T.C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SABİT KATSAYILI GENELLEŞTİRİLMİŞ ALT ÜÇGENSEL BANT MATRİSİNİN cs DİZİ UZAYI ÜZERİNDE SPEKTRAL AYRIŞIMLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Rabia KILIÇ
(201592171420)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Nuh DURNA

SİVAS
Temmuz 2018

Rabia KILIÇ'ın hazırladığı ve **"SABİT KATSAYILI GENELLEŞTİRİLMİŞ ALT ÜÇGENSEL BANT MATRİSİNİN** cs **DİZİ UZAYI ÜZERİNDE SPEKTRAL AYRIŞIMLARI"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **Dr. Öğr. Üyesi Nuh DURNA** ……………...
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyelesi : **Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM** ……………...
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyelesi : **Prof. Dr. Mikail ET** ……………...
Fırat Üniversitesi

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. İsmail ÇELİK
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (CÜBAP) Komisyonu tarafından F-511 Nolu proje kapsamında desteklenmiştir.

ETİK

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı beyan ederim.

20.07.2018

Rabia KILIÇ

ÖZET

SABİT KATSAYILI GENELLEŞTİRİLMİŞ ALT ÜÇGENSEL BANT MATRİSİNİN cs DİZİ UZAYI ÜZERİNDE SPEKTRAL AYRIŞIMLARI

Rabia KILIÇ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Dr. Nuh DURNA

2018, 34+ix sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez konusu ile alakalı literatür taraması verilmiş ve sınırlı lineer operatörlerin temel özelliklerinden bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, sınırlı lineer operatörlerin spektrumundan ve spektrumunun ayrışımlarından bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde ilk olarak bant matrislerinden ve kısaca uygulama alanlarından bahsedilmiştir. Üçüncü bölümün birinci kısmında $B(r,s)$ genelleştirilmiş fark operatörün spektrumu ve alt spektrumları verilmiştir. Bu kısım orijinal olup "Partition of the spectra for the generalized difference operator $B(r,s)$ on the sequence space cs" isimli bir makale olarak Durna ve arkadaşları tarafından Cumhuriyet Scientefic Journal (39 (1) (2018), 7-15) da yayınlanmıştır. Üçüncü bölümün ikinci kısmında ise $B(r,0,s)$ alt üçgensel matrisin spektrumu ve alt spektrumları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: spektrum, alt spektrum, cs dizi uzayı, bant matrisler.

ABSTRACT

PARTITION OF THE SPECTRA FOR THE FIXED COEFFICIENTS GENERALIZED LOWER TRIANGULAR BAND MATRİX OVER THE SQUENCE SPACE cs

Rabia KILIÇ

Master of Science Thesis

Department of Mathematics

Supervisor: Assistant Prof. Dr. Nuh DURNA

2018, 34+ix pages

This thesis consists of three sections.

In the first section, literature related to thesis topic has been presented and basic properties of bounded linear operator are told.

In the second section, spectrum and division of spectrum of bounded linear operators are mentioned.

In the third section, firstly band matrices andd then its fields of apply have been presented. In the first part of third section, spectrum and subspectrum of generalized difference operator $B(r, s)$ are told. This part is original it was published in Cumhuriyet Scientefic Journal (39(1)(2018), 7-15) by Durna et al and as an article by "Partition of the spectra for the generalized difference operator $B(r, s)$ on the sequence space cs". In the second part of the third, spectrum and subspectrum of lower triangular matrix $B(r, 0, s)$ are given.

Keywords: spectrum, subspectrum, sequence space cs, band matrices.

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam; Dr. Öğr. Üyesi Nuh DURNA’ ya, her zaman bana destek olan kıymetli hocam Doç. Dr. Hasret DURNA’ ya, yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma çok teşekkür ederim. Ayrıca bu süreçte maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan aileme minnet ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbf{B}\left(\mathbf{X}\right)$	X uzayı üzerinde verilen bütün sınırlı lineer operatörlerin kümesi
$\mathbf{N}\left(\mathbf{T}\right)$	T operatörünün sıfır uzayı
$\mathbf{R}\left(\mathbf{T}\right)$	T operatörünün değer kümesi
$\boldsymbol{\rho}\left(\mathbf{T}\right)$	T operatörünün rezolvent kümesi
$\boldsymbol{\sigma}\left(\mathbf{T}\right)$	T operatörünün spekturumu
$\mathbf{R}_{\lambda}\left(\mathbf{T}\right)$	$\left(\lambda I - T\right)^{-1}$ operatörü
$\mathbf{r}\left(\mathbf{T}\right)$	T operatörünün spektral yarıçapı
$\boldsymbol{\sigma}_{p}\left(\mathbf{T}\right)$	T operatörünün özdeğerlerinin kümesi
$\boldsymbol{\sigma}_{c}\left(\mathbf{T}\right)$	T operatörünün sürekli spektrumunun kümesi
$\boldsymbol{\sigma}_{r}\left(\mathbf{T}\right)$	T operatörünün rezidü spektrumunun kümesi
$\boldsymbol{\sigma}_{ap}\left(\mathbf{T}\right)$	T operatörünün yaklaşık nokta spektrumunun kümesi
$\boldsymbol{\sigma}_{\delta}\left(\mathbf{T}\right)$	T operatörünün eksik spektrumunun kümesi
$\boldsymbol{\sigma}_{co}\left(\mathbf{T}\right)$	T operatörünün sıkıştırma spektrumunun kümesi
$\mathbb{D}$	Açık birim disk
$\mathbb{T}$	Birim çember

1. GİRİŞ

Fonksiyonel analizin önemli parçalarından biri olan spektral teorinin; fonksiyon teorisi, karmaşık analiz, diferansiyel ve integral denklemler, kontrol teorisi ve kuantum fiziği gibi matematiğin ve fiziğin bir çok alanında uygulamaları bulunmaktadır.

Son yıllarda, spektral teoride önemli gelişmeler olmuştur. Yaklaşık noktasal spektrum, Taylor spektrum, yerel spektrum, essential spektrum gibi bir çok tipe sahip olan spektrum için bir çok önemli uygulamalar mevcuttur.

Operatör teoride matrislerin büyük bir rolü vardır. Bir operatörün spektrumu matrislerin özdeğerleri kavramının genelleştirilmesidir. Farklı alanlarda uygulaması ve kullanışlı olmasından dolayı spektral teori, matematiksel bilimlerin standart bir aracı olmuştur. Spektral teorinin günlük hayattaki uygulamalarından kısaca bahsedecek olursak;

Havacılıkta, spektral değerler bir kanat üzerindeki akışın laminer veya türibülanslı olup olmadığını belirleyebilir.

Elektrik mühendisliğinde amplifikatör frekans yanıtını veya güç sisteminin güvenilirliğini belirleyebilir.

Kuantum mekaniğinde atomik enerji seviyelerini ve böylecede lazerin frekansını veya bir yıldızın spektral sinyalini belirleyebilir.

Yapı mekaniğinde bir otomobilin ne kadar gürültülü olup olmayacağını veya bir depremde bir binanın yıkılıp yıkılmayacağını belirleyebilir.

Ekolojide spektral değerler besin ağının sürekli bir dengeye sahip olup olmayacağını belirleyebilir.

Banach uzayı üzerinde bir operatörün spektrumunun hesaplanmasında genellikle spektrumun üç ayrık parçası olan point spektrum, sürekli spektrum ve rezidü spektrum kullanılır. Ayrıca spektrumun aralarında ayrık olması gerekmeyen bir ayrışımı daha vardır ki bu; yaklaşık nokta spektrum, eksik spektrum ve sıkıştırılmış spektrumdur. Son yıllarda bir çok yazar, genelleştirilmiş fark matrislerinin spektral ayışımını araştırmıştır. İlk kez [11] de Amirov, Durna ve Yıldırım operatörlerin spektral ayrışımları arasındaki bağıntıyı kullanarak operatörün yaklaşık nokta spektrumunu, eksik spektrumunu ve sıkıştırılmış spektrumunu kolayca hesaplamışlardır. Bu çalışmadan sonra, bu spektral parametreler, spektrumun fine ayrışımı bulunurken yazarlar tarafından dikkate alınmıştır.

Daha sonra bir operatörün yaklaşık nokta spektrumu, eksik spektrumu ve sıkıştırılmış spektrumu; spektrumun fine ayrışımı kullanılarak hesaplanmıştır. Genel olarak operatörlerin fine ayrışımları araştırılırken operatörün adjointinin birebirliği veya örtenliği kullanılarak operatörün yoğun görüntüye sahip olduğu veya sınırlı terse sahip olduğu elde edilir. Fakat bir operatörün adjoint operatörünü bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Hatta adjoint operatörü bulunsa bile operatörün birebirliği veya örtenliği araştırılırken elde edilen serinin karakterini incelemek mümkün olmayabilir. Örneğin ℓ_∞ un bilinen anlamda Schauder bazı olmadığından operatörün bilinen anlamda adjointinden bahsetmek mümkün değildir. Dolayısıyla bir operatörün spektral ayrışımı ve adjointinin spektral ayrışımı arasındaki ilişki yardımıyla, operatörün yaklaşık nokta spektrumu, eksik spektrumu ve sıkıştırılmış spektrumu hesaplanarak bunlar yardımıyla Goldberg tarafından verilen spektrumun fine ayrışımı bulanabilir.

1.1 Literatür özeti

Bu tez boyunca; tüm diziler uzayını w ile belirteceğiz. Sırasıyla tüm sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve sınırlı salınımlı dizilerin uzayını ℓ_∞, c, c_0 ve bv ile göstereceğiz. Ayrıca ℓ_p ile mutlak değerinin $p-$inci kuvvetleri toplanabilir tüm dizilerin uzayını ve bv_p ile $p-$ sınırlı salınımlı dizilerin uzayını belirteceğiz.

Bir çok yazar bazı dizi uzayları üzerinde özel limitleme matrisleri ile verilen lineer operatörlerin spektrumunu ve fine spektrumunu çalışmıştır. Biz spektrum ve fine spektrum ile ilgili literatürde var olan bilgileri özetleyelim. $1 < p < \infty$ için ℓ_p dizi uzayı üzerinde Cesàro operatörünün fine spektrumu [26] da Gonzalez tarafından çalışılmıştır. Ayrıca Wenger [40] da c üzerinde Cesàro operatörünün tamsayı kuvvetinin fine spektrumunu incelemiştir ve Rhoades [33] de bu sonucu ağırlıklı ortalama metodlarına genelleştirmiştir. Reade [32] de, c_0 dizi uzayı üzerinde Cesàro operatörünün spektrumunu çalışmıştır. Okutoyi [29] da Cesàro operatörünün bv dizi uzayı üzerinde spektrumunu incelemiştir. c_0 ve c dizi uzayları üzerinde Rhaly operatörlerinin spektrumu Yıldırım tarafından [38] ve [39] da çalışılmıştır. c_0 ve bv_p dizi uzayları üzerinde Cesàro operatörünün fine spektrumu Akhmedov ve Başar tarafından [1, 4] de incelenmiştir.

Şimdiye kadar belirttiğimiz çalışmalar klasik toplanabilme metodlarıyla ilgili çalışmalar olup, son yıllarda bir çok yazar genelleştirilmiş fark matrislerinin de spektral ayrışımlarını incelemiştir. Örneğin, Akhmedov ve Başar [2, 3] de ℓ_p, ve bv_p, $(1 \leq p < \infty)$ dizi uzayları üzerinde Δ fark operatörünün fine spektrumunu incelemiştir. [9] da Altay ve Karakuş tarafından Zweier matrislerinin ℓ_1 ve bv_1 dizi uzayları üzerinde fine spektrumu incelenmiştir. Altay ve Başar [8, 15] de c_0, c ve ℓ_p $(0 < p < 1)$ dizi uzayları üzerinde Δ fark operatörünün fine spektrumunu incelemişlerdir. ℓ_1 ve bv dizi uzayları üzerinde Δ fark operatörlerinin fine spektrumu [27] de Kayaduman ve Furkan tarafından ve c_0 ve c üzerinde [7] de Altay ve Başar tarafından araştırılmıştır. [10] da Altun ve Karakaya, üst üçgensel çift-bant Lacunary matrisinin spektrumlarını ve fine spektrumlarını incelemişlerdir. [34] de Srivastava ve Kumar tarafından Δ_v genelleştirilmiş fark operatörünün c_0 dizi uzayı üzerinde fine spektrumu incelenmiştir. Akhmedov ve El-Shabrawy [5, 6] da, c_0, c ve ℓ_p $(1 < p < \infty)$ dizi uzayları üzerinde Δ_v genelleştirilmiş alt üçgensel çift bant matrisinin spektrumunu ve fine spektrumunu çalışmıştır.

Yukarıda bahsedilen çalışmalar Goldberg [25] tarafından tanımlanan spektrumun ayrışımı ile ilgilidir. Bununla birlikte [19] da Durna ve Yıldırım c_0 üzerinde factorable matrisleri için spektrumun alt ayrışımını incelemişdirler ve [14] de Başar, Durna ve Yıldırım bazı dizi uzayları üzerinde genelleştirilmiş fark operatörünün spektrumunu incelemişdir.[21] de Durna ve Kılıç, $U(a_0, a_1, a_2; b_0, b_1, b_2)$ üst üçgensel bant matrisinin c_0 dizi uzayı üzerinde spektrumunu ve fine spektrumunu hesaplamıştır.

Bu tezin 3. bölümünde bazı alt üçgensel bant matsislerinin cs dizi uzayı üzerinde spektral ayrışımlarından bahsedilmiştir. 3. bölümün 1. kısmı orjinal olup, bu kısımda [23] de Dutta ve Tripathy tarafından hesaplanan cs dizi uzayı üzerinde

$B(r,s)$ genelleştirilmiş fark operatörünün spekturumu ve aralarında ayrık olan spektral ayrışımı verilmiştir. Ancak [23] de Goldberg tarafından tanımlanan spektrumun ayrışımı yapılmamıştır ve dolayısıylada spekturumun aralarında ayrık olması gerekmeyen (yaklaşık nokta spektrum, eksik spektrum ve sıkıştırılmış spektrum) spektral ayrışımı verilmemiştir. Bu yüzden biz bu kısımda cs dizi uzayı üzerinde $B(r,s)$ genelleştirilmiş fark operatörünün spektrumunun Goldberg [25] tarafından tanımlanan fine ayrışımını verip, yaklaşık nokta spektrumunu, eksik spektrumunu ve sıkıştırılmış spektrumunu elde ettik ve bu çalışma Durna ve arkadaşları tarafından [22] de yayınlanmıştır.

1.2 Sınırlı Lineer Operatör

X ve Y, aynı $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki normlu uzay ve $T : X \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$||Tx||_Y \leq M.\,||x||_X$$

olacak biçimde pozitif bir M sayısı varsa T operatörüne X den Y ye bir *sınırlı lineer operatör* denir ve X den Y ye tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin sınıfı $B(X,Y)$ ile gösterilir. Özel olarak $X = Y$ ise $B(X,X)$ yerine kısaca $B(X)$ yazılır.

Bir lineer operatörün tanım kümesini

$$D(T) := \{x \in X : Tx = y \in Y\}$$

ile, sıfır uzayını

$$N(T) := \{x \in X : Tx = 0\} \tag{1.1}$$

ile ve değer kümesini de

$$R(T) := \{Tx : x \in X\} \tag{1.2}$$

ile göstereceğiz. Böylece T nin birebir olması için gerekli ve yeterli koşul $N(T) = 0$ olmasıdır ve T nin örten olması için gerekli ve yeterli koşul $R(T) = Y$ olmasıdır.

$T, S \in B(X,Y)$ ve $\lambda \in \mathbb{K}$ olmak üzere, $(T+S)\,x = Tx + Sx$, $(\lambda T)\,x = \lambda Tx$ şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile $B(X,Y)$, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır, ayrıca $B(X,Y)$

$$||T|| = \sup_{x\neq\theta} \frac{||Tx||_Y}{||x||_X} \tag{1.3}$$

normuyla birlikte bir normlu uzay olup, eğer Y bir Banach uzayı ise $B(X,Y)$ de bir Banach uzayıdır ([16] , s. 105).

X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. X^*, X uzayının sürekli dualini göstermek üzere yani, $X^* = B(X,\mathbb{K})$ olmak üzere, her $x \in X$ ve her $f \in X^*$ için

$$T^* : X^* \to X^*$$
$$(T^* f)\, x = f(Tx)$$

biçiminde tanımlanan T^* operatörüne T operatörünün *adjointi* denir.

T ile T^* adjoint operatörü arasındaki ilişkilerden bazılarını belirleyen önemli teoremleri ispatsız olarak aşağıda veriyoruz.

Teorem 1.1 *X bir normlu uzay ve $T \in B(X)$ olsun. Bu durumda $T^* \in B(X^*)$ olup $||T^*|| = ||T||$ dir ([16] s. 239).*

Teorem 1.2 *Eğer T ve T^* operatörlerinin tersleri mevcut ise $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$ dir ([25] s. 60).*

2. SPEKTRUM

Tanım 2.1 *$X \neq \{\theta\}$ bir kompleks normlu uzay, $D(T) \subset X$ olmak üzere ve $T : D(T) \to X$ lineer bir operatör, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve I, $D(T)$ üzerinde birim operatör olmak üzere, T operatörü ile*

$$T_\lambda := T - \lambda I \tag{2.1}$$

operatörünü eşleyelim. T_λ nın bir tersi varsa, bunu $R_\lambda(T)$ ile yani;

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1} \tag{2.2}$$

ile gösterip, buna T nin rezolvent operatörü diyeceğiz. T operatörünün belirli olması durumunda yazmada kolaylık sağlamak için $R_\lambda(T)$ yerine R_λ yazacağız ([28] s. 371).

$R_\lambda(T)$ mevcut olduğunda,

$$x = T_\lambda^{-1} y = R_\lambda(T)\, y$$

yazılabilir. Yani; $R_\lambda(T)$, $T_\lambda x = y$ denklemini çözmemize yardımcı olur.

Daha da önemlisi, R_λ nın özelliklerinin incelenmesi, T operatörünün kendisinin anlaşılması için esas olmaktadır. Doğal olarak, T_λ nın ve R_λ nın bir çok özelliği λ ya bağlıdır ve spektral teori bu özelliklerle ilgilenen bir daldır. Örneğin R_λ mevcut olacak şekilde λ ların kümesi veya R_λ sınırlı olacak şekilde ki λ kopleks sayılarının kümesi temel problemlerimizden bazıları olacaktır. Bazı kavramlara isim verebilmek için R_λ nın tanım bölgesi X de yoğun olacak şekildeki λ kopmleks sayılarının kümesi de araştırılacaktır.

Tanım 2.2 (regüler değer, rezolvent küme, spektrum) *$X \neq \{\theta\}$ bir kompleks normlu uzay ve $D(T) \subset X$ olmak üzere ve $T : D(T) \to X$ lineer bir operatör olsun.*
(R1) $R_\lambda(T)$ mevcut
(R2) $R_\lambda(T)$ sınırlı (yani sürekli)
(R3) $R_\lambda(T)$, X içinde yoğun bir kümle üzerinde tanımlı
olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{C}$ sayılarına T nin regüler değeri denir.

T nin tüm regüler değerlerinin kümesi $\rho(T)$ ie gösterilir. $\rho(T)$ ye T nin rezolvent kümesi denir. $\sigma(T) = \mathbb{C} \diagdown \rho(T)$ kümesine ise T nin spektrumu denir. Eğer $\lambda \in \sigma(T)$ ise λ ya spektral değer denir ([28] s. 371).

2.1 Spektrumun Ayrışımı

Sınırlı lineer bir operatörün spektrumunun birçok farklı ayrışımı vardır, bunlardan bazılarının fiziğe uygulamaları mevcuttur.

X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer $R_\lambda(T)$ operatörü, X in bir yoğun alt uzayında tanımlı ve sınırsızsa $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T nin $\sigma_c(T)$ *sürekli spektrumuna* aittir denir. Ayrıca eğer $R_\lambda(T)$ operatörü mevcut, ancak onun tanım bölgesi (yani; $T-\lambda I$ nin $R(T-\lambda I)$ değer kümesi), X de yoğun değilse $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T nin $\sigma_r(T)$ *rezidü spektrumuna* aittir denir, bu durumda $R_\lambda(T)$ sınırlı veya sınırsız olabilir.

Eğer $Tx = \lambda x$ eşitliğinin sıfırdan farklı bir $x \in X$ çözümü varsa $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T nin özdeğeri, bu şekildeki herbir x vektörüne özvektör ve X in bir alt uzayı olan bütün özvektörlerinin kümesine de özuzay denir.

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Tx = \lambda x,\ x \neq 0\}$$

özdeğerlerinin kümesine T nin point spektrumu denir. $\sigma_p(T)$ point spektumu ile birlikte bu iki spektrum T nin

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \tag{2.3}$$

spektrumun bir ayrık ayrışımıdır. Kabaca konuşacak olursak alt spektrumdaki λ elemanlarının karakterize edilmesi için, $T - \lambda I$ operatörünün , $\sigma_p(T)$ de birebir ve örtenliği, $\sigma_r(T)$ de örtenliği ve $\sigma_c(T)$ de de sürekliliği mevcut değildir. (2.3) ayrışımını izah etmek için aşağıdaki tabloyu ve bazı örnekler verelim.

Tablo 1.1: Spektrumun Ayrık Ayrışımı

	$R_\lambda(T)$ mevcut ve sınırlı	$R_\lambda(T)$ mevcut fakat sınırsız	$R_\lambda(T)$ mevcut değil
$R(\lambda I - T) = X$	$\lambda \in \rho(T)$	–	$\lambda \in \sigma_p(T)$
$\overline{R(\lambda I - T)} = X$	$\lambda \in \rho(T)$	$\lambda \in \sigma_c(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$
$\overline{R(\lambda I - T)} \neq X$	$\lambda \in \sigma_r(T)$	$\lambda \in \sigma_r(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$

Tabloda; X bir Banach uzayı olduğundan; 1. satır ve 2. sütunun kapalı grafik teoreminden mümkün olmadığını belirtelim.

Teorem 2.1 (Kapalı Grafik) *X ve Y, Banach uzayı ve $T : D(T) \to Y$ kapalı bir operatör olsun (yani grafiği $X \times Y$ de kapalı). Eğer $D(T)$ tanım kümesi X de kapalı ise T operatörü sınırlıdır ([28] s. 292).*

$R(T - \lambda I) = X \Rightarrow \overline{R(T - \lambda I)} = \overline{X} = X = R(T - \lambda I)$ kapalı yani $R_\lambda(T)$ nin tanım kümesi kapalı olduğundan kapalı grafik teoreminden $R(T - \lambda I) = X$ iken $R_\lambda(T)$ sınırsız olamaz.

Eğer biz 3.sütunda değilsek, yani eğer λ, T nin bir özdeğeri değilse, daima $R_\lambda(T)$ operatörünü $T - \lambda I$ nin cebirsel tersi gibi düşünebiliriz.

Örnek 2.1 *$X = \ell_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$, (a_n), $\mathbb{C}$ de sınırlı bir dizi ve*

$$\begin{aligned} T : \ & \ell_p \to \ell_p \\ & x_n \longmapsto (a_n x_n) \end{aligned}$$

olsun. (a_n) sınırlıdır $\Leftrightarrow T \in B(\ell_p)$ dır. İlk önce $p < \infty$ olsun. (a_n) dizisinin bütün elemanlarının kümesini $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ ile gösterelim, bu durumda

$$\sigma(T) = \overline{A}, \quad \sigma_p(T) = A, \quad \sigma_c(T) = \overline{A} \backslash A, \quad \sigma_r(T) = \emptyset \tag{2.4}$$

elde ederiz. Özellikle eğer $a_n \to 0$ ise $\sigma_c(L) = \{0\}$ dır.

$p = \infty$ durumunda rezidü ve sürekli spektrumun rolleri değişir, yani

$$\sigma(T) = \overline{A}, \quad \sigma_p(T) = A, \quad \sigma_c(T) = \emptyset, \quad \sigma_r(T) = \overline{A} \backslash A \tag{2.5}$$

elde ederiz.

Örnek 2.2 *$\mathbb{C}$ üzerinde $X = \ell_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ olsun ve T*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) := \quad (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

sol kaydırma operatörü olsun. $\|T\| = 1$ ile $T \in B(\ell_p)$ olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ dir. Ayrıca T örtendir fakat birebir değildir çünkü onun sıfır uzayı

$$N(T) = \quad \{(x_n) \in \ell_p : x_2 = x_3 = x_4 = \cdots = 0\}$$

dır. Özellikle bu $0 \in \sigma_p(T)$ olmasını sağlar.

T nin spektrumunu incelemek için $1 \leq p < \infty$ ve $p = \infty$ durumlarını ayıralım.

$1 \leq p < \infty$ için

$$\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}, \quad \sigma_p(T) = \mathbb{D}, \quad \sigma_c(T) = \mathbb{T}, \quad \sigma_r(T) = \emptyset \tag{2.6}$$

olduğunu ve $p = \infty$ için

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \mathbb{D}, \quad \sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \emptyset \tag{2.7}$$

olduğunu görürüz. Gerçekten de λ özdeğerinin özuzayı her $|\lambda| < 1$ için ℓ_p ye ait olan $x_\lambda := (1, \lambda, \lambda^2, \ldots)$ vektörü tarafından üretilir, fakat bu ℓ_∞ da yalnızca $|\lambda| = 1$ iken geçerlidir. Burada $\mathbb{D}$ açık birim diski, $\mathbb{T}$ ise birim çemberi göstermektedir.

Örnek 2.3 *$\mathbb{C}$ üzerinde $X = \ell_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ olsun ve*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (0, x_1, x_2, \ldots) \tag{2.8}$$

sağ kaydırma operatörü olsun. $\|T\| = 1$ ile $T \in B(\ell_p)$ olduğunu kolayca görebiliriz. Dolayısıyla $\sigma(T) \subset \overline{\mathbb{D}}$ dir. Bu örnekte T, birebir dir fakat örten değildir, çünkü onun

$$R(T) = \{(y_n) \in \ell_p : y_1 = 0\}$$

tanım kümesi ℓ_p de yoğun bile değildir. Özellikle bu $0 \in \sigma_r(T)$ olmasını sağlar. Şimdi T nin spektrumun yukarıda verilen ayrışımını yapalım. Bunun için $p = 1$, $1 < p < \infty$ ve $p = \infty$ durumlarını ayıralım.

$$p = 1 \text{ veya } \quad p = \infty \text{ durumlarında}$$

$$\sigma(T) = \sigma_r(T) = \overline{\mathbb{D}}\ , \quad \sigma_p(T) = \sigma_c(T) = \emptyset \tag{2.9}$$

ve $1 < p < \infty$ için

$$\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}\ , \quad \sigma_p(T) = \emptyset \quad \sigma_c(T) = \mathbb{T}\ , \quad \sigma_r(T) = \mathbb{D} \tag{2.10}$$

dir. Dikkat edecek olursak sağ kaydırma operatörünün hiçbir ℓ_p uzayında özdeğeri yoktur.

Biz şimdi 0 ın spektral ayrışım içerisinde hangi kümeye ait olduğunu veren aşağıdaki örnekleri verelim.

Örnek 2.4 *$\mathbb{C}$ üzerinde $X = \ell_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ olsun. Eğer*

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(x_{1,} \frac{1}{2} x_2, \frac{1}{3} x_3, \ldots\right) \tag{2.11}$$

ise $0 \in \sigma_c(T)$ dir. Çünkü,

$$T^{-1}(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_1, 2y_2, 3y_3, \ldots)$$

ters operatörü ℓ_p nin bir yoğun alt uzayı üzerinde tanımlıdır ve ℓ_p de sınırlı değildir. Sonuç olarak

$$\sigma_p(T) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}, \quad \sigma_c(T) = \{0\}\ , \quad \sigma_r(T) = \emptyset$$

dir. O halde $\sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) = \{0\}$ ve $\sigma_c(T) = \{0\}$ ve $\sigma_c(T) \cap \sigma_r(T) = \emptyset$ olduğundan $\sigma_r(T) = \emptyset$ dır. Diğer taraftan

$$T(x_1, x_2, x_3, ...) = \left(x_{2,} \frac{1}{2} x_3, \frac{1}{3} x_4, \frac{1}{4} x_5, \ldots\right) \tag{2.12}$$

biçiminde tanımlanırsa $0 \in \sigma_p(T)$ dır, çünkü $e_1 = (1, 0, 0, ...)$, $\lambda = 0$ özdeğerine karşılık gelen özvektördür. T^{-1} ters operatörü burada tanımlı değildir. Sonuç olarak

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}\ , \quad \sigma_c(T) = \sigma_r(T) = \emptyset \tag{2.13}$$

elde ederiz. Son olarak eğer

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots) \tag{2.14}$$

biçiminde tanımlanırsa $0 \in \sigma_r(T)$ *dir, çünkü* T *nin* $R(T)$ *değer kümesi* ℓ_p *de yoğun değildir. Burada*

$$T^{-1}(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_2, 2y_3, 3y_4, \ldots)$$

ters operatörü tanımlıdır fakat $R(T)$ *de sınırlı değildir. Sonuç olarak*

$$\sigma(T) = \sigma_r(T) = \{0\}, \quad \sigma_p(T) = \sigma_c(T) = \emptyset \tag{2.15}$$

elde edilir.

2.2 Spektrumun Goldberg Sınıflandırılması

$T \in B(X)$ olmak üzere T nin $R(T)$ görüntü kümesi için üç farklı durum söz konusudur.

(I) $R(T) = X$

(II) $R(T) \neq X$ fakat $\overline{R(T)} = X$

(III) $\overline{R(T)} \neq X$

ve T^{-1} için üç farklı durum söz konusudur.

(1) T^{-1} mevcut ve süreklidir,

(2) T^{-1} mevcut fakat sürekli değil,

(3) T^{-1} mevcut değil

Mümkün olan bütün olasılıklar düşünüldüğünde dokuz farklı durum oluşur. Bunları, $I_1, I_2, I_3, II_1, II_2, II_3, III_1, III_2, III_3$ ile numaralandırılacağız.

Örneğin, eğer bir operatör III_2 durumunda ise $\overline{R(T)} \neq X$ ve T^{-1} mevcut fakat sürekli değildir. Ayrıca kapalı grafik teoreminden $I_2 = \emptyset$ dir.

Eğer λ kompleks sayısı $T = \lambda I - L \in I_1$ veya $T = \lambda I - L \in II_1$ biçiminde ise $\lambda \in \rho(L, X)$ dir. $\rho(L, X)$ de bulunmayan bütün λ skaler değerleri L nin spektrumunu oluşturur. $\sigma(L, X)$ in bu sınıflandırılması L nin fine spektrumunu meydana getirir.

Bu, $\sigma(L,X)$ in $I_2\sigma(L,X)=\emptyset$, $I_3\sigma(L,X)$, $II_2\sigma(L,X)$, $II_3\sigma(L,X)$, $III_1\sigma(L,X)$, $III_2\sigma(L,X)$, $III_3\sigma(L,X)$ aralarında ayrık altkümelerine bölünebilmesi demektir. Örneğin, eğer $T=\lambda I-L$, III_2 ye aitse $\lambda\in III_2\sigma(L,X)$ yazacağız. (Bak [25])

2.3 Yaklaşık nokta spektrum, eksik spektrum ve sıkıştırılmış spektrum

X bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde Banach uzayı ve $L\in B(X)$ olsun. $(x_n)\subset X$ dizisi için eğer, $n\to\infty$ iken $\|Lx_n\|\to 0$ ve $\|x\|=1$ ise (x_n) ye L için bir Weyl dizisi denir. Örneğin, ℓ_p deki $\{e_k\}$ taban elemanları $(Lx_n)_n=\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$ operatörü için bir Weyl dizisidir.

$$\sigma_{ap}(L):=\{\lambda\in\mathbb{K}:\lambda I-L \text{ için bir Weyl dizisi mevcuttur}\} \tag{2.16}$$

kümesine L nin yaklaşık nokta spektrumu denir.

$$\sigma_\delta(L):=\{\lambda\in\sigma(L):\lambda I-L \text{ örten değil}\} \tag{2.17}$$

alt spekturumuna L nin eksik spektrumu denir.

Tanımdan eğer $\lambda\notin\sigma_{ap}(L)$ ise her $x\in X$ için $\|\lambda x-Lx\|\geq c\|x\|$ dir. Denk olarak bu,

$$\inf\{\|\lambda e-Le\|:e\in B_1(X)\}>0\ ,\quad (\lambda\notin\sigma_{ap}(L)) \tag{2.18}$$

biçiminde ifade edilebilir.

(2.16) ve (2.17) alt spektrumları

$$\sigma(L)=\sigma_{ap}(L)\cup\sigma_\delta(L) \tag{2.19}$$

biçiminde spektrumun ayrık olması gerekmeyen bir ayrışımıdır.

$$\sigma_{co}(L):=\left\{\lambda\in\mathbb{K}:\overline{R(\lambda I-L)}\neq X\right\} \tag{2.20}$$

kümesine de L nin sıkıştırılmış spektrumu denir.

$\sigma_{ap}(L)$, $\sigma_\delta(L)$, $\sigma_{co}(L)$ alt spektrumları

$$\begin{aligned}\sigma(L)&=\sigma_{ap}(L)\cup\sigma_\delta(L)\\ \sigma(L)&=\sigma_{ap}(L)\cup\sigma_{co}(L)\end{aligned} \tag{2.21}$$

spektrumun ayrık olması gerekmeyen bir ayrışımıdır. $\sigma_p(L) \subseteq \sigma_{ap}(L)$ ve $\sigma_{co}(L) \subseteq \sigma_\delta(L)$ olduğu açıktır. Ayrıca $\sigma(L) = \sigma_p(L) \cup \sigma_c(L) \cup \sigma_r(L)$ eşitliği ile bu alt spektrumları kıyaslarsak

$$\begin{aligned} \sigma_r(L) &= \sigma_{co}(L) \diagdown \sigma_p(L) \\ \sigma_c(L) &= \sigma(L) \diagdown [\sigma_p(L) \cup \sigma_{co}(L)] \end{aligned} \tag{2.22}$$

elde ederiz (Bak [12]).

Bazen bir sınırlı lineer operatörün spektrumunu hesaplamak için onun adjoint operatörü faydalı olabilir. Bunun için aşağıdaki teorem çok kullanışlıdır.

Teorem 2.2 *Bir $L \in B(X)$ operatörünün ve onun $L^* \in B(X^*)$ adjointinin spektrumu ve alt spektrumu için aşağıdaki ilişkiler doğrudur.*
(a) $\sigma(L^*) = \sigma(L)$,
(b) $\sigma_c(L^*) \subseteq \sigma_{ap}(L)$,
(c) $\sigma_{ap}(L^*) = \sigma_\delta(L)$,
(d) $\sigma_\delta(L^*) = \sigma_{ap}(L)$,
(e) $\sigma_p(L^*) = \sigma_{co}(L)$,
(f) $\sigma_{co}(L^*) \supseteq \sigma_p(L)$,
(g) $\sigma(L) = \sigma_{ap}(L) \cup \sigma_p(L^*) = \sigma_p(L) \cup \sigma_{ap}(L^*)$ *([12] , Önerme 1.3).*

[19] da Durna ve Yıldırım, şimdiye kadar verilen tanımlar yardımıyla, spektrumun bu ayrışımları arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki tabloyu oluşturmuşdur.

Tablo 1.2: Spektrumun Ayrık Olması Gerekmeyen Ayrışımı

		(1)	(2)	(3)
		$R(\lambda; L)$ mevcut ve sınırlı	$R(\lambda; L)$ mevcut ve sınırsız	$R(\lambda; L)$ mevcut değil
(I)	$R(\lambda I - L) = X$	$\lambda \in \rho(L)$	–	$\lambda \in \sigma_p(L)$ $\lambda \in \sigma_{ap}(L)$
(II)	$R(\lambda I - L) \neq X$ $\overline{R(\lambda I - L)} = X$	$\lambda \in \rho(L)$	$\lambda \in \sigma_c(L)$ $\lambda \in \sigma_{ap}(L)$ $\lambda \in \sigma_\delta(L)$	$\lambda \in \sigma_p(L)$ $\lambda \in \sigma_{ap}(L)$ $\lambda \in \sigma_\delta(L)$
(III)	$\overline{R(\lambda I - L)} \neq X$	$\lambda \in \sigma_r(L)$ $\lambda \in \sigma_\delta(L)$ $\lambda \in \sigma_{co}(L)$	$\lambda \in \sigma_r(L)$ $\lambda \in \sigma_{ap}(L)$ $\lambda \in \sigma_\delta(L)$ $\lambda \in \sigma_{co}(L)$	$\lambda \in \sigma_p(L)$ $\lambda \in \sigma_{ap}(L)$ $\lambda \in \sigma_\delta(L)$ $\lambda \in \sigma_{co}(L)$

3. BANT MATRİSLERİ

Sayısal analizde, sonlu elemanlı matrisleri veya sonlu fark problemlerinden elde edilen matrisleri bant matrisi haline getirebiliriz. Bant matrisleri problem değişkenleri arasındaki ilişkiyi tanımlamamıza yardımcı olur. Örneğin, bant genişliği matris boyutunun karekökünü oluşturan matris, bant içinde beş köşegenin sıfır olmadığı kare bir bölgede tanımlanan kısmi türevli diferansiyel denkleme karşılık gelir. Eğer bu matrise Gauss eliminasyon yöntemini uygularsak, çok sayıda sıfır olmayan elemanlı bant içeren matris elde ederiz. Bu nedenle, bant operatörlerinin rezolvent kümesi, bu gibi problemlerin çözümü için önemlidir. Bant matrisleri matematiğin birçok alanında ve uygulamalarında ortaya çıkmaktadır. Üç yada daha fazla köşegenli bant matrisleri telekomünikasyon sistem analizinde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için sonlu fark yöntemlerininde, sabit olmayan katsayılı doğrusal tekrarlama sistemlerinde vb. kullanılır.

Sonlu elemanlar, sonlu farklar gibi metotlar kullanılarak yapılan analizlerde matris boyutları bilgisayar kapasitelerinin üzerinde olabilmektedir. Bu durumda lineer denklem sistemlerinin çözümü mümkün olamamaktadır. Bazı özel problemlerde matrisler bant matris olarak oluşmaktadır. Bu özellik kullanılarak bu problemlere ait lineer denklem sisteminin çözümü mümkündür. Alt üçgensel matrisleri de bant matrisi yaparak bu tür lineer denklem sistemlerinin çözümü için bir algoritma geliştirilmiştir. Geliştirilen algoritma kullanılarak çok büyük boyutlardaki matrislerin sıkıştırılarak bilgisayarda oluşturulması ile lineer denklem sistemlerinin çözümü mümkün olmaktadır. Bu nedenle, birisinin çeşitli bant matrisleri ile ilgili sonuçlar elde etmesi oldukça önemlidir.

Tanım 3.1 (Bant matris) *Matrisin sıfırdan farklı elemanları esas köşegen civarında toplanmış olan matrise bant matris denir. Esas köşegene paralel olan köşegenlerine yan köşegen denir. Esas köşegenin altındaki köşegenler alt köşegen, üstündeki köşegenlere üst köşegen denir.* m_1 *alt ve* m_2 *üst köşegeni olan bir matrisin ana bant genişliği* $m = m_1 + m_2 + 1$ *olur.* m_1 *e alt bant,* m_2 *ye üst bant genişliği de denir. Ana bant dışındaki tüm elemanları sıfır olan matrislere bant matris denir.*

[24] de El-Shabrawy tarafından Δ_{uv} genelleştirilmiş fark operatörünü aşağıdaki gibi tanımlanmıştır: (u_k) ve (v_k)

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u > 0 \text{ ve } \lim_{k\to\infty} v_k = v \neq 0. \tag{3.1}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı iki yakınsak reel sayı dizisi olsun. $\Delta_{uv} : cs \to cs$, $\Delta_{uv}x = \Delta_{uv}(x_k) = (u_k x_k + v_{k-1}x_{k-1})_{k=0}^{\infty}$ biçiminde tanımlanır. Burada $x_{-1} = v_{-1} = 0$ dır. O halde Δ_{uv} operatörünün matris gösterimi

$$\Delta_{uv} = \begin{pmatrix} u_0 & 0 & 0 & \cdots \\ v_0 & u_1 & 0 & \cdots \\ 0 & v_1 & u_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

şeklindeki bir alt üçgensel çift bant matrisidir.

Eğer (u_k) ve (v_k) sabit diziler ise, yani; her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k = r \neq 0$ ve $v_k = s \neq 0$ biçiminde ise bu durumda Δ_{uv} operatörü [23] de çalışılan $B(r,s)$ operatörüne indirgenir. Ayrıca $B(r,s)$ operatörünün c_0, c, ℓ_p ve bv_p üzerinde ki spektrumun alt ayrışımı [14] de çalışılmıştır.

3.1 Genelleştirilmiş Fark Matrisi $B(r,s)$ nin cs dizi uzayı üzerinde spektral ayrışımları

Bir çok araştırmacı bazı dizi uzaylarında lineer operatörlerin spektrumunu ve fine spektrumunu çalışmıştır. 2005 de Altay ve Başar [9] da c_0 ve c üzerinde $B(r,s)$ genelleştirilmiş fark operatörünün spektrumunu ve fine spektrumunu belirlemiştir. 2008 de Bilgiç ve Furkan [13] de ℓ_p ve bv_p, $(1 \leq p < \infty)$ uzayları üzerinde $B(r,s)$ genelleştirilmiş fark operatörünün spektrumunu ve fine spektrumunu hesaplamıştır. [18] de Das c_0 dizi uzayı üzerinde $U(r_1, r_2; s_1, s_2)$ matrisinin spektrumunu ve fine spektrumunu hesaplamıştır. [35] de Tripathy ve Das $\|x\|_{cs} = \sup_n \left|\sum_{i=0}^{n} x_i\right|$ normu ile bir Banach uzayı olan

$$cs = \left\{ x = (x_n) \in w : \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_i \text{ mevcut} \right\},$$

dizi uzayında $U(r,s)$ üst üçgensel çift bant matrisinin spektrumunu ve fine spektrumunu tanımlamıştır.

$B(r,s)$ genelleştirilmiş fark matrisi

$$B(r,s) = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & \cdots \\ s & r & 0 & \cdots \\ 0 & s & r & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (s \neq 0) \tag{3.2}$$

biçiminde tanımlanan bir bant matrisidir.

Bu bölümde bazı alt üçgensel bant matsislerinin cs dizi uzayı üzerinde spektral ayrışımlarından bahsedilmiştir. Bu bölümün 1. kısımı orjinal olup, bu kısımda [23] de Dutta ve Tripathy tarafından hesaplanan cs dizi uzayı üzerinde $B(r,s)$ genelleştirilmiş fark operatörünün spekturumu ve aralarında ayrık olan spektral ayrışımı verilmiştir. Ancak [23] de Goldberg [25] tarafından tanımlanan spektrumun ayrışımı yapılmamıştır ve dolayısıyla da spekturumun aralarında ayrık olması gerekmeyen (yaklaşık nokta spektrum, eksik spektrum ve sıkıştırılmış spektrum) spektral ayrışımı verilmemiştir. Bu yüzden biz bu kısımda cs dizi uzayı üzerinde $B(r,s)$ genelleştirilmiş fark operatörünün spektrumunun Goldberg tarafından tanımlanan fine ayrışımını verip, yaklaşık nokta spektrumunu, eksik spektrumunu ve sıkıştırılmış spektrumunu elde ettik ve bu çalışma Durna ve arkadaşları tarafından [22] de yayınlanmıştır.

Biz ilk önce [23] de verilen sonuçları sıralayacağız. Daha sonra spektrumun tasnifinde eksik kalan kısımları ispatlayacağız.

Lemma 3.1 *T yoğun bir görüntüye sahiptir ancak ve ancak T^* birebirdir (Golberg [25]).*

Lemma 3.2 *T sınırlı bir terse sahiptir ancak ve ancak T^* örtendir (Golberg [25]).*

Aşağıdaki lemma $B(r,s)$ matrisinine karşılık gelen operatörün cs den cs ye sınırlı olduğunu göstermemizi sağlar.

Lemma 3.3 *$A = (a_{nk})$ matrisi, cs den cs ye $T \in B(cs)$ operatörü belirtir ancak ve ancak*

(i) $\sup_n \sum_k \left| \sum_{n=1}^{m} (a_{nk} - a_{n,k-1}) \right| < \infty$

(ii) $\sum_n a_{nk}$ *her bir k için yakınsaktır ([41] , s. 130).*

Lemma 3.4 *$B(r,s) : cs \to cs$, $\|B(r,s)\|_{(cs,cs)} \leq |r| + |s|$ ile bir sınırlı lineer operatördür ([23] , Lemma 2).*

İspat. $B(r,s)$ nin lineer olduğu kolayca gösterilebilir. $\|x\|_{cs} = \sup_n \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right|$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|B(r,s)\|_{(cs,cs)} &= \sup \left| \sum_{k=0}^{n} s x_{k-1} + r x_k \right| \\ &\leq \sup_n |s| \left| \sum_{k=0}^{n} x_{k-1} \right| + \sup_n |r| \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| \\ &\leq (|s| + |r|) \|x\|_{cs} \end{aligned}$$

$$\|B(r,s)\|_{(cs,cs)} \leq (|s| + |r|) \|x\|_{cs} \tag{3.3a}$$

elde edilir. ■

Şimdi cs uzayında $B(r,s)$ operatörünün spektrumunu, point spektrumunu, sürekli spektrumunu ve rezidü spektrumunu verelim.

Teorem 3.1 *$\sigma(B(r,s), cs) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\}$ ([23] , Teorem 6).*

İspat. $|\lambda - r| > |s|$ için $(B(r,s) - \lambda I)^{-1}$ in mevcut ve $B(cs)$ de olduğunu, daha sonra $(B(r,s), cs)$ operatörünün $|\lambda - r| \leq |s|$ için tersinir olmadığını göstermeliyiz. $|\lambda - r| > |s|$ eşitsizliğini sağlayan λ ları alalım. $(B(r,s) - \lambda I)^{-1}$ bir alt üçgensel matris olduğundan dolayı $(B(r,s) - \lambda I)^{-1}$ mevcuttur. $(B(r,s) - \lambda I)x = y$ denklemini çözersek, aşağıdaki denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{r-\lambda} y_0, \\ x_1 &= \frac{1}{r-\lambda} y_1 - \frac{s}{(r-\lambda)^2} y_0, \\ x_2 &= \frac{1}{r-\lambda} y_2 - \frac{s}{(r-\lambda)^2} y_1 + \frac{s^2}{(r-\lambda)^3} y_0, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.4}$$

Buradan, n. satır, k. yerde

$$x_n = \sum_{k\le n} \frac{(-s)^{n-k}}{(r-\lambda)^{n-k+1}} y_k \tag{3.5}$$

ile verilir.

Böylece $(B(r,s)-\lambda I)^{-1}$ ile belirtilen (a_{nk}) matrisi

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{(-s)^{n-k}}{(r-\lambda)^{n-k+1}} & , \ n \le k \\ \\ 0 & , \ n > k \end{cases} \tag{3.6}$$

ile tanımlanır.

$$\begin{aligned} \|B(r,s)-\lambda I\|_{(cs,cs)}^{-1} &= \sup_n \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{(-s)^{n-k}}{(r-\lambda)^{n-k+1}} \right| \\ &= \left|\frac{1}{r-\lambda}\right| \sup \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{s}{r-\lambda}\right|^{n-k} \\ &= \left|\frac{1}{r-\lambda}\right| \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{s}{r-\lambda}\right|^{k} < \infty \end{aligned} \tag{3.7}$$

olduğunu görürüz. Dolayısıyla $(B(r,s)-\lambda I)^{-1} \in B(cs)$ dir.

Şimdi $(B(r,s)-\lambda I)$ operatrünün $|\lambda - r| \le |s|$ için tersinir olmadığını gösterelim. $(B(r,s)-\lambda I)$ üçgensel olduğundan dolayı $(B(r,s)-\lambda I)^{-1}$ mevcuttur. $|\lambda - r| \le |s|$ ve $\lambda \ne r$ şartlarını sağlayan λ alalım (3.7) den her ne zaman $|\lambda - r| \le |s|$ olduğunda $\|B(r,s)-\lambda I\|_{(cs,cs)}^{-1} = \infty$ elde ederiz, bu da $(B(r,s)-\lambda I)^{-1} \notin B(cs)$ demektir. $\lambda = r$ olduğunda $(B(r,s)-\lambda I)$ operatörü

$$B(s) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ s & 0 & 0 & \dots \\ 0 & s & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

ile verilen $B(s)$ matrisi ile belirtilir. $(B(s)-sI)x = \theta \Longrightarrow x = \theta$ elde ederiz. Böylece $(B(s)-sI) : cs \to cs$ birebirdir. Fakat görüntüsü bir yoğun küme değildir. Dolayısıyla $(B(s)-sI)$ tersinir değildir. Bu $(B(s)-sI)$ nin, $|\lambda - r| \le |s|$ için tersinir olmadığını gösterir. İspat tamamlanır. ■

Teorem 3.2 *$\sigma_p(B(r,s), cs) = \emptyset$ ([23] Teorem 7).*

İspat. cs de $x \neq \theta = (0,0,0,\ldots)$ için $B(r,s)\,x = \lambda x$ olsun. Bu durumda aşağıdaki denklem sistemine elde ederiz:

$$\begin{aligned} rx_0 &= \lambda x_0 \\ sx_0 + rx_1 &= \lambda x_1 \\ &\vdots \\ sx_k + rx_{k+1} &= \lambda x_{k+1} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.9}$$

Eğer x_i, $x = (x_n)$ dizisinin sıfırdan farklı ilk terimi ise $r = \lambda$ elde edilir, dolayısıyla

$$\begin{aligned} & sx_i + rx_{i+1} = \lambda x_{i+1} \\ \Longrightarrow \quad & sx_i = 0 \\ \Longrightarrow \quad & x_i = 0 \quad (s \neq 0 \text{ old.}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

olur ki bu $x_i \neq 0$ kabulü ile çelişmektedir.
Böylece $(B(r,s) - \lambda I)\,x = \theta \Longrightarrow x = \theta$ ve dolayısıyla $(B(r,s) - \lambda I) : cs \to cs$ birebirdir. $\sigma_p(B(r,s), cs) = \emptyset$ dir. ■

Uyarı 3.1 *Eğer $T : cs \to cs$ bir A matrisi belirten bir sınırlı lineer operatör ise, bu durumda $T^* : cs^* \to cs^*$ adjoint operatörünün matris gösterimi A matrisinin A^t transpozu ile verilir. cs nin cs^* dual uzayı $\|x\|_{bv} = \sum_{n=0}^{\infty} |x_{n+1} - x_n| + \lim_{n\to\infty} |x_n|$ normlu ile tüm sınırlı salınımlı dizilerin bv Banach uzayına izometrik olarak izomorftur.*

Teorem 3.3 $\sigma_p\left(B(r,s)^*, cs^*\right) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| < |s|\}$ *([23] , Theorem 8).*

İspat. Kabul edelim ki $x\,(\neq \theta) \in cs^* \cong bv$ için $B(r,s)^*\,x = \lambda x$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} rx_0 + sx_1 &= \lambda x_0 \\ rx_1 + sx_2 &= \lambda x_1 \\ &\vdots \\ rx_k + sx_{k+1} &= \lambda x_k \\ &\vdots \end{aligned} \tag{3.11}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemi çözersek,

$$n \in \mathbb{N} \text{ için } x_n = \left(\frac{\lambda - r}{s}\right)^n x_0 \tag{3.12}$$

elde ederiz. Böylece $x = (x_n) \in cs^*$ dir ancak ve ancak $|\lambda - r| < |s|$ dir. İspat tamamlanır. ■

Teorem 3.4 $\sigma_r(B(r,s), cs) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| < |s|\}$ *([23] , Theorem 9).*

İspat. $(B(r,s) - \lambda I)$ nın görüntü kümesinin cs de yoğun olmadığını, fakat $(B(r,s) - \lambda I)$ sınırlı veya sınırsız bir terse sahip olduğunu ispatlayalım. Teorem 3.3, $(B(r,s)^* - \lambda I)$ nın birebir olmadığını ifade eder. Bu yüzden Lemma 3.1 den $(B(r,s) - \lambda I)$, cs de yoğun değildir. Ayrıca $(B(r,s) - \lambda I)^{-1}$ nin mevcut ve $|\lambda - r| < |s|$ yı sağlayan bu λ lar için $\overline{(B(r,s) - \lambda I)} \neq cs$ olduğunu görürüz. Tekrar $\lambda \neq s$ için, $(B(r,s) - \lambda I)$ üçgenseldir ve bu yüzden bir terse sahiptir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.5 $\sigma_c(B(r,s), cs) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| = |s|\}$ *([23] , Theorem 10).*

İspat. $\sigma(B(r,s), cs)$ nin $\sigma_p(B(r,s), cs)$, $\sigma_r(B(r,s), cs)$ ve $\sigma_c(B(r,s), cs)$ kümelerinin ayrık bileşkeleri olduğu iyi biliniyor. $\sigma_p(B(r,s), cs) = \emptyset$ ve $\sigma_r(B(r,s), cs) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| < |s|\}$ olduğundan $\sigma_c(B(r,s), cs) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| = |s|\}$ elde edilir. ■

Şimdi [23] de verilen $B(r,s)$ matrisinin cs dizi uzayındaki spektrumun tasnifinde eksik kalan kısımları ispatlayacağız.

Lemma 3.5 *(a_k) ve (b_{nk}) negatif olmayan reel sayılar olmak üzere*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{nk}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} b_{nk}\right)$$

dır.

İspat.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{nk}\right) &= \sum_{k=0}^{0} a_k b_{1k} + \sum_{k=0}^{1} a_k b_{2k} + \sum_{k=0}^{2} a_k b_{3k} + \sum_{k=0}^{3} a_k b_{4k} + \cdots \\
&= a_0 b_{10} + (a_0 b_{20} + a_1 b_{21}) + (a_0 b_{30} + a_1 b_{31} + a_2 b_{32}) \\
&+ (a_0 b_{40} + a_1 b_{41} + a_2 b_{42} + a_3 b_{43}) + \cdots \\
&= a_0 \sum_{n=1}^{\infty} b_{n0} + a_1 \sum_{n=2}^{\infty} b_{n1} + a_2 \sum_{n=3}^{\infty} b_{n2} + \cdots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} b_{nk}\right).
\end{aligned}$$

■

Teorem 3.6 $III_1\sigma(B(r,s),cs) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| < |s|\}$.

İspat. $(B(r,s)-\lambda I)^* x = y$ denklemini sağlayan tüm $y \in cs^* \cong bv$ için $x \in cs^* \cong bv$ bulmalıyız. O halde

$$\begin{aligned}(r-\lambda)x_0 + sx_1 &= y_0\\ (r-\lambda)x_1 + sx_2 &= y_1\\ &\vdots\\ (r-\lambda)x_k + sx_{k+1} &= y_k\\ &\vdots\end{aligned}$$

elde ederiz. Kabul edelim ki $x_0 = 0$ oldun. Yukarıdaki denklemlerden

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{y_0}{s}\\ x_2 &= \frac{1}{s}y_1 - \frac{r-\lambda}{s^2}y_0\\ &\vdots\\ x_n &= \frac{1}{s}\left(y_{n-1} - \frac{r-\lambda}{s}y_{n-2} + \left(\frac{r-\lambda}{s}\right)^2 y_{n-3} - \left(\frac{r-\lambda}{s}\right)^3 y_{n-4}\right)\\ &\quad + \frac{1}{s}\left(+\cdots+(-1)^{n-1}\left(\frac{r-\lambda}{s}\right)^{n-1} y_0\right)\\ &= \frac{1}{s}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{r-\lambda}{s}\right)^k y_{n-k-1}\end{aligned}$$

elde ederiz. Burada $n = 1,2,3,\ldots$ dır. Şimdi $x \in bv$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|x_n - x_{n+1}| &= |x_0 - x_1|\\ &+ \frac{1}{|s|}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left(\frac{r-\lambda}{s}\right)^k y_{n-k-1} - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{r-\lambda}{s}\right)^k y_{n-k}\right|\\ &\le \left|\frac{y_0}{s}\right| + \left|\frac{y_0}{s}\right|\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{r-\lambda}{s}\right|^n\\ &+ \frac{1}{|s|}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{r-\lambda}{s}\right|^k |y_{n-k-1} - y_{n-k}|\end{aligned}$$

Lemma 3.5 den

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}|x_n - x_{n+1}| &\leq \left|\frac{y_0}{s}\right|\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{r-\lambda}{s}\right|^n \\
&+ \frac{1}{|s|}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty}\left|\frac{r-\lambda}{s}\right|^k |y_{n-k-1} - y_{n-k}| \\
&= \tfrac{1}{|s|}\left(|y_0|\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{r-\lambda}{s}\right|^n + \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{r-\lambda}{s}\right|^k \sum_{n=k+1}^{\infty}|y_{n-k-1} - y_{n-k}|\right) \\
&= \tfrac{1}{|s|}\left(|y_0|\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{r-\lambda}{s}\right|^n + \sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{r-\lambda}{s}\right|^k \sum_{n=0}^{\infty}|y_n - y_{n+1}|\right) \\
&= \tfrac{1}{|s|}\left(|y_0| + \|y\|_{bv}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{r-\lambda}{s}\right|^n
\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $\lambda \in \sigma_r(B(r,s), cs)$ için, $(\lambda I - B(r,s))^*$ operatörü örtendir ancak ve ancak $|r-\lambda| < |s|$ dir. Dolayısıyla Lemma 3.2 den, $\lambda I - B(r,s)$ sınırlı terse sahiptir. ■

Sonuç 3.1 $III_2\sigma(B(r,s), cs) = \emptyset$.

İspat. $III_2\sigma(B(r,s), cs) = \sigma_r(B(r,s), cs) \backslash III_1\sigma(B(r,s), cs)$ olduğundan istenen sonuç, Teorem 3.4 ve Teorem 3.6 dan açıktır. ■

Sonuç 3.2 $I_3\sigma(B(r,s), cs) = II_3\sigma(B(r,s), cs) = III_3\sigma(B(r,s), cs) = \emptyset$.

İspat. Tablo 1.2 den $\sigma_p(B(r,s), cs) = I_3\sigma(B(r,s), cs) \cup II_3\sigma(B(r,s), cs) \cup III_3\sigma(B(r,s), cs)$ olduğundan dolayı Teorem 3.2 den gerekli sonucu elde ederiz. ■

Teorem 3.7 *(a)* $\sigma_{ap}(B(r,s), cs) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| = |s|\}$,
(b) $\sigma_{\delta}(B(r,s), cs) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\}$,
(c) $\sigma_{co}(B(r,s), cs) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| < |s|\}$.

İspat. (a) Tablo 1.2 den,

$$\sigma_{ap}(B(r,s), cs) = \sigma(B(r,s), cs) \backslash III_1\sigma(B(r,s), cs).$$

dir. Teorem **??** ve Teorem 3.6 yardımıyla, $\sigma_{ap}(B(r,s), cs) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| = |s|\}$ elde ederiz.

(b) Tablo 1.2 den,

$$\sigma_{\delta}(B(r,s),cs) = \sigma(B(r,s),cs) \backslash I_3(B(r,s),cs),$$

yazabiliriz. Bu yüzden Teorem **??** ve Sonuç 3.2 den, istenen sonucu elde ederiz.

(c) Teorem 2.2 (e) den ,

$$\sigma_p(B(r,s)^*,bv) = \sigma_{co}(B(r,s),cs).$$

eşitliği geçerlidir. Teorem 3.3 i kullanarak istenen sonucu elde ederiz. ■

Sonuç 3.3 *(a)* $\sigma_{ap}(B(r,s)^*,bv) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\}$
(b) $\sigma_{\delta}(B(r,s)^*,bv) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| = s\}$.

İspat. Teorem 2.2 (c) ve (d) den,

$$\sigma_{ap}(B(r,s)^*,cs^* \cong bv) = \sigma_{\delta}(B(r,s),cs)$$

dir, böylece

$$\sigma_{\delta}(B(r,s)^*,cs^* \cong bv) = \sigma_{ap}(B(r,s),cs).$$

eşitliğini yazabiliriz. Teorem 3.7 (a) ve (b) kullanılarak, istenen sonucu elde ederiz.
■

3.2 Alt üçgensel $B(r,0,s)$ Matrisinin $s \neq 0$ için cs dizi uzayı üzerinde spektral ayrışımları

Bu kısımda $B(r,0,s)$ alt üçgensel matrisinin cs dizi uzayı üzerinde spektral ayrışımı için [36] da verilen sonuçları sıralayacağız. [36] da $B(r,0,s)$ alt üçgensel matrisi $s \neq 0$ için

$$B(r,0,s) = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & r & 0 & 0 & \cdots \\ s & 0 & r & 0 & \cdots \\ 0 & s & 0 & r & \cdots \\ 0 & 0 & s & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

biçiminde tanımlanmıştır.

Teorem 3.8 *$B(r,0,s) : cs \to cs$ bir lineer operatördür ve $\|B(r,0,s)\|_{(cs:cs)} \leq |r| + |s|$ dir ([36] , Teorem 3.1).*

İspat. Lemma 3.3 den, $B(r,0,s) : cs \to cs$ bir lineer operatör olduğunu göstermek kolaydır.

$$\begin{aligned}
\|B(r,0,s)(x)\|_{cs} &= \left|\sum_{i=0}^{n} rx_i + \sum_{i=0}^{n-2} sx_i\right| \\
&\leq |r|\left|\sum_{i=0}^{n} x_i\right| + |s|\left|\sum_{i=0}^{n-2} x_i\right| \\
&\leq (|r| + |s|)\,\|x\|_{cs}
\end{aligned}$$

dir ve dolayısıyla, $\|B(r,0,s)\|_{(cs:cs)} \leq |r| + |s|$. ■

Teorem 3.9 *cs üzerinde $B(r,0,s)$ operatörünün spektrumu*

$$\sigma(B(r,0,s), cs) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\}$$

ile verilir ([36] , Teorem 3.2).

İspat. İlk önce $|\lambda - r| > |s|$ için $(B(r,0,s) - \lambda I)^{-1}$ operatörünün mevcut ve $(cs : cs)$ de olduğunu göstereceğiz daha sonra $|\lambda - r| \leq |s|$ için $B(r,0,s) - \lambda I$ operatörünün tersinin olmadığını göstereceğiz.

λ, $|\lambda - r| > |s|$ eşitsizliğini sağlasın. $s \neq 0$ olduğunda $\lambda \neq r$ elde ederiz ve böylece $B(r,0,s) - \lambda I$ bir üçgen matristir, bu nedenle $(B(r,0,s) - \lambda I)^{-1}$ mevcuttur. $y = (y_n) \in cs$ olsun. $(B(r,0,s) - \lambda I)\,x = y$ denklemini çözersek

$$(B(r,0,s) - \lambda I)^{-1} = (a_{nk})$$

$$= \begin{pmatrix}
\frac{1}{r-\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \frac{1}{r-\lambda} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
-\frac{s}{(r-\lambda)^2} & 0 & \frac{1}{r-\lambda} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & -\frac{s}{(r-\lambda)^2} & 0 & \frac{1}{r-\lambda} & 0 & 0 & \cdots \\
\frac{s^2}{(r-\lambda)^3} & 0 & -\frac{s}{(r-\lambda)^2} & 0 & \frac{1}{r-\lambda} & 0 & \cdots \\
0 & \frac{s^2}{(r-\lambda)^3} & 0 & -\frac{s}{(r-\lambda)^2} & 0 & \frac{1}{r-\lambda} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}$$

elde ederiz.

Her m için

$$\sum_k \left| \sum_{n=1}^{m} (a_{nk} - a_{n,k-1}) \right| \leq \frac{1}{|r-\lambda|} + \frac{|s|}{|r-\lambda|^2} + \frac{|s|^2}{|r-\lambda|^3} + \cdots + \frac{|s|^m}{|r-\lambda|^{m+1}}$$

olduğunu göstermek kolaydır ve dolayısıyla, $|\lambda - r| > |s|$ için

$\sup_m \sum_k \left|\sum_{n=1}^{m} (a_{nk} - a_{n,k-1})\right| < \infty$ dur.

$|\lambda - r| > |s|$ olduğunda, her k için,

$$\sum_n a_{nk} = \frac{1}{r-\lambda} - \frac{s}{(r-\lambda)^2} + \frac{s^2}{(r-\lambda)^3} - \cdots \tag{3.13}$$

serisi de yakınsaktır. Bu yüzden Lemma 3.3 den, $(B(r,0,s) - \lambda I)^{-1}$, $(cs : cs)$ dedir. Bu $\sigma(B(r,0,s), cs) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\}$ olduğunu gösterir.

Şimdi $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\}$ olsun. Eğer $\lambda \neq r$ ise bu durumda $B(r,0,s) - \lambda I$ üçgenseldir ve dolayısıyla, $(B(r,0,s) - \lambda I)^{-1}$ mevcuttur. $y = (1,0,0,0,\ldots)$ olsun. Bu durumda $y \in cs$ dir. Şimdi, $(B(r,0,s) - \lambda I)^{-1} y = x$ eşitliği

$$x_{2n} = \frac{(-s)^n}{(r-\lambda)^{n+1}}$$

ve

$$x_{2n+1} = 0$$

olduğunu verir. $|\lambda - r| \leq |s|$ olduğundan,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{(r-\lambda)^{n+1}} = \frac{1}{r-\lambda}$$

serisi yakınsak değildir ve dolayısıyla $x = (x_n) \notin cs$ dir. Bu nedenle $(B(r,0,s) - \lambda I)^{-1}$, $(cs : cs)$ de değildir ve bu yüzden $\lambda \in \sigma(B(r,0,s), cs)$ dir.

Eğer $\lambda = r$ ise bu durumda $B(r,0,s) - \lambda I = B(0,0,s)$ operatörü

$$B(0,0,s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & s & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & s & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

matrisi ile belirtilir.

$B(r,0,s) - \lambda I = B(0,0,s)$ nin görüntü kümesi yoğun olmadığından, $\lambda \in \sigma(B(r,0,s), cs)$ dir. Dolayısıyla,

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\} \subseteq \sigma(B(r,0,s), cs)$$

elde edilir. Bu ise ispat tamamlar. ■

Teorem 3.10 *cs üzerinde $B(r,0,s)$ operatörünün point spektrumu*

$$\sigma_p(B(r,0,s), cs) = \emptyset$$

ile verilir ([36] , Teorem 3.3).

İspat. λ, $B(r,0,s)$ operatörünün bir özdeğeri olsun. Bu durumda $B(r,0,s)x = \lambda x$ denklemini sağlayan cs de $x \neq \theta = (0,0,0,\ldots)$ dizisi mevcuttur. O halde

$$\begin{aligned} rx_0 &= \lambda x_0 \\ rx_1 &= \lambda x_1 \\ sx_0 + rx_2 &= \lambda x_2 \ , \quad n \geq 2 \\ &\cdots \\ sx_{n-2} + rx_n &= \lambda x_n, \end{aligned}$$

elde ederiz.

Eğer x_{n_0}, (x_n) dizisinin sıfırdan farklı ilk elemanı ise bu durumda $\lambda = r$ dir. Böylece $sx_{n_0} + rx_{n_0+2} = \lambda x_{n_0+2}$ bağıntısından, $sx_{n_0} = 0$ elde ederiz. Fakat $s \neq 0$ dır ve dolayısıyla, $x_{n_0} = 0$ elde edilir bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla $\sigma_p(B(r,0,s), cs) = \emptyset$ dur. ■

Teorem 3.11 *cs^* üzerinde $B(r,0,s)^*$ operatörünün point spektrumu*

$$\sigma_p(B(r,0,s)^*, cs^* \cong bv) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| < |s|\}$$

ile verilir ([36] , Teorem 3.4).

İspat. λ, $B\,(r,0,s)^*$ operatörünün bir özdeğeri olsun. Bu durumda bv de $B\,(r,0,s)^*\,x = \lambda x$ olacak şekilde bir $x \neq \theta = (0,0,0,\ldots)$ dizisi mevcuttur. Böylece

$$\begin{aligned} B(r,0,s)^t x &= \lambda x \\ \Longrightarrow \quad r x_0 + s x_2 &= \lambda x_0 \\ r x_1 + s x_3 &= \lambda x_1 \\ r x_2 + s x_4 &= \lambda x_2 \\ &\cdots \\ r x_n + s x_{n+2} &= \lambda x_n, \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

elde ederiz. O zaman $x = (x_n) \in bv$ olduğunda

$$x_{2n} = \left(\frac{\lambda - r}{s}\right)^n x_0$$

$$x_{2n+1} = \left(\frac{\lambda - r}{s}\right)^n x_1$$

dır. Bu yüzden $x = (x_n) \in c$ dir ve dolayısıyla (x_{2n}) ve (x_{2n+1}) alt dizileri aynı zamanda yakınsaktır. Şimdi, (x_{2n}) ve (x_{2n+1}) alt dizileri yakınsaktır ancak ve ancak $|\lambda - r| < |s|$ dir. Dolayısıyla $\sigma_p\left(B\,(r,0,s)^*, cs^* \cong bv\right) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| < |s|\}$ dir. ∎

Teorem 3.12 *cs üzerinde $B\,(r,0,s)$ operatörünün rezidü spektrumu*

$$\sigma_r\left(B\,(r,0,s), cs\right) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| < |s|\}$$

ile verilir ([36] *, Teorem 3.5).*

İspat. $\sigma_r\left(B\,(r,0,s), cs\right) = \sigma_p\left(B\,(r,0,s)^*, cs^*\right) \backslash \sigma_p(B(r,0,s), cs)$, olduğundan dolayı Teorem 3.11 ve Teorem 3.10 kullararak gerekli sonucu elde ederiz. ∎

Teorem 3.13 *cs üzerinde $B\,(r,0,s)$ operatörünün sürekli spektrumu*

$$\sigma_c\left(B\,(r,0,s), cs\right) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| = |s|\}$$

ile verilir ([36] *, Teorem 3.6).*

İspat. $\sigma_p(B(r,0,s),cs)$, $\sigma_r(B(r,0,s),cs)$ ve $\sigma_c(B(r,0,s),cs)$, $\sigma(B(r,0,s),cs)$ nin, aralarında ayrık birleşenleri olduğunudan dolayı Teorem 3.9, Teorem 3.10 ve Teorem 3.12 den $\sigma_c(B(r,0,s),cs) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| = |s|\}$ elde ederiz. ■

Teorem 3.14 *Eğer $\lambda = r$ ise, $\lambda \in III_1\sigma(B(r,0,s),cs)$ dir ([36] , Teorem 3.7).*

İspat. Eğer $\lambda = r$ ise $B(r,0,s)$ nin görüntü kümesi yoğun değildir. Bu yüzden Tablo 1.2 ve Teorem 3.12 den $\lambda \in \sigma_r(B(r,0,s),cs)$ elde ederiz. Tablo 1.2 den, $\sigma_r(B(r,0,s),cs) = III_1\sigma(B(r,0,s),cs) \cup III_2\sigma(B(r,0,s),cs)$ dir. Bu nedenle,

$$\lambda \in III_1\sigma(B(r,0,s),cs)$$

dir veya

$$\lambda \in III_2\sigma(B(r,0,s),cs)$$

dir, ayrıca $\lambda = r$ için $B(r,0,s) - \lambda I = B(0,0,s)$ elde edilir.
Sonucun ispatı için, $B(0,0,s)$ operatörünün alttan sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. Tüm $x \in cs$ için

$$\|B(0,0,s)x\| \geq \frac{|s|}{2}\|x\|$$

olduğunu doğrulamak kolaydır bu ise $B(0,0,s)$ operatörü alttan sınırlı olduğunu ve böylece de $B(0,0,s)$ nin bir sınırlı terse sahip olduğunu gösterir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.15 *Eğer $\lambda \neq r$ ve $\lambda \in \sigma_r(B(r,0,s),cs)$ ise bu durumda $\lambda \in III_2\sigma(B(r,0,s),cs)$ dir ([36] , Teorem 3.8)*

İspat. $\lambda \in \sigma_r(B(r,0,s),cs)$ olduğundan Tablo 1.2 den,

$$\lambda \in III_1\sigma(B(r,0,s),cs)$$

dir veya

$$\lambda \in III_2\sigma(B(r,0,s),cs)$$

dir. Şimdi, $\lambda \in \sigma_r(B(r,0,s),cs)$ olması $|\lambda - r| < |s|$ olduğunu ifade eder. Bu nedenle Teorem 3.9 daki (3.13) serisi yakınsak değildir ve dolayısıyla, $B(r,0,s)$ operatörü sınırlı terse sahip değildir. Bu nedenle $\lambda \in III_2\sigma(B(r,0,s),cs)$ dir. ■

Teorem 3.16 *Eğer* $\lambda \in \sigma_c(B(r,0,s),cs)$ *ise,* $\lambda \in II_2\sigma(B(r,0,s),cs)$ *dir ([36] , Teorem 3.9).*

İspat. Eğer $\lambda \in \sigma_c(B(r,0,s),cs)$ ise bu durumda $|\lambda - r| = |s|$ dir. Bu nedenle, Teorem 3.9 daki (3.13) serisi yakınsak değildir ve dolayısıyla, $B(r,0,s)$ operatörü sınırlı terse sahip değildir. Bu yüzden $\lambda \in 2$ dir. Şimdi $B(r,0,s) - \lambda I$ operatörünün örten olmadığını göstermeliyiz.

$y = (y_n) = (1,0,0,0,\ldots)$ olsun. $(y_n) \in cs$ olduğu açıktır. $x = x_n$, $B(r,0,s)\,x = y$ denklemini sağlayan bir dizi olsun. O halde

$$x_{2n} = \frac{(-s)^n}{(r-\lambda)^{n+1}}$$

dir ve

$$x_{2n+1} = 0$$

elde ederiz.

Şimdi,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-s)^n}{(r-\lambda)^{n+1}} = \frac{1}{r-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{s}{r-\lambda}\right)^n$$

serisi $|\lambda - r| = |s|$ iken yakınsak değildir ve dolayısıyla $B(r,0,s) - \lambda I$ operatörü örten değildir. Bu yüzden, $\lambda \in II$ olup ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.17 *cs üzerinde* $B(r,0,s)$ *operatörünün yaklaşık nokta spektrumu*

$$\sigma_{ap}(B(r,0,s),cs) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\} \setminus \{r\}$$

ile verilir ([36] , Teorem 3.10).

İspat. Tablo 1.2 den

$$\sigma_{ap}(B(r,0,s),cs) = \sigma(B(r,0,s),cs) \setminus III_1(B(r,0,s),cs)$$

dir. Teorem 3.14 den $III_1\sigma(B(r,0,s),cs) = \{r\}$ olduğundan ispat tamamlanır. ■

Teorem 3.18 $B(r,0,s)$ *operatörünün cs üzerinde sıkıştırılmış spektrumu*

$$\sigma_{co}(B(r,0,s),cs) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| < |s|\}$$

ile verilir ([36] , Teorem 3.11).

İspat. Teorem 2.2 (e) den,

$$\sigma_p\left(B\left(r,0,s\right)^*, cs^*\right) = \sigma_{co}\left(B\left(r,0,s\right), cs\right)$$

elde ederiz. Teorem 3.11 kullanarak gerekli sonucu elde ederiz. ■

Teorem 3.19 *cs üzerinde $B\left(r,0,s\right)$ operatörünün eksik spektrumu*

$$\sigma_\delta\left(B\left(r,0,s\right), cs\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\right\}$$

ile verilir ([36] , Teorem 3.12).

İspat. Tablo 1.2 den

$$\sigma_\delta\left(B\left(r,0,s\right), cs\right) = \sigma\left(B\left(r,0,s\right), cs\right) \backslash I_3\sigma\left(B\left(r,0,s\right), cs\right)$$

dir ve

$$\sigma_p\left(B\left(r,0,s\right), cs\right) = I_3\sigma\left(B\left(r,0,s\right), cs\right) \cup II_3\sigma\left(B\left(r,0,s\right), cs\right) \cup III_3\sigma\left(B\left(r,0,s\right), cs\right)$$

geçerlidir. Teorem 3.10 dan $\sigma_p(B(r,0,s), cs) = \emptyset$ olduğundan $I_3\sigma(B(r,0,s), cs) = \emptyset$ elde ederiz. Dolayısıyla

$$\sigma_\delta\left(B\left(r,0,s\right), cs\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\right\}$$

dir. ■

Sonuç 3.4 *Aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*
(i) $\sigma_{ap}\left(B\left(r,0,s\right)^*, cs^* \cong bv\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\right\}$,
(ii) $\sigma_\delta\left(B\left(r,0,s\right)^*, cs^* \cong bv\right) = \left\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - r| \leq |s|\right\} \setminus \{r\}$ *([36] , Sonuç 3.13).*

İspat. Teorem 2.2 (c) ve (d) den

$$\sigma_{ap}\left(B\left(r,0,s\right)^*, cs^* \cong bv\right) = \sigma_\delta\left(B\left(r,0,s\right), cs\right)$$

ve

$$\sigma_\delta\left(B\left(r,0,s\right)^*, cs^* \cong bv\right) = \sigma_{ap}\left(B\left(r,0,s\right), cs\right)$$

dir. Teorem 3.17 ve Teorem 3.19 kullanılarak, gerekli sonuçlar elde edilir. ■

KAYNAKLAR

[1] **Akhmedov, A. M., Başar, F.,** (2004). On the spectrum of the Cesaro operator in c_0. Math. J. Ibaraki Univ., 36, 25–32.

[2] **Akhmedov, A. M., Başar, F.,** (2006). The fine spectra of the difference operator Δ over the sequencespace ℓ_p, $(1 \leq p < \infty)$. Demonstratio Math., 39, 586–595.

[3] **Akhmedov, A. M., Başar, F.,** (2007). On the fine spectra of the difference operator Δ over the sequencespace bv_p, $(1 \leq p < \infty)$. Acta. Math. Sin. Eng. Ser. Oct., 23, 1757–1768.

[4] **Akhmedov, A. M., Başar, F.,** (2008). The fine spectra of Cesaro operatorC_1 over the sequence space bv_p, Math. J. Okayama Univ., 50, 135–147.

[5] **Akhmedov, A. M., El-Shabrawy, S. R.,** (2010). The spectrum of the generalized lower triangle double-band matrix Δ_a over the sequence space c, Al-Azhar Univ. Eng. J., JAUES (speacial issue) 5 (9), 54-60.

[6] **Akhmedov, A. M., El-Shabrawy, S. R.,** (2011). On the fine spectrum of theoperator Δ_v over the sequence space c and ℓ_p, $(1 < p < \infty)$, Applied Mathematics & Information Sciences, 5 (3), 635-654.

[7] **Altay, B., Başar, F.,** (2004). On the fine spectrum of the difference operator on c_0 and c, Inform. Sci., 168, 217-224.

[8] **Altay, B., Başar, F.,** (2007). The fine spectrum and the matrix domain of the difference operator Δ on the sequence space ℓ_p, $(1 < p < \infty)$, Commun. Math. Anal., 2, 1–11.

[9] **Altay, B., Başar, F.,** (2005). On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r, s)$ over the sequence spaces c_0 and c, Int.J. Math. Sci 18, 3005-3013.

[10] **Altun M., Karakaya, V.,** (2009). Fine spectra of Lacunary Matrices, Commun. Math. Anal., 7, 1–10.

[11] **Amirov, R., Durna, N., Yildirim, M.,** (2011). Subdivision of the spectra for Cesàro, Rhaly and weighted mean operators on c_0, c and ℓ_p IJST A3, 175-183.

[12] **Appell, J, Pascale, E. D., Vignoli, A.,** (2004). Nonlinear Spectral Theory. Walter de Gruyter · Berlin · New York.

[13] **Bilgiç, H., Furkan, H.,** (2008). On the fine spectrum of the generalized difference operator $B(r, s)$ over the sequence spaces ℓ_p and bv_p, $(1 < p < \infty)$, Nonlinear Analysis 68, 499-506.

[14] **Başar, F, Durna, N., Yildirim, M.,** (2011). Subdivisions of the spectra for genarilized difference operator over certain sequence spaces. Thai Journal of Mathematics, 9 (2), 285–295.

[15] **Başar, F., Altay, B.,** (2004). On the fine spectrum of the difference operator on c_0 and c, Inform. Sci.168, 217–224.

[16] **Brown, A. L., Page, E.,** (1970). Elements of Functional Analysis, Von Nonstrand Reinhold Comp.

[17] **Das, R., Tripathy, B. C.,** (2016). Spectrum and fine spectrum of the lower triangular matrix $B(r,s,t)$ over the sequence space cs, Songklanakarin J. Sci. Technol., 38 (3), 265–274.

[18] **Das, R.,** (2017). On the spectrum and fine spectrum of the upper triangular matrix $U(r_1,r_2;s_1,s_2)$ over the sequence space c_0. Afr. Mat., 28, 841-849.

[19] **Durna, N, Yildirim, M,** (2011). Subdivision of the spectra for factorable matrices on c_0. GUJ Sci 24 (1), 45-49.

[20] **Durna, N.,** (2016). Subdivision of the spectra for the generalized upper triangular double-band matrices Δ^{uv} over the sequence spaces c_0 and c. ADYUSCI 6 (1), 31-43.

[21] **Durna, N, Yıldırım, M., Kılıç, R.,** (2018). Partition of the spectra for the generalized difference operator $B(r,s)$ on the sequence space cs, Cumhuriyet Sci. J., 39 (1), 7-15.

[22] **Durna, N., Kılıç, R.**, Spectra and fine spectra for the upper triangular band matrix $U(a_0,a_1,a_2;b_0,b_1,b_2)$ over the sequence space c_0, Proyecciones Journal of Mathematics, accepted.

[23] **Dutta, A., Tripathy, B. C.,** (2013). Fine spectrum of the generalized difference operator $B(r,s)$ over the Class of Convergent Series, International Journal of Analysis, 2013, Article ID 630436, 1-4.

[24] **El-Shabrawy, S. R.,** (2014). Spectra and fine spectra of certain lower triangular double band matrices as operators on c_0. Journal of Inequalities and Applications, 241(1), 1-9.

[25] **Goldberg, S.,** (1966). Unbounded Linear Operators. McGraw Hill, New York.

[26] **Gonzalez, M.,** (1985). The fine spectrum of the Cesàro operator in ℓ_p, $(1 < p < \infty)$, Arch. Math., 44, 355-358.

[27] **Kayaduman, K., Furkan, H.,** (2006). On the fine spectrum of the difference operator Δ over the sequence spaces ℓ_1 and bv, International Mathematical Forum, 24(1), 1153-1160.

[28] **Kreyszig, E.,** (1978). Introductory Functiona lAnalysis with Applications, JohnWiley & Sons, New York, NY, USA.

[29] **Okutoyi, J. T.,** (1992). On the spectrum of C_1 as an operator on bv, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank.,Ser. A1, 41, 197–207

[30] **Paul, A., Tripathy B. C.,** (2014). The spectrum of the operator $D(r,0,0,s)$ over the sequence spaces ℓ_p and bv_p, Hacet. J. Math. Stat., 43 (3), 425–434.

[31] **Paul, A., B. C. Tripathy B. C.,** (2015). The spectrum of the operator $D(r,0,0,s)$ over the sequence space bv_0, Georgian Math. J., 22 (3), 421–426.

[32] **Reade, J. B.,** (1985). On the spectrum of the Cesàro operator, Bull. Lond. Math. Soc., 17, 263-267.

[33] **Rhoades B. E.,** (1983). The fine spectra for weighted mean operators, Pacific J. Math., 104, 263-267.

[34] **Srivastava, P. D., Kumar, S.,** (2009). On the fine spectrum of the generalized difference operator Δ_ν over the sequence space c_0, Commun. Math. Anal., 6 (1), 8-21.

[35] **Tripathy, B. C., Das, R,** (2015). Spectrum and fine spectrum of the upper triangular matrix over the squence space, Proyecciones, 34 (2), 107–125.

[36] **Tripathy, B. C., Das, R.,** (2015). Spectrum and fine spectrum of the lower triangular matrix $B(r,0,s)$ over the squence space cs, Appl. Math. Inf. Sci., 9 (4), 2139-2145.

[37] **Tripathy B. C., Saikia, P.,** (2013). On the spectrum of the Cesàro operator C_1 on $bv_0 \cap \ell_\infty$, Math. Slovaca, 63 (3), 563–572.

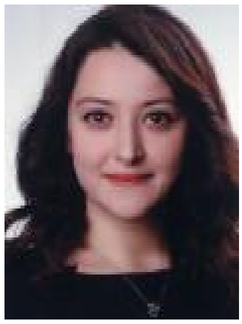
[38] **Yildirim, M.,** (1998). On the spectrum of the Rhaly operators on c_0 and c, Indian J. Pure Appl. Math., 29, 1301-1309.

[39] **Yildirim, M.,** (2002). The Fine Spectra of the Rhaly Operators on c_0, Turkish J. Math., 26 (3), 273-282.

[40] **Wenger, R. B.,** (1975). The fine spectra of the Holder summability operators, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 6 (6), 695–712.

[41] **Wilansky, A.,** (1984). Summability through Functional Analysis, vol. 85 of North-Holland Mathematics Studies, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands.

ÖZGEÇMİŞ



Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Rabia KILIÇ
Doğum Yeri ve Tarihi	Niğde, 30.05.1991
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Şahinali Mah. Terminal 1 Sok. No:4/10 Merkez/Niğde
E-posta Adresi	201592171420@cumhuriyet.edu.tr

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Niğde Yavuz Sultan Selim Anadolu lisesi, 2009
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Fakültesi OrtaÖğretim Matematik Öğretmenliği, 2015
Yüksek Lisans	Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi, 2018

Yayınlar

1. Durna, N, Yıldırım, M and Kılıç, R: Partition of the spectra for the generalized difference operator B(r,s) on the sequence space cs, Cumhuriyet Sci. J., 39 (1) (2018), 7-15.

2. Durna, N and Kılıç, R: Spectra and fine spectra for the upper triangular band matrix $U(a_0,a_1,a_2;b_0,b_1,b_2)$ over the sequence space c_0 , Proyecciones Journal of Mathematics, accepted.

Kongreler ve Bildiriler

1. Durna, N. and Kılıç, R., Subdivision of the Spectra for the Upper Triangular Matrix $U\left(a_0,a_1,a_2;b_0,b_1,b_2\right)$ over the Sequence Space c_0, International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Harran University, 11-13 Mayıs 2017 (Özet).
2. Durna, N. and Kılıç, R., On the Spectrum and Fine Spectrum of the Upper Triangular Matrix $U\left(a_0,a_1,a_2;b_0,b_1,b_2\right)$ over the Sequence Space c_0, International Conference on Mathematics and Mathematics Education, Harran University, 11-13 Mayıs 2017 (Özet).