T.C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇiFT BANTLI ALT ÜÇGENSEL GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK MATRİSİNİN c_0 DİZİ UZAYI ÜZERİNDE FİNE SPEKTRUMU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Çağrı ÜNAL
(201492171142)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Nuh DURNA

SİVAS
Nisan 2019

Çağrı ÜNAL'ın hazırladığı ve **"ÇİFT BANTLI ALT ÜÇGENSEL GENELLEŞTİRİLMİŞ FARK MATRİSİNİN c_0 DİZİ UZAYI ÜZERİNDE FİNE SPEKTRUMU"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı : **Dr. Öğr. Üyesi Nuh DURNA** **……………...**
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyelesi : **Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM** **……………...**
Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyelesi : **Doç. Dr. Murat CANDAN** **……………...**
İnönü Üniversitesi

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. İsmail ÇELİK
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

Bütün hakları saklıdır.
Kaynak göstermek koşuluyla alıntı ve gönderme yapılabilir.

© Çağrı ÜNAL, 2019

ETİK

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı beyan ederim.

11.04.2019

Çağrı ÜNAL

ÖZET

ÇiFT BANTLI ALT ÜÇGENSEL GENELLEŞTIRILMIŞ FARK MATRISININ c_0 DIZI UZAYI ÜZERINDE FINE SPEKTRUMU

Çağrı ÜNAL

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Dr. Nuh DURNA

2019, 37+xi sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tez konusu ile alakalı literatür taraması yapılmıştır. Bant matrislerinin tanımı verilmiş ve sınırlı lineer operatörlerin temel özelliklerinden bahsedilmiştir.

Ikinci bölümde, sınırlı lineer operatörlerin spektrumundan ve spektrumunun ayrışımlarından bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, 2012 yılında Fathi ve Lashkaripour tarafından çalışılan, c_0 dizi uzayı üzerinde ¢$_{uv}$ çift bantlı genelleştirilmiş fark operatörünün fine spektrumunu verilmiştir.

Dördüncü bölümde, 2013 yılında Fathi ve Lashkaripour tarafından çalışılan, ℓ_1 dizi uzayı üzerinde ¢^{uv} genelleştirilmiş üst üçgensel çift bant matrisinin spektrumu ve spektral ayrışımı verilmiştir.

Beşinci bölümde, ¢^{uv} genelleştirilmiş üst üçgensel çift bant matrisinin ℓ_1 dizi uzayı üzerindeki spektral ayrışımı verilmiştir ve ¢$_{uv}$ genelleştirilmiş alt üçgensel çift bant matrisinin c_0 dizi uzayı üzerindeki fine spekturumu farklı bir metotla ve daha kısa ispatlarla tekrar elde edilmiştir. Tezin bu kısmı orjinal olup "On the fine spectrum of generalized lower triangular double band matrices ¢$_{uv}$ over the sequence space c_0" ismiyle 2016 yılında yayınlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: **spektrum, alt spektrum, genelleştirilmiş bant matrisi.**

ABSTRACT

THE FINE SPECTRUM OF THE GENERALIZED LOWER TRIANGULAR DIFFERENCE MATRIX WITH DOUBLE BAND

Çağr¬ ÜNAL

Master of Science Thesis

Department of Mathematics

Supervisor: Assistant Prof. Dr. Nuh DURNA

2019, 37+xi pages

This thesis consists of five sections.

In the first section, literature related to thesis topic has been presented. The definition of band matrices has been given and basic properties of bounded linear operator have been told.

In the second section, spectrum and division of spectrum of bounded linear operators are mentioned.

In the third section, the spectrum and fine spectrum of generalized double band di¤erence operator ¢$_{uv}$ on the sequence space c_0 which was studied by Fathi ve Lashkaripour in 2012 have been given.

In the fourth section, the spectrum and division of spectrum of generalized upper triangular double band matrices ¢^{uv} on the sequence space ℓ_1 which was studied by Fathi ve Lashkaripour in 2013 have been given.

In the fifth section, subdivision of spectrum of generalized upper triangular double band matrices ¢^{uv} on the sequence space ℓ_1 and fine spectrum of generalized lower triangular double band matrices ¢$_{uv}$ on the sequence space c_0 have been given in di¤erent ways with more shorter proofs again. This part is original. It was published with title "On the fine spectrum of generalized lower triangular double band matr¬ces, ¢$_{uv}$ over the sequence space c_0" in 2016.

Keywords: spectrum, subspectrum, generalized band matrix

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen değerli danışman hocam; Dr. Öğr. Üyesi Nuh DURNA' ya, yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma çok teşekkür ederim. Ayrıca bu yoğun süreçte tüm sıkıntılarımı paylaşan maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan aileme ve nişanlım Mehlika BAŞOĞLU'na minnet ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

SIMGELER DIZINI

B (X)	:	X uzay¬ üzerinde verilen bütün s¬n¬rl¬ lineer operatörlerin kümesi
ker (L)	:	L operatörünün s¬f¬r uzay¬
Ran (L)	:	L operatörünün de§er kümesi
½ (L)	:	L operatörünün rezolvent kümesi
¾ (L)	:	L operatörünün spekturumu
R$_{\lambda}$ (L)	:	(λI ¡ L)$^{¡1}$ operatörü
r (L)	:	L operatörünün spektral yar¬çap¬
¾$_{p}$ (L)	:	L operatörünün özde§erlerinin kümesi
¾$_{c}$ (L)	:	L operatörünün sürekli spektrumunun kümesi
¾$_{r}$ (L)	:	L operatörünün rezidü spektrumunun kümesi
¾$_{ap}$ (L)	:	L operatörünün yaklaş¬k nokta spektrumunun kümesi
¾$_{\delta}$ (L)	:	L operatörünün eksik spektrumunun kümesi
¾$_{co}$ (L)	:	L operatörünün s¬k¬şt¬r¬lm¬ş spektrumunun kümesi
¢$_{uv}$	:	Genelleştirilmiş alt üçgensel çift bant matrisi
¢^{uv}	:	Genelleştirilmiş üst üçgensel çift bant matrisi

1. GIRIŞ

Fonksiyonel analizde, bir operatörün spektrumu, matrisler için özdeğerler kavramının bir genelleştirilmesidir. Bir Banach uzayı üzerinde bir operatörün spektrumu, point spektrum, sürekli spektrum ve rezidü spektrum olarak adlandırılan üç ayrık parçaya bölünür. 1966 yılında S. Goldberg'in çalışmasına kadar, bir operatörün spektrumunun üç ayrık parçaya bölünmesi, operatörün fine (ince) spektrumunun hesaplanması olarak adlandırılırdı. Fakat 1966 yılında S. Goldberg "Unbounded Linear Operator" isimli kitabında spektrumun aralarında ayrık olan ayrışımını daha ince bir şekilde verdi ve bu çalışmadan sonra bir operatörün spektrumunun dokuz ayrık parçaya bölünmesi, operatörün fine spektrumunun hesaplanması olarak adlandırılırdı. Ayrıca spektrumun aralarında ayrık olması gerekmeyen bir ayrışımı daha vardır ki bu; yaklaşık nokta spektrum, eksik spektrum ve sıkıştırılmış spektrumdur. Son yıllarda bir çok yazar, genelleştirilmiş fark matrislerinin spektral ayışımını araştırmıştır. Ilk kez [8] de Amirov, Durna ve Yıldırım operatörlerin spektral ayrışımları arasındaki bağıntıyı kullanarak operatörün yaklaşık nokta spektrumunu, eksik spektrumunu ve sıkıştırılmış spektrumunu kolayca hesaplamışlardır. Bu çalışmadan sonra, bu spektral parametreler, spektrumun fine ayrışımı bulunurken yazarlar tarafından dikkate alınmıştır. Daha sonra bir operatörün yaklaşık nokta spektrumu, eksik spektrumu ve sıkıştırılmış spektrumu; spektrumun fine ayrışımı kullanılarak hesaplanmıştır. Genel olarak operatörlerin fine ayrışımları araştırılırken operatörün adjointinin birebirliği veya örtenliği kullanılarak operatörün yoğun görüntüye sahip olduğu veya sınırlı terse sahip olduğu elde edilir. Fakat bir operatörün adjoint operatörünü bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Hatta adjoint operatörü bulunsa bile operatörün birebirliği veya örtenliği araştırılırken elde edilen serinin karakterini incelemek mümkün olmayabilir. Örneğin ℓ_1 un bilinen anlamda Schauder bazı olmadığından operatörün bilinen anlamda adjointinden bahsetmek mümkün değildir. Dolayısıyla bir operatörün spektral ayrışımı ve adjointinin spektral ayrışımı arasındaki ilişki yardımıyla, operatörün yaklaşık nokta spektrumu, eksik spektrumu ve sıkıştırılmış spektrumu hesaplanarak bunlar yardımıyla Goldberg tarafından verilen spektrumun fine ayrışımı bulanabilir.

Spektral teorinin günlük hayattaki uygulamalarından kısaca bahsedecek olursak;

Elektrik mühendisliğinde amplifikatör frekans yanıtını veya güç sisteminin güvenilirliğini belirleyebilir.

Ekolojide spektral değerler besin ağının sürekli bir dengeye sahip olup olmayacağını belirleyebilir.

Yapı mekaniğinde bir otomobilin ne kadar gürültülü olup olmayacağını veya bir depremde bir binanın yıkılıp yıkılmayacağını belirleyebilir.

Kuantum mekaniğinde atomik enerji seviyelerini ve böylecede lazerin frekansını veya bir yıldızın spektral sinyalini belirleyebilir.

Havacılıkta, spektral değerler bir kanat üzerindeki akışın laminer veya türibülanslı olup olmadığını belirleyebilir.

1.1 Literatür özeti

Bu tez boyunca; tüm diziler uzayı w ile belirtilir. Sırasıyla tüm sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve sınırlı salınımlı dizilerin uzayını ℓ_∞, c, c_0 ve bv ile gösterilir. Ayrıca ℓ_p ile mutlak değerinin $p-$inci kuvvetleri toplanabilir tüm dizilerin uzayını ve bv_p ile $p-$ sınırlı salınımlı dizilerin uzayı belirtilmiştir.

Bir çok yazar, çeşitli dizi uzayları üzerinde bazı özel limitleme matrisleriyle tanımlanan lineer operatörlerin spektrumunu ve fine spektrumunu incelemiştir. Ilk önce mevcut literatürdeki spektrum ve fine spektrum hakkında kısaca bilgi vereceğiz. Örneğin; Cesàro operatörünün ℓ_p $(1 < p < \infty)$ dizi uzayındaki fine spektrumu [21] de Gonzalez tarafından incelenmiştir. Ayrıca, [33] de Wenger, Cesàro operatörünün tamsayı kuvvetinin spektrumunu c dizi uzayında çalışmıştır ve [29] da Rhoades, bu sonucu ağırlıklı ortalama metotlarına genelleştirmiştir. [28] de Reade, Cesàro operatörünün spektrumunu c_0 dizi uzayı üzerinde çalışmıştır. [27] de Okutoyi, Cesàro operatörünün spektrumunu bv dizi uzayı üzerinde hesaplamıştır. Rhally operatörlerinin c_0 ve c dizi uzayları üzerindeki Goldberg tarafından verilen fine spektrumu [32] de Yıldırım tarafından incelenmiştir. Cesàro operatörünün c_0 ve bv_p dizi uzayları üzerindeki fine spektrumları Akhmedov ve Başar tarafından [1, 4] de çalışılmıştır. Ayrıca Akhmedov ve Başar [2, 3] da Δ fark operatörünün ℓ_p ve bv_p ($1 \leq p < \infty$) dizi uzayları üzerinde fine spektrumunu çalışmışlardır. ℓ_1 ve bv_1 dizi uzayları üzerinde Zweier matrisinin fine spektrumu [5] de Altay ve Karakuş tarafından incelenmiştir. Altay ve Başar [6, 10] de Δ fark operatörünün c_0, c ve ℓ_p ($1 < p < \infty$) dizi uzayları üzerinde fine spektrumunu belirlemişlerdir. Δ fark operatörünün ℓ_1 ve bv üzerindeki fine spektrumu [23] de Kayaduman ve Furkan tarafından incelenmiştir. Altun ve Karakaya[7, 24] de Lacunary matrislerin fine spektrumları ve üst üçgen çift bant matrislerin fine spektrumları üzerinde çalışmışlardır. [31] de, Srivastava ve Kumar, Δ_v genelleştirilmiş fark operatörünün c_0 dizi uzayı üzerindeki fine spektrumunu incelemişlerdir. [18] da, Fathi ve Lashkaripour, Δ_{uv} genelleştirilmiş alt üçgensel çift bant matrisinin c_0 dizi uzayı üzerindeki fine spektrumunu hesaplamışlardır. [19] de, Fathi and Lashkaripour, Δ^{uv} genelleştirilmiş üst üçgensel çift bant matrisinin ℓ_1 dizi uzayı üzerindeki fine spektrumunu incelemişlerdir.

Yukarıda bahsedilen çalışmalar, [20] de Goldberg tarafından tanımlanan spektrumun ayrışımı ile ilgilidir. Bununla birlikte [15] de Durna ve Yıldırım c_0 üzerinde factorable matrisleri için spektrumun alt ayrışımını incelemişlerdir ve [12] de Başar, Durna ve Yıldırım bazı dizi uzayları üzerinde genelleştirilmiş fark operatörünün spektrumunu incelemişlerdir. [17] de Durna ve Kılıç, $U(a_0, a_1, a_2; b_0, b_1, b_2)$ üst üçgensel bant matrisinin c_0 dizi uzayı üzerinde spektrumunu ve fine spektrumunu hesaplamışlardır.

Bu tezin üçüncü bölümünde [18] de Fathi ve Lashkaripour tarafından çalışılan Δ_{uv} genelleştirilmiş alt üçgensel çift bant matrisinin c_0 dizi uzayı üzerindeki fine spektrumunu vereceğiz. Dördüncü bölümünde [19] da, Fathi ve Lashkaripour tarafından hesaplanan Δ^{uv} genelleştirilmiş üst üçgensel çift bant matrisinin ℓ_1 dizi uzayı üzerindeki fine spektrumunu vereceğiz. Beşinci bölümünde ise Δ_{uv} genelleştirilmiş alt üçgensel çift bant matrisinin c_0 dizi uzayı üzerindeki fine spektrumunu, spektrumun aralarında ayrık olması gerekmeyen (yaklaşık nokta spektrum, eksik spektrum ve sıkıştırılmış spektrum) ayrışımı yardımıyla vereceğiz. Ayrıca bu ayrışım yardımıyla[18] de, Fathi ve Lashkaripour tarafından verilen Δ_{uv} genelleştirilmiş alt üçgensel çift bant matrisinin c_0 dizi uzayı üzerindeki fine spektrumu, daha farklı ve kısa bir yolla hesaplanmış olacak. Tezin beşinci bölümü orjinal olup, [16] da yayınlanmıştır.

1.2 Bant matrisleri

Sayısal analizde, sonlu elemanlı matrisleri veya sonlu fark problemlerinden elde edilen matrisleri bant matrisi haline getirebiliriz. Bant matrisleri problem değişkenleri arasındaki ilişkiyi tanımlamamıza yardımcı olur. Örneğin, bant genişliği matris boyutunun karekökünü oluşturan matris, bant içinde beş köşegenin sıfır olmadığı kare bir bölgede tanımlanan kısmi türevli diferansiyel denkleme karşılık gelir. Eğer bu matrise Gauss eliminasyon yöntemini uygularsak, çok sayıda sıfır olmayan elemanlı bant içeren matris elde ederiz. Bu nedenle, bant operatörlerinin rezolvent kümesi, bu gibi problemlerin çözümü için önemlidir. Bant matrisleri matematiğin birçok alanında ve uygulamalarında ortaya çıkmaktadır. Üç ya da daha fazla köşegenli bant matrisleri telekomünikasyon sistem analizinde, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için sonlu fark yöntemlerininde, sabit olmayan katsayılı doğrusal tekrarlama sistemlerinde vb. kullanılır. Bazı özel problemlerde matrisler bant matris olarak oluşmaktadır. Bu özellik kullanılarak bu problemlere ait lineer denklem sisteminin çözümü mümkündür. Alt üçgensel matrisleri de bant matrisi yaparak bu tür lineer denklem sistemlerinin çözümü için bir algoritma geliştirilmiştir. Geliştirilen algoritma kullanılarak çok büyük boyutlardaki matrislerin sıkıştırılarak bilgisayarda oluşturulması ile lineer denklem sistemlerinin çözümü mümkün olmaktadır. Bu nedenle, birisinin çeşitli bant matrisleri ile ilgili sonuçlar elde etmesi oldukça önemlidir.

Tanım 1.1 (Bant matris) *Sıfırdan farklı elemanları esas köşegen civarında toplanmış olan matrise bant matris denir. Esas köşegene paralel olan köşegenlerine yan köşegen denir. Matrisin esas köşegenin altındaki köşegenler alt köşegen, üstündeki köşegenlere üst köşegen denir. m_1 alt ve m_2 üst köşegeni olan bir matrisin ana bant genişliği $m = m_1 + m_2 + 1$ olur. m_1 e alt bant, m_2 ye üst bant genişliği de denir. Ana bant dışındaki tüm elemanları sıfır olan matrislere bant matris denir.*

1.3 Sınırlı Lineer Operatörler

X ve Y, $\mathbb{C}$ üzerinde iki normlu uzay ve $L : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\|Lx\| \leq M.\|x\|$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı varsa L operatörüne X uzayından Y uzayı içine bir *sınırlı lineer operatör* adı verilir ve X uzayından Y uzayı içine tanımlı bütün sınırlı lineer operatörlerin sınıfı $B(X, Y)$ ile gösterilir. Özel olarak $X = Y$ ise $B(X, X)$ yerine kısaca $B(X)$ yazılır.

Bir lineer operatörün sıfır uzayını

$$\ker(L) := \{x \in X : Lx = 0\} \tag{1.1}$$

ve görüntü kümesini

$$\operatorname{Ran}(L) := \{Lx : x \in X\} \tag{1.2}$$

ile göstereceğiz. Böylece L operatörünün birebir olması için gerekli ve yeterli koşul $\ker(L) = \{0\}$ olması ve örten olması için gerekli ve yeterli koşul $\operatorname{Ran}(L) = Y$ olmasıdır.

$K, L \in B(X, Y)$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere, $(K + L)x = Kx + Lx$, $(\lambda L)x = \lambda Lx$ şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile $B(X; Y)$, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır, ayrıca

$$\|L\| = \sup_{x \neq \theta} \frac{\|Lx\|}{\|x\|} \tag{1.3}$$

normuyla birlikte bir normlu uzay olup, Y nin bir Banach uzayı olması halinde $B(X, Y)$ de bir Banach uzayıdır ([14], Brown ve Page 1970, s. 105, [30], Rudin 1973, s. 88).

μ ve ν iki dizi uzayı ve $A = (a_{nk})$; $n, k \in \mathbb{N}$ olmak üzere a_{nk} reel veya kompleks sayıların bir sonsuz matrisi olsun. Eğer her $x = (x_k) \in \mu$ dizisi için $(Ax)_n = \sum_{k=0} a_{nk}x_k$ olmak üzere x in $Ax = ((Ax)_n)$ A-dönüşümü ν de bir dizi ise A ya μ den ν ye bir matris dönüşümü denir ve $A : \mu \to \nu$ ile gösterilir. Bu dönüşüm $A \in (\mu, \nu)$ ile gösterilir. Bu durumda $A \in (\mu, \nu)$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in \mu$ için $Ax \in \nu$ olmasıdır.

Lemma 1.1 *$A = (a_{nk})$ matrisinin c_0 dan c_0 a bir $T \in B(c_0)$ sınırlı lineer operatörü belirtmesi için gerekli ve yeterli koşul*

(1) A nın satırları ℓ_1 dedir ve onların ℓ_1 normları sınırlıdır.

(2) A nın sütunları c_0 dadır ([34] , Wilansky, s. 129).

Uyarı 1.1 *Lemma 1.1 de verilen T nin operatör normu, A nın satırlarının ℓ_1 normlarının supremumudur ([34] , Wilansky, s. 129).*

Lemma 1.2 *$A = (a_{nk})$ matrisinin ℓ_1 den ℓ_1 e bir T sınırlı lineer operatörü belirtmesi için gerekli ve yeterli koşul A nın sütunlarının ℓ_1 normlarının supremumunun sınırlı olmasıdır ([34] , Wilansky, s. 129).*

X, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir normlu uzay ve $L \in B(X)$ olsun. X^*, X uzayının sürekli dualini göstermek üzere yani; $X^* = B(X, \mathbb{C})$ olmak üzere, her $x \in X$ ve her $f \in X^*$ için

$$L^* : X^* \to X^*$$
$$(L^* f)\, x = f(Tx)$$

biçiminde tanımlanan L^* operatörüne; L operatörünün *adjointi* denir.

L ile L^* adjoint operatörü arasındaki ilişkilerden bazılarını belirleyen önemli teoremleri ispatsız olarak aşağıda verelim.

Teorem 1.1 *X bir normlu uzay ve $L \in B(X)$ olsun. Bu durumda $L^* \in B(X^*)$ olup $\|L^*\| = \|L\|$ dir ([14] , s. 239).*

Teorem 1.2 *Eğer L ve L^* operatörlerinin tersleri mevcut ise $(L^{-1})^* = (L^*)^{-1}$ dir ([20] , s. 60).*

Tanım 1.2 *X ve Y birer Banach uzayı ve $K \in B(X, Y)$ olsun. $\mathbb{D}$, X içinde açık birim yuvar olmak üzere $\overline{K(\mathbb{D})}$, Y içinde kompakt ise K operatörüne kompakt lineer operatör denir ([22] , s. 179).*

Kompakt operatörlerin bazı özellikleri aşağıdaki teoremlerle ifade edilmiştir.

Teorem 1.3 *X bir Banach uzayı ve $K \in B(X)$ olsun. Eğer K dönüşümünün görüntü uzayı $\mathrm{Ran}(K)$, sonlu boyutlu ise K kompakttır ([22] , s. 180).*

Teorem 1.4 *X bir Banach uzayı ve (K_n), $B(X)$ deki kompakt operatörlerin bir dizisi olsun. Eğer (K_n) dizisi K ya düzgün operatör yakınsak ise $K \in B(X)$ de kompakttır ([22] , s. 180).*

Şimdi Ω herhangi bir X Banach uzayının önkompakt bir kümesi olmak üzere, uygulamalarda en çok kullanılan $C(\Omega;\mathbb{C})$ uzayında mevcut olan kompaktlık kriterinden bahsedelim.

Tanım 1.3 *$(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının önkompakt bir Ω kümesi ve $E \subset (C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ kümesi verilsin.*

(a) Eğer her $x \in E$ ve her $t \in \Omega$ için $|x(t)| \le M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı varsa E kümesi düzgün sınırlıdır denir.

(b) Eğer her $\epsilon > 0$ için enaz bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı var öyle ki her $t_1, t_2 \in \Omega$ ve her $x \in E$ için

$$\|t_1 - t_2\| < \delta \text{ iken } |x(t_1) - x(t_2)| < \epsilon$$

oluyorsa, E kümesi $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ da aynı dereceden süreklidir denir. ([26] , s.229).

Teorem 1.5 (Arzelà-Ascoli) *$(X, \|\cdot\|)$ Banach uzayının önkompakt bir Ω kümesi ve $E \subset (C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ kümesi verilsin. E nin $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ da önkompakt olması için gerekli ve yeterli koşul E nin $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$ da düzgün sınırlı ve aynı dereceden sürekli olmasıdır ([26] , s.231).*

2. SPEKTRUM

Tanım 2.1 *$X \neq \{\theta\}$ bir kompleks normlu uzay, $D(T) \subset X$ olmak üzere ve $T : D(T) \to X$ bir lineer operatör, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve I, $D(T)$ üzerinde birim operatör olmak üzere, T operatörü ile*

$$T_\lambda := T - \lambda I \tag{2.1}$$

operatörünü eşleyelim. Eğer T_λ nın bir tersi varsa, bunu $R_\lambda(T)$ ile gösterelim, yani;

$$R_\lambda(T) = T_\lambda^{-1} = (T - \lambda I)^{-1} \tag{2.2}$$

alalım. Bu operatöre T nin rezolvent operatörü denir. T operatörünün belirli olması durumunda yazmada kolaylık sağlamak için $R_\lambda(T)$ yerine R_λ yazacağız ([25] , s. 371).

$R_\lambda(T)$ nin mevcut olması durumunda,

$$x = T_\lambda^{-1} y = R_\lambda(T)\, y$$

geçerlidir. Yani; $R_\lambda(T)$, $T_\lambda x = y$ denkleminin çözülmesine yardımcı olur.

Daha da önemlisi, R_λ nın özelliklerinin incelenmesi, T operatörünün kendisinin anlaşılması için esas olmaktadır. Doğal olarak, T_λ nın ve R_λ nın bir çok özelliği λ ya bağlıdır ve spektral teori bu özelliklerle ilgilenen bir daldır. Örneğin R_λ mevcut olacak şekildeki λ kompleks sayılarının kümesi veya R_λ sınırlı olacak şekilde ki λ kompleks sayılarının kümesi temel problemlerimizden bazıları olacaktır. Bazı kavramlara isim verebilmek için R_λ nın tanım bölgesi X de yoğun olacak şekildeki λ kopmleks sayılarının kümesi de araştırılacaktır.

Tanım 2.2 (regüler değer, rezolvent küme, spektrum) *$X \neq \{\theta\}$ bir kompleks normlu uzay ve $D(T) \subset X$ olmak üzere $T : D(T) \to X$ lineer bir operatör olsun.*
(R1) *$R_\lambda(T)$ mevcut*
(R2) *$R_\lambda(T)$ sınırlı (yani sürekli)*
(R3) *$R_\lambda(T)$, X içinde yoğun bir kümle üzerinde tanımlı*
olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{C}$ sayılarına T nin regüler değeri denir.

T nin tüm regüler değerlerinin kümesi $\rho(T)$ ie gösterilir. $\rho(T)$ ye T nin rezolvent kümesi denir. $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ kümesine ise T nin spektrumu denir. Eğer $\lambda \in \sigma(T)$ ise λ ya spektral değer denir ([25] , s. 371).

2.1 Spektrumun Ayrışımı

Sınırlı lineer bir operatörün spektrumunun birçok farklı ayrışımı vardır, bunlardan bazılarının fiziğe uygulamaları mevcuttur.

X bir Banach uzayı ve $T \in B(X)$ olsun. Eğer $R_\lambda(T)$ operatörü, X in bir yoğun alt uzayında tanımlı ve sınırsız ise; $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T nin $\sigma_c(T)$ *sürekli spektrumuna* aittir denir. Ayrıca eğer $R_\lambda(T)$ operatörü mevcut, ancak onun tanım bölgesi (yani; $T - \lambda I$ nin Ran$(T - \lambda I)$ değer kümesi), X de yoğun değilse $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T nin $\sigma_r(T)$ *rezidü spektrumuna* aittir denir, bu durumda $R_\lambda(T)$ sınırlı veya sınırsız olabilir.

Eğer $Tx = \lambda x$ eşitliğinin sıfırdan farklı bir $x \in X$ çözümü varsa $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına T nin özdeğeri, bu şekildeki herbir x vektörüne özvektör ve X in bir alt uzayı olan bütün özvektörlerinin kümesine de özuzay denir.

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : Tx = \lambda x,\ x \neq 0\}$$

özdeğerlerinin kümesine T nin point spektrumu denir. $\sigma_p(T)$ point spektumu ile birlikte bu iki spektrum T nin

$$\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T) \tag{2.3}$$

spektrumun bir ayrık ayrışımıdır. Kabaca konuşacak olursak alt spektrumdaki λ elemanlarının karakterize edilmesi için, $T - \lambda I$ operatörünün, $\sigma_p(T)$ de birebir ve örtenliği, $\sigma_r(T)$ de örtenliği ve $\sigma_c(T)$ de de sürekliliği mevcut değildir. (2.3) ayrışımını izah etmek için aşağıdaki tabloyu ve bazı örnekler verelim.

Tablo 1: Spektrumun Ayrık Ayrışımı

	$R_\lambda(T)$ mevcut ve sınırlı	$R_\lambda(T)$ mevcut fakat sınırsız	$R_\lambda(T)$ mevcut değil
$\mathrm{Ran}(\lambda I - T) = X$	$\lambda \in \rho(T)$	$-$	$\lambda \in \sigma_p(T)$
$\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - T)} = X$	$\lambda \in \rho(T)$	$\lambda \in \sigma_c(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$
$\overline{\mathrm{Ran}(\lambda I - T)} \neq X$	$\lambda \in \sigma_r(T)$	$\lambda \in \sigma_r(T)$	$\lambda \in \sigma_p(T)$

Tabloda; X bir Banach uzayı olduğundan; 1. satır ve 2. sütunun kapalı grafik teoreminden mümkün değildir.

Teorem 2.1 (Kapalı Grafik) *X ve Y, Banach uzayı ve $T : D(T) \to Y$ kapalı bir operatör olsun (yani grafiği $X \times Y$ de kapalı). Eğer $D(T)$ tanım kümesi X de kapalı ise T operatörü sınırlıdır ([25], s. 292).*

$\mathrm{Ran}(T - \lambda I) = X \Rightarrow \overline{\mathrm{Ran}(T - \lambda I)} = \overline{X} = X = \mathrm{Ran}(T - \lambda I)$ kapalı yani $R_\lambda(T)$ nin tanım kümesi kapalı olduğundan kapalı grafik teoreminden $\mathrm{Ran}(T - \lambda I) = X$ iken $R_\lambda(T)$ sınırsız olamaz.

Eğer biz 3. sütunda değilsek, yani eğer λ, T nin bir özdeğeri değilse, daima $R_\lambda(T)$ operatörünü $T - \lambda I$ nin cebirsel tersi gibi düşünebiliriz.

Örnek 2.1 *$\mathbb{C}$ üzerinde $X = \ell_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ olsun ve L*

$$L(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (x_2, x_3, x_4, \ldots)$$

sol kaydırma operatörü olsun. $\|L\| = 1$ ile $L \in B(\ell_p)$ olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla $\sigma(L) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}$ dir. Ayrıca L örtendir fakat birebir değildir çünkü onun sıfır uzayı

$$\ker(L) = \{(x_n) \in \ell_p : x_2 = x_3 = x_4 = \cdots = 0\}$$

dır. Özellikle bu $0 \in \sigma_p(L)$ olmasını sağlar.

L nin spektrumunu incelemek için $1 \le p < \infty$ ve $p = \infty$ durumları ayrılır.

$1 \le p < \infty$ için

$$\sigma(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}, \qquad \sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\},$$
$$\sigma_c(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}, \qquad \sigma_r(L) = \emptyset \tag{2.4}$$

olduğu ve $p = \infty$ için

$$\sigma(L) = \sigma_p(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\}, \qquad \sigma_c(L) = \sigma_r(L) = \emptyset \tag{2.5}$$

olduğu görülür. Gerçekten de λ özdeğerinin özuzayı her $|\lambda| < 1$ için ℓ_p ye ait olan $x_\lambda := \left(1, \lambda, \lambda^2, \ldots\right)$ vektörü tarafından üretilir, fakat bu ℓ_∞ da yalnızca $|\lambda| = 1$ iken geçerlidir.

Örnek 2.2 $X = \ell_p$ $(1 \le p \le \infty)$, (a_n), $\mathbb{C}$ de sınırlı bir dizi ve

$$\begin{aligned} L : \ \ell_p &\to \ell_p \\ x_n &\mapsto (a_n x_n) \end{aligned}$$

olsun. (a_n) sınırlıdır, $L \in B(\ell_p)$ dir. İlk önce $p < \infty$ olsun. (a_n) dizisinin bütün elemanlarının kümesini $A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ ile gösterelim, bu durumda

$$\sigma(L) = \overline{A}, \quad \sigma_p(L) = A, \quad \sigma_c(L) = \overline{A} \setminus A, \quad \sigma_r(L) = \emptyset \tag{2.6}$$

elde edilir. Özellikle eğer $a_n \to 0$ ise $\sigma_c(L) = \{0\}$ dır.

$p = \infty$ durumunda rezidü ve sürekli spektrumun rolleri değişir, yani

$$\sigma(L) = \overline{A}, \quad \sigma_p(L) = A, \quad \sigma_c(L) = \emptyset, \quad \sigma_r(L) = \overline{A} \setminus A \tag{2.7}$$

elde edilir.

Örnek 2.3 $\mathbb{C}$ üzerinde $X = \ell_p$ $(1 \le p \le \infty)$ olsun ve

$$L(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (0, x_1, x_2, \ldots) \tag{2.8}$$

sağ kaydırma operatörü olsun. $\|L\| = 1$ ile $L \in B(\ell_p)$ olduğunu kolayca görülür. Dolayısıyla $\sigma(L) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \le 1\}$ dir. Bu örnekte L, birebirdir fakat örten değildir, çünkü onun

$$\mathrm{Ran}(L) = \{(y_n) \in \ell_p : y_1 = 0\}$$

tanım kümesi ℓ_p de yoğun bile değildir. Özellikle bu **0** $\in \sigma_r(L)$ *olmasını sağlar. Şimdi L nin spektrumun yukarıda verilen ayrışımını yapalım. Bunun için* $p = 1$, $1 < p < \infty$ *ve* $p = \infty$ *durumlarını ayıralım.*

$p = 1$ ***veya*** $p = \infty$ ***durumlarında***

$$\sigma(L) = \sigma_r(L) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}, \quad \sigma_p(L) = \sigma_c(L) = \emptyset \tag{2.9}$$

ve $1 < p < \infty$ ***için***

$$\begin{aligned} \sigma(L) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}, & \sigma_p(L) &= \emptyset \\ \sigma_c(L) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}, & \sigma_r(L) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| < 1\} \end{aligned} \tag{2.10}$$

dir. Dikkat edecek olursak sağ kaydırma operatörünün hiçbir ℓ_p uzayında özdeğeri yoktur.

Biz şimdi 0 ın spektral ayrışım içerisinde hangi kümeye ait olduğunu veren aşağıdaki örnekleri verelim.

Örnek 2.4 $\mathbb{C}$ *üzerinde* $X = \ell_p$ $(1 \leq p \leq \infty)$ *olsun. Eğer*

$$L(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots\right) \tag{2.11}$$

ise $0 \in \sigma_c(L)$ *dir. Çünkü,*

$$L^{-1}(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_1, 2y_2, 3y_3, \ldots)$$

ters operatörü ℓ_p nin bir yoğun alt uzayı üzerinde tanımlıdır ve ℓ_p de sınırlı değildir. Sonuç olarak

$$\sigma_p(L) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}, \quad \sigma_c(L) = \{0\}, \quad \sigma_r(L) = \emptyset$$

dir. O halde $\sigma_c(L) \cup \sigma_r(L) = \{0\}$ *ve* $\sigma_c(L) = \{0\}$ *ve* $\sigma_c(L) \cap \sigma_r(L) = \emptyset$ *olduğundan* $\sigma_r(L) = \emptyset$ *dır. Diğer taraftan*

$$L(x_1, x_2, x_3, \ldots) = \left(x_2, \frac{1}{2}x_3, \frac{1}{3}x_4, \frac{1}{4}x_5, \ldots\right) \tag{2.12}$$

biçiminde tanımlanırsa $0 \in \sigma_p(L)$ *dır, çünkü* $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $\lambda = 0$ *özdeğerine karşılık gelen özvektördür.* L^{-1} *ters operatörü burada tanımlı değildir. Sonuç olarak*

$$\sigma(L) = \sigma_p(L) = \{0\}, \quad \sigma_c(L) = \sigma_r(L) = \emptyset \tag{2.13}$$

elde edilir. Son olarak eğer

$$L(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \ldots) \tag{2.14}$$

biçiminde tanımlanırsa $0 \in \sigma_r(L)$ *dir, çünkü* L *nin* Ran (L) *değer kümesi* ℓ_p *de yoğun değildir. Burada*

$$L^{-1}(y_1, y_2, y_3, \ldots) = (y_2, 2y_3, 3y_4, \ldots)$$

ters operatörü tanımlıdır fakat Ran (L) *de sınırlı değildir. Sonuç olarak*

$$\sigma(L) = \sigma_r(L) = \{0\}, \quad \sigma_p(L) = \sigma_c(L) = \emptyset \tag{2.15}$$

elde edilir.

2.2 Spektrumun Goldberg Sınıflandırması

$T \in B(X)$ olmak üzere T nin Ran (T) görüntü kümesi için üç farklı durum söz konusudur.

(A) Ran $(T) = X$,

(B) Ran $(T) \neq X$ fakat $\overline{\text{Ran}\,(T)} = X$,

(C) $\overline{\text{Ran}\,(T)} \neq X$,

ve T^{-1} için üç farklı durum söz konusudur.

(1) T^{-1} mevcut ve süreklidir,

(2) T^{-1} mevcut fakat sürekli değil,

(3) T^{-1} mevcut değil.

Mümkün olan bütün olasılıklar düşünüldüğünde dokuz farklı durum oluşur. Bunları, $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$ ile numaralandırılır.

Örneğin, eğer bir operatör C_2 durumunda ise $\overline{\text{Ran}\,(T)} \neq X$ ve T^{-1} mevcut fakat sürekli değildir. Ayrıca kapalı grafik teoreminden $A_2 = \emptyset$ dir.

Eğer λ kompleks sayısı $T = \lambda I - L \in A_1$ veya $T = \lambda I - L \in B_1$ biçiminde ise $\lambda \in \rho(L, X)$ dir. $\rho(L, X)$ de bulunmayan bütün λ skaler değerleri L nin spektrumunu oluşturur. $\sigma(L, X)$ in bu sınıflandırılması L nin fine spektrumunu meydana getirir.

Bu, $\sigma(L,X)$ in $A_2\sigma(L,X) = \emptyset$, $A_3\sigma(L,X)$, $B_2\sigma(L,X)$, $B_3\sigma(L,X)$, $C_1\sigma(L,X)$, $C_2\sigma(L,X)$, $C_3\sigma(L,X)$ aralarında ayrık altkümelerine bölünebilmesi demektir. Örneğin, eğer $T = \lambda I - L$, C_2 ye aitse $\lambda \in C_2\sigma(L,X)$ yazılır (bak [20]).

Şimdi sınırlı lineer operatörlerin Goldberg sınıflandırmasını yaparken kullanılan aşağıdaki iki önemli Lemmayı verelim.

Lemma 2.1 ***Sınırlı lineer bir T operatörünün yoğun görüntüye sahip olması için gerekli ve yeterli koşul T^* adjoint operatörünün birebir olmasıdır ([20] , Theorem II 3.7).***

Lemma 2.2 ***Sınırlı lineer bir T operatörünün sınırlı terse sahip olması için gerekli ve yeterli koşul T^* adjoint operatörünün örten olmasıdır ([20] , Theorem II 3.8).***

3. Δ_{uv} ÇIFT BANTLI GENELLEŞTIRILMIŞ FARK OPERATÖRÜNÜN c_0 DIZI UZAYI ÜZERINDEKI FINE SPEKTRUMU

Bu bölümde Fathi ve Lashkaripour tarafından [18] de çalışılan, c_0 dizi uzayı üzerinde Δ_{uv} çift bantlı genelleştirilmiş fark operatörünün fine spektrumu verilecektir.

(u_k), her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k \neq 0$ ve $U = \lim_{k\to\infty} u_k \neq 0$ olacak şekilde pozitif reel sayı dizisi ve (v_k), $V = \lim_{k\to\infty} v_k \neq 0$ ve $\sup_k v_k < U + V$ olmak üzere pozitif reel sayıların sabit veya kesin azalan bir dizisi olsun.

[18] de c_0 dizi uzayı üzerinde Δ_{uv} operatörü Fathi ve Lashkaripour tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\Delta_{uv}x = \Delta_{uv}(x_n) = (u_{n-1}x_n + v_n x_{n+1})_{n=0}^{\infty}\ , \ x_{-1} = 0$$

Δ_{uv} operatörünün

$$\Delta_{uv} = \begin{bmatrix} v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_0 & v_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_1 & v_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & u_2 & v_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

matrisi ile temsil edidiğini göstermek kolaydır.

[18] de c_0 dizi uzayı üzerinde Δ_{uv} çift bantlı genelleştirilmiş ileri fark operatörünün spektrumunu, nokta spektrumunu, sürekli spektrumunu ve rezidü spektrumunu aşağıdaki gibi vermiştir.

Teorem 3.1 $\Delta_{uv} : c_0 \to c_0$ ***operatörü bir sınırlı lineer operatördür ve***

$$\|\Delta_{uv}\|_{(c_0,c_0)} = \sup_k (|u_{k-1}| + |v_k|)$$

dir ([18] , Theorem 2.1).

Ispat. **Ispat Lemma 1.1 den elde edilir.** ■

Teorem 3.2 $\sigma_p(\Delta_{uv}, c_0) = \emptyset$ ***dir ([18] , Theorem 2.2).***

İspat. Teoremin ispatını iki durumda yapılır.

1. Durum: (v_k) nın bir sabit dizi olduğunu kabul edelim. Her k için $v_k = V$ diyelim. c_0 da $x \neq \theta = (0, 0, 0, \ldots)$ için $\Delta_{uv}x = \lambda x$ denklemini göz önüne alındığında,

$$\begin{aligned} v_0 x_0 &= \lambda x_0 \\ u_0 v_0 + v_1 x_1 &= \lambda x_1 \\ u_1 x_1 + v_2 x_2 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \\ u_k x_k + v_{k+1} x_{k+1} &= \lambda x_{k+1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

sistemi elde edilir. (x_n) dizisinin sıfırdan faklı ilk girişi x_m olsun. Böylece $u_{m-1}x_{m-1} + v_m x_m = \lambda x_m$ olduğundan $\lambda = v_m$ elde edilir. Ayrıca $u_m x_m + v_{m+1}x_{m+1} = \lambda x_{m+1}$ eşitliğinden $x_m = 0$ buluruz ki bu kabulümüzle çelişir. Dolayısıyla

$$\sigma_p(\Delta_{uv}, c_0) = \emptyset$$

dir.

2. Durum: (v_k) nın kesin azalan bir dizi olduğunu kabul edelim. c_0 da $x \neq \theta = (0, 0, 0, \ldots)$ için $\Delta_{uv}x = \lambda x$ denklemini göz önüne alırsak yukarıdaki denklem sistemini elde ederiz. Dolayısıyla her $\lambda \notin \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ ve her k doğal sayısı için $x_k = 0$ elde ederiz ki bu bir çelişkidir. Böylece $\lambda \notin \sigma_p(\Delta_{uv}, c_0)$ dir. Bu bize

$$\sigma_p(\Delta_{uv}, c_0) \subseteq \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$$

olduğunu gösterir. Bazı m ler için $\lambda = v_m$ olsun. Bu durumda $x_0 = x_1 = \cdots = x_{m-1} = 0$ dır. Şimdi, eğer $x_m = 0$ ise bu durumda her k doğal sayısı için $x_k = 0$ dır ve bu bir çelişkidir. Ayrıca, eğer $x_m \neq 0$ ise bu durumda her $k \geq m$ için

$$x_{k+1} = \frac{u_k}{v_{k+1} - v_m} x_k,$$

dir ve $\sup_k v_k < U + V$ olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{u_k}{v_{k+1} - v_m} \right| = \left| \frac{U}{v_m - V} \right| > 1 \,,\; k \geq m$$

dir. O halde $x \notin c_0$ dir ve böylece

$$\sigma_p(\Delta_{uv}, c_0) = \emptyset$$

elde edilir. ■

Eğer $T : c_0 \to c_0$, A matris gösterimine sahip bir sınırlı lineer operatör ise bu durumda onun $T^* : c_0^* \to c_0^*$ adjoint operatörünün matris gösteriminin A matrisinin transpozu olduğu iyi bilinen bir gerçektir. c_0 dizi uzayının dual uzayı $\|x\| = \sum_{k=0} |x_k|$ normu ile verilen tüm mutlak toplanabilir dizilerin uzayı olan ℓ_1 e izomorfiktir.

Teorem 3.3 $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - V| < U\} \subseteq \sigma_p(\Delta^*_{uv}, c_0^*)$ *dur ([18], Theorem 2.3).*

İspat. Kabul edelim ki, ℓ_1 de $y \neq \theta = (0, 0, 0, \ldots)$ için $\Delta^*_{uv} y = \lambda y$ olsun, burada

$$\Delta^*_{uv} = \begin{bmatrix} v_0 & u_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & v_1 & u_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & v_2 & u_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & v_3 & u_3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix} \text{ ve } y = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

dir. Bu bize

$$\begin{aligned} v_0 y_0 + u_0 y_1 &= \lambda y_0 \\ v_1 y_1 + u_1 y_2 &= \lambda y_1 \\ v_2 y_2 + u_2 y_3 &= \lambda y_2 \\ &\vdots \\ v_k y_k + u_k y_{k+1} &= \lambda y_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

olmasını verir. Eğer $y_0 = 0$ ise, bu durumda her k için $y_k = 0$ dır. Böylece $y_0 \neq 0$ dır ve yukarıdaki denklemin çözülmesi ile her $k \geq 0$ için

$$y_{k+1} = \left(\frac{\lambda - v_k}{u_k}\right) y_k$$

elde ederiz ve sonuç olarak

$$\lim_{k \to \infty} \left|\frac{y_{k+1}}{y_k}\right| = \left|\frac{V - \lambda}{U}\right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |V - \lambda| < U$$

sağlanır. Dolayısıyla, $|V - \lambda| < U$ ve buradan $y = (y_k) \in \ell_1$ olur, bu ise

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - V| < U\} \subseteq \sigma_p(\Delta^*_{uv}, c_0^*)$$

olduğunu verir. ■

Aşağıdaki örnek Teorem 3.3 deki içermenin genel durumda sağlanmadığını gösterir.

Örnek 3.1 *Her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $v_k = \left(\frac{k+1}{k+3}\right)^2$ *ve* $u_k = \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2$ *olduğunu varsayalım. Bu durumda* $\lim_{k\to\infty} u_k = U = 1$ *ve* $\lim_{k\to\infty} v_k = V = 1$ *dir.* $0 \notin \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - V| < U$ *olduğu açıktır. Fakat* $y_0 \neq 0$, $y_1 \neq 0$, $k \geq 1$ *için* $y_{k+1} = \frac{-v_{k-1}}{u_{k-1}} y_k$ *ve*

$$\sum_k |y_k| = |y_0| + |y_1| + 4|y_1| \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k+2}\right)^2 < \infty$$

olacak şekilde $y = (y_0, y_1, y_2, \ldots)$ *mevcut olduğundan* $0 \in \sigma_p(\Delta_{uv}^*, c_0^*)$ *dir* ([18] *, Theorem 2.4)..*

Teorem 3.4 $\sigma_r(\Delta_{uv}, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - V| < U\}$ *dur (* [18] *).*

İspat. $|\lambda - V| < U$ şartını sağlayan λ lar için $\overline{\text{Ran}\,(\Delta_{uv} - \lambda I)} \neq c_0$ olduğunu ve $\Delta_{uv} - \lambda I$ operatörünün bir terse sahip olduğunu göstereceğiz. Eğer $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| < u\}$ ise, bu durumda $\Delta_{uv} - \lambda I$ operatörü $\lambda = V$ ((v_k) bir sabit dizi olduğu zaman) ve bir $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda = v_k$ olmadıkça üçgenseldir ve dolayısıyla $\Delta_{uv} - \lambda I$ operatör bir terse sahiptir. İlave olarak Teorem 3.2 ile, $\lambda = v$ ((v_k) bir sabit dizi olduğu zaman) ve bir $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda = v_k$ olduğunda $\Delta_{uv} - \lambda I$ operatörü birebirdir ve böylece $\Delta_{uv} - \lambda I$ operatör bir terse sahiptir. Fakat Teorem 3.3 den $\Delta_{uv}^* - \lambda I$ birebir değildir. Şimdi, Lemma 2.1 den, $\Delta_{uv} - \lambda I$ operatörü c_0 da yoğun görüntüye sahip değildir ve bu ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.5 $\sigma(\Delta_{uv}, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - V| \leq U\}$ *dir* ([18] *, Theorem 2.5).*

İspat. $|\lambda - V| > U$ olmak üzere $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Hem $\lambda = V$ durumunda hem de her k için $\lambda = v_k$ durumunda bunun sağlanmayacağı açıktır. Bu yüzden $\lambda \neq V$ ve k için $\lambda \neq v_k$ dır. $\Delta_{uv} - \lambda I = (a_{nk})$ operatörünün bir üçgen olduğunu ve dolayısıyla da bir terse sahip olduğunu elde ederiz. Böylece

$$b_{nk} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n+k}}{(v_n - \lambda)} \displaystyle\prod_{i=k}^{n-1} \left(\frac{u_i}{v_i - \lambda}\right) & , \ n > k \\[2ex] \dfrac{1}{v_n - \lambda} & , \ n = k \\[2ex] 0 & , \ n < k \end{cases}$$

olmak üzere $(\Delta_{uv}-\lambda I)^{-1} = (b_{nk})$ dır. Şimdi $(\Delta_{uv}-\lambda I)^{-1} \in B(c_0)$ olduğunu gösterelim. $R_n = \sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}|$ olsun. Bu durumda

$$R_n = \frac{1}{|v_n-\lambda|}\left(1+\sum_{k=0}^{n-1}\prod_{i=k}^{n-1}\left|\frac{u_i}{v_i-\lambda}\right|\right)$$

dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=0}^{\infty} |b_{nk}|$ serisinin yakınsak olduğu açıktır.

Aşağıda $\sup_n R_n < \infty$ olduğunu göstereceğiz. $\alpha = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n-1}}{v_n-\lambda}\right|$ olsun. Bu durumda $\alpha = \left|\frac{U}{V-\lambda}\right|$ olur ki bu $0<\alpha<1$ olduğunu gösterir ve böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{|v_n-\lambda|} = \lim_{n\to\infty}\left(\left|\frac{u_{n-1}}{v_n-\lambda}\right|\frac{1}{|u_{n-1}|}\right) = \frac{\alpha}{U}$$

dur. Böylece

$$R_n = \left|\frac{u_{n-1}}{v_n-\lambda}\right| R_{n-1} + \frac{1}{|v_n-\lambda|}$$

elde ederiz. Bu durumda $\lim_{n\to\infty} R_n = \alpha \lim_{n\to\infty} R_{n-1} + \frac{\alpha}{U}$ dir. Dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{\alpha}{(1-\alpha)U} < \infty$$

dur. (R_n) pozitif reel sayıların yakınsak bir dizisi olduğundan $\sup_n R_n < \infty$ elde ederiz. Tekrar $\alpha = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n-1}}{v_n-\lambda}\right| < 1$ olduğundan yeterince büyük n ler için $\left|\frac{u_{n-1}}{v_n-\lambda}\right| < 1$ dir ve dolayısıyla

$$\lim_{n\to\infty}|b_{n0}| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(v_0-\lambda)}\prod_{i=1}^{n-1}\left(\frac{u_i}{v_i-\lambda}\right)\right| = 0$$

dır. Benzer şekilde her $k = 1, 2, 3, \ldots$ için $\lim_{n\to\infty}\left|b_{(nk)}\right| = 0$ olduğunu gösterebiliriz. Böylece

$$\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - V| > U\} \text{ ve buradan } (\Delta_{uv}-\lambda I)^{-1} \in B(c_0)$$

dır. Diğer taraftan $(\Delta_{uv}-\lambda I)^{-1} \in (c_0, c_0)$ olduğundan denk olarak $\overline{\mathrm{Ran}\,(\Delta_{uv}-\lambda I)} = c_0$ olduğu elde edilir. Bunun manası $\overline{D\left((\Delta_{uv}-\lambda I)^{-1}\right)} = c_0$ olmasıdır. Bu ise

$$\sigma(\Delta_{uv}, c_0) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - V| \le U\}$$

olduğunu gösterir. Bunu Teorem 3.4 ile birlikte göz önüne alırsak

$$\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-V|<U\}\subseteq\sigma(\Delta_{uv},c_0)\subseteq\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-V|\le U\}$$

olduğunu elde ederiz. Sınırlı lineer bir operatörün spektrumu kapalı olduğundan

$$\sigma(\Delta_{uv},c_0)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-V|\le U\}$$

elde edilir. ■

Teorem 3.6 $\sigma_c(\Delta_{uv},c_0)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-V|=U\}$ ***dir ([18] , Theorem 2.6).***

İspat. $\sigma_r(\Delta_{uv},c_0)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-V|<U\}$, $\sigma_p(\Delta_{uv},c_0)=\emptyset$ **ve** $\sigma(\Delta_{uv},c_0)$; $\sigma_p(\Delta_{uv},c_0)$, $\sigma_r(\Delta_{uv},c_0)$ **ve** $\sigma_c(\Delta_{uv},c_0)$ **nin ayrık birleşimi olduğundan**

$$\sigma_c(\Delta_{uv},c_0)=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-V|=U\}$$

olduğunu elde edilir. ■

Teorem 3.7 ***Eğer*** $\lambda\in\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-V|>U\}$ ***ise, bu durumda*** $\Delta_{uv}-\lambda I\in A_1$ ***dır ([18] , Theorem 2.7).***

İspat. $\lambda\neq v_k$ **olduğundan** $\Delta_{uv}-\lambda I$ **operatörü üçgendir. Dolayısıyla bir terse sahiptir ve Teorem 3.5 in ispatında**

$$\lambda\in\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-V|>U\}\Rightarrow(\Delta_{uv}-\lambda I)^{-1}\in B(c_0)$$

olduğunu görürüz. Bu $\lambda\in\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-V|>U\}$ **için** $(\Delta_{uv}-\lambda I)^{-1}$ **operatörünün sürekli olmasına denktir. Ayrıca** $(\Delta_{uv}-\lambda I)^{-1}\in(c_0,c_0)$ **olduğundan her** $y\in c_0$ **için** $(\Delta_{uv}-\lambda I)x=y$ **olacak şekilde** $x\in c_0$ **bulabiliriz, yani;** $\Delta_{uv}-\lambda I\in A_1$ **dir.** ■

Teorem 3.8 v_k ***bir sabit dizi olsun*** $v_k=V$ ***diyelim ve*** $\lambda\neq V$, $\lambda\in\sigma_r(\Delta_{uv},c_0)$ ***olsun. Bu durumda*** $\lambda\in C_2$ ***dir ([18] , Theorem 2.8).***

İspat. $\lambda\neq V$ **olduğundan** $\Delta_{uv}-\lambda I$ **operatörü üçgendir. Dolayısıyla bir terse sahiptir. Şimdi** $\bar{V}\neq\lambda\in\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda-V|<U\}$ **olduğunu varsayalım. Bu durumda** $\alpha=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n-1}}{v_n-\lambda}\right|>1$ **dir bu yeterince büyük** n **ler için** $\left|\frac{u_{n-1}}{v_n-\lambda}\right|>1$ **olması demektir ve böylece**

$$\lim_{n\to\infty}\left|b_{(n0)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n}{(v_0-\lambda)}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{u_i}{v_i-\lambda}\right)\right|\neq 0$$

dır. Dolayısıyla

$$V \neq \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - V| < U\} \Rightarrow (\Delta_{uv} - \lambda I)^{-1} \notin B(c_0)$$

dır. Bu ise $V \neq \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - V| < U\}$ **için** $(\Delta_{uv} - \lambda I)^{-1}$ **operatörünün süreksiz olmasına denktir. Ayrıca** $V \neq \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - V| < U\}$ **için Teorem 3.3 ve Lemma 2.1 den** $\overline{Ran(\Delta_{uv} - \lambda I)} \neq c_0$ **olduğunu ve böylece de** $\lambda \in C_2$ **olduğunu elde edilir.** ■

4. Δ^{uv} GENELLEŞTIRILMIŞ ÜST ÜÇGENSEL ÇIFT BANT MATRISININ ℓ_1 DIZI UZAYI ÜZERINDEKI FINE SPEKTRUMU

Bu bölümde Fathi ve Lashkaripour tarafından [19] da çalışılan, ℓ_1 dizi uzayı üzerinde Δ^{uv} genelleştirilmiş üst üçgensel çift bant matrisinin spektrumunu ve spektral ayrışımlarını vereceğiz.

(u_k), her $k \in \mathbb{N}$ için $u_k \neq 0$ ve $u = \lim_{k\to\infty} u_k \neq 0$ olacak şekilde pozitif reel sayı dizisi ve (v_k), $v = \lim_{k\to\infty} v_k \neq 0$ ve $\sup_k v_k < u + v$ olmak üzere pozitif reel sayıların sabit veya kesin azalan bir dizisi olsun.

[19] da ℓ_1 dizi uzayı üzerinde Δ^{uv} operatörü aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\Delta^{uv}x = \Delta^{uv}(x_n) = (v_n x_n + u_{n+1}x_{n+1})_{n=0}^{\infty}.$$

Δ^{uv} operatörün

$$\Delta^{uv} = \begin{bmatrix} v_0 & u_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & v_1 & u_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & v_2 & u_3 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & v_3 & u_4 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

matrisi ile temsil edidiğini göstermek kolaydır.

[19] da ℓ_1 dizi uzayı üzerinde Δ^{uv} genelleştirilmiş üst üçgensel çift bant matrisinin spektrumunu, nokta spektrumunu, sürekli spektrumunu ve rezidü spektrumunu aşağıdaki şekilde vermiştir.

Teorem 4.1 $\Delta^{uv} : \ell_1 \to \ell_1$ *operatörü bir sınırlı lineer operatördür ve*

$$\|\Delta^{uv}\| = \sup_k (|v_k| + |u_{k+1}|)$$

dir ([19] , Theorem 2.1).

Ispat. Ispat Lemma 1.2 den elde edilir. ■

Eğer $T : \ell_1 \to \ell_1$, A matris gösterimine sahip bir sınırlı lineer operatör ise bu durumda onun $T^* : \ell_1^* \to \ell_1^*$ adjoint operatörünün matris gösteriminin A matrisinin transpozu olduğu iyi bilinir. ℓ_1 dizi uzayının dual uzayı, $\|x\| = \sup_k |x_k|$ normu ile tüm sınırlı dizilerin uzayı olan ℓ_∞ uzayına izomorfiktir.

Şimdi Δ^{uv} nin ℓ_1^* uzayı üzerinde dual operatörü olan $(\Delta^{uv})^*$ ın point spektrumu ile ilgili teoremi ifade edelim.

Teorem 4.2 *$(\Delta^{uv})^*$ operatörünün ℓ_1^* uzayı üzerindeki point spektrumu*

$$\sigma_p((\Delta^{uv})^*, \ell_1^*) = \emptyset$$

dir ([19] , Theorem 2.2).

İspat. Teoremin ispatı iki durumda incelenmiştir.

1. Durum: (v_k) nın bir sabit dizi olsun. Her k için $v_k = v$ diyelim. $\ell_1^* \cong \ell_\infty$ da $f \neq \theta = (0, 0, 0, \ldots)$ için $(\Delta^{uv})^* f = \lambda f$ denklemini göz önüne alınsın. Burada

$$(\Delta^{uv})^* = \begin{bmatrix} v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_1 & v_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_2 & v_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & u_3 & v_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \text{ ve } f = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

dir. Bu

$$\begin{aligned} v_0 f_0 &= \lambda f_0 \\ u_1 f_0 + v_1 f_1 &= \lambda f_1 \\ u_2 f_1 + v_2 f_2 &= \lambda f_2 \\ &\vdots \\ u_k f_{k-1} + v_k f_k &= \lambda f_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

sistemini verir. (f_n) dizisinin sıfırdan faklı ilk girişi f_m olsun. Böylece $u_m f_{m-1} + v f_m = \lambda f_m$ olduğundan $\lambda = v$ elde edilir. Ayrıca $u_{m+1} f_m + v f_{m+1} = \lambda f_{m+1}$ eşitliğinden $f_m = 0$ bulunur ki bu kabul ile çelişir. Dolayısıyla

$$\sigma_p((\Delta^{uv})^*, \ell_1^*) = \emptyset$$

dir.

2. Durum: (v_k) nın kesin azalan bir dizi olduğunu kabul edelim. $\ell_1^* \cong \ell_\infty$ da

$f \neq \theta = (0, 0, 0, \ldots)$ için $(\Delta^{uv})^* f = \lambda f$ denklemini göz önüne alınırsa yukarıdaki denklem sistemi elde edilir. Dolayısıyla her $\lambda \notin \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ ve her k doğal sayısı için $f_k = 0$ elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece $\lambda \notin \sigma_p((\Delta^{uv})^*, \ell_1^*)$ dir. Bu ise

$$\sigma_p((\Delta^{uv})^*, \ell_1^*) \subseteq \{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$$

olduğunu gösterir. Bazı m ler için $\lambda = v_m$ olsun. Bu durumda $f_0 = f_1 = \cdots = f_{m-1} = 0$ dır. Şimdi, eğer $f_m = 0$ ise bu durumda her k doğal sayısı için $f_k = 0$ dır ve bu bir çelişkidir. Ayrıca eğer $f_m \neq 0$ ise bu durumda her $k \geq m$ için

$$f_{k+1} = \frac{u_{k+1}}{v_m - v_{k+1}} f_k,$$

dir ve $v_m < v + u$ olduğundan

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{f_{k+1}}{f_k} \right| = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{u_{k+1}}{v_m - v_{k+1}} \right| = \left| \frac{u}{v_m - v} \right| > 1\,,\ k \geq m$$

dir. O halde $f \notin \ell_1^*$ dir ve böylece

$$\sigma_p((\Delta^{uv})^*, \ell_1^*) = \emptyset$$

elde edilir. ■

Teorem 4.3 *Her $\lambda \in C$ için $\Delta^{uv}_\lambda : \ell_1 \to \ell_1$ operatörü yoğun görüntüye sahiptir ([19] , Theorem 2.3).*

İspat. Teorem 4.2 den $\sigma_p((\Delta^{uv})^*, \ell_1^*) = \emptyset$ olduğundan her λ için $(\Delta^{uv})^* - \lambda I$ operatörü birebirdir. O halde istenilen sonuç Lemma 2.1 den elde edilir. ■

Sonuç 4.1 *ℓ_1 üzerinde Δ^{uv} operatörünün $\sigma_r(\Delta^{uv}, \ell_1)$ rezidü spektrumu*

$$\sigma_r(\Delta^{uv}, \ell_1) = \emptyset$$

dur ([19] , Sonuç 2.4).

Fathi ve Lashkaripour [19] da c_0 dizi uzayı üzerinde Δ_{uv} operatörünü aşağıdaki biçimde tanımlamıştır: $u_{-2} = u_{-1} = u_0 = 0$ olmak üzere

$$\Delta_{uv} x = \Delta_{uv}(x_n) = (u_{n-2} x_{n-1} + v_n x_n)_{n=0}^{\infty}.$$

Δ_{uv} operatörünün matris gösteriminin

$$\Delta_{uv} = \begin{bmatrix} v_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ u_1 & v_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & u_2 & v_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & u_3 & v_3 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

biçiminde olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem 4.4 $\sigma_p(\Delta_{uv}, c_0) = \emptyset$ *dur ([19] , Theorem 2.5).*

İspat. Teoremin ispatı Teorem 4.2 deki yöntemle yapılır. Bu yüzden detayları geçiyoruz. ■

Teorem 4.5 $\sigma_r(\Delta_{uv}, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| < u\}$ *dur ([19] , Theorem 2.6).*

İspat. $\Delta_{uv} - \lambda I$ operatörünün yoğun görüntüye sahip ve $|\lambda - v| < u$ şartını sağlayan λ lar için Ran $(\Delta_{uv} - \lambda I) \neq c_0$ olduğu gösterilmedir. Eğer $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| < u\}$ ise, bu durumda $\Delta_{uv} - \lambda I$ operatörü $\lambda = v$ ((v_k) bir sabit dizi olduğu zaman) ve bir $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda = v_k$ hariç üçgenseldir ve sonuç olarak $\Delta_{uv} - \lambda I$ operatör bir terse sahiptir. İlave olarak Teorem 4.4 ile, $\lambda = v$ ((v_k) bir sabit dizi olduğu zaman) ve bir $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda = v_k$ olduğunda $\Delta_{uv} - \lambda I$ operatörü birebirdir ve böylece $\Delta_{uv} - \lambda I$ operatör bir terse sahiptir. Şimdi, eğer $\lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| < u\}$ ise, bu durumda $\Delta_{uv} - \lambda I$ operatörünün birebir olmadığını gösterelim.

Kabul edelim ki, $\Delta^*_{uv} = \Delta^{uv}$ olmak üzere ℓ_1 de $y \neq \theta = (0, 0, 0, \ldots)$ için $\Delta^*_{uv} y = \lambda y$ olsun.

$$\begin{aligned} v_0 y_0 + u_1 y_1 &= \lambda y_0 \\ v_1 y_1 + u_2 y_2 &= \lambda y_1 \\ v_2 y_2 + u_3 y_3 &= \lambda y_2 \\ &\vdots \\ v_k y_k + u_{k+1} y_{k+1} &= \lambda y_k \\ &\vdots \end{aligned}$$

olmasını verir. Eğer $y_0 = 0$ ise, bu durumda her k için $y_k = 0$ dır. Böylece $y_0 \neq 0$ ve yukarıdaki denklemin çözülmesi ile, her $k \geq 0$ için,

$$y_{k+1} = \left(\frac{\lambda - v_k}{u_{k+1}} \right) y_k$$

elde edilir ve sonuç olarak

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{y_{k+1}}{y_k}\right| = \left|\frac{v-\lambda}{u}\right| < 1 \;\Rightarrow\; |v-\lambda| < u$$

sağlanır. Böylece, $|v-\lambda| < u \Rightarrow y = (y_k) \in \ell_1$ olur, bu ise $\Delta^{*}_{uv} - \lambda I$ birebir olduğunu gösterir. Lemma 2.1 den, $\Delta_{uv} - \lambda I$ operatörü c_0 da yoğun görüntüye sahip değildir ve bu ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.6 $\sigma_p(\Delta^{uv}, \ell_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| < u\}$ *dur ([19] , Theorem 2.7).*

İspat. Teoremler 4.4-4.5 den elde edilir. ■

Teorem 4.7 ℓ_1 *üzerinde* Δ^{uv} *nin spektrumu*

$$\sigma(\Delta^{uv}, \ell_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| \leq u\}$$

ile verilir ([19] , Theorem 2.8).

İspat. $f \in \ell_1$ olsun ve $(\Delta^{uv}_{\lambda})^{*} x = f$ düşünelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(v_0 - \lambda)\, x_0 &= f_0 \\
u_1 x_0 + (v_1 - \lambda)\, x_1 &= f_1 \\
u_2 x_1 + (v_2 - \lambda)\, x_2 &= f_2 \\
&\vdots \\
u_k f_{k-1} + (v_k - \lambda)\, x_k &= f_k \\
&\vdots
\end{aligned}$$

lineer denklem sistemi elde ederiz. Denklemleri çözerek, $x = (x_k)$ yı f ye göre

$$k \geq 1 \text{ için } x_0 = \frac{1}{v_0 - \lambda}, \text{ ve } x_k = \frac{1}{v_k - \lambda} \sum_{i=0}^{k} \left(\prod_{j=i}^{k-1} \frac{u_{j+1}}{\lambda - v_j} \right) f_i$$

biçiminde elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
S_k = {} & \frac{1}{|v_k - \lambda|} + \frac{u_k}{|v_{k-1} - \lambda| \cdot |v_k - \lambda|} \\
& + \frac{u_{k-1} u_k}{|v_k - \lambda| \cdot |v_{k-1} - \lambda| \cdot |v_{k-2} - \lambda|} + \cdots + \frac{u_1 u_2 \cdot \cdots \cdot u_k}{|v_0 - \lambda| \cdot |v_1 - \lambda| \cdot \cdots \cdot |v_k - \lambda|}
\end{aligned}$$

olmak üzere $|x_k| \leq S_k \|f\|_1$ dır. Açıkça her S_k sonludur. Şimdi, $\sup_k S_k$ nın sonlu olduğunu ispatlayalım. Eğer $u < |\lambda - v|$ ise, bu durumda $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_k}{v_{k-1} - \lambda} \right| =$

$\frac{u}{|v-\lambda|} = p < 1$ **dır. Bu durumda her** $n \geq k+1$ **için** $\frac{u_n}{|v_{n-1}-\lambda|} < p_0 < 1$ **olacak şekilde** $k \in \mathbb{N}$ **vardır, ve böylece**

$$S_{n+k} \leq \frac{1}{|v_{n+k}-\lambda|}\left(\frac{u_1u_2\cdots u_k}{|v_0-\lambda|\,.\,|v_1-\lambda|\cdots|v_{k-1}-\lambda|}p_0^n + \frac{u_2u_3\cdots u_k}{|v_1-\lambda|\cdots|v_{k-1}-\lambda|}p_0^{n-1} + \cdots + p_0 + 1\right)$$

elde edilir. Eğer $M = \max\left\{\frac{u_ju_{j+1}\dots u_k}{|v_{j-1}-\lambda|\,.\,|v_j-\lambda|\cdots|v_k-\lambda|} : 1 \leq j \leq k\right\}$ **alınırsa, bu durumda**

$$S_{n+k} \leq \frac{M}{|v_{n+k}-\lambda|}(1+p_0+p_0^2+\cdots+p_0^n) \leq \frac{M}{|v_{n+k}-\lambda|}(1+p_0+p_0^2+\cdots).$$

elde edilir, fakat, yeterince büyük n **için,** $\frac{1}{|v_{n+k}-\lambda|} < d < \frac{1}{u}$ **elde edilir ve böylece her** $n \geq k+1$ **için** $S_{n+k} \leq \frac{Md}{1-p_0}$ **elde edilir. Buradan,** $\sup_k S_k < \infty$ **dır. Bu ise** $\|x\|_1 \leq \sup_k S_k \|f\|_1 < \infty$ **olduğunu gösterir. Bu yüzden** $x \in \ell_1$ **dır. Böylece,** $u < |\lambda - v|$ **için,** $(\Delta_\lambda^{uv})^*$ **örtendir, ve Lemma 2.2 ile,** Δ_λ^{uv} **bir sınırlı terse sahiptir. Bu**

$$\sigma_c(\Delta^{uv}, \ell_1) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| < u\}$$

olması anlamına gelir. Bu Teorem 4.4 ve Sonuç 4.1 ile birleştirilir ise

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| < u\} \subseteq \sigma(\Delta^{uv}, \ell_1) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| \leq u\}$$

elde edilir. Herhangi bir sınırlı lineer operatörün spektrumu kapalı olduğundan

$$\sigma(\Delta^{uv}, \ell_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| \leq u\}.$$

elde edilir. ■

Teorem 4.8 ℓ_1 ***üzerinde*** Δ^{uv} ***operatörünün*** $\sigma_c(\Delta^{uv}, \ell_1)$ ***sürekli spektrumu***

$$\sigma_c(\Delta^{uv}, \ell_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| = u\}$$

dir ([19] , Theorem 2.9).

İspat. $\sigma_r(\Delta^{uv}, \ell_1) = \emptyset$, $\sigma_p(\Delta^{uv}, \ell_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| < u\}$ **ve** $\sigma(\Delta^{uv}, \ell_1)$; $\sigma_p(\Delta^{uv}, \ell_1)$, $\sigma_r(\Delta^{uv}, \ell_1)$ **ve** $\sigma_c(\Delta^{uv}, \ell_1)$ **nin ayrık birleşimi olduğundan**

$$\sigma_c(\Delta^{uv}, \ell_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| = u\}$$

olduğunu elde edilir. ■

Teorem 4.9 *Eğer* $|\lambda - v| < u$ *ise, bu durumda* $\lambda \in A_3\sigma(\Delta^{uv}, \ell_1)$ *dır ([19] , Theorem 2.10).*

İspat. $|\lambda - v| < u$ olsun. Bu durumda Teorem 4.2 ile, $\lambda \in (3)$ dir; geriye $|\lambda - v| < u$ olduğunda Δ_λ^{uv} nin örten olduğunu ispatlamak kalır. $y = (y_0, y_1, y_2, \ldots) \in \ell_1$ olsun ve $\Delta_\lambda^{uv} x = y$ denklemini düşünelim. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
(v_0 - \lambda) x_0 + u_1 x_1 &= y_0 \\
(v_1 - \lambda) x_1 + u_2 x_2 &= y_1 \\
(v_2 - \lambda) x_2 + u_3 x_3 &= y_2 \\
&\vdots \\
(v_k - \lambda) x_k + u_{k+1} x_{k+1} &= y_k \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

lineer denklem sistemini elde edilir. Şimdi, $x_0 = 0$ alalım ve bu denklemleri çözerek $x_1 = \frac{1}{u_1} y_0$ ve her $k \geq 2$ için

$$
x_k = \frac{1}{u_k} \left(\sum_{i=0}^{k-2} \left[\prod_{j=i+1}^{k-1} \frac{\lambda - v_j}{u_j} \right] y_i + y_{k-1} \right)
$$

elde edilir. Bu durumda her k için

$$
S_k = \frac{1}{u_{k+1}} + \frac{1}{u_{k+2}} \frac{|v_{k+1} - \lambda|}{u_{k+1}} + \frac{1}{u_{k+3}} \frac{|v_{k+1} - \lambda|}{u_{k+1}} \frac{|v_{k+2} - \lambda|}{u_{k+2}} + \cdots
$$

olmak üzere $\sum_k |x_k| \leq \sum_k S_k |y_k|$ dır. Her k, n için

$$
\begin{aligned}
S_{n,k} := {} & \frac{1}{u_{k+1}} + \frac{1}{u_{k+2}} \frac{|v_{k+1} - \lambda|}{u_{k+1}} + \frac{1}{u_{k+3}} \frac{|v_{k+1} - \lambda|}{u_{k+1}} \frac{|v_{k+2} - \lambda|}{u_{k+2}} \\
& + \cdots + \frac{1}{u_{k+n+1}} \frac{|v_{k+1} - \lambda|}{u_{k+1}} \frac{|v_{k+2} - \lambda|}{u_{k+2}} \cdots \frac{|v_{k+n} - \lambda|}{u_{k+n}}
\end{aligned}
$$

olsun. Buradan

$$
S_n = \lim_{k \to \infty} S_{n,k} = \frac{1}{u} + \frac{|v - \lambda|}{u^2} + \frac{|v - \lambda|^2}{u^3} + \cdots + \frac{|v - \lambda|^n}{u^{n+1}}
$$

dir. Şimdi, $|\lambda - v| < u$ için,

$$
S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{1}{u} + \frac{|v - \lambda|}{u^2} + \frac{|v - \lambda|^2}{u^3} + \cdots < \infty
$$

olduğu görülür, böylece (S_k), S limitine sahip pozitif reel sayıların yakınsak bir dizisidir. Bu yüzden, (S_k) sınırlıdır ve $\sup_k S_k < \infty$ dır. Buradan

$$
\sum_k |x_k| \leq \sup_k S_k \sum_k |f_k| < \infty
$$

dır. Bu $x \in \ell_1$ olduğunu gösterir. ■

5. Δ^{uv} MATRISININ ℓ_1 DIZI UZAYI ÜZERINDEKI SPEKTRAL AYRIŞIMI VE Δ_{uv} MATRISININ c_0 DIZI UZAYI ÜZERINDEKI FINE SPEKTRUMU

Bu bölümde Fathi ve Lashkaripour tarafından[19] da tanımlanan Δ^{uv} genelleştirilmiş üst üçgensel çift-bant matrisinin ℓ_1 dizi uzayı üzerindeki spektral ayrışımı verilmiştir ve [18] de tanımlanan Δ_{uv} genelleştirilmiş alt üçgensel çift-bant matrisinin c_0 dizi uzayı üzerindeki fine spekturumu daha farklı bir metotla daha kısa ispatlarla tekrar elde edilmiştir. Tezin bu kısmı orjinal olup [16] da yayınlanmıştır.

5.1 Yaklaşık nokta spektrum, eksik spektrum ve sıkıştırılmış spektrum

X bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde Banach uzayı ve $L \in B(X)$ olsun. $(x_n) \subset X$ dizisi için eğer, $n \to \infty$ iken $\|Lx_n\| \to 0$ ve $\|x\| = 1$ ise (x_n) ye L için bir Weyl dizisi denir. Örneğin, ℓ_p deki $\{e_k\}$ taban elemanları $(Lx_n)_n = \dfrac{x_n}{n}$ operatörü için bir Weyl dizisidir.

$$\sigma_{ap}(L) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda I - L \text{ için bir Weyl dizisi mevcuttur}\} \tag{5.1}$$

kümesine L nin yaklaşık nokta spektrumu denir.

$$\sigma_{\delta}(L) := \{\lambda \in \sigma(L) : \lambda I - L \text{ örten değil}\} \tag{5.2}$$

alt spekturumuna L nin eksik spektrumu denir.

Tanımdan eğer $\lambda \notin \sigma_{ap}(L)$ ise her $x \in X$ için $\|\lambda x - Lx\| \geq c\|x\|$ dir. Denk olarak bu,

$$\inf\{\|\lambda e - Le\| : e \in \{x : \|x\| < 1\}\} > 0\,, \quad (\lambda \notin \sigma_{ap}(L)) \tag{5.3}$$

biçiminde ifade edilebilir.

(5.1) ve (5.2) alt spektrumları

$$\sigma(L) = \sigma_{ap}(L) \cup \sigma_{\delta}(L) \tag{5.4}$$

biçiminde spektrumun ayrık olması gerekmeyen bir ayrışımıdır.

$$\sigma_{co}(L) := \left\{\lambda \in \mathbb{K} : \overline{\operatorname{Ran}(\lambda I - L)} \neq X\right\} \tag{5.5}$$

kümesine de L nin sıkıştırılmış spektrumu denir.

$\sigma_{ap}(L)$, $\sigma_{\delta}(L)$, $\sigma_{co}(L)$ alt spektrumları

$$\begin{aligned} \sigma(L) &= \sigma_{ap}(L) \cup \sigma_{\delta}(L) \\ \sigma(L) &= \sigma_{ap}(L) \cup \sigma_{co}(L) \end{aligned} \tag{5.6}$$

spektrumun ayrık olması gerekmeyen bir ayrışımıdır. $\sigma_p(L) \subseteq \sigma_{ap}(L)$ ve $\sigma_{co}(L) \subseteq \sigma_{\delta}(L)$ olduğu açıktır. Ayrıca $\sigma(L) = \sigma_p(L) \cup \sigma_c(L) \cup \sigma_r(L)$ eşitliği ile bu alt spektrumları kıyaslarsak

$$\begin{aligned} \sigma_r(L) &= \sigma_{co}(L) \setminus \sigma_p(L) \\ \sigma_c(L) &= \sigma(L) \setminus [\sigma_p(L) \cup \sigma_{co}(L)] \end{aligned} \tag{5.7}$$

elde ederiz (Bak [9]).

Bazen bir sınırlı lineer operatörün spektrumunu hesaplamak için onun adjoint operatörü faydalı olabilir. Bunun için aşağıdaki teorem çok kullanışlıdır.

Teorem 5.1 ***Bir $L \in B(X)$ operatörünün ve onun $L^* \in B(X^*)$ adjointinin spektrumu ve alt spektrumu için aşağıdaki ilişkiler doğrudur.***

(a) $\sigma(L^*) = \sigma(L)$,

(b) $\sigma_c(L^*) \subseteq \sigma_{ap}(L)$,

(c) $\sigma_{ap}(L^*) = \sigma_{\delta}(L)$,

(d) $\sigma_{\delta}(L^*) = \sigma_{ap}(L)$,

(e) $\sigma_p(L^*) = \sigma_{co}(L)$,

(f) $\sigma_{co}(L^*) \supseteq \sigma_p(L)$,

(g) $\sigma(L) = \sigma_{ap}(L) \cup \sigma_p(L^*) = \sigma_p(L) \cup \sigma_{ap}(L^*)$ ***([9] , Önerme 1.3).***

[15] de Durna ve Yıldırım, şimdiye kadar verilen tanımlar yardımıyla, spektrumun

bu ayrışımları arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki tabloyu oluşturmuşdur.

Tablo 2: Spektrumun Ayrık Olması Gerekmeyen Ayrışımı

		(1)	(2)	(3)
		$R(\lambda;L)$ mevcut ve sınırlı	$R(\lambda;L)$ mevcut ve sınırsız	$R(\lambda;L)$ mevcut değil
A	$\text{Ran}(\lambda I - L) = X$	$\lambda \in \rho(L)$	$-$	$\lambda \in \sigma_p(L)$ $\lambda \in \sigma_{ap}(L)$
B	$\text{Ran}(\lambda I - L) \neq X$ $\overline{\text{Ran}(\lambda I - L)} = X$	$\lambda \in \rho(L)$	$\lambda \in \sigma_c(L)$ $\lambda \in \sigma_{ap}(L)$ $\lambda \in \sigma_\delta(L)$	$\lambda \in \sigma_p(L)$ $\lambda \in \sigma_{ap}(L)$ $\lambda \in \sigma_\delta(L)$
C	$\overline{\text{Ran}(\lambda I - L)} \neq X$	$\lambda \in \sigma_r(L)$ $\lambda \in \sigma_\delta(L)$ $\lambda \in \sigma_{co}(L)$	$\lambda \in \sigma_r(L)$ $\lambda \in \sigma_{ap}(L)$ $\lambda \in \sigma_\delta(L)$ $\lambda \in \sigma_{co}(L)$	$\lambda \in \sigma_p(L)$ $\lambda \in \sigma_{ap}(L)$ $\lambda \in \sigma_\delta(L)$ $\lambda \in \sigma_{co}(L)$

5.2 Δ^{uv} Genelleştirilmiş Üst Üçgensel Çift-Bant Matrisinin ℓ_1 Dizi Uzayı Üzerindeki Spektral Ayrışımı

Bu kısımda ℓ_1 dizi uzayı üzerinde Δ^{uv} genelleştirilmiş üst üçgensel çift bant matrisinin aralarında ayrık olması gerekmeyen spektral ayrışımlarını vereceğiz.

Sonuç 5.1 $B_3\sigma(\Delta^{uv},\ell_1) = C_3\sigma(\Delta^{uv},\ell_1) = \emptyset$.

İspat. Tablo 2 den $\sigma_p(\Delta^{uv},\ell_1) = A_3\sigma(\Delta^{uv},\ell_1) \cup B_3\sigma(\Delta^{uv},\ell_1) \cup C_3\sigma(\Delta^{uv},\ell_1)$ olduğundan, Teorem 4.6 ve Teorem 4.9 kullanılarak istenilen elde edilir. ■

Sonuç 5.2 $C_1\sigma(\Delta^{uv},\ell_1) = C_2\sigma(\Delta^{uv},\ell_1) = \emptyset$.

İspat. Tablo 2 den $\sigma_r(\Delta^{uv},\ell_1) = C_1\sigma(\Delta^{uv},\ell_1) \cup C_2\sigma(\Delta^{uv},\ell_1)$ olduğundan, Teorem 4.5 kullanılarak istenilen elde edilir. ■

Teorem 5.2 *(a)* $\sigma_{ap}(\Delta^{uv}, \ell_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| \le u\}$,

(b) $\sigma_{\delta}(\Delta^{uv}, \ell_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| = u\}$,

(c) $\sigma_{co}(\Delta^{uv}, \ell_1) = \emptyset$.

İspat. (a) Tablo 2 den $\sigma_{ap}(\Delta^{uv}, \ell_1) = \sigma(\Delta^{uv}, \ell_1) \setminus C_1\sigma(\Delta^{uv}, \ell_1)$ olduğundan, Teorem 4.7 ve Sonuç 5.2 kullanılarak istenilen elde edilir.

(b) Tablo 2 den $\sigma_{\delta}(\Delta^{uv}, \ell_1) = \sigma(\Delta^{uv}, \ell_1) \setminus A_3\sigma(\Delta^{uv}, \ell_1)$ olduğundan, Teorem 4.7 ve Teorem 4.9 kullanılarak istenilen elde edilir.

(c) Tablo 2 den $\sigma_{co}(\Delta^{uv}, \ell_1) = C_1\sigma(\Delta^{uv}, \ell_1) \cup C_2\sigma(\Delta^{uv}, \ell_1) \cup C_3\sigma(\Delta^{uv}, \ell_1)$ olduğundan, Sonuç 5.1 ve Sonuç 5.2 kullanılarak istenilen elde edilir. ■

5.3 Δ_{uv} Genelleştirilmiş Alt Üçgensel Çift Bant Matrisinin c_0 Dizi Uzayı Üzerinde fine spektrumu

Bu kısımda c_0 dizi uzayı üzerinde Δ_{uv} genelleştirilmiş alt üçgensel çift bant matrisinin aralarında ayrık olması gerekmeyen spektral ayrışımlarını vereceğiz ve bu ayrışımlar yardımıyla Δ_{uv} nin c_0 daki spekturumunun Goldberg tarafından verilen fine ayrışımını yapacağız.

Teorem 5.3 $\sigma(\Delta_{uv}, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| \le u\}$.

İspat. Önerme 5.1 (a) ve Teorem 4.7 den elde edilir. ■

Teorem 5.4 *(a)* $\sigma_{ap}(\Delta_{uv}, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| = u\}$,

(b) $\sigma_{\delta}(\Delta_{uv}, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| \le u\}$.

İspat. (a) Önerme 5.1 (d) den

$$\sigma_{ap}(\Delta_{uv}, c_0) = \sigma_{\delta}(\Delta^{*}_{uv}, c^{*}_0) = \sigma_{\delta}(\Delta^{uv}, \ell_1)$$

olduğundan Teorem 5.2 (b) den istenilen elde edilir.

(b) Önerme 5.1 (c) den

$$\sigma_{\delta}(\Delta_{uv}, c_0) = \sigma_{ap}(\Delta^{*}_{uv}, c^{*}_0) = \sigma_{ap}(\Delta^{uv}, \ell_1)$$

olduğundan Teorem 5.2 (a) dan istenilen elde edilir. ■

Teorem 5.5 $C_1\sigma(\Delta_{uv}, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| < u\}$.

İspat. Tablo 2 den $\sigma_{ap}(\Delta_{uv}, c_0) = \sigma(\Delta_{uv}, c_0) \setminus C_1\sigma(\Delta_{uv}, c_0)$ olduğundan, Teorem 5.4 (b) ve Theorem 5.3 kullanılarak istenilen elde edilir. ■

Teorem 5.6 $B_2\sigma(\Delta_{uv}, c_0) \cup C_2\sigma(\Delta_{uv}, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| = u\}$.

İspat. Tablo 2 den

$$B_2\sigma(\Delta_{uv}, c_0) \cup C_2\sigma(\Delta_{uv}, c_0) = \sigma_\delta(\Delta_{uv}, c_0) \setminus \{\sigma_p(\Delta_{uv}, c_0) \cup C_1\sigma(\Delta_{uv}, c_0)\}$$

olduğundan, Teorem 4.4, Teorem 5.4 (b) ve Teorem 5.5 kullanılarak istenilen elde edilir. ■

Teorem 5.7 $C_2\sigma(\Delta_{uv}, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| = u\}$.

İspat. Lemma 2.1 den $\overline{R((\Delta_{uv})_\lambda)} = c_0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $(\Delta_{uv})^*_\lambda = (\Delta^{uv})_\lambda$ operatörünün birebir olmasıdır. Teorem 4.6 dan eğer $|\lambda - v| \geq u$ ise $(\Delta^{uv})_\lambda$ birebirdir. Böylece Lemma 2.1 den eğer $|\lambda - v| = u$ ise $\lambda \in C$ dir. Dolayısıyla Teorem 5.6 dan $C_2\sigma(\Delta_{uv}, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - v| = u\}$ dir. ■

Sonuç 5.3 $\sigma_c(\Delta_{uv}, c_0) = B_2\sigma(\Delta_{uv}, c_0) = \emptyset$.

İspat. Tablo 2 den $\sigma_c(\Delta_{uv}, c_0) = B_2\sigma(\Delta_{uv}, c_0)$ olduğundan, Teorem 5.6 ve Teorem 5.7 kullanılarak istenilen elde edilir. ■

Uyarı 5.1 *Burada ispatladığımız Teorem 5.5-Teorem 5.7 ve Sonuç 5.3 daha önce*[18] *de ispatlanmıştır. Burada verilen ispatlar*[18] *de verilen ispatlardan daha kısa ve faklı bir yolla elde edilmiştir.*

5.4 Sonuç

Birçok araştırmacı, bazı dizi uzaylarında çeşitli matris operatörlerinin spektrumunu ve fine spektrumunu belirlemiştir. Her ne kadar Fathi ve Lashkaripour [18] de Δ_{uv} genelleştirilmiş fark operatörünün c_0 dizi uzayı üzerinde Goldberg tarfından verilen spektral ayrışımını vermiş olsa da bu tezde biz, Δ_{uv} genelleştirilmiş alt üçgensel fark operatörünün c_0 dizi uzay¬ üzerinde ve ¢^{uv} genelleştirilmiş üst üçgensel fark operatörünün ℓ_1 dizi uzay¬ üzerinde, spektrumun yeni bir ayr¬ş¬m¬ olan approximate point spektrumunu, eksik spektrumunu ve s¬k¬şt¬r¬lm¬ş spektrumunu verdik. Yeni sonuçlar¬m¬z¬n, c_0 dizi uzay¬nda sonsuz alt üçgensel çift bant matrislerle temsil edilen daha geniş bir lineer operatörler s¬n¬f¬n¬ kapsad¬ğ¬ hemen anlaş¬l¬r. Bu nedenle çal¬şmam¬z önceki çal¬şmalardan daha genel ve daha kapsaml¬d¬r. Bu tezdeki yeni sonuçlar¬m¬z¬n [11, 12, 13] de belirtilen sonuçlar¬ iyileştirdiğini ve genelleştirdiğini not edelim.

KAYNAKLAR

[1] Akhmedov, A.M., Başar, F. (2004). On the spectrum of the Cesàro operator in c_0. *Math. J. Ibaraki Univ.*, 36, 25–32.

[2] Akhmedov, A.M., Başar, F. (2006). The fine spectra of the di¤erence operator ¢ over the sequencespace $\ell_p,$ (1 · $p <$ 1). *Demonstratio Math.*, 39, 586–595.

[3] Akhmedov, A.M., Başar, F. (2007). On the fine spectra of the di¤erence operator ¢ over the sequencespace $bv_p,$ (1 · $p <$ 1). *Acta. Math. Sin. Eng. Ser. Oct.*, 23, 1757–1768.

[4] Akhmedov, A.M., Başar, F. (2008). The fine spectra of Cesàro operator C_1 over the sequence space bv_p. *Math. J. Okayama Univ.*, 50, 135–147.

[5] Altay, B., Karakuş, M. (2005). On the spectrum and fine spectrum of the Zweier matrix as anoperator on some sequence spaces. *Thai J. Math.*, 3, 153–162.

[6] Altay, B., Başar, F. (2007). The fine spectrum and the matrix domain of the di¤erence operator ¢ on the sequence space $\ell_p,$ (1 $< p <$ 1). *Commun. Math. Anal.*, 2, 1–11.

[7] Altun, M., Karakaya, V. (2009). Fine spectra of Lacunary Matrices. *Commun. Math. Anal.*, 7, 1–10.

[8] Amirov, R. Kh., Durna, N., Yildirim, M. (2011). Subdivision of the spectra for Cesàro, Rhaly and weighted mean operators on c_0 ,c and ℓ_p. *IJST,* A3, 175-183.

[9] Appell, J., Pascale, E.D., Vignoli, A. (2004). Nonlinear Spectral Theory. Walter de Gruyter ¢ Berlin ¢ New York.

[10] Başar, F. , Altay, B. (2004). On the fine spectrum of the di¤erence operator on c_0 and c. *Inform. Sci.*,168, 217–224.

[11] Başar, F., Durna, N., Yildirim, M. (2010). Subdivisions of the spectra for genarilized di¤erence operator ¢$_v$ on the sequence space ℓ_1. *CP1309, ICMS, International Conference on Mathematical Science*, 254–260.

[12] Başar, F., Durna, N., Yildirim, M. (2011). Subdivisions of the spectra for genarilized di¤erence operator over certain sequence spaces. *Thai Journal of Mathematics*, 9 (2), 285–295.

[13] Başar, F., Durna, N., Yildirim, M. (2012). Subdivision of the spectra for di¤erence operator over certain sequence spaces. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 6 (S), 151–165.

[14] Brown, A.L., Page, E. (1970). Elements of Functional Analysis. *Von Nonstrand Reinhold Comp*.

[15] Durna, N., Yildirim, M. (2011). Subdivision of the spectra for factorable matrices on c_0. *GUJ Sci.*, 24 (1), 45-49.

[16] Durna, N., Yildirim, M., Ünal, Ç. (2016). On the fine spectrum of generalized lower triangular double band matr¬ces ¢$_{uv}$ over the sequence space c_0. *Cumhuriyet Sci. J.*, 37 (3), 281-291.

[17] Durna, N., K¬l¬ç, R. (2019). Spectra and fine spectra for the upper triangular band matrix $U(a_0, a_1, a_2; b_0, b_1, b_2)$ over the sequence space c_0. *Proyecciones J. Math.*, 38 (1), 145-162.

[18] Fathi, J., Lashkaripour, R. (2012). On the fine spectra of the generalized di¤erence operator ¢$_{uv}$ over the sequence space c_0. *J. Mahani Math. Res. Cent.*, 1 (1), 1-12.

[19] Fathi, J., Lashkaripour, R. (2013). On the fine spectrum of the generalized upper double band matrices ¢^{uv} over the sequence space ℓ_1. *Matematiqki Vesnik*, 65 (1), 64-73.

[20] Goldberg, S. (1966). Unbounded Linear Operators. McGraw Hill, New York.

[21] Gonzalez, M. (1985). The fine spectrum of the Cesàro operator in ℓ_p, $(1 < p < 1)$. *Arch. Math.*, 44, 355-358.

[22] Hutson, V. and Pym, J.S. (1980). Applications of Functional Analysis and Operator Theory. *Acedemic Press, London*.

[23] Kayaduman, K, Furkan, H. (2006). On the fine spectrum of the di¤erence operator ¢ over the sequence spaces ℓ_1 and bv. *International Mathematical Forum*, 24 (1), 1153-1160.

[24] Karakaya, V., Altun, M. (2010) Fine spectra of upper triangular double-band matrices, *J. Comput. Appl. Math.* 234, 1387-1394.

[25] Kreyszig, E. (1978). Introductory Functiona lAnalysis with Applications. *JohnWiley and Sons, New York, NY, USA.*

[26] Musayev, B. ve Alp, M. (2000). Fonksiyonel Analiz. *Balc¬ Yay¬nlar¬.*

[27] Okutoyi, J.T. (1992). On the spectrum of C_1 as an operator on bv. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank.,Ser.,* A1, 41, 197–207.

[28] Reade, J.B. (1985). On the spectrum of the Cesàro operator. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 17, 263-267.

[29] Rhoades B.E. (1983). The fine spectra for weighted mean operators. *Pacific J. Math.*, 104, 263-267.

[30] Rudin, W. (1973). Functional Analysis. *Mc Graw-hill Book Comp.*

[31] Srivastava, P. D. and Kumar, S. (2009). On the fine spectrum of the generalized di¤erence operator ¢$_\nu$ over the sequence space c_0. *Commun. Math. Anal.*, 6 (1), 8-21.

[32] Yildirim, M. (1996). On the spectrum and fine spectrum of the compact Rhaly operators. *Indian J. Pure Appl. Math.*, 27, 779-784.

[33] Wenger, R.B. (1975). The fine spectra of Hölder summability operators. I*ndian J. Pure Appl. Math.*, 6, 695-712.

[34] Wilansky, A. (1984). Summability through Functional Analysis. *vol. 85 of North-Holland Mathematics Studies, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands.*

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Çağrı ÜNAL
Doğum Yeri ve Tarihi	İskenderun 1990
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Muradiye M. 231. S. No=8/1 İskenderun
E-posta Adresi	cagriiunall@gmail.com

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Cumhuriyet Lisesi, İskenderun
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 2014
Yüksek Lisans	Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi, 2019

Yayınlar

1. Durna, N, Yıldırım, M and Ünal, Ç, (2016). On the fine spectrum of generalized lower triangular double band matrıces Δ_{uv} over the sequence space c_0. Cumhuriyet Sci. J., 37 (3), 281-291