

CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

POPÜLASYON MODELLERİNİN DİNAMIĞI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Özgür DEMİR
(20169237004)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğretim Üyesi Figen KANGALGİL

SİVAS
MAYIS 2019

Özgür DEMİR'in hazırladığı “**POPÜLASYON MODELLERİNİN DİNAMIĞI ÜZERİNE**” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : Dr. Öğretim Üyesi Figen KANGALGİL

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyesi : Doç. Dr. Nilüfer TOPSAKAL

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyesi : Dr. Öğretim Üyesi Gülten TORUN

Kastamonu Üniversitesi

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. İsmail ÇELİK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu'nda belirtilen kurallara uygun olarak yazılmıştır.



Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (CUBAP) komisyonu tarafından **F-574** Nolu Proje kapsamında desteklenmiştir.



Bütün hakları saklıdır.
Kaynak göstermek koşuluyla alıntı ve gönderme yapılabilir.

©Özgür DEMİR,2019

ETİK

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı;

Beyan ederim.

Özgür DEMİR

ÖZET

POPÜLASYON MODELLERİNİN DİNAMİĞİ ÜZERİNE

Özgür DEMİR

Yüksek Lisan Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışmanı: Dr. Öğretim Üyesi Figen KANGALGİL

2019, 30+xii sayfa

Bu tez çalışmasında, Allee etkili ayrık zamanlı bir av-avcı modeli ele alınmıştır. Sunulan modelin denge noktalarının varlığı ispatlanmış ve bu denge noktalarının topolojik sınıflandırılması yapılmıştır. Ayrıca, popülasyon modelinin kararlılık analizi incelenmiştir. Maple ve Matlab paket programlarından faydalanarak modelin nümerik simülasyonlarına yer verilmiş, elde edilen teorik sonuçların doğruluğu desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Allee Etkisi, kararlılık analizi, denge noktası, av-avcı modeli.

ABSTRACT
ON THE DYNAMICS OF POPULATION MODELS

Özgür DEMİR

Master Thesis, Institute of Sciences Department of Mathematics

Supervisor: Asist. Prof. Figen KANGALGİL

2019, 30+xii sayfa

In this thesis study, a discrete-time prey-predator model with Allee effect is considered. The existence of the equilibrium points of the presented model has been shown and topological classification of these equilibrium points has been given. Also, the stability analysis of the population model has been investigated. Numerical simulations of the model are provided by using the Maple and Matlab programs and the accuracy of the theoretical results obtained has been supported.

Key Words: Allee effect, stability analysis, equilibrium point, prey-predator model.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca her yanına gittiğimde beni güler yüzü ile karşılayan; bilgisi ve donanımı ile bana her zaman yardımcı olan değerli danışman hocam Dr. Öğretim Üyesi Figen KANGALGİL'e, yüksek lisans öğrenimim süresince benden desteğini hiçbir zaman esirgemeyen kuzenim Öğretim Görevlisi Sevtap YILDIZ'a ve bu süreçte çalışmalarımın en büyük destekçisi olan yol arkadaşlarım sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET	v
ABSTRACT	vi
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER	viii
SİMGELER DİZİNİ	ix
TABLolar DİZİNİ	x
ŞEKİLLER DİZİNİ	xi
1.BÖLÜM	1
1.GİRİŞ.....	1
1.1 Lotka-Volterra Modeli.....	1
1.2. Allee Etkisi.....	4
1.3. Literatürde Allee Etkisiyle İlgili Yapılan Çalışmalar.....	4
2.BÖLÜM	7
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	7
2.1 Temel Kavramlar.....	7
3.BÖLÜM	12
3.AYRIK ZAMANLI ALLEE ETKİLİ AV-AVCI MODELİNİN KARARLILIK ANALİZİ VE DENGE NOKTALARININ TOPOLOJİK SINIFLANDIRILMASI.....	12
3.1 Ayrik Zamanlı Allee Etkili Av-Avcı Modeli.....	12
3.2 Euler Metodu ile Ayırıklaştırma.....	13
3.3 Pozitif Denge Noktalarının Varlığı.....	14
3.4 Denge Noktalarının Karakteristik Polinomu.....	15
3.5 E_1 Denge Noktasının Topolojik Sınıflandırılması.....	16
3.6 E_2 Denge Noktasının Topolojik Sınıflandırılması.....	17
3.7 E_3 Denge Noktasının Topolojik Sınıflandırılması.....	18
3.8 E_4 Her İki Türün Bir Arada Olduğu Pozitif Denge Noktasının Topolojik Sınıflandırılması.....	21
4.BÖLÜM	24
4.NÜMERİK ÇALIŞMALAR.....	24
ÖZGEÇMİŞ	28
KAYNAKLAR	29

SİMGELER VE KISALTMALAR

N_t	: t zamanındaki popülasyon yoğunluğu
$\alpha(N_t)$: t zamanında Allee fonksiyonu
$\alpha'(N_t)$: t zamanında Allee fonksiyonunun türevi
$\lim_{N_t \rightarrow \infty} \alpha(N_t)$: t zamanında Allee fonksiyonunun limiti
(J)	: Jakobiyen matris
$\det(J)$: J matrisinin determinanı
$\text{iz}J$: J matrisinin izi
(\bar{x}, \bar{y})	: Sistemin denge noktası
$F(\lambda)$: (\bar{x}, \bar{y}) denge noktasının karakteristik polinomu
λ	: Karakteristik polinomun kökü
$f'(x)$: x değişkenine bağlı f fonksiyonunun türevi
a_{11}	: Popülasyonun av türünü taşıma kapasitesi
a_{12}	: Katkıda bulunabilecek her bir popülasyonun verimliliği
a_{22}	: Popülasyonun av türünü taşıma kapasitesi
b_1	: Avın büyüme oranı
b_2	: Avcının büyüme oranı
m	: Allee sabiti

TABLolar DİZİNİ

Tablo 1.1	Yalnızca Ava Bağlı İşlevsel Tepki Fonksiyon Türleri.....	2
Tablo 1.2	Av ve Avcıya Bağlı İşlevsel Tepki Fonksiyon Türleri.....	3



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Bir Denge Noktasının Kararlılığı.....	9
Şekil 2.2 Bir Denge Noktasının Kararsızlığı.....	10
Şekil 2.3 Bir Denge Noktasının Asimptotik Kararlılığı.....	10
Şekil 4.1 $E_4 = (2.93, 1.8)$ denge noktasına ait av-avcı popülasyonu yoğunluk-zaman grafiği.....	24
Şekil 4.2 $E_4 = (1.852941176, 0.9736842105)$ denge noktasına ait av-avcı popülasyonu yoğunluk-zaman grafiği.....	25
Şekil 4.3 $E_4 = (1.294117647, 0.4736842105)$ denge noktasına ait av-avcı popülasyonu yoğunluk-zaman grafiği.....	26
Şekil 4.4 $E_4 = (1.964705882, 1.073684211)$ denge noktasına ait av-avcı popülasyonu yoğunluk-zaman grafiği.....	27

BÖLÜM 1

1.GİRİŞ

1.1 Lotka-Volterra Modeli

Son yıllarda doğa olaylarını anlayabilmek ve bu olayları açıklayabilmek için pek çok disiplinler arası çalışmalar yapılmaktadır. Bu çalışmalar matematiksel biyoloji ve biyofizik gibi yeni alanların gelişmesine sebep olmuştur. Öncelikle doğada gerçekleşen olayları anlayabilmek için bu olayları yansıtan bir matematiksel modele ihtiyaç vardır. Bu modelleri oluştururken fark denklemleri, adi diferansiyel denklemler ve kısmi türevli diferansiyel denklemler kullanılır. Ayrık zamanlı olayları modellerken fark denklemleri kullanılırken, sürekli olaylar modellenirken ise adi diferansiyel denklemler veya kısmi türevli diferansiyel denklemler kullanılır.

Kurulan model önce basit kabuller altında yapılır ve sonrasında modeli daha gerçekçi kılabilmek için yeni parametreler ve fonksiyonlar eklenebilir. Oluşturulan bu modellere matematiksel teknikler uygulanarak modelin davranışı üzerine incelemeler yapılır. Çalışmanın daha anlamlı olabilmesi için, yapılan analizlerin sonuçları yorumlanır ve gerçek verilerle karşılaştırılması yapılır.

Doğada yer alan türler birbirleriyle etkileşim halinde bulunurlar. Etkileşim halinde bulunan bu türlerin popülasyon yoğunluğu, diğer canlı türlerinin popülasyon yoğunluğunu da etkiler. Bu yüzden popülasyon modelleri son zamanlarda oldukça dikkat çeken konular arasındadır.

Av-avcı modelleri, iki türün etkileşimini içeren en yaygın popülasyon modelleri arasında yer alır. Avcı, av olan türü yiyerek beslenir. Av türü de başka yiyecekler ile beslenir. Tavşan-tilki ve balık-köpek balığı av-avcı türüne örnek olarak verilebilir.

İlk av-avcı modeli 1920 yılında İtalyan matematikçi Vito Volterra tarafından geliştirilmiştir [1]. Bu model iki popülasyon türünün ilişkisini ifade eden basit bir modeldir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy = x(a - by) & (1) \\ \frac{dy}{dt} = -cy + zxy = y(-c + zx) & (2) \end{cases}$$

Burada $x(t)$ ve $y(t)$ sırasıyla av ve avcı popülasyonlarının t zamanındaki yoğunluklarını gösterir. a , b , c ve z parametreleri ise pozitif sayılardır.

Modelde avcı popülasyonunun olmadığında av popülasyonu (1) denkleminde

$$\frac{dx}{dt} = ax(t), \quad a > 0$$

şeklini alır. $a > 0$ olduğundan av popülasyonu mevcut popülasyonun belli bir oranında büyüyecektir. Dolayısıyla a , avın büyüme oranını gösterecektir.

Av popülasyonunun yokluğunda, avcı popülasyonu (2) denkleminde

$$\frac{dy}{dt} = -by(t), \quad b > 0$$

formundadır. Burada avcı popülasyonu $b > 0$ oranında azalacaktır. Bu da modelde avın olmaması durumunda avcı popülasyonunun azaldığını gösterir. Bu durum, modelde avcının sadece avı tükettiği, başka yan avlarla beslenmediği varsayımından kaynaklanır.

Avcıların ve avların her ikisinin mevcut olduğu durumda, avcı popülasyonunu gösteren (2) denkleminde yer alan z parametresi; av ile avcının karşılaşmasının, avcı popülasyonuna olan pozitif etkisini gösterir.

Modelde avcının sadece avı tükettiği varsayıldığı için z parametresi avcı popülasyonunun büyüme oranı olarak düşünülebilir. Bu durumda,

zx : avcı başına düşen av tüketim miktarı

zxy : avcı türünün tükettiği av miktarını

gösterir.

Lotka-Volterra modelinde, av ve avcının karşılaşması sonucunda av popülasyonu azalmakta, av ile beslenen avcı popülasyonunda da artış gözlenmektedir. Modelde bu etkiyi (1) ve (2) denklemlerinde bulunan b ve z parametreleri yaratır.

Daha sonraki süreçlerde Lotka-Volterra modeli farklı şekillerde modifiye edilmiştir. Literatürde, av-avcı modellerinde avlanma miktarı işlevsel tepki fonksiyonu (functional response) olarak isimlendirilir. Bu fonksiyon sadece ava bağlı olması, hem av hem de avcıya bağlı olması ve av-avcı oranına bağlı olması şeklinde düzenlenmiştir.

i) İşlevsel tepki fonksiyonunun sadece ava bağlı olması durumu, avlanmanın sadece ava bağlı olarak değişim sergilemesi anlamına gelir.

İşlevsel tepki fonksiyon türleri **Tablo 1.1** aşağıdaki gibi verilebilir.

Tablo 1.1 Yalnızca Ava Bağlı İşlevsel Tepki Fonksiyon Türleri

Fonksiyon Türü	İşlevsel Tepki Fonksiyonu
Holling 1 Türü	$\frac{ax}{b+x}$
Holling 2 Türü	$\frac{ax}{1+ahx}$
Holling 3 Türü	$\frac{ax^2}{1+ahx^2}$
θ - Sigmoid	$\frac{ax^\theta}{1+ahx^\theta}$

Tablodaki fonksiyonlarda yer alan;

a parametresi: avcının ava saldırı oranını

h parametresi: avcının avı yakalaması için geçen zamanı

göstermektedir.

ii) İşlevsel tepki fonksiyonunun hem av hem avcı popülasyonuna bağlı olması, (i) durumuna göre daha gerçekçi bir yaklaşım olabilir. İşlevsel tepki fonksiyonunun hem av hem avcıya bağlı olma durumuna ait fonksiyon türlerinden bazıları Tablo 1.2 de verilmiştir.

Tablo 1.2 Av ve Avcıya Bağlı İşlevsel Tepki Fonksiyon Türleri

Fonksiyon Türü	İşlevsel Tepki Fonksiyonu
Hassell-Varley	$axy - m$
De Angelos ve diğerleri	$\frac{ax}{b + x + cy}$

iii) İşlevsel tepki fonksiyonunun av ve avcı oranına bağlı olması durumunda, Arditi ve Ginzburg (1989) [2] işlevsel tepki fonksiyonunun $g\left(\frac{x}{y}\right)$, Getz (1984) ise $\frac{ax}{cy + x}$ şeklinde olması gerektiğini belirtmişleridir [2,4].

Akçakaya ve arkadaşları (1995) [4], işlevsel tepki fonksiyonunun sadece ava veya av-avcı oranına bağlı olması durumlarının gerçekçi olmadığını belirtmişlerdir. Fakat işlevsel tepki fonksiyonunu av-avcı oranı cinsinden tanımlamanın, doğal sistemin davranışını daha iyi yansıttığından, daha çok tercih edildiğini belirtmişlerdir.

1.2. Allee Etkisi

Bir popülasyonun büyüklüğünü etkileyen pek çok faktör vardır. Örneğin; göç, ölüm etkisi, gecikme etkisi, biyolojik bir etki olan Allee etkisi vs. dir. Modele bu tip etkileri eklemek modeli daha gerçekçi bir hale getirir.

Allee etkisi 1931 yılında ilk kez Warder Clyde Allee tarafından tanıtıldı. Bu olay biyolojide nüfus yoğunluğu ve birim kare başına düşen büyüme oranı arasındaki bağıntı ile ifade edilir. Eş bulmadaki zorluk, çiftleşme depresyonu, yiyecek sorunu ve avcıdan savunma gibi faktörlerin hepsi Allee etkisi olarak kabul edilir. Allee etkisi, düşük nüfus yoğunluğunda popülasyonlar üzerinde daha etkilidir. Bu etki türlerin üreme potansiyelinin artmasıyla zamanla kaybolur. Biyolojik bir etki olan Allee etkisi matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilir [3,5-13]. N_t , t anındaki popülasyon yoğunluğunu, α ise Allee fonksiyonu olmak üzere;

1. $N_t = 0$ ise $\alpha(N_t) = 0$. Yani, Allee etkisinin var olabilmesi için popülasyon olmalıdır.
2. $N_t \in (0, \infty)$ için $\alpha'(N_t) > 0$ ve $\lim_{N_t \rightarrow \infty} \alpha(N_t) = 1$. Biyolojide bu ifadeler, popülasyon yoğunluğu arttıkça Allee etkisi azalır ve yüksek yoğunluktaki popülasyonlarda Allee etkisi kaybolur anlamına gelir.

1.3. Literatürde Allee Etkisiyle İlgili Yapılan Çalışmalar

Son zamanlarda Allee etkisini içeren pek çok model literatürde yer almaktadır. Bu çalışmalardan bazıları aşağıda belirtilmiştir.

2015 yılında Feng ve Kang [14]

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1-u) - \frac{muv}{a+u} \\ \frac{dv}{dt} = sv \left(1 - \frac{hv}{a+u} \right) \end{cases} \quad (1.3.1)$$

modelini Allee etkisi altında ele almıştır. Bu model;

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u(1-u)(u-A) - \frac{muv}{a+u} \\ \frac{dv}{dt} = sv \left(\frac{v}{v+b} - \frac{hv}{a+u} \right) \end{cases} \quad (1.3.2)$$

şeklinde dir. Bu modelin Hopf çatallanma analizini yapmıştır. Burada $(u-A)$ ve $\left(\frac{v}{v+b} \right)$ Allee etkisini ifade eder. A Allee eşiği ve $b > 0$ Allee sabitidir.

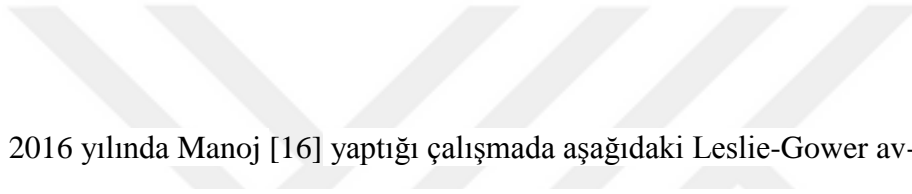
2016 yılında Ming [15] aşağıdaki a modeli Allee etkili ve Allee etkisiz olarak ele alıp bu modelin kararlılığını incelemiştir.

$$\begin{cases} x_{n+1} = rx_n(1-x_n) - bx_n y_n \\ y_{n+1} = dx_n y_n \end{cases} \quad (1.3.3)$$

Bu modelde Allee etkisini av popülasyon modeline ekleyerek

$$\begin{cases} x_{n+1} = rx_n(1-x_n) \frac{x_n}{\varepsilon + x_n} - bx_n y_n \\ y_{n+1} = dx_n y_n \end{cases} \quad (1.3.4)$$

modelinin lokal asimtotik kararlılığını incelemiştir. Burada $\frac{x_n}{\varepsilon + x_n}$ Allee fonksiyonunu gösterir. $\varepsilon > 0$ ise Allee sabitini ifade eder.



2016 yılında Manoj [16] yaptığı çalışmada aşağıdaki Leslie-Gower av-avcı modelini

$$\begin{cases} \frac{dN}{dT} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \frac{\alpha NP}{a_1 + N} \\ \frac{dP}{dT} = sP \left(1 - \frac{bP}{a_2 + N}\right) \end{cases} \quad (1.3.5)$$

çift Allee etkisiyle ele alarak kararlılık ve çatallanma analizi yapmıştır.

Çift Allee etkisi altında bu model;

$$\begin{cases} \frac{dN}{dT} = \frac{rN}{N+n} \left(1 - \frac{N}{K}\right) (N-m) - \frac{\alpha NP}{a_1 + N} \\ \frac{dP}{dT} = sP \left(1 - \frac{bP}{a_2 + N}\right) \end{cases} \quad (1.3.6)$$

şeklindedir. Burada $\frac{N-m}{N+n}$ çift etkili Allee fonksiyonunu ifade eder. Ayrıca $m > 0$ Allee eşiğidir (threshold). $n > 0$ ise yardımcı parametredir.

2016 yılında Cheng [17]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(x - \beta)(1 - x) - \frac{\alpha xy}{x + y} \\ \frac{dy}{dt} = \frac{\alpha_1 xy}{x + y} - \delta y \end{cases} \quad (1.3.7)$$

Allee etkili sürekli modeli ayrık zamanlı hale dönüştürerek;

$$\begin{cases} x_t = x_t + \mu \left[x_t (x_t - \beta)(1 - x_t) - \frac{\alpha x_t y_t}{x_t + y_t} \right] \\ y_t = y_t + \mu \left[\frac{\alpha_1 x_t y_t}{x_t + y_t} - \delta y_t \right] \end{cases} \quad (1.3.8)$$

modelinin kararlılık ve çatallanma analizini incelemiştir. Burada $\beta > 0$ Allee eşiğidir.

2016 yılında Liu [18] hem av hem avcı üzerine düşünerek

$$\begin{cases} x'(t) = x \left(\frac{bx}{a+x} - d_1 - mx \right) - \frac{rxy}{1+k_1x+k_2y} \\ y'(t) = \frac{crxy}{1+k_1x+k_2y} \left(\frac{y}{h+y} \right) - d_2 y \end{cases} \quad (1.3.9)$$

modelinin kararlılığını çalışmıştır. Burada av üzerindeki Allee fonksiyonu $\frac{x}{a+x}$ ve avcı üzerindeki Allee fonksiyonu da $\frac{y}{h+y}$ fonksiyonudur. $a > 0$ ve $h > 0$ ise Allee sabitleridir.

BÖLÜM 2

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1. Bir $y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için Δ fark operatörü

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanır ve Δy fonksiyonuna, y nin birinci basamaktan farkı denir. Burada $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ doğal sayılar ve \mathbb{R} reel sayılar cümlesidir [23].

Buna göre y nin ikinci basamaktan farkı

$$\begin{aligned} \Delta^2 y(n) &= \Delta(\Delta y(n)) \\ &= y(n+2) - 2y(n+1) + y(n) \end{aligned}$$

olarak gösterilir ve genel olarak y nin k yıncı basamaktan farkı

$$\Delta^k y(n) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} y(n+k-j)$$

şeklinde hesaplanır [23].

Tanım 2.2. Bir $S \subseteq \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ sayı cümlesi üzerinde tanımlı olan bir x fonksiyonunun değerlerini ve onun $\Delta y, \Delta^2 y, \dots$ gibi farklarını içeren bir denkleme S cümlesi üzerinde tanımlı olan bir fark denklemini denir [23].

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_k + 2\Delta y_k + y_k &= 0 \\ y_{k+2} + 2y_{k+1} + y_k &= 0 \\ y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri fark denklemlerine örnek olarak gösterilebilir. Genel olarak fark denklemleri

$$F(k, y_k, y_{k+1}, \dots, y_{k+n}) = 0$$

şeklinde gösterilir [3,6,7].

Tanım 2.3 : Bir fark denklemindeki bağımlı değişkenlerden en büyük indisli ile en küçük indisli olanlarının indisleri arasındaki farka; verilen fark denkleminin mertebesi denir [3,6,7]. Örneğin;

$$y_{k+2} + 4y_{k+1} + 4y_k = 0$$

fark denkleminin mertebesi

$$(k+2) - (k) = 2$$

şeklindedir.

Tanım 2.4 : Verilen bir fark denkleminde bağımlı değişken 1. dereceden ise denkleme “*lineer fark denklemi*” denir. Lineer fark denklemleri genel olarak,

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \dots + a_0y_k = f(k)$$

şeklinde gösterilir [3,6,7].

Eğer $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ katsayıları sabit ise, fark denklemine “*sabit katsayılı lineer fark denklemi*”, bağımsız değişkene bağlı fonksiyonlar ise, “*değişken katsayılı lineer fark denklemi*” denir. Ayrıca $f(k) = 0$ ise denkleme “*lineer homojen fark denklemi*” denir. Aksi durumlarda da homojen olmayan fark denklemi adı verilir [3,6,7].

n . mertebeden lineer homojen fark denklemi olan

$$y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + \dots + a_0y_k = 0$$

denkleminin çözümü,

$$y_k = r^k$$

şeklinde aranır. $y_k = r^k, y_{k+1} = r^{k+1}, \dots, y_{k+n} = r^{k+n}$ ifadeleri yukarıdaki fark denkleminde yerine yazılırsa

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \dots + a_1r + a_0 = 0$$

Bulur ki bu denkleme yukarıdaki homojen fark denkleminin “*karakteristik denklemi*” denir. Eğer karakteristik denklem köklerine ayrılabilirse;

$$(r - r_1)(r - r_2) \dots (r - r_n) = 0$$

biçiminde yazılabilir. O halde r_1, r_2, \dots, r_n karakteristik denklemin kökleri olur. Bu durumda

$$y_1 = r_1^k, y_2 = r_2^k, \dots, y_n = r_n^k$$

homojen fark denkleminin çözümleridir [3,6,7].

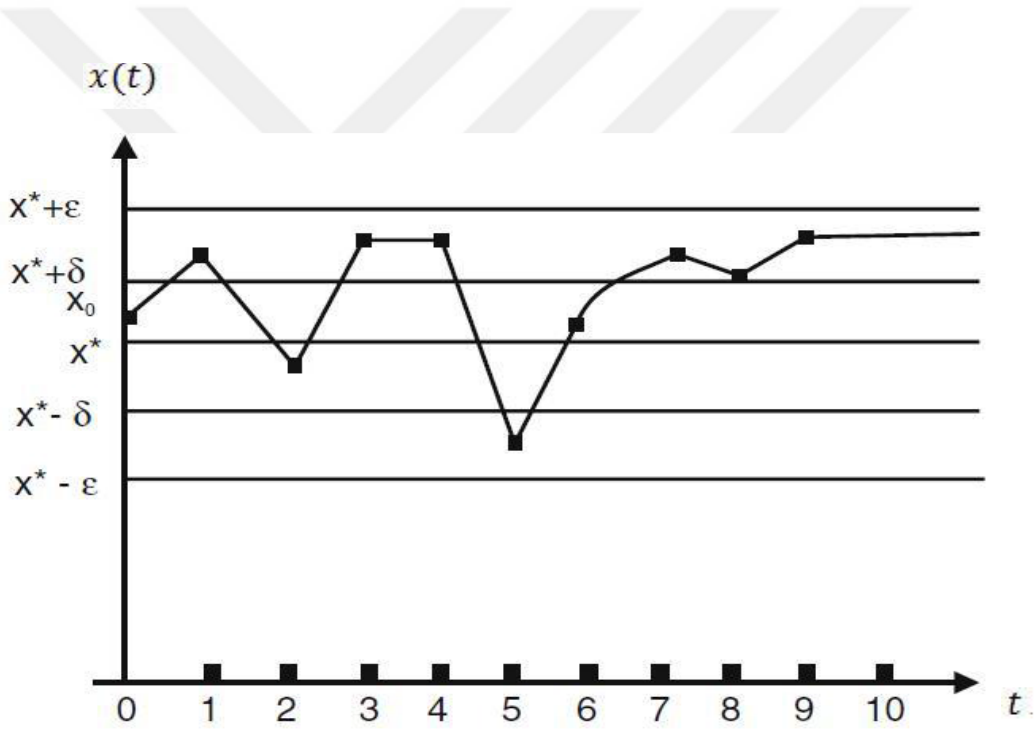
Tanım 2.5: Birinci mertebeden $x_{t+1} = f(x_t)$ fark denkleminde $x^- = f(x^-)$ eşitliğini sağlayan x^- sabit çözümüne verilen fark denkleminin **denge noktası** denir ve $X_{t+1} = f(X_t)$ fark denklem sisteminde $\bar{X} = f(\bar{X})$ eşitliğini sağlayan \bar{X} vektörüne verilen fark denklem sisteminin **denge noktası** adı verilir [3,7,19-21].

Tanım 2.6: Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $|x_0 - x^*| < \delta$ koşulunu sağlayan bütün x_t değerleri için $|x_t - x^*| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa x^* denge noktasına **kararlı denge noktası** denir, aksi takdirde bu denge noktası **kararsızdır** [3,7,19-21].

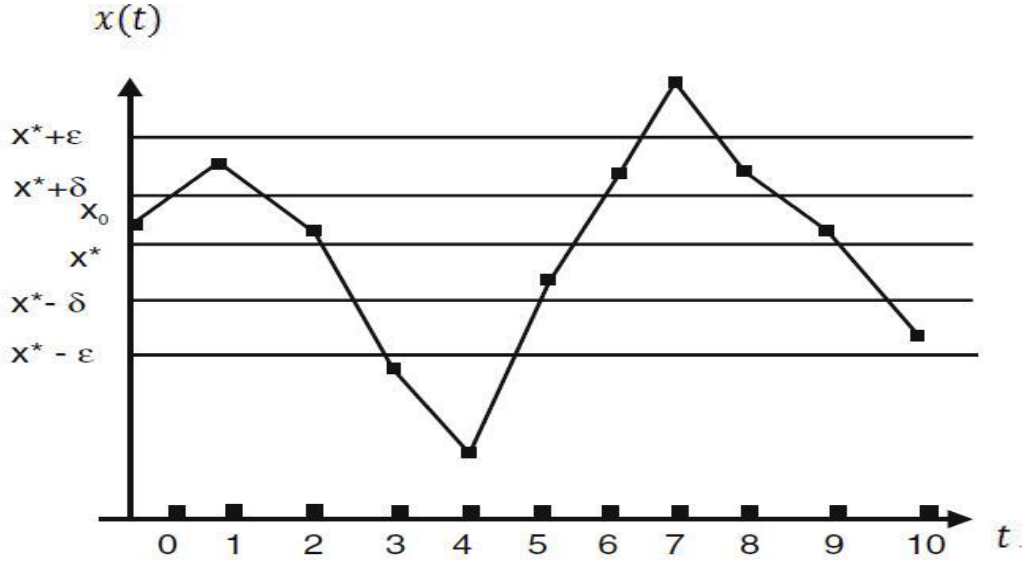
Bu ifadeye denk olarak; x^* denge noktasının kararlı olması için gerek ve yeter şart, $\forall \varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $|x_0 - x^*| < \delta$ iken $\forall t > 0$ için $|x_t - x^*| = |f^t(x_0) - x^*| < \varepsilon$ sağlanmasıdır [3,7,19-21].

Tanım 2.7 öyle bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki, her $|x_0 - x^*| < \delta$ için $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = x^*$ koşulu sağlanıyorsa x^* denge noktasına **çekici** adı verilir [3,7,19-21].

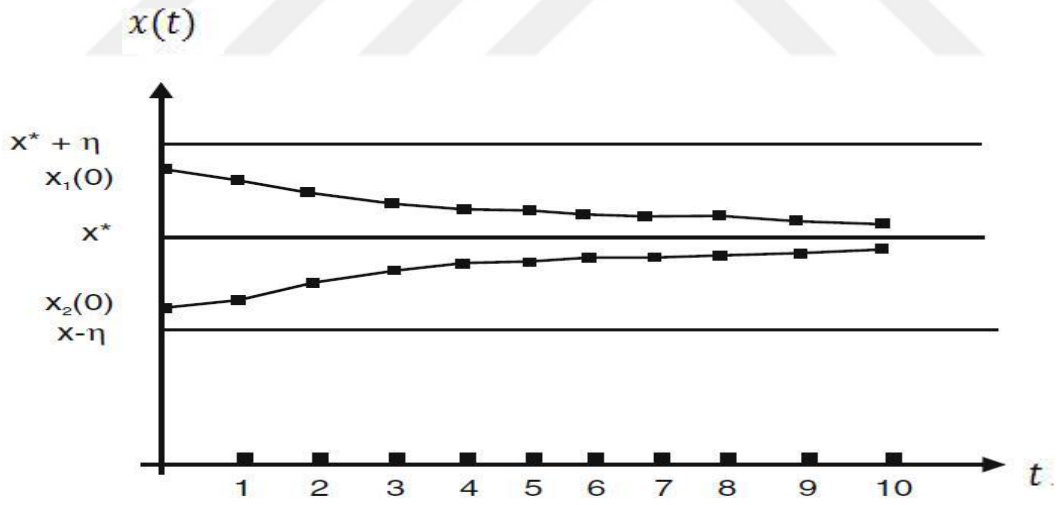
Tanım 2.8 : Eğer bir denge noktası hem çekici hem de kararlı ise o denge noktasına **lokal kararlı denge noktası** adı verilir [3,7,19-21].



Şekil 2.1. x_0 başlangıç noktası, x^* denge noktasının δ komşuluğunda iken $x(t)$ çözümleri, $\forall t > 0$ için denge noktasının ε komşuluğunda kalmaktadır. Dolayısıyla x^* denge noktası kararlıdır.



Şekil 2.2. x_0 başlangıç noktası, x^* denge noktasının δ komşuluğunda iken $\forall t > 0$ için x^* denge noktasının ε komşuluğunda kalmayan $x(t)$ çözümleri mevcuttur. Dolayısıyla x^* denge noktası kararsızdır.



Şekil 2.3 x_0 başlangıç noktası, x^* denge noktasının δ komşuluğunda iken; zaman ilerledikçe yani $t \rightarrow \infty$ iken $x(t)$ çözümleri x^* denge noktasına yaklaşmaktadır. Dolayısıyla x^* denge noktası asimptotik kararlıdır.

Tanım 2.9 : $x_{t+1} = f(x_t)$ denkleminin bir denge noktası x^* ve x^* i içeren açık bir I aralığında f' sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer

$$|f'(x)| < 1 \quad (2.7)$$

ise x^* denge noktası **lokal asimptotik kararlıdır**,

$$|f'(x)| > 1 \quad (2.8)$$

ise x^* **kararsızdır** denir [3,7,19-21] .

Tanım 2.10: 2. mertebeden lineer olmayan bir dinamik sistemin bir denge noktasındaki karakteristik polinomu

$$F(\lambda) = \lambda^2 - B\lambda + C \quad B, C \in \mathbb{R}$$

olsun. λ_1 ve λ_2 yukarıdaki karakteristik polinomun kökleri olmak üzere dinamik sistemin denge noktası;

1. $|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| < 1$ ise **çukur** (sink) veya lokal asimptotik kararlı,
2. $|\lambda_1| > 1$ ve $|\lambda_2| > 1$ ise **kaynak** (source) veya lokal asimptotik kararsız,
3. $(|\lambda_1| < 1$ ve $|\lambda_2| > 1)$ veya $(|\lambda_1| > 1$ ve $|\lambda_2| < 1)$ ise **yayvan-geniş** (saddle)
4. $|\lambda_1| = 1$ veya $|\lambda_2| = 1$ ise **hiperbolik olmayan** (non-hyperbolic) denge noktasıdır [20-22].

Teorem 2.1: 2. mertebeden lineer olmayan bir dinamik sistemin bir denge noktasındaki karakteristik polinomu

$$F(\lambda) = \lambda^2 - B\lambda + C \quad B, C \in \mathbb{R} \quad (2.9)$$

olmak üzere eğer

$$F(1) > 0, F(-1) > 0 \text{ ve } C < 1$$

ise bu denge noktası kararlıdır [20-22]. Bu teorem gereğince (\bar{x}, \bar{y}) denge noktasının kararlı olabilmesi için (2.9) ifadesi ile verilen $F(\lambda)$ fonksiyonunun,

- 1) $F(1) > 0$
- 2) $F(-1) > 0$
- 3) $\det(\bar{J}) < 0$

koşullarını aynı anda sağlaması gerekir [20-22].

BÖLÜM 3

3. AYRIK ZAMANLI ALLEE ETKİLİ AV-AVCI MODELİNİN KARARLILIK ANALİZİ VE DENGE NOKTALARININ TOPOLOJİK SINIFLANDIRILMASI

Tez çalışmasının bu bölümünde, Lin.Q. [24] tarafından 2018 yılında çalışılan sürekli model olan (3.1) modelini, daha gerçekçi olması için biyolojik bir etki olan Allee etkisi altında ele alıp, oluşan Allee etkili (3.2) modelini, Euler metodu kullanılarak ayrıklaştırarak, (3.3) ayrık modelin denge noktalarının varlığı gösterilecek ve bulunan denge noktalarının topolojik sınıflandırılması yapılacaktır.

3.1 Ayrık Zamanlı Allee Etkili Av-Avcı Modeli

Bu bölümde;

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(b_1 - a_{11}x(t)) + a_{12}x(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t)(b_2 - a_{22}y(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

av-avcı modeli Allee etkisi altında ele alındı [24]. (3.1) denkleminde $x(t)$ ve $y(t)$, t zamanında sırasıyla av ve avcı popülasyonunu temsil eder. Model (3.1)' de

b_1 : Avın büyüme oranı

b_2 : Avcının büyüme oranı

a_{11} : Popülasyonun avı taşıma kapasitesi

a_{22} : Popülasyonun avcıyı taşıma kapasitesi

a_{12} : Katkıda bulunabilecek her bir popülasyonun verimliliği

anlamına gelir.

(3.1) av-avcı modeli Allee etkisi altında aşağıdaki forma dönüşür.

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)(b_1 - a_{11}x(t)) + a_{12}x(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = y(t) \left(b_2 \frac{y(t)}{m + y(t)} - a_{22}y(t) \right) \end{cases} \quad (3.2)$$

$\frac{y}{m + y}$ Allee fonksiyonu, $m > 0$ Allee sabitidir.

3.2 Euler Metodu ile Ayırıklaştırma

(Bu kısımda, (3.2) modelini Euler metodu kullanarak ayırıklaştıracağız [22].

$$x'(t_0) = x(t_0)(b_1 - a_{11}x(t_0)) + a_{12}x(t_0)y(t_0)$$

denkleminde

$$x'(t_0) \approx \frac{x(t_1) - x(t_0)}{t_1 - t_0}$$

olarak alınır ve

$$\delta = t_1 - t_0$$

ayırıklaştırma adımı olarak seçilirse,

$$x(t_1) = \delta \left(x(t_0)(b_1 - a_{11}x(t_0)) + a_{12}x(t_0)y(t_0) \right) + x(t_0)$$

yani,

$$x \rightarrow x + \delta(x(b_1 - a_{11}x) + a_{12}xy)$$

ifadesi elde edilir. Benzer şekilde

$$y(t_1) \approx \delta \left(y(t_0) \left(b_2 \frac{y(t_0)}{m + y(t_0)} - a_{22}y(t_0) \right) \right) + y(t_0)$$

denkleminde

$$y \rightarrow y + \delta \left(y \left(b_2 \frac{y}{m + y} - a_{22}y \right) \right)$$

elde edilir.

Böylece Euler metodu uygulanarak (3.1) modeline karşılık gelen fark denklem sistemi

$$x_{t+1} = x_t + \delta(x_t(b_1 - a_{11}x_t) + a_{12}x_t y_t) \tag{3.3}$$

$$y_{t+1} = y_t + \delta \left(y_t \left(b_2 \frac{y_t}{m + y_t} - a_{22}y_t \right) \right)$$

şeklinde elde edilir.

3.3 Pozitif Denge Noktalarının Varlığı

(3.3) sisteminin denge noktaları,

$$\begin{cases} \bar{x} = \bar{x} + \delta(\bar{x}(b_1 - a_{11}\bar{x}) + a_{12}\bar{x}\bar{y}) \\ \bar{y} = \bar{y} + \delta\left(\bar{y}\left(b_2 \frac{\bar{y}}{m + \bar{y}} - a_{22}\bar{y}\right)\right) \end{cases} \quad (3.4)$$

denklemlerini sağlayan \bar{x} ve \bar{y} değerleridir [19,22].

(3.4) sistemi Maple programı ile çözüldüğünde aşağıdaki denge noktaları elde edilir.

$$E_1 = (0, 0)$$

$$E_2 = \left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0 \right)$$

$$E_3 = \left(0, \frac{b_2 - a_{22}m}{a_{22}} \right)$$

$$E_4 = \left(\frac{b_1 a_{22} + a_{12} b_2 - a_{12} a_{22} m}{a_{11} a_{22}}, \frac{b_2 - a_{22} m}{a_{22}} \right)$$

Lemma 3.1 : (3.3) sisteminin

(i) Tüm parametre değerleri için $E_1 = (0, 0)$ ve $E_2 = \left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0 \right)$ şeklinde iki denge noktası her zaman vardır.

(ii) $b_2 > a_{22}m$ koşulu altında ek olarak $E_3 = \left(0, \frac{b_2 - a_{22}m}{a_{22}} \right)$ ve $E_4 = \left(\frac{b_1 a_{22} + a_{12} b_2 - a_{12} a_{22} m}{a_{11} a_{22}}, \frac{b_2 - a_{22} m}{a_{22}} \right)$ şeklinde iki tane daha pozitif denge noktası vardır.

(3.4) Denge Noktalarının Karakteristik Polinomu

Bu kısımda, (3.3) sisteminde (\bar{x}, \bar{y}) denge noktasına karşılık gelen karakteristik polinomlar elde edilecektir.

$$\begin{cases} f(x, y) = x + \delta(x(b_1 - a_{11}x) + a_{12}xy) \\ g(x, y) = y + \delta(y(b_2 \frac{y}{m+y} - a_{22}y)) \end{cases} \quad (3.5)$$

olmak üzere;

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} f_x(\bar{x}, \bar{y}) & f_y(\bar{x}, \bar{y}) \\ g_x(\bar{x}, \bar{y}) & g_y(\bar{x}, \bar{y}) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

matrisine (\bar{x}, \bar{y}) denge noktasının jakobiyen matrisi denir [22].

(\bar{x}, \bar{y}) denge noktasının karakteristik polinomu

$$F(\lambda) = \lambda^2 - izJ(\bar{x}, \bar{y})\lambda + \det J(\bar{x}, \bar{y}) \quad (3.7)$$

şeklinde elde edilir. Burada,

$$izJ(\bar{x}, \bar{y}) = f_x(\bar{x}, \bar{y}) + g_y(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\det J(\bar{x}, \bar{y}) = (f_x(\bar{x}, \bar{y})g_y(\bar{x}, \bar{y})) - (f_y(\bar{x}, \bar{y})g_x(\bar{x}, \bar{y}))$$

şeklindedir.

(3.5) sistemi kullanılarak (3.6) matrisi aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$J(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{pmatrix} 1 + \delta(b_1 - 2a_{11}\bar{x} + a_{12}\bar{y}) & \delta a_{12}\bar{x} \\ 0 & 1 + \delta \bar{y} \left(\frac{b_2(2m + \bar{y})}{(m + \bar{y})^2} - 2a_{22} \right) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

3.5 $E_1(0,0)$ Denge Noktasının Topolojik Sınıflandırması

(3.8) jakobiyan matrisinde $\bar{x} = 0, \bar{y} = 0$ yazılırsa $E_1(0,0)$ denge noktasına karşılık gelen jakobiyan matris

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 1 + \delta b_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

şeklinde bulunur. (3.9) matrisine karşılık gelen karakteristik polinom

$$F(\lambda) = \lambda^2 - izJ(0,0)\lambda + \det J(0,0) \quad (3.10)$$

şeklinde bulunur. Burada,

$$izJ(0,0) = 2 + \delta b_1$$

$$\det J(0,0) = 1 + \delta b_1$$

şeklinde bulunur.

Karakteristik polinomun kökleri karakteristik değerleri vereceğinden, karakteristik değerler

$$\lambda_1 = 1 + \delta b_1 \quad \lambda_2 = 1 \quad (3.11)$$

olarak bulunur. Tanım 2.10 (4) kullanılarak aşağıdaki Lemma elde edilebilir.

Lemma 3.2: Sistem (3.3) ün $E_1(0,0)$ denge noktası tüm parametre değerleri için hiperbolik olmayan denge noktasıdır.

İspat: Tanım 2.10 (4) 'den (3.11)'de karakteristik değerlerden biri

$$\lambda_2 = 1$$

olduğundan $E_1(0,0)$ denge noktası tüm parametre değerleri için hiperbolik olmayan denge noktasıdır.

3.6 $E_2 = \left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0 \right)$ Denge Noktasının Topolojik Sınıflandırılması

(3.3) sistemine karşılık gelen (3.8) ile gösterilen jakobiyan matriste $\bar{x} = \frac{b_1}{a_{11}}$, $\bar{y}=0$

ifadeleri yerine yazılırsa $E_2 = \left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0 \right)$ denge noktasına karşılık gelen jakobiyan matris

$$J\left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 - \delta b_1 & \frac{\delta a_{12} b_1}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

şeklinde elde edilir. (3.12) matrisine karşılık gelen karakteristik polinom

$$F(\lambda) = \lambda^2 - izJ\left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0\right)\lambda + \det J\left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0\right) \quad (3.13)$$

şeklinde dir. Burada,

$$izJ\left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0\right) = 2 - \delta b_1$$

$$\det J\left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0\right) = 1 - \delta b_1$$

şeklinde dir. (3.13) karakteristik polinomunun kökleri ise

$$\lambda_1 = 1 - \delta b_1 \text{ ve } \lambda_2 = 1 \quad (3.14)$$

şeklinde dir. Karakteristik köklerden biri $\lambda_2 = 1$ olduğundan $E_2 = \left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0 \right)$ denge noktası hiperbolik olmayan denge noktasıdır. Aşağıdaki Lemma Tanım 2.10 (4)' den kolayca görülebilir.

Lemma 3.3: Sistem (3.3) ün $E_2 = \left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0 \right)$ denge noktası tüm parametre değerleri için hiperbolik olmayan denge noktasıdır.

İspat: Tanım 2.10 (4) 'den E_2 denge noktasına karşılık gelen Jakobiyan matrisin karakteristik polinomunun köklerinden biri olan

$$\lambda_2 = 1$$

olduğundan $E_2 = \left(\frac{b_1}{a_{11}}, 0 \right)$ denge noktası tüm parametre değerleri için hiperbolik olmayan denge noktasıdır.

3.7 $E_3 = \left(0, \frac{b_2 - a_{22}m}{a_{22}}\right)$ Denge Noktasının Topolojik Sınıflandırılması

$b_2 > a_{22}m$ koşulu altında $E_3 = \left(0, \frac{b_2 - a_{22}m}{a_{22}}\right)$ denge noktasının ikinci bileşeni

$\bar{y} = \frac{b_2 - a_{22}m}{a_{22}}$ pozitiftir. Bu denge noktasına karşılık gelen jakobiyan matris aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$J\left(0, \frac{b_2 - a_{22}m}{a_{22}}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\delta(b_1 a_{22} + a_{12}(b_2 - a_{22}m))}{a_{22}} & 0 \\ 0 & 1 - \delta \frac{(b_2 - a_{22}m)^2}{b_2} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Burada

$$\delta_1 = \frac{2b_2}{(b_2 - a_{22}m)^2} \quad \text{ve} \quad \delta_2 = \frac{2a_{22}}{b_1 a_{22} + a_{12}(b_2 - a_{22}m)}$$

olarak seçilirse; (3.15) matrisi

$$J\left(0, \frac{b_2 - a_{22}m}{a_{22}}\right) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\delta}{\delta_2} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

şeklinde daha basit formda yazılabilir. Böylece,

$$i_z J\left(0, \frac{b_2 - a_{22}m}{a_{22}}\right) = 2 + \frac{2\delta}{\delta_2} - \frac{2\delta}{\delta_1}$$

$$\det J\left(0, \frac{b_2 - a_{22}m}{a_{22}}\right) = 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} + \frac{2\delta}{\delta_2} - \frac{4\delta^2}{\delta_1 \delta_2}$$

olmak üzere;

(3.16) jakobiyan matrise karşılık gelen karakteristik polinom

$$F(\lambda) = \lambda^2 - i_z J\left(0, \frac{b_2 - a_{22}m}{a_{22}}\right) \lambda + \det J\left(0, \frac{b_2 - a_{22}m}{a_{22}}\right) \quad (3.17)$$

şeklinde elde edilir. (3.17) karakteristik polinomun kökleri ise (3.18)'deki gibi bulunur.

$$1 + \frac{2\delta}{\delta_2} \text{ ve } 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} \quad (3.18)$$

Teorem 3.1 : Kabul edelim ki $b_2 > a_{22}m$ olsun. Sistem (3.3) ün $E_3 = \left(0, \frac{b_2 - a_{22}m}{a_{22}}\right)$

denge noktası

- (i) $\delta < \delta_1$ koşulu altında çukur (sink) veya lokal asimptotik kararlı ,
- (ii) $\delta > \delta_1$ koşulu altında kaynak (source) veya lokal asimptotik kararsız,
- (iii) $\delta < \delta_1$ veya $\delta > \delta_1$ koşulu altında yayvan-geniş (saddle),
- (iv) $\delta = \delta_1$ için hiperbolik olmayandır.

İspat:

i) Tanım 2.10 (1)'den

$\left|1 + \frac{2\delta}{\delta_2}\right| < 1$ ve $\left|1 - \frac{2\delta}{\delta_1}\right| < 1$ yazılabilir. Bu eşitsizliklerden aşağıdaki ifadeler elde edilir.

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2\delta}{\delta_2} < 1 \text{ veya } 1 + \frac{2\delta}{\delta_2} > -1 \quad \text{ve} \quad 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} < 1 \text{ veya } 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} > -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\delta}{\delta_2} < 0 \text{ veya } \frac{2\delta}{\delta_2} > -2 \quad \text{ve} \quad \frac{2\delta}{\delta_1} > 0 \text{ veya } \frac{2\delta}{\delta_1} < 2 \text{ olur.}$$

$\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ ve $\delta_2 > 0$ olduğundan bu iki durumdan çıkan sonuç $\delta + \delta_2 > 0$ ve $\delta < \delta_1$ şeklindedir. $\delta + \delta_2 > 0$ her zaman sağlandığından, $\delta < \delta_1$ olacaktır.

(ii) Tanım 2.10 (2)'den

$\left|1 + \frac{2\delta}{\delta_2}\right| > 1$ ve $\left|1 - \frac{2\delta}{\delta_1}\right| > 1$ yazılabilir. O halde

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2\delta}{\delta_2} > 1 \text{ veya } 1 + \frac{2\delta}{\delta_2} < -1 \quad \text{ve} \quad 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} > 1 \text{ veya } 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} < -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\delta}{\delta_2} > 0 \text{ veya } \frac{2\delta}{\delta_2} < -2 \quad \text{ve} \quad \frac{2\delta}{\delta_1} < 0 \text{ veya } \frac{2\delta}{\delta_1} > 2 \text{ olur.}$$

$\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ ve $\delta_2 > 0$ olduğundan bu iki durumdan çıkan sonuç $\delta > \delta_1$ olmalıdır.

(iii) Tanım 2.10 (3)'den

Bir önceki incelemelerden, benzer olarak, $E_3 = \left(0, \frac{b_2 - a_{22}m}{a_{22}}\right)$ denge noktası

$\delta < \delta_1$ veya $\delta > \delta_1$ koşulu altında yayvan geniş (saddle) dır.

(iv) Tanım 2.10 (4)'den

$\left|1 + \frac{2\delta}{\delta_2}\right| = 1$ veya $\left|1 - \frac{2\delta}{\delta_1}\right| = 1$ yazılabilir. Buradan aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{2\delta}{\delta_2} = 1 \text{ veya } 1 + \frac{2\delta}{\delta_2} = -1 \quad \text{veya} \quad 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} = 1 \text{ veya } 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\delta}{\delta_2} = 0 \text{ veya } \frac{2\delta}{\delta_2} = -2 \quad \text{veya} \quad \frac{2\delta}{\delta_1} = 0 \text{ veya } \frac{2\delta}{\delta_1} = 2$$

$\delta > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ olduğundan, $\delta = \delta_1$ için E_3 denge noktası hiperbolik olmayan denge noktasıdır.

3.8 E_4 Her İki Türün Bir Arada Olduğu Pozitif Denge Noktasının Topolojik Sınıflandırılması

$b_2 > a_{22}m$ koşulu altında $E_4 = \left(\frac{b_1 a_{22} + a_{12} b_2 - a_{12} a_{22} m}{a_{11} a_{22}}, \frac{b_2 - a_{22} m}{a_{22}} \right)$ denge noktası pozitif denge noktasıdır. Bu denge noktasına karşılık gelen jakobiyan matris

$$J \left(\frac{b_1 a_{22} + a_{12} b_2 - a_{12} a_{22} m}{a_{11} a_{22}}, \frac{b_2 - a_{22} m}{a_{22}} \right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\delta (b_1 a_{22} + a_{12} (b_2 - a_{22} m))}{a_{22}} & \delta a_{12} \left(\frac{b_1 a_{22} + a_{12} b_2 - a_{12} a_{22} m}{a_{11} a_{22}} \right) \\ 0 & 1 - \delta \frac{(b_2 - a_{22} m)^2}{b_2} \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

$$\delta_1 = \frac{2b_2}{(b_2 - a_{22}m)^2} \text{ ve } \delta_2 = \frac{2a_{22}}{b_1 a_{22} + a_{12} (b_2 - a_{22}m)} \text{ olarak seçilirse, yukarıdaki jakobiyan}$$

matris aşağıdaki gibi basit bir formda yazılabilir.

$$J \left(\frac{b_1 a_{22} + a_{12} b_2 - a_{12} a_{22} m}{a_{11} a_{22}}, \frac{b_2 - a_{22} m}{a_{22}} \right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2\delta}{\delta_2} & \frac{2a_{12}\delta}{a_{11}\delta_2} \\ 0 & 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

(3.19) jakobiyan matrise karşılık gelen karakteristik polinom

$$F(\lambda) = \lambda^2 - i_z J \left(\frac{b_1 a_{22} + a_{12} b_2 - a_{12} a_{22} m}{a_{11} a_{22}}, \frac{b_2 - a_{22} m}{a_{22}} \right) \lambda + \det J \left(\frac{b_1 a_{22} + a_{12} b_2 - a_{12} a_{22} m}{a_{11} a_{22}}, \frac{b_2 - a_{22} m}{a_{22}} \right) \quad (3.20)$$

dır. Burada

$$i_z J \left(\frac{b_1 a_{22} + a_{12} b_2 - a_{12} a_{22} m}{a_{11} a_{22}}, \frac{b_2 - a_{22} m}{a_{22}} \right) = 2 - \frac{2\delta}{\delta_1} - \frac{2\delta}{\delta_2}$$

$$\det J \left(\frac{b_1 a_{22} + a_{12} b_2 - a_{12} a_{22} m}{a_{11} a_{22}}, \frac{b_2 - a_{22} m}{a_{22}} \right) = 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} - \frac{2\delta}{\delta_2} + \frac{4\delta^2}{\delta_1 \delta_2}$$

şeklindedir.

Karakteristik değerleri ise

$$\lambda_1 = 1 - \frac{2\delta}{\delta_2}, \quad \lambda_2 = 1 - \frac{2\delta}{\delta_1}$$

şeklinde bulunur.

Teorem 3: Sistem (3.3) ün $E_4 = \left(\frac{b_1 a_{22} + a_{12} b_2 - a_{12} a_{22} m}{a_{11} a_{22}}, \frac{b_2 - a_{22} m}{a_{22}} \right)$ denge noktası

- (i) $\delta < \delta_1$ ve $\delta < \delta_2$ koşulu altında çukur (sink) veya lokal asimptotik kararlı ,
- (ii) $\delta_1 < \delta$ ve $\delta_2 < \delta$ koşulları altında kaynak (source) veya lokal asimptotik kararsız,
- (iii) $(\delta < \delta_2$ ve $\delta_1 < \delta)$ veya $(\delta < \delta_1$ ve $\delta_2 < \delta)$ koşulları altında yayvan-geniş (saddle),
- (iv) $\delta = \delta_1$ veya $\delta = \delta_2$ ise hiperbolik olmayandır (non-hyperbolic).

İspat:

(i) $J(E_4)$ jakobiyan matrisine karşılık gelen karakteristik değerler

$\lambda_1 = 1 - \frac{2\delta}{\delta_2}$, $\lambda_2 = 1 - \frac{2\delta}{\delta_1}$ şeklinde bulunur. Tanım 2.10 (1)'den

$$\left| 1 - \frac{2\delta}{\delta_2} \right| < 1 \quad \text{ve} \quad \left| 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} \right| < 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2\delta}{\delta_2} < 1 \quad \text{veya} \quad 1 - \frac{2\delta}{\delta_2} > -1 \quad \text{ve} \quad 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} < 1 \quad \text{veya} \quad 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} > -1$$

eşitsizliklerinden $\delta < \delta_2$ ve $\delta < \delta_1$ elde edilir.

(ii) Tanım 2.10 (2)'den

$$\left| 1 - \frac{2\delta}{\delta_2} \right| > 1 \quad \text{ve} \quad \left| 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} \right| > 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2\delta}{\delta_2} > 1 \quad \text{veya} \quad 1 - \frac{2\delta}{\delta_2} < -1 \quad \text{ve} \quad 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} > 1 \quad \text{veya} \quad 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} < -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\delta}{\delta_2} < 0 \quad \text{veya} \quad \delta_2 < \delta \quad \text{ve} \quad \frac{2\delta}{\delta_1} < 0 \quad \text{veya} \quad \delta_1 < \delta$$

$\delta > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ olduğu göz önünde bulundurulursa bu eşitsizliklerden

$\delta_2 < \delta$ ve $\delta_1 < \delta$ elde edilir.

(iii) Tanım 2.10 (3)'den

Bir önceki incelemelerden;

$[\delta < \delta_2 \text{ ve } \delta_1 < \delta]$ veya $[\delta_2 < \delta \text{ ve } \delta < \delta_1]$ elde edilir.

Bu ise $\delta_1 < \delta < \delta_2$ veya $\delta_2 < \delta < \delta_1$ demektir.

(iv) Tanım 2.10 (4)'den

$$\left|1 - \frac{2\delta}{\delta_2}\right| = 1 \text{ veya } \left|1 - \frac{2\delta}{\delta_1}\right| = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2\delta}{\delta_2} = 1 \text{ veya } 1 - \frac{2\delta}{\delta_2} = -1 \quad \text{veya} \quad 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} = 1 \text{ veya } 1 - \frac{2\delta}{\delta_1} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\delta}{\delta_2} = 0 \text{ veya } \frac{2\delta}{\delta_2} = 2 \quad \text{veya} \quad \frac{2\delta}{\delta_1} = 0 \text{ veya } \frac{2\delta}{\delta_1} = 2$$

$\delta > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ olduğundan $\delta = \delta_1$ veya $\delta = \delta_2$ elde edilir. Ohalde E_4 denge noktası hiperbolik olmayan bir denge noktasıdır.

BÖLÜM 4

4. NÜMERİK ÇALIŞMALAR

Bu bölümde, 3.bölümde yapılan teorik çalışmaların doğruluğunu göstermek için Maple 12 ve Matlab programları kullanılarak nümerik simülasyonlara yer verilmiştir.

Örnek 4.1: (3.3) Allee etkili av-avcı modelinde

$$a_{11} = 1.2$$

$$a_{12} = 1.4$$

$$a_{22} = 1$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 2$$

$$m = 0.2$$

alınarak (3.3) sisteminin her iki canlının bir arada bulunduğu pozitif denge noktası $E_4 = (2.93, 1.8)$ şeklindedir. Böylece

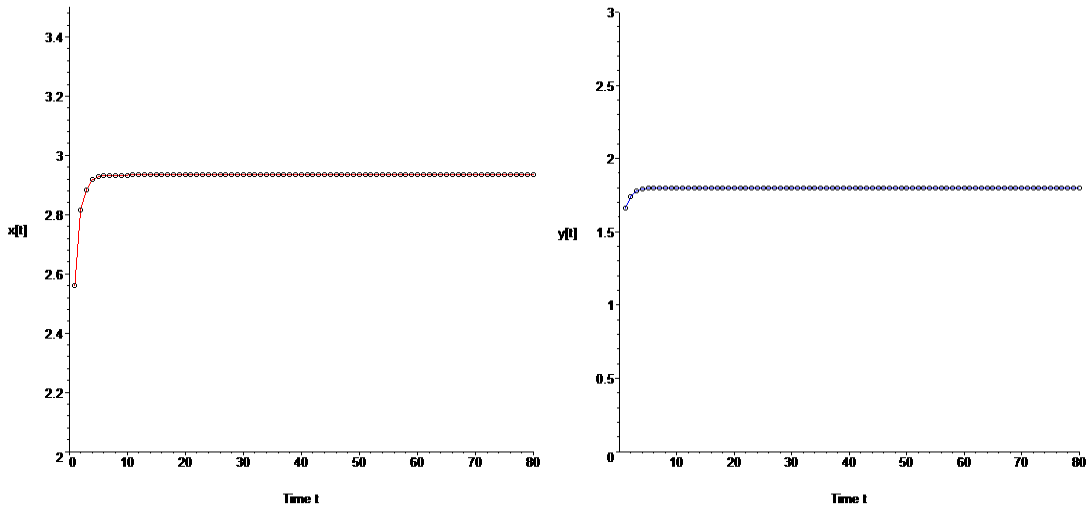
$$\delta_1 = 1.234567901$$

$$\delta_2 = 0.5681818182$$

olarak elde edilir. Burada Teorem 3 (i) den E_4 denge noktasının kararlı olması şartından, $\delta < \delta_1$ ve $\delta < \delta_2$ olacak şekilde $\delta = 0.4$ olarak seçilmiştir. Yapılan nümerik simülasyonlarda (x_0, y_0) başlangıç noktası $(2, 1.5)$ olarak seçilmiştir. Allee sabiti

$m = 0.2$ olarak alınmıştır.

Şekil (4.1) de x_t ve y_t av ve avcı popülasyonunun popülasyon yoğunluğunu gösteren grafik verilmiştir. Açık ki, $E_4 = (2.93, 1.8)$ denge noktası lokal asimtotik kararlıdır.



Şekil 4.1 (3.3) denklemi için $(x_0, y_0) = (2, 1.5)$ başlangıç koşulları altında yoğunluk-zaman grafiği

Aşağıda sırasıyla **Örnek 4.2**, **Örnek 4.3** ve **Örnek 4.4** de verilen grafiklerde;

$$a_{11} = 1.7$$

$$a_{12} = 1.9$$

$$a_{22} = 1.9$$

$$b_1 = 1.3$$

$$b_2 = 2.8$$

değerleri sabit bırakılarak, sadece m Allee sabitinin farklı değerleri altında kararlılık durumu incelenmiştir.

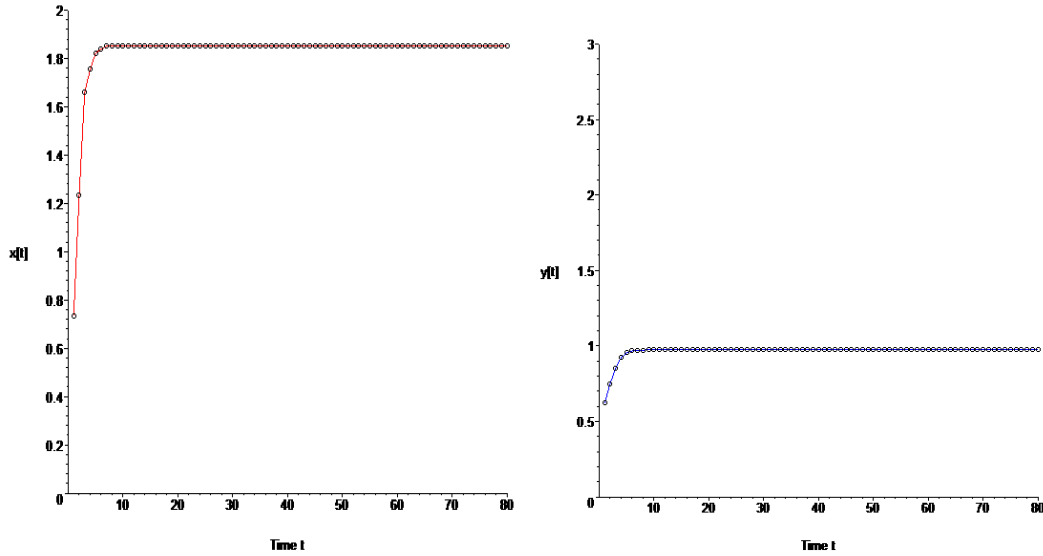
Örnek 4.2: Allee sabiti $m = 0.5$ için denge noktası $E_4 = (1.852941176, 0.9736842105)$ olarak bulunur. Böylece

$$\delta_1 = 1.636230825$$

$$\delta_2 = 0.6349206350$$

olarak elde edilir. Burada Teorem 3 (i) den E_4 denge noktasının kararlı olması şartından, $\delta < \delta_1$ ve $\delta < \delta_2$ olacak şekilde $\delta = 0.55$ olarak seçilmiştir. Yapılan nümerik simülasyonlarda (x_0, y_0) başlangıç noktası $(2, 0.5)$ olarak seçilmiştir. Allee sabiti $m = 0.5$ olarak alınmıştır.

Şekil (4.2) de x_t ve y_t av ve avcı popülasyonunun popülasyon yoğunluğunu gösteren grafik verilmiştir. Açık ki, $E_4 = (1.852941176, 0.9736842105)$ denge noktası lokal asimtotik kararlıdır.



Şekil 4.2 $m = 0.5$ için yoğunluk zaman grafiği

Örnek 4.3: Allee sabiti $m=1$ için denge noktası $E_4 = (1.294117647, 0.4736842105)$ olarak bulunur.

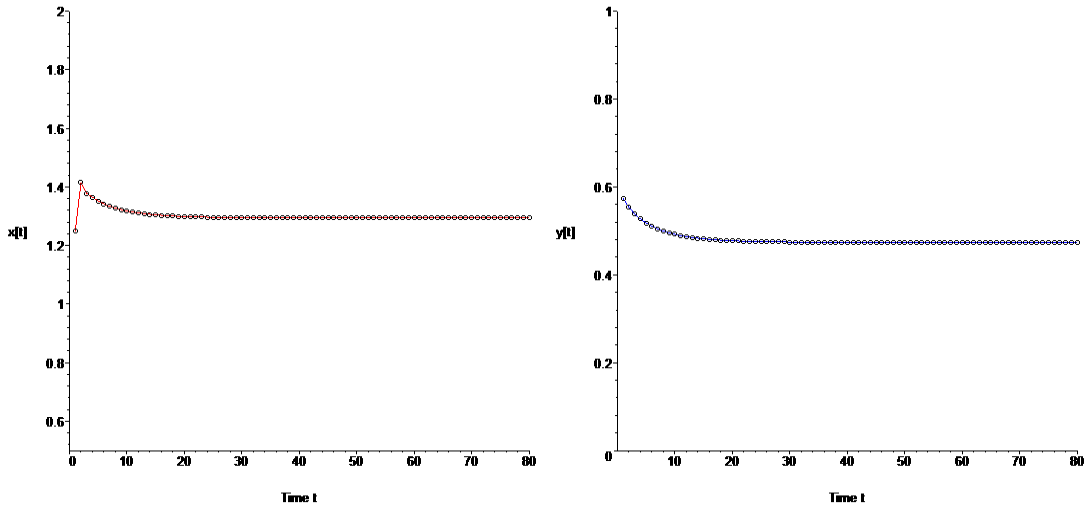
Böylece

$$\delta_1 = 6.913580246$$

$$\delta_2 = 0.9090909090$$

olarak elde edilir. Burada Teorem 3 (i) den E_4 denge noktasının kararlı olması şartından, $\delta < \delta_1$ ve $\delta < \delta_2$ olacak şekilde $\delta = 0.5$ olarak seçilmiştir. Yapılan nümerik simülasyonlarda (x_0, y_0) başlangıç noktası $(0.82, 0.6)$ olarak seçilmiştir. Allee sabiti $m = 1$ olarak alınmıştır.

Şekil (4.3) de x_t ve y_t av ve avcı popülasyonunun popülasyon yoğunluğunu gösteren grafik verilmiştir. Açıkta ki, $E_4 = (1.294117647, 0.4736842105)$ denge noktası lokal asimtotik kararlıdır.



Şekil (4.3) $m = 1$ için yoğunluk zaman grafiği

Örnek4.4: Allee sabiti olan m parametresi $m = 0.4$ olarak seçilerek, E_4 denge noktası $E_4 = (1.964705882, 1.073684211)$ olarak bulunur.

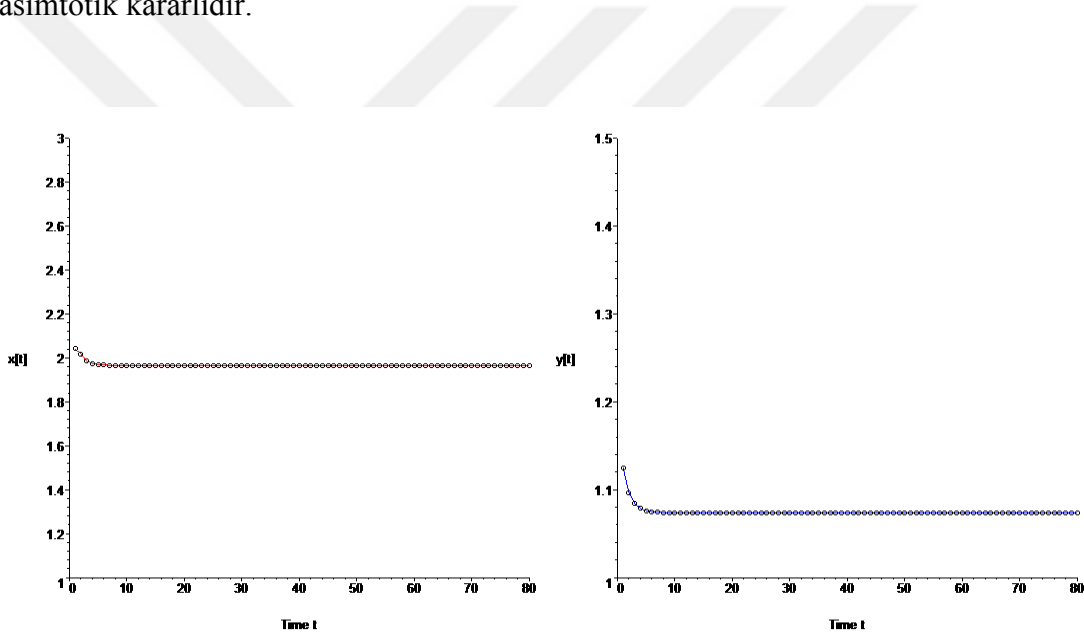
Böylece

$$\delta_1 = 1.345636294$$

$$\delta_2 = 0.5988023952$$

olarak elde edilir. Burada Teorem 3 (i) den E_4 denge noktasının kararlı olması şartından, $\delta < \delta_1$ ve $\delta < \delta_2$ olacak şekilde $\delta = 0.35$ olarak seçilmiştir. Yapılan nümerik simülasyonlarda (x_0, y_0) başlangıç noktası $(1.5, 1.2)$ olarak seçilmiştir.

Şekil (4.4) de x_t ve y_t av ve avcı popülasyonunun popülasyon yoğunluğunu gösteren grafik verilmiştir. Açıkta ki, $E_4 = (1.964705882, 1.073684211)$ denge noktası lokal asimtotik kararlıdır.



Şekil (4.4) $m = 0.4$ için yoğunluk zaman grafiği

KAYNAKLAR

- [1] **Volterra, V.**, (1978). *Variazioni et fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, **Scudo & Ziegler** (Trans.), R. Comitato Talassografico Memoria (original printing 1927).
- [2] **Arditi, R., Ginzburg, L.R.**, (1989). Coupling in Predator - Prey Dynamics: *Ratio Dependence*. *Journal of Theoretical Biology*, 139, 311-326
- [3] **Baçođlu M.** (2016) Bir Popölasyon Modelinin Kararlılık Analizi Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, *Sivas Cumhuriyet Üniversitesi*, 33s
- [4] **Akçakaya, H.R., Arditi, R. v.dğr.**, (1995). Ratio - Dependent Predation: *An Abstraction That Works*. *Ecology*, 76(3), 995-1004.
- [5] **Bilgi B.S.**, (2016) Fark Zamanlı Popölasyon Modellerinin Global Kararlılık Analizi, Yüksek Lisans Tezi, *Adıyaman Üniversitesi*.
- [6] **Allen L.J.S.**, (2007) An Introduction to Mathematical Biology, *Texas Tech. University*.
- [7] **Akgün, N.**, (2015) Allee Etkili Gecikmeli Fark Denkleminin Lokal Kararlılık Analizi Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, *Sivas Cumhuriyet Üniversitesi*.
- [8] **Kangalgil F., Ak Gümüş Ö.**, (2016) Allee Effect in a New Population Model and Stability Analysis , *Gen Math Notes*, 35 (1): 54-64.
- [9] **Zhou S., Liu Y., Wang G.**, (2005)"The Stability of Predator-Prey Systems Subject to the Allee Effects," *Theoretical Population Biology*, 67 23-31.
- [10] **Sen M., Banarjee M., Morozou A.**,(2012.) " Bifurcation Analysis of a Ratio-dependent Prey-predator Model with the Allee Effect", *Ecological Complexity*, 11,12-27.
- [11] **Ak Gümüş Ö., Kangalgil F.**, (2015) Allee Effect and Stability in a Discrete-Time Host-Parasitoid Model, *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*, 7: 1-6.
- [12] **Allee W. C.**, (1931) Animal Aggregations: A Study in General Sociology, *University of Chicago Press, Chicago*.
- [13] **Merdan H, Ak Gümüş Ö.**, (2012) Stability Analysis of a General Discrete-Time Population Model Involving Delay and Allee Effects, *Applied Mathematics and Computation*, 219, 1821-1832.
- [14] **Feng P., Kang Y.**, (2015) Dynamics of a modified Leslie–Gower model with double Allee effects, *Nonlinear Dyn* 80: 1051-1062.
- [15] **Ming Z., Yunfei D.**, (2016) Nonlinear Analysis and Differential Equation, 4 (5) 225-233.
- [16] **Manoj K.S., B.S. Bhadauria, Brajesh Kumar Singh**, (2016) Ain Shams Engineering Journal *Bifurcation analysis of modified Leslie-Gower predator-prey model with double Allee effect*

- [17] **Cheng,L., Cao, H.**, (2016) Bifurcation analysis of a discrete-time ratio-dependent predator-prey model with Allee effect, *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat* 38 288-302
- [18] **Liu X., Dai B.**, (2017) Dynamics of a predator–prey model with double Allee effects and impulse, *Nonlinear Dyn* , 88: 685-701.
- [19] **Kangalgil F.**, (2019) Flip Bifurcation and Stability in a Discrete-Time Prey-Predator Model with Allee Effect. *Cumhuriyet Science Journal*, 40(1), 141-149.
- [20] **Çelik C., Merdan H., Duman O., Akın Ö.**, (2008) Allee effects on population dynamics in continuous (overlapping) case, *Chaos, Solitons & Fractals Chaos*, 37, 65-74.
- [21] **H. Merdan, O. Duman**, (2009) On the stability analysis of a general discrete-time population model involving predation and Allee effects, *Chaos, Solitons & Fractals Chaos*, 40, 1169-1175.
- [22] **Sucu G.**, (2016) Bir Ayrık Av-Avcı Modelinin kararlılık ve Çatallanma Analizi Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, *TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi*
- [23] **Kutay V.**, (2010) Fark Denklemleri, Yüksek Lisans Tezi, *Ankara Üniversitesi*, s.138
- [24] **Qifa Lin.** (2018).“Allee Effect increasing the final density of the species subject to Allee Effect in a Lotka-Volterra commensal symbiosis model”, *Advances in Difference Equations* . , s.196.

ÖZGEÇMİŞ



Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	Özgür DEMİR
Doğum Yeri-Tarihi	Kırşehir-1987
Medeni Hali	Evli
İletişim Adresi	Eğriköprü Mah. Kardeşler TOKİ 75-24 Sk. C9 Blok No:9 SİVAS
E-Posta Adresi	alekis1907@hotmail.com

Eğitim ve Akademik Durum

Lise	Mehmet Akif ERSOY Lisesi, 2004.
Lisans	Gazi Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2009.
Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü, 2019.