T. C.

SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIR VE SÜREKSİZLİK KOŞULLARI HERGLOTZ-NEVANLINNA FONKSİYONU İÇEREN SÜREKSİZ KATSAYILI DIRAC OPERATÖRÜ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ebru MİŞE
(201392171044)

Matematik Ana Bilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ

SİVAS
NİSAN 2019

Ebru MİŞE'nin hazırlamış olduğu "**SINIR VE SÜREKSİZLİK KOŞULLARI HERGLOTZ-NEVANLINNA FONKSİYONU İÇEREN DIRAC OPERATÖRÜ**" adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **Matematik Anabilim Dalı**'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı, **Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ**

....

Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN**

....

Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyesi **Murat ŞAT**

....

Erzincan Üniversitesi

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

İmza

PROF.DR.İSMAİL ÇELİK
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu’nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)‘nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

Sevgili Aileme…

ETİK

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

24/04/2019

Ebru MİŞE

TEŞEKKÜR

Araştırmam boyunca bana her türlü desteği veren danışmanım Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ'ye teşekkürlerimi sunarım.

Araştırma sürecimde benden yardımlarını esirgemeyen Cansu EREN'e, Vincent Chinonye AMARA'ya ve Sema Hergüner'e teşekkür ederim. Ayrıca eğitim hayatım boyunca gelişimim üzerinde etkisi bulunan tüm öğretmenlerime teşekkürü borç bilirim.

Ve sevgili ailem... Benim için dünyayı ayağa kaldırabilecek güçteki anneme, bana daima destek olan babama, kardeşime, yüksek lisansı bitirme sebebim olan kardeşim Hande MİŞE'ye sonsuz teşekkürler...

ÖZET

SINIR VE SÜREKSİZLİK KOŞULLARI HERGLOTZ-NEVANLİNNA FONKSİYONU İÇEREN SÜREKSİZ KATSAYILI DİRAC OPERATÖRÜ ÜZERİNE

Ebru MİŞE
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ
2019 , 84+xi sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmada kullanılan temel bilgi ve kavramlar ile bir boyutta Dirac sistemi ve özellikleri yer almaktadır.

İkinci bölümde, tez konusuyla ilgili genel bilgiler ile daha önce yapılmış olan çalışmalardan bahsedilmektedir.

Üçüncü bölümde, belirlenen probleme karşılık gelen ve üzerinde iççarpım tanımlanmış, Hilbert uzayı oluşturulmuş ve probleme karşılık gelen operatör modeli bu uzay üzerinde kurulmuştur. Ele alınan problemin özfonksiyonlarının integral gösterimleri ile bu özfonksiyonların asimptotik ifadeleri elde edilmiştir. Daha sonra problemin karakteristik fonksiyonu tanımlanmış ve problemin özdeğerlerinin reel ve basit olduğu ispatlamış, normalleştirici sayılar tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümda ise özfonksiyonların asimptotik ifadeleri kullanılarak, karakteristik fonksiyonun asimptotik fonksiyonu elde edilmiştir. Daha sonra probleme ait Weyl çözümü ile Weyl fonksiyonu tanımlanmıştır. Böylece tanımlanan Weyl fonksiyonuna ve bazı spektral verilere göre teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Dirac operatörü, özdeğer, özfonksiyon, süreksizlik koşulları, ters problem, Herglotz-Nevanlinna fonksiyonu, Weyl çözümü, Weyl fonksiyonu

ABSTRACT

ON DISCONTINUOUS DIRAC OPERATOR WITH HERGLOTZ-NEVANLINNA TYPE FUNCTION IN BOUNDARY AND TRANSMISSION CONDITIONS

Ebru MİŞE
Msc Thesis
Department of Mathematics
Supervisor: Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ
2019, 84+ xi pages

This thesis consists of four parts.

In the first part, the basic information and concepts used in this study andone dimensional Dirac system with its properties are included.

In the second part, general information about thesis subject and previous studies related to this subject are mentioned.

In the third part, the Hilbert space which is corresponding to the determined problem with inner product defined is formed. Then, corresponding operator model is established on this space.

The integral equations and asymptotics of eigenfunctions of the problem are obtained. After that, the characteristic function of the problem is defined and the eigenvaluesof the problem is proved to be real and simple and normalizing numbers is defined.

In the last part, the asymptotic Formula of the characteristic function is given by using asymptotics expressions of eigenfuntions. Then the Weyl solution and the Weyl function belong to problem are defined. Therefore, some uniqueness theorems are proved according to the defined Weyl function and some spectral data.

Key Words: Dirac operator, eigenvalue, eigenfunction, transmission conditions, inverse problem, Herglotz-Nevanlinna function, Weyl solution, Weyl function

SİMGELER DİZİNİ

$< x, y >$	x ve y vektörlerinin iç çarpımı
$\boldsymbol{L_2(a,b)}$	Mutlak değerinin karesi (a,b) üzerinde üzerinde Lebesque anlamında integrallenebilir olan fonksiyonların uzayı
$\mathbf{W}(\mathbf{x},\mathbf{y})$	Wronsky determinantı (Wronskiyan)
$\boldsymbol{\int_a^b f(x)dx}$	f fonksiyonunun a'dan b'ye integrali
$\sum$	Toplam sembolü
$\prod$	Çarpım sembolü
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
Δ(λ)	Karakteristik fonksiyon
H	Hilbert Uzayı
D(T)	Tanım kümesi
T	Operatör
(∂/(∂x))	Kısmi türev
$\vert\quad\vert$	Determinant
$\cap$	Kesişim işareti

İÇİNDEKİLER

1. TEMEL KAVRAMLAR

Birinci bölümde tezle ilgili temel tanım, teoremler ile bir boyutlu Dirac sistemi ve onun bazı özellikleri verilecektir. Bu bölüm hazırlanırken E. C. Titchmarsh (1939), E. A. Coddington, N. Levinson (1955), M. A. Naimark (1968), B. M. Levitan, I. S. Sargsjan (1970, 1988) kaynaklarından faydalanılmıştır.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1: $a \leq t \leq b$ ve $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$(L) \int_a^b [x(t)]^2 \, dt < \infty$$

integrali mevcut ise $x(t)$ fonksiyonuna, $[a, b]$ aralığında karesiyle Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyon denir ve bu fonksiyonların uzayı $L^2 [a, b]$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.2: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının en az bir δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir. $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir W alt kümesindeki tüm noktalarda analitik ise $f(z)$'ye W'de analitik fonksiyon denir.

Tanım 1.1.3: Kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik olan fonksiyona tam fonksiyon adı verilir.

Tanım 1.1.4: $f(z)$, kompleks düzlemin bir W alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $\forall z \in W$ için $|f(z)| \leq M_f$ sağlanacak şekilde en az bir $M_f > 0$ varsa $f(z)$'ye W'da sınırlı fonksiyon denir.

Teorem 1.1.5(Liouville): Kompleks düzlemin tamamında sınırlı olan tam fonksiyon sabit fonksiyondur.

Tanım 1.1.6: $f(z)$ kompleks değişkenli herhangi bir fonksiyon, z_0 ise $f(z)$' nin tanımlı olduğu herhangi bir nokta olsun. Eğer $f(z_0) = 0$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir sıfır yeri veya kısaca sıfırı denir.

Eğer $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ ...,\ f^{(n-1)}(z_0) = 0,\ f^{(n)}(z_0) \neq 0$ ise z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun n-katlı sıfırı diye adlandırılır.

Tanım 1.1.7: $f(z)$, z_0 noktasının en az bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ama z_0' da diferansiyellenemeyen bir fonksiyon ise z_0' a $f(z)$' nin ayrık singüler (aykırı) noktası denir.

Tanım 1.1.8: z_0, bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık singüler noktası olsun.

i) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ limiti mevcut ve sonlu ise z_0 noktasına $f(z)$'nin kaldırılabilir aykırı noktası denir.

ii)

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

ise z_0 noktasına $f(z)$ nin kutup noktası (kutup yeri) denir.

iii) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ limiti mevcut değilse, z_0 noktasına $f(z)$' nin esas aykırı noktası denir.

Tanım 1.1.9: $f(z)$ bir tam fonksiyon ve

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(r^{\mu})$$

eşitsizliğini sağlayan $\mu > 0$ sayısı varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir. Bu eşitsizliği sağlayan μ sayılarının infimumuna $f(z)$' nin mertebesi adı verilir ve ρ ile gösterilir.

Tanım 1.1.10: $f(z)$ sonlu mertebeli bir tam fonksiyon olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(ar^{\rho})$$

eşitsizliğini sağlayan $a > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir.
$M(r) < \exp(ar^{\rho})$ eşitsizliğini sağlayan a sayılarının infimumuna, $f(z)$ fonksiyonunun tipi adı verilir ve σ ile gösterilir.

Teorem 1.1.11(Hadamard): Mertebesi $\rho \in (0,1)$ olan her bir $f(z)$ tam fonksiyonu

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Burada m, $f(z)$' nin orijindeki sıfırının katlılığı, $\{z_n\}_{n\geq 1}$ ise $f(z)$' nin 0'dan farklı tüm sıfırlarının kümesidir.

Teorem 1.1.12: f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde analitik fonksiyonlar ve $\{z_n\} \subset B$

$$i)\ \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in B,$$
$$ii)\ \forall n \ için,\ f(z_n) = g(z_n)$$

koşullarını sağlayan bir dizi ise $\forall z \in B$ için $f(z) = g(z)$ eşitliği geçerlidir.

Tanım 1.1.13: $n.$ mertebeden bir lineer diferansiyel ifade

$$\ell(y) = p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + p_n(x)\, y \tag{1.1.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonlarına diferansiyel ifadenin katsayıları denir.

Tanım 1.1.14: a ve b sonlu sayılar olmak üzere $\frac{1}{p_0(x)}, p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında integrallenebilirse (Lebesgue anlamında) (1.1.1) diferansiyel ifadesine regüler diferansiyel ifade; aksi halde, yani a veya b sonsuz veya $\frac{1}{p_0(x)}$, $p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonların-
dan en az biri $[a,b]$ aralığında integrallenebilir değilse (1.1.1) diferansiyel ifadesine singüler diferansiyel ifade denir.

$C^n[a,b]$, $[a,b]$ aralığında $n.$ mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyonların uzayı olmak üzere bir $y \in C^n[a,b]$ fonksiyonunun ve $(n-1)$. mertebeye kadar olan türevlerinin belli bir lineer birleşimi $U(y)$ ile gösterilsin:
$U(y) = a_0 y(a) + a_1 y'(a) + ... + a_{n-1} y^{(n-1)}(a) + b_0 y(b) + b_1 y'(b) + ... + b_{n-1} y^{(n-1)}(b)$
ifadesi a_i, b_i katsayılarına bağlıdır. Buna göre bu katsayılar değiştirilerek farklı şekillerde $U_v(y), \quad v = 1, 2, ..., m$ ifadeleri elde etmek mümkündür.

Tanım 1.1.15:

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, ..., m \tag{1.1.2}$$

eşitliklerine $y \in C^n[a,b]$ fonksiyonu için a ve b noktalarında konulan sınır koşulları adı verilir.

Tanım 1.1.16: $D = \{y \in C^n[a,b] : \ U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, ..., m\}$ kümesi üzerinde $Ly = \ell(y)$ eşitliği ile bir lineer operatör tanımlanır. Bu operatöre, (1.1.1) diferansiyel ifadesi ve (1.1.2) sınır koşulları tarafından üretilen diferansiyel operatör denir.

Bu tanımdan anlaşıldığı gibi aynı diferansiyel ifade ile, sınır koşulları değiştirilerek, farklı operatörler tanımlamak mümkündür. Ayrıca (1.1.2) koşulları verilmeksizin de operatör tanımlanabilir ki bu, $C^n[a,b]$ üzerinde $\ell(y)$ ile üretilen tüm operatörlerin genişlemesi olur.

Teorem 1.1.17: Kabul edelim ki $p_{ij}(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ de integrallenebilen (Lebesgue anlamında) fonksiyonlardır. Bu durumda;

$$y_i' = \sum_{j=1}^{2} p_{ij}(x)y_j \quad (i=1,2)$$

lineer denklem sisteminin $\tau \in (a,b)$ için $y_i(\tau) = \xi_i$, $(i=1,2)$ koşulunu sağlayan bir tek çözümü vardır.(E. A. Coddington, N. Levinson, 1955)

Tanım 1.1.18: λ bir kompleks parametre olmak üzere,

$$\begin{cases} \ell(y) = \lambda y \\ U_v(y) = 0, \ v = \overline{1,m} \end{cases} \tag{1.1.3}$$

sınır değer probleminin sıfırdan farklı bir $y(x)$ çözümü varsa λ'ya bu sınır değer probleminin bir özdeğeri; $y(x)$'e de λ'ya karşılık gelen özfonksiyonu denir. (1.1.3) sınır değer problemi çoğunlukla $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (1.1.2) sınır koşulları tarafından üretilen özdeğer problemi olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.19: Tanım 1.1.16' da $n=m$ olsun.
$y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), ..., y_n(x,\lambda)$ fonksiyonları,

$$\ell(y) = \lambda y$$

denkleminin

$$y_i^{(j-1)}(a,\lambda) = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ ise} \\ 1, & i = j \text{ ise} \end{cases}, \quad i,j = \overline{1,n}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & ... & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & ... & U_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{1.1.4}$$

determinantına (1.1.3) probleminin veya ona karşılık gelen diferansiyel operatörün karakteristik fonksiyonu denir.

Teorem 1.1.20: (1.1.3) probleminin özdeğerleri ile $\Delta(\lambda)$' nın sıfırları çakışır.

Tanım 1.1.21: Herhangi bir λ özdeğeri $\Delta(\lambda)$' nın k-katlı sıfırı ise k' ya λ özdeğerinin cebirsel katlılığı denir; eğer özel olarak $k = 1$ ise λ' ya cebirsel olarak basit özdeğer adı verilir.

Uyarı 1.1.22: (1.1.3) probleminde $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ya da $U_v(y) = 0$ sınır koşullarının katsayıları λ parametresine bağlı seçilebilir. Bu durumda daha genel bir özdeğer problemi elde edilir.(Naimark, 1968)

Tanım 1.1.23: H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayları, $L : H_1 \to H_2$ sınırlı lineer bir operatör ve $\overline{D(L)} = H_1$ olsun. Eğer $L^\star : H_2 \to H_1$ operatörü $\langle Lx, y\rangle = \langle x, L^\star y\rangle$ şartını sağlıyorsa $L^\star$ operatörüne L' nin eşleniği (adjointi) denir. Eğer $L = L^\star$ ise L operatörüne öz eşlenik (self-adjoint) operatör denir.

1.2 Bir Boyutlu Dirac Sistemi ve Özellikleri

$p_{ik}(x)$' ler $(i, k = 1, 2)$ $[0, \pi]$ aralığında tanımlı ve sürekli reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$P = \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix},\ p_{12}(x) \equiv p_{21}(x) \tag{1.2.1}$$

bir matris operatörü olsun. $y(x)$ iki bileşenli bir vektör fonksiyonu

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\left(B\frac{d}{dx} + P(x) - \lambda I \right) y = 0 \tag{1.2.2}$$

denklemi

$$\begin{cases} y_2' + p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 = \lambda y_1 \\ -y_1' + p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 = \lambda y_2 \end{cases} \tag{1.2.2'}$$

şeklinde iki tane birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler sistemine denktir.

$V(x)$ potansiyel fonksiyon, m zerreciğin kütlesi olmak üzere

$$p_{12}(x) \equiv p_{21}(x) \equiv 0, p_{11}(x) = V(x) + m, p_{22}(x) = V(x) - m$$

ise (1.2.2') sistemi, relativistic kuantum teorisinde bir boyutlu stasyoner Dirac sistemi olarak bilinmektedir. (B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, 1970)

Sabit, ortogonal ve normalleştirilmiş tabana göre iki boyutlu uzayın herhangi düzgün ortogonal dönüşümü

$$H(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde bir matris ile tanımlanır.(B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, 1970)

$$BH = HB$$

olduğu kolayca görülür. (1.2.2) de $y = H(x)z$ dönüşümü yapılır ve her taraf H^{-1} ile soldan çarpılırsa

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz) + H^{-1}PHz = H^{-1}\lambda Hz$$

veya

$$B\frac{dz}{dx}+\left(H^{-1}B\frac{d}{dx}\left(H\right)+H^{-1}PH\right)z=\lambda z \tag{1.2.3}$$

elde edilir.

$$Q=H^{-1}B\frac{d}{dx}\left(H\right)+H^{-1}PH$$

matrisi hesaplanırsa

$$H^{-1}\left(x\right)=\begin{pmatrix}\cos\varphi\left(x\right) & \sin\varphi\left(x\right)\\ -\sin\varphi\left(x\right) & \cos\varphi\left(x\right)\end{pmatrix},$$

$$\frac{d}{dx}H=\begin{pmatrix}\varphi'\left(x\right)\sin\varphi\left(x\right) & -\varphi'\left(x\right)\cos\varphi\left(x\right)\\ \varphi'\left(x\right)\cos\varphi\left(x\right) & -\varphi'\left(x\right)\sin\varphi\left(x\right)\end{pmatrix}$$

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}\left(H\right)$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\varphi\left(x\right) & \sin\varphi\left(x\right)\\ -\sin\varphi\left(x\right) & \cos\varphi\left(x\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi'\left(x\right)\sin\varphi\left(x\right) & -\varphi'\left(x\right)\cos\varphi\left(x\right)\\ \varphi'\left(x\right)\cos\varphi\left(x\right) & -\varphi'\left(x\right)\sin\varphi\left(x\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\varphi'\left(x\right) & 0\\ 0 & \varphi'\left(x\right)\end{pmatrix},$$

$$H^{-1}PH$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\varphi\left(x\right) & \sin\varphi\left(x\right)\\ -\sin\varphi\left(x\right) & \cos\varphi\left(x\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_{11}(x) & p_{12}(x)\\ p_{21}(x) & p_{22}(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\varphi\left(x\right) & -\sin\varphi\left(x\right)\\ \sin\varphi\left(x\right) & \cos\varphi\left(x\right)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}p_{11}\cos^2\varphi+p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\left(p_{22}-p_{11}\right)\sin 2\varphi\\ p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\left(p_{22}-p_{11}\right)\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi-p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

olduğundan

$$Q(x)=\begin{pmatrix}q_{11}(x) & q_{12}(x)\\ q_{21}(x) & q_{22}(x)\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}\varphi'\left(x\right)+p_{11}\cos^2\varphi+p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\left(p_{22}-p_{11}\right)\sin 2\varphi\\ p_{12}\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\left(p_{22}-p_{11}\right)\sin 2\varphi & \varphi'\left(x\right)+p_{11}\sin^2\varphi-p_{12}\sin 2\varphi+p_{22}\cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

ifadesi elde edilir. $q_{12}(x)\equiv 0$ olarak seçilirse

$$p_{12}\left(x\right)\cos 2\varphi\left(x\right)+\frac{1}{2}\left(p_{22}\left(x\right)-p_{11}\left(x\right)\right)\sin 2\varphi\left(x\right)=0$$

olur. Buradan eğer $p_{11}(x) \neq p_{22}(x)$ ise

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \arctan \frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x) - p_{22}(x)}$$

olarak elde edilir. $Q(x)$ matrisi,

$$Q(x) = \begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix}$$

şeklinde olur. Buna göre (1.2.3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \tag{1.2.4}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin I. kanonik formu denir.

Şimdi $Q(x) = q_{11}(x) + q_{22}(x) = 0$ olacak şekilde $\varphi(x)$ fonksiyonu seçilsin. Buradan $2\varphi'(x) + p_{11}(x) + p_{22}(x) = 0$ olacağından

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2} \int_0^x \{p_{11}(s) + p_{22}(s)\} \, ds$$

elde edilir. Buna göre (1.2.3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} z = \lambda z \tag{1.2.5}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denkleme Dirac denkleminin II. kanonik formu denir. (1.2.2) denklem sistemlerinin spektral teorisindeki çeşitli problemleri incelenirken, bu kanonik formlardan faydalanmak kolaylık sağlar. Örneğin; özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik davranışları incelenirken ve de keyfi vektör değerli fonksiyonların (a ve b gibi sonlu noktalarda homojen sınır koşulları altında) (1.2.2) denklem sisteminin özfonksi-
yonlarına göre açılımı incelenirken (1.2.4) kanonik denklemini kullanmak uygundur. Sonsuz aralıkta verilmiş (1.2.2) denklem sisteminin özdeğerlerinin asimptotik davranışı ve ters problem incelenirken de (1.2.5) kanonik denklemini kullanmak kolaylık sağlar.

(1.2.4) kanonik denklem sistemi için $p(x)$ ve $r(x)$, $[0, \pi]$ aralığında reel değerli ve sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$$y_2' + \{p(x) - \lambda\} y_1 = 0, \; y_1' + \{r(x) - \lambda\} y_2 = 0 \tag{1.2.6}$$

$$y_1(0)\sin\alpha + y_2(0)\cos\alpha = 0 \tag{1.2.7}$$

$$y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta = 0 \tag{1.2.8}$$

sınır problemi ele alınsın. Herhangi bir λ_0 için bu problemin sıfırdan farklı çözümü $y(x,\lambda_0) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_0) \\ y_2(x,\lambda_0) \end{pmatrix}$ olsun. Bu durumda λ_0' a problemin özdeğeri, $y(x,\lambda_0)$' a ise bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon denir.

Lemma 1.2.1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldir. Yani

$$\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}\,dx = 0$$

dır.

İspat: $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ fonksiyonları (1.2.6) sisteminin çözümleri olduğundan

$$\begin{aligned}
y_2'(x,\lambda_1) + \{p(x) - \lambda_1\}\, y_1(x,\lambda_1) &= 0 \\
y_1'(x,\lambda_1) - \{r(x) - \lambda_1\}\, y_2(x,\lambda_1) &= 0 \\
z_2'(x,\lambda_2) + \{p(x) - \lambda_2\}\, z_1(x,\lambda_2) &= 0 \\
z_1'(x,\lambda_2) - \{r(x) - \lambda_2\}\, z_2(x,\lambda_2) &= 0
\end{aligned}$$

dır. Bu denklemler sırası ile $z_1(x,\lambda_2)$, $-z_2(x,\lambda_2)$, $-y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_1)$ ile çarpılır ve taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dx}\{y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) - y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\} \\
= \; & (\lambda_1 - \lambda_2)\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlik 0' dan π' ye integrallenirse

$$\begin{aligned}
& (\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}\,dx \\
= \; & \{y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) - y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}\big|_0^\pi
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\{y_2(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) - y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}\big|_0^\pi = 0$$

olduğundan

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\}\,dx = 0$$

yada

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_0^\pi y^T(x,\lambda_1)z(x,\lambda_2)dx = 0$$

olur. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan, $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldir.

Lemma 1.2.2: (1.2.6)-(1.2.8) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: $\lambda_1 = u + iv$ nin kompleks özdeğer olduğu kabul edilsin. $p(x)$ ve $r(x)$, $[0,\pi]$ aralığında reel değerli ve sürekli fonksiyonlar, α, β sayıları reel olduğundan $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = u - iv$ sayısı da $\overline{y}(x,\lambda_1)$ özfonksiyonuna karşılık gelen özdeğerdir. Dolayısıyla Lemma 1.2.1' den

$$\int_0^\pi \{y_1(x,\lambda_1)\overline{y}_1(x,\lambda_1) + y_2(x,\lambda_1)\overline{y}_2(x,\lambda_1)\}\, dx = 0$$

ve

$$\int_0^\pi \left\{|y_1(x,\lambda_1)|^2 + |y_2(x,\lambda_1)|^2\right\} dx = 0$$

olur. Buradan ise $y_1(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x,\lambda_1)$ özfonksiyonları sıfır olur ki bu mümkün değildir. Dolayısıyla özdeğerler reeldir.

2. PROBLEMİN TARİHSEL GELİŞİMİ

Diferansiyel operatörlerin spektral teorisi başta matematik olmak üzere fizik ve mekaniğin farklı alanlarında pek çok yerde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisi esasen lineer cebire dayanmakla birlikte aynı zamanda titreşim teorisinin de problemleridir. Lineer cebir ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin fark edilmesi çok eski tarihlere dayanır. İntegral denklemler teorisinde, bu benzerliklerden ilk olarak faydalanan D. Hilbert olmuştur. Bu çalışmaların sonucunda önce l_2 daha sonra da genel Hilbert uzayı meydana gelmiştir.

Öz eşlenik operatörler teorisi; tanımlanan l_2 ve H Hilbert uzaylarında gelişmeye başlamıştır. Özellikle bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, normalleştirici sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve bunlar için asimptotik formüller elde edilmiştir.

Diferansiyel operatörler, regüler ve singüler olmak üzere iki sınıfa ayrılmıştır. Sonlu tanım bölgesine sahip ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatörlere regüler; tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları (birkaçı veya tamamı) toplanabilir olmayan diferansiyel operatörlere singülerdir denir.

İkinci mertebeden regüler operatörler teorisi günümüzde Sturm Liouville teorisi olarak bilinir. Sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından XIX. yüzyılın sonlarında incelenmiştir. Ardından; F. Rietsz, J. Neumann, K. O. Friedrichs başta olmak üzere matematikçiler tarafından öz eşlenik ve simetrik operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuş, simetrik operatörlerin bütün öz eşlenik genişlemelerinin elde edilmesi Neumann tarafından yapılmıştır.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar, 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özdeğer ve özfonksiyonların asimptotiği, özfonksiyonların tamlığı ise R. Courant, T. Carleman, M. S. Birman, M. Z. Salamyak, V. P. Maslov, M. V. Keldish tarafından geliştirilmiştir.

Diferansiyel operatörlerin spektral teorisi düz ve ters spektral problemler olmak üzere ikiye ayrılır.

Düz spektral problemler; verilen operatörlerin özfonksiyonlarının ve spektrumlarının aranması; ters spektral problemler ise verilen bazı verilere göre spektral karakteristikleri bu diziler olan operatörün kurulması ile ilgilenmektedir. Bu konudaki bazı çalışmalarda verilen spektral karakteristiklerin operatörü tek şekilde belirlediği, ters problemin çözümü için verilen teklik teoremlerinde gösterilmiş; bazılarında ise verilen spektral karakteristiklere göre operatörün nasıl kurulacağı araştırılmıştır.

Ters problemler teorisi; operatörlerin spektral analizi ve fonksiyonel analizin yanı sıra fizik, mekanik, jeofizik, elektronik ve metalurji gibi farklı bilim dallarında önemli bir yere sahiptir. Homojen olmayan telin, onun öz titreşimlerine göre yoğunluğunun hesaplanması, kuantum fiziğinde saçılma verilerine göre alan potansiyellerinin bulunması, jeofizikte yeraltı madenlerinin ve yeraltındaki elementlerin dağılım karakteristiklerine göre belirlenmesi problemlerinin herbiri, spektral analizin ters problemlerine birer örnek teşkil eder.

Literatürde, ikinci mertebeden

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=\lambda w(x)y \tag{2.1}$$

diferansiyel denklemine Sturm-Liouville denklemi; bu denklem ve farklı bir takım sınır koşulları tarafından üretilen operatörlere Sturm-Liouville operatörleri; bu operatörler için konulan spektral problemlere ise Sturm-Liouville problemleri denir. Sturm-Liouville problemleri birçok somut uygulama alanına sahiptir.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+V(x)u(x,t)=0 \tag{$\star$}$$

şeklindeki Schrödinger dalga denklemi bu uygulama alanına bir örnektir. Burada $u(x,t)$ parçacığın dalga fonksiyonu, $V(x)$ potansiyel alan, m parçacığın kütlesi ve $\hbar$ Planck sabitidir. E, u'nun konumuna karşılık gelen enerji seviyesi olmak üzere yukarıdaki denklemde

$$u(x,t)=e^{it\sqrt{E}}y(x)$$

dönüşümü yapılırsa,

$$-y''+\frac{2m}{\hbar}V(x)y=\frac{2m}{\hbar}Ey \tag{$\star\star$}$$

Sturm-Liouville tipinde denklem elde edilir.

Sturm-Liouville problemlerine bir başka örnek olarak telin titreşimi denklemi verilebilir. $p(x)$ telin x noktasındaki gerilimini; $w(x)$ yoğunluğunu; $q(x)$ ise geri çağırıcı kuvvet katsayısını belirtmek üzere bu denklem aşağıdaki şekildedir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) - q(x)u(x,t) = w(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Bu denklemin çözümü,

$$u(x,t) = y(x)\sin\sqrt{\lambda}t$$

şeklinde aranırsa, yeni aranan $y(x)$ fonksiyonunun (2.1) Sturm-Liouville denklemini sağlayacağı kolayca görülür.

Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisine ait ilk sonuçlar Bernoulli, D'Alambert, Euler, Liouville ve Sturm tarafından verilmiştir. 1830' lu yıllarda Sturm ve Liouville tarafından, bazı belirli koşullar altında (2.1) denklemini ve belli sınır koşullarını sağlayan sıfırdan farklı $y(x)$ çözümlerinin varlığına olanak sağlayan λ özdeğerlerinin ayrık bir küme oluşturduğu ispatlanmıştır.

Diferansiyel operatörler için ters spektral problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma V. A. Ambartsumyan' a aittir. 1929 yılında Ambartsumyan, Sturm-Liouville problemleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

Teorem 2.1(Ambartsumyan, 1929): $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ sayıları

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\, y = 0 \tag{2.2}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \tag{2.3}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0, 1, ...)$ ise $q(x) \equiv 0$ dır.

V. A. Ambartsumyan' ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmıştır. V. A. Ambartsumyan' ın bu sonucu özdeğerlerin $q(x)$ fonksiyonunu tek şekilde belirleyebileceğini akla getirse de bunun genel durumda doğru olmadığı G. Borg tarafından 1945 yılında ispatlanmıştır. Dolayısıyla aslında V. A. Ambartsumyan' ın bu sonucu istisnai bir durum olarak değerlendirilmektedir.

Borg, bu çalışmasında $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin verilen operatörün farklı spektrumları olduğunu kabul ederek, operatörü bu diziler yardımıyla belirlemektedir. Bu sonuç aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir:

Teorem 2.2(Borg, 1945): h, h_1 ve H sonlu gerçel sayılar olmak üzere, $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ ler (2.2) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{2.4}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{2.5}$$

sınır koşulları ile verilen problemin; $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$ ler ise (2.2) denklemi, (2.5) ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0 \qquad (h \neq h_1) \tag{2.6}$$

sınır koşullarıyla verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonu ile h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirler.

Bu çalışmalardan sonra $q(x)$ potansiyel fonksiyonu için $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulu sağlandığında bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü belirlediği N. Levinson (1949) tarafından ispatlanmıştır. Bununla birlikte N. Levinson tarafından, negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumlarda saçılma fazının potansiyeli tek olarak belirlediği de gösterilmiştir.

Sturm-Liouville denkleminin incelenmesi sürecinde kullanılan metotlardan biri de dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Dönüşüm operatörü kavramı, operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde J. Delsarte (1938), J. Delsarte, J. Lions (1957) ve B. M. Levitan (1964) tarafından verilmiştir. Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısı ise ilk olarak A. V. Povzner (1948) tarafından incelenmiştir.

II. mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde, bir sonraki en önemli aşamalardan birisi V.A. Marchenko tarafından kaydedilmiştir. V.A. Marchenko, 1950 yılında ters problemlerin çözümü için Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (2.2) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \qquad \varphi'(0, \lambda) = h \tag{2.7}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu operatörün özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n)dx \tag{2.8}$$

sayıları verilen operatörün normalleştirici sayıları,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n} \tag{2.9}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere V.A. Marchenko tarafından, G. Borg' un ispatladığı teoremin benzeri; $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla ispatlanmıştır. Bununla birlikte bu çalışmada, Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonunun $\rho(\lambda)$ olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. V. A. Marchenko' nun bu çalışmaları ile aynı zamanlarda M.G. Krein(1951, 1954) tarafından, Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirleyebilmek için çalışmalar yapılmıştır.

1951 yılında I. M. Gelfand ve B. M. Levitan tarafından, $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartlar verilmiştir.

Ayrıca bu çalışmada, klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirlenmesi için, λ_n özdeğerlerinin ve α_n normalleştirici sayılarının sağlaması gereken asimptotik eşitlikler gerekli ve yeterli koşul olarak verilmiştir.

Bu çalışmalarda iki spektruma göre ters problemin tam çözümü verilmemiştir. Fakat regüler Sturm-Liouville operatörünün iki spektruma göre belirlenmesi problemi M.G. Gasymov ve B. M. Levitan' ın (1964) çalışmasında verilmiştir.

Diğer taraftan aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip Sturm-Liouville problemleri ile ilgili ilk çalışma H. Hald'a aittir (1984). Bu çalışmada Hald tarafından, klasik sınır koşulları altında düz ve ters spektral problemler ele alınmış ve operatörün bir özdeğer dizisinin ve aralığın ilk yarısında $q(x)$ fonksiyonunun bilinmesi halinde operatörün tek olarak belirlenebileceği gösterilmiştir.

C. Willis' in (1985) çalışmasında ise klasik sınır koşullarına sahip, verilen aralıkta iki noktada süreksizliğe sahip Sturm-Liouville operatörü için ters problem incelenmiştir. V. A. Yurko (1998), R. Kh. Amirov, V. A. Yurko (2001) çalışmaları aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip operatörler için düz ve ters problemleri içermektedir.

R. Kh. Amirov' un (2006) çalışmasında ise verilen Sturm-Liouville operatörünün belli başlangıç ve süreksizlik koşullarını sağlayan çözümlerinin integral gösterimleri elde edilmiştir. Buna ek olarak bu çalışmada operatörün spektral özellikleri ile bu spektral özelliklere göre ters problemin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

R. Kh. Amirov, N. Topsakal (2008), R. Kh. Amirov, N. Topsakal, Y. Güldü (2010), Q. Yang, W. Wang (2011) çalışmalarında da verilen aralıkta süreksizliğe sahip operatörler için düz ve ters problemler ele alınmıştır.

Diğer taraftan, spektral parametreye bağlı sınır koşulları ise ilk olarak S. D. Poisson(1820) ve ardından D. S. Cohen (1966) tarafından incelenmiştir. M. A. Naimark tarafından ise, "Linear Differential Operators"(1968) kitabında sınır koşullarının parametreye bağlı olduğu özdeğer problemleri tanımlanmış ve bu tür problemlere genelleştirilmiş özdeğer problemi adı verilmiştir. Bu tip problemler (2.4) ve (2.5) sınır koşullarının birinin veya her ikisinin katsayılarının λ parametresine bağlanmasıyla elde edilir. Örneğin, $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere, $y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$ koşulu

$$a(\lambda)y(\pi) + b(\lambda)y'(\pi) = 0 \tag{2.10}$$

şeklinde yazılırsa parametreye bağlı bir sınır koşulu elde edilir. Eğer burada $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ fonksiyonları λ' nın lineer (doğrusal) fonksiyonları ise sınır koşulu parametreye lineer şekilde bağlıdır denir.

Sınır koşulları parametre içeren özdeğer problemleri sırasıyla J. Walter (1973), A. Schneider (1974) tarafından incelenmiştir. Diğer taraftan Sturm-Liouville operatörü için (2.10) tipinde sınır koşulu ilk olarak C. T. Fulton(1977, 1980) tarafından incelenmiştir. Fulton' un bu çalışmasında, probleme karşılık gelen operatör tanımlanarak, bu operatör yardımıyla, problemin özdeğerlerinin reel ve cebirsel olarak basit olması gibi bazı önemli özellikler elde edilmiştir. Ayrıca sınır koşulları lineer şekilde parametre içeren düz problem 1994 yılında Oktay Mukhtarov tarafından incelenmiştir. O. Sh. Mukhtarov, M. Kadakal, N. Altınışık (2003), N. Altınışık, M.

Kadakal, O. Sh. Mukhtarov (2004), Z. Akdoğan, M. Demirci, O. Sh. Mukhtarov (2005) çalışmalarında, sınır ve süreksizlik koşulları lineer şekilde parametre içeren Sturm-Liouville operatörü için düz problem incelenmiştir. N. J. Guliyev (2005) çalışmasında ise bir sınır koşulu parametreye lineer şekilde bağlı ters Sturm-Liouville problemi için, Gelfand-Levitan-Marchenko tipinde esas denklem elde edilip, bu problemin tam çözümü verilmiştir. Bununla birlikte, R. Kh. Amirov, B. Keskin ve A. S. Özkan(2009), R. Kh. Amirov, N. Topsakal, Y. Güldü (2011), B. Keskin, A. S. Özkan, N. Yalçın (2011), A. S. Özkan,B. Keskin (2012) ve benzeri bir takım çalışma, lineer koşullarla ilgili düz ve ters spektral problemleri içermektedir. Ayrıca bu çalışmaların bazılarında parametreye bağlı sınır koşullarının yanısıra aralıkta süreksizlik koşulları da bulunmaktadır.

Son zamanlarda ise daha çok $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ fonksiyonlarının λ' ya tam fonksiyon veya polinom şeklinde daha genel olarak bağlı olduğu durumlar araştırılmaktadır. $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$' nın keyfi birer polinom olduğu durum ilk olarak E. M. Russakovskii (1975) tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada problemin teorik operatör ifadesi ve özdeğerlerinin önemli özellikleri araştırılmıştır. Bu tür operatörler için düz problemler yaygın olarak çalışılmasına rağmen ters problemler son zamanlarda dikkat çekmeye başlamıştır. $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ fonksiyonlarının çeşitli durumlarına göre düz veya ters spektral problemler; P. Binding, P. J. Browne, K. Seddighi (1993), Zh. Ben Amara, A. A. Shkalikov (1999), N. Yu. Kapustin (1999), P. Binding, P. J. Browne, B. A. Watson (2000), N. B. Kerimov, V. S. Mirzoev (2003), P. Binding, P. J. Browne, B. A. Watson (2004) başta olmak üzere birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. P. A. Binding, P, J. Browne ve B. A. Watson (2008) çalışmasında,

$$\begin{aligned} &-y'' + q(x)y = \lambda y \\ &y(0)\cos\alpha = y'(0)\sin\alpha \;\; \alpha \in [0,\pi) \\ &\frac{y'}{y}(1) = a\lambda + b - \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\lambda - c_k} \end{aligned} \tag{2.11}$$

problemi ele alınmış ve bu problem için özdeğerlerin varlığı , asimptotiği ile özfonksiyonların salınımı ve bu tip problemler arasındaki dönüşümler incelenmiştir.

Chernozukova ve Freiling (2009) tarafından (2.11) problemi

$$\begin{aligned} &-y'' + q(x)y = \lambda y \\ &a(\lambda)y(0) + b(\lambda)y'(0) = 0 \\ &c(\lambda)y(\pi) + d(\lambda)y'(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{2.11'}$$

şeklinde genelleştirilmiştir.

G. Freiling, V. A. Yurko (2010) çalışmasında, (2.11') tipindeki sınır koşullarına sahip Sturm-Liouville operatörü için düz ve ters problemler incelenmiştir.

A. S. Özkan (2012) çalışmasında ise (2.11) tipinde sınır koşullarına ve sonlu aralıkta bir noktada süreksizliğe sahip Sturm-Liouville operatörü için düz ve ters problemler araştırılmıştır.

Şimdi, Dirac operatörünün spektral teorisinden bahsedilecek olursa; Dirac operatörünün spektral analizi ile ilgili ilk çalışmalar, H. E. Moses (1957), F. Prats, J. Toll (1959) ile M. G. Gasymov, Dzhabiev (1975), E. S. Panakhov (1985) başta olmak üzere birçok fizikçi ve matematikçi tarafından yapılmıştır. Dirac operatörü için $(0, \infty)$ yarı ekseninde spektral fonksiyona göre ters problem M. G. Gasymov ve B. M. Levitan (1966) tarafından çözülmüştür. Bu çalışmada $p(x)$ ve $q(x)$, $[0, \infty)$ yarı ekseninin her sonlu alt aralığında sürekli, reel değerli fonksiyonlar ve

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda) \\ y_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$B\frac{dy}{dx} + Q(x)y = \lambda y, \qquad 0 < x < \infty \tag{2.12}$$

$$y_1(0) = 0, \qquad y_2(\pi) + Hy_1(\pi) = 0 \tag{2.13}$$

$$(y_1(0) = 0, \qquad y_2(\pi) + H_1 y_1(\pi) = 0 \quad H_1 \neq H) \tag{2.13'}$$

sınır problemi ele alınmıştır. Bu durumda

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

(2.12) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = 0, \quad \varphi_2(0,\lambda) = -1$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, monoton artan $\rho(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ fonksiyonu (2.12), (2.13) probleminin spektral fonksiyonu ve her $f(x) \in L_2(0,\infty)$ fonksiyonu için

$$F_n(\lambda) = \int_0^n f^T(x)\varphi(x,\lambda)dx$$

şeklinde iken

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(\lambda) - F_n(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda) = 0$$

olmak üzere

$$\int_0^{\infty} f^T(x)f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda)d\rho(\lambda)$$

Parseval eşitliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

Ayrıca bu çalışmada aşağıda verilen sonuçlar da elde edilmiştir:

Teorem 2.3: $\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \dfrac{\lambda}{\pi}$ ve

$$F(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} (1-\cos\lambda x)/\lambda \\ -\sin\lambda x/\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{1-\cos\lambda y}{\lambda} & \dfrac{-\sin\lambda y}{\lambda} \end{pmatrix} d\rho(\lambda)$$

olmak üzere $y \le x$ için $K(x,y)$ matris fonksiyonu

$$F(x,y) + K(x,y) + \int_0^x K(x,s)F(s,y)ds = 0 \tag{2.14}$$

integral denklemini sağlar.

Teorem 2.4: Eğer $\rho(\lambda)$ fonksiyonu

1. $g(x) \in L_2(0,\infty)$ sonlu keyfi vektör fonksiyon ve

$$G(\lambda) = \int_0^{\infty} g^T(x)s(x,\lambda)dx = 0, \; s(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin\lambda x \\ -\cos\lambda x \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ ve

2. $\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \dfrac{\lambda}{\pi}, \quad c(x,\lambda) = \begin{pmatrix} (1-\cos\lambda x)/\lambda \\ -\sin\lambda x/\lambda \end{pmatrix}$ olmak üzere

$$f(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(x,\lambda)c^T(y,\lambda)d\sigma(\lambda)$$

matris fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli $f''(x,y) \equiv F(x,y)$ türevine sahip olma şartlarını sağlarsa bu durumda her sabit $x \geq 0$ için (2.14) denklemi her iki değişkenine göre sürekli olan bir tek $K(x,y)$ çözümüne sahiptir.

Teorem 2.5: $Q(x)$ sürekli matris fonksiyonu olmak üzere, monoton artan $\rho(\lambda)$ fonksiyonunun (2.12) ve (2.13) sınır değer probleminin spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter şart

1. Eğer $g(x) \in L_2(0,\infty)$ sonlu keyfi vektör fonksiyon ve

$$G(\lambda) = \int\limits_{0}^{\infty} g^T(x)s(x,\lambda)dx = 0, \;\; s(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \sin\lambda x \\ -\cos\lambda x \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda)\, d\rho(\lambda) = 0$$

ise $g(x) \equiv 0$ ve

2.

$$f(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(x,\lambda)c^T(y,\lambda)d\left(\rho(\lambda) - \frac{\lambda}{\pi}\right)$$

matris fonksiyonu $F_{11}(x,0) = F_{21}(x,0) = 0$ olmak üzere ikinci mertebeden sürekli $f''(x,y) \equiv F(x,y)$ türevine sahip olma koşullarının sağlanmasıdır.

İki spektruma göre regüler Dirac operatörünün belirlenmesi problemi ise M. G. Gasymov ve T. T. Dzhabiev (1975) tarafından yapılan çalışmada ele alınmıştır. Bu çalışmada aşağıdaki teoremler ispatlanmıştır:

Teorem 2.6: $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizileri sırası ile (2.12), (2.13) ve (2.12), (2.13') problemlerinin özdeğeri ise bu durumda

$$\alpha_n = \frac{H_1 - H}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_n - \mu_k}, \;\; n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$$

dır. Burada $\prod'$ sembolü sonsuz çarpımda $k = n$. çarpanın bulunmadığını gösterir.

Teorem 2.7: $p(x)$ ve $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında tanımlanmış reel değerli fonksiyonlar ve k. mertebeden türevleri $L_2(0,\pi)$' ye ait olacak şekilde, $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ dizilerinin sırası ile (2.12), (2.13) ve (2.12), (2.13') problemlerinin spektrumları olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır:

1. $\{\lambda_n\}_{-\infty}^{\infty}$ ve $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ sayılarının sıralı olması yani

$$\ldots < \lambda_{-n} < \mu_{-n} < \lambda_{-n+1} < \ldots < \lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \mu_n < \ldots$$

sağlanması,

2. $\alpha \neq \beta$, $0 \leq \beta$, $\alpha \leq \pi$ ve $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_{n,k}|^2$ ve $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\beta_{n,k}|^2$ serileri yakınsak olmak üzere

$$\lambda_n = n - \frac{\alpha}{\pi} + \frac{\alpha_1}{n} + \ldots + \frac{\alpha_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\alpha_{n,k}}{n^k}$$
$$\mu_n = n - \frac{\beta}{\pi} + \frac{\beta_1}{n} + \ldots + \frac{\beta_{k-1}}{n^{k-1}} + \frac{\beta_{n,k}}{n^k}$$

eşitliklerinin geçerli olması.

Dirac operatörü için özfonksiyonların tamlığı, Cauchy probleminin çözümü, öz eşlenik olma durumunda spektrumun diskretliği ve sürekliliği, regülerize izin hesaplanması, periyodik ve antiperiyodik problemler, açılım teoremleri, özfonksiyonların asimptotiği, $2n$ mertebeli Dirac denklem sistemi için ters saçılma problemi, kısmen çakışmayan iki spektruma göre ters problemler; B. W. Roos, W.C. Sangren (1961), V. V. Martynov (1965), M. G. Gasymov (1966), I. S. Sargsjan (1966), E. Abdukadyrov (1967), S. G. Veliev (1972), M. O. Otelbayev (1973), F. G. Maksudov, S. G. Veliev (1975), C. Quigg, J. L. Rosner, H. B. Thacker (1978), H. Grosse, A. Martin (1979), W. D. Evans, B. J. Harris (1980), B. J. Harris (1983) ve B. Khasanov (1994) tarafından incelenmiştir.

R. Kh. Amirov 'un (2005) çalışması, süreksiz Dirac operatörü için düz ve ters spektral problemleri içermektedir.

Y. Güldü (2006) doktora tez çalışmasında ise aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip Dirac operatörü için düz ve ters problemler araştırılmıştır.

Dirac operatörü için parametreye bağlı sınır koşulları son yıllarda çalışılmaya başlanmıştır. Örneğin, R. Kh. Amirov, B. Keskin, A. S. Özkan (2009) çalışmasında, sonlu aralıkta sürekli ve ikinci sınır koşulu lineer şekilde parametreye bağlı Dirac operatörü için düz ve ters problem incelenmiştir.

2011 yılında B. Keskin ve A. S. Özkan tarafından sonlu aralıkta bir noktada süreksizliğe sahip ve sınır ile süreksizlik koşulları lineer şekilde parametreye bağlı Dirac operatörü için düz ve ters problemler incelenmiştir. Bu problem için karşılık gelen operatör modeli kurulmuş, özfonksiyonların asimptotiği elde edilmiş, Weyl fonksiyonu tanımlanmış ve bazı teklik teoremleri ispatlanmıştır.

2011 yılında A. S. Özkan ve R. Kh. Amirov tarafından sonlu aralıkta bir noktada süreksizliğe sahip ve ikinci sınır koşulunda lineer olmayan şekilde parametre bulunduran Dirac operatörü için düz ve ters problemler incelenmiş, bu probleme karşılık gelen operatör modeli kurulmuş, özfonksiyonların asimptotiği elde edilmiş ve bazı teklik teoremleri ispatlanmıştır.

2013 yılında B. Keskin tarafından sonlu aralıkta sonlu sayıda süreksizlik noktasına sahip, ikinci sınır koşulu ile süreksizlik koşullarında lineer olmayan şekilde parametre bulunduran Dirac operatörü için düz ve ters problemler incelenmiştir.

2015 yılında Chuan Fu Yang tarafından sonlu aralıkta bir noktada süreksizliğe sahip ve her iki sınır koşulu lineer olmayan, süreksizlik koşulu ise lineer şekilde parametre içeren Dirac operatörü için düz ve ters problemler incelenmiştir.

2015 yılında A. S. Özkan tarafından sınır koşullarında Herglotz-Nevanlinna tipinde fonksiyonlar içeren Sturm Lioville problemi çalışılmıştır.

2016 yılında ise Y. Güldü tarafından sonlu aralıkta iki noktada süreksizliğe sahip ve her iki sınır koşulu ile süreksizlik koşulları lineer şekilde parametre içeren Dirac operatörü için düz ve ters problemler incelenmiştir. Ayrıca bu problem için Green fonksiyonu elde edilmiştir.

2016 yılında M. Arslantaş tarafından sonlu sayıda süreksizlik noktasına sahip süreksiz katsayılı Dirac operatörü için düz ve ters problemler isimli doktora tez çalışması yapılmıştır.

2017 yılında Y. Güldü, A. S. Özkan tarafından sınır koşulu Herglotz Nevanlinna tipinde fonksiyon içeren Dirac operatörü için ters problem çalışılmıştır.

3. PROBLEMİN KONUMU VE SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Aşağıda verilen Dirac diferansiyel denklemi ile sınır ve süreksizlik koşulları tarafından üretilen L sınır değer problemi ele alınsın:

$$\ell\left[y(x)\right] := By'(x) + Q(x)y(x) = \lambda y(x),\ x \in [a,b]\,, \tag{3.1}$$

$$U\left(y\right) := y_2(a) + f_1(\lambda)y_1(a) = 0 \tag{3.2}$$

$$V\left(y\right) := y_2(b) + f_2(\lambda)y_1(b) = 0 \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} y_1(w_i+0) = \alpha_i y_1(w_i-0) \\ y_2(w_i+0) = \alpha_i^{-1}y_2(w_i-0) + h_i\left(\lambda\right)y_1(w_i-0) \end{cases} \quad (i=\overline{1,2}) \tag{3.4}$$

Burada $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Q(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p\left(x\right) \end{pmatrix}$, $y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$,

$p(x), q(x)$ reel değerli $L_2(a,b)$ sınıfına ait fonksiyonlar, λ spektral parametre,

$a = w_0 < w_1 < w_2 < w_3 = b$, α_i' ler pozitif reel sayılar,

$$f_i\left(\lambda\right) = a_i\lambda + b_i - \sum_{k=1}^{N_i}\frac{f_{ik}}{\lambda - g_{ik}} \quad (i=1,2) \tag{3.5}$$

$$h_i\left(\lambda\right) = m_i\lambda + n_i - \sum_{k=1}^{P_i}\frac{u_{ik}}{\lambda - t_{ik}} \quad (i=1,2) \tag{3.6}$$

olup a_i, b_i, f_{ik}, g_{ik}, m_i, n_i, u_{ik} ve t_{ik} reel sayılar, $a_1 < 0$, $f_{1k} < 0$, $a_2 > 0$, $f_{2k} > 0, m_i > 0$, $u_{ik} > 0$ ve $g_{i1} < g_{i2} < ... < g_{iNi}$, $t_{i1} < t_{i2} < ... < t_{iPi}$ dir.

Burada $f_i(\lambda) = \infty$ olursa, (3.2) ve (3.3) koşulları $y_1(a) = y_1(b) = 0$ biçiminde Dirichlet koşullarına dönüşür. Bunun dışında, (3.4) koşulunda, $h_i\left(\lambda\right) = \infty$ olursa, (3.4) ($i = 1, 2$ sırasına göre) süreksizlik koşulları

$y_1(w_2+0) = \alpha_2 y_1(w_2-0)$, $y_2(w_2+0) = \alpha_2^{-1}y_2(w_2-0) + h_2\left(\lambda\right)y_1(w_2-0)$

ve

$y_1(w_1+0) = \alpha_1 y_1(w_1-0)$, $y_2(w_1+0) = \alpha_1^{-1}y_2(w_1-0) + h_1\left(\lambda\right)y_1(w_1-0)$ koşullarına dönüşür.

$H := L_2(a,b) \oplus L_2(a,b) \oplus \mathbb{C}^{N_1+1} \oplus \mathbb{C}^{N_2+1} \oplus \mathbb{C}^{P_1+1} \oplus \mathbb{C}^{P_2+1}$ uzayını ele alalım ve bu uzaya ait Y elemanı

$Y=(y_1(x),y_2(x),\tau,\eta,\beta,\gamma)$ biçiminde olup

$\tau=(Y_1,Y_2,\ldots,Y_{N_1},Y_{N_1+1})$

$\eta=(L_1,L_2,\ldots,L_{N_2},L_{N_2+1})$

$\beta=(R_1,R_2,\ldots,R_{P_1},R_{P_1+1})$

$\gamma=(V_1,V_2,\ldots,V_{P_2},V_{P_2+1})$ dir.

Burada H uzayı; $Y=(y_1(x),y_2(x),\tau,\eta,\beta,\gamma)$ ve

$Z=(z_1(x),z_2(x),\tau',\eta',\beta',\gamma')$ bu uzayın elemanları olmak üzere,

üzerinde

$$
\begin{aligned}
< \ Y,Z >:= & \int_0^1 (y_1(x)\overline{z}_1(x)+y_2(x)\overline{z}_2(x))\,dx \\
& -\frac{Y_{N_1+1}\overline{Y'_{N_1+1}}}{a_1}+\frac{L_{N_2+1}\overline{L'_{N_2+1}}}{a_2}+\frac{\alpha_1}{m_1}R_{P_1+1}\overline{R'_{P_1+1}} \\
& +\frac{\alpha_2}{m_2}V_{P_2+1}\overline{V'_{P_2+1}}+\sum_{k=1}^{N_1}Y_k\overline{Y'_k}\left(-\frac{1}{f_{1k}}\right) \\
& +\sum_{k=1}^{N_2}\frac{L_k\overline{L'_k}}{f_{2k}}+\sum_{k=1}^{P_1}\alpha_1\frac{R_r\overline{R'_r}}{u_{1k}}+\sum_{k=1}^{P_2}\alpha_2\frac{V_r\overline{V'_r}}{u_{2k}}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

biçiminde tanımlı bir Hilbert uzayıdır.

Bu H Hilbert uzayı üzerinde tanım kümesi

$D(T)=\{Y\in H: y_1(x),y_2(x)\in AC\,(a,b)\,,$

$ly\in L_2\,(a,b)\,,\ y_1(w_i^+)=\alpha_i y_1(w_i^-), i=1,2$

$Y_{N_1+1}:=-a_1y_1(a),\ L_{N_2+1}:=-a_2y_1(b),$

$R_{P_1+1}:=-m_1y_1(w_1^-),V_{P_2+1}:=-m_2y_1(w_2^-)\}$

olan T operatörü tanımlansın öyle ki

$$TY:=(ly,T\tau,T\eta,T\beta,T\gamma)$$

dir. Burada, $T\tau=TY_i=\begin{cases} g_{1i}Y_i-f_{1i}y_1(a),\ i=\overline{1,N_1} \\ y_2(a)+b_1y_1(a)+\sum\limits_{k=1}^{N_1}Y_k,\ i=N_1+1 \end{cases}$

$$T\eta = TL_i = \begin{cases} g_{2i}L_i - f_{2i}y_1(b),\ i = \overline{1, N_2} \\ y_2(b) + b_2 y_1(b) + \sum\limits_{k=1}^{N_2} L_k,\ i = N_2 + 1 \end{cases}$$

$$T\beta = TR_i = \begin{cases} t_{1i}R_i - u_{1i}y_1(w_1^-),\ i = \overline{1, P_1} \\ -y_2(w_1^+) + \alpha_1^{-1} y_2\left(w_1^-\right) + n_1 y_1\left(w_1^-\right) + \sum\limits_{k=1}^{P_1} R_k,\ i = P_1 + 1 \end{cases}$$

$$T\gamma = TV_i = \begin{cases} t_{2i}V_i - u_{2i}y_1(w_2^-),\ i = \overline{1, P_2} \\ -y_2(w_2^+) + \alpha_2^{-1} y_2\left(w_2^-\right) + n_2 y_1\left(w_2^-\right) + \sum\limits_{k=1}^{P_2} V_k,\ i = P_2 + 1 \end{cases}$$

şeklindedir. Buna göre $TY = \lambda Y$ eşitliği $D(T) \subset H$ tanım kümesi altında (3.1)-(3.4) problemine karşılık gelmektedir.

Teorem 3.2: T operatörünün özdeğerleri ile (3.1)-(3.4) probleminin özdeğerleri çakışır.

İspat: λ , T operatörünün özdeğeri olsun ve

$$Y(x) = (y_1(x), y_2(x), \tau, \eta, \beta, \gamma) \in H$$

λ ya karşılık gelen özvektör olsun. $Y \in D(T)$ olduğundan
$y_1(w_i + 0) - \alpha_i y_1(w_i - 0) = 0$ sağlanır. Ayrıca $TY = \lambda Y$ eşitliği kullanılarak ilk olarak $\ell y(x) = \lambda y(x)$ sağlanır. Diğer taraftan,

$$T\tau = TY_i = g_{1i} - Y_i - f_{1i}y_1(a) = \lambda Y_i,\ i = \overline{1, N_1}$$
$$TY_{N_1+1} = y_2(a) + b_1 y_1(a) + \sum_{k=1}^{N_1} Y_k = -a_1 y_1\left(a\right)\lambda$$
$$T\eta = TL_i = g_{2i}L_i - f_{2i}y_1(b) = \lambda L_i,\ i = \overline{1, N_2}$$
$$TL_{N_2+1} = y_2(b) + b_2 y_1(b) + \sum_{k=1}^{N_2} L_k = -a_2 y_1\left(b\right)\lambda$$
$$T\beta = TR_i = t_{1i}R_i - u_{1i}y_1(w_1^-),\ i = \overline{1, P_1}$$
$$TR_{P_1+1} = -y_2(w_1^+) + \alpha_1^{-1} y_2\left(w_1^-\right) + n_1 y_1\left(w_1^-\right) + \sum_{k=1}^{P_1} R_k = -m_1 y_1\left(w_1^-\right)\lambda$$
$$T\gamma = TV_i = t_{2i}V_i - u_{2i}y_1(w_2^-),\ i = \overline{1, P_2}$$
$$TV_{P_2+1} = -y_2(w_2^+) + \alpha_2^{-1} y_2\left(w_2^-\right) + n_2 y_1\left(w_2^-\right) + \sum_{k=1}^{P_2} V_k = -m_2 y_1\left(w_2^-\right)\lambda$$

olup, böylece L probleminin (3.2)-(3.3) sınır koşulları ve (3.4) süreksizlik koşullarının sağlandığı görülür.

Diğer taraftan, eğer $\lambda = g_{ik}\,(i = 1, 2$ ve $k = \{1, 2, \ldots N_i\})$ T operatörünün bir özdeğeri ise, bu durumda, yukarıdaki eşitlikler ve T tanım kümesinden, (3.1) denklemi $y_1(a, g_{1k}) = 0$, $y_1(b, g_{2k}) = 0$ eşitlikleri ve (3.4) süreksizlik koşulları sağlanır.

Ayrıca, $\lambda = t_{ik}\,(i = 1, 2$ ve $k = \{1, 2, \ldots P_i\})$ T operatörünün bir özdeğeri olursa, bu durumda, yukarıdaki eşitlikler ve T tanım kümesinden, (3.1) denklemi, (3.2) , (3.3) koşulları ve $y_1(w_i^-, t_{ik}) = 0 = y_1(w_i^+, t_{ik})$ geçerlidir.
O halde, λ, L probleminin de bir özdeğeri olur.

Tersine λ, L probleminin bir özdeğeri ve $\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$, λ'ya karşılık gelen özfonksiyon olsun.
Eğer $\lambda \neq g_{ik}\,(i = 1, 2$ ve $k = \{1, 2, \ldots N_i\})$ ve $\lambda \neq t_{ik}\,(i = 1, 2$ ve $k = \{1, 2, \ldots P_i\})$ ise, $Ly = \lambda y$ olacağından, λ, T operatörünün bir özdeğeri ve

$$\begin{aligned} Y = \Big(& y_1(x), y_2(x), \tfrac{f_{11}}{g_{11}-\lambda} y_1(a), \tfrac{f_{12}}{g_{12}-\lambda} y_1(a), \ldots, \tfrac{f_{1N_1}}{g_{1N_1}-\lambda} y_1(a), -a_1 y_1(a), \\ & \tfrac{f_{21}}{g_{21}-\lambda} y_1(b), \tfrac{f_{22}}{g_{22}-\lambda} y_1(b), \ldots, \tfrac{f_{2N_2}}{g_{2N_2}-\lambda} y_1(b), -a_2 y_1(b), \\ & \tfrac{u_{11}}{t_{11}-\lambda} y_1(w_1^-), \tfrac{u_{12}}{t_{12}-\lambda} y_1(w_1^-), \ldots, \tfrac{u_{1P_1}}{t_{1P_1}-\lambda} y_1(w_1^-), -m_1 y_1(w_1^-), \\ & \tfrac{u_{21}}{t_{21}-\lambda} y_1(w_2^-), \tfrac{u_{22}}{t_{22}-\lambda} y_1(w_2^-), \ldots, \tfrac{u_{2P_2}}{t_{2P_2}-\lambda} y_1(w_2^-), -m_2 y_1(w_2^-)\Big) \end{aligned}$$

λ' ya karşılık gelen özvektör olur.
Eğer $\lambda = g_{1k}\,(k = \{1, 2, \ldots N_1\})$ olursa, bu durumda

$Y = (y_1(x), y_2(x), Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_1}, 0, L_1, L_2, \ldots, L_{N_2}, L_{N_2+1}, R_1, R_2, \ldots, R_{P_1}, R_{P_1+1},$
$V_1, V_2, \ldots, V_{P_2}, V_{P_2+1})$, $Y_i = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ -y_2(a), & i = k \end{cases}$, $i = 1, 2, \ldots, N_1$ vektörü, g_{1k}'ya karşılık gelen özvektördür.

Eğer $\lambda = g_{2k}\,(k = \{1, 2, \ldots N_2\})$ olursa, bu durumda

$Y = (y_1(x), y_2(x), Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_1}, Y_{N_1+1}, L_1, L_2, \ldots, L_{N_2}, 0, R_1, R_2, \ldots, R_{P_1}, R_{P_1+1},$
$V_1, V_2, \ldots, V_{P_2}, V_{P_2+1})$, $L_i = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ -y_2(b), & i = k \end{cases}$, $i = 1, 2, \ldots, N_2$ vektörü, g_{2k}'ya karşılık gelen özvektördür.

Eğer $\lambda = t_{1k}\,(k = \{1, 2, \ldots P_1\})$ olursa, bu durumda

$Y = (y_1(x), y_2(x), Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_1}, Y_{N_1}, L_1, L_2, \ldots, L_{N_2}, L_{N_2+1}, R_1, R_2, \ldots, R_{P_1}, 0,$

$V_1, V_2, \ldots, V_{P_2}, V_{P_2+1})$, $R_i = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ y_2\left(w_1^+\right) - \alpha_1^{-1} y_2\left(w_1^-\right), & i = k \end{cases}$, $i = 1, 2, \ldots, P_1$ vektörü, t_{1k}'ya karşılık gelen özvektördür.

Eğer $\lambda = t_{2k}\,(k = \{1, 2, \ldots P_2\})$ olursa, bu durumda

$Y = (y_1(x), y_2(x), Y_1, Y_2, \ldots, Y_{N_1}, Y_{N_1}, L_1, L_2, \ldots, L_{N_2}, L_{N_2+1}, R_1, R_2, \ldots, R_{P_1}, R_{P_1+1},$

$V_1, V_2, \ldots, V_{P_2}, 0)$, $V_i = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ y_2\left(w_2^+\right) - \alpha_2^{-1} y_2\left(w_2^-\right), & i = k \end{cases}$, $i = 1, 2, \ldots, P_2$ vektörü, t_{2k}'ya karşılık gelen özvektördür.

Şimdi (3.1) denkleminin belirli çözümleri araştırılsın. Öncelikle homojen sistemin genel çözümü bulunsun. $p(x) = q(x) = 0$ durumunda

$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{cases} c_1 \cos \lambda x + i c_2 \sin \lambda x \\ c_1 \sin \lambda x - c_2 \cos \lambda x \end{cases}$ şeklindedir.

Dolayısıyla

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_2'(x) \\ -y_1'(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p y_1(x) + q y_2(x) \\ q y_1(x) - p y_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y_1(x) \\ \lambda y_2(x) \end{pmatrix}$$

olup,

$$\begin{aligned} y_2'(x) + p y_1(x) + q y_2(x) &= \lambda y_1(x) \\ -y_1'(x) + q y_1(x) - p y_2(x) &= \lambda y_2(x) \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Buna göre,

$$\begin{cases} y_1(x) &= c_1(x) \cos \lambda x + i c_2(x) \sin \lambda x \\ y_2(x) &= c_1(x) \sin \lambda x - c_2(x) \cos \lambda x \end{cases}$$

şeklinde aranır. Yukarıdaki şekilde aranan çözümler denklem sisteminde yerine yazılırsa,

$$\begin{cases} y_1'(x) &= -c_1(x) \lambda \sin \lambda x + c_2(x) \lambda \cos \lambda x \\ y_2'(x) &= c_1(x) \lambda \cos \lambda x + c_2(x) \lambda \sin \lambda x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1'(x) = c_1'(x)\cos\lambda x - c_1(x)\lambda\sin\lambda x \\ \qquad +c_2'(x)\sin\lambda x + c_2(x)\lambda\cos\lambda x \\ \\ y_2'(x) = c_1'(x)\sin\lambda x + c_1(x)\lambda\cos\lambda x \\ \qquad -c_2'(x)\cos\lambda x + c_2(x)\lambda\sin\lambda x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_2'(x) - \lambda y_1(x) &= -py_1(x) - qy_2(x) \\ -y_1'(x) - \lambda y_2(x) &= -qy_1(x) + py_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_1'(x)\sin\lambda x + c_1(x)\lambda\cos\lambda x - c_2'(x)\cos\lambda x \\ & +c_2(x)\lambda\sin\lambda x - c_1(x)\lambda\cos\lambda x - c_2(x)\lambda\sin\lambda x \\ & = -py_1(x) - qy_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -c_1'(x)\cos\lambda x + c_1(x)\lambda\sin\lambda x - c_2'(x)\sin\lambda x - c_2(x)\lambda\cos\lambda x \\ & -c_1(x)\lambda\sin\lambda x + c_2(x)\lambda\cos\lambda x \\ & = -qy_1(x) + py_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_1'(x)\sin\lambda x - c_2'(x)\cos\lambda x = -py_1(x) - qy_2(x) \\ & -c_1'(x)\cos\lambda x - c_2'(x)\sin\lambda x = -qy_1(x) + py_2(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & c_1'(x)\sin\lambda x - c_2'(x)\cos\lambda x = -py_1(x) - qy_2(x) \quad /\cos\lambda x/\sin\lambda x \\ & -c_1'(x)\cos\lambda x - c_2'(x)\sin\lambda x = -qy_1(x) + py_2(x) \quad /\sin\lambda x/\cos\lambda x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int_a^x \left[-p(t)\sin\lambda t + q(t)\cos\lambda t\right] y_1(t)dt \\ &\quad + \int_a^x \left[-q(t)\sin\lambda t - p(t)\cos\lambda t\right] y_2(t)dt \\ &\quad + c_1^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2(x) &= \int_a^x \left[p(t)\cos\lambda t + q(t)\sin\lambda t\right] y_1(t)dt \\ &\quad + \int_a^x \left[q(t)\cos\lambda t - p(t)\sin\lambda t\right] y_2(t)dt \\ &\quad + c_2^0 \end{aligned}$$

bulunur. Bunlar aranan çözümde yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
y_1(x) &= \int_a^x [p(t)\sin\lambda(x-t)+q(t)\cos\lambda(x-t)]\, y_1(t)dt \\
&+\int_a^x [q(t)\sin\lambda(x-t)-p(t)\cos\lambda(x-t)]\, y_2(t)\ dt \\
&+c_1^0\cos\lambda x + c_2^0\sin\lambda x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= \int_a^x [-p(t)\cos\lambda\,(x-t)+q(t)\sin\lambda\,(x-t)]\, y_1(t)dt \\
&+\int_a^x [-q(t)\cos\lambda\,(x-t)-p(t)\ \ \sin\lambda\,(x-t)]\, y_2(t)\ dt \\
&+c_1^0\sin\lambda x - c_2^0\cos\lambda x
\end{aligned}
$$

integral denklemleri bulunur.

$f_i\left(\lambda\right)=\frac{a_i(\lambda)}{b_i(\lambda)}$, $i=1,2$ biçiminde yazılır öyleki; ,

$a_i(\lambda)=(a_i\lambda+b_i)\prod\limits_{k=1}^{N_i}\left(\lambda-g_{ik}\right)-\sum\limits_{k=1}^{N_i}\prod\limits_{j=1(j\neq k)}^{N_i}f_{ik}\left(\lambda-g_{ij}\right)$

$b_i(\lambda)=\prod\limits_{k=1}^{Ni}\left(\lambda-g_{ik}\right)$ dır. Burada $a_2(\lambda)$ ile $b_2(\lambda)$ ortak sıfırlara sahip değildir.

Buna göre,

$\varphi_i(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_{i1}(x,\lambda)\\ \varphi_{i2}(x,\lambda)\end{pmatrix}$, ve $\psi_i(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\psi_{i1}(x,\lambda)\\ \psi_{i2}(x,\lambda)\end{pmatrix}$, $i=\overline{1,3}$ fonksiyonları

$\varphi_1(a,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_{11}(a,\lambda)\\ \varphi_{12}(a,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b_1(\lambda)\\ a_1(\lambda)\end{pmatrix}$,

$\psi_1(b,\lambda)=\begin{pmatrix}\psi_{11}(b,\lambda)\\ \psi_{12}(b,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-b_2(\lambda)\\ a_2(\lambda)\end{pmatrix}$

başlangıç koşullarını ve (3.4) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

Teorem 3.3: (3.1) denkleminin $\varphi(x,\lambda)$ çözümü için aşağıdaki integral denklemler geçerlidir:

$a \leq x < w_1$ için

$$\begin{aligned}\varphi_{11}(x,\lambda) &= -b_1(\lambda)\cos\lambda(x-a) - a_1(\lambda)\sin\lambda(x-a) \\ &+ \int\limits_a^x \left[p(t)\sin\lambda(x-t) + q(t)\cos\lambda(x-t)\right]\varphi_1(t,\lambda)dt \\ &+ \int\limits_a^x \left[q(t)\sin\lambda(x-t) - p(t)\cos\lambda(x-t)\right]\varphi_2(t,\lambda)\ dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{12}(x,\lambda) &= -b_1(\lambda)\sin\lambda(x-a) + a_1(\lambda)\cos\lambda(x-a) \\ &+ \int\limits_a^x \left[-p(t)\cos\lambda(x-t) + q(t)\sin\lambda(x-t)\right]\varphi_1(t,\lambda)dt \\ &+ \int\limits_a^x \left[-q(t)\cos\lambda(x-t) - p(t)\sin\lambda(x-t)\right]\varphi_2(t,\lambda)\ dt\end{aligned}$$

$w_1 < x < w_2$ için

$\varphi_{21}(x,\lambda) = -\alpha_1 b_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\cos\lambda\,(x-w_1)$

$-\alpha_1^{-1}a_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(x-w_1)$

$-\alpha_1 a_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\cos\lambda\,(x-w_1)$

$+\alpha_1^{-1}b_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(x-w_1)$

$$\begin{aligned}&+\alpha_1\int\limits_a^{w_1}\left[p(t)\sin\lambda(w_1-t) + q(t)\cos\lambda(w_1-t)\right] \\ &\quad\times\cos\lambda\,(x-w_1)\,\varphi_1(t,\lambda)dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-\alpha_1^{-1}\int\limits_a^{w_1}\left[-p(t)\cos\lambda(w_1-t) + q(t)\sin\lambda(w_1-t)\right] \\ &\quad\times\sin\lambda\,(x-w_1)\,\varphi_1(t,\lambda)dt\end{aligned}$$

$$+\alpha_1\int\limits_a^{w_1}\left[q(t)\sin\lambda(w_1-t) - p(t)\cos\lambda(w_1-t)\right]$$

$$\times \cos \lambda\left(x-w_1\right) \varphi_2(t, \lambda) d t$$

$$-\alpha_1^{-1} \int_a^{w_1}\left[-q(t) \cos \lambda(w_1-t)-p(t) \sin \lambda(w_1-t)\right]$$
$$\times \sin \lambda\left(x-w_1\right) \varphi_2(t, \lambda) d t$$

$$+h_1(\lambda) b_1(\lambda) \cos \lambda(w_1-a) \sin \lambda\left(x-w_1\right)$$

$$+h_1(\lambda) a_1(\lambda) \sin \lambda(w_1-a) \sin \lambda\left(x-w_1\right)$$

$$-h_1(\lambda) \int_a^{w_1}\left[p(t) \sin \lambda(w_1-t)+q(t) \cos \lambda(w_1-t)\right]$$
$$\times \sin \lambda\left(x-w_1\right) \varphi_{21}(t, \lambda) d t$$

$$-h_1(\lambda) \int_a^{w_1}\left[q(t) \sin \lambda(w_1-t)-p(t) \cos \lambda(w_1-t)\right]$$
$$\times \sin \lambda\left(x-w_1\right) \varphi_{22}(t, \lambda) d t$$

$$+\int_{w_1}^{x}\left[p(t) \sin \lambda(x-t)+q(t) \cos \lambda(x-t)\right] \varphi_{21}(t, \lambda) d t$$

$$+\int_{w_1}^{x}\left[q(t) \sin \lambda(x-t)-p(t) \cos \lambda(x-t)\right] \varphi_{22}(t, \lambda) d t$$

$$\varphi_{22}(x, \lambda)=-\alpha_1 b_1(\lambda) \cos \lambda(w_1-a) \sin \lambda\left(x-w_1\right)$$

$$-\alpha_1^{-1} a_1(\lambda) \cos \lambda(w_1-a) \cos \lambda\left(x-w_1\right)$$

$$-\alpha_1 a_1(\lambda) \sin \lambda(w_1-a) \sin \lambda\left(x-w_1\right)$$

$$-\alpha_1^{-1} b_1(\lambda) \sin \lambda(w_1-a) \cos \lambda\left(x-w_1\right)$$

$$+\alpha_1 \int_a^{w_1}\left[p(t) \sin \lambda(w_1-t)+q(t) \cos \lambda(w_1-t)\right]$$
$$\times \sin \lambda\left(x-w_1\right) \varphi_{21}(t, \lambda) d t$$

$$+\alpha_1^{-1} \int_a^{w_1}\left[-p(t) \cos \lambda(w_1-t)+q(t) \sin \lambda(w_1-t)\right]$$
$$\times \cos \lambda\left(x-w_1\right) \varphi_{21}(t, \lambda) d t$$

$$+\alpha_1 \int_a^{w_1} [q(t)\sin\lambda(w_1-t) - p(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times \sin\lambda\,(x-w_1)\,\varphi_{22}(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_1^{-1} \int_a^{w_1} [-q(t)\cos\lambda(w_1-t) - p(t)\sin\lambda(w_1-t)]$$
$$\times \cos\lambda\,(x-w_1)\,\varphi_{22}(t,\lambda)dt$$

$$-h_1(\lambda)b(\lambda)\cos\lambda\rho_1(w_1-a)\cos\lambda\,(x-w_1)$$

$$-h_1(\lambda)a(\lambda)\sin\lambda\rho_1(w_1-a)\cos\lambda\,(x-w_1)$$

$$+h_1(\lambda) \int_a^{w_1} [p(t)\sin\lambda(w_1-t) + q(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times \cos\lambda\,(x-w_1)\,\varphi_{21}(t,\lambda)dt$$

$$+h_1(\lambda) \int_a^{w_1} [q(t)\sin\lambda(w_1-t) - p(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times \cos\lambda\,(x-w_1)\,\varphi_{22}(t,\lambda)dt$$

$$+\int_{w_1}^{x} [-p(t)\cos\lambda(x-t) + q(t)\sin\lambda(x-t)]\,\varphi_{21}(t,\lambda)dt$$

$$+\int_{w_1}^{x} [-q(t)\cos\lambda(x-t) - p(t)\sin\lambda(x-t)]\,\varphi_{22}(t,\lambda)dt$$

$w_2 < x \leq b$ için

$$\varphi_{31}(x,\lambda) = -\alpha_2\alpha_1 b_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)$$

$$+\alpha_2^{-1}\alpha_1 b_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$-\alpha_2\alpha_1^{-1} a_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)$$

$$+\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1} a_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$-\alpha_2\alpha_1 a_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)$$

$$+\alpha_2^{-1}\alpha_1 a_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$+\alpha_2\alpha_1^{-1}b_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)$$

$$-\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}b_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$+\alpha_2\alpha_1\int_a^{w_1}[p(t)\sin\lambda(w_1-t)+q(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\cos\lambda\,(x-w_2)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$-\alpha_2^{-1}\alpha_1\int_a^{w_1}[p(t)\sin\lambda(w_1-t)+q(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\sin\lambda\,(x-w_2)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$-\alpha_2\alpha_1^{-1}\int_a^{w_1}[-p(t)\cos\lambda(w_1-t)+q(t)\sin\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\cos\lambda\,(x-w_2)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$-\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\int_a^{w_1}[-p(t)\cos\lambda(w_1-t)+q(t)\sin\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\sin\lambda\,(x-w_2)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2\alpha_1\int_a^{w_1}[q(t)\sin\lambda(w_1-t)-p(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\cos\lambda\,(x-w_2)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$-\alpha_2^{-1}\alpha_1\int_a^{w_1}[q(t)\sin\lambda(w_1-t)-p(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\sin\lambda\,(x-w_2)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$
$$-\alpha_2\alpha_1^{-1}\int_a^{w_1}[-q(t)\cos\lambda(w_1-t)-p(t)\sin\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\cos\lambda\,(x-w_2)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$-\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\int_a^{w_1}[-q(t)\cos\lambda(w_1-t)-p(t)\sin\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\sin\lambda\,(x-w_2)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2h_1(\lambda)b_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)$$

$$+\alpha_2^{-1}h_1(\lambda)b_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$+\alpha_2 h_1(\lambda)a_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)$$

$$+\alpha_2^{-1}h_1(\lambda)a_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$-\alpha_2 h_1(\lambda)\int_a^{w_1}[p(t)\sin\lambda(w_1-t)+q(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\cos\lambda\,(x-w_2)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$-\alpha_2^{-1}h_1(\lambda)\int_a^{w_1}[p(t)\sin\lambda(w_1-t)+q(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\sin\lambda\,(x-w_2)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$-\alpha_2 h_1(\lambda)\int_a^{w_1}[q(t)\sin\lambda(w_1-t)-p(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\cos\lambda\,(x-w_2)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$-\alpha_2^{-1}h_1(\lambda)\int_{w_1}^{x}[q(t)\sin\lambda(w_1-t)-p(t)\cos\lambda\,(w_1-t)]$$
$$\times\sin\lambda\,(x-w_2)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2\int_{w_1}^{w_2}[p(t)\sin\lambda(w_2-t)+q(t)\cos\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\cos\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$-\alpha_2^{-1}\int_{w_1}^{w_2}[-p(t)\cos\lambda(w_2-t)+q(t)\sin\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\sin\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2\int_{w_1}^{w_2}[q(t)\sin\lambda(w_2-t)-p(t)\cos\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\cos\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$-\alpha_2^{-1}\int_{w_1}^{w_2}[-q(t)\cos\lambda(w_2-t)-p(t)\sin\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\sin\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$+h_2(\lambda)b_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$+h_2(\lambda)\alpha_1^{-1}a_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$+h_2(\lambda)a_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$-h_2(\lambda)\alpha_1^{-1}b_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$\begin{aligned}&-h_2(\lambda)\alpha_1\int_a^{w_1}[p(t)\sin\lambda(w_1-t)+q(t)\cos\lambda(w_1-t)]\\&\qquad\times\cos\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_1(t,\lambda)dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+h_2(\lambda)\alpha_1^{-1}\int_a^{w_1}[-p(t)\cos\lambda(w_1-t)+q(t)\sin\lambda(w_1-t)]\\&\qquad\times\sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_1(t,\lambda)dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&-h_2(\lambda)\alpha_1\int_a^{w_1}[q(t)\sin\lambda(w_1-t)-p(t)\cos\lambda(w_1-t)]\\&\qquad\times\cos\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_2(t,\lambda)dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+h_2(\lambda)\alpha_1^{-1}\int_a^{w_1}[-q(t)\cos\lambda(w_1-t)-p(t)\sin\lambda(w_1-t)]\\&\qquad\times\sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_2(t,\lambda)dt\end{aligned}$$

$$-h_2(\lambda)h_1(\lambda)b_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$-h_2(\lambda)h_1(\lambda)a_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$\begin{aligned}&+h_2(\lambda)h_1(\lambda)\int_a^{w_1}[p(t)\sin\lambda(w_1-t)+q(t)\cos\lambda(w_1-t)]\\&\qquad\times\sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_1(t,\lambda)dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&+h_2(\lambda)h_1(\lambda)\int_a^{w_1}[q(t)\sin\lambda(w_1-t)-p(t)\cos\lambda(w_1-t)]\\&\qquad\times\sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_2(t,\lambda)dt\end{aligned}$$

$$-h_2(\lambda)\int\limits_{w_1}^{w_2}[p(t)\sin\lambda(w_2-t)+q(t)\cos\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\sin\lambda\left(x-w_2\right)\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$-h_2(\lambda)\int\limits_{w_1}^{w_2}[q(t)\sin\lambda(w_2-t)-p(t)\cos\lambda(w_2-t)]\,t$$
$$\times\sin\lambda\left(x-w_2\right)\varphi_2(t,\lambda)d$$

$$+\int\limits_{w_2}^{x}[p(t)\sin\lambda(x-t)+q(t)\cos\lambda(x-t)]\,\varphi_{21}(t,\lambda)dt$$
$$+\int\limits_{w_2}^{x}[q(t)\sin\lambda(x-t)-p(t)\cos\lambda(x-t)]\,\varphi_{22}(t,\lambda)dt$$

$$\varphi_{32}(x,\lambda)=-\alpha_2\alpha_1b_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\cos\lambda\left(w_2-w_1\right)\sin\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$-\alpha_2^{-1}\alpha_1b_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\sin\lambda\left(w_2-w_1\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$-\alpha_2\alpha_1^{-1}a_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\sin\lambda\left(w_2-w_1\right)\sin\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$-\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}a_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\cos\lambda\left(w_2-w_1\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$-\alpha_2\alpha_1a_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\cos\lambda\left(w_2-w_1\right)\sin\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$-\alpha_2^{-1}\alpha_1a_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\sin\lambda\left(w_2-w_1\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$+\alpha_2\alpha_1^{-1}b_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\sin\lambda\left(w_2-w_1\right)\sin\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$-\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}b_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\cos\lambda\left(w_2-w_1\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$+\alpha_2\alpha_1\int\limits_{a}^{w_1}[p(t)\sin\lambda(w_1-t)+q(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\cos\lambda\left(w_2-w_1\right)\sin\lambda\left(x-w_2\right)\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2^{-1}\alpha_1\int\limits_{a}^{w_1}[p(t)\sin\lambda(w_1-t)+q(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\sin\lambda\left(w_2-w_1\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$-\alpha_2\alpha_1^{-1}\int\limits_{a}^{w_1}[-p(t)\cos\lambda(w_1-t)+q(t)\sin\lambda(w_1-t)]$$

$$\times \sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\int_a^{w_1}[-p(t)\cos\lambda(w_1-t)+q(t)\sin\lambda(w_1-t)]$$
$$\times \cos\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2\alpha_1\int_a^{w_1}[q(t)\sin\lambda(w_1-t)-p(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times \cos\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2^{-1}\alpha_1\int_a^{w_1}[q(t)\sin\lambda(w_1-t)-p(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times \sin\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$-\alpha_2\alpha_1^{-1}\int_a^{w_1}[-q(t)\cos\lambda(w_1-t)-p(t)\sin\lambda(w_1-t)]$$
$$\times \sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2^{-1}\alpha_1^{-1}\int_a^{w_1}[-q(t)\cos\lambda(w_1-t)-p(t)\sin\lambda(w_1-t)]$$
$$\times \cos\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2h_1(\lambda)b_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$-\alpha_2^{-1}h_1(\lambda)b_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)$$

$$+\alpha_2h_1(\lambda)a_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$-\alpha_2^{-1}h_1(\lambda)a_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\cos\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)$$

$$-\alpha_2h_1(\lambda)\int_a^{w_1}[p(t)\sin\lambda(w_1-t)+q(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times \sin\lambda\,(w_2-w_1)\sin\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2^{-1}h_1(\lambda)\int_a^{w_1}[p(t)\sin\lambda(w_1-t)+q(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times \cos\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$-\alpha_2 h_1(\lambda)\int\limits_a^{w_1}\left[q(t)\sin\lambda(w_1-t)-p(t)\cos\lambda(w_1-t)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(w_2-w_1\right)\sin\lambda\left(x-w_2\right)\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2^{-1} h_1(\lambda)\int\limits_a^{w_1}\left[q(t)\sin\lambda(w_1-t)-p(t)\cos\lambda(w_1-t)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(w_2-w_1\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2\int\limits_{w_1}^{w_2}\left[p(t)\sin\lambda(w_2-t)+q(t)\cos\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(x-w_2\right)\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2^{-1}\int\limits_{w_1}^{w_2}\left[-p(t)\cos\lambda(w_2-t)+q(t)\sin\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(x-w_2\right)\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2\int\limits_{w_1}^{w_2}\left[q(t)\sin\lambda(w_2-t)-p(t)\cos\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(x-w_2\right)\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$+\alpha_2^{-1}\int\limits_{w_1}^{w_2}\left[-q(t)\cos\lambda(w_2-t)-p(t)\sin\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(x-w_2\right)\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$-h_2(\lambda)\alpha_1 b_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\cos\lambda\left(w_2-w_1\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$-h_2(\lambda)\alpha_1^{-1} a_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\sin\lambda\left(w_2-w_1\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$-h_2(\lambda)\alpha_1 a_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\cos\lambda\left(w_2-w_1\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$+h_2(\lambda)\alpha_1^{-1} b_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\sin\lambda\left(w_2-w_1\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$+h_2(\lambda)\alpha_1\int\limits_a^{w_1}\left[p(t)\sin\lambda(w_1-t)+q(t)\cos\lambda(w_1-t)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(w_2-w_1\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$-h_2(\lambda)\alpha_1^{-1}\int\limits_a^{w_1}[-p(t)\cos\lambda(w_1-t)+q(t)\sin\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\sin\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$+h_2(\lambda)\alpha_1\int\limits_a^{w_1}[q(t)\sin\lambda(w_1-t)-p(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\cos\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)\times\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$-h_2(\lambda)\alpha_1^{-1}\int\limits_a^{w_1}[-q(t)\cos\lambda(w_1-t)-p(t)\sin\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\sin\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$+h_2(\lambda)h_1(\lambda)b_1(\lambda)\cos\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)$$

$$+h_2(\lambda)h_1(\lambda)a_1(\lambda)\sin\lambda(w_1-a)\sin\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)$$

$$-h_2(\lambda)h_1(\lambda)\int\limits_a^{w_1}[p(t)\sin\lambda(w_1-t)+q(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\sin\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)\times\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$-h_2(\lambda)h_1(\lambda)\int\limits_a^{w_1}[q(t)\sin\lambda(w_1-t)-p(t)\cos\lambda(w_1-t)]$$
$$\times\sin\lambda\,(w_2-w_1)\cos\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$+h_2(\lambda)\int\limits_{w_1}^{w_2}[p(t)\sin\lambda(w_2-t)+q(t)\cos\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\cos\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$+h_2(\lambda)\int\limits_{w_1}^{w_2}[q(t)\sin\lambda(w_2-t)-p(t)\cos\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\cos\lambda\,(x-w_2)\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$+\int\limits_{w_2}^{x}[-p(t)\cos\lambda(x-t)+q(t)\sin\lambda(x-t)]\,\varphi_{21}(t,\lambda)dt$$

$$+\int\limits_{w_2}^{x}[-q(t)\cos\lambda(x-t)-p(t)\sin\lambda(x-t)]\,\varphi_{22}(t,\lambda)dt$$

İspat: $a \leq x < w_1$ için yukarıda elde edilen integral denklemleri ve

$\varphi_1(a,\lambda) = \begin{pmatrix} -b_1(\lambda) \\ a_1(\lambda) \end{pmatrix}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\varphi_{11}(x,\lambda) = -b_1(\lambda)\cos\lambda(x-a) - a_1(\lambda)\sin\lambda\,(x-a)$$

$$+\int_a^x [p(t)\sin\lambda(x-t) + q(t)\cos\lambda(x-t)]\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$+\int_a^x [q(t)\sin\lambda(x-t) - p(t)\cos\lambda(x-t)]\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

$$\varphi_{12}(x,\lambda) = a_1(\lambda)\cos\lambda(x-a) - b_1(\lambda)\sin\lambda\,(x-a)$$

$$+\int_a^x [-p(t)\cos\lambda(x-t) + q(t)\sin\lambda(x-t)]\,\varphi_1(t,\lambda)dt$$

$$+\int_a^x [-q(t)\cos\lambda(x-t) - p(t)\sin\lambda(x-t)]\,\varphi_2(t,\lambda)dt$$

denklemleri elde edilir.

$w_1 < x < w_2$ için

$$\begin{aligned}\varphi_{21}(x,\lambda) &= \int_{w_1}^{x} [p(t)\sin\lambda(x-t) + q(t)\cos\lambda(x-t)]\,\varphi_{21}(t,\lambda)dt \\ &\quad+\int_{w_1}^{x} [q(t)\sin\lambda(x-t) - p(t)\cos\lambda(x-t)]\,\varphi_{22}(t,\lambda)dt \\ &\quad+c_1^0\cos\lambda x + c_2^0\sin\lambda x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{22}(x,\lambda) &= \int_{w_1}^{x} [-p(t)\cos\lambda\,(x-t) + q(t)\sin\lambda\,(x-t)]\,\varphi_{21}(t,\lambda)dt \\ &\quad+\int_{w_1}^{x} [-q(t)\cos\lambda\,(x-t) - p(t)\;\sin\lambda\,(x-t)]\,\varphi_{22}(t,\lambda)dt \\ &\quad+c_1^0\sin\lambda x - c_2^0\cos\lambda x\end{aligned}$$

şeklinde çözüm için integral denklemleri aranır. Daha sonra

$\varphi_{21}(w_1^+,\lambda) = \alpha_1\varphi_{21}(w_1^-,\lambda)$

$\varphi_{22}(w_1^+,\lambda) = \alpha_1^{-1}\varphi_{22}(w_1^-,\lambda) + h_1(\lambda)\,\varphi_{21}(w_1^-,\lambda)$

süreksizlik koşulları dikkate alınırsa,

$$\varphi_{21}(x,\lambda) = \alpha_1\varphi_{11}(w_1,\lambda)\cos\lambda\,(x-w_1)$$

$$-\left[\alpha_1^{-1}\varphi_{12}(w_1,\lambda) + h_1(\lambda)\varphi_{11}(w_1,\lambda)\right]\sin\lambda\,(x-w_1)$$

$$+\int\limits_{w_1}^{x}\left[p(t)\sin\lambda(x-t) + q(t)\cos\lambda(x-t)\right]\varphi_{21}(t,\lambda)dt$$

$$+\int\limits_{w_1}^{x}\left[q(t)\sin\lambda(x-t) - p(t)\cos\lambda(x-t)\right]\varphi_{22}(t,\lambda)dt$$

$$\varphi_{22}(x,\lambda) = \alpha_1\varphi_{11}(w_1,\lambda)\sin\lambda\,(x-w_1)$$

$$+\left[\alpha_1^{-1}\varphi_{12}(w_1,\lambda) + h_1(\lambda)\varphi_{11}(w_1,\lambda)\right]\cos\lambda\,(x-w_1)$$

$$+\int\limits_{w_1}^{x}\left[-p(t)\cos\lambda(x-t) + q(t)\sin\lambda(x-t)\right]\varphi_{21}(t,\lambda)dt$$

$$+\int\limits_{w_1}^{x}\left[-q(t)\cos\lambda(x-t) - p(t)\sin\lambda(x-t)\right]\varphi_{22}(t,\lambda)dt$$

integral denklemleri elde edilir.

$w_2 < x \leq b$ için

$$\begin{aligned}\varphi_{31}(x,\lambda) &= \int\limits_{w_2}^{x}\left[p(t)\sin\lambda(x-t) + q(t)\cos\lambda(x-t)\right]\varphi_{31}(t,\lambda)dt\\ &\quad+\int\limits_{w_2}^{x}\left[q(t)\sin\lambda(x-t) - p(t)\cos\lambda(x-t)\right]\varphi_{32}(t,\lambda)dt\\ &\quad+c_1^0\cos\lambda x + c_2^0\sin\lambda x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{32}(x,\lambda) &= \int\limits_{w_2}^{x} \left[-p(t)\cos\lambda\,(x-t)+q(t)\sin\lambda\,(x-t)\right]\varphi_{31}(t,\lambda)dt \\ &+\int\limits_{w_2}^{x} \left[-q(t)\cos\lambda\,(x-t)-p(t)\ \sin\lambda\,(x-t)\right]\varphi_{32}(t,\lambda)dt \\ &+c_1^0\sin\lambda x-c_2^0\cos\lambda x\end{aligned}$$

şeklinde çözüm için integral denklemleri aranır. Daha sonra

$\varphi_{31}(w_2^+,\lambda)=\alpha_2\varphi_{31}(w_2^-,\lambda)$

$\varphi_{32}(w_2^+,\lambda)=\alpha_2^{-1}\varphi_{32}(w_2^-,\lambda)+h_2\left(\lambda\right)\varphi_{31}(w_2^-,\lambda)$

süreksizlik koşulları dikkate alınırsa,

$$\varphi_{31}(x,\lambda)=\alpha_2\varphi_{21}\left(w_2,\lambda\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$-\left(\alpha_2^{-1}\varphi_{22}\left(w_2,\lambda\right)+h_2(\lambda)\varphi_{21}\left(w_2,\lambda\right)\right)\sin\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$+\int\limits_{w_2}^{x}\left[p(t)\sin\lambda(x-t)+q(t)\cos\lambda(x-t)\right]\varphi_{31}(t,\lambda)dt$$

$$+\int\limits_{w_2}^{x}\left[q(t)\sin\lambda(x-t)-p(t)\cos\lambda(x-t)\right]\varphi_{32}(t,\lambda)dt$$

$$\varphi_{32}(x,\lambda)=\alpha_2\varphi_{21}\left(w_2,\lambda\right)\sin\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$+\left(\alpha_2^{-1}\varphi_{22}\left(w_2,\lambda\right)+h_2(\lambda)\varphi_{21}\left(w_2,\lambda\right)\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$+\int\limits_{w_2}^{x}\left[-p(t)\cos\lambda(x-t)+q(t)\sin\lambda(x-t)\right]\varphi_{31}(t,\lambda)dt$$

$$+\int\limits_{w_2}^{x}\left[-q(t)\cos\lambda(x-t)-p(t)\sin\lambda(x-t)\right]\varphi_{32}(t,\lambda)dt$$

integral denklemleri elde edilir.

Teorem 3.4: (3.1) denkleminin $\psi(x,\lambda)$ çözümü için aşağıdaki integral denklemler geçerlidir:

$a \leq x < w_1$ için

$$\psi_{11}(x,\lambda) = -b_2(\lambda)\cos\lambda(x-b) - a_2(\lambda)\sin\lambda(x-b)$$

$$-\int_x^b [p(t)\sin\lambda(x-t) + q(t)\cos\lambda(x-t)]\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$-\int_x^b [q(t)\sin\lambda(x-t) - p(t)\cos\lambda(x-t)]\,\psi_{12}(t,\lambda)\,dt$$

$$\psi_{12}(x,\lambda) = -b_2(\lambda)\sin\lambda(x-b) + a_2(\lambda)\cos\lambda(x-b)$$

$$-\int_x^b [-p(t)\cos\lambda(x-t) + q(t)\sin\lambda(x-t)]\,\psi_{11}(t,\lambda)dt$$

$$-\int_x^b [-q(t)\cos\lambda(x-t) - p(t)\sin\lambda(x-t)]\,\psi_{12}(t,\lambda)dt$$

$w_1 < x < w_2$ için

$$\psi_{21}(x,\lambda) = \alpha_2 b_2(\lambda)\sin\lambda(w_2-b)\sin\lambda(x-w_2)$$

$$-\alpha_2 a_2(\lambda)\cos\lambda(w_2-b)\sin\lambda(x-w_2)$$

$$-\alpha_2^{-1} b_2(\lambda)\cos\lambda(w_2-b)\cos\lambda(x-w_2)$$

$$-\alpha_2^{-1} a_2(\lambda)\sin\lambda(w_2-b)\cos\lambda(x-w_2)$$

$$-h_2(\lambda)\, b_2(\lambda)\cos\lambda(w_2-b)\sin\lambda(x-w_2)$$

$$-h_2(\lambda)\, a_2(\lambda)\sin\lambda(w_2-b)\sin\lambda(x-w_2)$$

$$+\alpha_2\int_{w_2}^b [-q(t)\cos\lambda(w_2-t) - p(t)\sin\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\sin\lambda(x-w_2)\,\psi_{12}(t,\lambda)\,dt$$

$$+\alpha_2\int_{w_2}^b [-p(t)\cos\lambda(w_2-t) + q(t)\sin\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\sin\lambda(x-w_2)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$-\alpha_2^{-1}\int_{w_2}^{b}\left[p(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)+q(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(x-w_2\right)\psi_1\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_2^{-1}\int_{w_2}^{b}\left[q(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)-p(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(x-w_2\right)\psi_{12}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-h_2\left(\lambda\right)\int_{w_2}^{b}\left[p(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)+q(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(x-w_2\right)\psi_{11}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-h_2\left(\lambda\right)\int_{w_2}^{b}\left[q(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)-p(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(x-w_2\right)\psi_{12}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\int_{x}^{w_2}\left[p(t)\sin\lambda\left(x-t\right)+q(t)\cos\lambda\left(x-t\right)\right]\psi_{21}\left(t,\lambda\right)dt$$
$$-\int_{x}^{w_2}\left[q(t)\sin\lambda\left(x-t\right)-p(t)\cos\lambda\left(x-t\right)\right]\psi_{22}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$\psi_{22}\left(x,\lambda\right)=-\alpha_2 b_2\left(\lambda\right)\sin\lambda\left(w_2-b\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$+\alpha_2 a_2(\lambda)\cos\lambda\left(w_2-b\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)-\alpha_2^{-1}b_2\left(\lambda\right)\cos\lambda\left(w_2-b\right)\sin\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$-\alpha_2^{-1}a_2(\lambda)\sin\lambda\left(w_2-b\right)\sin\lambda\left(x-w_2\right)+h_2\left(\lambda\right)b_2\left(\lambda\right)\cos\lambda\left(w_2-b\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$+h_2\left(\lambda\right)a_2(\lambda)\sin\lambda\left(w_2-b\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)$$

$$-\alpha_2\int_{w_2}^{b}\left[-p(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)+q(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(x-w_2\right)\psi_{11}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_2\int_{w_2}^{b}\left[-q(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)-p(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(x-w_2\right)\psi_{12}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_2^{-1}\int_{w_2}^{b}\left[p(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)+q(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(x-w_2\right)\psi_1\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_2^{-1}\int_{w_2}^{b}\left[q(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)-p(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(x-w_2\right)\psi_{12}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$+h_2\left(\lambda\right)\int_{w_2}^{b}\left[p(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)+q(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(x-w_2\right)\psi_{11}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$+h_2\left(\lambda\right)\int_{w_2}^{b}\left[q(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)-p(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(x-w_2\right)\psi_{12}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\int_{x}^{w_2}\left[-p(t)\cos\lambda\left(x-t\right)+q(t)\sin\lambda\left(x-t\right)\right]\psi_{21}\left(t,\lambda\right)dt$$
$$-\int_{x}^{w_2}\left[-q(t)\cos\lambda\left(x-t\right)-p(t)\sin\lambda\left(x-t\right)\right]\psi_{22}\left(t,\lambda\right)dt$$

$w_2 < x \leq b$ için

$$\psi_{31}\left(x,\lambda\right)=\alpha_1^{-1}\alpha_2 b_2\left(\lambda\right)\sin\lambda\left(w_2-b\right)\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$-\alpha_1^{-1}\alpha_2 a_2(\lambda)\cos\lambda\left(w_2-b\right)\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$-\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}b_2\left(\lambda\right)\cos\lambda\left(w_2-b\right)\cos\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$-\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}a_2(\lambda)\sin\lambda\left(w_2-b\right)\cos\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$-\alpha_1^{-1}h_2\left(\lambda\right)b_2\left(\lambda\right)\cos\lambda\left(w_2-b\right)\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$-\alpha_1^{-1}h_2\left(\lambda\right)a_2(\lambda)\sin\lambda\left(w_2-b\right)\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$+\alpha_1^{-1}\alpha_2\int_{w_2}^{b}\left[-q(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)-p(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)\psi_{12}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$+\alpha_1^{-1}\alpha_2\int\limits_{w_2}^{b}\left[-p(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)+q(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)\psi_{11}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}\int\limits_{w_2}^{b}\left[p(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)+q(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)\psi_{11}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}\int\limits_{w_2}^{b}\left[q(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)-p(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)\psi_{12}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_1^{-1}h_2\left(\lambda\right)\int\limits_{w_2}^{b}\left[p(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)+q(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)\psi_{11}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_1^{-1}h_2\left(\lambda\right)\int\limits_{w_2}^{b}\left[q(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)-p(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)\psi_{12}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_1^{-1}\int\limits_{w_1}^{w_2}\left[p(t)\sin\lambda\left(w_1-t\right)+q(t)\cos\lambda\left(w_1-t\right)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(x-w_1\right)\psi_{21}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_1^{-1}\int\limits_{w_1}^{w_2}\left[q(t)\sin\lambda\left(w_1-t\right)-p(t)\cos\lambda\left(w_1-t\right)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(x-w_1\right)\psi_{22}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-h_1\left(\lambda\right)\alpha_2 b_2\left(\lambda\right)\sin\lambda\left(w_2-b\right)\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\sin\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$-h_1\left(\lambda\right)\alpha_2 a_2(\lambda)\cos\lambda\left(w_2-b\right)\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\sin\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$-h_1\left(\lambda\right)\alpha_2^{-1}b_2\left(\lambda\right)\cos\lambda\left(w_2-b\right)\cos\lambda\left(w_1-w_2\right)\sin\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$-h_1\left(\lambda\right)\alpha_2^{-1}a_2(\lambda)\sin\lambda\left(w_2-b\right)\cos\lambda\left(w_1-w_2\right)\sin\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$-h_1(\lambda)\, h_2(\lambda)\, b_2(\lambda) \cos\lambda(w_2 - b) \sin\lambda(w_1 - w_2) \sin\lambda(x - w_1)$$

$$-h_1(\lambda)\, h_2(\lambda)\, a_2(\lambda) \sin\lambda(w_2 - b) \sin\lambda(w_1 - w_2) \sin\lambda(x - w_1)$$

$$+\alpha_2 h_1(\lambda) \int_{w_2}^{b} [-q(t)\cos\lambda(w_2 - t) - p(t)\sin\lambda(w_2 - t)] \\ \times \sin\lambda(w_1 - w_2)\sin\lambda(x - w_1)\,\psi_{12}(t,\lambda)\,dt$$

$$+\alpha_2 h_1(\lambda) \int_{w_2}^{b} [-p(t)\cos\lambda(w_2 - t) + q(t)\sin\lambda(w_2 - t)] \\ \times \sin\lambda(w_1 - w_2)\sin\lambda(x - w_1)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$-h_1(\lambda)\,\alpha_2^{-1} \int_{w_2}^{b} [p(t)\sin\lambda(w_2 - t) + q(t)\cos\lambda(w_2 - t)] \\ \times \cos\lambda(w_1 - w_2)\sin\lambda(x - w_1)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$-h_1(\lambda)\,\alpha_2^{-1} \int_{w_2}^{b} [q(t)\sin\lambda(w_2 - t) - p(t)\cos\lambda(w_2 - t)] \\ \times \cos\lambda(w_1 - w_2)\sin\lambda(x - w_1)\,\psi_{12}(t,\lambda)\,dt$$

$$-h_1(\lambda)\, h_2(\lambda) \int_{w_2}^{b} [p(t)\sin\lambda(w_2 - t) + q(t)\cos\lambda(w_2 - t)] \\ \times \sin\lambda(w_1 - w_2)\sin\lambda(x - w_1)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$-h_1(\lambda)\, h_2(\lambda) \int_{w_2}^{b} [q(t)\sin\lambda(w_2 - t) - p(t)\cos\lambda(w_2 - t)] \\ \times \sin\lambda(w_1 - w_2)\sin\lambda(x - w_1)\,\psi_{12}(t,\lambda)\,dt$$

$$-h_1(\lambda) \int_{w_1}^{w_2} [p(t)\sin\lambda(w_1 - t) + q(t)\cos\lambda(w_1 - t)] \\ \times \sin\lambda(x - w_1)\,\psi_{21}(t,\lambda)\,dt$$

$$-h_1(\lambda) \int_{w_1}^{w_2} [q(t)\sin\lambda(w_1 - t) - p(t)\cos\lambda(w_1 - t)] \\ \times \sin\lambda(x - w_1)\,\psi_{22}(t,\lambda)\,dt$$

$$+\alpha_1\alpha_2 b_2(\lambda)\sin\lambda(w_2-b)\cos\lambda(w_1-w_2)\sin\lambda(x-w_1)$$

$$-\alpha_1\alpha_2 a_2(\lambda)\cos\lambda(w_2-b)\cos\lambda(w_1-w_2)\sin\lambda(x-w_1)$$

$$+\alpha_1\alpha_2^{-1} b_2(\lambda)\cos\lambda(w_2-b)\sin\lambda(w_1-w_2)\sin\lambda(x-w_1)$$

$$+\alpha_1\alpha_2^{-1} a_2(\lambda)\sin\lambda(w_2-b)\sin\lambda(w_1-w_2)\sin\lambda(x-w_1)$$

$$-\alpha_1 h_2(\lambda)\, b_2(\lambda)\cos\lambda(w_2-b)\cos\lambda(w_1-w_2)\sin\lambda(x-w_1)$$

$$-\alpha_1 h_2(\lambda)\, a_2(\lambda)\sin\lambda(w_2-b)\cos\lambda(w_1-w_2)\sin\lambda(x-w_1)$$

$$+\alpha_1\alpha_2\int_{w_2}^{b}[-p(t)\cos\lambda(w_2-t)+q(t)\sin\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\cos\lambda(w_1-w_2)\sin\lambda(x-w_1)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$+\alpha_1\alpha_2\int_{w_2}^{b}[-q(t)\cos\lambda(w_2-t)-p(t)\sin\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\cos\lambda(w_1-w_2)\sin\lambda(x-w_1)\,\psi_{12}(t,\lambda)\,dt$$

$$+\alpha_1\alpha_2^{-1}\int_{w_2}^{b}[p(t)\sin\lambda(w_2-t)+q(t)\cos\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\sin\lambda(w_1-w_2)\sin\lambda(x-w_1)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$+\alpha_1\alpha_2^{-1}\int_{w_2}^{b}[q(t)\sin\lambda(w_2-t)-p(t)\cos\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\sin\lambda(w_1-w_2)\sin\lambda(x-w_1)\,\psi_{12}(t,\lambda)\,dt$$

$$-\alpha_1 h_2(\lambda)\int_{w_2}^{b}[p(t)\sin\lambda(w_2-t)+q(t)\cos\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\cos\lambda(w_1-w_2)\sin\lambda(x-w_1)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$-\alpha_1 h_2(\lambda)\int_{w_2}^{b}[q(t)\sin\lambda(w_2-t)-p(t)\cos\lambda(w_2-t)]$$
$$\times\cos\lambda(w_1-w_2)\sin\lambda(x-w_1)\,\psi_{12}(t,\lambda)\,dt$$

$$+\alpha_1\int_{w_1}^{w_2}[-p(t)\cos\lambda(w_1-t)+q(t)\sin\lambda(w_1-t)]$$

$$\times \sin \lambda (x-w_1)\,\psi_{21}(t,\lambda)\,dt$$

$$+\alpha_1 \int\limits_{w_1}^{w_2} [-q(t)\cos \lambda (w_1-t) - p(t)\sin \lambda (w_1-t)]$$
$$\times \sin \lambda (x-w_1)\,\psi_{22}(t,\lambda)\,dt$$

$$-\int\limits_{x}^{w_2} [p(t)\sin \lambda (x-t) + q(t)\cos \lambda (x-t)]\,\psi_{21}(t,\lambda)\,dt$$
$$-\int\limits_{x}^{w_2} [q(t)\sin \lambda (x-t) - p(t)\cos \lambda (x-t)]\,\psi_{22}(t,\lambda)\,dt$$

$$\psi_{32}(x,\lambda) = \alpha_1^{-1}\alpha_2 b_2(\lambda)\sin \lambda (w_2-b)\sin \lambda (w_1-w_2)\sin \lambda (x-w_1)$$
$$-\alpha_1^{-1}\alpha_2 a_2(\lambda)\cos \lambda (w_2-b)\sin \lambda (w_1-w_2)\sin \lambda (x-w_1)$$
$$-\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1} b_2(\lambda)\cos \lambda (w_2-b)\cos \lambda (w_1-w_2)\sin \lambda (x-w_1)$$
$$-\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1} a_2(\lambda)\sin \lambda (w_2-b)\cos \lambda (w_1-w_2)\sin \lambda (x-w_1)$$
$$-\alpha_1^{-1} h_2(\lambda)\, b_2(\lambda)\cos \lambda (w_2-b)\sin \lambda (w_1-w_2)\sin \lambda (x-w_1)$$
$$-\alpha_1^{-1} h_2(\lambda)\, a_2(\lambda)\sin \lambda (w_2-b)\sin \lambda (w_1-w_2)\sin \lambda (x-w_1)$$
$$+\alpha_1^{-1}\alpha_2 \int\limits_{w_2}^{b} [-q(t)\cos \lambda (w_2-t) - p(t)\sin \lambda (w_2-t)]$$
$$\times \sin \lambda (w_1-w_2)\sin \lambda (x-w_1)\,\psi_{12}(t,\lambda)\,dt$$

$$+\alpha_1^{-1}\alpha_2 \int\limits_{w_2}^{b} [-p(t)\cos \lambda (w_2-t) + q(t)\sin \lambda (w_2-t)]$$
$$\times \sin \lambda (w_1-w_2)\sin \lambda (x-w_1)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$-\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1} \int\limits_{w_2}^{b} [p(t)\sin \lambda (w_2-t) + q(t)\cos \lambda (w_2-t)]$$
$$\times \cos \lambda (w_1-w_2)\sin \lambda (x-w_1)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$-\alpha_1^{-1}\alpha_2^{-1}\int\limits_{w_2}^{b}\left[q(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)-p(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\cos\lambda\left(w_1-w_2\right)\sin\lambda\left(x-w_1\right)\psi_{12}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_1^{-1}h_2\left(\lambda\right)\int\limits_{w_2}^{b}\left[p(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)+q(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\sin\lambda\left(x-w_1\right)\psi_{11}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_1^{-1}h_2\left(\lambda\right)\int\limits_{w_2}^{b}\left[q(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)-p(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\sin\lambda\left(x-w_1\right)\psi_{12}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_1^{-1}\int\limits_{w_1}^{w_2}\left[p(t)\sin\lambda\left(w_1-t\right)+q(t)\cos\lambda\left(w_1-t\right)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(x-w_1\right)\psi_{21}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_1^{-1}\int\limits_{w_1}^{w_2}\left[q(t)\sin\lambda\left(w_1-t\right)-p(t)\cos\lambda\left(w_1-t\right)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(x-w_1\right)\psi_{22}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-h_1\left(\lambda\right)\alpha_2 b_2\left(\lambda\right)\sin\lambda\left(w_2-b\right)\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$+h_1\left(\lambda\right)\alpha_2 a_2(\lambda)\cos\lambda\left(w_2-b\right)\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$+h_1\left(\lambda\right)\alpha_2^{-1}b_2\left(\lambda\right)\cos\lambda\left(w_2-b\right)\cos\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$+h_1\left(\lambda\right)\alpha_2^{-1}a_2(\lambda)\sin\lambda\left(w_2-b\right)\cos\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$+h_1\left(\lambda\right)h_2\left(\lambda\right)b_2\left(\lambda\right)\cos\lambda\left(w_2-b\right)\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$+h_1\left(\lambda\right)h_2\left(\lambda\right)a_2(\lambda)\sin\lambda\left(w_2-b\right)\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$-\alpha_2 h_1\left(\lambda\right)\int\limits_{w_2}^{b}\left[-q(t)\cos\lambda\left(w_2-t\right)-p(t)\sin\lambda\left(w_2-t\right)\right]$$
$$\times\sin\lambda\left(w_1-w_2\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)\psi_{12}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\alpha_2 h_1(\lambda)\int\limits_{w_2}^{b}\left[-p(t)\cos\lambda(w_2-t)+q(t)\sin\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\sin\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$+h_1(\lambda)\,\alpha_2^{-1}\int\limits_{w_2}^{b}\left[p(t)\sin\lambda(w_2-t)+q(t)\cos\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\cos\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$+h_1(\lambda)\,\alpha_2^{-1}\int\limits_{w_2}^{b}\left[q(t)\sin\lambda(w_2-t)-p(t)\cos\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\cos\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{12}(t,\lambda)\,dt$$

$$+h_1(\lambda)\,h_2(\lambda)\int\limits_{w_2}^{b}\left[p(t)\sin\lambda(w_2-t)+q(t)\cos\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\sin\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$+h_1(\lambda)\,h_2(\lambda)\int\limits_{w_2}^{b}\left[q(t)\sin\lambda(w_2-t)-p(t)\cos\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\sin\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{12}(t,\lambda)\,dt$$

$$+h_1(\lambda)\int\limits_{w_1}^{w_2}\left[p(t)\sin\lambda(w_1-t)+q(t)\cos\lambda(w_1-t)\right]$$
$$\times\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{21}(t,\lambda)\,dt$$

$$+h_1(\lambda)\int\limits_{w_1}^{w_2}\left[q(t)\sin\lambda(w_1-t)-p(t)\cos\lambda(w_1-t)\right]$$
$$\times\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{22}(t,\lambda)\,dt$$

$$-\alpha_1\alpha_2 b_2(\lambda)\sin\lambda(w_2-b)\cos\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)$$

$$+\alpha_1\alpha_2 a_2(\lambda)\cos\lambda(w_2-b)\cos\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)$$

$$-\alpha_1\alpha_2^{-1}b_2(\lambda)\cos\lambda(w_2-b)\sin\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)$$

$$-\alpha_1\alpha_2^{-1}a_2(\lambda)\sin\lambda(w_2-b)\sin\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)$$

$$+\alpha_1 h_2(\lambda)\, b_2(\lambda)\cos\lambda(w_2-b)\cos\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)$$

$$+\alpha_1 h_2(\lambda)\, a_2(\lambda)\sin\lambda(w_2-b)\cos\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)$$

$$-\alpha_1\alpha_2\int_{w_2}^{b}\left[-p(t)\cos\lambda(w_2-t)+q(t)\sin\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\cos\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$-\alpha_1\alpha_2\int_{w_2}^{b}\left[-q(t)\cos\lambda(w_2-t)-p(t)\sin\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\cos\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{12}(t,\lambda)\,dt$$

$$-\alpha_1\alpha_2^{-1}\int_{w_2}^{b}\left[p(t)\sin\lambda(w_2-t)+q(t)\cos\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\sin\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$-\alpha_1\alpha_2^{-1}\int_{w_2}^{b}\left[q(t)\sin\lambda(w_2-t)-p(t)\cos\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\sin\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{12}(t,\lambda)\,dt$$

$$+\alpha_1 h_2(\lambda)\int_{w_2}^{b}\left[p(t)\sin\lambda(w_2-t)+q(t)\cos\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\cos\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{11}(t,\lambda)\,dt$$

$$+\alpha_1 h_2(\lambda)\int_{w_2}^{b}\left[q(t)\sin\lambda(w_2-t)-p(t)\cos\lambda(w_2-t)\right]$$
$$\times\cos\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{12}(t,\lambda)\,dt$$

$$-\alpha_1\int_{w_1}^{w_2}\left[-p(t)\cos\lambda(w_1-t)+q(t)\sin\lambda(w_1-t)\right]$$
$$\times\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{21}(t,\lambda)\,dt$$

$$-\alpha_1\int_{w_1}^{w_2}\left[-q(t)\cos\lambda(w_1-t)-p(t)\sin\lambda(w_1-t)\right]$$
$$\times\cos\lambda(x-w_1)\,\psi_{22}(t,\lambda)\,dt$$
$$-\int_{x}^{w_2}\left[-p(t)\cos\lambda(x-t)+q(t)\sin\lambda(x-t)\right]\psi_{31}(t,\lambda)\,dt$$

$$-\int\limits_{x}^{w_2} \left[-q(t)\cos\lambda\,(x-t) - p(t)\sin\lambda\,(x-t)\right]\psi_{32}\,(t,\lambda)\,dt$$

İspat: Bir önceki teoremde $\varphi\,(x,\lambda)$ için alınan integral denklemleri $\psi\,(x,\lambda)$ için

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -\int_x^b \left[p(t)\sin\lambda(x-t) + q(t)\cos\lambda(x-t)\right] y_1(t)dt \\ &\quad -\int_x^b \left[q(t)\sin\lambda(x-t) - p(t)\cos\lambda(x-t)\right] y_2(t)\ dt \\ &\quad +c_1^0\cos\lambda x + c_2^0\sin\lambda x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(x) &= -\int_x^b \left[-p(t)\cos\lambda\,(x-t) + q(t)\sin\lambda\,(x-t)\right] y_1(t)dt \\ &\quad -\int_x^b \left[-q(t)\cos\lambda\,(x-t) - p(t)\ \sin\lambda\,(x-t)\right] y_2(t)\ dt \\ &\quad +c_1^0\sin\lambda x - c_2^0\cos\lambda x \end{aligned}$$

olup,

$w_2 < x \leq b$ için

$\psi_1(b,\lambda) = \begin{pmatrix} -b_2(\lambda) \\ a_2(\lambda) \end{pmatrix}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\psi_{11}\,(x,\lambda) = -b_2\,(\lambda)\cos\lambda\,(x-b) - a_2(\lambda)\sin\lambda\,(x-b)$$

$$-\int\limits_{x}^{b} \left[p(t)\sin\lambda\,(x-t) + q(t)\cos\lambda\,(x-t)\right]\psi_{11}\,(t,\lambda)\,dt$$

$$-\int\limits_{x}^{b} \left[q(t)\sin\lambda\,(x-t) - p(t)\cos\lambda\,(x-t)\right]\psi_{12}\,(t,\lambda)\ dt$$

$$\psi_{12}\,(x,\lambda) = -b_2\,(\lambda)\sin\lambda\,(x-b) + a_2(\lambda)\cos\lambda\,(x-b)$$

$$-\int\limits_{x}^{b} \left[-p(t)\cos\lambda\,(x-t) + q(t)\sin\lambda\,(x-t)\right]\psi_{11}(t,\lambda)dt$$

$$-\int\limits_{x}^{b} \left[-q(t)\cos\lambda\,(x-t) - p(t)\sin\lambda\,(x-t)\right]\psi_{12}(t,\lambda)dt$$

integral denklemleri elde edilir.

$w_1 < x < w_2$ için

$$\begin{aligned}\psi_{21}(x,\lambda) &= -\int_x^b [p(t)\sin\lambda(x-t)+q(t)\cos\lambda(x-t)]\,\psi_{21}(t,\lambda)dt \\ &-\int_x^b [q(t)\sin\lambda(x-t)-p(t)\cos\lambda(x-t)]\,\psi_{22}(t,\lambda)dt \\ &+c_1^0\cos\lambda x+c_2^0\sin\lambda x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{22}(x,\lambda) &= -\int_x^b [-p(t)\cos\lambda\,(x-t)+q(t)\sin\lambda\,(x-t)]\,\psi_{21}(t,\lambda)dt \\ &-\int_x^b [-q(t)\cos\lambda\,(x-t)-p(t)\ \sin\lambda\,(x-t)]\,\psi_{22}(t,\lambda)dt \\ &+c_1^0\sin\lambda x-c_2^0\cos\lambda x\end{aligned}$$

şeklinde çözüm için integral denklemleri aranır. Daha sonra

$\psi_{21}(w_2^+,\lambda)=\alpha_2\psi_{21}(w_2^-,\lambda)$

$\psi_{22}(w_2^+,\lambda)=\alpha_2^{-1}\psi_{22}(w_2^-,\lambda)+h_2\,(\lambda)\,\psi_{21}(w_2^-,\lambda)$

süreksizlik koşulları dikkate alınırsa,

$$\psi_{21}\,(x,\lambda)=(-\alpha_2\psi_{12}\,(w_2,\lambda)+h_2\,(\lambda)\,\psi_{11}\,(w_2,\lambda))\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$+\alpha_2^{-1}\psi_{11}\,(w_2,\lambda)\cos\lambda\,(x-w_2)$$

$$-\int_x^{w_2}[p(t)\sin\lambda\,(x-t)+q(t)\cos\lambda\,(x-t)]\,\psi_{21}\,(t,\lambda)\,dt$$
$$-\int_x^{w_2}[q(t)\sin\lambda\,(x-t)-p(t)\cos\lambda\,(x-t)]\,\psi_{22}\,(t,\lambda)\,dt$$

$$\psi_{22}\,(x,\lambda)=(\alpha_2\psi_{12}\,(w_2,\lambda)-h_2\,(\lambda)\,\psi_{11}\,(w_2,\lambda))\cos\lambda\,(x-w_2)$$

$$+\alpha_2^{-1}\psi_{11}\,(w_2,\lambda)\sin\lambda\,(x-w_2)$$

$$-\int_{x}^{w_2} \left[-p(t)\cos\lambda\left(x-t\right)+q(t)\sin\lambda\left(x-t\right)\right]\psi_{21}\left(t,\lambda\right)dt$$
$$-\int_{x}^{w_2} \left[-q(t)\cos\lambda\left(x-t\right)-p(t)\sin\lambda\left(x-t\right)\right]\psi_{22}\left(t,\lambda\right)dt$$

integral denklemleri elde edilir.

$a \leq x < w_1$ için

$$\begin{aligned}\psi_{31}(x,\lambda) &= -\int_{x}^{b}\left[p(t)\sin\lambda(x-t)+q(t)\cos\lambda(x-t)\right]\psi_{31}(t,\lambda)dt \\ &\quad -\int_{x}^{b}\left[q(t)\sin\lambda(x-t)-p(t)\cos\lambda(x-t)\right]\psi_{32}(t,\lambda)dt \\ &\quad +c_1^0\cos\lambda x+c_2^0\sin\lambda x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{32}(x,\lambda) &= -\int_{x}^{b}\left[-p(t)\cos\lambda\left(x-t\right)+q(t)\sin\lambda\left(x-t\right)\right]\psi_{31}(t,\lambda)dt \\ &\quad -\int_{x}^{b}\left[-q(t)\cos\lambda\left(x-t\right)-p(t)\sin\lambda\left(x-t\right)\right]\psi_{32}(t,\lambda)dt \\ &\quad +c_1^0\sin\lambda x-c_2^0\cos\lambda x\end{aligned}$$

şeklinde çözüm için integral denklemleri aranır. Daha sonra

$$\psi_{31}(w_1^+,\lambda)=\alpha_1\psi_{31}(w_1^-,\lambda)$$
$$\psi_{32}(w_1^+,\lambda)=\alpha_1^{-1}\psi_{32}(w_1^-,\lambda)+h_1\left(\lambda\right)\psi_{31}(w_1^-,\lambda)$$

süreksizlik koşulları dikkate alınırsa,

$$\psi_{31}\left(x,\lambda\right)=\alpha_1^{-1}\psi_{21}\left(w_1,\lambda\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)$$
$$+\left(h_1\left(\lambda\right)\psi_{21}\left(w_1,\lambda\right)-\alpha_1\psi_{22}\left(w_1,\lambda\right)\right)\sin\lambda\left(x-w_1\right)$$
$$-\int_{x}^{w_1}\left[p(t)\sin\lambda\left(x-t\right)+q(t)\cos\lambda\left(x-t\right)\right]\psi_{31}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\int_{x}^{w_1}\left[q(t)\sin\lambda\left(x-t\right)-p(t)\cos\lambda\left(x-t\right)\right]\psi_{32}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$\psi_{32}\left(x,\lambda\right)=\alpha_1^{-1}\psi_{21}\left(w_1,\lambda\right)\sin\lambda\left(x-w_1\right)$$

$$+\left(-h_1\left(\lambda\right)\psi_{21}\left(w_1,\lambda\right)+\alpha_1\psi_{22}\left(w_1,\lambda\right)\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)$$
$$-\int_{x}^{w_1}\left[-p(t)\cos\lambda\left(x-t\right)+q(t)\sin\lambda\left(x-t\right)\right]\psi_{31}\left(t,\lambda\right)dt$$

$$-\int_{x}^{w_1}\left[-q(t)\cos\lambda\left(x-t\right)-p(t)\sin\lambda\left(x-t\right)\right]\psi_{32}\left(t,\lambda\right)dt$$

integral denklemleri elde edilir.

Teorem 3.5: $|\lambda|\to\infty$ iken $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik ifadeler geçerlidir:

$$\varphi_{11}(x,\lambda)=\left\{a_1\lambda^{N_1+1}\sin\lambda(x-a)+o\left(|\lambda|^{N_1+1}\exp|\operatorname{Im}\lambda|\left[(x-a)\right]\right)\right.,$$
$$\varphi_{12}(x,\lambda)=\left\{a_1\lambda^{N_1+1}\cos\lambda(x-a)+o\left(|\lambda|^{N_1+1}\exp|\operatorname{Im}\lambda|\left[(x-a)\right]\right)\right.,$$
$$\varphi_{21}(x,\lambda)=\left\{\begin{array}{c}a_1m_1\lambda^{L_1+N_1+2}\sin\lambda\left(w_1-a\right)\sin\lambda\left(x-w_1\right)\\+o\left(|\lambda|^{L_1+N_1+2}\exp|\operatorname{Im}\lambda|\left[(w_1-a)+(x-w_1)\right]\right)\end{array}\right.$$
$$\varphi_{22}(x,\lambda)=\left\{\begin{array}{l}a_1m_1\lambda^{L_1+N_1+2}\sin\lambda\left(w_1-a\right)\cos\lambda\left(x-w_1\right)\\+o\left(|\lambda|^{L_1+N_1+2}\exp|\operatorname{Im}\lambda|\left[(w_1-a)+(x-w_1)\right]\right)\end{array}\right.$$
$$\varphi_{31}(x,\lambda)=\left\{\begin{array}{l}-m_2m_1a_1\lambda^{L_1+L_2+N_1+3}\sin\lambda\left(w_1-a\right)\sin\lambda\left(w_2-w_1\right)\sin\lambda\left(x-w_2\right)\\+o\left(|\lambda|^{L_1+L_2+N_1+3}\exp|\operatorname{Im}\lambda|\left[(w_1-a)+(w_2-w_1)+(x-w_2)\right]\right)\end{array}\right.$$
$$\varphi_{32}(x,\lambda)=\left\{\begin{array}{l}m_2m_1a_1\lambda^{L_1+L_2+N_1+3}\sin\lambda\left(w_1-a\right)\sin\lambda\left(w_2-w_1\right)\cos\lambda\left(x-w_2\right)\\+o\left(|\lambda|^{L_1+L_2+N_1+3}\exp|\operatorname{Im}\lambda|\left[(w_1-a)+(w_2-w_1)+(x-w_2)\right]\right)\end{array}\right.$$

Teorem 3.6: $|\lambda|\to\infty$ iken $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik ifadeler geçerlidir:

$$\psi_{11}(x,\lambda)=\begin{cases} -a_2\lambda^{N_2+1}\sin\lambda\,(x-b) \\ +o\left(|\lambda|^{N_2+1}\exp|\mathrm{Im}\,\lambda|\,[(x-b)]\right)\end{cases}$$

$$\psi_{12}(x,\lambda)=\begin{cases} a_2\lambda^{N_2+1}\cos\lambda\,(x-b) \\ +o\left(|\lambda|^{N_2+1}\exp|\mathrm{Im}\,\lambda|\,[(x-b)]\right)\end{cases}$$

$$\psi_{21}(x,\lambda)=\begin{cases} -m_2a_2\lambda^{N_2+L_2+2}\sin\lambda\,(w_2-b)\sin\lambda\,(x-w_2) \\ +o\left(|\lambda|^{N_2+L_2+2}\exp|\mathrm{Im}\,\lambda|\,[(w_2-b)+(x-w_2)]\right)\end{cases}$$

$$\psi_{22}(x,\lambda)=\begin{cases} m_2a_2\lambda^{N_2+L_2+2}\sin\lambda\,(w_2-b)\cos\lambda\,(x-w_2) \\ +o\left(|\lambda|^{N_2+L_2+2}\exp|\mathrm{Im}\,\lambda|\,[(w_2-b)+(x-w_2)]\right)\end{cases}$$

$$\psi_{31}(x,\lambda)=\begin{cases} -m_1m_2a_2\lambda^{N_2+L_1+L_2+3}\sin\lambda\,(w_2-b)\sin\lambda\,(w_1-w_2)\sin\lambda\,(x-w_1) \\ \\ +o\left(|\lambda|^{N_2+L_1+L_2+3}\exp|\mathrm{Im}\,\lambda|\,[(w_2-b)+(w_1-w_2)+(x-w_2)]\right)\end{cases}$$

$$\psi_{32}(x,\lambda)=\begin{cases} m_1m_2a_2\lambda^{N_2+L_1+L_2+3}\sin\lambda\,(w_2-b)\sin\lambda\,(w_1-w_2)\cos\lambda\,(x-w_1) \\ +o\left(|\lambda|^{N_2+L_1+L_2+3}\exp|\mathrm{Im}\,\lambda|\,[(w_2-b)+(w_1-w_2)+(x-w_1)]\right)\end{cases}$$

Teorem 3.7: L probleminin $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ özdeğerleri reeldir.

İspat:

$$\langle Y,Z\rangle:=\int_a^b\left(y_1(x)\overline{z_1(x)}+y_2(x)\overline{z_2(x)}\right)dx-\frac{1}{a_1}Y_{N_1+1}\overline{Z_{N_1+1}}$$

$$+\frac{1}{a_2}L_{N_2+1}\overline{L_{N_2+1}}+\frac{\alpha_1}{m_1}R_{P_1+1}\overline{R_{P_1+1}}+\frac{\alpha_2}{m_2}V_{P_2+1}\overline{V_{P_2+1}}$$

$$+\sum_{k=1}^{N_1}Y_k\overline{Z_k}\left(\frac{1}{-f_{1k}}\right)-\sum_{k=1}^{N_2}L_k\overline{L_k}\left(\frac{-1}{f_{2k}}\right)-\sum_{k=1}^{P_1}\alpha_1R_k\overline{R_k}\left(\frac{-1}{u_{1k}}\right)$$

$-\sum_{k=1}^{P_2}\alpha_2V_k\overline{V_k}\left(\frac{1}{u_{2k}}\right)$ iç çarpımı kullanılarak,

$$\langle TY,Y\rangle=\int_a^b ly\overline{y}dx-\frac{1}{a_1}TY_{N_1+1}\overline{Y_{N_1+1}}+\frac{1}{a_2}TL_{N_2+1}\overline{L_{N_2+1}}$$

$$+\frac{\alpha_1}{m_1}TR_{P_1+1}\overline{R_{P_1+1}}+\frac{\alpha_2}{m_2}TV_{P_2+1}\overline{V_{P_2+1}}$$

$$+\sum_{k=1}^{N_1}TY_k\overline{Y_k}\left(\frac{1}{-f_{1k}}\right)-\sum_{k=1}^{N_2}TL_k\overline{L_k}\left(\frac{1}{-f_{2k}}\right)$$

$$-\sum_{k=1}^{P_1}\alpha_1TR_k\overline{R_k}\left(\frac{-1}{u_{1k}}\right)-\sum_{k=1}^{P_2}\alpha_2TV_k\overline{V_k}\left(\frac{-1}{u_{2k}}\right)$$

yazılır. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\langle TY,Y\rangle=\int_a^b p(x)\left(|y_1|^2-|y_2|^2\right)dx+\int_a^b q(x)\,2\operatorname{Re}\left(y_2\overline{y_1}\right)dx+b_1\left|y_1(a)\right|$$

$$+\sum_{k=1}^{N_1}2\operatorname{Re}\left(Y_k\overline{y_1}(a)\right)-b_2\left|y_1(b)\right|^2-\sum_{k=1}^{N_2}2\operatorname{Re}\left(L_k\overline{y_1}(b)\right)-a_1n_1\left|y_1\left(w_1^-\right)\right|^2$$

$$-\sum_{k=1}^{P_1}a_1 2\operatorname{Re}\left(R_ky_1\left(w_1^-\right)\right)-a_2n_2\left|y_1\left(w_2^-\right)\right|^2$$

$$-\sum_{k=1}^{P_2}a_2 2\operatorname{Re}\left(V_ky_1\left(w_2^-\right)\right)-\sum_{k=1}^{N_1}g_{1k}\left|Y_k\right|^2\frac{1}{f_{1k}}$$

$$+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{g_{2k}}{f_{2k}}\left|L_k\right|^2+\sum_{k=1}^{P_1}a_1\frac{t_{1k}}{u_{1k}}\left|R_k\right|^2$$

$$+\sum_{k=1}^{P_2}a_2\frac{t_{2k}}{u_{2k}}\left|V_k\right|^2-\int_a^b 2\operatorname{Re}\left(y_2\overline{y_1}'\right)dx$$

elde edilir. Buna göre, $\langle TY,Y\rangle\in\mathbb{R}$ olup buradan $\lambda\in\mathbb{R}$ olduğu elde edilir.

Lemma 3.8 : (3.1)-(3.4) problemine ait normalleştirici sayılar aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
\rho_n &= \int_a^b \left(\varphi_1^2(x,\lambda_n)+\varphi_2^2(x,\lambda_n)\right)dx \\
&-\varphi_1^2(a,\lambda_n)\left(a_1+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{f_{1k}}{(\lambda_n-g_{1k})^2}\right) \\
&+\varphi_1^2(b,\lambda_n)\left(a_2+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{f_{2k}}{(\lambda_n-g_{2k})^2}\right) \\
&+\alpha_1\varphi_1^2\left(w_1^-,\lambda_n\right)\left(m_1+\sum_{r=1}^{P_1}\frac{u_{r_1}}{(\lambda_n-t_{r_1})^2}\right) \\
&+\alpha_2\varphi_1^2\left(w_2^-,\lambda_n\right)\left(m_2+\sum_{r=1}^{P_2}\frac{u_{r_2}}{(\lambda_n-t_{r_2})^2}\right) \\
&= \int_a^b \left(\varphi_1^2(x,\lambda_n)+\varphi_2^2(x,\lambda_n)\right)dx \\
&-\varphi_1^2(a,\lambda_n)f_1'(\lambda_n)+\varphi_1^2(b,\lambda_n)f_2'(\lambda_n) \\
&+\alpha_1\varphi_1^2\left(w_1^-,\lambda_n\right)h_1'(\lambda_n)+\alpha_2\varphi_1^2\left(w_2^-,\lambda_n\right)h_2'(\lambda_n)
\end{aligned}
$$

Diğer taraftan,

$$W(\varphi,\psi)=\varphi_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda)-\varphi_2(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda)$$

fonksiyonuna (3.1)-(3.4) probleminin karakteristik fonksiyonu denir. Ayrıca $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümleri L problemini sağladığından,
$\forall x\in[a,b]$ için,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}W(\varphi,\psi) \\
&=\varphi_1'(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda)+\psi_2'(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda)-\varphi_2'(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda)-\psi_1'(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda) \\
&=\left[q(x)\varphi_1(x,\lambda)-p(x)\varphi_2(x,\lambda)-\lambda\varphi_2(x,\lambda)\right]\psi_2(x,\lambda) \\
&+\left[-p(x)\psi_1(x,\lambda)-q(x)\psi_2(x,\lambda)+\lambda\psi_1(x,\lambda)\right]\varphi_1(x,\lambda)
\end{aligned}
$$

$$-\left[-p(x)\varphi_1(x,\lambda)-q(x)\varphi_2(x,\lambda)+\lambda\varphi_1(x,\lambda)\right]\psi_1(x,\lambda)$$

$$-\left[q(x)\psi_1(x,\lambda)-p(x)\psi_2(x,\lambda)-\lambda\psi_2(x,\lambda)\right]\varphi_2(x,\lambda)=0$$

olduğu elde edilir. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümleri (3.4) süreksizlik koşullarını sağladığından,

$$\begin{aligned}
W(w_i+0) &= \varphi_1(w_i+0,\lambda)\psi_2(w_i+0,\lambda)-\varphi_2(w_i+0,\lambda)\psi_1(w_i+0,\lambda)\\
&= \alpha_i\varphi_1(w_i-0,\lambda)\left[\alpha_i^{-1}\psi_2(w_i-0,\lambda)+h_i(\lambda)\psi_1(w_i-0,\lambda)\right]\\
&\quad -\left[\alpha_i^{-1}\varphi_2(w_i-0,\lambda)+h_i(\lambda)\varphi_1(w_i-0,\lambda)\right]\alpha_i\psi_1(w_i-0,\lambda)\\
&= \varphi_1(w_i-0,\lambda)\psi_2(w_i-0,\lambda)-\varphi_2(w_i-0,\lambda)\psi_1(w_i-0,\lambda)\\
&= W(w_i-0) \text{ yazılır.}
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $W(\varphi,\psi)$ karakteristik fonksiyonu x'den bağımsız olduğundan,

$$\Delta(\lambda):=W\{\varphi,\psi\}$$

$$=\varphi_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda)-\varphi_2(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda)$$

$$=a_2(\lambda)\varphi_1(b,\lambda)+b_2(\lambda)\varphi_2(b,\lambda)$$

$$=-b_1(\lambda)\psi_2(a,\lambda)-a_1(\lambda)\psi_1(a,\lambda)$$

biçiminde yazılabilir.

Ayrıca, $\Delta(\lambda)$, λ' nın tam fonksiyonudur ve bu fonksiyonun sıfırları ile L probleminin özdeğerleri çakışır.

Buna göre, her bir λ_n özdeğeri için $\psi(x,\lambda_n)=s_n\varphi(x,\lambda_n)$ geçerlidir. Burada $s_n=\dfrac{\psi_1(a,\lambda_n)}{-b_1(\lambda_n)}=\dfrac{\psi_2(a,\lambda_n)}{a_1(\lambda_n)}$ dır.

Öte yandan, $\forall i\in\{1,2\}$ ve $k=\{1,2,\ldots,N_i\}$ için $a_i(g_{ik})\neq 0$ ve $b_i(g_{ik})=0$ olduğundan,g_{ik}'ların bir özdeğer olması için gerek ve yeter koşul $\varphi_1(b,g_{2k})=0$, $\varphi_1(a,g_{1k})=0$ yani; $\Delta(g_{ik})=0$ olmasıdır.

Diğer taraftan, $i=1,2$ ve $k=\{1,2,\ldots P_i\}$ olmak üzere, t_{ik}'ların özdeğer olması için gerek ve yeter koşul $\varphi_1(w_i^-,t_{ik})=0=\varphi_1(w_i^+,t_{ik})$ yani; $\Delta(t_{ik})=0$ olmasıdır.

Teorem 3.9: (3.1)-(3.4) L probleminin özdeğerleri basittir.

İspat: φ ve ψ fonksiyonları belli başlangıç koşulları altında (3.1)-(3.4) probleminin çözümleri olup

$$\begin{cases} \psi_2'(x,\lambda) + p\psi_1(x,\lambda) + q\psi_2(x,\lambda) = \lambda\psi_1(x,\lambda)/\varphi_1(x,\lambda_n) \\ -\psi_1'(x,\lambda) + q\psi_1(x,\lambda) - p\psi_2(x,\lambda) = \lambda\psi_2(x,\lambda)/\varphi_2(x,\lambda_n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_2'(x,\lambda) + p\varphi_1(x,\lambda_n) + q\varphi_2(x,\lambda_n) = \lambda_n\varphi_1(x,\lambda_n)/\psi_1(x,\lambda) \\ -\varphi_1'(x,\lambda) + q\varphi_1(x,\lambda_n) - p\varphi_2(x,\lambda_n) = \lambda_n\varphi_2(x,\lambda_n)/\psi_2(x,\lambda) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\psi_2'(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda_n) - \psi_1(x,\lambda)\varphi_2'(x,\lambda) \\ &+q(\psi_2(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda_n) - \varphi_2(x,\lambda_n)\psi_1(x,\lambda)) \\ &= (\lambda-\lambda_n)\psi_1(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-\psi_1'(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda_n) + \varphi_1'(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda) \\ &+q(\psi_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda_n) - \varphi_1(x,\lambda_n)\psi_2(x,\lambda)) \\ &= (\lambda-\lambda_n)\psi_2(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda_n) \end{aligned}$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} &\psi_2'(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda_n) - \psi_1(x,\lambda)\varphi_2'(x,\lambda) \\ &-\psi_1'(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda_n) + \varphi_1'(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda) \\ &= (\lambda-\lambda_n)(\psi_1(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda_n) + \psi_2(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda_n)) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} &(\psi_2(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda_n) - \psi_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda_n))' \\ &= (\lambda-\lambda_n)(\psi_1(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda_n) + \psi_2(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda_n)) \end{aligned}$$

yazılır. Bu eşitliğin her iki tarafının (a,b) de integrali alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$(\lambda-\lambda_n)\int_a^b (\psi_1(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda_n)+\psi_2(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda_n))\,dx$$

$$=\alpha_2\psi_1\left(w_2^-,\lambda\right)\varphi_1\left(w_2^-,\lambda_n\right)(h_2(\lambda_n)-h_2(\lambda))$$

$$+\alpha_1\psi_1\left(w_1^-,\lambda\right)\varphi_1\left(w_1^-,\lambda_n\right)(h_1(\lambda_n)-h_1(\lambda))$$

$$+b_2(\lambda)\varphi_1(b,\lambda_n)(f_2(\lambda)-f_2(\lambda_n))$$

$$+b_1(\lambda_n)\psi_1(a,\lambda)(f_1(\lambda_n)-f_1(\lambda))$$

$$+b_2(\lambda)f_2(\lambda)\varphi_1(b,\lambda_n)+b_2(\lambda)\varphi_2(b,\lambda_n)$$

$$-\psi_2(a,\lambda)\varphi_1(a,\lambda_n)+b_1(\lambda_n)f_1(\lambda_n)\psi_1(a,\lambda)$$

$$-b_1(\lambda)\psi_2(a,\lambda)-a_1(\lambda)\psi_1(a,\lambda)-\Delta(\lambda)$$

eşitliği elde edilir. Buradan;

$$\int_a^b (\psi_1(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda_n)+\psi_2(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda_n))\,dx$$

$$+\alpha_2\varphi_1\left(w_2^-,\lambda_n\right)\psi_1\left(w_2^-,\lambda\right)(h_2(\lambda)-h_2(\lambda_n))$$

$$+\alpha_1\psi_1\left(w_1^-,\lambda\right)\varphi_1\left(w_1^-,\lambda_n\right)(h_1(\lambda)-h_1(\lambda_n))$$

$$+\psi_1(b,\lambda_n)\varphi_1(b,\lambda_n)(f_2(\lambda)-f_2(\lambda_n))$$

$$-\varphi_1(a,\lambda_n)\psi_1(a,\lambda)(f_1(\lambda)-f_1(\lambda_n))$$

$$+\psi_1(b,\lambda)f_2(\lambda_n)\varphi_1(b,\lambda_n)$$

$$+\psi_1(b,\lambda)\varphi_2(b,\lambda_n)-\psi_2(a,\lambda)b_1(\lambda_n)$$

$$-b_1(\lambda_n)f_1(\lambda)\psi_1(a,\lambda)+b_1(\lambda)\psi_2(a,\lambda)$$

$$+b_1(\lambda)f_1(\lambda)\psi_1(a,\lambda)$$

$$=-\left(\frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\lambda_n)}{(\lambda-\lambda_n)}\right)$$ yazılır.

Daha sonra $\psi(x,\lambda_n)=s_n\varphi(x,\lambda_n)$ olduğu dikkate alınıp

$\lambda\to\lambda_n$ iken limite geçilirse,

$s_n\rho_n=-\dot{\Delta}(\lambda_n)$ olur.

4. TERS PROBLEMLER

Bu bölümde Weyl fonksiyonuna ve çeşitli spektral verilere göre ters problemin çözümü için teklik teoremleri verilecektir. Öncelikle, ele alınan problemin karakteristik fonksiyonu oluşturulup, bu fonksiyonun asimptotik ifadesi elde edilecek ve ardından, Weyl fonksiyonu kullanılarak ters problemin çözümü için teklik teoremleri ispatlanacaktır. Bunun için, L ile birlikte aynı formda fakat katsayıları farklı olan $\tilde{L}$ sınır değer problemi ele alınsın. Burada L problemi ile ilgili ifadeler s ve bunların $\tilde{L}$ ile ilgili olanları $\tilde{s}$ ile gösterilsin.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının asimptotik ifadesi kullanılarak,

$$\Delta(\lambda)$$
$$= -a_2 a_1 m_1 m_2 \lambda^{N_1+N_2+L_1+L_2+4} \sin\lambda(w_1-a)\sin\lambda(w_2-w_1)\sin\lambda(b-w_2)$$
$$+o\left(|\lambda|^{N_1+N_2+L_1+L_2+4} e^{|\operatorname{Im}\lambda|(b-a)}\right)$$

olduğu elde edilir.

$\Phi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x,\lambda) \\ \Phi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ (1) denkleminin $U(\Phi) = 1$, $V(\Phi) = 0$ sınır koşulları ile (3.4) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü olsun.

$V(\Phi) = 0$ olduğundan $V(\psi) = 0$ olması gereğince ψ ile Φ lineer bağımlı yani $\Phi(x,\lambda) = k\psi(x,\lambda)$ $(k \neq 0)$ geçerlidir.

$$\begin{aligned} W(\varphi,\Phi) &= \left.\varphi_1(x,\lambda)\Phi_2(x,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\Phi_1(x,\lambda)\right|_{x=a} \\ &= -b_1(\lambda)\Phi_2(a,\lambda) - a_1(\lambda)\Phi_1(a,\lambda) \\ &= -1 \text{ dir.} \end{aligned}$$

$U(\Phi) = 1$ yani $b_1(\lambda)\Phi_2(a,\lambda) + a_1(\lambda)\Phi_1(a,\lambda) = 1$ ve

$\Phi(x,\lambda) = k\psi(x,\lambda)$ olduğundan,

$b_1(\lambda)\, k\psi_2(a,\lambda) + a_1(\lambda)\, k\psi_1(a,\lambda) = 1$

$k\left(b_1(\lambda)\,\psi_2(a,\lambda) + a_1(\lambda)\,\psi_1(a,\lambda)\right) = 1$

$k\left(-\Delta(\lambda)\right) = 1$

$k = -\dfrac{1}{\Delta(\lambda)}$ olup

$\Phi(x,\lambda) = k\psi(x,\lambda) = -\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$

olur.

Şimdi $S(x,\lambda) = \begin{pmatrix} S_1(x,\lambda) \\ S_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ ve $C(x,\lambda) = \begin{pmatrix} C_1(x,\lambda) \\ C_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ (1) denkleminin sırasıyla $S(a,\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C(a,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ koşullarını ve süreksizlik koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

$S(x,\lambda)$ ve $C(x,\lambda)$ $W(S,C) = 1$ yani lineer bağımsız olduğundan

$$\varphi(x,\lambda) = B_1(\lambda)\, C(x,\lambda) + B_2(\lambda)\, S(x,\lambda)$$

yazılabilir. Buna göre

$$\varphi(x,\lambda) = -b_1(\lambda)\, C(x,\lambda) + a_1(\lambda)\, S(x,\lambda)$$

yazılır. $S(x,\lambda)$ ile $C(x,\lambda)$ lineer bağımsız olup yani

$$W(S,\varphi) = \begin{vmatrix} 0 & -b_1(\lambda) \\ 1 & a_1(\lambda) \end{vmatrix} = b_1(\lambda) \neq 0$$

olup

$$\Phi(x,\lambda) = A(\lambda)\, S(x,\lambda) + B(\lambda)\, \varphi(x,\lambda)$$

yazılabilir.

$$\Phi_1(a,\lambda) = -b_1(\lambda)\,B(\lambda) \Rightarrow B(\lambda) = -\frac{\Phi_1(a,\lambda)}{b_1(\lambda)}$$

$$\Phi_2(a,\lambda) = A(\lambda) + B(\lambda)\,a_1(\lambda) \Rightarrow A(\lambda) = \Phi_2(a,\lambda) + \frac{\Phi_1(a,\lambda)}{b_1(\lambda)}a_1(\lambda)$$

$$A(\lambda) = \frac{1}{b_1(\lambda)}$$

olur. O halde,

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{1}{b_1(\lambda)}S(x,\lambda) - \frac{\Phi_1(a,\lambda)}{b_1(\lambda)}\varphi(x,\lambda)$$

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{1}{b_1(\lambda)}\left(S(x,\lambda) - \Phi_1(a,\lambda)\,\varphi(x,\lambda)\right) \tag{4.1}$$

olur. Bu $\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonuna Weyl çözümü, $M(\lambda) = -\Phi_1(a,\lambda)$ fonksiyonuna ise Weyl fonksiyonu adı verilir.Buna göre,

$$\Phi(x,\lambda) = -\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

$$\Phi_1(a,\lambda) = -\frac{\psi_1(a,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \text{ olup}$$

$$M(\lambda) = \frac{\psi_1(a,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

yazılır.

$$\ell\left[\tilde{y}(x)\right] := By'(x) + \tilde{Q}(x)y(x) = \lambda y(x)$$

denklemi ve

$$\begin{aligned}
\tilde{U}(y) \quad &: \quad = y_2(a) + \tilde{f}_1(\lambda)y_1(a) = 0 \\
\tilde{V}(y) \quad &: \quad = y_2(b) + \tilde{f}_2(\lambda)y_1(b) = 0 \\
y_1(w_i+0) \quad &= \quad \tilde{\alpha}_i y_1(w_i-0) \\
y_2(w_i+0) \quad &= \quad -\tilde{\alpha}_i^{-1}y_2(w_i-0) + \tilde{h}_i(\lambda)\,y_1(w_i-0)
\end{aligned}$$

sınır ve süreksizlik koşulları ile üretilen $\tilde{L}$ problemi göz önüne alınsın. Burada $\tilde{Q}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{p}(x) & q(x) \\ q(x) & -\tilde{p}(x) \end{pmatrix}$biçimindedir.

Teorem 4.1:.L sınır değer problemi, Weyl fonksiyonu ile tek olarak belirlenir, yani eğer $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$, $f_1(\lambda) = \tilde{f}_1(\lambda)$ ise, $Q(x) \equiv \tilde{Q}(x)$ (a,b) de hemen hemen her yerde, $f_2(\lambda) = \tilde{f}_2(\lambda)$, $h_i(\lambda) = \tilde{h}_i(\lambda)$,ve $\alpha_i(\lambda) = \tilde{\alpha}_i(\lambda)$ $(i = 1, 2)$ dır.

İspat:

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_1 & \tilde{\Phi}_1 \\ \tilde{\varphi}_2 & \tilde{\Phi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \Phi_1 \\ \varphi_2 & \Phi_2 \end{pmatrix}$$

olacak şekilde $P(x,\lambda)$ matrisini oluşturalım. Buna göre,

$$\varphi_1(x,\lambda) = P_{11}\tilde{\varphi}_1 + P_{12}\tilde{\varphi}_2, \qquad \tilde{\Phi}_1(x,\lambda) = P_{11}\tilde{\Phi}_1 + P_{12}\tilde{\Phi}_2,$$
$$\varphi_2(x,\lambda) = P_{21}\tilde{\varphi}_1 + P_{22}\tilde{\varphi}_2 \qquad \widetilde{\Phi}_2(x,\lambda) = P_{21}\tilde{\Phi}_1 + P_{22}\tilde{\Phi}_2$$

olur.

$\Phi(x,\lambda) = -\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ ve $\langle \varphi, \Phi \rangle \equiv 1$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} P_{11}(x,\lambda) &= -\varphi_1(x,\lambda)\,\tilde{\Phi}_2(x,\lambda) + \Phi_1(x,\lambda)\,\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) \\ P_{12}(x,\lambda) &= -\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\,\Phi_1(x,\lambda) + \varphi_1(x,\lambda)\,\tilde{\Phi}_1(x,\lambda) \\ P_{21}(x,\lambda) &= -\varphi_2(x,\lambda)\,\tilde{\Phi}_2(x,\lambda) + \Phi_2(x,\lambda)\,\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) \\ P_{22}(x,\lambda) &= -\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\,\Phi_2(x,\lambda) + \varphi_2(x,\lambda)\,\tilde{\Phi}_1(x,\lambda) \end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir. Şimdi $P_{ij}(x,\lambda)$ fonksiyonlarının sınırlılığını inceleyelim.

$\Phi(x,\lambda) = \dfrac{1}{b_1(\lambda)}\left[\left(S(x,\lambda) + M(\lambda)\,\varphi(x,\lambda)\right)\right]$

$\varphi_i(x,\lambda) = -b_1(\lambda)\,C(x,\lambda) + a_1(\lambda)\,S(x,\lambda)$ ve $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$ olduğu dikkate alınıp

$P_{11}(x,\lambda) = -\varphi_1\tilde{\Phi}_2 + \Phi_1\tilde{\varphi}_2$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &P_{11}(x,\lambda) = \left(-b_1(\lambda)\,C_1(x,\lambda) + a_1(\lambda)\,S_1(x,\lambda)\right) \\ &\times\frac{1}{b_1(\lambda)}\left(\tilde{S}_2(x,\lambda) + \tilde{M}(\lambda)\left(-b_1(\lambda)\,\tilde{C}_2(x,\lambda) + a_1(\lambda)\,\tilde{S}_2(x,\lambda)\right)\right) \\ &-\frac{1}{b_1(\lambda)}\left(S_1(x,\lambda) + M(\lambda)\left(-b_1(\lambda)\,C_1(x,\lambda) + a_1(\lambda)\,S_1(x,\lambda)\right)\right) \\ &\times\left(-b_1(\lambda)\,\tilde{C}_2(x,\lambda) + a_1(\lambda)\,\tilde{S}_2(x,\lambda)\right) \\ &= \tilde{C}_1(x,\lambda)\,S_1(x,\lambda) - C_1(x,\lambda)\,\tilde{S}_1(x,\lambda) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$P_{12}(x,\lambda) = -\tilde{\varphi}_1 \Phi_1 + \varphi_1 \tilde{\Phi}_1$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&P_{12}(x,\lambda) = -\left(-b\left(\lambda\right)C_1\left(x,\lambda\right) + a_1\left(\lambda\right)S_1\left(x,\lambda\right)\right) \\
&\times \frac{1}{b_1\left(\lambda\right)}\left(S_1\left(x,\lambda\right) + M\left(\lambda\right)\left(-b_1\left(\lambda\right)C_1\left(x,\lambda\right) + a_1\left(\lambda\right)S_1\left(x,\lambda\right)\right)\right) \\
&+\left(-b_1\left(\lambda\right)C_1\left(x,\lambda\right) + a_1\left(\lambda\right)S_1\left(x,\lambda\right)\right) \\
&\times\left(\frac{1}{b_1\left(\lambda\right)}\tilde{S}_1\left(x,\lambda\right) + M\left(\lambda\right)\left(-b_1\left(\lambda\right)\tilde{C}_1\left(x,\lambda\right) + a_1\left(\lambda\right)\tilde{S}_1\left(x,\lambda\right)\right)\right) \\
&= \tilde{C}_1\left(x,\lambda\right)S_1\left(x,\lambda\right) - C_1\left(x,\lambda\right)\tilde{S}_1\left(x,\lambda\right) \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

$P_{21}(x,\lambda) = -\varphi_2 \tilde{\Phi}_2 + \Phi_2 \tilde{\varphi}_2$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&P_{21}(x,\lambda) = -\left(-b_1\left(\lambda\right)C_2\left(x,\lambda\right) + a_1\left(\lambda\right)S_2\left(x,\lambda\right)\right) \\
&\times \frac{1}{b_1\left(\lambda\right)}\left(\tilde{S}_2\left(x,\lambda\right) + M\left(\lambda\right)\left(-b_1\left(\lambda\right)\tilde{C}_2\left(x,\lambda\right) + a_1\left(\lambda\right)\tilde{S}_2\left(x,\lambda\right)\right)\right) \\
&+\frac{1}{b_1\left(\lambda\right)}\left(S_2\left(x,\lambda\right) + M\left(\lambda\right)\left(-b_1\left(\lambda\right)C_2\left(x,\lambda\right) + a_1\left(\lambda\right)S_2\left(x,\lambda\right)\right)\right) \\
&\times\left(-b_1\left(\lambda\right)\tilde{C}_2\left(x,\lambda\right) + a_1\left(\lambda\right)\tilde{S}_2\left(x,\lambda\right)\right) \\
&= C_2\left(x,\lambda\right)\tilde{S}_2\left(x,\lambda\right) - S_2\left(x,\lambda\right)\tilde{C}_2\left(x,\lambda\right) \text{ olur.}
\end{aligned}
$$

$P_{22}(x,\lambda) = -\tilde{\varphi}_1 \Phi_2 + \varphi_2 \tilde{\Phi}_1$ ifadesinde yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
&P_{22}(x,\lambda) = -b_1\left(\lambda\right)\tilde{C}_1\left(x,\lambda\right) + a_1\left(\lambda\right)\tilde{S}_1\left(x,\lambda\right) \\
&\times \frac{1}{b_1\left(\lambda\right)}\left(S_2\left(x,\lambda\right) + M\left(\lambda\right)\left(-b_1\left(\lambda\right)C_2\left(x,\lambda\right) + a_1\left(\lambda\right)S_2\left(x,\lambda\right)\right)\right) \\
&+\left(-b_1\left(\lambda\right)C_2\left(x,\lambda\right) + a_1\left(\lambda\right)S_2\left(x,\lambda\right)\right) \\
&\times \frac{1}{b_1\left(\lambda\right)}\left(\tilde{S}_1\left(x,\lambda\right) + M\left(\lambda\right)\left(-b_1\left(\lambda\right)\tilde{C}_1\left(x,\lambda\right) + a_1\left(\lambda\right)\tilde{S}_1\left(x,\lambda\right)\right)\right) \\
&= \tilde{C}_1(x,\lambda)S_2(x,\lambda) - C_2(x,\lambda)\tilde{S}_1(x,\lambda)
\end{aligned}
$$

hesaplanır. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
P_{11}(x,\lambda) &= C_1\left(x,\lambda\right)\tilde{S}_2\left(x,\lambda\right) - S_1\left(x,\lambda\right)\tilde{C}_2\left(x,\lambda\right) \\
P_{12}(x,\lambda) &= \tilde{C}_1\left(x,\lambda\right)S_1\left(x,\lambda\right) - C_1\left(x,\lambda\right)\tilde{S}_1\left(x,\lambda\right) \\
P_{21}(x,\lambda) &= C_2\left(x,\lambda\right)\tilde{S}_2\left(x,\lambda\right) - S_2\left(x,\lambda\right)\tilde{C}_2\left(x,\lambda\right) \\
P_{22}(x,\lambda) &= \tilde{C}_1(x,\lambda)S_2(x,\lambda) - C_2(x,\lambda)\tilde{S}_1(x,\lambda)
\end{aligned}
$$

elde edilmiş olur. $S(x,\lambda)$ ve $C(x,\lambda)$, fonksiyonları herbir sabit x için λ' nın tam fonksiyonları olduğundan, $P_{ij}(x,\lambda)$ fonksiyonları herbir sabit x için λ' nın tam fonksiyonlarıdır.

$G_\delta = \{\lambda : |\lambda - \lambda_n| > \delta,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}, \delta > 0$

$\tilde{G}_\delta = \left\{\lambda : \left|\lambda - \tilde{\lambda}_n\right| > \delta,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}$ olsun. Burada δ yeterince küçük pozitif sayıdır.

$\lambda \in G_\delta \cap \tilde{G}_\delta$ için $|\sin \lambda x| \geq C_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda| x}$, $|\lambda| \to \infty$ geçerlidir.

Buradan,

$$\Delta(\lambda) = -a_2 a_1 m_1 m_2 \lambda^{N_1+N_2+L_1+L_2+4} \sin\lambda(w_1 - a)\sin\lambda(w_2 - w_1)\sin\lambda(b - w_2) + o\left(|\lambda|^{N_1+N_2+L_1+L_2+4} e^{|\operatorname{Im}\lambda|(b-a)}\right)$$

olduğundan,

$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta \lambda^{N_1+N_2+L_1+L_2+4} e^{|\operatorname{Im}\lambda|(b-a)}$, $\lambda \in G_\delta \cap \tilde{G}_\delta$, $|\lambda| \geq \delta$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned}
P_{11}(x,\lambda) &= \varphi_1(x,\lambda)\frac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} - \tilde{\psi}_2(x,\lambda)\frac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \\
&= \left[-a_1\lambda^{N_1+1}\sin\lambda(x-a) + o\left(|\lambda|^{N_1+1} e^{|\operatorname{Im}\lambda|(x-a)}\right)\right] \\
&\times \left(\begin{array}{c} \tilde{m}_1\tilde{m}_2\tilde{a}_2\lambda^{N_2+L_1+L_2+3}\sin\lambda(w_2-b)\sin\lambda(w_1-w_2)\cos\lambda(x-w_1) \\ +o\left(|\lambda|^{N_2+L_1+L_2+3} e^{|\operatorname{Im}\lambda|(x-b)}\right) \end{array}\right) \\
&\times C_\delta |\lambda|^{-N_1-N_2-L_1-L_2-4} e^{|\operatorname{Im}\lambda|(a-b)} \\
&+ \left[a_1\lambda^{N_1+1}\cos\lambda(x-a) + o\left(|\lambda|^{N_1+1} e^{|\operatorname{Im}\lambda|(x-a)}\right)\right] \\
&\times \left(\begin{array}{c} -\tilde{m}_1\tilde{m}_2\tilde{a}_2\lambda^{N_2+L_1+L_2+3}\sin\lambda(w_2-b)\sin\lambda(w_1-w_2)\sin\lambda(x-w_1) \\ +o\left(|\lambda|^{N_2+L_1+L_2+3} e^{|\operatorname{Im}\lambda|(x-b)}\right) \end{array}\right) \\
&\times C_\delta |\lambda|^{-N_1-N_2-L_1-L_2-4} e^{|\operatorname{Im}\lambda|(a-b)} \leq M \text{ olup}
\end{aligned}$$

$|P_{11}(x,\lambda)| \leq M$ yazılır.

Benzer şekilde, $|P_{12}(x,\lambda)| \leq M$, $|P_{21}(x,\lambda)| \leq M$, $|P_{22}(x,\lambda)| \leq M$ olduğu gösterilebilir. $P_{ij}(x,\lambda)$ fonksiyonları tam ve sınırlı olup Liouville teoreminden sabittirler. Yani, $P_{ij}(x,\lambda) = A_{ij}(x)$ olup λ dan bağımsızdır. Diğer taraftan

$$P_{11}(x,\lambda) = \tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\Phi_1(x,\lambda) - \varphi_1(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda)$$

$$= \varphi_1(x,\lambda)\frac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} - \tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\frac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

$$= \varphi_1(x,\lambda)\left(\frac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} - \frac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right)$$

$$-\frac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\left(\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\right) + 1$$

$$P_{12}(x,\lambda) = \varphi_1(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda) - \tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\Phi_1(x,\lambda)$$

$$= -\varphi_1(x,\lambda)\frac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} + \tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\frac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

$$= \tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\left(\frac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \frac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}\right) - \frac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}\left(\varphi_1(x,\lambda) - \tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\right)$$

$$P_{21}(x,\lambda) = \tilde{\Phi}_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda)$$
$$= \varphi_2(x,\lambda)\frac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} - \tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\frac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

$$= \varphi_2(x,\lambda)\left(\frac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} - \frac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right) - \frac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\left(\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\right)$$

$$P_{22}(x,\lambda) = -\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\Phi_2(x,\lambda) + \varphi_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda)$$

$$= \tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\frac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \varphi_2(x,\lambda)\frac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}$$
$$= \frac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\left(\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) - \varphi_1(x,\lambda)\right)$$

$$-\varphi_2(x,\lambda)\left(\frac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}-\frac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right)+1 \text{ biçiminde yazılır.}$$

Şimdi $P_{ij}(x,\lambda)$ fonksiyonlarının λ dan bağımsız olduğu , $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$fonksiyonlarının asimptotik ifadeleri ile $K=\tilde{K}$ olduğu dikkate alınırsa,

$P_{11}(x,\lambda)$ için,

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\varphi_1(x,\lambda)\left(\frac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}-\frac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right)=0,$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\left(\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)-\varphi_2(x,\lambda)\right)=0 \text{ olup,}$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\left[P_{11}(x,\lambda)-1\right]=0 \text{ elde edilir.}$$

$P_{12}(x,\lambda)$ için,

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\left(\frac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}-\frac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}\right)=0,$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}\left(\varphi_1(x,\lambda)-\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\right)=0 \text{ olup,}$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty}P_{12}(x,\lambda)=0 \text{ olur.}$$

$P_{21}(x,\lambda)$ için,

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\varphi_2(x,\lambda)\left(\frac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}-\frac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right)=0,$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\left(\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)-\varphi_2(x,\lambda)\right)=0 \text{ olup,}$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty}P_{21}(x,\lambda)=0 \text{ elde edilir.}$$

$P_{22}(x,\lambda)$ için,

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\left(\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)-\varphi_1(x,\lambda)\right)=0,$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\varphi_2(x,\lambda)\left(\frac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}-\frac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right)=0 \text{ olup,}$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\left[P_{22}(x,\lambda)-1\right]=0 \text{ elde edilir.}$$

Böylece, $P_{ij}(x,\lambda)$ fonksiyonlarının λ dan bağımsız olduğu gözönünde bulundurulursa,

$P_{ij}(x,\lambda) \equiv I_{2\times 2}$ elde edilir. Bu sonuç (4.2) denkleminde dikkate alınırsa,

$$\begin{cases} \varphi_1(x,\lambda)\dfrac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} - \tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\dfrac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = 1 \\ -\varphi_1(x,\lambda)\dfrac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} - \tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\dfrac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varphi_2(x,\lambda)\dfrac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} - \tilde{\varphi}_2(x,\lambda)\dfrac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = 0 \\ \tilde{\varphi}_1(x,\lambda)\dfrac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \varphi_2(x,\lambda)\dfrac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} = 1 \end{cases}$$

sistemleri elde edilir. Buna göre bu sistemler ayrı ayrı çözülürse, birinci sistemden,

$$\varphi_1(x,\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) \\ 0 & \tilde{\varphi}_1(x,\lambda) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} & -\tilde{\varphi}_2(x,\lambda) \\ -\dfrac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} & \tilde{\varphi}_1(x,\lambda) \end{vmatrix}} = \frac{\tilde{\varphi}_1(x,\lambda)}{\dfrac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)\tilde{\varphi}_1(x,\lambda) - \tilde{\psi}_1(x,\lambda)\tilde{\varphi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}}$$

$$= \tilde{\varphi}_1(x,\lambda)$$

$$\frac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} & 1 \\ -\dfrac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} & 0 \end{vmatrix}}{1} = \frac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}$$ ve aynı şekilde ikinci sistemden

$\varphi_2(x,\lambda) = \tilde{\varphi}_2(x,\lambda)$, $\dfrac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \dfrac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}$ elde edilir.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (3.1) denklemini sağladığından

$$B\varphi(x,\lambda) + Q(x)\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda)$$

$$B\tilde{\varphi}(x,\lambda) + \tilde{Q}(x)\tilde{\varphi}(x,\lambda) = \lambda\tilde{\varphi}(x,\lambda)$$

yazılır. Bu iki denklem taraf tarafa çıkarılır ve $\varphi(x,\lambda) = \tilde{\varphi}(x,\lambda)$ olduğu dikkate alınırsa;

$$\left(Q(x) - \tilde{Q}(x)\right)\varphi(x,\lambda) = 0$$

olur. Buradan $Q(x) = \tilde{Q}(x)$ elde edilir. Ayrıca;

$\dfrac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \dfrac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}, \dfrac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \dfrac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}$ olduğu dikkate alınır ve

$$b_2(\lambda)\,\psi_2(x,\lambda) + a_2(\lambda)\,\psi_1(x,\lambda) = 0$$

$$\tilde{b}_2(\lambda)\,\tilde{\psi}_2(x,\lambda) + \tilde{a}_2(\lambda)\,\tilde{\psi}_1(x,\lambda) = 0$$

denklemleri göz önüne alınırsa

$b_2(\lambda)\,\psi_2(x,\lambda) = -a_2(\lambda)\,\psi_1(x,\lambda)$ ise $\dfrac{\psi_1(x,\lambda)}{\psi_2(x,\lambda)} = -\dfrac{b_2(\lambda)}{a_2(\lambda)}$,

$\dfrac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)} = -\dfrac{\tilde{b}_2(\lambda)}{\tilde{a}_2(\lambda)}$ ve $\dfrac{\psi_1(x,\lambda)}{\psi_2(x,\lambda)} = \dfrac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}$ olur.

O halde $\dfrac{b_2(\lambda)}{a_2(\lambda)} = \dfrac{\tilde{b}_2(\lambda)}{\tilde{a}_2(\lambda)}$ veya $a_2(\lambda)\,\tilde{b}_2(\lambda) - b_2(\lambda)\,\tilde{a}_2(\lambda) = 0$ yazılır. $a_2(\lambda)$, $b_2(\lambda)$ ve öylece de $\tilde{a}_2(\lambda)$, $\tilde{b}_2(\lambda)$ polinomlarının ortak sıfırları olmadığından $a_2(\lambda) = \tilde{a}_2(\lambda)$, $b_2(\lambda) = \tilde{b}_2(\lambda)$ olur. O halde $f_2(\lambda) = \tilde{f}_2(\lambda)$ yazılır.

Diğer taraftan,

$$\varphi_1(w_1^+,\lambda) = \alpha_1\varphi_1(w_1^-,\lambda)$$

$$\varphi_1(w_2^+,\lambda) = \alpha_2\varphi_1(w_2^-,\lambda)$$

$$\tilde{\varphi}_1(w_1^+,\lambda) = \tilde{a}_1\tilde{\varphi}_1(w_1^-,\lambda)$$

$$\tilde{\varphi}_1(w_2^+,\lambda) = \tilde{a}_2\tilde{\varphi}_1(w_2^-,\lambda)$$

$$\varphi_2(w_1^+,\lambda) = \alpha_1^{-1}\varphi_2(w_1^-,\lambda) + h_1(\lambda)\,\varphi_1(w_1^-,\lambda)$$

$$\varphi_2(w_2^+,\lambda) = \alpha_2^{-1}\varphi_2(w_2^-,\lambda) + h_2(\lambda)\,\varphi_1(w_2^-,\lambda)$$

$$\tilde{\varphi}_2(w_1^+,\lambda) = \tilde{\alpha}_1^{-1}\tilde{\varphi}_2(w_1^-,\lambda) + \tilde{h}_1(\lambda)\,\tilde{\varphi}_1(w_1^-,\lambda)$$

$$\tilde{\varphi}_2(w_2^+,\lambda) = \tilde{\alpha}_2^{-1}\tilde{\varphi}_2(w_2^-,\lambda) + \tilde{h}_2(\lambda)\,\tilde{\varphi}_1(w_2^-,\lambda)$$

ve

$\varphi_1(x,\lambda) = \tilde{\varphi}_1(x,\lambda)$, $\varphi_2(x,\lambda) = \tilde{\varphi}_2(x,\lambda)$ olduğundan

$\dfrac{\varphi_1(w_1^+)}{\varphi_1(w_1^-)} = \dfrac{\tilde{\varphi}_1(w_1^+)}{\tilde{\varphi}_1(w_1^-)} \Rightarrow \alpha_1 = \tilde{\alpha}_1$,

$\dfrac{\varphi_1(w_2^+)}{\varphi_1(w_2^-)} = \dfrac{\tilde{\varphi}_1(w_2^+)}{\tilde{\varphi}_1(w_2^-)} \Rightarrow \alpha_2 = \tilde{\alpha}_2$ elde edilir.

Böylece,

$$h_1(\lambda) = \frac{\varphi_2(w_1^+,\lambda) - \alpha_1^{-1}\varphi_2(w_1^-,\lambda)}{\varphi_1(w_1^-,\lambda)} = \frac{\tilde{\varphi}_2(w_1^+,\lambda) - \tilde{\alpha}_1^{-1}\tilde{\varphi}_2(w_1^-,\lambda)}{\tilde{\varphi}_1(w_1^-,\lambda)} = \tilde{h}_1(\lambda)$$

ve

$$h_2(\lambda) = \frac{\varphi_2(w_2^+,\lambda) - \alpha_2^{-1}\varphi_2(w_2^-,\lambda)}{\varphi_1(w_2^-,\lambda)} = \frac{\tilde{\varphi}_2(w_2^+,\lambda) - \tilde{\alpha}_1^{-1}\tilde{\varphi}_2(w_2^-,\lambda)}{\tilde{\varphi}_1(w_2^-,\lambda)} = \tilde{h}_2(\lambda)$$

olur.Böylece, ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de iki spektruma göre teklik teoremi verilsin. Bunun için L ile aynı formda fakat, yalnız birinci sınır koşulu değiştirilen aşağıdaki L_1 problemi ele alınsın:

$$\ell\left[y(x)\right] := By'(x) + Q(x)y(x) = \lambda y(x),\ x \in [a,b]$$

$$\begin{aligned} U\left(y\right) &: = y_1(a) = 0 \\ V\left(y\right) &: = y_2(b) + f_2(\lambda)y_1(b) = 0 \\ y_1(w_i+0) &= \alpha_i y_1(w_i-0) \\ y_2(w_i+0) &= \alpha_i^{-1} y_2(w_i-0) + h_i\left(\lambda\right) y_1(w_i-0) \end{aligned}$$

Burada amaç; L ve L_1 problemlerinin özdeğerler dizisi biliniyorken, problemin katsayılarının tek olarak belirlenebileceğini göstermektir.

$\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ dizisi, L_1 probleminin özdeğerleri olsun. L_1 probleminin karakteristik fonksiyonunun

$$\Delta_1(\lambda) = W\left(\varphi,\psi\right) = -\psi_1(a,\lambda) = \varphi_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda) - \varphi_2(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda)$$

olduğu açıktır.

Teorem 4.2: Eğer her $n \in \mathbb{Z}$ için $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n,\ \mu_n = \tilde{\mu}_n$ ve $K = a_2 m_1 m_2,\ \tilde{K} = \tilde{a}_2\tilde{m}_1\tilde{m}_2$ olmak üzere $K = \tilde{K}$, $f_1\left(\lambda\right) = \tilde{f}_1\left(\lambda\right)$ ise bu durumda $Q\left(x\right) = \tilde{Q}\left(x\right)$ (a,b) de hemen hemen her yerde, $f_2\left(\lambda\right) = \tilde{f}_2\left(\lambda\right)$ ve $h_i\left(\lambda\right) = \tilde{h}_i\left(\lambda\right),\ \alpha_i\left(\lambda\right) = \tilde{\alpha}_i\left(\lambda\right)$ $(i = 1, 2)$ dır.

İspat: Her $n \in \mathbb{Z}$ için $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ ve $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$ olduğundan $\dfrac{\Delta\left(\lambda\right)}{\widetilde{\Delta}\left(\lambda\right)}$ ve $\dfrac{\Delta_1\left(\lambda\right)}{\widetilde{\Delta}_1\left(\lambda\right)}$; λ' nın tam fonksiyonlarıdır. Diğer taraftan; $\Delta(\lambda)$ ve $\Delta_1(\lambda)$ karakteristik fonksiyonlarının asimptotik ifadeleri ve $K = \tilde{K}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\Delta(\lambda)}{\tilde{\Delta}\left(\lambda\right)} = 1 \text{ ve } \lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\Delta_1(\lambda)}{\tilde{\Delta}_1\left(\lambda\right)} = 1$$

olduğu gösterilir. Dolayısıyla $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ ve $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$ olduğundan, $\Delta(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda)$ ve $\Delta_1(\lambda) = \tilde{\Delta}_1(\lambda)$ olur. $\Delta_1(\lambda) = \tilde{\Delta}_1(\lambda)$ durumu dikkate alındığında,

$$\psi_1(a,\lambda) = \tilde{\psi}_1(a,\lambda)$$

yazılır. Diğer taraftan; $M(\lambda) = \dfrac{\psi_1(a,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ olduğundan,

$M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$ elde edilir. Böylece, bir önceki teoremden $L = \tilde{L}$ olur.■

KAYNAKÇA

Adler, V. E A modification of Crum's method, Theoret. Math. Phys., 101 (1994) 1381-1386.

Atkinson, F. V. ,Discrete and Continuous Boundary Problems, (Academic Press, 1964).

Abdukadyrov, E. (1967). Computation of the Regularized Trace for a Dirac System, *Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Mekh.*, 22, (4), 17-24.

Akdoğan, Z.; Demirci, M.; Mukhtarov, O. Sh. (2005). Discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter-dependent boundary and transmissions conditions. *Acta Appl. Math.* 86, no. 3, 329–344.

Akdoğan, Z.; Demirci, M.; Mukhtarov, O. Sh. (2005). Sturm-Liouville problems with eigendependent boundary and transmissions conditions. *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.* 25, no. 4, 731–740.

Altınışık, N.; Kadakal, M.; Mukhtarov, O. Sh. (2004). Eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter-dependent boundary conditions. *Acta Math. Hungar.* 102, no. 1-2, 159–175.

Altınışık, N.; Mukhtarov, O. Sh.; Kadakal, M. (2012). Asymptotic formulas for eigenfunctions of the Sturm-Liouville problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions. *Kuwait J. Sci. Engrg.* 39, no. 1A, 1–17.

Amara, Zh. Ben; Shkalikov, A. A. (1999). The Sturm-Liouville problem with physical and spectral parameters in the boundary condition. (Russian), no. 2, 163–172, no. 1-2, 127–134.

Ambartsumyan, **V.A.** (1929). Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53, 690-695.

Amirov, **R. Kh.; Yurko, V. A.** (2001) On differential operators with a singularity and discontinuity conditions inside an interval. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol.53, No.11.

Amirov, **R. Kh**. (2004). Boundary value problems for second-order singular differential equations on a finite interval. *Int. J. Pure Appl. Math.* 15, no. 3, 373–389.

Amirov, R. Kh. (2004). On a representation of solution of Dirac differential equation systems which have discontinuity in interval. *Int. J. Pure Appl. Math.* 12, no. 3, 299–310.

Amirov, R. Kh. (2005). On a System of Dirac Differential Equations with Discontinuity Conditions Inside an Interval, *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 57, No.5.

Amirov, R. Kh. (2006). On Sturm-Liouville Operators with Discontinuity Conditions Inside an Interval. *J. Math. Anal. Appl.* 317, 163-176.

Amirov, R. Kh.; Topsakal, N. (2008). Sturm-Liouville operators with Coulomb potential which have discontinuity conditions inside an interval, *Integral Transforms and Special Functions*, Vol. 19, No.12, 923-937.

Amirov, R. Kh.; Keskin, B.; Özkan, A. S. (2009). Direct and inverse problems for the Dirac operator with spectral parameter linearly contained in boundary condition., *Ukrainian Math. J.* Vol. 61, No.9, 1155-1166.

Amirov, R. Kh.; Keskin, B.; Özkan, A. S. Inverse Problems for Impulsive Sturm-Liouville Operator with Spectral Parameter Linearly Contained in Boundary Conditions, Integral Transforms and Special Functions, 20, 607-618 (2009).

Amirov, R. Kh.; Topsakal, N.; Güldü, Y. (2010). Inverse Problem For Sturm-Liouville Operators with Coulomb potential and Discontinuity Conditions Inside an Interval.

Amirov, R. Kh.; Topsakal, N.; Güldü, Y. (2011). On impulsive Sturm-Liouville operators with Coulomb potential and spectral parameter linearly contained in boundary conditions. *Ukrainian Math. J.* 62, no. 9, 1345–1366.

Benedek, A. I. ,Panzone,R. On Sturm-Liouville problems with the square root of the eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Notas de Algebra y Anal., 10 (1981), 1-62.

Benedek, A. I. ,Panzone,R. On inverse eigenvalue problems for a second-order differential equations with parameter contained in the boundary conditions, Notas Algebra y Analisis, 1–13 (1980).

Binding, P. A.; Browne, P. J.; Seddighi, K. (1993). Sturm–Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions, *Proc. Edinburgh*

Math. Soc. (2) 37 57–72.

Binding, P. A.; Browne, P. J.; Watson, B. A. (2000). Inverse spectral problems for Sturm–Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions, *J. London Math. Soc.* 62 161–182.

Binding, P. A.; Browne, P. J.; Watson, B. A. Transformations between Sturm- Liouville problems with eigenvalue dependent and independent boundary conditions, Bull. London Math. Soc., to appear.

Binding, P. A.; Browne, P. J.; Watson, B. A. (2004). Equivalence of inverse Sturm–Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter, *J. Math. Anal. Appl.* 291.

Binding, P. A.; Hryniv, R. Langer, H. Najman, B. Elliptic eigenvalue problems with eigenparameter dependent boundary conditions, J. Diff. Eq., 174 (2001), 30-54.

Borg, **G.** (1945). Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Bestimmung der Differentialg leichung durch die Eigenvert, *Acta Math.* 78, 1–96.

Chernozhukova, A.; Freiling, **G**. (2009). A uniqueness theorem for the boundary value problems with non- linear dependence on the spectral parameter in the boundary conditions, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 1-9.

Coddington, E. A.; Levinson, N. (1955). Theory of Ordinary Differential Equations, *McGraw- Hill Book Company*, New York, Toronto, London.

Cohen, D. S. (1966)**.** An integral transform associated with boundary conditions containing an eigenvalue parameter, *SIAM J. Appl. Math*, 14, 1164-1175.

Collatz, L. Eigenwertaufgaben mit Technischen Anwendungen, Akademische Verlag, Leipzig, (1963).

Crum, M. M. Associated Sturm-Liouville systems, Quart. J. Math. Oxford, 6 (1955), 121-127.

Chugunova, M.V. Inverse spectral problem for the Sturm– Liouville operator with eigenvalue parameter dependent boundary conditions Oper. Theory: Adv. Appl. 123 (Basel: Birkhauser), 187–94 (2001).

Deift, P. Applications of a commutation formula, Duke Math. J., 45 (1978), 267- 310.

Delsarte, J. (1938)b. Sur Certaines Transformations Fonctionelles Relatives Aux Equations Lineaires Aux Derivees Partielles du Second Ordre, *C. R. Hebd. Acad. Sci.*, 206, 178-182.

Delsarte, J.; Lions, J. (1957). Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe, *Comm. Math. Helv.*, 32(2), 113-128.

Dijksma, A. Eigenfunction expansions for a class of J-selfadjoint ordinary differential operators with boundary conditions containing the eigenvalue parameter, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 86A (1980), 1-27.

Dijksma, A. Langer, H. Operator theory and ordinary differential operators, Fields Inst. Monographs 3, (1996), 75-139.

Dijksma, A. Langer, H. Snoo,H. de Symmetric Sturm-Liouville operators with eigenvalue depending boundary conditions, Canadian Math. Soc. Conf. Proc. 8 (1987), 87-116.

Eberhard, W. Freiling, G. Schneider, A. Note on a paper of E. M. E. Zayed and S. F. M. Ibrahim: "Eigenfunction expansion for a regular fourth order eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the boundary conditions" [Internat. J. Math. Math. Sci. 12 (1989), no. 2, 341–348; MR 90h:34043]., Internat. J. Math. Math. Sci., 15 (1992), 809–811.

Etkin, A.E. Some boundary value problems with a spectral parameter in the boundary conditions, Amer. Math. Soc. Transl. Series 2, 136 (1987), 35-41.

Evans, W. D.; Harris, B. J. (1980). Bounds for the Point Spectra of Separated Dirac Operators, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect., A 88, 1-15.

Freiling, G.; Yurko, V. A. (2001). Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications, Nova Science, New York.

Freiling, G.; Yurko, V. A. (2010). V. A. Inverse problems for Sturm-Liouville equations with boundary conditions polynomially dependent on the spectral parameter. *Inverse Problems* 26, no. 5, 055003, 17 pp.

Fulton, **C. T.** (1977). Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc. R. Soc. Edinburgh, A77, 293-308.

Fulton, **C. T.** (1980). Singular eigenvalue problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc. R. Soc. Edinburgh, A87 1-34.

Gasymov, M. G.; Levitan, B. M. (1964). About Sturm-Liouville Differential. Operators, *Math. Sborn.*, 63 (105), No. 3.

Gasymov, M. G.; Levitan, B. M. (1966). The Inverse Problem for the Dirac System, Dokl. Akad. Nauk SSR, 167, 967-970.

Gasymov, M. G. (1966). The inverse scattering problem for a system of Dirac equations of order 2n. Dokl. Akad. Nauk SSSR 169 1037–1040 (Russian); 11 676–678.

Gasymov, M. G.; Dzhabiev, T. T. (1975). On the Determination of the Dirac System from Two Spectra, Transactions of the Summer School on Spectral Theory Operator, Baku/ELM., pp. 46-71.

Gelfand, I. M.; Levitan, B. M. (1951). On Determination of a Differential Equation by its Spectral Function Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.15, 309-60 (in Russian).

Grosse, H.; Martin, A. (1979). Theory of the Inverse Problem for Confining Potentials, Nuclear Phys., B 14 B, pp. 413-432.

Guliyev, **N. J.** (2005). Inverse eigenvalue problems for Sturm-Liouville equations with spectral parameter linearly contained in one of the boundary conditions. *Inverse Problems* 21 no. 4, 1315–1330.

Güldü, **Y.** (2006). Aralığın İç Noktasında Süreksizliğe Sahip Dirac Operatörü İçin Düz ve Ters Problemler.(*Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*)

Güldü, **Y.** (2016). On discontinuous Dirac operator with eigenparameter dependent boundary and two transmission conditions. *Bound. Value Probl.*, 135, 19 pp.

Güldü, **Y. Özkan, A. S.**(2006). Inverse problems for Dirac operator with boundary conditions involving a Herglotz-Nevanlinna function. Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi, 38, no. 2, 204-218.

Hald, **O. H.** (1984). Discontiuous inverse eigenvalue problems, *Comm. Pure Appl. Math.*, 37, 539-577.

Harris, **B. J.** (1983). Bounds for the Eigenvalues of Separated Dirac Operators, *Proc. of the Royal Society of Edinburgh*, 95 A, 341-366.

Hinton, D. B. Shaw, J. K. Differential operators with spectral parameter incompletely in the boundary conditions, Funkcialaj Ekvacioj, 33 (1990), 363-385.

Ince, E. L. Ordinary Differential Equations (Dover, New York, 1956).

Kadakal, M.; Mukhtarov, O. Sh. (2006). Discontinuous Sturm-Liouville problems containing eigenparameter in the boundary conditions. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* 22, no. 5, 1519–1528.

Kapustin, **N. Yu.** (1999). N. Yu. Oscillation properties of solutions of a non-selfadjoint spectral problem with the spectral parameter in the boundary condition. (Russian); 35, no. 8, 1024–1027.

Kerimov, **N. B.; Mirzoev, V. S.** (2003). V. S. On the basis properties of a spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition. (Russian); 44, no. 5, 1041–1045 *Siberian Math.* J. 44 (2003), no. 5, 813–816.

Keskin, B.; Özkan, A. S. (2011). Inverse Spectral Problems for Dirac Operator with Eigenvalue Dependent Boundary and Jump Conditions, *Acta Math. Hungar.*, 130 (4) 309–320.

Keskin, B.; Özkan, A. S.; Yalçin, N. (2011). Inverse spectral problems for discontinuous Sturm-Liouville operator with eigenparameter dependent boundary conditions. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser.* 60 no. 1, 15–25.

Keskin, **B.** (2013). Inverse problems for impulsive Dirac operators with spectral parameters contained in the boundary and multitransfer conditions polynomially, *Neural Comput & Applic* doi: 10.1007/s00521-012-1075-2.

Keskin, B.; Özkan, A. S. Inverse spectral problems for Dirac operator with eigenvalue dependent boundary and jump conditions, Acta Math. Hungar., 130, 309-320 (2011).

Kozhevnikov, A. Yakubov, S. On operators generated by elliptic boundary problems with a spectral parameter in boundary conditions, Integral Eq. Oper. Theory, 23 (1995), 205-231.

Kraft, R.E. and Wells,W.R. Adjointness properties for differential systems with eigenvalue-dependent boundary conditions, with application to flow-duct acoustics J. Acoust. Soc. Am. 61, 913–22 (1977).

Krein, **M.G.** (1951). Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem, Dokl.

Akad., Nauk SSSR, 76 21-24.

Krein, **M.G.** (1954). On a Method of the E¤ective Solution of an Inverse Boundary Value Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 95 767-770.

Levinson, **N.** (1949). The Inverse Sturm-Liouville Problem, Mat. Tidsskr. B., pp. 25-30.

Levitan, **B. M.** (1949). "The application of generalized displacement operators to linear differential equations of the second order", Uspekhi Mat. Nauk, 4:1(29), 3–112.

Levitan, **B. M.** (1964). Generalized Translation Operators and some of its Applications, Jerusalem.

Levitan, **B. M. Gasymov, M. G.** Determination of a differential equation from two of its spectra, Russian Math. Surveys, 19 (1964), 1-63.

Levitan, B. M.;. Sargsjan, I. S. (1970). Introduction to Spectral Theory, Moscow, Nauk.

Levitan, B. M.; Sargsjan, I. S. (1988). Sturm-Liouville and Dirac Operators [in Russian], Nauka, Moscow.

Maksudov, F. G.; Veliev,. S. G. (1975). The Inverse Scattering Problem for the Nonself-Adjoint Dirac Operator on the Whole Axis, *Soviet Math. Dokl.* V. 16, No:6, 1629-1633.

Mamedov, **Kh. R.** (2003). Uniqueness of the solution of the inverse problem of scattering theory for the Sturm-Liouville operator with a spectral parameter in the boundary condition. (Russian), no. 1, 142–146.

Marchenko, **V.A.** (1950). Some Problems in the Theory of Second-order Differential Operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72 457-560.

Martynov, **V. V.** (1965). Conditions of Discreteness and Continuity of the Spectrum in the Case of a Self-Adjoint First-Order System of Differential Equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165, 996-999.

Moses, **H. E.** (1957). Calculation of the Scattering Potential for One-Dimentional Dirac Equation from Re‡ection Coefficient and Point Eigenvalues, Bull. Amer. Phys. Soc., 4, pp. 240.

Mukhtarov, **Oktay** (1994). Discontinuous boundary value problem with spectral parameter in boundary conditions. *Turkish J. Math.* 18, no. 2, 183–192.

Mukhtarov, O. Sh.; Kadakal, M.; Altınışık, N. (2003). Eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter in the boundary conditions. *Indian J. Pure Appl. Math.* 34, no. 3, 501–516.

Mukhtarov, O. Sh.; Kadakal, M.; Altınışık, N. (2006). Some spectral properties of discontinuous Sturm-Liouville problem with containing eigenparameter in one of boundary conditions. *J. Appl. Funct. Differ. Equ. JAFDE* 1, no. 1, 31–44.

Naimark, **M. A.** (1968). Linear Differential Operators, *Frederick ungar Publishing Co.*, New York.

Otelbayev, **M. O.** (1973). Distribution of the Eigenvalues of the Dirac Operator, *Mat. Zametki*, 14, 843-852.

Özkan, A. S.; Amirov, R. Kh. (2011). Inverse problems for impulsive Dirac operators with eigenvalue dependent boundary condition, *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*, Vol. 3, Issue. 4, pp. 33-43.

Özkan, A. S. (2012). Inverse Sturm–Liouville problems with eigenvalue dependent boundary and discontinuity conditions, *Inverse Problems in Science and Engineering.*

Özkan, A. S. Half-inverse Sturm-Liouville problem with boundary and discontinuity conditions dependent on the spectral parameter, Inverse Problems in Science and Engineering, i-first, (2013).

Özkan, A. S.; Keskin, B. (2012). Spectral problems for Sturm-Liouville operator with boundary and jump conditions linearly dependent on the eigenparameter. *Inverse Probl. Sci. Eng.* 20 no. 6, 799–808.

Özkan, A. S.; Keskin, B. Çakmak, Y. Double Discontinuous Inverse Problems for Sturm-Liouville Operator with Parameter-Dependent Conditions, Abstract and Applied Analysis, (2013).

Panakhov, **E. S.** (1985). Determination of a Dirac system from two incompletely given sets of eigenvalues. (Russian) *Akad. Nauk Azerbaĭdzhan.* SSR Dokl. 41 , no. 5, 8–12.

Poisson, **S. D.** (1820). Memoire sur la maniere d'exprimer les functions par des series periodiques, *J. Ecole Polytechnique* 18 417–489.

Povzner, **A. V.** (1948). On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis, Mat. Sb., 23.

Prats, F.; Toll, J. (1959). Construction of the Dirac Equation Central Potential from Phase Shifts and Bound States, Phys. Rev., 113, (1), 363-370.

Prats, F.; Toll, J. (1959). Construction of the Dirac Equation Central Potential from Phase Shifts and Bound States, Phys. Rev., 113, (1), 363-370.

Quigg, C.; Rosner, J. L.; Thacker, H. B. (1978). Inverse Scattering Problem for Quarkonium Systems, I and IIPhys. Rev., D 18, No:1, pp. 274-295.

Roos, B. W.; Sangren, W. C. (1961). Spectra for a Pair Singular First Order Differential Equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, V. 12, pp. 468-476.

Russakovskii, **E. M.** (1975). Operator treatment of boundary problems with spectral parameters entering via polynomials in the boundary conditions, *Funct. Anal. Appl.* 9 358–359.

Russakovskii, **E. M.** The matrix Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary conditions. Algebraic and operator aspects, Trans. Moscow Math. Soc., 57 (1996), 159-184.

Sargsjan, **I. S.** (1966)a. A Theorem of the Completeness of the Eigenfunctions of the Generalized Dirac System, Dokl. Akad. Nauk. Arm. SSR, 42, (2), 77-82.

Sargsjan, **I. S.** (1966)d. Solution of the Cauchy Problem for a One-Dimensional Dirac System. Izv. Akad. Nauk. Arm. SSSR Ser. Mat., 1, (6), 392-436.

Savchuk, A. M.; Shkalikov, A. A. (1999). Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials *Mat. Zametki* 66 897-912 (in Russian).

Shkalikov, A. A. Boundary problems for ordinary differential equations with parameter in the boundary conditions, J. Sov. Math., 33 (1986), 1311-1342.

Shkalikov, A. A. Mennicken, R. and Schmid, H. On the eigenvalue accumulation of Sturm-Liouville problems depending nonlinearly on the spectral parameter, Math. Nachr., 189, 157-170 (1998).

Schneider, A. (1974), A note on eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions, Math. Z., 136, 163-167.

Straus, A. V. On spectral functions of differential operators, Izvest. Akad.

Nauk SSSR Ser. Mat., 19 (1955), 201-220.

Tretter, C. On λ-nonlinear boundary eigenvalue problems, Mathematics Research 71 (1993), Akademie Verlag.

Schmid, H. Tretter, C. Singular Dirac Systems and Sturm–Liouville Problems Nonlinear in the Spectral Parameter, Journal of Differential Equations, 181, 511-542 (2002).

Titchmarsh, **E. C**. (1939). The Theory of Functions, Oxford University Press, London.

Veliev, **S. G.** (1972). Inverse Problem for the Dirac Systems on the Whole Axis, 4917-4972.

Walter, J. (1973), Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions, *Math Z.*, 133, 301-312.

Willis, C. (1985). Inverse Sturm-Liouville Problems With Two Discontinuities, *Inverse Problems 1*, no.3, 263-289.

Yang, Q.; Wang, W. (2011). Asymptotic behavior of a differential operator with discontinuities at two points, *Math. Meth. Appl. Sci.* 34, 373-383.

Yang, C. Fu. (2015). Inverse problems for Dirac equations polynomially depending on the spectral parameter, *Applicable Analysis*.

Yurko, V. A. (1998). On the reconstruction of Sturm-Liouville differential operators with singularities inside the interval. (Russian), no. 1, 143–156.

Yurko, V. A. Boundary value problems with a parameter in the boundary conditions, Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR, Ser. Mat., 19, 398–409 (1984), English translation in Soviet J. Contemporary Math. Anal., 19, 62-73 (1984).

Yurko, V. A. Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems, Integral Transforms and Special Functions, 10, 141-164 (2000).

Yurko, V. A. On boundary value problems with jump conditions inside the interval. Differ.Uravn. 36(8), 1139- 1140 (2000) (Russian); English transl. in Diff. Equations, 8, 1266-1269 (2000).

Zayed, E. M. E. Ibrahim, S. F. M. An expansion theorem for an eigenvalue problem on an arbitrary multiply connected domain with an eigenparameter in a general type of boundary conditions, Acta. Math. Sinica (N.S.), 11 (1995), 399-407.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Ebru MİŞE
Doğum Yeri ve Tarihi	Ankara,12.08.1990
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Bahçeşehir Okulları Sivas
E-posta Adresi	ebru_mise_26@outlook.com

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Eskişehir Muzaffer Çil Anadolu Lisesi, 2008
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2013
Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2019

İş Tecrübesi

Bahçeşehir Okulları	Matematik Öğretmeni, 2016