatif olmayan alt üçgen matrisi olmak üzere, Bennett in sonucu $L_{p,p}(A^t)$ ya genişletti. $0 < p < 1$ ile $L_{p,p}(A^t)$ için bir Borwein-tipli sonuç[16] kuruldu. Çünkü $1 \leq p \leq \infty$ ve $0 < q \leq p$ için, Bennett aşağıdaki genel sonuçu $L_{p,q}(A)$ için kurmuştur[2]:

$$L_{p,q}(A) = \inf_{k\geq 0}(\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}^q)^{1/q} = \inf_{k\geq 0} \|\{a_{n,k}\}_{n=0}^{\infty}\|_q \tag{5.4}$$

Bu formül $L_{p,q}(A)$ nın değeri değerlendirmek için bize bir yol sağlar, fakat $L_{p,q}(A)$ nın dağılım değeri 'güzel' A matrisler için bile zorlu olabilir. Bu bölümde, bu zorluğu ağırlıklı ortalama A_W^{WM} matrisleri, A_W^{NM} Nörlund matrisleri ve onların transpozları için çözmeye çalışacağız. İlk olarak $W = \{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ ağırlıklı dizi ile ilişkilendirilmesi bakımından $L_{p,q}(A)$ yı ifade edeceğiz. Kısım 2 de, ilave olarak $\left\{\frac{1}{w_0+\cdots+w_n}\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell_q$ nun geçerliliğine bağlı olarak $L_{p,q}\left(A_W^{WM}\right)$ nun sonluluğunu ispatlayacağız. $1 < q \leq p \leq \infty$ için, ilave olarak $L_{p,q}\left(A_W^{WM}\right) \leq 1$ elde edebiliriz. A_W^{NM} için, $0 < L_{p,q}\left(A_W^{NM}\right) < \infty$ olduğu Kısım 3 de gösterilecek $\Rightarrow W \in \ell_1$ dir, ve $W \in \ell_1$ için $L_{p,q}(A_W^{NM}) = \|W\|_q / \|W\|_1$ olduğu gösterilecek. Çünkü transpozları için, Kısıms 2 ve 3 de$1 \leq p \leq \infty$ ve $0 < q \leq p$ olmak üzere,

$$\frac{w_0}{\|W\|_1} \leq L_{p,q}\left(\left(A_W^{WM}\right)^t\right) = L_{p,q}\left(\left(A_W^{NM}\right)^t\right) \leq 1$$

olduğu göstereilecek. Aynı zamanda $0 < q \leq 1$ için, $L_{p,q}\left(\left(A_W^{WM}\right)^t\right) = L_{p,q}\left(\left(A_W^{NM}\right)^t\right) = 1$ olduğu da ispatlanacak. Bu $A = \left(A_W^{WM}\right)^t$ veya $\left(A_W^{NM}\right)^t$ için $1 \leq p = q < \infty$ den $0 < q \leq 1 \leq p \leq \infty$ a[6] genişletildi. Çünkü $1 < q \leq \infty$ için,

$$w_n \leq \left(\frac{w_0^q + \cdots + w_{n-1}^q}{w_0 + \cdots + w_{n-1}}\right)^{(1/(q-1))}, \ (n \geq 2) \tag{5.5}$$

aşağıdaki tekrarlamalı formülü sağlayan bu $W \in \ell_q$ için

$$L_{p,q}\left(\left(A_W^{WM}\right)^t\right) = L_{p,q}\left(\left(A_W^{NM}\right)^t\right) = \|W\|_q / \|W\|_1$$

olduğunu ispatlayacağız. (5.5) şartı $q = \infty$ durumu için $w_n \leq \max(w_0, \ldots, w_{n-1})$ olarak değerlendirilir. Bu şart $w_n \downarrow$ ile W tarafından sağlanır. Detaylar Kısım 2 ve 3 de verilmiştir.

5.2 Ağırlıklı ortalama matrisi ve onun transpozu

$k \geq 1$ için $w_0 > 0$ ve $w_k \geq 0$ olmak üzere $A_W^{WM} = (a_{n,k})_{n,k\geq 0}$

$$a_{n,k} = \frac{w_k}{w_0 + \cdots + w_n}, \ (n \geq k \geq 0),$$

ile alt üçgensel matris olsun. Bu matrise $W = \{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ ağırlıklı dizi ile ilişkili ağırlıklı ortalama matrisi denir. Bir $a_{n,k}$ değerlerini (5.4) içine koyduğumuzda aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 5.1 *$1 \leq p \leq \infty$, $0 < q \leq p$, $w_0 > 0$, ve her $n \geq 1$ için $w_n \geq 0$ olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} L_{p,q}\left(A_W^{WM}\right) &= \inf_{k\geq 0}\left\{w_k\left(\textstyle\sum_{n=k}^{\infty} \dfrac{1}{(w_0+\cdots+w_n)^q}\right)^{1/q}\right\} \\ &\geq \left\{\textstyle\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\inf_{k\geq 0} \dfrac{w_k}{w_0+\cdots+w_{k+\ell}}\right)^q\right\}^{1/q} \end{aligned} \tag{5.6}$$

dir. (5.6) dek altsınır mümkün olanların en iyisidir. İlave olarak, aşağıdakiler doğrudur.
(i) $L_{p,q}\left(A_W^{WM}\right) < \infty$ ancak ve ancak $\left\{\frac{1}{w_0+\cdots+w_n}\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell_q$ or $w_{k_0} = 0$ için bazı $k_0 \geq 1$.
(ii) Eğer $1 < q \leq p \leq \infty$ ve $\left\{\frac{1}{w_0+\cdots+w_n}\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell_q$ ise bu durumda $L_{p,q}\left(A_W^{WM}\right) \leq 1$. İlave olarak, üst sınır mümkün olanların en iyisidir.
(iii) Eğer $1 < q \leq p \leq \infty$, $\left\{\frac{1}{w_0+\cdots+w_n}\right\}_{n=0}^{\infty} \in \ell_q$, ve (5.3) bir K sabiti için sağlanır ise bu durumda $L_{p,q}(A_W^{WM}) = 0$ dır. (Chen ve Wang,[17] 2010)

İspat. (5.6) denklemi (5.4) den görülür. Sonra (5.6) deki altsınır mümkün olanların en iyisi olduğunu göstereceğiz. $\alpha > 1, w_0 = 1$ ve $n \geq 1$ için $w_n = \alpha^{n-1}(\alpha - 1)$ olsun. A_W^{WM} yı A_α ile gösterelim. Bu durumda $q > 0$ olmak üzere

$$L_{p,q}(A_\alpha) = \frac{1-\alpha^{-1}}{(1-\alpha^{-q})^{1/q}} = \left\{\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(\inf_{k\geq 0} \frac{w_k}{w_0+\cdots+w_{k+\ell}}\right)^q\right\}^{1/q} \tag{5.7}$$

dır. Burada $(1-\alpha^{-q})^{1/q}$ $q = \infty$ olması durumunda 1 olarak alalım. Böylece, (5.6) bir eşitlik olur ve (5.6) deki altsınır mümkün olanların en iyisidir. (5.6) den,

$$L_{p,q}(A_W^{WM}) = \infty \Leftrightarrow \text{ her } k \text{ için } w_k\left(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(w_0+\cdots+w_n)^q}\right)^{1/q} = \infty$$

olduğunu görürüz. Bu bize (i) nin sağlandığını gösterir. (ii) yi düşünelim. $L_{p,q}(A_W^{WM}) \leq 1$ olduğunu iddia ediyoruz. $q = \infty$ durum aşikardır, $1 < q < \infty$ olduğunu kabul edelim. İspatı iki kısma ayıralım:

$$\liminf_{n\to\infty} w_n < \infty \text{ veya } \liminf_{n\to\infty} w_n = \infty.$$

için ilk durum, $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ bir sınırlı altdiziye sahiptir, bunu $\{w_{n_k}\}_{k=0}^{\infty}$ ile gösterelim. $\sup_{\ell\geq 0} w_{n_\ell} < \infty$ dır, böylece $k \to \infty$ iken

$$w_{n_k}\left(\sum_{n=n_k}^{\infty}\frac{1}{(w_0+\cdots+w_n)^q}\right)^{1/q} \leq \left(\sup_{\ell\geq 0} w_{n_l}\right)\left(\sum_{n=n_k}^{\infty}\frac{1}{(w_0+\cdots+w_n)^q}\right)^{1/q} \to 0$$

dır. (5.6) ile $L_{p,q}(A_W^{WM}) = 0$ elde ederiz. İkinci durum için, $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ nin $\{w_{n_j}\}_{j=0}^{\infty}$ altdizi vardır, böylece $w_{n_0} = \inf_{n\geq 0} w_n$ ve her $j \geq 0$ için $w_{n_{j+1}} = \inf_{n>n_j} w_n$ olur. Kısımları toplayarak ve integral testini uygulayarak, we infer that

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n_j}\left(w_k^q\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(w_0+\cdots+w_n)^q} - \frac{w_0^q+\cdots+w_k^q}{(w_0+\cdots+w_k)^q}\right) \qquad (5.8)\\
&= \left(w_0^q+\cdots+w_{n_j}^q\right)\sum_{n>n_j}\frac{1}{(w_0+\cdots+w_n)^q}\\
&\leq \left(w_0^q+\cdots+w_{n_j}^q\right)\int_0^{\infty}\frac{dx}{\left(w_0+\cdots+w_{n_j}+xw_{n_{j+1}}\right)^q}\\
&= \frac{w_0^q+\cdots+.w_{n_j}^q}{(q-1)w_{n_{j+1}}(w_0+\cdots+w_{n_j})^{q-1}},\ (j\geq 0)
\end{aligned}$$

olduğunu elde ederiz. (5.6) ile,

$$w_k^q\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{(w_0+\cdots+w_n)^q} - \frac{w_0^q+\cdots+w_k^q}{(w_0+\cdots+w_k)^q} \geq L_{p,q}(A_W^{WM}) - 1,\ (k\geq 0)$$

dır. Böylece, eğer $L_{p,q}(A_W^{WM}) > 1$ ise, bu durumda (5.8) ün sol tarafı $j \to \infty$ iken ∞ a gider, ve bu durumda (5.8) ün sağ tarafı $\lim_{j\to\infty}\frac{w_0+\cdots+w_{n_j}}{w_{n_{j+1}}} = \infty$ olur. Bu durum için, $j \to \infty$ iken

$$w_{n_{j+1}}^q\sum_{n=n_{j+1}}^{\infty}\frac{1}{(w_0+\cdots+w_n)^q} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\frac{w_0+\cdots+w_{n_j}}{w_{n_{j+1}}}+n)^q} \to 0$$

dır.(5.6) ile $L_{p,q}(A_W^{WM}) = 0$ olur, ki bu bir çelişkidir. Yukarıdaki argümanlar $L_{pq}(A_W^{WM}) \leq 1$ olduğunu gösterir. $(1,\infty)$ üzerinde $f(\alpha) = \frac{1-\alpha^{-1}\arg}{(1-\alpha^{-q})^{1/q}}$ fonksiyonunun görüntüsü $(0,1)$ dir. (5.7) ile, (ii) deki üst sınırın mümkün olanların en iyisi olduğunu biliyoruz. Bu (ii) durumunun ispatını sonlandırır. Geriye (iii) durumunu ispatlamak kalır. (ii) durumunun ispatından, $\liminf_{n\to\infty} w_n = \infty$ durumunu göstermek yeterlidir. $\{w_{n_j}\}_{j=0}^{\infty}$ (ii) durumundaki gibi tanımlansın. Açıkça, $n \geq n_j$ için $w_n \geq w_{n_j}$ dir. (5.3) ile,

$$\begin{aligned}
w_{n_j}\left(\sum_{n=n_j}^{\infty}\frac{1}{(w_0+\cdots+w_n)^q}\right)^{1/q} &\leq \left(\sum_{n=n_j}^{\infty}\frac{w_n^q}{(w_0+\cdots+w_n)^q}\right)^{1/q}\\
&\leq K(\textstyle\sum_{n=n_j}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^q})^{1/q} \to 0,\ (j\to\infty \text{ iken})
\end{aligned}$$

elde ederiz. as . koyarak Bunu (5.6) ile düşünmek $L_{p,q}(A_W^{WM}) = 0$ olmasını sağlar. Bu ispatı tamamlar. ■

$(m+1) \times (m+1)$ matrisleri için,

$$A_W^{WM} = (a_{n,k})_{n,k\geq 0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dfrac{w_0}{w_0+w_1} & \dfrac{w_1}{w_0+w_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 \\ \dfrac{w_0}{w_0+w_1+\cdots+w_m} & \dfrac{w_1}{w_0+w_1+\cdots+w_m} & \cdots & & \dfrac{w_m}{w_0+w_1+\cdots+w_m} \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanır. Bu durumda, (5.4) ile, (5.6) denklemi

$$L_{p,q}(A_W^{WM}) = \inf_{0\leq k\leq m}\left\{ w_k \left(\sum_{\ell=k}^{m} \frac{1}{(w_0+\cdots+w_\ell)^q} \right)^{1/q} \right\} \tag{5.9}$$

olur. Girişte $m \geq 0$, $1 \leq p < \infty$ için

$$L_{p,p}(A_W^{WM}) \leq \frac{1}{m+1)^{1/p}} |A_W^{WM}|_{p,p}$$

olduğunu belirtmiştik. Maalesef ,Burada bütün $(m+1)\times(m+1)$ ağırlıklı ortalama matrisleri için

$$|A_W^{WM}|_{p,p} \leq C L_{pp}(A_W^{WM})$$

olacak şekilde m ye bağlı C sabiti yoktur. Bu $m = 1, w_0 = 1$, ve $w_1 = \frac{1}{\alpha+1}$ seçimi ile örneklendirilebilir. Tanımdan,

$$|A_W^{WM}|_{pp} = \{1 + (\frac{\alpha+1}{\alpha+2})^p + (\frac{1}{\alpha+2})^p\}^{1/p} \geq 1$$

elde ederiz.

Diğer yandan, (5.9) den

$$\alpha \to \infty \text{ iken } L_{p,p}(A_W^{WM}) = \frac{1}{\alpha+2} \to 0$$

olduğu görülür. Bu iki olguyu bir araya getirerek, $L_{pp}(A_W^{WM})$ ve $|A_W^{WM}|_{p,p}$ arasında denk bir C sabiti olmadığını görürüz. Gerçekten, aynı durum hala oluşur, eğer $|A_W^{WM}|_{p,p}$ ile $\|A_W^{WM}\|_{pp}$ yerdeğiştirirsek, ispat $e_0 = (1,0)$ olmak üzere

$$\|A_W^{WM}\|_{p,p} \geq \frac{\|A_W^{WM} e_0\|_p}{||e_0||_p} = \left\{1 + \left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)^p\right\}^{1/p} \geq 1$$

olması gerçeğine dayanır.

(5.6) in yardımı ile, eğer bir s için $\inf_{k\geq 0} \frac{w_k}{w_0+\cdots+w_{k+s}} > 0$ ise bu durumda $L_{p,q}(A_W^{WM}) > 0$ olduğunu görürüz. Özellikle, $\alpha > 1$ için A_α Teorem 5.1 in ispatında verilen ağırlıklı ortalama matrisi olmak üzere $L_{p,q}(A_\alpha) > 0$ dir. Bu matris, $w_0 = 1$ ve $n \geq 1$ için $w_n = \alpha^{n-1}(\alpha - 1)$ olması seçimine karşılık gelir. Daha fazla şey söyleyebiliriz. (5.7) ile, $\alpha \mapsto L_{p,q}(A_\alpha)$, $(1,\ \infty)$ dan $(0, 1)$ üzerine 1:1 bir dönüşüm olduğunu biliyoruz. Bunu Teorem 5.1 (i) ve (iii) ile birleştirerek, $1 < q \leq p \leq \infty$ olması durumu için, $L_{p,q}(A_W^{WM})$ nın dağılım değeri, $\{\infty\} \cup [0, 1)$ üzerinde değerler alır. Bununla beraber, $L_{p,q}(A_W^{WM}) = 1$ nın bir W için doğru olup olmadığını belirleyebiliriz.

$W_n = w_0 + \cdots + w_n$ olsun. $1 < q \leq p < \infty$, $w_n \uparrow$, ve

$$(n+1)(\frac{W_{n+1} - W_n^q}{W_n}) \downarrow \tag{5.10}$$

olması durumunu düşünelim.

Bu durum,[**?**] (see aynı zamanda[6] bakılabilir) ile $L^{\downarrow}_{p,q}(A_W^{WM})$ için dikkate alındı. $w_n \uparrow$ olduğundan, $\{\frac{1}{w_0+\cdots+w_n}\}_{n=0}^{\infty} \in \ell_q$ dur. Her $x \geq 0$ için $(1 + x)^q \geq 1 + qx$ elde ederiz, böylece

$$(n+1)\left(\frac{W_{n+1} - W_n^q}{W_n}\right) = (n+1)\left\{(1 + \frac{w_{n+1}}{W_n})^q - 1\right\} \geq q\left\{\frac{(n+1)w_{n+1}}{W_n}\right\}$$

dir. Bu (5.10)$\Rightarrow$ (5.3) olduğunu gösterir. Teorem 5.1 (iii) ile $L_{p,q}(A_W^{WM}) = 0$ elde ederiz.

Sonra, $(A_W^{WM})^t$, A_W^{WM} nin transpozu olmak üzere $L_{p,q}((A_W^{WM})^t)$ nin dağılım değerini düşüneceğiz, (5.4) ile aşağıdaki sonuçu elde ederiz.

Teorem 5.2 *$1 \leq p \leq \infty, 0 < q \leq p, w_0 > 0$, ve her $n \geq 1$ için $w_n \geq 0$ olsun. Bu durumda*

$$\frac{w_0}{\|W\|_1} \leq L_{p,q}((A_W^{WM})^t) = \inf_{k\geq 0}\left\{\frac{(w_0^q + \cdots + w_k^q)^{1/q}}{w_0 + \cdots + w_k}\right\} \leq 1 \tag{5.11}$$

dır.

(5.11) daki alt ve üst sınırlar mümkün olanların en iyileridir. İlave olarak, aşağıdaki doğrudur.

(i) Eğer $0 < q \leq 1$ ise $L_{p,q}((A_W^{WM})^t) = 1$ dir.

(ii) Eğer $1 < q \leq \infty$ ve (5.3) sağlanırsa, bu durumda

$$L_{p,q}((A_W^{WM})^t) > 0 \Leftrightarrow W \in \ell_1$$

dir.

(iii) Eğer $1 < q \leq \infty$ ve (5.5) sağlanırsa, bu durumda

$$L_{p,q}((A_W^{WM})^t) = \lim_{k\to\infty} \frac{(w_0^q + \cdots + w_k^q)^{1/q}}{w_0 + \cdots + w_k} \tag{5.12}$$

dir.

İlave olarak, eğer $W \in \ell_q$ ise, bu durumda $L_{p,q}((A_W^{WM})^t) = \|W\|_q/\|W\|_1$ dir.

(iv) Eğer $1 < q \leq \infty, W \in \ell_\infty$, ve $\liminf\limits_{n\to\infty} w_n > 0$ ise, bu durumda $L_{p,q}((A_W^{WM})^t) = 0$ dır. (Chen ve Wang,[17] 2010)

İspat. (5.11) denklemi (5.4) den görülür. $0 < q \leq 1$ için, $w_0 + \cdots + w_k \leq (w_0^q + \cdots + w_k^q)^{1/q}$ elde ederiz, böylece $L_{p,q}((A_W^{WM})^t) \geq 1$ dır. Bu (5.11) ile birleştirilerek, (i) yi elde ederiz. Örneğin, $W = (w_0, 0, \ldots)$, (5.11) daki alt ve üst sınırlar mümkün olan en iyi sabitler olduğunu gösterir. Açıkça, eğer $W \in \ell_1$ ise, bu durumda $L_{p,q}((A_W^{WM})^t) \geq w_0/\|W\|_1 > 0$ dır. Kabul edelim ki $1 < q \leq \infty$ ve (5.3) sağlasın. Bu durumda $W \notin \ell_1$ ve her sabit k_0 için,

$$\begin{aligned}
\frac{(w_0^q + \cdots + w_n^q)^{1/q}}{w_0 + \cdots + w_n} &\leq \frac{(w_0^q + \cdots + w_{k_0}^q)^{1/q}}{w_0 + \cdots + w_n} + \left(\sum_{k>k_0} \left(\frac{w_k}{w_0 + \cdots + w_k}\right)^q\right)^{1/q} \\
&\leq \frac{(w_0^q + \cdots + w_{k_0}^q)^{1/q}}{w_0 + \cdots + w_n} + K\left(\sum_{k>k_0} \frac{1}{(k+1)^q}\right)^{1/q} \\
&\to K\left(\sum_{k>k_0} \tfrac{1}{(k+1)^q}\right)^{1/q}, \ (n \to \infty \text{ iken})
\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $W \notin \ell_1$ olması gerçeğini kullandık. Bu bize $L_{p,q}((A_W^{WM})^t) = 0$ olmasını sağlar, ve (ii) gerçekleşir. Sonra, (iii) yi düşünelim. $q = \infty$ için (5.5), $w_n \leq \max(w_0, \ldots, w_{n-1})$ ye indirgenir. Bu durum için $\frac{(w_0^q + \cdots + w_{n-1}^q)^{1/q}}{w_0 + \cdots + w_{n-1}}$, n ye göre azalandır. Böylece, (5.11) ile, (5.12) denklemi elde edilir. $1 < q < \infty$ olsun. her $n \geq 2$ için, $f_n(x) := \frac{w_0^q + \cdots + w_{n-1}^q + x^q}{(w_0 + \cdots + w_{n-1} + x)^q}$ in $0 \leq x \leq (\frac{w_0^q + \cdots + w_{n-1}^q}{w_0 + \cdots + w_{n-1}})^{(1/(q-1))}$ üzerinde azalan olduğunu biliyoruz. (5.5) ile, $n \geq 2$ için

$$\frac{w_0^q + \cdots + w_{n-1}^q}{(w_0 + \cdots + w_{n-1})^q} \geq \frac{w_0^q + \cdots + w_n^q}{(w_0 + \cdots + w_n)^q}$$

elde ederiz. Açıkça, o aynı zamanda $n = 1$ için doğrudur. Bunu (5.11) koyarak (5.12) elde edilir. Geriye (iv) ispatlamak kaldı. Choose k_0 ı $\inf_{n\geq k_0} w_n > 0$ olacak kadar büyük seçelim. (5.11) ile,

$$L_{p,q}((A_W^{WM})^t) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^{1/q}\|W\|_\infty}{(k-k_0)\inf_{n\geq k_0} w_n} = 0$$

elde ederiz. Bu ispatı tamamlar. ■

(5.4) denkleminin yardımı ile, olduğunu görürüz $(m+1)\times(m+1)$ ağırlıklı ortalama matrisi için, (5.11) denklemi,

$$\frac{w_0}{w_0+\cdots+w_m} \leq L_{p,q}((A_W^{WM})^t) = \inf_{0\leq k\leq m}\left\{\frac{(w_0^q+\cdots+w_k^q)^{1/q}}{w_0+\cdots+w_k}\right\} \leq 1 \qquad (5.13)$$

indirgenir. Hölder eşitsizliği ile, $1 < p < \infty$ ve $1/p + 1/q = 1$ olmak üzere

$$\frac{(w_0^p+\cdots+w_k^p)^{1/p}}{w_0+\cdots+w_k} \geq (k+1)^{-1/q} \geq (m+1)^{-1/q},\ (0 \leq k \leq m \text{ için})\ ,$$

olduğunu biliyoruz. (5.13) den,

$$L_{p,p}((A_W^{WM})^t) \geq (m+1)^{-1/q}$$

olduğunu görürüz, ki bu

$$(A_W^{WM})^t|_{pp} = \left(\sum_{k=0}^{m}\frac{w_0^p+\cdots+w_k^p}{(w_0+\cdots+w_k)^p}\right)^{1/p} \leq (m+1)^{1/p} \leq (m+1)L_{p,p}((A_W^{WM})^t)$$

olmasını sağlar. Bu da $C = m+1$ in $L_{p,p}((A_W^{WM})^t)$ ve $|(A_W^{WM})^t|_{p,p}$ arasındaki bir denklik sabiti olduğunu gösterir.

Bununla beraber, genelde böyle bir C mümkün olanların en iyisi değildir. En iyi sabit bulma sorunu hala çözülemedi. $\|(A_W^{WM})^t\|_{pp}$ durumuna geldiğimizde, $p \geq q$ için $\lambda_{p,q}(n) = 1$ ve $p < q$ için $n^{1/p-1/q}$ olmak üzere

$$\|(A_W^{WM})^t\|_{pp} \leq \lambda_{p^f,p}(m+1)\|(A_W^{WM})^t|_{p,p}$$

olması[33] den görülür. Bu $(m+1)\lambda_{p^f,p}(m+1)$ nin$L_{pp}((A_W^{WM})^t)$ ve $\|(A_W^{WM})^t\|_{pp}$ arasında bir denk sabit olmasını sağlar.

Teorem 5.2(i), $0 < q \leq 1 \leq p \leq \infty$ için $L_{p,q}^{\downarrow}((A_W^{WM})^t) \geq 1$ olmasını sağlar. Bu $A = (A_W^{WM})^t$ için$1 \leq p = q < \infty$ dan $0 < q \leq 1 \leq p \leq \infty$ a genişler.[6] (5.11) ile, $L_{p,q}((A_W^{WM})^t)$ nin dağılım değeri $[w_0/\|W\|_1, 1]$ aralığında bulunur. Bu $W \in \ell_1$ için $L_{p,q}((A_W^{WM})^t) > 0$ olmasını verir. Teorem 5.2 nin (ii) sonucu, her ne zaman (5.3) sağlanır ise tek durumun bu olduğunu ifade eder. $1 < q \leq \infty$ için, bu $n \geq 1$ iken $w_n \neq 0$ olmak üzere

$$(w_0^q + \cdots + w_n^q)^{1/q} < w_0 + \cdots + w_n$$

dir. (5.11) ile,

$$L_{p,q}((A_W^{WM})^t) < 1 \Leftrightarrow W \neq (w_0, 0, \ldots)$$

olduğu sonucuna varırız.

Eğer (5.5)kabul edilmez ise bu durumda (5.12) denklemi elde edilemeyebilir. Örneğin, $w_0 = w_1 = 1, w_2 = \alpha$, ve her $n > 2$ için $w_n = 0$ yi düşünelim. Bu durumda (5.12) denklemi doğru değildir; başka bir deyişle, eğer $\alpha > 0$ ve $(2+\alpha^q)^{1/q} \times (2+\alpha)^{-1} > 2^{1\bar{/}q-1}$ ise bu durumda (5.11) daki $\inf_{k>0}(.)$ infimumu $\lim_{k\to\infty}(.)$ ile yerdeğiştirimeyebilir. $w_n \downarrow$ için, (5.5) şartı sağlanır ve böylece $1 < q \leq \infty$ için (5.12) doğrudur. Bir sonuç olarak, $-1 < \alpha \leq 0$ olmak üzere $w_n = \begin{pmatrix} n+1+\alpha \\ n+1 \end{pmatrix}$ için

$$L_{p,q}((A_W^{WM})^t) = \lim_{k\to\infty} \frac{(w_0^q + \cdots + w_k^q)^{1/q}}{w_0 + \cdots + w_k} = 0 \tag{5.14}$$

elde ederiz. (5.14) daki son eşitsizlik $W \in \ell_1$ ve $w_n \simeq (n+1)^\alpha/\Gamma(\alpha+1)$ olması gerçeğine dayanır (bak[73]). $\alpha q > -1$ için $W \notin \ell_q$ elde ederiz, böylece $\|W\|_q/\|W\|_1$ bu durum için anlamlı değildir. Eğer sadece (5.5) i kabul edilseydi, bu (5.12) denklemi $L_{p,q}((A_W^{WM})^t) = \|W\|_q/\|W\|_1$ ile yerdeğiştirilemeyebilirdi. $w_n = 1/(n+1)^\alpha$ için, aynı zamanda $\alpha > 1$ için

$$L_{p,q}((A_W^{WM})^t) = \|W\|_q/\|W\|_1 = (\zeta(q\alpha))^{1/q}/\zeta(\alpha)$$

ve $\alpha \leq 1$ için 0 elde ederiz ((5.11)-(5.12) ile). Örneğin, $W = (w_0, 0, \ldots)$ Teorem 5.2 nin (iv) şıkkını $\liminf_{n\to\infty} w_n = 0$ olması durumunda sağlanmayacağını gösterir.

5.3 Nörlund matrisi ve onun transpozu

$w_0 > 0$ ve $k \geq 1$ için $w_k \geq 0$ olmak üzere $A_W^{NM} = (a_{n,k})_{n,k\geq 0}$

$$a_{n,k} = \frac{w_{n-k}}{w_0 + \cdots + w_n}, \; (n \geq k \geq 0)$$

olan alt üçgensel matris olsun. Bu matrise $W = \{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ ağırlıklı dizi ile ilişkili Nörlund matrisi denir. Bir, $a_{n,k}$ değerlerini (5.4) içinde kullandığımızda, aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Teorem 5.3 *$1 \leq p \leq \infty, 0 < q \leq p, w_0 > 0$, ve her $n \geq 1$ için $w_n \geq 0$ olsun. Bu durumda*

$$L_{p,q}(A_W^{NM}) = \inf_{k \geq 0} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} \frac{w_s^q}{(w_0 + \cdots + w_k + \cdots + w_{k+s})^q} \right\}^{1/q} \tag{5.15}$$

dır. (5.15) İlave olarak, aşağıdaki doğrudur.

(i) Eğer $W \notin \ell_1$ ise, bu durumda $L_{p,q}(A_W^{NM}) = 0$ veya ∞ dur.

(ii) Eğer $W \in \ell_1$ ise, bu durumda $L_{p,q}(A_W^{NM}) = \|W\|_q / \|W\|_1$ dir.

(iii) Eğer $1 < q \leq \infty$ ve (5.3) sağlanırsa, bu durumda

$$L_{p,q}(A_W^{NM}) > 0 \Leftrightarrow W \in \ell_1$$

dir. (Chen ve Wang,[17] *2010)*

İspat. (5.15) denklemi (5.4) den görülür. $W \notin \ell_1$ olsun. Eğer $L_{p,q}(A_W^{NM}) \neq \infty$ ise, bu durumda bir k_0 için $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{w_s^q}{(w_0 + \cdots + w_{k_0+s})^q} < \infty$. $k > k_0$ ve her sabit r için

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{w_s^q}{(w_0 + \cdots + w_{k+s})^q} &\leq \sum_{s=0}^{r} \frac{w_s^q}{(w_0 + \cdots + w_{k+s})^q} + \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{w_s^q}{(w_0 + \cdots + w_{k_0+s})^q} \\ &\to \sum_{s=r+1}^{\infty} \frac{w_s^q}{(w_0 + \cdots + w_{k_0+s})^q}, \ (k \to \infty \text{ iken}) \end{aligned}$$

dır. Burada $W \notin \ell_1$ olması gerçeğini kullanacağız. Bu $L_{p,q}(A_W^{NM}) = 0$ olmasını sağlar ve (i) elde edilir. (ii) yi düşünelim. $W \in \ell_1$ olsun. (5.15) ile,

$$L_{p,q}(A_W^{NM}) \geq \inf_{k \geq 0} \frac{1}{\|W\|_1} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} w_s^q \right\}^{1/q} = \frac{\|W\|_q}{||W||_1}$$

ve

$$L_{p,q}(A_W^{NM}) \leq \inf_{k \geq 0} \frac{1}{w_0 + \cdots + w_k} \left\{ \sum_{s=0}^{\infty} w_s^q \right\}^{1/q} = \frac{||W||_q}{||W||_1}$$

elde ederiz.

Böylece, $L_{p,q}(A_W^{NM}) = \|W\|_q / \|W\|_1$ dir. Bu (ii) yi sağlar. Geriye (iii) yi ispatlamak kalır. (ii) den, $1 < q \leq \infty$ olması durumunda '$\Rightarrow$' yönünü ispatlamak yeterlidir ve

(5.3) sağlanır. Kabul edelim ki $L_{p,q}(A_W^{NM}) > 0$ olsun. Bu durumda (5.15) ve (5.3) ile,

$$L_{p,q}(A_W^{NM}) \leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w_n}{w_0 + \cdots + w_n} \right)^q \right)^{1/q} \leq K(\zeta(q))^{1/q}$$

dır. Bu $L_{p,q}(A_W^{NM}) < \infty$ olmasını sağlar. (i) ile, $W \in \ell_1$ dir. Bu ispatı tamamlar. ■

$(m+1) \times (m+1)$ matrisleri için , A_W^{NM}

$$A_W^{NM} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots \\ \frac{w_1}{w_0+w_1} & \frac{w_0}{w_0+w_1} & \ddots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ & & & 0 \\ \frac{w_m}{w_0+w_1+\cdots+w_m} & \frac{w_{m-1}}{w_0+w_1+\cdots+w_m} & \cdots & \frac{w_0}{w_0+w_1+\cdots+w_m} \end{pmatrix}$$

formumda olur. (5.4) ile, (5.15) in

$$L_{p,q}(A_W^{NM}) = \inf_{0 \leq k \leq m} \left\{ \sum_{s=0}^{m-k} \frac{w_s^q}{(w_0 + \cdots + w_k + \cdots + w_{k+s})^q} \right\}^{1/q} \tag{5.16}$$

olduğunu biliyoruz. $m = 1, w_0 = 1$ ve $w_1 = \alpha$ olması durumunu düşünelim. Bu durumda $L_{p,p}(A_W^{NM}) = 1/(\alpha+1)$, $|A_W^{NM}|_{p,p} \geq 1$, ve $\|A_W^{NM}\|_{p,p} \geq 1$ dir. Bu $\beta = L_{p,p}(A_W^{NM})$ ve $y = |A_W^{NM}|_{pp}$ veya $\|A_W^{NM}\|_{pp}$ olmak üzere $(\beta,\ y)$ çiftleri için hiçbir denk sabitin olmamasını sağlar.

Teorem 5.3 (i) den, $0 < L_{p,p}(A_W^{NM}) < \infty \Rightarrow W \in \ell_1$ olduğunu görürüz. Bu durumda, $A_W^{NM} = (a_{n,k})_{n,k \geq 0}$ olmak üzere,

$$\text{her } n \text{ için } \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = 1 \text{ ve}$$

$$\text{her } k \text{ için } \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_n}{w_0+\cdots+w_{n+k}} \leq \|W\|_1$$

elde ederiz. Schur's Teoremi[7] ile, $1 < p < \infty$ ve $1/p + 1/q = 1$ olmak üzere

$$\|A_W^{NW}\|_{pp} \leq \left(\sup_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \right)^{1/q} \left(\sup_{k \geq 0} \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k} \right)^{1/p} \leq \|W\|_1^{1/p} < \infty$$

bulunur. Yukarıdaki argüman

$$0 < L_{p,p}(A_W^{NM}) < \infty \Rightarrow \|A_W^{NM}\|_{p,p} < \infty$$

olduğunu gösterir.

Teorem 5.3 (i)-(ii) de daha fazla şey söyleyebiliriz. (i)-(ii) den, $L_{p,q}(A_W^{NM})$ nin dağılım değeri $1 \leq p \leq \infty$ ve $0 < q \leq p$ olması durumunda tamamen çözülebilir olduğunu görürüz. İlave olarak, $1 \leq q \leq \infty$ ve $W \in \ell_1$ için $0 < L_{p,q}(A_W^{NM}) \leq 1$ dir. Üst sınırına $W = (w_0, 0, \ldots)$ da ulaşır.[2] ve Teorem 5.3-(ii) ile, $1 < q \leq \infty$ ve $W \neq (w_0, 0, \ldots)$ için

$$L_{p,q}(A_W^{NM}) < 1 \leq L_{p,q}^{\downarrow}(A_W^{NM})$$

olduğunu görürüz.

Sonuç olarak, $(A_W^{NM})^t$, A_W^{NM} nin transpozu olmak üzere $L_{p,q}((A_W^{NM})^t)$ nin dağılım değeri düşünelim. (5.4) ve (5.11) ile,

$$L_{p,q}((A_W^{NM})^t) = \inf_{k \geq 0} \left[\frac{(w_0^q + \cdots + w_k^q)^{1/q}}{w_0 + \cdots + w_k} \right] = L_{p,q}((A_W^{WM})^t)$$

elde ederiz. Böylece, $L_{p,q}((A_W^{WM})^t)$ için Teorem 5.2 nin sonuçları $L_{p,q}((A_W^{NM})^t)$ ya dönüştürülebilir, ki bunlar aşağıda belirtilmiştir.

Teorem 5.4 *$1 \leq p \leq \infty, 0 < q \leq p, w_0 > 0$, ve her $n \geq 1$ için $w_n \geq 0$ olsun. Bu durumda*

$$\frac{w_0}{\|W\|_1} \leq L_{p,q}((A_W^{NM})^t) = \inf_{k \geq 0} \left\{ \frac{(w_0^q + \cdots + w_k^q)^{1/q}}{w_0 + \cdots + w_k} \right\} \leq 1 \qquad (5.17)$$

dır. (5.17) deki alt ve üst sınırlar, mümkün olanların en iyileridir. İlave olarak, aşağıdaki doğrudur.

(i) Eğer $0 < q \leq 1$ ise bu durumda $L_{p,q}((A_W^{NM})^t) = 1$ dir.

(ii) Eğer $1 < q \leq \infty$ ve (5.3) sağlanırsa, bu durumda

$$L_{p,q}((A_W^{NM})^t) > 0 \Leftrightarrow W \in \ell_1$$

dir.

(iii) Eğer $1 < q \leq \infty$ ve (5.5) sağlanırsa, bu durumda

$$L_{p,q}((A_W^{NM})^t) = \lim_{k \to \infty} \frac{(w_0^q + \cdots + w_k^q)^{1/q}}{w_0 + \cdots + w_k} \qquad (5.18)$$

dir. İlave olarak eğer $W \in \ell_q$ ise, bu durumda $L_{p,q}((A_W^{NM})^t) = \|W\|_q / \|W\|_1$ dir.

(iv) Eğer $1 < q \leq \infty, W \in \ell_\infty$, ve $\liminf_{n \to \infty} w_n > 0$ ise, bu durumda $L_{p,q}((A_W^{NM})^t) = 0$ dır. (Chen ve Wang,[17] *2010)*

$L_{p,q}((A_W^{WM})^t)$ deki gibi, A_W^{NM}, $W=(w_0,\ldots,w_m)$ ağırlıklı dizisi ile ilişkili $(m+1)\times(m+1)$ tipinde Nörlund matrisi olmak üzere, (5.17) eşitliğini

$$L_{p,q}((A_W^{NM})^t)=\inf_{0\le k\le m}\left\{\frac{(w_0^q+\cdots+w_k^q)^{1/q}}{w_0+\cdots+w_k}\right\} \tag{5.19}$$

şeklinde tekrar yazabiliriz. Teorem 5.2 nin ispatından sonra verilen argüman ile, $C=m{+}1$ nin $L_{p,p}((A_W^{NM})^t)$ ve $|(A_W^{NM})^t|_{p,p}$ arasında denk bir sabit olduğunu görürüz. İlave olarak, $1<p<\infty$ ve $1/p+1/q=1$ olmak üzere $(m+1)\lambda_{q,p}(m+1)$ de $L_{p,p}((A_W^{NM})^t)$ ve $\|(A_W^{NM})^t\|_{p,p}$ arasında bir denk sabittir.

Teorem 5.4(i) ile,$0<q\le 1\le p\le\infty$ için $L_{p,q}^{\downarrow}((A_W^{NM})^t)\ge 1$ elde ederiz. Bu $A=(A_W^{NM})^t$ için[6] sini, $1\le p=q<\infty$ den $0<q\le 1\le p\le\infty$ ya genişletir. (5.17) denklemi $L_{p,q}((A_W^{NM})^t)$ nin dağılım değerinin $[w_0/\|W\|_1,1]$ aralığında olduğunu bize söyler. Böylece, $W\in\ell_1$ için $L_{p,q}((A_W^{NM})^t)>0$ dır. (5.3) değeri her gerçekleştiğinde tek durum budur (bkz. Teorem Bu is the only durum, her ne zaman sağlanır (see Teorem 5.4(ii). (5.17) ile, $1<q\le\infty$ için,

$$L_{p,q}((A_W^{NM})^t)<1\Leftrightarrow W\ne(w_0,0,\ldots)$$

olduğunu görürürüz.

Eğer (5.5) kabul etmezsek, (5.18) denklemi doğru olmayabilir. bir ters örnek ile verilir.

$\alpha>0$ ve $(2{+}\alpha^q)^{1/q}(2{+}\alpha)^{-1}>2^{1/q-1}$ olmak üzere $w_0=w_1=1, w_2=\alpha$, ve her $n>2$ için $w_n=0$ ile bir tes örnek vermiş oluruz. $w_n\downarrow$ için, (5.5) şartı sağlanır ve böylece, $1<q\le\infty$ için (5.18) elde edilir. Kısım 2 nin sonunda açıklandığı gibi,eğer sadece (5.5) i kabul edersek, bu durumda (5.18) denklemi $L_{p,q}((A_W^{NM})^t)=\|W\|_q/\|W\|_1$ ile yerdeğiştiremeyebilir. $-1<\alpha\le 0$ olmak üzere $w_n=\begin{pmatrix} n+1+\alpha \\ n+1\end{pmatrix}$ için, $L_{p,q}((A_W^{NM})^t)=0$, ve $\alpha>1$ olmak üzere $w_n=1/(n+1)^\alpha$ için $L_{p,q}((A_W^{NM})^t)=(\zeta(q\alpha))^{1/q}/\zeta(\alpha)$ elde ederiz. (5.17)-(5.18) ile, aynı zamanda $\alpha\le 1$ olmak üzere $w_n=1/(n+1)^\alpha$ için $L_{p,q}((A_W^{NM})^t)=0$ elde ederiz. Teorem 5.4 nin (iv) şartı $\liminf\limits_{n\to\infty} w_n=0$ olması durumunda sağlanmayabileceğine ilşkin örnek $W=(w_0,0,\ldots)$ ile verilir.

6. AĞIRLIKLI UZAYLAR ÜZERİNDE İNTEGRAL OPERATÖRLERİ İÇİN ÜST SINIR VE ALT SINIR

Bu bölümün amacı ağırlıklı uzaylar üzerinde

$$(Bf)(x) = \int_0^\infty b(x,y) f(y)\, dy,$$

ile tanımlanan operatörlerin bir üst ve alt sınırının bulunması problemi ile ilgilenilecektir. Gerçekte, ağırlıklı $\Lambda(w,p)$ Lorentz uzayı üzerindeki Ortalama, Copson ve Hilbert Operatörleri gibi belirli integral Operatörlerini ele alacağız. Aynı zamanda, azalan negatif olmayan ağırlık fonksiyonlar ile $\Lambda(w,1)$ nın $M(w)$ eşlenik uzayı üzerindeki böyle sabitleri düşüneceğiz.

6.1 Giriş

Kabul edelim ki $1 \leq p < \infty$ ve $w = w(x)$, $(0,\infty)$ üzerinde bir azalan negatif olmayan fonksiyon olsun. Kabul edelim ki, her x için $W(x) = \int_0^x w(t)\, dt$ sonlu ve $\lim_{x\to\infty} w(x) = 0$ ve aynı zamanda, $\int_0^\infty w(x)\, dx = \infty$ olsun. Ek olarak, f, $(0,\infty)$ üzerinde reel değerli bir fonksiyon ve $f^*(x)$, $|f(x)|$ in azalan tekrar düzenlemesi olmak üzere, $\Lambda(w,p)$ Lorentz uzayı,

$$\Lambda(w,p) = \left\{ f : \int_0^\infty w(x) f^*(x)^p\, dx < \infty \right\}$$

şeklinde tanımlanır. İlave olarak, $\Lambda(w,p)$ nın normunu

$$\|f\|_{\Lambda(w,p)} = \left(\int_0^\infty w(x) f^*(x)^p\, dx \right)^{1/p}$$

tanımlanır. $\Lambda(w,1)$ nin yerine $\Lambda(w)$ ve $\|.\|_{\Lambda(w,1)}$ nin yerine $\|.\|_{\Lambda(w)}$ yazalım. $\Lambda(w)$ nın eşlenik uzayı $M(w)$ dır, bak.[49] Gerçekte, $\int_0^{measE} w(x)\, dx > 0$ olmak üzere,

$$M(w) = \left\{ f : \sup_E \frac{\int_E |f(x)|\, dx}{\int_0^{measE} w(x)\, dx} < \infty \right\},$$

dır ve onun normu

$$||f||_{M(w)} = \sup_E \frac{\int_E |f(x)|\, dx}{\int_0^{measE} w(x)\, dx}$$

ile tanımlanır, burada E, $(0,\infty)$ ın bir keyfi ölçülebilir alt kümsini gösterir. Eğer $f \in M(w)$ negatif olmayan azalan fonksiyon ise bu durumda

$$\|f\|_{M(w)} = \sup \frac{\int_0^{\imath} f(x)\,dx}{\int_0^{\imath} w(x)\,dx}$$

dır.

B nin $\Lambda(v)$ dan $\Lambda(w)$ içine bir operatör normunu $\|B\|_{\Lambda(v,w)}$ yazarız ve B nin $\Lambda(w)$ dan kendi içine bir operatör normunu $\|B\|_{\Lambda(w)}$ yazarız. Aynı zamanda, B nin $M(v)$ den $M(w)$ içine bir operatör normu olarak $\|B\|_{M(v,w)}$ yazılır ve B nin $M(w)$ dan kendi içine bir operatör normu olarak $\|B\|_{M(w)}$ yazarız. Bizim ikinci ilgimiz, her negatif olmayan azalan f fonksiyonu için

$$\|B\|_{\Lambda(w)} \geq L\,\|f\|_{\Lambda(v)}\,, \quad \left(\|B\|_{M(w)} \geq L\,\|f\|_{M(v)}\right)$$

formunda alt sınırları geçerlidir (gerçekte, kendimizi monotone azalan fonksiyonlara kısıtlayacağız) ve L, f ye bağlı olmayan sabittir. L sabiti mümkün olan en büyük değerdir ve $L_{\Lambda(v,w)}$ ile $\Lambda(v)$ dan $\Lambda(w)$ içine en iyi alt sınırı göstereceğiz. Aynı zamanda, onu $\Lambda(w)$ üzerinde onu $L_{\Lambda(w)}$ ile göstereceğiz. İlave olarak, $M(v)$ dan $M(w)$ içine operatörüm alt sınırları $L_{M(v,w)}$ ile ve $M(w)$ üzerindeki operatörler için $L_{M(w)}$ ile göstereceğiz.

6.2 $\mathbf{\Lambda}(w)$ üzerinde integral Operatörleri

Cesaro, Copson, Hausdorff ve Hilbert Operatörleri gibi belirli matris operatörleri için ağırlıklı dizi uzayları üzerinde[**?**][1-5] de son zamanlarda düşünüldüğü gibi $\Lambda(v)$ dan $\Lambda(w)$ içine belirli operatörlerin üst ve alt sınırları çalışacağız .

Aşağıdaki, faydalı bazı tanımlar ve lemmalar ile başlayacağız.

Lemma 6.1 *Kabul edelim ki f ve g, $(0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan fonksiyonlar ve g, $(0,\infty)$ üzerinde azalan ve aynı zamanda, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ olsun. Bu durumda*

$$\int_0^{\infty} f(x)\,g(x)\,dx = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{x} f(t)\,dt \right) d(-g(x))$$

dir. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

İspat. İspat açıktır. ■

Lemma 6.2 *f, g ve w, $(0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan fonksiyonlar olsun. w azalan ve $\lim\limits_{x\to\infty} w(x) = 0$ ve aynı zamanda her $0 < x < \infty$ için*

$$\int_0^x f(t)\,dt \leq \int_0^x g(t)\,dt$$

olsun. Bu durumda

$$\int_0^\infty w(t)\,f(t)\,dt \leq \int_0^\infty w(t)\,g(t)\,dt$$

dir.(D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] , 2010)

İspat. Lemma 6.1 i uygulayarak, ifade elde edilir. ■

B, $b(x,y)$ bir negatif olmayan ölçülebilir fonksiyon olmak üzere

$$(Bf)(x) = \int_0^\infty b(x,y)f(y)dy,$$

ile tanımlı bir integral operatörü olsun.

$$r(x,y) = \int_0^y b(x,t)\,dt,\ c(x,y) = \int_0^x b(t,y)\,dt$$

tanımlayalım. Aşağıdaki şartları düşünelim:

(1) her x ve y için (x, y negatif olmayan), $b(x,y) \geq 0$.

(2) her y için x ile $r(x,y)$ azalır.

(2^*) her y için x ile $b(x,y)$ azalır.

(3) her x için y ile $c(x,y)$ azalır.

(3^*) her x için y ile $b(x,y)$ azalır.

(4) her x için $\lim\limits_{y\to\infty} b(x,y) = 0$.

Şart (1) her $x \geq 0$ için$|Bf(x)| \leq (B|f|)(x)$ olmasını sağlar ve böylece negatif olmayan fonksiyonlar B nin normunu belirlemek için yeterlidir. (2^*) şartı (2) den daha kuvvetlidir ve aynı zamanda (3^*) şartı (3) den daha kuvvetlidir. (2^*) şartı açıkça negatif olmayan azalan her f fonksiyon için Bf nin azalan olmasını sağlar, oysa (2), negatif olmayan azalan $f \in \Lambda(w)$ fonksiyonu için Bf nin azalan olmasını sağlar, çünkü Lemma 6.1 i uygulayarak

$$Bf(x) = \int_0^\infty b(x,y) f(y)\, dy = \int_0^\infty r(x,y)\, d(-f(y)).$$

elde ederiz. Aşağıdaki ifade, deduce that negatif olmayan azalan fonksiyonlar $\Lambda(w)$ üzerinde integral operatörlerinin normunu belirlemek için yeterli olduğunu ifade eder.

Teorem 6.1 *Kabul edelim ki B, (1), (3) ve (4) şartlarını sağlayan bir integral operatör operatörü olsun. Bu durumda, $\Lambda(w)$ ye ait olan negatif olmayan her f fonksiyonu için*

$$\|Bf\|_{\Lambda(w)} \leq \|Bf^*\|_{\Lambda(w)}$$

dir. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] , 2010)

İspat. Lemma 6.1 ile , her $0 < l < \infty$ için,

$$\begin{aligned}\int_0^l Bf(x)\, dx &= \int_0^l \int_0^\infty b(x,y) f(y)\, dydx = \int_0^\infty c(l,y) f(y)\, dy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^y f(t)\, dt \right) d(-c(l,y)).\end{aligned}$$

elde ederiz. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\int_0^l Bf^*(x)\, dx &= \int_0^l \int_0^\infty b(x,y) f^*(y)\, dydx \\ &= \int_0^\infty c(l,y) f^*(y)\, dy \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^y f^*(t)\, dt \right) d(-c(l,y)).\end{aligned}$$

olduğu görülür. Her y için $\int_0^y f(t)\, dt \leq \int_0^y f^*(t)\, dt$ olduğundan, $\int_0^l Bf(x)\, dx \leq \int_0^l Bf^*(x)\, dx$ elde ederiz. Bu durumda Lemma 6.2, $\|Bf\|_{\Lambda(w)} \leq \|Bf^*\|_{\Lambda(w)}$ olmasını sağlar ve böylece ifadeyi elde ederiz. ■

Teorem 6.2 *Kabul edelim ki B (1), (2), (3) ve (4) şartlarını sağlasın.*

$$u(y) = \int_0^\infty w(x)\, b(x,y)\, dx,\ U(y) = \int_0^y u(t)\, dt \text{ ve } V(y) = \int_0^y v(t)\, dt$$

olsun. Eğer

$$M = \sup_{y>0} \frac{U(y)}{V(y)} < \infty,$$

ise bu durumda B*,* $\Lambda(v)$ *dan* $\Lambda(w)$ *içine bir sınırlı integral operatörüdür ve,*

$$\|B\|_{\Lambda(v,w)} = \sup_{y>0} \frac{U(y)}{V(y)}, L_{\Lambda(v,w)}(B) = \inf_{y>0} \frac{U(y)}{V(y)}$$

dir. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

İspat. m ile minimumu göstrelim ve $f \in \Lambda(v)$ bir azalan negatif olmayan fonksiyon olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x) = 0$ olduğundan, Lemma 6.1 uygulayarak,

$$\begin{aligned} \|B\|_{\Lambda(w)} &= \int_0^\infty w(x) \left(\int_0^\infty b(x,y) f(y)\, dy \right) dx \\ &= \int_0^\infty f(y) u(y)\, dy = \int_0^\infty U(y)\, d(-f(y)). \end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece

$$m \int_0^\infty V(y)\, d(-f(y)) \le \|B\|_{\Lambda(w)} \le M \int_0^\infty V(y)\, d(-f(y)).$$

dir.

$$\|f\|_{\Lambda(w)} = \int_0^\infty v(y) f(y)\, dy = \int_0^\infty V(y)\, d(-f(y)),$$

olduğundan,

$$m \|f\|_{\Lambda(v)} \le \|Bf\|_{\Lambda(w)} \le M \|f\|_{\Lambda(v)}$$

elde ederiz. Böylece

$$\|B\|_{\Lambda(v,w)} \le M, L_{\Lambda(v,w)}(B) \ge m$$

dir. Ayrıca, kabul edelim ki her $y > 0$ için f, $[0,y]$ nin karakteristik fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\|f\|_{\Lambda(v)} = V(y), \|Bf\|_{\Lambda(w)} = U(y)$$

dır. Böylece

$$\|B\|_{\Lambda(v,w)} \ge M, L_{\Lambda(v,w)}(B) \le m$$

dir. Bu teoremin ispatını tamamlar. ■

Aşağıda B nin $(1)-(4)$ şartlarını sağlayan bir integral operatörü olduğunu kabul edeceğiz.

Önerme 6.1 *Kabul edelim ki* $v(x)$ *bir keyfi ağırlık fonksiyonu ve* $0 < \alpha < 1$ *için* $w(x) = 1/x^{\alpha}$ *ve* $b(x,y)$ *her* $x, y, \lambda > 0$ *için*

$$b(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} b(x,y)$$

sağlansın. Bu durumda $U(y) = (1-\alpha) U(1) W(y)$ *ve*

$$\|B\|_{\Lambda(v,w)} = (1-\alpha) U(1) \sup_{y>0} \frac{w(y)}{V(y)}, \ L_{\Lambda(v,w)}(B) = (1-\alpha) U(1) \inf_{y>0} \frac{w(y)}{V(y)}$$

dir. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

İspat.

$$r(\lambda x, \lambda y) = \int_0^{\lambda y} b(\lambda x, t)\, dt = \int_0^{y} b(\lambda x, \lambda u) \lambda du = \int_0^{y} b(x,u)\, du = r(x,y).$$

elde ederiz. Böylece

$$U(y) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} r(x,y)^p\, dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha} t^{\alpha}} r(yt,y)^p\, ydt = y^{1-\alpha} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}} r(t,1)^p\, dt,$$

dır, yani $U(y) = (1-\alpha) U(1) W(y)$ dır. Theorem 6.2 uygulayarak ispat tamamlanır. ■

Sonuç 6.1 *Kabul edelim ki* $0 < \alpha < 1$ *olmak üzere* $V(x) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{x^{1-\alpha}(1+x)}{2x+1}$ *ve* $w(x) = 1/x^{\alpha}$ *olsun ve* $b(x,y)$ *her* $x, y, \lambda > 0$ *için*

$$b(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} b(x,y),$$

sağlasın. Bu durumda

$$\|B\|_{\Lambda(v,w)} = 2(1-\alpha) U(1), \ L_{\Lambda(v,w)}(B) = (1-\alpha) U(1)$$

dir. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

İspat. $\frac{W(y)}{V(y)} = \frac{2y+1}{1+y}$ ve bu fonksiyon y ye göre azalan bir fonksiyon ve $\lim\limits_{y\to\infty} \frac{2y+1}{1+y} = 2$ olduğundan,

$$\sup_{y>0} \frac{w(y)}{V(y)} = 2, \ \inf_{y>0} \frac{w(y)}{V(y)} = 1$$

elde edilir. ■

Sonuç 6.2 *Kabul edelim ki* $0<\alpha<1$ *olmak üzere* $w(x)=1/x^{\alpha}$ *ve her* $x,y,\lambda>0$ *için* $b(x,y)$

$$b(\lambda x,\lambda y)=\frac{1}{\lambda}b(x,y)$$

sağlansın. Bu durumda

$$\|B\|_{\Lambda(w)}=L_{\Lambda(w)}B=(1-\alpha)U(1)$$

dir. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

İspat. $v(x)=w(x)=1/x^{\alpha}$ için Önerme 6.1 yi uygulayarak ispat tamamlanır. ■

H Hilbert operatörü $b(x,y)=1/(x+y)$ çekirdeği ile verilsin, bu çekirdek Önerme 6.1 de ifade edilen bütün şartları sağlar ve böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Önerme 6.2 $0<\alpha<1$ *olmak üzere* $V(x)=\frac{1}{1-\alpha}\frac{x^{1-\alpha}(1+x)}{2x+1}$ *ve* $w(x)=1/x^{\alpha}$ *ve* $b(x,y)=1/(x+y)$ *olsun . Bu durumda*

$$\begin{aligned}\|H\|_{\Lambda(v,w)} &= 2(1-\alpha)=\int_0^{\infty}\tfrac{1}{x^{\alpha}}\log\left(1+\tfrac{1}{x}\right)dx,\\ L_{\Lambda(v,w)}(H) &= (1-\alpha)\int_0^{\infty}\tfrac{1}{x^{\alpha}}\log\left(1+\tfrac{1}{x}\right)dx\end{aligned}$$

dir. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

İspat.

$$U(1)=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}r(x,1)\,dx=\int_0^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

elde ederiz. Sonuç 6.1 uygulayarak ifadeyi elde ederiz. ■

Aynı zamanda, eğer yukarıdaki ifadede aynı ağırlık fonksiyonunu alırsak, sonraki Önermeyi elde ederiz.

Önerme 6.3 $0<\alpha<1$ *olmak üzere* $w(x)=1/x^{\alpha}$ *ve* $b(x,y)=1/(x+y)$ *olsun. Bu durumda*

$$\|H\|_{\Lambda(w)}=L_{\Lambda(w)}(H)=(1-\alpha)\int_0^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$$

dir. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

A ortalam operatörü, $(Af)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy$ ile verilsin, yani

$$b(x,y) = \left\{ \begin{array}{ccc} 1/x & \text{for} & y \leq x \\ 0 & \text{for} & y > x. \end{array} \right\}$$

olsun. Bu fonksiyon Önerme 6.1 de ifade edilen bütün şartları sağlasın ve böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Önerme 6.4 *Kabul edelim ki* $0 < \alpha < 1$ *olmak üzere* $V(x) = \frac{1}{1-\alpha}\frac{x^{1-\alpha}(1+x)}{2x+1}$ *ve* $w(x) = 1/x^{\alpha}$ *ve* A *ortalam operatörü olsun. Bu durumda*

$$\|A\|_{(v,w)} = \frac{2}{\alpha}, L_{(v,w)}(A) = \frac{1}{\alpha}$$

dir. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

İspat.

$$r(x,1) = \begin{cases} 1/x & , x > 1 \text{ için} \\ 1 & , x \leq 1 \text{ için,} \end{cases}$$

elde ederiz, yani,

$$U(1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} r(x,1)\,dx = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}$$

dir. Bu ifadenin ispatını tamamlar. ■

Aynı yolla, aşağıdaki sonuç gösterilebilir.

Önerme 6.5 $0 < \alpha < 1$ *olmak üzere* $w(x) = 1/x^{\alpha}$ *olsun ve* A *ortalama operatörü olsun. Bu durumda*

$$\|A\|_{\Lambda(w)} = L_{\Lambda(w)}(A) = \frac{1}{\alpha}$$

dır. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

C Copson operatörü $(Cf)(x) = \int_0^{\infty} \frac{f(y)}{y}dy$ ile verilsin, yani

$$b(x,y) = \begin{cases} 1/y & , x \leq y \\ 0 & , x > y \end{cases}$$

tanımlayalım.

$$r_1(w) = \sup_{x>0} \frac{W(x)}{xw(x)},$$

olacak şekildeki $w(x)$ e $1-$regülerli sabit denir ve bu sonlu ise $w = w(x)$ e 1-regülerdir denir.

Önerme 6.6 *Eğer w, $1-$regüler ise, bu durumda C Copson operatör dönüşümü $\Lambda(w)$ dan kendi içinedir. Aynı zamanda,*

$$\|C\|_{\Lambda(w)} \leq r_1(w)$$

dır. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] , 2010)

İspat.

$$u(y) = \frac{W(y)}{y} \leq r_1(w)\, w(y), \ (\forall y > 0)$$

olduğundan,

$$U(y) = \int_0^y u(t)\, dt \leq \int_0^y r_1(w)\, w(t)\, dt = r1(w)\, W(y)$$

dır. Böylece

$$\|C\|_{\Lambda(w)} = \sup_{y>0} \frac{U(y)}{W(y)} \leq r_1(w)$$

elde edilir. ■

Önerme 6.7 *Eğer*

$$\sup_{y>0} \frac{1}{W(y)} \int_0^y \frac{W(t)}{y} dt < \infty$$

Bu durumda C Copson operatörü $\Lambda(w)$ den kendi içine sınırlıdır operatördür. Aynı zamanda,

$$\|C\|_{\Lambda(w)} = \sup_{y>0} \frac{1}{W(y)} \int_0^y \frac{W(t)}{t} dt$$

elde ederiz. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] , 2010)

İspat.

$$u(y) = \int_0^y w(x)\, b(x,y)\, dx = \frac{W(t)}{y},$$

olduğundan,

$$\|C\|_{\Lambda(w)} = \sup_{y>0} \frac{U(y)}{W(y)} = \sup_{y>0} \frac{1}{W(y)} \int_0^y \frac{W(t)}{t} dt$$

dır. ■

Önerme 6.8 *C Copson operatörü ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $w(y) = 1/y^{\alpha}$ olsun. Bu durumda C $\Lambda(w)$ Copson operatörü den kendi içine sınırlıdır operatördür ve*

$$C_{\Lambda(w)} = \frac{1}{1-\alpha}$$

dır. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] , 2010)

İspat. Hali hazırdaki notasyonumuz ile,

$$\frac{u(y)}{w(y)} = \frac{W(y)}{yw(y)} = \frac{1}{1-\alpha}$$

dir. Böylece $\frac{U(y)}{W(y)} = \frac{1}{1-\alpha}$ ve

$$\|C\|_{\Lambda(w)} = \frac{1}{1-\alpha}$$

dır. ■

6.3 M(w) üzerinde integral Operatörleri

Bu kısımda, $M(w)$ den $M(v)$ içine belirli integral operatörlerinin üst ve alt sınırlarını çalışacağız.

Teorem 6.3 *Kabul edelim ki B, (1-4) şartlarını sağlasın. $S(x) = \int_0^{\infty} w(y)\, c(x,y)\, dy$ ve*

$$M = \sup_{x>0} \frac{S(x)}{V(x)} < \infty$$

olsun. Bu durumda B, $M(w)$ den $M(v)$ içine sınırlı operatördür ve

$$\|B\|_{M(w,v)} = \sup_{x>0} \frac{S(x)}{V(x)}$$

dır. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] , 2010)

İspat. $f \in M(w)$ negatif olmayan azalan fonksiyon ve $\|f\|_{M(w)} = 1$ olsun. Böylece

$$\int_0^l f \leq \int_0^l w, \ (\forall l)$$

Lemma 6.1 i uygulayarak,

$$\begin{aligned}\int_0^x Bf(t)\, dt &= \int_0^{\infty} c(x,y) f(y)\, dy = \int_0^{\infty} \left(\int_0^y f(t)\, dt \right) d(-c(x,y)) \\ &\leq \int_0^{\infty} \left(\int_0^y w(t)\, dt \right) d(-c(x,y)) = S(x) \leq MV(x)\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece, $\|Bf\|_{M(v)} \leq M$ ve $\|B\|_{M(w,v)} \leq M$ dir. Eğer $f = w$ ise, bu durumda

$$\|f\|_{M(w)} = 1,\ \|Bf\|_{M(v)} = M,$$

dır. Böylece

$$\|Bf\|_{M(w,v)} \geq M$$

bulunur. Bu teoremi ispatlar. ■

Önerme 6.9 *Kabul edelim ki $v(x)$ keyfi bir ağırlık fonksiyonu ve $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $w(x) = 1/x^{\alpha}$ ve $b(x,y)$, her $x, y, \lambda > 0$ için*

$$b(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} b(x,y),$$

sağlasın. Bu durumda $S(x) = (1-\alpha) S(1) W(x)$ ve

$$\|B\|_{M(w,v)} = (1-\alpha) S(1) \sup_{x>0} \frac{W(x)}{V(x)}$$

dır. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] , 2010)

İspat. Önerme 6.1 deki aynı yolla $c(\lambda x, \lambda y) = c(x,y)$ elde ederiz. Böylece

$$S(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha}} c(x,y)\, dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha} t^{\alpha}} c(x,xt)\, x dt = x^{1-\alpha} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\alpha}} c(1,t)\, dt,$$

dır, yani $S(x) = (1-\alpha) S(1) W(x)$ dır. ■

Sonuç 6.3 *Kabul edelim ki $0 < \alpha < 1$ olmak üzere$V(x) = \frac{1}{1-\alpha} \frac{x^{1-\alpha}(1+x)}{2x+1}$ ve $w(x) = 1/x^{\alpha}$ ve $b(x,y)$, her $x, y, \lambda > 0$ için*

$$b(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} b(x,y),$$

sağlasın. Bu durumda

$$\|B\|_{M(w,v)} = 2(1-\alpha) S(1)$$

dir. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] , 2010)

Sonuç 6.4 *$0 < \alpha < 1$ olmak üzere$w(x) = 1/x^{\alpha}$ olsun ve $b(x,y)$, her $x, y, \lambda > 0$ için*

$$b(\lambda x, \lambda y) = \frac{1}{\lambda} b(x,y),$$

sağlasın. Bu durumda

$$\|B\|_{M(w)} = (1-\alpha)\, S(1)$$

dır. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

Önerme 6.10 *Kabul edelim ki* $0 < \alpha < 1$ *olmak üzere* $V(x) = \frac{1}{1-\alpha}\frac{x^{1-\alpha}(1+x)}{2x+1}$ *ve* $w(x) = 1/x^{\alpha}$ *ve* $b(x,y) = 1/(x+y)$ *olsun. Bu durumda*

$$\|H\|_{M(w,v)} = 2(1-\alpha)\int_0^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha}}\left[\log\left(1+\frac{1}{y}\right)\right] dy.$$

dır. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

İspat.

$$S(1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha}} c(1,y)\, dy = \int_0^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha}}\left[\log\left(1+\frac{1}{y}\right)\right] dy.$$

elde ederiz. Corollary 6.3 i uygulayarak ifadeyi elde ederiz. ■

Özellikle, eğer $v(x) = w(x) = 1/x^{\alpha}$ ise, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

Önerme 6.11 $0 < \alpha < 1$ *olmak üzere* $w(x) = 1/x^{\alpha}$ *ve* $b(x,y) = 1/(x+y)$ *olsun. Bu durumda*

$$\|H\|_{M(w)} = (1-\alpha)\int_0^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha}}\left[\log\left(1+\frac{1}{y}\right)\right] dy$$

dır. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

Önerme 6.12 *C Copson operatörü olsun , ve* $0 < \alpha < 1$ *olmak üzere* $w(x) = 1/x^{\alpha}$ *ve* $V(x) = \frac{1}{1-\alpha}\frac{x^{1-\alpha}(1+x)}{2x+1}$ *olsun. Bu durumda*

$$\|C\|_{M(w,v)} = \frac{2}{\alpha}$$

dır. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

İspat.

$$c(1,y) = \begin{cases} 1/y & , y > 1 \\ 1 & , y \leq 1 \end{cases}$$

elde ederiz, yani

$$S(1) = \int_0^{\infty} \frac{1}{y^{\alpha}} c(1,y)\, dy = \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}$$

dır. Copson operatör için Corollary 6.3 yi uygulayarak, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

■

Önerme 6.13 *C Copson operatörü olsun, ve olmak üzere $0 < \alpha < 1$ $w(x) = 1/x^{\alpha}$ olsun. Bu durumda*

$$\|C\|_{M(w)} = \frac{1}{\alpha}$$

dır. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

Önerme 6.14 *C, $M(w)$ den kendi içine Copson operatörü olsun. Eğer $w(x) = \frac{1}{x}$ ise, bu durumda*

$$L_{M(w)}(C) = 1$$

dır. (D. Foroutannia ve R. Lashkaripour, [24] *, 2010)*

İspat. Kabul edelim ki $f \in M(w)$ bir azalan negatif olmayan fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\int_0^l Cf(x)\,dx &= \int_0^l \left(\int_0^\infty b(x,y)f(y)dy\right)dx \geq \int_0^l \left(\int_0^l b(x,y)\,f(y)\,dy\right)dx \\ &= \int_0^l f(y)\left(\int_0^l b(x,y)\,dx\right)dy = \int_0^l f(y)\,dy\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\int_0^l Cf(x)\,dx \geq \int_0^l f(y)\,dy,\ \forall l > 0,$$

dir ve buradan

$$\|Cf\|_{M(w)} \geq \|f\|_{M(w)}$$

elde ederiz. Böylece $L_{M(w)}(C) \geq 1$ dır. Eğer $f = w$ ise, bu durumda $\|f\|_{M(w)} = 1$ ve her $x > 0$ için $Cf(x) = f(x)$ dır. Buradan $\|Cf\|_{M(w)} \geq \|f\|_{M(w)}$ elde edilir. Bu ispatı tamamlar. ∎

KAYNAKLAR

[1] **Balcı, M.,** (2016) *Matematik Analiz*, Palme Yayıncılık.

[2] **Bennett, G.,** (1986) *Lower bounds for matrices*, Linear Algebra and Its Appl. 82, 81–98.

[3] **Bennett, G.,** (1987) *Some elementary inequatities.* Quart. Jour. Math. Oxford **38** 2,401-425.

[4] **Bennett, G.,** (1988) *Some elementary inequatities II.* Quart. Jour. Math. Oxford **39** (1988) 2,385-400.

[5] **Bennett, G.,** (1990) *Coin tossing and moment sequence.* Discrete Math, 84(1990), 11l-l18.

[6] **Bennett, G.,** (1992) *Lower bounds for matrices II*, Can. J. Math. 44, 1, 54–74.

[7] **Bennett, G.,** (1996) *Factorizing the classical inequalities*, Memoirs Amer. Math. Soc. 576, 1–130.

[8] **Bennett, G.,** (1998) *Inequalities complimentary to Hardy*, Quart. J. Math. Oxford 49 (2), 395–432.

[9] **Borwein, D.,** (1993) *Nörlund operators on* ℓ_p, Canad. Math. Bull. 36, 8-14.

[10] **Borwein, D., ve Cass, F. P.,** (1984) *Nörlund matrices as bounded operators on* ℓ_p, Arch. Math. 42, 464-469.10

[11] **Borwein, D., Jakimovski, A.,** (1979) *Matrix operators on* ℓ_p, Rocky Mountain J. Math. 9, 463-477.

[12] **Broadbent, T. A. A.,** (1928) *A proof of Hardy's convergence theorem*, Journ. L.M.S. 3, 242-243.

[13] **Brown, A., Halmos, P. R., and Shields, A. L.,** (1965) *Cesàro operators*, Acta Sci. Math. (Szeged) 26, 125-137.

[14] **Cartlidge, J. M.,** (1978) *Weighted mean matricess operators on* ℓ^p, Ph.D. Thesis, Indiana University.

[15] **Cass, F. P., and Kratz, W.,** (1990) *Nörlund and weighted mean matrices as bounded operators on* ℓ_p, Rocky Mountain J. Math. 20, 59-74.

[16] **Chen, C.-P., and Wang, K.-Z.,**(2008) *Lower bounds of Copson type for the transposes of lower triangular matrices*, J. Math. Anal. Appl. 341 (2) , 1284–1294.

[17] **Chen, C.-P. and Wang, K. -Z.,** (2010) *Lower bounds of Copson type for weighted mean matrices and Nörlund matrices*, Linear and Multilinear Algebra 58(3), 343–353.

[18] **Copson, E.T.,** (1928) *Note on series of positive terms*, J. London Math. Soc. 3, 49–51.

[19] **Davies, G. S. and Petersen, G. M.,** (1964) *On an inequality of Hardy's (II)*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) 15, 35-40.

[20] **Dunford, N. and Schwartz, J. T.,** (1958). Linear Operators, General Theory (Part 1), *Interscience, New York.*

[21] **Elliott, E. B.,** *A simple exposition of some recently proved facts as to convergency,* Journ. L.M.S. 1 (1926), 93-96.

[22] **Feng, B.Q.,** (2003) *Equivalence constants for certain matrix norms*, Linear Algebra Appl. 374, 247–253.

[23] **Feng, B.Q., and Tonge, A.,** (2007) *Equivalence constants for certain matrix norms II*, Linear Algebra Appl. 420 (2–3), 388–399.

[24] **Foroutannia, D. and Lashkaripour,R.,** (2010) *Upper bound and lower bound for integral operators on weighted spaces,* Lobachevskii J. Math. 313, 199–208.

[25] **Fort, T.,** (1930) *Infinite series*, Oxford University Press, London.

[26] **Garabedian, H. L., Hille, E. and Wall, H. S.,** (1941) *Furmulations of the Hausdorff inclusion problem.* Trans. Amer. Math. Soc. **8**, 193-213.

[27] **Ghatage, P.G.,** (1987) *On the spectrum of the Bergman-Hilbert matrices*, Linear Algebra Appl. 97, 57–63.

[28] **Goldberg, M.,** (1987) *Equivalence constants for ℓ_p norms of matrices*, Linear and Multilinear Algebra 21(2), 173–179.

[29] **Hardy, G. H.,** (1920) *Note on a theorem of Hilbert*, Math. Zeitschr. 6, 314-317.

[30] **Hardy, G. H.,** (1925) *Notes on some points in the integral calculus (LX)*, Messenger of Math. 54, 150-156.

[31] **Hardy, G. H.,** (1943) *An inequality for Hausdorff means*, J. London Math. Soc. 18, 46-50.

[32] **Hardy, G. H.,** (1949) *Divergent Series*, Oxford U.P.

[33] **Hardy, G. H.,** Littlewood, J.E., and. Polya, G., (1967) *Inequalities*, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge.

[34] **Hausdorff, F.,** (1921) *Summations methoden und Momentfolgen*, I. Math. Z. 9, 74-109.

[35] **Elliott, E. B.,** (1926) *A simple exposition of some recently proved facts as to convergency*, Journ. L.M.S. 1, 93-96.

[36] **Grandjot, K.,** (1928) *On some identities relating to Hardy's convergence theorem*, Journ. L.M.S. 3, 114-117.

[37] **Jameson, G. J. O. and Lashkaripour, R.,** (2000) *Lower bounds of operators on weighted ℓ_p spaces and Lorentz sequence spaces,* Glasgow Math. J. 42, 211-223.

[38] **Jameson, G. J. O. and Lashkaripour R.,** (2002) *Norms of certain operators on weighted ℓ_p spaces and Lorentz sequence spaces,* J. Inequalities in Pure ve Applied Mathematics 3, Issue 1, Article 6.

[39] **Johnson, P. D. Jr., Mohapatra, R. N. and Ross, D.,** (1996) *Bounds for the Operator Norms of some Nörlund Matrices.* Proc.Amer. Math. Soc., 124(2), 543-547.

[40] **Nemeth, J.,** (1971) *Generalizations of Hardy-Littlewood inequality*, Acta Sci. Math. (Szeged) 32, 295-299.

[41] **Kaluza, Th., and Szego, G.,** (1932) *Tiber Reihen mit lauter positiven Gliedern*, Journ. L.M.S. 7, 208-214.

[42] **Knopp, K.,** (1928) *Tiber Reihen mit positiven Gliedern*, Journ. L.M.S. 3, 205-211.

[43] **Kreyszing, E.,** (1978) *Introductory Functional Analysis Wİth Applications*, John Wiley ve Sons Inc., New York-Chichester-Brisbane-Toronto.

[44] **Kuttner B., and Rhoades, B. E.,** (1969) *Relations between* (N, p_n) *and* (N, p) *summability*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 16, 109-1 16.

[45] **Landau, E.,** (1926) *A note on a theorem concerning series of positive terms*, Journ. L.M.S. 1, 38-39.

[46] **Lashkaripour, R. and Foroutannia, D.,** (2006) *Inequalities involving upper bounds for certain matrix operators,* Proc. Indian Acad. Sci.(Math. Sci) 116, 325 .

[47] **Lashkaripour, R. and Foroutannia, D.,** (2007) *Lower bounds for matrices on weighted sequence spaces,* Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran. 18 (1), 49.

[48] **Lashkaripour, R. and Foroutannia, D.,** (2007) *Some inequalities involving upper bounds for some matrix operators I,* Czech. Math. J. 57 (132), 553.

[49] **Lorentz, G. G.,** (1951) *On the theory of space* Λ, Pacific J.Math. 1, 411.

[50] **Lyons, R.,** (1982) *A lower boundon the Cesàro operator*, Proc. Amer. Math. Soc. 86, 694.

[51] **Marshall, A. and Olkin, W.,** (1979) *Inequalities: Theory of majorization ve its Applications,* Academic Press New York.

[52] **Polya, G.,** (1950) *Remark on Welly's note "Inequalities beetwen the two kinds of eigenvalues of a linear transformation"*, Proc. Nat. Acad. Sci. U SA. 36, 49-51.

[53] **Petersen, G.M.,** (1966) *Regular Matrix Transformations,* McGraw-Hill, London.

[54] **Rassias, J.M.,** (1985) *On the generalized Cesàro operators*, in Mathematical Analysis, Teubner-Texte Math. 79, Teubner, Leipzig, 32–34.

[55] **Renaud, P.F.,** (1986) *A reversed Hardy inequality*, Bull. Austral. Math. Soc. 34, 225–232.

[56] **Rhaly, H. C. Jr.,** (1982) *Discrete generalized Cesàro operators*, Proc. Anw. Matlz. Soc. 86, 405-409

[57] **Rhaly, H. C. Jr.,** (1986) *Discrete generalized Cesàro operators*, Proceedings of the AmericanMathematical Society 34, 225–232..

[58] **Rhaly, H. C. Jr.,** (1989) *p-Cesàro matrices*, Houston J. Math., 15, 1, 137–146.

[59] **Rhaly, H. C. Jr.,** (1989) *Terraced matrices*, Bull. London Math. Society 214, 399–406.

[60] **Rhoades, B. E.,** (1963) *A sufficienit condition for total momotonicity.* Trans. Amer. Math. Soc. 107, 309-319.

[61] **Rhoades, B Rho. E.,** (1971) *Spectra of some Hausdorff operators*, Acts Sci. Math. 32, 91-100.

[62] **Rhoades, B. E.,** (1971) *A sufficienit condition for total momotonicity II.* Jour. Indian Math. Soc. 41, 221-232.

[63] **Rhoades, B. E.,** (1987) *Lower bounds for some matrices*, Linear ve Multilinear Algebra 20, 347-352.

[64] **Rhoades, B. E.,** (1988) *Square roots for Hausdorff operators.* Integral Equations and Operator Theory 11, 292-296.

[65] **Rhoades, B. E.,** (1990) *Lower bounds for some matrices II*, Linear ve Multilinear Algebra 261-2, 49–58.

[66] **Rhoades, B. E., Sen, P.,** (2006) *Lower bounds for some Factorable matrices*, Int. J. Math. Math. Sci., 1–13.

[67] **Titcmarsh, E. C.,** (1951) *The Theoy of the Riemann Zeta-Function*, Oxford U.P.

[68] **Tomic, M.,** (1949) *Théoréme de Gauss relatif au centre de gravité et son application.* Bull. Soc. Math. Phys Serbic 1. 31-40

[69] **Tonge, A.,** (2000) *Equivalence constants for matrix norms: a problem of Goldberg*, Linear Algebra Appl. 306, (1–3), 1–13.

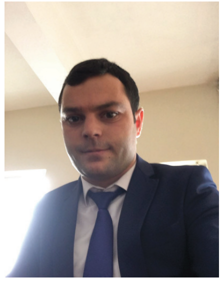
[70] **Wall, H. S.,** (1940) *Continued fractions and totally monone sequences*, Trans Amer. Math. Soc 48, 165-184.

[71] **Widder, D. V.,** (1946) *The Laplace Transform,* Princeton University Press. Princeton. N.J.

[72] **Zeller, K. and Beekman,W.,** (1970) *Theorie der Limitierungsverfahren.* Ergebnisse der Math . 15. Springer-Verlag, Berlin.

[73] **Zygmund, A.,** (2002) *Trigonometric series*, 3rd ed., Vols. I & II combined, Cambridge University Press, Cambridge.

ÖZGEÇMİŞ



Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Özkan KARADAŞ
Doğum Yeri ve Tarihi	Malatya, 02/07/1988
Medeni Hali	Evli
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Eski Sivas Cd. No: 18 Kangal/SİVAS
E-posta Adresi	karadas.ozkan.88@gmail.com

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Darende Lisesi, 2005
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 2011
Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı 2018