T.C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİPERBOLİK UZAYDA EĞRİLERİN VE YÜZEYLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nildem Kevser GÖKTAN
(20169237005)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Tuğba MERT

SİVAS
ŞUBAT 2019

Nildem Kevser GÖKTAN ’ın hazırladığı ve **“HİPERBOLİK UZAYDA EĞRİLER VE YÜZEYLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ”** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı :	**Dr.Öğretim Üyesi Tuğba MERT** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	**……………...**
Jüri Üyelesi :	**Dr.Öğretim Üyesi Ümit TOKEŞER** Kastamonu Üniversitesi	**……………...**
Jüri Üyelesi :	**Dr.Öğretim Üyesi Serkan ATMACA** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	**……………...**

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. İsmail ÇELİK
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (CÜBAP) Komisyonu tarafından ***F-570*** *Nolu proje kapsamında desteklenmiştir.*

ETİK

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı beyan ederim.

08.02.2019

Nildem Kevser GÖKTAN

ÖZET

HİPERBOLİK UZAYDA EĞRİLER VE YÜZEYLERİN DİFERENSİYEL GEOMETRİSİ

Nildem Kevser GÖKTAN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi. Tuğba MERT

2019, 52+xi sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır:

Birinci bölümde, Lorentz ve Hiperbolik geometrinin tarihçesi özetlenmiştir. Ayrıca eğriler ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi hakkında kısa bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullandığımız Öklidyen ve Hiperbolik uzayda temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 1873 ve 1885 yıllarında Klein tarafından tanımlanan Lorentz ve Hiperbolik uzaylar tanıtılmış ve bu uzayların temel kavramlarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde Hiperbolik uzaydaki eğriler ve yüzeylerin diferensiyel geometrisi verilerek, ilk defa Hiperbolik uzaydaki Regle yüzeyler tanıtılmıştır. Ayrıca Hiperbolik uzaydaki Regle yüzeylere örnekler verilerek bunlardan bazılarının açıları koruyan steografik izdüşümler altındaki görüntüleri bulunmuş ve mathematica programında çizdirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik uzay, Eğri, Yüzey

ABSTRACT

DİFFERANTİAL GEOMETRY OF CURVES AND SURFACES İN HYPERBOLİC SPACE

Nildem Kevser GÖKTAN

Master of Science Thesis

Department of Mathematics

Supervisor: Assistant Prof. Dr. Tuğba MERT

2019, 52+xi pages

This thesis consists of four parts.

In the first part, the history of Lorentz and Hyperbolic geometry is summarized. Also, brief information about curves and surfaces of differential geometry is given.

In the second part,basic definitions and theorems are given in Euclidean and Hyperbolic space which we use in the thesis.

In the third part, Lorentz and Hyperbolic spaces defined by Klein in 1873 and 1885 respectively were introducued and basic concepts of this spaces were given.

In the fourth part, curves and surfaces on the Hyperbolic space are given the differential geometry, and for the first time the Regle surfaces on the Hyperbolic spaces are introduced. İn addition, examples of the Hyperbolic Regle surfaces are found, and same of them are shown in mathematica program with images under steographic projections that protect the angles of some of them.

Keywords: hyperbolic space, curve, surface

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren ve yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Tuğba MERT'e, yüksek lisans eğitimim boyunca emeği geçen tüm bölüm hocalarıma çok teşekkür ederim. Ayrıca bu yoğun süreçte tüm sıkıntılarımı paylaşan, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan tüm aileme minnet, şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.. vi
ABSTRACT.. vii
TEŞEKKÜR viii
ŞEKİLLER LİSTESİ.. x
SİMGELER DİZİNİ.. xi

1. GİRİŞ………………………………………………………………….. 1

2. TEMEL KAVRAMLAR……………………………………………………… 2
2.1 Öklid Uzayda Temel Tanımlar......…………….………………................ 2
2.2 Hiperbolik Uzayda Temel Tanımlar......…………………………………… 3

3. HİPERBOLİK GEOMETRİ………………………………………………. 6
3.1 Lorentz Uzayı……………………………………………………………… 8
3.2 Hiperbolik Uzay…………………………………………………………… 14

4. HİPERBOLİK UZAYDA EĞRİLER VE YÜZEYLER……………………. 22
4.1 Hiperbolik Uzayda Eğriler……………………………………………….. 22
4.2 Hiperbolik Uzayda Yüzeyler…………………………………………….. 25
4.2.1 Hiperbolik Uzayda Sabit Açılı Yüzeyler……………………………... 30
4.2.2 Hiperbolik Uzayda Spacelike Regle Yüzeyler ..…………………….. 35

KAYNAKLAR 51

ÖZGEÇMİŞ

ŞEKİLLER DİZİNİ

		Sayfa
Şekil 4.1	Hiperbolik uzayda regle yüzey üzerinde dayanak eğrisi.........................	36
Şekil 4.3	Hiperbolik uzayda regle yüzey..	41
Şekil 4.3	Regle yüzeyin ortoganal yörüngesi.........................	48

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}^{n+1}$	$(n+1)-$boyutlu vektör uzayı
$\mathbf{d}_E$	Öklidyen uzaklık fonksiyonu
$\mathbf{d}_H$	Hiperbolik uzaklık fonksiyonu
$\mathbf{E}^n$	$n-$boyutlu Öklidyen uzay
$\mathbf{H}^3$	Hiperbolik uzay
$\langle,\rangle_{\mathbf{L}}$	Lorentzien iç çarpım

1. GİRİŞ

Eğrilerin ve Yüzeylerin diferensiyel geometrisinin iki yüzü vardır. Klasik diferensiyel geometri olarak adlandırılabilecek olan yüzü, diferensiyel ve integral hesabın başlangıcıyla birlikte ortaya çıkmıştır. Kabaca söylemek gerekirse, klasik diferensiyel geometri eğrilerin ve yüzeylerin yerel özelliklerini araştırır. Yerel özellikler eğrinin veya yüzeyin, yalnızca bir noktanın komşuluğundaki davranışına bağlı olan özellikleridir. Bu tür özelliklerin araştırılmasında yeterli olduğu anlaşılan yöntemler diferensiyel hesap yöntemleridir ve bu nedenle, diferensiyel geometride düşünülen eğriler ve yüzeyler belirli sayıda türevi alınabilen fonksiyonlarla tanımlanacaktır. Eğrilerin ve Yüzeylerin diferensiyel geometrisinin diğer yüzü ise global diferensiyel geometri olarak adlandırılır. Burada yerel özelliklerin eğrinin veya yüzeyin tümünün davranışı üzerindeki etkileri araştırılır. Klasik diferensiyel geometrinin belki de en ilginç ve onu en iyi temsil eden parçası, yüzeylerle ilgili çalışmalardır. Bununla birlikte, yüzeylerle ilgili çalışmalarda eğrilerin kimi yerel özellikleri doğal olarak ortaya çıkar. XVII. yüzyılda Descartes ve Fermat tarafından keşfedilen koordinat metodundan sonra, Leibniz'in çalışmasında eğrilerin teğeti, eğrilerin kuşatan eğrisi gibi kavramlar ortaya çıkmıştır. XVIII. Yüzyılda Diferensiyel geometri de çok önemli sonuçlar Euler tarafından bulunmuştur. Eğrilerin parametrik gösterimini vermiş ve yüzeylerin eğriliği anlamını geliştirmiştir. Yüzeyler hakkında ilk kitabı ise 1975 yılında Monge yazmıştır. 1827 yılında Gauss, Yüzeylerin Eğrileri Hakkında Genel İncelemeler, adlı eserinde yüzeylerin dahili geometrisi problemi olduğunu göstermiştir. Aynı dönemde Lobachevskii, Euclidean geometrisinden başka diğer geometrilerinde olduğunu ispatlamıştır. Bundan sonra Riemann 1851 yılında şimdi Riemannian Geometri adı verilen geometriyi tanımlamıştır. Bu geometriler XIX. yüzyılın ikinci yarısında yoğun olarak gelişmiş, Mekanik ve Relativite teorisinde önemli uygulama alanları bulmuştur. Günümüzde bildiğimiz yöntemlerle çözülemeyen problemleri farklı bir yöntem kullanarak çözüp, bu çözümlerin bu yöntemdeki yorumlarını vermek çalışmalarda önemli yer tutar. Kullanılan bu yöntemlerden biri de, çözülemeyen problemlere farklı uzaylarda modeller aramaktır. Lorentz ve Hiperbolik uzaylar fiziksel olaylar için birer model olup, birçok fiziksel olay bu modellerle açıklanabilmektedir. Farklı uzaylardaki eğri ve yüzey çeşitleri mimari, geometrik dizayn gibi günlük yaşantımızla alakalı alanlara rehberlik edeceğinden bu tip yüzey çeşitlerinin önemi büyüktür. Bunu, mimarlık tarihinde önce Öklidyen, ortaçağda küresel ve yakın çağımızda hiperbolik eğrilerin kullanıldığı yapılardan görmek mümkündür.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Öklid Uzayda Temel Tanımlar

n-boyutlu Öklid uzayı için standart analitik model, n-boyutlu $\mathbb{R}^n$ reel vektör uzayı ile eşleşen $\mathbb{R}^n$ afin uzayıdır. $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Öklidyen iç çarpım non-dejenere, simetrik, bilineer ve pozitif tanımlıdır.

$\langle , \rangle$, V vektör uzayı üzerinde non-dejenere, simetrik, bilineer ve pozitif tanımlı bir iç çarpım olmak üzere $v \in V$ nin bu iç çarpıma göre normu

$$\|v\| = \langle v, v\rangle^{\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlı reel sayıdır[1] .

Tanım 2.1 *$x, y \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere iki vektör arasındaki Öklidyen uzaklık*

$$d_E(x, y) = \|x - y\|$$

şeklinde tanımlanır[1][2] .

Tanım 2.2 *$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlanan d_E metriğine Öklid metriği denir*[2] .

Tanım 2.3 *$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dönüşümünün bir ortogonal dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ için*

$$\langle \phi(x), \phi(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$

olmasıdır[1] .

Tanım 2.4 *$[a, b]$, $\mathbb{R}$ de kapalı bir aralık ve $a < b$ olmak üzere $\gamma : [a, b] \to X$ sürekli fonksiyonuna X metrik uzayında bir eğri denir.*

Eğer $X = E^n$ ise γ eğrisinin lineer olması için gerek ve yeter şart $\forall t \in [a, b]$ için

$$\gamma(a + t(b - a)) = \gamma(a) + t(\gamma(b) - \gamma(a))$$

olmasıdır[1] .

Tanım 2.5 *E^n in x, y, z gibi üç noktası için $y = x + t(z - x)$ olacak şekilde bir $t \in [0, 1]$ reel sayısı varsa bu üç noktaya doğrusaldır denir*[1] .

(X, d) bir metrik uzay olmak üzere aşağıdaki tanımları verebiliriz.

Tanım 2.6 *$[a, b]$, $\mathbb{R}$ de kapalı aralık ve $a < b$ olmak üzere;*

$$\alpha : [a, b] \to X$$

dönüşümü uzunluk koruyan sürekli fonksiyon ise α ya X metrik uzayında bir jeodezik eğri yayı denir.

Bu durumda jeodezik yayın başlangıç noktası $\alpha(a)$ ve bitiş noktası $\alpha(b)$ dir.[1]

Tanım 2.7 *$\forall x, y \in X$ ayrık çifti için x ve y yi içeren bir tek jeodezik parça varsa X'e jeodezik olarak konveks metrik uzay denir.*[1]

Tanım 2.8 *$\lambda : \mathbb{R} \to X$ dönüşümüne jeodezik doğru denir.*[1]

2.2 Hiperbolik Uzayda Temel Tanımlar

Aşağıda vereceğimiz tanımlarda $X = E^n, H^n$ olarak alınacaktır.

Tanım 2.9 *V bir reel vektör uzayı olsun. $g : V \times V \to \mathbb{R}$ dönüşümü bilineer ve simetrik ise g'ye V üzerinde simetrik bilineer form denir.*[3]

Tanım 2.10 *V vektör uzayı üzerinde $g : V \times V \to \mathbb{R}$ simetrik bilineer form ve W, V nin bir alt vektör uzayı olsun. Bu durumda $g_W : W \times W \to \mathbb{R}$ kısıtlaması negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W alt vektör uzayının boyutuna g' nin indeksi denir.*

Eğer indeks v ise $0 \leq v \leq boyV$ dir.

Ayrıca V nin indeksi, üzerinde tanımlı olan g'nin indeksi olarak tanımlanır.[3]

Tanım 2.11 *V reel vektör uzayı üzerinde tanımlı simetrik, bilineer, non-dejenere forma, V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım denir. Bu çarpım ile birlikte V vektör uzayına da skalar çarpım uzayı denir.*[3]

Tanım 2.12 *M bir diferensiyellenebilir manifold ve P, M nin altkümesi olsun. Eğer*

i) P, M nin manifold topolojisinin, alt topolojik uzayıdır,

ii) $j : P \to M$, $j(p) = p$ inclusion dönüşümü C^{∞} diferensiyellenebilir ve her bir $p \in P$ için $(d_j)_p : T_pP \to T_pM$ türev dönüşümü birebir dönüşümdür,

özellikleri sağlanıyorsa, P ye M nin bir altmanifoldu denir.[3]

Tanım 2.13 *M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\phi : M \to N$, C^{∞} diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer her bir $p \in M$ noktası için $(d\phi)_p : T_pM \to T_{\phi(p)}N$ dönüşümü birebir ise ϕ ye bir immersiyon (daldırma) denir.*

Eğer M, N nin altmanifoldu ise M ye N nin immersed (daldırılmış) altmanifoldu denir.[3]

Tanım 2.14 *M ve N, C^{∞} diferensiyellenebilir manifoldlar olsun.*

$\phi : M \to N$ birebir immersiyon ise ϕ ye bir embedding denir.

Eğer M, N nin altmanifoldu ise M ye N nin embedded altmanifoldu denir.[3]

Tanım 2.15 *M, C^{∞} diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde simetrik, nondejenere ve sabit indeksli $(0,2)$-tipinden g tensör alanına metrik tensör denir.*[3]

Tanım 2.16 *M, C^{∞} diferensiyellenebilir manifold ve g, M üzerinde bir sıfırdan farklı indekse sahip metrik tensör olmak üzere (M, g) ikilisine bir yarı-Riemann manifoldu denir.*[3]

Tanım 2.17 *M yarı-Riemann manifoldu üzerinde tanımlı g metrik tensörünün indeksine, M yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir.*[3]

Tanım 2.18 *M yarı-Riemann manifoldunun indeksi 1 ise M ye bir Lorentz Manifoldu denir.*[3]

Böylece n-boyutlu M Lorentz manifoldu üzerindeki metrik tensör,

$$g_p(v_p, w_p) = -v_1 w_1 + \sum_{i=2}^{n} v_i w_i,\ p \in M,\ v_p,\ w_p \in T_pM$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.19 *M bir yarı-Riemann manifoldu ve $\overline{M}$, M nin altmanifoldu olsun. $j : \overline{M} \to M$ inclusion dönüşümü olmak üzere her bir $p \in \overline{M}$ için,*

$$(j\,(g))\,(p) = g\,(j\,(p))$$

ile tanımlı $j\,(g)$ dönüşümü $\overline{M}$ üzerinde bir metrik tensör ise $\overline{M}$ ye M nin bir yarı-Riemann altmanifoldu denir.[3]

Tanım 2.20 *$\mathbb{R}_1^n$ Minkowski uzayında,*

$$H^n = \left\{x = (x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x\rangle = -1,\ x_1 \geq 1\right\}$$

kümesine n-boyutlu hiperbolik uzayın hiperboloidal (Minkowski) modeli denir.[1]

Tanım 2.21 *$2 \leq r < n$ için U, $\mathbb{R}^{n-r}$ nin bir açık altkümesi olmak üzere,*

$X : U \to \mathbb{R}_1^n$ immersiyonu ile belli olan $X\,(U) = M$, $\mathbb{R}_1^n$ nin $(n-r)$-altmanifoldu olsun.

Buna göre $p \in M$ noktasındaki M nin teğet uzayı T_pM olmak üzere,

i) T_pM, $\mathbb{R}_1^n$ nin spacelike altuzayı ise X e spacelike immersiyon ve M ye $\mathbb{R}_1^n$ nin spacelike $(n-r)$-altmanifoldu denir.

ii) T_pM, $\mathbb{R}_1^n$ nin timelike altuzayı ise X e timelike immersiyon ve M ye $\mathbb{R}_1^n$ nin timelike $(n-r)$-altmanifoldu denir.

iii) T_pM, $\mathbb{R}_1^n$ nin lightlike altuzayı ise X e lightlike immersiyon ve M ye $\mathbb{R}_1^n$ nin lightlike $(n-r)$-altmanifoldu denir.[1]

3. HİPERBOLİK GEOMETRİ

Hiperbolik geometrinin tarihçesi ile ilgili olarak burada verilenler, Felix Klein, Roberto Bonola ve Rosenfeld e dayanılarak oluşturulmuştur. Bu tarihçeye geçmeden önce Öklid'in beş temel postülatını vermekte fayda vardır. Çünkü Hiperbolik Geometrinin çıkışı bu beş temel postülattan beşincisine dayanmaktadır.

1. İki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer.
2. Bir doğru sınırsız bir şekilde uzatılabilir.
3. Merkezi ve yarıçapı verilen bir çember çizilebilir.
4. Bütün dik açılar eşittir.
5. Farklı iki doğruyu kesen bir doğru bu iki doğru ile aynı tarafta eş açılar oluşturursa iki doğru veya bunların uzantıları birbirini kesmez. Bir başka deyişle uzantıları birbirini keserse aynı tarafta oluşan açıların toplamı 180° den küçüktür.

Bu postülatların beşincisinin oldukça karmaşık bir yapıya sahip olduğu düşünülmüştür. İlk dört postülat verildiği zaman, beşincisinin aşağıda verilen paralellik postülatına denk olduğu kolaylıkla görülmektedir. Beşinci postülat yerine sık sık paralellik postülatı da kullanılmaktadır.

Paralellik postülatı: Düzlemde bir nokta ve bu noktayı üzerinde bulundurmayan bir doğru verildiği zaman, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel olan bir tek doğru vardır.

İki bin yıldan beri matematikçiler ilk dört postülattan beşinci postülatı elde etmeye çalışmışlardır. Her bir durum için ilave postülatlar yaparak beşinci postülata ulaşmaya çalışmışlar, her bir durumda da bu postülatların gerçekte bunların beşinci postülata denk olduğu sonucuna varmışlardır.

İlk defa orjinali 1533 de Basle de, daha sonra Barozzi tarafından Latince olarak Padua da basılan Proclus'un eserinde ilave postülat olarak, bir doğru verildiğinde bir tarafındaki sabit uzaklıktaki noktaların bir doğru teşkil ettiği kabulünü kullandığı görülmüştür.

Bir ingiliz matematikçisi olan John Wallis (1616-1703), her üçgene verilen ölçülerde benzer bir üçgenin var olduğu kabulünü kullanmıştır. Daha genel anlamıyla keyfi büyüklükteki her figüre benzer figürler vardır demiştir. Wallis'in bu fikri ünlü bir Türk matematikçisi olan Nasirüddin Tusi'ye dayanmaktadır.

İtalyan matematikçisi Girolamo Saccheri (1667-1733) iki açısı 90° olan dörtgenleri göz önüne almıştır. O bu dörtgenlerde iki düşey doğrunun eşit uzunluğa sahip olduğunu düşünerek geriye kalan iki açının 90° den küçük olabileceğinin mümkün (non-Öklidyen hal) olduğu sonucuna varmıştır.

Johann Heinrich Lambert (1728-1777) benzer konuda ilerlemiş ve bunu daha da genişletmeye çalışmıştır.

Göttingen matematikçisi olan Kastner (1719-1800) ise öğrencisi Klügel'in (1739-1812) tezinde paralellik postülatına otuz farklı şekilde yaklaşmaya çalışmıştır.

19. yüzyılda bu konu üzerine oldukça yoğun çalışmalar yapılmış, beşinci postülatı değişik bir açıdan incelemeye çalışmışlar ve sonuçta aşağıdaki postülata ulaşmışlardır.

Düzlemde bir doğru ve üzerinde olmayan bir nokta verildiğinde, bu noktadan geçen ve verilen doğruya paralel birden çok doğru geçer.

Bu postülat Öklidyen Geometrideki paralellik postülatı gibi hiperbolik geometri veya non-Öklidyen geometrinin temelini oluşturmuştur.

Bu değişimin alışılmadık neticeleri non-Öklidyen geometrinin sürpriz özellikleri ve temelleri olarak tanımlanmıştır. Örneğin; bir üçgende iç açıların toplamı 180° değildir, veya bir doğrunun her iki tarafındaki eşit uzaklıktaki noktaların kümesi gerçekte bir doğru değil eğri teşkil ederler vs.

Hiperbolik geometrinin tarihinde üç profesyonel ikide amatör matematikçi önemli rol oynamıştır. Amatör matematikçiler Schweikart (1780-1859) ve onun yeğeni Taurinus'tur (1799-1874). 1816 ya kadar Schweikart beşinci postülattan bağımsız olarak bir "Astral Geometry" adıyla bir geometri geliştirmiştir. Yapmış olduğu çalışmaları bastırmamıştır. Yeğeni Taurinus ise 1824 yılında bir Hiperbolik Geometri elde etmiştir.

Profesyonel matematikçiler ise Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Nikolai İvanoviç Lobachevskii (1793-1856) ve Janos Bolyai (1802-1860) dir. Gauss'un kendi malikanesindeki çalışmalarından anlaşılmaktadır ki, gençlik yıllarında paralellik postülatını ele almış ve 1817 yılında non-Öklidyen geometrinin basit bir ifadesini vermiştir. O verdiği bu ifade de bazı karşılaştırmalar yapmış ve bildiklerini küçük yorumlarla vermiştir. Janos Bolyai nin babası Farkas Wolfgang (1775-1856), Gauss'un öğrencilikten arkadaşıydı ve hayatı boyunca onunla birlikteydi. Farkas da hayatının büyük bir bölümünü paralellik postülatını ispatlamaya vakfetti fakat başaramadı. Onun çalışmalarını bıraktığı yerden oğlu azimli bir şekilde devam ederek 1823'de Hiperbolik Geometrinin temelini oluşturdu. Bolyai'nin yaptığı çalışmalar babasının yazdığı kitabın sonuna ilave edilerek 1832-1833 de yayınlanmıştır. Lobachevskii'de non-Öklidyen Geometriyi geniş bir şekilde ele almış ve onun çalışmaları da 1829'da yayınlanmıştır.

Gauss, Bolyai ve Lobachevskii non-Öklidyen geometriyi bir sentetik baz üzerinde aksiyomatik olarak geliştirmiş, bu geometrinin ne analitik anlamına ne de analitik modellerine bakmamışlardır. Bu matematikçiler kendi geometrilerinin tutarlılığını ispatlama yoluna gitmemişler, non-Öklidyen geometride geniş irdelemeler

yaparak hükümler vermişlerdir. Yaptıkları çalışmaların tutarlılığı daha sonraki tarihlerde keşfedilmiştir. Lobachevskii Öklidyen geometrinin trigonometrik formüllerine dayanarak bir non-Öklidyen trigonometri geliştirmiştir. Hiperbolik non-Öklidyen geometrinin analitik çalışılmasına esas gereksinim Euler, Gaspard Monge ve Gauss'un eğrisel yüzeyler üzerine yapmış olduğu çalışmalarda ortaya çıkmıştır.
1837'de Lobachevskii, sabit negatif eğrilikli eğrisel yüzeylerin non-Öklidyen Geometride temsil edilebilirliğini önermiş, iki yıl sonra yapılan çalışma yayınlanmış ve bu çalışma sabit eğrilikli yüzeyler üzerine geniş bir çalışma alanı oluşturmuştur. Bu nedenle, literatürde Hiperbolik uzayın bir diğer ismi ise Lobachevskii uzayı olarak adlandırılır.

Bernhard Riemann(1826-1866), yüzeylerin oldukça geniş bir genellemesini yapmıştır. Bu ise günümüzde Riemann Manifoldları olarak adlandırılmaktadır. Riemann'ın bu çalışmaları bir sıçrama tahtası olmuştur. Yapılar arasındaki bağıntılar Eugenio Beltrami tarafından 1868'de açık bir şekilde ortaya konmuştur. Öklideyen Geometri ne kadar tutarlı ise non-Öklidyen Geometrinin de o kadar tutarlı olduğunun anlaşılması üzerine, non-Öklidyen geometri için analitik modeller kurularak çalışmalar yapılmıştır. Bu modellerin konformal üç tanesi Henri Poincare nin adıyla anılır. Poincare modelleri verirken komplex değerleri kullanmıştır.

Hiperbolik geometri üç temel konuda ilerleme kaydetmiştir.

i) Komplex değişkenler ve konformal dönüşümler: Poincare'nin Hiperbolik uzay tanımının temelini oluşturur.

ii) Topoloji: Özellikle Thurston'un 3-manifoldların geometrizasyonun yapılandırılması

iii) Grup teori: Gramov'un kombinatoryal grup teorisi

Esasen hiperbolik geometri bu üç konunun merkezinde yer almaktadır. Hiperbolik uzayın beş temel modeli ve bunlar arasındaki izometrik geçişler verilerek bu modellerden sadece Hiperboloidal model, bu tezde Hiperbolik uzay olarak alınmış ve çalışmalar bu model üzerinde yapılandırılmıştır.

3.1 Lorentz Uzayı

Bu bölüm boyunca $n > 1$ olduğu kabul edilecektir.

Tanım 3.1 *x ve y, $\mathbb{R}^n$ de iki vektör olsun. x ve y nin Lorentz iç çarpımı*

$$x \circ y = -x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$$

reel sayısı olarak tanımlanır. Lorentz iç çarpımı ile birlikte $\mathbb{R}^n$ vektör uzayını içeren iç çarpım uzayına n-boyutlu Lorentz uzayı denir ve $\mathbb{R}^n_1$ ile gösterilir.

Bazen $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lorentz iç çarpım yerine

$$\langle x, y\rangle_L = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_{n-1}y_{n-1} - x_ny_n \tag{3.1}$$

şeklinde bir iç çarpım kullanılır. Yeni iç çarpım ile birlikte $\mathbb{R}^n$ i içeren iç çarpım uzayına da n-boyutlu Lorentz uzayı denir. Bu bölümde (3.1) iç çarpımını kullanacağız.

Tanım 3.2 *$x \in \mathbb{R}^n_1$ olsun. x vektörünün Lorentz normu (uzunluğu)*

$$\|x\| = (x \circ x)^{\frac{1}{2}} \tag{3.2}$$

kompleks sayısı olarak tanımlanır.

Tanım 3.3 *$\mathbb{R}^n_1$ Lorentz uzayında*

$$C^{n-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^n_1 \mid x_1^2 = x_2^2 + ... + x_n^2\right\}$$

kümesine ışık konisi (light koni) denir. $x \circ x = 0$ ise x vektörüne ışık benzeri (lightlike veya null) vektör denir.[1]

Tanım 3.4 *$x \in \mathbb{R}^n_1$ olsun. $x \circ x > 0$ ise x vektörüne uzay benzeri (spacelike) vektör denir.*

C^{n-1} hiperkonisinin dışı, $\mathbb{R}^n_1$ uzayının spacelike vektörlerinden oluşan açık alt kümesidir.

Tanım 3.5 *$x \in \mathbb{R}^n_1$ olsun. $x \circ x < 0$ ise x vektörüne zaman benzeri (timelike) vektör denir.*

C^{n-1} hiperkonisinin içi, $\mathbb{R}^n_1$ uzayının timelike vektörlerinden oluşan açık alt kümesidir. Eğer $x_1 > 0$ ise x vektörüne pozitif timelike vektör, $x_1 < 0$ ise x vektörüne negatif timelike vektör denir.

Uyarı 3.1 *$\mathbb{R}^{n-1}_1$ deki bir $\overline{x}$ vektörü*

$$\overline{x} = (x_2, x_3, ..., x_n) \tag{3.3}$$

ile tanımlanır. O halde

$$\|x\|^2 = -x_1^2 + |\overline{x}|^2 \tag{3.4}$$

şeklindedir. x*,*$y \in \mathbb{R}_1^n$ *iki vektör olmak üzere*

$$x \circ y = -x_1 y_1 + \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle \tag{3.5}$$

şeklinde yazılabilir.

Teorem 3.1 *x ve y , $\mathbb{R}^n$ de sıfırdan farklı spacelike olmayan iki vektör olsun. O halde $x \circ y \leq 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul x ve y nin lineer bağımsız iki lightlike vektör olmasıdır.*

İspat. Kabul edelim ki x ve y nin her ikiside pozitif olsun. O halde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $\overline{x} = (x_2, x_3, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $\overline{y} = (y_2, y_3, ..., y_n)$ olmak üzere

$$\|x\|^2 = -x_1^2 + |\overline{x}|^2$$

olmak üzere

$$x_1^2 + \|x\|^2 = |\overline{x}|^2$$

ve benzer şekilde

$$\|y\|^2 = -y_1^2 + |\overline{y}|^2$$

olmak üzere

$$y_1^2 + \|y\|^2 = |\overline{y}|^2$$

yazılabilir ve ayrıca x, y pozitif vektörler olduğundan $x_1 > 0$, $y_1 > 0$ olmak üzere

$$x_1 \geq |\overline{x}| \text{ ve } y_1 \geq |\overline{y}|$$

olur. Dolayısıyla

$$x_1 y_1 \geq |\overline{x}| \, |\overline{y}| \geq \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul

$$x_1 = |\overline{x}| \text{ ve } y_1 = |\overline{y}| \text{ ve } \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle = |\overline{x}| \, |\overline{y}|$$

olmasıdır. Öte yandan bir V reel vektör uzayı üzerinde $v, w \in V$ için

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \, \|w\|$$

eşitsizliği sağlanır ve özel olarak $|\langle v, w \rangle| = \|v\| \, \|w\|$ olması için gerekli ve yeterli koşul v ve w nın lineer bağımlı olmasıdır.

Bu yüzden

$$x \circ y = -x_1 y_1 + \langle \overline{x}, \overline{y} \rangle \leq 0$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul x ve y vektörlerinin lineer bağımsız lightlike vektörler olmasıdır. ■

Teorem 3.2 *Eğer x ve y, $\mathbb{R}^n$ de sıfırdan farklı spacelike olmayan, aynı causal karaktere sahip vektörler ve $t > 0$ ise o halde*
a. tx vektörü de x ile aynı causal karakterli ve benzerdir.
b. $x + y$ vektörü de x ve y ile aynı causal karaktere sahip spacelike olmayan vektördür. Ayrıca $x + y$ vektörünün lightlike olması için gerekli ve yeterli koşul x ve y nin lineer bağımsız lightlike vektörler olmasıdır.

Sonuç 3.1 *Tüm pozitif (negatif) timelike vektörlerin kümesi $\mathbb{R}^n$ in bir konveks alt kümesidir.*

Tanım 3.6 *$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ bir fonksiyon olsun. ϕ fonksiyonunun bir lorentz dönüşüm olması için gerekli ve yeterli koşul*

$$\phi(x) \circ \phi(y) = x \circ y,\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

olmasıdır. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ in $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ tabanının Lorentz ortonormal olması için gerekli ve yeterli koşul $v_1 \circ v_1 = -1$ ve $v_i \circ v_j = \delta_{ij}$ olmasıdır. Not edelim ki $\mathbb{R}^n$ in $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ standart tabanı Lorentz ortonormaldir.

Teorem 3.3 *Bir $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunun Lorentz dönüşümü olması için gerekli ve yeterli koşul ϕ dönüşümünün lineer ve $\{\phi(e_1), ..., \phi(e_n)\}$ kümesinin $\mathbb{R}^n$ in Lorentz ortonormal tabanı olmasıdır.*
İspat. *Kabul edelim ki ϕ, $\mathbb{R}^n$ in bir Lorentz dönüşümü olsun. O halde Lorentz dönüşümünün tanımı gereği*

$$\phi(e_1) \circ \phi(e_1) = e_1 \circ e_1 = -1$$

ve

$$\phi(e_i) \circ \phi(e_j) = e_i \circ e_j = \delta_{ij}$$

şeklindedir. Öte yandan lorentz ortonormal tabanın tanımı gereği $\{\phi(e_1), ..., \phi(e_n)\}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ in bir lorentz ortonormal tabanı olur.

$x \in \mathbb{R}^n$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_{i=1}^{n} c_i \phi(e_i) \\ &= c_1\phi(e_1) + c_2\phi(e_2) + ... + c_n\phi(e_n) \end{aligned}$$

olacak şekilde $c_i \in \mathbb{R}$ katsayılar vardır. $\{\phi(e_1), ..., \phi(e_n)\}$ lorentz ortonormal bir taban olduğundan

$$-c_1 = \phi(x) \circ \phi(e_1) = x \circ e_1 = -x_1$$

ve

$$c_j = \phi(x) \circ \phi(e_j) = x \circ e_j = x_j,\ j > 1$$

yazılabilir.

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i)$$

olduğundan ϕ lineerdir.

Tersine olarak kabul edelim ki ϕ lineer ve $\{\phi(e_1), ..., \phi(e_n)\}$ $\mathbb{R}^n$ in lorentz ortonormal tabanı olsun. O halde

$$\begin{aligned}
\phi(x) \circ \phi(y) &= \phi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) \circ \phi\left(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \phi(e_i)\right) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \phi(e_j)\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \phi(e_i) \circ \phi(e_j) \\
&= -x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n \\
&= x \circ y
\end{aligned}$$

olduğundan ϕ bir lorentz dönüşümüdür. ■

$n \times n$ tipindeki bir A reel matrisinin lorentziyon olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\begin{aligned}
A:\ & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\
& x \mapsto A(x) = Ax
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlı lineer dönüşümün Lorentziyon dönüşüm olmasıdır. Matrislerdeki çarpma işlemi ile birlikte tüm $n \times n$ tipindeki Lorentz matrislerin kümesi $O(1, n-1)$ şeklinde bir grup oluşturur. Bu $O(1, n-1)$ grubuna $n \times n$ tipindeki matrislerin Lorentz grubu adı verilir. Teorem 3.3 den $O(1, n-1)$ grubu, $\mathbb{R}^n$ in Lorentz dönüşümlerinin grubuna izomorfiktir. Aşağıdaki teorem Teorem 3.3 den açıktır.

Teorem 3.4 *A, $n \times n$ tipinde bir reel matris ve J, $n \times n$ tipinde $J = \operatorname{diag}(-1, 1, ..., 1)$ şeklinde tanımlı diagonal matris olsun. O halde aşağıdakiler denktir.*

a. A matrisi Lorentziandır.

b. A matrisinin sütunları, $\mathbb{R}^n$ in bir Lorentz ortonormal tabanını oluşturur.

c. A matrisi $A^t J A = J$ denklemini sağlar.

d. A matrisi $AJA^t = J$ denklemini sağlar.

e. A matrisinin satırları, $\mathbb{R}^n$ in bir Lorentz ortonormal tabanını oluşturur.

A bir Lorentz matris olsun. $A^tJA = J$ olduğundan $(\det A)^2 = 1$ olur. Böylece $(\det A) = \pm 1$ dir. $SO\,(1, n-1)$, $\det A = 1$ olacak şekildeki $O\,(1, n-1)$ grubundaki tüm A matrislerinin kümesi olsun. O halde $SO\,(1, n-1)$, $O\,(1, n-1)$ de indeksi iki olan bir alt gruptur. Bu $SO\,(1, n-1)$ grubuna özel Lorentz grubu denir.

Sonuç 3.1 den $\mathbb{R}^n$ deki tüm timelike vektörlerin kümesi, pozitif timelike vektörlerin kümesi ve negatif timelike vektörlerin kümesi olmak üzere iki bağlantılı bileşenlere sahiptir. Bir A Lorentz matrsinin pozitif(negatif) olması için gerekli ve yeterli koşul A matrisinin pozitif timelike vektörleri pozitif(negatif) timelike vektörlere dönüştürmesidir. Örneğin J matrisi negatiftir. Bir Lorentz matris ya pozitiftir ya da negatiftir.

$PO\,(1, n-1)$, $O\,(1, n-1)$ deki tüm pozitif matrislerin kümesi olsun. O halde $PO\,(1, n-1)$, $O\,(1, n-1)$ de indeksi iki olan bir alt gruptur. $PO\,(1, n-1)$ pozitif matrisler grubuna pozitif Lorentz grup denir. Benzer şekilde $PSO\,(1, n-1)$, $SO\,(1, n-1)$ de tüm pozitif matrislerin kümesi olsun. O halde $PSO\,(1, n-1)$, $SO\,(1, n-1)$ de iki indeksli bir alt gruptur. Bu $PSO\,(1, n-1)$ grubuna pozitif özel Lorentz grup denir.

Tanım 3.7 *x,$y \in \mathbb{R}^n$ vektörlerinin Lorentz ortogonal olması için gerekli ve yeterli koşul $x \circ y = 0$ olmasıdır.*

Teorem 3.5 *x ve y , $\mathbb{R}^n$ de sıfırdan farklı Lorentz ortogonal vektörler olsun. Eğer x timelike ise o halde y spacelike bir vektördür.*

Tanım 3.8 *V, $\mathbb{R}^n$ nin bir alt vektör uzayı olsun.*

a. V uzayının timelike alt uzay olması için gerekli ve yeterli koşul V uzayının bir timelike vektöre sahip olmasıdır.

b. V uzayının spacelike alt uzay olması için gerekli ve yeterli koşul V deki sıfırdan farklı her vektörün spacelike olmasıdır.

c. Diğer durumlarda V lightlikedır.

Teorem 3.6 *Her bir m boyut için, $\mathbb{R}^n$ in m-boyutlu timelike alt vektör uzaylarının üzerinde $PO\,(1, n-1)$ in doğal hareketi geçişlidir.*

Teorem 3.7 *x ve y, $\mathbb{R}^n$ de pozitif (negatif) timelike vektörler olsun. O halde*

$$x \circ y \leq \|x\| \, \|y\|$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşul x ve y nin lineer bağımsız olmasıdır.

Tanım 3.9 *(Timelike Vektörler Arasındaki Timelike Açı) x ve y , $\mathbb{R}^n$ de pozitif(negatif) timelike vektörler olsunlar. Teorem 3.1.7 den*

$$x \circ y = \|x\| \, \|y\| \cosh \eta \left(x, y\right) \tag{3.6}$$

olacak şekilde negatif olmayan bir tek $\eta \left(x, y\right)$ reel sayısı vardır. Bu $\eta \left(x, y\right)$ reel sayısına x ve y arasındaki Lorentz timelike açı denir.

Burada $\eta \left(x, y\right) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul x ve y den birinin diğerinin pozitif skaler katı olmasıdır.

3.2 Hiperbolik Uzay

$\mathbb{R}^{n+1}$ de r yarıçaplı bir küre $\dfrac{1}{r^2}$ sabit eğrilikli ve hiperbolik n-uzay sabit negatif eğriliğe sahip olduğu için küresel ve hiperbolik geometriler benzerlik gösterir ve hiperbolik n-uzay sanal yapıçaplı bir küre olmalıdır. Lorentz $(n+1)$-uzayda sanal uzunluklar mümkün olduğu için hiperbolik n-uzay için bizim modelimiz

$$F^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|^2 = -1 \right\}$$

şeklinde tanımlı birim sanal yarıçaplı küredir. Tek problem şudur ki F^n kümesi bağlantılı değildir. F^n kümesi

$$x_1^2 - |\overline{x}|^2 = 1$$

denklemi ile tanımlı bir çift kanatlı hiperboloiddir. F^n kümesinde $x_1 > 0$ olacak şekildeki tüm x lerin kümesine F^n in pozitif kanadı, $x_1 < 0$ olacak şekildeki tüm x lerin kümesine F^n in negatif kanadı denir.

Tanım 3.10 *F^n in pozitif kanadına hiperbolik n-uzayın H^n hiperboloidal modeli denir.*

Tanım 3.11 *x,$y \in H^n$ ve $\mu \left(x, y\right)$, x ve y arasındaki Lorentz timelike açı olsun. x ve y arasındaki hiperbolik uzunluk*

$$d_H = \mu \left(x, y\right) \tag{3.7}$$

reel sayısı olarak tanımlanır.

$$x \circ y = \|x\| \, \|y\| \cosh \mu \,(x, y)$$

olduğu için

$$\cosh d_H \,(x, y) = -x \circ y \tag{3.8}$$

denklemine sahip oluruz.

d_H, H^n üzerinde metriktir ve bu ileride gösterilecektir. Fakat ilk önce $\mathbb{R}^3$ deki vektörel çarpımla alakalı bazı önemli sonuçları verelim.

Tanım 3.12 *(Lorentz Vektörel Çarpım) x,y $\in \mathbb{R}^3$ ve*

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

olsun. x ve y nin Lorentz vektörel çarpımı

$$x \otimes y = J \,(x \times y) \tag{3.10}$$

olarak tanımlanır.

Açıktır ki

$$\begin{aligned} x \circ (x \otimes y) \quad &= x \circ J \,(x \times y) \quad &= \langle x, (x \times y) \rangle = 0 \\ y \circ (x \otimes y) \quad &= y \circ J \,(x \times y) \quad &= \langle y, (x \times y) \rangle = 0 \end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla $x \otimes y$, hem x hem y ye Lorentz ortogonaldir.

Aşağıdaki teorem

$$x \otimes y = J\,(y) \times J\,(x)$$

özdeşliği yardımıyla kolaylıkla gösterilebilir.

Teorem 3.8 *w,x,y,z $\in \mathbb{R}^3$ vektörleri verilsin.*

a. $x \otimes y = -y \otimes x$

b. $(x \otimes y) \circ z = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$

c. $x \times (y \otimes z) = (x \circ y)\, z - (z \circ x)\, y$

d. $(x \otimes y) \circ (z \otimes w) = \begin{vmatrix} x \circ w & x \circ z \\ y \circ w & y \circ z \end{vmatrix}$

Sonuç 3.2 *Eğer x ve y; $\mathbb{R}^3$ de lineer bağımsız pozitif (negatif) timelike vektörler ise o halde $x \otimes y$ spacelikedir ve*

$$\|x \otimes y\| = -\|x\| \|y\| \sinh \mu (x, y)$$

dir.

İspat. Teorem 3.8 in dördüncü özelliğinden

$$\begin{aligned} \|x \otimes y\|^2 &= (x \circ y)^2 - \|x\|^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 \cosh^2 \mu (x, y) - \|x\|^2 \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 \|y\|^2 \left(\cosh^2 \mu (x, y) - 1\right) \end{aligned}$$

ve buradan da

$$\|x \otimes y\| = -\|x\| \|y\| \sinh \mu (x, y)$$

elde edilir. ■

Sonuç 3.3 *Eğer x ve y, $\mathbb{R}^3$ de spacelike vektörler ise o halde*

a. $|x \circ y| < \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x \otimes y$ *timelikedir.*

b. $|x \circ y| = \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x \otimes y$ *lightlikedir.*

c. $|x \circ y| > \|x\| \|y\| \Leftrightarrow x \otimes y$ *spacelikedir.*

Teorem 3.9 *d_H hiperbolik uzaklık fonksiyonu H^n üzerinde bir metriktir.*

İspat. *d_H fonksiyonu açıktır ki Teorem 3.7 ile negatif olmayan, simetrik ve nondejeneredir. İspat için sadece*

$$d_H (x, z) \leq d_H (x, y) + d_H (y, z)$$

üçgen eşitsizliğini göstermemiz yeterlidir.

$\mathbb{R}^{n+1}$ in pozitif Lorentz dönüşümleri H^n üzerinde hareket eder ve açıktır ki hiperbolik uzunlukları korur. Şimdi x,y,z vektörleri $\mathbb{R}^{n+1}$ in en fazla üç boyutlu bir alt vektör uzayının tabanı olsun. Teorem 3.6 dan kabul edebiliriz ki x,y,z e_1,e_2,e_3 ile gerilen $\mathbb{R}^{n+1}$ in alt uzayında olsunlar. Diğer taraftan kabul edebiliriz ki $n = 2$ dir. Sonuç 3.2 den

$$\|x \otimes y\| = \sinh \mu (x, y) \;\; \textit{ve} \;\; \|y \otimes z\| = \sinh \mu (y, z)$$

dir. y vektörü hem $x \otimes y$ hem de $y \otimes z$ ye Lorentz ortogonal olduğundan y ve $(x \otimes y) \otimes (y \otimes z)$ vektörleri lineer bağımlıdır. Bu yüzden ya sıfır ya da timelikedir. Sonuç 3.3 den

$$|(x \otimes y) \circ (y \otimes z)| \leq \|x \otimes y\| \|y \otimes z\|$$

olur.

$$\begin{aligned}
\cosh\left(\mu\left(x,y\right)+\mu\left(y,z\right)\right) &= \cosh\mu\left(x,y\right)\cosh\mu\left(y,z\right)+\sinh\mu\left(x,y\right)\sinh\mu\left(y,z\right) \\
&= \left(x\circ y\right)\left(y\circ z\right)+\left\|x\otimes y\right\|\left\|y\otimes z\right\| \\
&\geq \left(x\circ y\right)\left(y\circ z\right)+\left(x\otimes y\right)\circ\left(y\otimes z\right) \\
&= \left(x\circ y\right)\left(y\circ z\right)+\left(\left(x\circ z\right)\left(y\circ y\right)-\left(x\circ y\right)\left(y\circ z\right)\right) \\
&= -x\circ z \\
&= \cosh\mu\left(x,z\right)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\mu\left(x,z\right)\leq\mu\left(x,y\right)+\mu\left(y,z\right)$$

elde edilir. ■

H^n üzerindeki d_H metriğine Hiperbolik metrik denir. d_H ile tanımlanan H^n in metrik topolojisi, H^n üzerinde d_E Öklid metriği ile belirlenen metrik topoloji ile aynıdır. Burada

$$d_E\left(x,y\right)=\left|x-y\right| \tag{3.11}$$

dir. d_H metriği ile birlikte H^n metrik uzayına Hiperbolik n-uzay denir. Dolayısıyla Hiperbolik n-uzay H^n ile gösterilir.

$H^n\rightarrow H^n$ şeklinde tanımlı bir izometriye Hiperbolik izometri denir.

Teorem 3.10 *$\mathbb{R}^{n+1}$ in her pozitif Lorentz dönüşümü, H^n in bir izometrisine kısıtlanabilir ve H^n in her izometrisi $\mathbb{R}^{n+1}$ in bir tek pozitif Lorentz dönüşümüne genişletilir.*

Sonuç 3.4 *$I\left(H^n\right)$ Hiperbolik izometrilerin grubu $PO\left(1,n\right)$ pozitif Lorentz grubuna izomorfiktir.*

Tanım 3.13 *H^n ile $\mathbb{R}^{n+1}$ in 2-boyutlu timelike altvektör uzayının arakesitine H^n in bir hiperbolik doğrusu denir.*

x ve y, H^n in farklı noktaları olsun. O halde x ve y, $\mathbb{R}^{n+1}$ in iki boyutlu bir timelike $V\left(x,y\right)$ alt uzayını gerer ve böylece

$$L\left(x,y\right)=H^n\cap V\left(x,y\right)$$

hem x hemde y yi içeren H^n in tek hiperbolik doğrusudur. Ayrıca $L\left(x,y\right)$ hiperbolün bir dalıdır.

Tanım 3.14 *x,y,$z\in H^n$ noktalarının hiperbolik olarak doğrusal olması için gerekli ve yeterli koşul H^n in x,y,z noktalarını içeren bir L hiperbolik doğrusunun olmasıdır.*

Lemma 3.1 *Eğer* x,y,z $\in H^n$ *ve* $\mu(x,y) + \mu(y,z) = \mu(x,z)$ *ise o halde* x,y,z *hiperbolik olarak doğrusaldır.*

Tanım 3.15 x,y $\in \mathbb{R}^{n+1}$ *vektörlerinin Lorentz ortonormal olması için gerekli ve yeterli koşul*

$$\|x\|^2 = -1, x \circ y = 0$$

ve

$$\|y\|^2 = 1$$

olmasıdır.

Teorem 3.11 $\alpha : [a,b] \to H^n$ *bir eğri olsun. Aşağıdakiler denktir.*

a. α*-eğrisi bir jeodezik yaydır.*

b. $\alpha(t) = [\cosh(t-a)]\, x + [\sinh(t-a)]\, y$ *olacak şekilde* $\mathbb{R}^{n+1}$ *de Lorentz ortogonal* x,y *vektörleri vardır.*

c. α*-eğrisi* $\alpha'' - \alpha = 0$ *diferansiyel denklemini sağlar.*

Teorem 3.12 $\lambda : \mathbb{R} \to H^n$ *fonksiyonunun bir jeodezik doğru olması için gerekli ve yeterli koşul* $\lambda(t) = (\cosh t)\, x + (\sinh t)\, y$ *olacak şekilde* $\mathbb{R}^{n+1}$ *de* x *ve* y *Lorentz ortonormal vektörlerinin olmasıdır.*

İspat. Kabul edelim ki $\lambda(t) = (\cosh t)\, x + (\sinh t)\, y$ olacak şekilde $\mathbb{R}^{n+1}$ de x ve y Lorentz ortogonal vektörleri var olsun. Bu durumda $\lambda(t)$, $\lambda'' - \lambda = 0$ diferansiyel denklemini sağlar. O halde $a < b$ olmak üzere λ nın herhangi $[a,b]$ aralığına kısıtlanması Teorem 3.11 den bir jeodezik yay olur. Böylece λ bir jeodezik doğrudur.

Tersine olarak kabul edelim ki λ bir jeodezik doğru olsun. Teorem 3.11 den λ fonksiyonu $\lambda'' - \lambda = 0$ diferansiyel denklemini sağlar. Sonuç olarak

$$\lambda(t) = (\cosh t)\, \lambda(0) + (\sinh t)\, \lambda'(0)$$

dır. Teorem 3.11 in ispatında olduğu gibi $\lambda(0)$ ve $\lambda'(0)$ Lorentz ortonormaldir. ■

Sonuç 3.5 H^n *in jeodezikleri onun hiperbolik doğrularıdır.*

İspat. Teorem 3.11 den H^n in her geodeziği bir hiperbolik doğrudur. Tersine olarak L, H^n in bir hiperbolik doğrusu olsun. Teorem 3.6 dan kabul edelim ki $n = 1$ olsun. Yani $L = H'$ dir. $\lambda : \mathbb{R} \to H'$, $\lambda(t) = (\cosh t)\, e_1 + (\sinh t)\, e_2$ tanımlayalım. O halde λ, H' üzerinde bir jeodezik doğru dönüşümüdür. Böylece L bir jeodeziktir. ■

Tanım 3.16 $\mathbb{R}^{n+1}$ *in* $(m+1)$*-boyutlu timelike alt vektör uzayı ile* H^n *in arakesitine* H^n *in hiperbolik* m*-düzlemi denir.*

Ayrıca H^n *in hiperbolik* 1*-düzlemi* H^n *in hiperbolik doğrusudur.* H^n *in hiperbolik* $(n-1)$*-düzlemine* H^n *in hiperdüzlemi denir.*

$x \in \mathbb{R}^{n+1}$ *spacelike bir vektör olsun.* x *tarafından üretilen* $\langle x \rangle$ *alt vektör uzayının Lorentz bileşeni* $\mathbb{R}^{n+1}$ *in* n*-boyutlu timelike alt vektör uzayıdır. Dolayısıyla*

$$P = \langle x \rangle^{L} \cap H^n$$

H^n *in bir hiperdüzlemidir. Bu* P *hiperdüzlemine* x*-e Lorentz ortogonal olan* H^n *in hiperdüzlemi denir.*

Teorem 3.13 x *ve* y*,* $\mathbb{R}^{n+1}$ *de lineer bağımsız spacelike vektörler olsun. Aşağıdakiler denktir.*

a. x *ve* y *vektörleri* $|x \circ y| < \|x\| \|y\|$ *denklemini sağlar.*

b. x *ve* y *tarafından üretilen* V *alt vektör uzayı spacelikedir.*

c. H^n *in sırasıyla* x *ve* y *ye Lorentz ortogonal olan* P *ve* Q *hiperdüzlemleri kesişirler.*

Tanım 3.17 *(Spacelike Vektörler Arasındaki Spacelike Açı)* x *ve* y*, spacelike bir alt vektör uzayını geren,* $\mathbb{R}^{n+1}$ *de spacelike vektörler olsun. O halde Teorem 3.13 den*

$$|x \circ y| \leq \|x\| \|y\|$$

eşitsizliğine sahip oluruz. x *ve* y *lineer bağımlı olursa eşitlik durumu da gerçeklenir. Dolayısıyla*

$$x \circ y = \|x\| \|y\| \cos \mu(x, y) \tag{3.12}$$

olacak şekilde bir tek $0 < \mu(x,y) < \pi$ *koşulunu sağlayan* $\mu(x,y)$ *reel sayısı vardır. Bu* $\mu(x,y)$ *sayısına* x *ve* y *arasındaki Lorentz spacelike açı denir.*

Ayrıca $\mu(x,y) = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul x ve y den birinin diğerinin pozitif skaler katı olmasıdır. $\mu(x,y) = \dfrac{\pi}{2}$ olması için gerekli ve yeterli koşul x ve y nin Lorentz ortogonal olmasıdır. $\mu(x,y) = \pi$ olması için gerekli ve yeterli koşul x ve y den biri diğerinin negatif skaler katı olmasıdır.

$\lambda : \mathbb{R} \to H^n$, $\mu : \mathbb{R} \to H^n$, $\lambda(0) = \mu(0)$ olacak şekilde jeodezik doğrular ve $\mu'(0)$, $\mathbb{R}^{n+1}$ in bir spacelike alt vektör uzayını gersin. λ ve μ arasındaki hiperbolik açı $\lambda'(0)$ ve $\mu'(0)$ arasındaki Lorentz spacelike açı olarak tanımlanır.

P, H^n in bir hiperdüzlemi ve $\lambda : \mathbb{R} \to H^n$, $\lambda(0) \in P$ olacak şekilde bir jeodezik doğru olsun. O halde $L = \lambda(\mathbb{R})$ hiperbolik doğrusunun P ye Lorentz ortogonal olması için gerekli ve yeterli koşul P nin $\lambda^{'}(0)$ a Lorentz ortogonal olan H^n in hiperdüzlemi olmasıdır.

Teorem 3.14 *x ve y, $\mathbb{R}^{n+1}$ de lineer bağımsız spacelike vektörler olsun. Aşağıdakiler denktir.*

a. x ve y vektörleri $|x \circ y| > \|x\| \|y\|$ eşitsizliği sağlanır.

b. x ve y vektörleri tarafından gerilen V alt vektör uzayı timelikedir.

c. x ve y ye Lorentz ortogonal olan sırasıyla H^n in P ve Q hiperdüzlemi ayrıktır ve ortak bir Lorentz ortogonal hiperbolik doğruya sahiptir.

Uyarı 3.2 *Teorem 3.14 ten eğer P ve Q, ortak bir Lorentz ortogonal hiperbolik N doğrusuna sahip ve H^n in ayrık hiperdüzlemleri ise o halde N tektir. Ayrıca eğer x,$y \in \mathbb{R}^{n+1}$, P ve Q ya Lorentz ortogonal olan spacelike vektörler ise o halde x ve y, N nin teğet vektörleridir.*

Tanım 3.18 *(Spacelike Vektörler Arasındaki Timelike Açı) x ve y, $\mathbb{R}^n_1$ de timelike bir alt vektör uzayını geren spacelike vektörler olsun. Teorem 3.14 den*

$$|x \circ y| > \|x\| \|y\|$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$|x \circ y| = \|x\| \|y\| \cosh \mu(x, y) \tag{3.13}$$

olacak şekilde bir tek pozitif $\mu(x, y)$ reel sayısı vardır. Bu $\mu(x, y)$ reel sayısına x ve y arasındaki Lorentzian timelike açı denir.

Şimdi $\mu(x, y)$ nin geometrik yorumuna girelim.

Teorem 3.15 *x ve y, $\mathbb{R}^n_1$ de timelike bir alt vektör uzayını geren spacelike vektörler ve P,Q sırasıyla x ve y ye Lorentz ortogonal olan H^n in hiperdüzlemleri olsun. O halde $\mu(x, y)$, P ve Q ya Lorentz ortogonal olan N hiperbolik doğrusu boyunca ölçülen P den Q ya hiperbolik uzaklıktır. Ayrıca $x \circ y < 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul x ve y nin N nin karşılıklı yönlendirilmiş teğet vektörleri olmasıdır.*

Tanım 3.19 *(Bir Timelike ve Bir Spacelike Vektör Arasındaki Açı) $\mathbb{R}^n_1$ de x bir spacelike vektör ve y pozitif bir timelike vektör olsun. O halde*

$$|x \circ y| = \|x\| \|y\| \sinh \mu(x, y) \tag{3.14}$$

olacak şekilde bir tek pozitif $\mu(x,y)$ reel sayısı vardır. Bu $\mu(x,y)$ reel sayısına x ve y arasındaki Lorentz timelike açı denir.

Şimdi $\mu(x,y)$ sayısının geometrik yorumunu verelim.

Teorem 3.16 *$\mathbb{R}_1^n$ de x bir spacelike vektör ve y pozitif bir timelike vektör, ve P, x'e Lorentz ortogonal olan H^n in hiperdüzlemi olsun. O halde $\mu(x,y)$, $\frac{y}{\|y\|}$ dan P ye Lorentz ortogonal olan $\frac{y}{\|y\|}$ dan geçen N hiperbolik doğrusu boyunca ölçülen P ye olan hiperbolik uzaklıktır. Ayrıca $x \circ y < 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul x ve y nin P tarafından gerilen $\mathbb{R}_1^n$ nin hiperdüzleminin zıt tarafları üzerinde olmasıdır.*

4. HİPERBOLİK UZAYDA EĞRİLER VE YÜZEYLER

Bu bölümde H^3 uzayında eğriler ve yüzeylerin diferensiyel geometrisi özetlenecek ve H^3 uzayının Lorentzian modeli alınacaktır.

4.1 Hiperbolik Uzayda Eğriler

H^3 de eğrilerin[4] de verilen içsel diferensiyel geometrisini özetleyelim.

$\gamma : I \to H^3$ birim hızlı regüler eğri olsun. Böylece $\|t(s)\| = 1$ olmak üzere

$$t(s) = \gamma'(s)$$

teğet vektörüne sahip oluruz. $\left\langle t'(s), t'(s) \right\rangle \neq -1$ olmak üzere

$$n(s) = \frac{t'(s) - \gamma(s)}{\|t'(s) - \gamma(s)\|}$$

γ-eğrisinin birim normal vektörüdür.

Gerçektende, $\overline{\overline{D}}$; R_1^4 üzerindeki Riemann konneksiyonu, $\overline{D}$ de H^3 deki Riemann konneksiyonu olmak üzere Gauss denkleminden

$$\overline{\overline{D}}_X Y = \overline{D}_X Y - \langle S(X), Y \rangle N$$

olduğundan

$$\overline{D}_X Y = \overline{\overline{D}}_X Y + \langle S(X), Y \rangle N$$

ve

$$S = -I_3, N = \gamma(s)$$

olmak üzere

$$\overline{D}_X Y = \overline{\overline{D}}_X Y - \langle X, Y \rangle \gamma$$

olur.

O halde

$$\overline{D}_{t(s)} t(s) = \overline{\overline{D}}_{t(s)} t(s) - \langle t(s), t(s) \rangle \gamma(s)$$

olduğundan

$$t_h'(s) = t_h'(s) - \gamma(s)$$

olur. Dolayısıyla

$$n(s) = \frac{t_h'(s)}{\left\|t_h'(s)\right\|}$$

olmak üzere

$$n(s)=\frac{t'(s)-\gamma(s)}{\|t'(s)-\gamma(s)\|}$$

olarak elde edilir. γ nın binormal vektörüde

$$e(s)=\gamma(s)\wedge t(s)\wedge n(s)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan elde edilen $\{\gamma(s), t(s), n(s), e(s)\}$ çatısına γ-boyunca R_1^4 ün pseuda ortonormal çatısı denir.

H^3 deki Riemann konneksiyonu $\overline{D}$; R_1^4 deki Riemann konneksiyonu $\overline{\overline{D}}$ ve $\langle t'(s), t'(s)\rangle \neq -1$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\kappa_h :\ & I \to \mathbb{R}\\ & s \mapsto \kappa_h(s)=\left\langle \overline{D}_{t(s)}t(s), n(s)\right\rangle\end{aligned}$$

fonksiyonuna H^3 ün Hiperbolik eğrilik fonksiyonu denir. O halde

$$\begin{aligned}\kappa_h(s) &= \left\langle \overline{D}_{t(s)}t(s), n(s)\right\rangle\\ &= \left\langle \overline{\overline{D}}_{t(s)}t(s)-\langle t(s), t(s)\rangle\gamma(s), n(s)\right\rangle\\ &= \left\langle t'(s), n(s)\right\rangle - \langle t(s), t(s)\rangle\langle\gamma(s), n(s)\rangle\end{aligned}$$

olduğundan

$$\kappa_h(s)=\left\langle t'(s), n(s)\right\rangle$$

olur. Öte yandan

$$n(s)=\frac{t'(s)-\gamma(s)}{\|t'(s)-\gamma(s)\|}$$

olmak üzere

$$t'(s)=\left\|t'(s)-\gamma(s)\right\| n(s)+\gamma(s)$$

ve

$$\begin{aligned}\kappa_h(s) &= \left\langle \left\|t'(s)-\gamma(s)\right\| n(s)+\gamma(s), n(s)\right\rangle\\ &= \left\|t'(s)-\gamma(s)\right\| \langle n(s), n(s)\rangle + \langle\gamma(s), n(s)\rangle\end{aligned}$$

buradan da

$$\kappa_h(s)=\left\|t'(s)-\gamma(s)\right\|$$

olarak elde edilir. Böylece $\gamma : I \to H^3$ birim hızlı eğrisinin

$$\kappa_h(s)=\left\|t'(s)-\gamma(s)\right\|$$

değerine γ eğrisinin Hiperbolik eğriliği denir.

$\overline{\overline{D}}$ ve $\overline{D}$ sırasıyla R_1^4 ve H^3 deki Riemann konneksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} \tau_h : \quad & I \to \mathbb{R} \\ & s \mapsto \tau_h(s) = \left\langle \overline{D}_{t(s)} n(s), e(s) \right\rangle \end{aligned}$$

fonksiyonuna H^3 ün Hiperbolik burulma fonksiyonu denir.
Böylece $\left\langle t'(s), t'(s) \right\rangle \neq -1$ olmak üzere $\gamma : I \to H^3$ birim hızlı eğrisinin

$$\tau_h(s) = -\frac{\det\left(\gamma(s), \gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)\right)}{\left[\kappa_h(s)\right]^2}$$

değerine de γ eğrisinin Hiperbolik burulması denir.

Ayrıca γ nın $\{\gamma(s), t(s), n(s), e(s)\}$ çatısından elde edilen

$$\begin{cases} \overline{\overline{D}}_{t(s)}\gamma(s) & = t(s) \\ \overline{\overline{D}}_{t(s)}t(s) & = \kappa_h(s)\, n(s) + \gamma(s) \\ \overline{\overline{D}}_{t(s)}n(s) & = -\kappa_h(s)\, t(s) + \tau_h(s)\, e(s) \\ \overline{\overline{D}}_{t(s)}e(s) & = -\tau_h(s)\, n(s) \end{cases}$$

eşitliklerine γ-eğrisinin Frenet-Serret denklemleri denir.[4]

$\kappa_h(s)$ nin tanımından $\left\langle t'(s), t'(s) \right\rangle \neq -1$ koşulu $\kappa_h(s) \neq 0$ olmasına denk olduğu kolaylıkla görülür.[4]

Gerçekten de;

$$\begin{aligned} \left\langle t'(s), t'(s) \right\rangle &= \langle \kappa_h(s)\, n(s) + \gamma(s), \kappa_h(s)\, n(s) + \gamma(s) \rangle \\ &= \kappa_h^2(s) \langle n(s), n(s) \rangle + 2\kappa_h(s) \langle n(s), \gamma(s) \rangle + \langle \gamma(s), \gamma(s) \rangle \end{aligned}$$

olduğundan

$$\left\langle t'(s), t'(s) \right\rangle = -1 + \kappa_h^2(s)$$

olur. Dolayısıyla

$$\left\langle t'(s), t'(s) \right\rangle \neq -1$$

olduğundan

$$\kappa_h^2(s) \neq 0$$

ve buradan da

$$\kappa_h(s) \neq 0$$

dır.

$\gamma(s)$ eğrisinin $\kappa_h(s) = 0$ şartını sağlaması için gerekli ve yeterli koşul $\gamma(s) - c$ jeodezik olacak şekilde bir c lightlike vektörünün var olmasıdır.[4]

$\kappa_h(s) = 0$ şartını sağlayan eğriye Equidistant eğri denir. Ayrıca $\kappa_h(s) = 1$ ve $\tau_h(s) = 0$ ise γ bir Horoçemberdir.[4]

Tanım 4.1 *(Hiperbolik Uzayda Sabit Açılı Eğriler) Teğeti sabit bir doğru ile sabit bir açı yapan eğriye $\mathbb{R}^3$ de genel helis eğrisi denir. Bir eğrinin genel helis eğrisi olması için gerekli ve yeterli koşul bu eğrinin eğriliğinin burulmasına oranının sabit olmasıdır.*

Bu sonuç 1802 yılında M.A.Lancret tarafından verilmiştir ve ilk olarak 1845 yılında B. de Saint Venont tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 4.1 *(Öklid Uzayında Lancret Teoremi) $\mathbb{R}^3$ de bir eğrinin genel helis eğrisi olması için gerekli ve yeterli koşul $\tau = bK$ olacak şekilde sabit bir b sayısının var olmasıdır.*[5]

Teorem 4.2 *(Hiperbolik Uzayda Lancret Teoremi) Hiperbolik uzaydaki bir eğrinin genel helis eğrisi olması için gerekli ve yeterli koşul*
a. $\tau \equiv 0$ ve γ, $H^2(-1)$ hiperbolik düzleminde bir eğridir.
veya
b. γ, $H^2(-1)$ hiperbolik uzayında bir helisdir.

4.2 Hiperbolik Uzayda Yüzeyler

H^3 de yüzeylerin[4] de verilen içsel diferensiyel geometrisini özetleyelim.

$v \in R_1^4$ ve $c \in \mathbb{R}$ için $HP(v,c) = \{x \in R_1^4 \mid \langle x, v\rangle = c,\ c \in \mathbb{R}\}$ şeklinde v pseuda normalli hiperdüzlem tanımlayalım.

a) v timelike ise $HP(v,c)$ ye bir spacelike hiperdüzlem denir.

b) v spacelike ise $HP(v,c)$ ye bir timelike hiperdüzlem denir.

c) v lightlike ise $HP(v,c)$ ye bir lightlike hiperdüzlem denir.

$\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$, R_1^4 ün doğal tabanı ve $x_i = (x_0^i, x_1^i, x_2^i, x_3^i)$ olmak üzere herhangi x_1,x_2,$x_3 \in R_1^4$ için

$$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 = \begin{vmatrix} -e_0 & -e_1 & -e_2 & -e_3 \\ x_0^1 & x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_0^3 & x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{vmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\langle x, x_1 \wedge x_2 \wedge x_3\rangle = \det(x, x_1, x_2, x_3)$$

dir ve $x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$ herhangi x_i ye ortogonaldir.

$$LC_+^* = \left\{x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in R_1^4 \mid x_0 > 0,\ \langle x, x\rangle = 0\right\}$$

orjin merkezli future light konisini alalım. R_1^4 deki hiperdüzlemler ve H^3 ün kesişmesiyle verilen H^3 de yüzeylerin üç tipi vardır.

a) $HP\,(v,c)$ spacelike ise $H^3 \cap HP\,(v,c)$ yüzeyine küre denir.

b) $HP\,(v,c)$ timelike ise $H^3 \cap HP\,(v,c)$ yüzeyine Equidistant yüzey denir.

c) $HP\,(v,c)$ lightlike ise $H^3 \cap HP\,(v,c)$ yüzeyine Horoküre denir.

$U \subset \mathbb{R}^2$ bir açık alt küme, $M = x\,(u)$ ve x embedding olmak üzere $x : U \to H^3$ bir regüler yüzey olsun. O halde $\{x_{u_1} = x_1,\, x_{u_2} = x_2\}$, x ile tanımlanan yüzeyin teğet düzleminin bazı olmak üzere

$$e\,(u) = \frac{x\,(u) \wedge x_1\,(u) \wedge x_2\,(u)}{\|x\,(u) \wedge x_1\,(u) \wedge x_2\,(u)\|}$$

vektörüne H^3 de M yüzeyinin birim normali denir.

$E : U \subset \mathbb{R}^2 \to S_1^3$, $E\,(u) = e\,(u)$ şeklindeki dönüşüme x parametrizasyonu ile verilen yüzeyin de-Sitter Gauss dönüşümü denir. $x\,(u) \in H^3$, $e\,(u) \in S_1^3$ ve

$$\langle x\,(u)\,, e\,(u)\rangle = 0$$

olduğundan $x\,(u) \pm e\,(u) \in LC_+^*$ dır.

Gerçekten de $x\,(u) \pm e\,(u) \in LC_+^*$ olması için $x\,(u) \pm e\,(u)$ vektörünün lightlike olması gerekir. Dolayısıyla

$$\langle x\,(u) \pm e\,(u)\,, x\,(u) \pm e\,(u)\rangle = \langle x\,(u)\,, x\,(u)\rangle \pm 2\,\langle x\,(u)\,, e\,(u)\rangle + \langle e\,(u)\,, e\,(u)\rangle$$

olduğundan

$$\langle x\,(u) \pm e\,(u)\,, x\,(u) \pm e\,(u)\rangle = 0$$

ve böylece $x\,(u) \pm e\,(u) \in LC_+^*$ dır.

$L^\pm : U \subset \mathbb{R}^2 \to LC_+^*$, $L^\pm\,(u) = x\,(u) \pm e\,(u)$ şeklindeki dönüşüme x parametrizasyonu ile verilen yüzeyin light koni Gauss dönüşümü denir.

D_v, v teğet vektörüne göre kovaryant türev olmak üzere herhangi $p = x\,(u_0) \in M$ ve T_pM için

$$D_vL^\pm \in T_pM$$

dir.[4]

U ve M nin özellikleri altında $dx(u_0)$ türevi T_pM teğet uzayı üzerinde I_{T_pM} özdeşlik dönüşümü ile özdeştir. $(p = x(u_0))$

Gerçekten de; $v_p \in T_pM$, $T_pM = Sp\{x_{u_1}, x_{u_2}\}$ olduğundan

$$v_p = \sum_{i=1}^{2} a_i x_{u_i}$$

şeklinde yazılabilir. O halde

$$\begin{aligned} dv_p x(p) &= d_{\sum_{i=1}^{2} a_i x_{u_i}} x(p) \\ &= \sum_{i=1}^{2} a_i d_{x_{u_i}} x(p) \\ &= \sum_{i=1}^{2} a_i x_{u_i} \\ &= v_p \end{aligned}$$

yani

$$(dx(p))(v_p) = v_p$$

olduğundan

$$dx(p) = I_{T_pM}$$

olur.

Dolayısıyla $L^{\pm}(u) = x(u) \pm e(u)$ olmak üzere

$$dL^{\pm}(u_0) = dx(u_0) \pm de(u_0)$$

olduğundan

$$dL^{\pm}(u_0) = I_{T_pM} \pm dE(u_0)$$

yazılır.

x in Lightkoni Gauss görüntüsü

$$L^{\pm} : U \subset \mathbb{R}^2 \to LC^*, L^{\pm}(u) = x(u) \pm e(u)$$

olmak üzere

$$S_p^{\pm} := -dL^{\pm}(u_0) : T_pM \to T_pM$$

tanımlı lineer dönüşümüne $p = x(u_0)$ noktasında $M = x(u)$ yüzeyinin Hiperbolik şekil operatörü denir.

$$A_p := -dE(u_0) : T_pM \to T_pM$$

tanımlı lineer dönüşümüne $p = x(u_0)$ da $M = x(u)$ yüzeyinin de-Sitter şekil operatörü denir.

$\kappa_i(p)$ ve $\overline{\kappa}_i^{\pm}(p)$ ile sırasıyla A_p ve $S_p^{\pm}$ dönüşümünün özdeğerlerini gösterelim. $\kappa_i(p)$ ve $\overline{\kappa}_i^{\pm}(p)$, (i=1,2) ye $p = x(u_0)$ da $M = x(u)$ yüzeyinin sırasıyla asli de-Sitter ve asli hiperbolik eğrilikleri denir.

$S_p^{\pm}$ ve A_p aynı özvektörlere sahiptir ve

$$\overline{\kappa}_i^{\pm}(p) = -1 \pm \kappa_i(p)$$

bağıntısı vardır.

Gerçekten de; kabul edelim ki v_1, $S_p^{\pm}$ nin özvektörü ve v_2 de A_p nin özvektörü olsun. O halde v_1, $S_p^{\pm}$ nin özvektörü olduğundan

$$S_p^{\pm}(v_1) = \lambda_1 v_1$$

olacak şekilde yazılır. Ayrıca

$$dL^{\pm}(u_0) = I_{T_pM} \pm dE(u_0)$$

olduğundan

$$S_p^{\pm} := -dL^{\pm}(u_0)$$

ve

$$A_p := -dE(u_0)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} S_p^{\pm}(v_1) &= -I(v_1) \pm A_p(v_1) \\ \lambda_1 v_1 &= -v_1 \pm A_p(v_1) \\ A_p(v_1) &= \pm(1+\lambda_1) v_1 \\ A_p(v_1) &= \lambda v_1 \end{aligned}$$

olacak şekilde yazılır ki bu v_1'in aynı zamanda A_p nin de özvektörü olduğunu gösterir.

Benzer şekilde v_2, A_p nin özvektörü olduğundan

$$A_p(v_2) = \lambda_2 v_2$$

olacak şekilde yazılır. O halde

$$\begin{aligned} S_p^{\pm}(v_2) &= -I(v_2) \pm A_p(v_2) \\ &= -v_2 \pm \lambda_2 v_2 \\ &= (-1 \pm \lambda_2) v_2 \end{aligned}$$

olduğundan

$$S_p^{\pm}(v_2) = \lambda v_2$$

olacak şekilde yazılır ki bu v_2'nin aynı zamanda $S_p^{\pm}$ nin de özvektörü olduğunu gösterir. Dolayısıyla $S_p^{\pm}$ ve A_p aynı özvektörlere sahiptir.

Ayrıca;

$$dL^{\pm}(u) = I(u) \pm dE(u)$$

olduğundan asli de-Sitter ve asli hiperbolik eğrilikler arasında da

$$\overline{\kappa}_i^{\pm}(p) = -1 \pm \kappa_i(p)$$

bağıntısı mevcuttur.

Şimdi asli hiperbolik eğriliklerin geometrik anlamını tanımlayalım.
$\gamma(s) = x(u_1(s), u_2(s))$, $M = x(u)$ yüzeyi üzerinde $p = \gamma(s_0)$ noktasında birim hızlı eğri olsun.

$$k(s) = t'(s) - \gamma(s)$$

hiperbolik eğrilik vektörü olmak üzere $p = \gamma(s_0)$ noktasında $\gamma(s)$ nin de-Sitter normal eğriliği

$$\begin{aligned} \kappa_n^{\pm}(s_0) &= \langle k(s_0), L^{\pm}(u_1(s_0), u_2(s_0)) \rangle \\ &= \left\langle t'(s_0), L^{\pm}(u_1(s_0), u_2(s_0)) \right\rangle + 1 \end{aligned}$$

dir.

de-Sitter Gauss eğriliği sadece p noktasına ve p noktasındaki M yüzeyinin birim teğet vektörüne bağlıdır. Bu yüzden de-Sitter normal eğriliği $p \in M$ noktasında maksimum ve minimuma sahiptir. p noktasında de-Sitter normal eğriliğinin maksimum veya minumumu $\pm\kappa_i(p)$ de-Sitter asli eğriliklerine eşittir. Böylece aşağıdaki Hiperbolik tip Rodrig formülünü verebiliriz. Eğer $\gamma(s) = x(u_1(s), u_2(s))$ bir eğrilik çizgisi ise $\kappa_n^{\pm}(s)$, $\gamma(s)$ nin de-Sitter asli eğriliklerinden biridir. Yani

$$-\frac{dL^{\pm}}{ds}(u_1(s), u_2(s)) = \left(\kappa_n^{\pm}(s) - 1\right) \frac{dx}{ds}(u_1(s), u_2(s))$$

[4] dir.

$p = x(u_0)$ noktasında $M = x(u)$ yüzeyinin Hiperbolik ve de-Sitter Gauss eğrilikleri

$$\overline{\kappa}_h^{\pm}(u_0) = \det S_p^{\pm} = \overline{\kappa}_1^{\pm}(p)\,\overline{\kappa}_2^{\pm}(p)$$

ve

$$\kappa_e(u_0) = \det A_p = \kappa_1(p)\,\kappa_2(p)$$

ayrıca Hiperbolik ve de-Sitter ortalama eğrilikleri

$$H_h^{\pm}(u_0) = \frac{1}{2} iz S_p^{\pm} = \frac{\overline{\kappa}_1^{\pm}(p) + \overline{\kappa}_2^{\pm}(p)}{2}$$

ve

$$H_d(u_0) = \frac{1}{2} iz A_p = \frac{\kappa_1(p) + \kappa_2(p)}{2}$$

olarak tanımlanır.

de-Sitter ortalama eğriliği tam olarak M nin ortalama eğriliğidir. Dolayısıyla H_d yerine H yazılır ve

$$H_h^{\pm}(u) = \pm H(u) - 1$$

dir.

4.2.1 Hiperbolik Uzayda Sabit Açılı Yüzeyler

Sabit açılı yüzeyler Hiperbolik-3 uzaydaki yüzeylerin özel bir sınıfıdır. Teğet düzlemi H^3de sabit bir vektör alanı ile sabit bir açı yapan yüzeye sabit açılı yüzey denir. Öklid ve Lorentz uzaylarında iyi bilinen ve teknikte bir çok uygulaması olan Helisoid yüzeylerin Lorentz uzayındaki benzeri olan sabit açılı yüzeyler hiperbolik uzayda çalışılmıştır.[6]

$x : M \to R_1^4$ bir immersiyon olsun. Eğer x üzerindeki indirgenmiş metrik Lorentzian ise x'e timelike immersiyon, Riemann ise x'e spacelike immersiyon, dejenere ise x'e lightlike immersiyon denir. Eğer $\langle x, x\rangle = -1$ ve $x_0 > 1$ ise x'e H^3 ün bir immersiyonu denir.

Bu bölümde H^3 deki yüzeylerin iki özel sınıfı olan sabit timelike ve sabit spacelike açılı yüzeyler verilmiştir. Teğet düzlemi H^3 deki sabit bir vektör alanı ile sabit bir timelike açı yapan yüzeye H^3 de sabit timelike açılı yüzey denir. Benzer şekilde teğet düzlemi H^3 deki sabit bir vektör alanı ile sabit bir spacelike açı yapan yüzeye H^3 de sabit spacelike açılı yüzey denir.

$\chi(M)$, M üzerindeki teğet vektör alanlarının modülü olsun. $\overline{\overline{D}}$, $\overline{D}$, D ile sırasıyla R_1^4, H^3 ve M Levi-Civita konneksiyonlarını gösterelim. O zaman $\widetilde{V}$, M nin R_1^4 deki ikinci temel formunu, $\top$ ve $\perp$ simgeleri de $\overline{\overline{D}}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenlerini göstermek üzere

$$\forall X, Y \in \chi(M) \text{ için } D_X Y = \left(\overline{\overline{D}}_X Y\right)^{\top}$$

$$\widetilde{V} : \chi(M) \to \chi^{\perp}(M), \widetilde{V}(X,Y) = \left(\overline{\overline{D}}_X Y\right)^{\perp}$$

ve

$$\begin{aligned} \overline{\overline{D}}_X Y &= \overline{D}_X Y + \langle X, Y \rangle x \\ \overline{\overline{D}}_X Y &= D_x Y + \widetilde{V}(X,Y) \end{aligned} \tag{4.1}$$

dir. (4.1) denklemlerinin birincisine M nin H^3 deki, ikincisine de M nin R_1^4 deki Gauss denklemi denir.

ξ, M nin H^3 deki birim normal vektör alanı olmak üzere $S_\xi^{\pm}(X)$ ve $A_x(X)$ dönüşümlerine $-\overline{\overline{D}}_X \xi$ ve $-\overline{\overline{D}}_X x$ teğet bileşenlerine karşılık gelen M nin H^3 ve R_1^4 deki Weingarten dönüşümleri denir.

Buna göre

$$\begin{aligned} S_\xi^{\pm}(X) &= -\overline{\overline{D}}_x \xi + \left\langle \overline{\overline{D}}_x x, \xi \right\rangle x \\ A_x(X) &= -\overline{\overline{D}}_x x + \left\langle \overline{\overline{D}}_x x, \xi \right\rangle \xi \end{aligned} \tag{4.2}$$

eşitlikleri sağlanır.

$S_\xi^{\pm}(X)$ ve $A_x(X)$ in herbir $p \in M$ için lineer ve self adjoint olduğu[3] den görülebilir.

$S_\xi^{\pm}(X)$ ve $A_x(X)$ in $\overline{\kappa}_i^{\pm}(p)$ ve $\kappa_i(p)$ öz değerlerine M yüzeyinin sırasıyla H^3 ve R_1^4 deki asli eğrilikleri denir. Ayrıca $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\left\langle S^{\pm}(X), Y \right\rangle = \left\langle \widetilde{V}(X,Y), \xi \right\rangle$$

ve

$$\langle A(X), Y \rangle = \left\langle \widetilde{V}(X,Y), x \right\rangle$$

dir.

$\widetilde{V}(X,Y)$, M nin R_1^4 deki ikinci temel formu olduğundan

$$\widetilde{V}(X,Y) = \lambda_1 \xi + \lambda_2 x$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da

$$\widetilde{V}(X,Y) = \left\langle S^{\pm}(X), Y \right\rangle \xi - \langle A(X), Y \rangle x$$

bulunur.

$\{v_1, v_2\}$, T_pM teğet düzleminin bir bazı olmak üzere bundan sonra

$$\widetilde{V}_{ij} = \left\langle \widetilde{V}(v_i, v_j), \xi \right\rangle = \left\langle S^{\pm}(v_i), v_j \right\rangle$$

$$\widetilde{W}_{ij} = \left\langle \widetilde{V}(v_i, v_j), x \right\rangle = \left\langle A(v_i), v_j \right\rangle$$

kısa gösterimini kullanacağız. O halde

$$\overline{\overline{D}}_{v_i} v_j = D_{v_i} v_j - \widetilde{V}_{ij}\xi + \langle v_i, v_j \rangle x \tag{4.3}$$

olarak yazılır. $\{v_1, v_2\}$ bazının ortonormal olması halinde de (4.3) eşitliği

$$\overline{\overline{D}}_{v_i} v_j = D_{v_i} v_j - \widetilde{V}_{ij}\xi \tag{4.4}$$

şeklinde yazılır. Benzer şekilde Weingaten denklemleri de

$$\overline{\overline{D}}_{v_i} \xi = -\widetilde{V}_{i1} v_1 - \widetilde{V}_{i2} v_2 \tag{4.5}$$

$$\overline{\overline{D}}_{v_i} x = -\widetilde{W}_{i1} v_1 - \widetilde{W}_{i2} v_2 \tag{4.6}$$

şeklindedir.

Tanım 4.2 *(Sabit Timelike Açılı Yüzeyler) $x : M \to H^3$ bir spacelike immersiyon ve ξ, M nin birim normal vektör alanı olsun. Eğer M üzerinde $\theta(\xi, U)$ timelike açısı sabit olacak şekilde bir U spacelike doğrultusu varsa M ye H^3 de sabit timelike açılı yüzey denir.*[6]

Teorem 4.3 *ξ, M yüzeyinin H^3 de birim normal vektör alanı olmak üzere M yüzeyi spacelike eksenli sabit timelike açılı yüzey olsun. Bu durumda M yüzeyinin spacelike doğrultusu*

$$U = \sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}\, e_1 - (\cosh\theta)\,\xi + (\sinh\varphi)\, x$$

ve hiperbolik uzaydaki sabit doğrultusu

$$U_h = \sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}\, e_1 - (\cosh\theta)\,\xi$$

şeklinde tek olarak bulunur. Burada θ; ξ ve U spacelike vektörler arasındaki timelike açı, φ; U spacelike vektörü ile x timelike vektörü arasındaki timelike açıdır.[6]

Teorem 4.4 *H^3 Hiperbolik uzayında spacelike eksenli sabit timelike açılı bir yüzey* *için Levi-Civita konneksiyonu aşağıdaki şekildedir.*

$$
\begin{aligned}
D_{e_1}e_1 = 0 \quad D_{e_2}e_1 &= \frac{-\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}}\widetilde{V}_{22}e_2 \\
D_{e_1}e_2 = 0 \quad D_{e_2}e_2 &= \frac{+\cosh\theta}{\sqrt{\left|\sinh^2\varphi - \sinh^2\theta\right|}}\widetilde{V}_{22}e_1
\end{aligned}
$$

.[6]

Sonuç 4.1 *H^3 de sabit açılı bir spacelike M yüzeyi verilsin. O zaman $\beta = \beta(u,v)$, M yüzeyi üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere M yüzeyi üzerindeki metrik $\langle , \rangle := du^2 + \beta^2 dv^2$ olacak şekilde u ve v lokal koordinatları vardır.*[6]

Teorem 4.5 *H^3 de spacelike eksenli sabit timelike açılı yüzeyin $x = x(u,v)$ parametrizasyonu*

$$
\begin{cases}
x_{uu} &= x \\
x_{uv} &= \dfrac{\beta_u}{\beta}x_v \\
x_{vv} &= -\beta\beta_u x_u + \dfrac{\beta_v}{\beta}x_v - \beta^2\widetilde{V}_{22}\xi + \beta^2 x
\end{cases}
\tag{4.7}
$$

kısmi türevli diferensiyel denklem sistemini sağlar.[6]

Önerme 4.1 *$x = x(u,v)$, H^3 Hiperbolik uzayında sabit açılı spacelike bir yüzeyin parametrizasyonu olsun. Eğer M üzerinde $\widetilde{V}_{22} = 0$ ise $x = x(u,v)$ hiperbolik düzlem belirtir.*[6]

Teorem 4.6 *$x = x(u,v)$, H^3 Hiperbolik uzayında spacelike eksenli sabit timelike açılı yüzeyin parametrizasyonu olsun. Bu durumda (4.7) denklem sistemini sağlayan x spacelike immersiyonu M yüzeyi üzerinde*

$$
x_i(u,v) = \frac{-c_{1i}(v)}{2v\cosh\theta\,(uv\cosh\theta + 1)^2} + c_{2i}(v)\,,\ i = 1,2,3,4
$$

lokal koordinatlarına sahiptir.[6]

Tanım 4.3 *(Sabit Spacelike Açılı Yüzeyler) $x : M \to H^3$ bir spacelike immersiyon ve ξ, M nin birim vektör alanı olsun. Eğer M üzerinde $\theta(\xi, U)$ spacelike açısı sabit olacak şekilde bir U spacelike doğrusu varsa M ye H^3 de sabit spacelike açılı yüzey denir.*[6]

Teorem 4.7 *ξ, M yüzeyinin H^3 de birim normal vektör alanı olmak üzere M yüzeyi spacelike eksenli sabit spacelike açılı yüzey olsun. Bu durumda M yüzeyinin spacelike* *doğrultusu*

$$U=\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}e_1+(\cos\theta)\,\xi+(\sinh\varphi)\,x$$

ve hiperbolik uzaydaki sabit doğrultusu

$$U_h=\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}e_1+(\cos\theta)\,\xi$$

şeklinde tek olarak bulunur. Burada θ; ξ ve U spacelike vektörler arasındaki spacelike açı, φ; U spacelike vektörü ile x timelike vektörü arasındaki timelike açıdır.[6]

Teorem 4.8 *H^3 Hiperbolik uzayında spacelike eksenli sabit spacelike açılı bir yüzey için Levi-Civita konneksiyonu aşağıdaki şekildedir.*

$$\begin{aligned} D_{e_1}e_1&=0 \quad D_{e_2}e_1=\frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}}\widetilde{V}_{22}e_2\\ D_{e_1}e_2&=0 \quad D_{e_2}e_2=\frac{-\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\sinh^2\varphi}}\widetilde{V}_{22}e_1 \end{aligned}$$

.[6]

Sonuç 4.2 *H^3 de sabit açılı bir spacelike M yüzeyi verilsin. O zaman $\delta=\delta(u,v)$, M yüzeyi üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere M yüzeyi üzerindeki metrik $\langle,\rangle:=du^2+\delta^2dv^2$ olacak şekilde u ve v lokal koordinatları vardır.*[6]

Teorem 4.9 *H^3 de sabit spacelike eksenli sabit spacelike açılı yüzeyin $x=x(u,v)$ parametrizasyonu*

$$\begin{cases} x_{uu} &= x\\ x_{uv} &= \dfrac{\delta_u}{\delta}x_v\\ x_{vv} &= -\delta\delta_u x_u+\dfrac{\delta_v}{\delta}x_v-\delta^2\widetilde{V}_{22}\xi+\delta^2x \end{cases} \tag{4.8}$$

kısmi türevli diferensiyel denklem sistemini sağlar.[6]

Önerme 4.2 *$x=x(u,v)$, H^3 Hiperbolik uzayında sabit açılı spacelike bir yüzeyin parametrizasyonu olsun. Eğer M üzerinde $\widetilde{V}_{22}=0$ ise $x=x(u,v)$ hiperbolik düzlem belirtir.*[6]

Teorem 4.10 *$x=x(u,v)$, H^3 Hiperbolik uzayında spacelike eksenli sabit spacelike açılı yüzeyin parametrizasyonu olsun. Bu durumda (4.8) denklem sistemini sağlayan x spacelike immersiyonu M yüzeyi üzerinde*

$$x_i(u,v)=\frac{-c_{2i}(v)}{2v\cos\theta\,(uv\cos\theta+1)^2}+c_{2i}(v)\,,\ i=1,2,3,4$$

lokal koordinatlarına sahiptir.[6]

Sonuç 4.3 *Hiperbolik uzayda spacelike eksenli sabit timelike açılı ve spacelike açılı yüzeyler hiperbolik düzlemseldir.*

Sonuç 4.4 *Hiperbolik uzayda sabit spacelike eksenli timelike açılı ve spacelike açılı minimal yüzeyler sadece düzlemdir.*

Tanım 4.4 *Eğer* $\kappa_1(P) = \kappa_2(P)$ *ise* $u \in U$ *veya* $P = x(u)$ *noktasına umbilical nokta denir.* $S_p^{\pm}$ *ve* A_p *nin özvektörleri aynı olduğundan bu koşul* $\overline{\kappa}_1^{\pm}(P) = \overline{\kappa}_2^{\pm}(P)$ *koşuluna denktir. Eğer* M *üzerindeki tüm noktalar umbilical nokta ise* $M = x(u)$ *ya total umbilical denir.*

Sonuç 4.5 *Hiperbolik uzayda spacelike eksenli sabit timelike açılı yüzey için* $\overline{\kappa}_1^{\pm} = 0$ *ve* $\overline{\kappa}_2^{\pm} = \widetilde{V}_{22}$ *olduğundan bu yüzey üzerinde umbilical nokta yoktur.*

Sonuç 4.6 *Hiperbolik uzayda spacelike eksenli sabit spacelike açılı yüzey için* $\overline{\kappa}_1^{\pm} = 0$ *ve* $\overline{\kappa}_2^{\pm} = \widetilde{V}_{22}$ *olduğundan bu yüzey üzerinde umbilical nokta yoktur.*

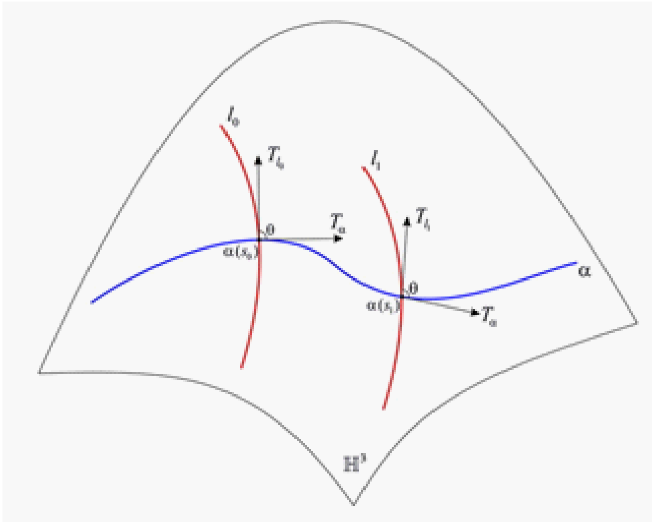
Tanım 4.5 *Hiperbolik uzayda total umbilical bir yüzeye Horoküre denir.*

Sonuç 4.7 *Hiperbolik uzayda spacelike eksenli sabit timelike ve sabit spacelike açılı yüzeyler Horoküre değildir.*

4.2.2 Hiperbolik Uzayda Spacelike Regle Yüzeyler

Bu bölümde H^3 Hiperbolik uzayında, spacelike regle yüzeyler araştırılmıştır. H^3 Hiperbolik uzayında spacelike bir regle yüzey, spacelike bir jeodeziğin spacelike bir eğri boyunca hareket ettirilmesi ile elde edilir. Burada Hiperbolik uzayda açılabilir regle yüzeyler, regle yüzeyin boğaz eğrisi ve boğaz noktası ile dağılma parametresi verilmiştir.[28]

Tanım 4.6 H^3 *Hiperbolik uzayında verilen bir* l_s^{α} *jeodeziği için,* l_s^{α} *jeodeziğinin* α *eğrisi boyunca hareket ettirilmesiyle elde edilen yüzeye* H^3 *hiperbolik uzayında regle yüzey denir. Bu durumda* l_s^{α} *jeodeziğine regle yüzeyin doğrultu jeodeziği ve* α *eğrisine de regle yüzeyinin dayanak eğrisi denir.*[28]



Şekil 4.1

Şimdi H^3 Hiperbolik uzayında dayanak eğrisi spacelike bir eğri ve l_s^α jeodeziği spacelike bir jeodezik olan regle yüzeyin özelliklerini araştıralım.

H^3 Hiperbolik uzayında

$$\alpha : I \rightarrow H^3 \ , \alpha(s) = (\alpha_1(s), \alpha_2(s), \alpha_3(s), \alpha_4(s)) \ , \forall s \in I, \{0\} \subset I \subset \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı birim hızlı diferansiyellenebilir spacelike bir eğri olsun. Burada

$$\langle \alpha(s), \alpha(s) \rangle = -1, \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle = 1$$

dir. Kabul edelim ki

$$Z : I \rightarrow S_1^3, Z(s) = (z_1(s), z_2(s), z_3(s), z_4(s))$$

şeklinde tanımlı ve

$$\langle Z(s), Z(s) \rangle = 1 \text{ ve } \langle \alpha(s), Z(s) \rangle = 0, \forall s \in I$$

olsun.

H^3 Hiperbolik uzayında

$$l_s^\alpha : \mathbb{R} \rightarrow H^3 \ , l_s^\alpha(t) = (\cosh t)\, \alpha(s) + (\sinh t)\, Z(s)$$

şeklinde tanımlı bir jeodezik alalım . Burada $\alpha(s)$ başlangıç noktası ve $Z(s)$, l_s^α jeodeziğinin doğrultu vektörüdür. $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin Frenet elemanları

$\{T_\alpha, N_\alpha, B_\alpha, \kappa_h, \tau_h\}$ şeklindedir. T_l , $\alpha(s)$ noktasında l_s^α jeodeziğinin teğeti olsun ve kabul edelim ki T_l ve T_α , $\forall s \in I$ için lineer bağımsız olsun. Eğer l_s^α jeodeziğini α eğrisi boyunca hareket ettirirsek $\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow H^3$

$$\varphi(s,t) = \begin{pmatrix} (\cosh t)\,\alpha_1(s) + (\sinh t)\,z_1(s), (\cosh t)\,\alpha_2(s) + (\sinh t)\,z_2(s), \\ (\cosh t)\,\alpha_3(s) + (\sinh t)\,z_3(s), (\cosh t)\,\alpha_4(s) + (\sinh t)\,z_4(s) \end{pmatrix}$$

şeklinde bir parametrizasyona sahip $M = (I \times \mathbb{R}, \varphi)$ regle yüzeyi elde edilir.

Şimdi α eğrisi boyunca $\chi(M)$ teğet uzayının ortonormal bir tabanını bulalım.

$$T_{l(s)} = (\cosh t)\,T_{\alpha(s)} + (\sinh t)\,T_{Z(s)}$$

ve l_s^α jeodeziğinin birim teğeti

$$\tilde{T}_l = \frac{T_l}{\|T_l\|}$$

olsun. Bu durumda

$$Y = \tilde{T}_l - \left\langle \tilde{T}_l, T_\alpha \right\rangle T_\alpha$$

spacelike vektör alanını alırsak ve

$$X = \frac{Y}{\|Y\|}$$

dersek

$$\|X\| = 1 \text{ ve } \langle X, T_\alpha \rangle = 0, \langle T_\alpha, T_\alpha \rangle = 1 \tag{4.9}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{X, T_\alpha\}$, $\chi(M)$ teğet uzayının ortonormal bir tabanıdır ve ayrıca H^3 hiperbolik uzayında M regle yüzeyinin normali

$$\xi = \varphi \wedge X \wedge T_\alpha \tag{4.10}$$

şeklinde tanımlanır. Yani

$$\chi\left(H^3\right) = S_p\{X, T_\alpha\} \oplus S_p\{\xi\}$$

ve

$$\chi\left(R_1^4\right) = S_p\{X, T_\alpha\} \oplus S_p\{\xi, \varphi\}$$

şeklindedir. R_1^4, H^3 ve M nin Levi-Civita konneksiyonlarını sırası ile $\tilde{D}, \bar{D}$ ve D ile gösterelim. Gauss formülü ile

$$\tilde{D}_X Y = \bar{D}_X Y + \langle X, Y \rangle \alpha \ , \ \tilde{A}(X) = \tilde{D}_X \alpha = I(X)$$

ve

$$\bar{D}_X Y = D_X Y + \langle A(X), Y \rangle \xi \ , \ A(X) = \bar{D}_X \xi$$

eşitliklerini yazabiliriz. Eğer α eğrisi boyunca ortonormal çatı olarak $\{T, X, \xi\}$ kümesini alırsak

$$\begin{bmatrix} \bar{D}_T T \\ \bar{D}_T X \\ \bar{D}_T \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ X \\ \xi \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

elde ederiz. Burada

$$a = \left\langle \bar{D}_T T, X \right\rangle, b = \left\langle \bar{D}_T T, \xi \right\rangle, c = \left\langle \bar{D}_T X, \xi \right\rangle \tag{4.12}$$

şeklindedir. α eğrisi boyunca $\{\alpha, T, X, \xi\}$ sistemi için Gauss formülünden

$$\begin{bmatrix} \tilde{D}_T \alpha \\ \tilde{D}_T T \\ \tilde{D}_T X \\ \tilde{D}_T \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a & b \\ 0 & -a & 0 & c \\ 0 & -b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ T \\ X \\ \xi \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

elde edilir. Böylece (4.13) sistemini kullanarak

$$\begin{cases} \tilde{D}_T \alpha & = T \\ \tilde{D}_T T & = -\alpha + aX + b\xi \\ \tilde{D}_T X & = -aT + c\xi \\ \tilde{D}_T \xi & = -bT - cX \end{cases} \tag{4.14}$$

denklem sistemi elde edilir.

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \rightarrow H^3, \varphi(s,t) = (\cosh t)\, \alpha(s) + (\sinh t)\, X(s) \tag{4.15}$$

parametrizasyonu ile verilen M regle yüzeyi için birinci kuadratik formun katsayıları

$$\begin{cases} E & = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle = (\cosh t - a \sinh t)^2 + c^2 \sinh^2 t \\ F & = \langle \varphi_s, \varphi_t \rangle = 0 \\ G & = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = 1 \end{cases} \tag{4.16}$$

şeklinde olur. $EG - F^2 > 0$ olduğundan M regle yüzeyi H^3 hiperbolik uzayının spacelike bir yüzeyi olur. t değişkeninin tanım aralığı J olmak üzere tanım aralığında $t = t_0$ yani sabit alınırsa

$$\varphi_{t_0} : I \times t_o \to M, \varphi_{t_0}(s, t_0) = (\cosh t_o)\, \alpha(s) + (\sinh t_o)\, X(s) \tag{4.17}$$

eğrisi M regle yüzeyi için bir parametre eğrisi olur. Bu eğrinin teğet vektör alanı

$$A = (\cosh t_0 - a \sinh t_0)\, T(s) + (c \sinh t_0)\, \xi(s) \tag{4.18}$$

ile ifade edilebilir. M regle yüzeyi spacelike bir yüzey olduğundan $\langle A, A \rangle > 0$ ve φ_{t_0} spacelike bir eğridir. Ayrıca açıktır ki

$$\langle X, A \rangle = 0 \tag{4.19}$$

Açılabilir Regle Yüzeyler

Tanım 4.7 *H^3 Hiperbolik uzayında bir regle yüzeyin teğet düzlemleri ana jeodezikler boyunca aynı kalıyorsa o halde bu regle yüzeye açılabilir regle yüzey denir.*[28]

Teorem 4.11 *M, H^3 Hiperbolik uzayında spacelike bir regle yüzey olsun. Ana jeodezik boyunca teğet düzlemlerin aynı kalması için gerekli ve yeterli koşul $c = 0$ olmasıdır.*[28]

İspat. Kabul edelim ki M spacelike regle yüzeyinin ana jeodeziği boyunca teğet düzlemleri aynı kalsın. $t_0 \in I$ dan geçen $\varphi_{t_0} : I \times \{t_0\} \to M$ eğrisinin

$$A = (\cosh t_0 - b \sinh t_0)\, T(s) + (c \sinh t_0)\, \xi(s)$$

teğet vektör alanını düşünelim. φ_{t_0},M regle yüzeyinin parametre eğrisi olduğu için φ_{t_0} eğrisinin teğet vektörü olan A vektörü yüzeyin teğet düzleminde kalmak zorundadır. Bu ise $\{A, T\}$ sisteminin lineer bağımlı olması yani $c = 0$ olması ile mümkündür.

Tersine olarak kabul edelim ki $c = 0$ olsun. Bu durumda

$$A = (\cosh t_0 - b \sinh t_0)\, T(s)$$

ve

$$T_{\varphi(t_0, s)} M = Sp\{T, X\} = Sp\{T, A\}$$

olduğundan teğet düzlemler aynı kalır. ■

Sonuç 4.8 *H^3 Hiperbolik uzayında spacelike bir M regle yüzeyinin açılabilir olması için gerekli ve yeterli koşul $c = 0$ olmasıdır.*[28]

Sonuç 4.9 *H^3 Hiperbolik uzayında spacelike bir M regle yüzeyi için*

$$b = -\det\left(T, X, \alpha, \tilde{D}_T T\right) \text{ ve } c = -\det\left(T, X, \alpha, \tilde{D}_T X\right) \tag{4.20}$$

şeklindedir.[28]

İspat. (4.14) eşitliklerinden $\tilde{D}_T T$ vektör alanının değeri yerine yazılır ve determinantın özellikleri kullanılırsa

$$\det\left(T, X, \alpha, \tilde{D}_T T\right) = \det\left(T, X, \alpha, -\alpha + aX + b\xi\right)$$

olduğundan

$$b = -\det\left(T, X, \alpha, \tilde{D}_T T\right)$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde (4.26) eşitliklerinden $\tilde{D}_T X$ vektör alanının değeri yerine yazılır ve determinantın özellikleri kullanılırsa

$$\det\left(T, X, \alpha, \tilde{D}_T X\right) = \det\left(T, X, \alpha, -aT + c\xi\right)$$

olduğundan

$$c = -\det\left(T, X, \alpha, \tilde{D}_T X\right)$$

olarak elde edilir. ■

Uyarı 4.1 *Stereografik izdüşüm konform dönüşüm olduğu için, H^3 hiperbolik uzayının Minkowski modeli üzerindeki bir spacelike regle yüzeyi, H^3 hiperbolik uzayının Poincare modeli üzerinde görüntüleyebiliriz.*

Örnek 4.1 *H^3 hiperbolik uzayında M regle yüzeyi*

$$\varphi : I \times \mathbb{R} \to H^3 \text{ , } \varphi(s,t) = (\cosh t)\,\alpha(s) + (\sinh t)\,X(s)$$

şeklinde verilsin. Burada eğer

$$\alpha(s) = (\cosh s, \sinh s \cos s, \sinh s \sin s, 0)$$

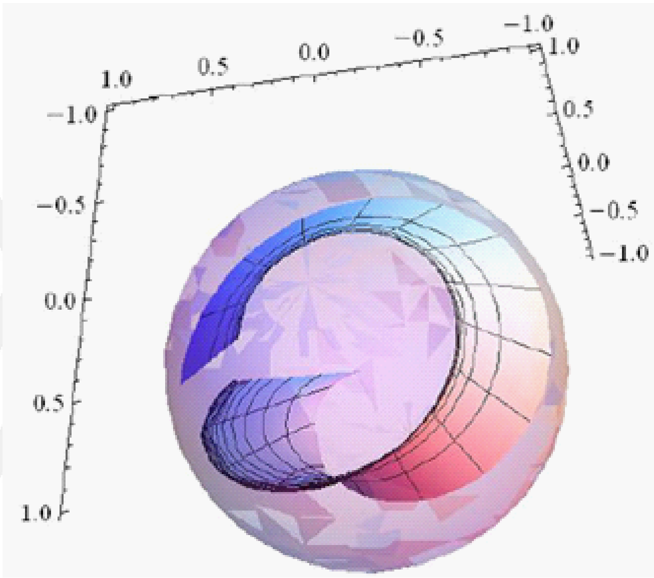
ve

$$X(s) = \left(\cosh s, \sqrt{2}\cos s, \sqrt{2}\sin s, \sinh s\right)$$

olarak seçilirse ohalde

$$\varphi(s,t)=\begin{pmatrix}\cosh t\cosh s+\sinh t\cosh s,\\ \cosh t\sinh s\cos s+\sqrt{2}\sinh t\cos s,\\ \cosh t\sinh s\sin s+\sqrt{2}\sinh t\sin s,\\ \sinh t\sinh s\end{pmatrix}$$

yüzeyi, H^3 hiperbolik uzayında spacelike bir regle yüzey olur. α dayanak eğrisi spacelike bir eğri olup $\langle\alpha(s),\alpha(s)\rangle=-1$ dir.



Şekil 4.2

H^3 Hiperbolik Uzayında Boğaz Noktası ve Boğaz NoktasınınYer Vektörü

Tanım 4.8 *H^3 Hiperbolik uzayında açılabilir olmayan bir M regle yüzeyi verilsin. M regle yüzeyinin komşu iki ana jeodeziğinin ortak dikmesi varsa bu dikmenin esas ana jeodeziği üzerindeki ayağına M regle yüzeyinin boğaz noktası denir.*[28]

Tanım 4.9 *H^3 Hiperbolik uzayında açılabilir olmayan bir M regle yüzeyinin ana jeodeziği dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktasının geometrik yerine M regle yüzeyinin boğaz eğrisi denir.*[28]

Açılabilir olmayan bir regle yüzeyin boğaz noktasının dayanak eğrisine olan uzaklığı w olmak üzere $\bar{\alpha}(s)$ yer vektörü

$$\bar{\alpha}(s,w)=(\cosh w)\,\alpha(s)+(\sinh w)\,X(s) \tag{4.21}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada $\alpha(s)$ dayanak eğrisinin yer vektörü ve $X(s)$ de ana jeodeziğe ait doğrultman vektörüdür. w parametresi regle yüzeyin dayanak eğrisinin yer vektörü ve doğrultman vektörü cinsinden bulunabilir. H^3 hiperbolik uzayında açılabilir olmayan M regle yüzeyinin esas ana jeodeziği

$$l_s^\alpha = (\cosh t)\,\alpha(s) + (\sinh t)\,X(s) \tag{4.22}$$

olmak üzere bu jeodezik ile komşu olan bir diğer ana jeodezik

$$l_{s+\Delta s}^\alpha = (\cosh t)\,\alpha(s+\Delta s) + (\sinh t)\,X(s+\Delta s) \tag{4.23}$$

olsun. Bu jeodeziklerin doğrultman vektörlerini sırasıyla $X(s)$ ve $X(s)+\bar{D}_{T(s)}X(s)$ olacak şekilde seçelim. P, P' ve Q, Q' komşu ana jeodeziklerin ortak dikmelerinin ana jeodezikler üzerindeki ayakları olsun. Bu durumda P ve Q farklı iki boğaz noktasıdır. İlk iki komşu ana jeodeziğin ortak dikmesinin doğrultusu

$$\alpha(s) \times X(s) \times \left[X(s) + \bar{D}_{T(s)}X(s)\right]$$

vektörünün bir katıdır. Buradan

$$\alpha(s) \times X(s) \times \left[X(s) + \bar{D}_{T(s)}X(s)\right] = \alpha(s) \times X(s) \times \bar{D}_{T(s)}X(s) \tag{4.24}$$

olur. Limit halinde PQ jeodeziği PP' jeodeziği ile çakışacak ve PQ jeodeziği boğaz eğrisinin teğeti olacaktır. Dolayısıyla

$$\langle X(s), PQ\rangle = 0 \text{ ve } \left\langle X(s) + \bar{D}_{T(s)}X(s), PQ\right\rangle = 0 \tag{4.25}$$

olacağından

$$\left\langle \bar{D}_{T(s)}X(s), PQ\right\rangle = 0 \tag{4.26}$$

elde edilir. Böylece

$$\left\langle \bar{D}_{T(s)}X(s), \bar{D}_{T(s)}\bar{\alpha}(s)\right\rangle = 0 \tag{4.27}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\bar{D}_{T(s)}\bar{\alpha}(s) = \tilde{D}_T\bar{\alpha} \tag{4.28}$$

olduğu açıktır. O halde (4.27) eşitliğinden

$$\left\langle \tilde{D}_{T(s)}X(s), \tilde{D}_{T(s)}\bar{\alpha}(s)\right\rangle = 0$$

olacağından

$$\frac{\sinh w}{\cosh w} = \frac{a}{a^2+c^2} \text{ veya } w = \operatorname{arctan} h\left(\frac{a}{a^2+c^2}\right) \tag{4.29}$$

olarak elde edilir. Böylece boğaz eğrisinin yer vektörü

$$\bar{\alpha}(s,w) = (\cosh w)\,\alpha(s) + \frac{a}{a^2+c^2}(\cosh w)\,X(s) \tag{4.30}$$

şeklinde ifade edilmiş olur.

Sonuç 4.10 *Açılabilir olmayan bir regle yüzeyin boğaz noktasının dayanak eğrisine olan uzaklığı sabittir yani*

$$w = \operatorname{arctan} h\left(\frac{a}{a^2+c^2}\right) = sabit$$

dir.[28]

Teorem 4.12 *H^3 hiperbolik uzayda açılabilir olmayan bir regle yüzeyin boğaz eğrisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır.*[28]

İspat. H^3 hiperbolik uzayda verilen bir regle yüzeyin farklı iki dayanak eğrisi α ve β olmak üzere regle yüzey

$$\varphi(t,v) = (\cosh v)\,\alpha(t) + (\sinh v)\,X(t)$$
$$\varphi(t,v) = (\cosh v)\,\beta(t) + (\sinh v)\,X(t)$$

denklemi ile verilsin. (4.30) ifadesinden açıktır ki bu regle yüzeyin boğaz eğrileri

$$\bar{\alpha}(t) = \cosh v\alpha(t) + \frac{a}{a^2+c^2}\cosh vX(t)$$
$$\bar{\beta}(t) = \cosh s\beta(t) + \frac{a}{a^2+c^2}\cosh sX(t)$$

şeklindedir. O halde

$$\bar{\alpha}(t) - \bar{\beta}(t) = 0$$

olur ki boğaz eğrisi dayanak eğrisinin seçilişinden bağımsızdır. ■

Teorem 4.13 *Açılabilir olmayan bir M spacelike regle yüzeyi verilsin. $\alpha(s)$ noktasından geçen ana jeodezik üzerinde $\varphi(s,v_0)$ noktasının boğaz noktası olması için gerekli ve yeterli koşul $\varphi(s,v_0)$ noktasındaki teğet düzlemin normalinin $\bar{D}_{T(s)}X(s)$ olmasıdır.*[28]

İspat. M açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzey olsun. Kabul edelim ki M yüzeyinin α dayanak eğrisi üzerindeki $\alpha(s)$ noktasından geçen ana jeodezik üzerinde $\varphi(s, v_0)$ noktasındaki teğet düzleminin normali $\bar{D}_T X$ olsun. $\varphi_{v_0} : I \times \{v_0\} \to M$ eğrisinin teğet vektör alanı

$$A = (\cosh v_0 - a \sinh v_0)\, T(s) + (c \sinh v_0)\, \xi(s)$$

olmak üzere

$$\left\langle \bar{D}_{T(s)} X(s), A \right\rangle = 0$$

dır. O halde

$$\frac{\sinh v_o}{\cosh v_0} = \frac{a}{a^2 + c^2}$$

bulunur. Bu ise $\varphi(s, v_0)$ noktasının boğaz noktası olması demektir.

Tersine olarak kabul edelim ki $\alpha(s)$ noktasından geçen ana jeodeziğe ait boğaz noktası $\varphi(s, v_0)$ olsun.

$$\left\langle \bar{D}_{T(s)} X(s), X(s) \right\rangle = 0$$

ve

$$\left\langle \bar{D}_{T(s)} X(s), A \right\rangle = -a(\cosh v_0 - a \sinh v_0) + c^2 \sinh v_0$$

şeklindedir. Öteyandan $\varphi(s, v_0)$ noktası boğaz noktası olduğundan

$$-a(\cosh v_0 - a \sinh v_0) + c^2 \sinh v_0 = 0$$

olur. Dolayısıyla

$$\left\langle \bar{D}_{T(s)} X(s), A \right\rangle = 0$$

yani $\varphi(s, v_0)$ noktasında teğet düzlemin bir normali $\bar{D}_{T(s)} X(s)$ olur. ■

Uyarı 4.2 *$\bar{D}_{T(s)} X(s)$ boğaz noktasında teğet düzlemin bir normali olmak üzere*

$$\left\langle \bar{D}_{T(s)} X(s), \bar{D}_{T(s)} X(s) \right\rangle = a^2 + c^2 > 0$$

olduğundan $\bar{D}_{T(s)} X(s)$ normal vektör alanı spacelike bir vektör alanıdır.

Teorem 4.14 *Açılabilir olmayan bir M spacelike regle yüzeyinin boğaz eğrisi*

$$\bar{\alpha}(s) = (\cosh w)\, \alpha(s) + \frac{a}{a^2 + c^2} (\cosh w)\, X(s)$$

spacelike bir eğridir.[28]

İspat. Teoremin ispatı için $\bar{\alpha}(s)$ boğaz eğrisinin teğet vektör alanının spacelike bir vektör alanı olduğunu göstermek yeterlidir. $\bar{\alpha}(s)$ boğaz eğrisinin teğet vektör alanı

$$\bar{D}_{T(s)}\bar{\alpha}(s) = \tilde{D}_{T(s)}\bar{\alpha}(s)$$

olmak üzere

$$\left\langle \tilde{D}_{T(s)}\bar{\alpha}(s), \tilde{D}_{T(s)}\bar{\alpha}(s) \right\rangle = \frac{c^2}{a^2+c^2}\cosh^2 w$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\left\langle \tilde{D}_{T(s)}\bar{\alpha}(s), \tilde{D}_{T(s)}\bar{\alpha}(s) \right\rangle > 0$$

olduğundan $\bar{\alpha}(s)$ boğaz eğrisi spacelike bir eğridir. ■

Spacelike Regle Yüzeyin Dağılma Parametresi

Spacelike bir M regle yüzeyinin dayanak eğrisi olarak boğaz eğrisini alırsak bu durumda boğaz noktasının dayanak eğrisine olan uzaklığı

$$w = \arctan h\left(\frac{a}{a^2+c^2}\right) = 0$$

olacağından $a = 0$ olur. O halde

$$\bar{D}_{T(s)}X(s) = -aT(s) + c\xi(s)$$

olmak üzere $a = 0$ olduğundan $\bar{D}_{T(s)}X(s)$ vektör alanı yüzeyin normali olan $\xi(s)$ ile lineer bağımlıdır. Dolayısıyla

$$\xi(s) = \lambda\bar{D}_{T(s)}X(s)$$

olacak şekilde $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ vardır. Öteyandan

$$\xi(s) = \varphi \wedge X \wedge T$$

ve

$$\varphi = (\cosh t)\,\alpha(s) + (\sinh t)\,X(s)$$

olduğundan

$$\xi(s) = \cosh t\,[\alpha(s) \wedge X(s) \wedge T(s)]$$

şeklinde olur. O halde

$$\lambda \bar{D}_{T(s)} X(s) = \cosh t \left[\alpha(s) \wedge X(s) \wedge T(s)\right]$$

eşitliğinin her iki tarafının $\bar{D}_{T(s)} X(s)$ ile iç çarpımını alırsak

$$\lambda = (\cosh t) \frac{\det\left(\alpha(s), X(s), T(s), \bar{D}_{T(s)} X(s)\right)}{\left\langle \bar{D}_{T(s)} X(s), \bar{D}_{T(s)} X(s)\right\rangle}$$

olarak elde edilir. Bu şekilde elde edilen λ ya spacelike regle yüzeyin dağılma parametresi denir. Burada $\bar{D}_{T(s)} X(s)$ vektör alanı yüzeyin normali ile lineer bağımlı olduğundan spacelike bir vektör alanıdır yani

$$\left\langle \bar{D}_{T(s)} X(s), \bar{D}_{T(s)} X(s)\right\rangle \neq 0$$

dır.

Teorem 4.15 *Bir M spacelike regle yüzeyinin açılabilir olması için gerek ve yeter koşul dağılma parametresinin sıfır olmasıdır.*[28]

İspat. Sonuç 4.8 den biliyoruz ki spacelike bir M regle yüzeyinin açılabilir olması için gerekli ve yeterli koşul $c = 0$ olması idi. Sonuç 4.9 dan ise

$$c = -\det\left(T, X, \alpha, \tilde{D}_T X\right)$$

olduğu gösterilmişti. Öteyandan spacelike bir M regle yüzeyinin dağılma parametresi

$$\lambda = (\cosh t) \frac{\det\left(\alpha(s), X(s), T(s), \bar{D}_{T(s)} X(s)\right)}{\left\langle \bar{D}_{T(s)} X(s), \bar{D}_{T(s)} X(s)\right\rangle}$$

olduğundan açıktır ki M regle yüzeyinin açılabilir olması için dağılma parametresinin $\lambda = 0$ olması hem gerekli hem yeterli koşuldur. ■

Tanım 4.10 *H^3 hiperbolik uzayında bir regle yüzeyin ana jeodeziklerinin her birisini dik kesen bir eğri varsa bu eğriye regle yüzeyin ortogonal yörüngesi denir.*[28]

Teorem 4.16 *Spacelike bir M regle yüzeyinin her noktasından bir tek ortogonal yörünge geçer.*[28]

İspat. Spacelike M regle yüzeyinin parametrizasyonu

$$\varphi : I \times J \to H^3 \text{ , } \varphi(s, v) = (\cosh v)\, \alpha(s) + (\sinh v)\, Z(s)$$

olsun. Ortogonal yörünge

$$\beta : \tilde{I} \to M, \beta(t) = [\cosh f(t)]\, \alpha(t) + [\sinh f(t)]\, Z(t)\,, \tilde{I} \subset I$$

şeklindedir. Şimdi $P_0 = \varphi(s_0, v_0)$ noktasından bir tek ortogonal yörünge geçeceğini gösterelim.

$$\bar{D}_{T(t)}\beta(t) = \tilde{D}_{T(t)}\beta(t) - \langle T(t)\,, \beta(t)\rangle\, \beta(t)$$

olduğundan açıktır ki

$$\bar{D}_{T(t)}\beta(t) = \tilde{D}_{T(t)}\beta(t)$$

şeklindedir. O halde

$$\left\langle \bar{D}_{T(t)}\beta(t)\,, Z(t)\right\rangle = 0$$

dır. Dolayısıyla $\langle Z(s)\,, Z(s)\rangle = 1$ olmak üzere

$$f(t) = -\int \langle \alpha'(t)\,, Z(t)\rangle\, dt + h$$

bulunur. Burada

$$-\int \langle \alpha'(t)\,, Z(t)\rangle\, dt = F(t)$$

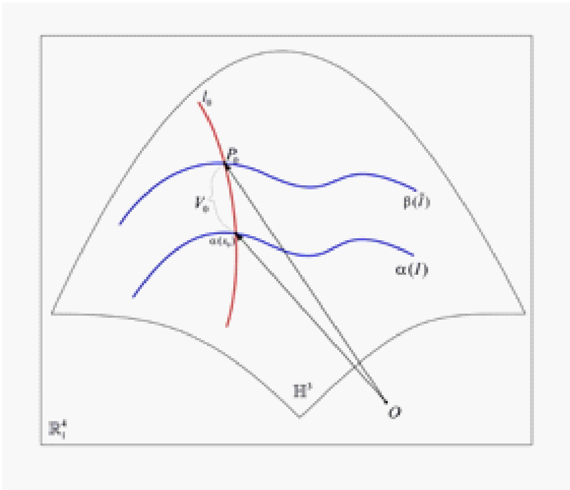
dersek

$$f(t) = F(t) + h$$

olur. h keyfi seçildiğinden $\left\langle \bar{D}_{T(t)}\beta(t)\,, Z(t)\right\rangle = 0$ koşulunu sağlayan bir çok eğri vardır. Şimdi bu eğrilerden $P_0 = \varphi(s_0, v_0)$ noktasından geçeni bulalım. Buna göre

$$P_0 = \cosh(F(t) + h)\, \alpha(t) + \sinh(F(t) + h)\, Z(t)$$

olacak biçimde bir t sayısı bulalım.



Şekil 4.3

$$P_0 = (\cosh v_o)\,\alpha(t_0) + (\sinh v_0)\,Z(t_0)$$

olduğundan

$$(\cosh v_o)\,\alpha(t_0) + (\sinh v_0)\,Z(t_0) = \cosh(F(t) + h)\,\alpha(t) + \sinh(F(t) + h)\,Z(t)$$

olur. Buradan $\alpha(t_0) = \alpha(t)$, $v_0 = f(t)$ bulunur. I aralığını α eğrisinin birebir olduğu bir aralık seçersek $t = t_0$ olur. Sonuç olarak P_0 noktasından geçen bir tek ortogonal yörünge vardır. Bu yörünge her jeodeziği keseceğinden $\tilde{I}$=I olmak zorundadır. ■

Teorem 4.17 *M açılabilir olmayan spacelike bir regle yüzey olsun. M nin her iki ana jeodeziği arasında kalan ortogonal yörüngeler boyunca en uzun uzaklık $\varphi_t : I \to M$ eğrisi boyunca ölçülen*

$$t = \frac{1}{2}\operatorname{arctan} h\left(\frac{2a}{1 + a^2 + c^2}\right)$$

uzaklığıdır.[28]

İspat. $s_1, s_2 \in I$ ve $s_1 < s_2$ olmak üzere $\alpha(s_1)$ ve $\alpha(s_2)$ noktalarından geçen iki ana jeodeziği göz önüne alalım. Bu iki ana jeodezik arasında $t = t_0$ ortogonal yörüngesi boyunca elde edilen uzaklığı $d(t)$ ile gösterelim.

$$A = (\cosh t - a\sinh t)\,T(s) - c\,(\sinh t)\,\xi(s)$$

olmak üzere

$$d(t) = \int\limits_{s_1}^{s_2} \|A\| \, ds = \sqrt{(a^2+c^2)\sinh^2 t - 2a\cosh t \sinh t + \cosh^2(t)}\,(s_2 - s_1)$$

olur. $d(t)$ nin maksimum değer alması

$$d'(t) = 0$$

olması ile mümkündür. Dolayısıyla

$$d'(t) = \left(a^2+c^2\right)\sinh t \cosh t - a\left(\sinh^2 t + \cosh^2 t\right) + \cosh t \sinh t = 0$$

ve buradan da

$$t = \frac{1}{2}\operatorname{arctan} h\left(\frac{2a}{1+a^2+c^2}\right)$$

olduğu açıktır. ■

Teorem 4.18 *H^3 hiperbolik uzayında bir M spacelike regle yüzeyinin jeodezikleri M yüzeyi üzerinde hem asimptotik hemde jeodezik eğrilerdir.*[28]

İspat. Spacelike M regle yüzeyinin bir jeodeziğinin teğet vektör alanı X olsun. M yüzeyi üzerindeki her bir jeodezik H^3 hiperbolik uzayında bir jeodezik olacağından

$$\bar{D}_X X = 0$$

dır. Gauss denkleminden M spacelike regle yüzeyi üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu D olmak üzere

$$\bar{D}_X X = D_X X - \left\langle S^{\pm}(X), X\right\rangle \xi$$

dir. Buradan

$$D_X X = \left\langle S^{\pm}(X), X\right\rangle \xi$$

olur. $D_X X \in \chi(M)$ ve $\langle S^{\pm}(X), X\rangle \xi \in \chi^{\perp}(M)$ dir. Ayrıca M spacelike bir yüzey yani üzerinde tanımlı metrik nondejenere olduğundan

$$\chi\left(H^3\right) = \chi(M) \oplus \chi^{\perp}(M) \text{ ve } \chi(M) \cap \chi^{\perp}(M) = \{0\}$$

dır. O halde

$$D_X X = 0 \text{ ve } \left\langle S^{\pm}(X), X\right\rangle = 0$$

elde edilir ki bu da M spacelike regle yüzeyinin ana jeodezikleinin hem asimptotik hemde jeodezik eğriler olacağını gösterir. ■

Teorem 4.19 *M, H^3 hiperbolik uzayında spacelike bir regle yüzey olsun. M regle yüzeyinin hiperbolik Gauss eğrilik fonksiyonu $\bar{K}_h^{\pm}(p)$ olmak üzere*

$$\forall p \in M \text{ } i\c{c}in \text{ } \bar{K}_h^{\pm}(p) \leq 0$$

dır.[28]

İspat. $p \in M$ noktasındaki ana doğrunun teğet vektör alanı X olsun. $\chi(M)$ nin $\{X, Y\}$ ortogonal bazını alalım. X ve Y spacelike vektör alanıdırlar. M yüzeyinin $S^{\pm}$ şekil operatörünü ortonormal bazlar cinsinden

$$\begin{aligned} S^{\pm}(X) &= \langle S^{\pm}(X), X\rangle X + \langle S^{\pm}(X), Y\rangle Y \\ S^{\pm}(Y) &= \langle S^{\pm}(Y), X\rangle X + \langle S^{\pm}(Y), Y\rangle Y \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz. O halde $S^{\pm}$ şekil operatörüne karşılık gelen matris

$$S^{\pm} = \begin{bmatrix} \langle S^{\pm}(X), X\rangle & \langle S^{\pm}(X), Y\rangle \\ \langle S^{\pm}(Y), X\rangle & \langle S^{\pm}(Y), Y\rangle \end{bmatrix}$$

dir. Dolayısıyla $p \in M$ noktasında M regle yüzeyinin hiperbolik Gauss eğrilik fonksiyonu

$$\bar{K}_h^{\pm} = \det S_p^{\pm} = -\left\langle S^{\pm}(X), Y\right\rangle^2$$

olacağından

$$\forall p \in M \text{ için } \bar{K}_h^{\pm}(p) \leq 0$$

dır. ■

Teorem 4.20 *M spacelike bir regle yüzey olsun. M yüzeyinin dayanak eğrisinin birim teğet vektör alanı T,dayanak eğrisinin yer vektörü α, M yüzeyinin ana jeodeziğinin birim teğet vektör alanı (doğrultman vektörü) X ve yüzeyin birim normal vektör alanı ξ olmak üzere*

$$\begin{cases} \alpha(s) \wedge T(s) \wedge X(s) &= \xi(s) \\ T(s) \wedge X(s) \wedge \xi(s) &= -\alpha(s) \\ X(s) \wedge \xi(s) \wedge \alpha(s) &= T(s) \\ \xi(s) \wedge \alpha(s) \wedge T(s) &= -X(s) \end{cases}$$

şeklindedir.[28]

KAYNAKLAR

[1] **Ratcliffe,** (1994) *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer-Verlag, Berlin, 36 , 1-72.

[2] **O'neil, B. ,** (1983) *Semi-Riemannian Geometry,* Academic Press., London.

[3] **Lopez, R. , Munteanu, M., I.,** (2011) *Constant angle surfaces in Minkowski space*, Bulletin of the Belgian Math. So. Simon Stevin, 18:2, 271-286.

[4] **Izumiya, S., Saji, K., Takahashı, M., (2010) *Horospherical flat surfaces in Hyperbolic 3-space*, J.Math.Soc.Japan, 87, 789-849**

[5] **Izumiya, S., Pei, D., Fuster, M.**, (2006) *The horospherical geometry of surfaces ın hyperbolic 4-spaces*, Israel Journal of Mathematıcs, 154, 361-379.

[6] **Mert, T., Karlığa, B., (2014),** *Hiperbolik ve De Sitter Uzaylarında Sabit Açılı Yüzeyler*, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, 204.1.049.

[7] **Izimuya, S., Pei, D., Sano, T.**, (2003) *Sıngularities of hyperbolic gauss map*, London Math.Soc.,3:485-512.

[8] **Munteanu, M., I., Nistor, A., I.**, (2009) *A new approach on constant angle surfaces in E^3* , Turk T.Math.,33, 169-178.

[9] **Takızawa, C., Tsukada, K.**, (2009) *Horocyclic surfaces in hyperbolic 3-space*, Kyushu J.Math., 63, 269-284.

[10] **Izumiya, S., Fuster, R.**, (2006) *The horospherical Gauss-Bonnet type theorem in hyperbolic space*, J.Math.Soc.Japan, 58, 965-984.

[11] **Fenchel, W.**, (1989) *Elementary Geometry in Hyperbolic Space*, Walter de Gruyter , New York.

[12] **Cermelli, P., Di Scala, A., J.**, (2007) *Constant angle surfaces in liquid crystals*, Phylos. Magazine, 87, 1871-1888.

[13] **Di Scala, A., J., Ruiz Hernandez, G.**, (2009) *Helix submanifolds of Euclidean space*, Monatsh. Math. 157, 205-215.

[14] **Ruiz Hernandez, G.**, (2008) *Helix, shadow boundary and minimal submanifolds*, Illinois J. Math.,52, 1385-1397.

[15] **Dillen, F., Fastanakels, Van der Veken, J., Vrancken, L.,** (2007) *Constant angle surfaces in $S^2{\times}R$ $, Monaths.Math., 152, 89-96.$*

[16] **Dillen, F., Munteanu, M., I.**, (2009) *Constant angle surfaces in* $H^2 \times R$, $Bull.Braz.Math.Soc., 40, 85-97.$

[17] **Fastanakels, J., Munteanu, M., I., Van der Veken, J.**, (2011) *Constant angle surfaces in the Heisenberg group*, Acta Math. Sinica (English Series), 27, 747-756.

[18] **Lopez, R.**, (2008) *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski Space*, Instituto de Matematica e Estatıstica (IME-USP) University of Sao Paulo, Brasil, 1-4.

[19] **Hacısalihoğlu, H.H.**, (1998) *İki ve Üç Boyutlu Uzaylarda Dönüşümler ve Geometriler*, A.Ü.Fen Fakültesi, Ankara, 18-43.

[20] **Vinberg, E.B.**, (1993) *Geometry II, Encyclopaedia of Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, 4-79.

[21] **Turgut, A.,Hacısalihoğlu, H.,H., (1997)** *Timelike ruled surface in the Minkowski 3-space*, Far East J.Math.Sci, 83-90.

[22] **Turgut, A.**, (1995) *Spacelike and Timelike Ruled Surface on the Minkowski 3-Space*, Ph. D. Thesis, Ankara University.

[23] **Izumıya, S., Peı, D., Fuster, M.,** (2006) *The horospherical geometry of surfaces ın hyperbolic 4-spaces*, Israel Journal of Mathematıcs, 154, 361-379.

[24] **Sabuncuoğlu, A**., (1982) *Generelized Ruled Surface*, Associate Proffesorshiph Thesis, Ankara University.

[25] **Thas, C**., (1979) *A gauss map on hypersurfaces of submanıfolds ın Euclıdean spaces,* J.Korean Math.Soc., 16, 17-27.

[26] **Fencel,W.** (1989) *Elementary Geometry in Hyperbolic Space*, Walter de Gruyter, New York.

[27] **Thas, C**., (1979) *A gauss map on hypersurfaces of submanıfolds ın Euclıdean spaces*, J.Korean Math.Soc., 16, 1.

[28] **Mert, T**., (2018), *Spacelike Ruled Surfaces in Hyperbolic 3-Space*, Cumhuriyet Science Journal, 29-2, 314-324.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Nildem Kevser GÖKTAN
Doğum Yeri ve Tarihi	Almanya, 13.10.1992
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Seyrantepe mah. fidanlık cad. fidanlık evler A/1 blok 3/5 Sivas
E-posta Adresi	nldmgktn@hotmail.com

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Sivas Lisesi, 2010
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü, 2015
Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri, 2018