T. C.
CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ZAMAN SKALASINDA PARAMETREYE BAĞLI STURM LIOUVILLE PROBLEMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ayşegül AKTAŞ
(20169237002)

Matematik Ana Bilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN

SİVAS
NİSAN 2019

Ayşegül AKTAŞ ın hazırladığı ve **"ZAMAN SKALASINDA PARAMETREYE BAĞLI STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı	**Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN** Cumhuriyet Üniversitesi	………………
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ** Cumhuriyet Üniversitesi	………..………
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Murat ŞAT** Erzincan Üniversitesi	………..……...

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. İsmail ÇELİK
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

*Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (CÜBAP) Komisyonu tarafından **F-582** Nolu proje kapsamında desteklenmiştir.*

Çalışma sırasında bana destek olan aileme ve değerli hocama...

ETİK

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

1.04.2019

Ayşegül AKTAŞ

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Bilgi ve deneyimlerinden sürekli yararlandığım, tezin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN'a çok teşekkür ederim.

ÖZET

ZAMAN SKALASINDA PARAMETREYE BAĞLI STURM-LIOUVILLE PROBLEMLERİ

Ayşegül AKTAŞ

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN
2019, 51+xi sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünde, konunun önemi ve tarihsel gelişimi anlatılmaktadır. İkinci bölümde, zaman skalası teorisinin temel kavramları ile birinci ve ikinci mertebeden lineer dinamik denklemlerin genel teorisine yer verilmektedir. Üçüncü ve son bölümde, bir zaman skalası üzerinde sınır koşulları parametreye bağlı Sturm-Liouville tipinde bir sınır değer problemi ele alınıp, bu problemin öz değer ve öz fonksiyonlarının özellikleri incelenmektedir.

Anahtar kelimeler: Zaman Skalası, Dinamik Denklemler, Sturm-Liouville problemleri.

ABSTRACT

PARAMETER-DEPENDENT STURM-LIOUVILLE PROBLEMS ON TIME SCALE

Ayşegül AKTAŞ

Master of Science Thesis
Department of Mathematics
Supervisor: Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN

2019, 51+xi pages

This thesis consists three chapters. In introduction, the importance and historical development of the subject is explained. In the second chapter, the basic concepts of time scale theory and the general theory of first and second order linear dynamic equations is explained. In the last chapter, a type of Sturm-Liouville boundary value problem with parameter-dependent boundary conditions is considered and the properties of eigenvalues and eigenfunctions of this problem are investigated.

Key Words: Time scale, Dynamic equations, Sturm-Liouville problems

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{T}$	Zaman skalası
C_{rd}	Sağ-yoğun sürekli (rd-sürekli) fonksiyonların sınıfı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\circ$	Bileşke gösterimi
σ	İleri sıçrama operatörü
ρ	Geri sıçrama operatörü
μ	Graininess operatörü
σ^{n}	$\sigma o \sigma^{n-1}$, n>1
f^{σ}	$f o \sigma$
f^{Δ}	f fonksiyonunun Δ-türevi
$f^{\Delta\Delta}$	f fonksiyonunun ikinci mertebeden Δ-türevi
W(y,z)	Wronsky determinantı (Wronskiyan)
$\mathcal{R}$	Regresif fonksiyonlar kümesi
<x,y>	x ve y vektörlerinin iç çarpımı
$\int_a^b f(t)\Delta t$	f fonksiyonunun a dan b ye Δ-integrali

1. GİRİŞ

Fonksiyonlar teorisinin en önemli ve en temel problemlerinden biri fonksiyonun bağlı olduğu değişkenlere göre değişim hızının belirlenmesidir. Matematiksek olarak bu problem türevle açıklanır. Fakat uygulamalı bilimlerde karşılaşılan bir çok problem matematiksel modellendiğinde tanım kümesi ayrık noktalardan oluşan fonksiyonlar ortaya çıkar. Ayrık kümelerde tanımlı fonksiyonlar için klasik analizdeki türev tanımlanamamakta fakat türevin yerine bağımlı ve bağımsız değişkenlerdeki değişim oranı şeklinde tanımlanan farklı kavramlar verilmektedir.

Klasik analizde, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde veya $\mathbb{R}$'nin bir $[a,b]$ alt aralığında tanımlı olan bir f fonksiyonunun bir $t \in (a,b)$ noktasındaki türevi

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti ile açıklanır. Buna karşın tanım kümesi $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesi olan bir f fonksiyonu için bir $t \in \mathbb{Z}$ noktasındaki ileri fark türevi

$$\triangle f(t) = f(t+1) - f(t)$$

şeklinde, geri fark türevi ise

$$\triangledown f(t) = f(t) - f(t-1)$$

şeklinde tanımlanır.

$h > 0$ herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$$

kümesi de ayrık noktalardan oluşan bir kümedir. $''h - sayılar''$ kümesi olarak adlandırılan bu kümede tanımlı bir fonksiyonun bir $t \in h\mathbb{Z}$ noktasındaki türevi aşağıdaki şekilde tanımlanır

$$\triangle_h f(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Son yıllarda popüler olan bir diğer ayrık küme de $q > 1$ bir reel sayı olmak üzere

$$q^{\mathbb{N}_0} = \left\{q^k : k = 0, 1, 2, ...\right\}$$

kümesidir. $''q - sayılar''$ kümesi olarak isimlendirilen bu kümedeki bir türev kavramı

$$D_q f(t) = \frac{f(qt) - f(t)}{qt - t}$$

formülü ile verilir.

Görüldüğü gibi, fonksiyonun tanımlı olduğu kümenin yapısı değiştiğinde türev kavramını açıklayan formülün de değişmesi gerekmektedir. 1988 yılında Stefan Hilger tarafından hazırlanan doktora tezinde ayrık analiz ile sürekli analizi bir çatı altında birleştirmek amacıyla zaman skalası teorisi ortaya atılmıştır. Bunun için de her iki teorideki türev kavramları tek bir tanım yardımıyla birleştirilmiştir. Hilger, $\mathbb{R}$'nin boş kümeden farklı herhangi bir kapalı alt kümesini zaman skalası diye adlandırmış ve zaman skalasında, tüm sürekli ve ayrık kümelerdeki türev kavramlarını genelleştiren bir türev tanımı vermiştir. Böylece sürekli analizdeki ve ayrık analizdeki türev, integral, diferansiyel denklem, başlangıç ya da sınır değer problemleri gibi kavramlar zaman skalasına aktarılmıştır.

Zaman skalası diferansiyel ve fark denklemlerini birlikte ifade etmemizi sağlar. Zaman skalasında tanımlanan türevli denklemlere dinamik denklemler denir. Herhangi bir zaman skalasındaki bir dinamik denklem, hem sürekli analizdeki diferansiyel denklemlerden hem de ayrık analizdeki fark denklemlerinden daha geneldir. $\mathbb{R}$'de tanımlı diferansiyel denklemler veya $\mathbb{Z}$'de tanımlı fark denklemleri için ayrı sonuçlar vermek yerine, zaman skalasında tanımlanan genel bir dinamik denklem göz önüne alınarak inceleme yapılabilir. Ayrıca zaman skalası sadece $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{Z}$ için değil farklı yapıdaki sürekli ya da ayrık kümeler üzerinde araştırma yapma imkanı sağlar.

Özellikle biyoloji, tıp ve ekonomi problemlerinin bir çoğu ayrık kümelerde analiz yapmayı gerektirir. Üstelik, zamana bağımlı çeşitli değişkenleri bulunduran bu tip problemler türev yardımıyla modellenmektedir. Bu ise zaman skalası teorisinin uygulamalı bilimlerdeki önemini ortaya koymaktadır.

Zaman skalasında gerek birinci mertebeden gerekse yüksek mertebeden doğrusal denklemler, dinamik denklemler teorisinin en temel konularındandır. Özel olarak ikinci mertebeden bir dinamik denklem olan Sturm-Liouville denklemi uygulamalı bilimlerdeki problemlerde yaygın olarak ortaya çıkar. Zaman skalası $\mathbb{R}$ olduğunda yani sürekli analizde Sturm-Liouville diferansiyel denklemi ile ilgili oldukça geniş bir literatür bulunmaktadır. Sturm Liouville diferansiyel denklemi ile üretilen operatörlerinin spektral teorisi ile ilgili ilk sonuçlar Bernoulli, D'Alembert, Euler, Liouville ve Sturm'a aittir. 1836'da Sturm ve Liouville, belirli koşullar altında Sturm Liouville denklemini ve belli sınır koşullarını sağlayan sıfırdan farklı $y(x)$ fonksiyonlarının varlığına olanak veren λ sayılarının, yani özdeğerlerin, ayrık bir küme oluşturduğunu ispatlamışlardır. Günümüze kadar bu tip denklemler üzerine kurulan problemler kapsamlı şekilde çalışılmış ve oldukça önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Zaman skalasında Sturm Liouville teorisi ilk olarak Erbe and Hilger tarafından 1993'de ele alınmıştır. Herhangi bir zaman skalasında, çeşitli Sturm-Liouville problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonlarının özellikleri Agarwal, R.P., Bohner, M., Wong, P.J.Y.(1999); Erbe, L., Peterson, A. (2000); Davidson, F.A., Rynne, B.P. (2007); Guseinov, G.S (2007 ve 2008); Kong, Q. (2008); Amster, P., De Na´poli, P., Pinasco, J.P. (2008 ve 2009); Huseynov, A., Bairamov, E. (2009); çalışmalarında ele alınmıştır. Diferansiyel denklemler ve fark denklemleri için parametreye bağlı sınır koşullu spektral problemlerle ilgili geniş bir literatür mevcut olsa da zaman skalasında bu tip problemler üzerine yapılan çalışma sayısı oldukça azdır. Allahverdiev ve arkadaşları (2017) ve Özkan (2017) çalışmaları zaman skalaları üzerinde parametreye bağımlı sınır koşullu Sturm-Liouville problemlerine örnek gösterilebilir.

Bu tezde zaman skalası teorisinin temel kavramları ile birinci ve ikinci mertebeden doğrusal dinamik denklemlerin genel teorisi işlenmekte ve zaman skalası üzerinde kurulan parametreye bağlı sınır koşullu Sturm-Liouville sınır değer problemi ele alınmaktadır. Birinci bölümde konunun önemi ve tarihsel gelişimi; ikinci bölümde ise zaman skalası teorisinin temel kavramları ile birinci ve ikinci mertebeden doğrusal dinamik denklemlerin genel teorisi işlenmiştir. İkinci bölümde verilen tüm sonuçlar Bohner ve Peterson, (2001 ve 2003) eserlerinden alınmış olup bu sonuçların ispatları için bu eserler kaynak gösterilmektedir. Orijinal sonuçlardan oluşan üçüncü ve son bölümde, bir zaman skalası üzerinde kurulan parametreye bağlı sınır koşullu Sturm-Liouville probleminin bazı çözümleri incelenmiş; problemin özdeğer ve özfonksiyonlarının önemli özellikleri verilmiştir.

2. LİNEER DİNAMİK DENKLEMLERİN TEMEL KAVRAMLARI

2.1 Delta-türev ve Delta-integral

Tanım 2.1.1: Reel sayılar kümesinin boş kümeden farklı, kapalı herhangi bir $\mathbb{T}$ alt kümesine zaman skalası (time scale) denir (Bohner ve Peterson, 2001). Örneğin,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{R},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{N},\ \mathbb{N}_0,\ \ \{0,1\} \cup [2,3] \cup \{4\}\,,\\
&h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}\,, \quad h > 0\\
&q^{\mathbb{N}_0} = \left\{q^k : k \in \mathbb{N}_0\right\}, \quad q > 1\\
&\mathbb{K}_q = \left\{q^k : k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{0\}
\end{aligned}$$

kümeleri birer zaman skalasıdır.
$\delta > 0$ verilen bir reel sayı olmak üzere $t_0 \in \mathbb{T}$ noktasının δ-komsuluğu $U_\delta(t_0) = \{t \in \mathbb{T} : |t - t_0| < \delta\}$ şeklinde tanımlanır. Bunun yardımıyla zaman skalasında verilen bir dizinin limiti, bir fonksiyonun sürekliliği ve sürekli fonksiyonların genel özellikleri klasik analizde olduğu gibi verilebilir.
$I \subset \mathbb{R}$ herhangi bir aralık olmak üzere bir $\mathbb{T}$ zaman skalasındaki bir $I_\mathbb{T}$ aralığı $I_\mathbb{T} = I \cap \mathbb{T}$ şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.1.2: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere,

$$\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T},\ \sigma(t) = \begin{cases} \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}\,, & t \neq \sup \mathbb{T} \\ t, & t = \sup \mathbb{T} \end{cases}$$

$$\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T},\ \rho(t) = \begin{cases} \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}\,, & t \neq \inf \mathbb{T} \\ t, & t = \inf \mathbb{T} \end{cases}$$

$$\mu : \mathbb{T} \to [0,\infty), \quad \mu(t) = \sigma(t) - t.$$

şeklinde tanımlanan σ, ρ ve μ fonksiyonlarına sırasıyla ileri sıçrama operatörü, geri sıçrama operatörü ve graininess operatörü denir (Bohner ve Peterson, 2001).
$\mathbb{T}$'nin kapalı olmasından her $t \in \mathbb{T}$ için $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ ve $\rho(t) \in \mathbb{T}$ olduğu açıktır.

Örnek 2.1.3:

a. $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise tanımdan her $t\in\mathbb{R}$ için

$$\sigma(t)=\inf\{s\in\mathbb{R}:s>t\}=\inf(t,\infty)=t$$

ve benzer şekilde

$$\rho(t)=\sup\{s\in\mathbb{R}:s<t\}=\sup(-\infty,t)=t$$

bulunur. Graniniess μ fonksiyonu

$$\mu(t)=\sigma(t)-t=t-t=0$$

şeklinde olup, bu eşitlik $\forall t\in\mathbb{R}$ için sağlandığından $\mu\equiv 0$ dır.

b. $\mathbb{T}=h\mathbb{Z}$ ise her $t\in h\mathbb{Z}$ için

$$\sigma(t)=\inf\{t+h,t+2h,t+3h,...\}=t+h$$

$$\rho(t)=\sup\{...,t-3h,t-2h,t-h\}=t-h$$

$$\mu\equiv h$$

bulunur.

Özel olarak $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise her $t\in\mathbb{Z}$ için $\sigma(t)=t+1$, $\rho(t)=t-1$ ve $\mu\equiv 1$ dir.

c. $\mathbb{T}=\mathbb{K}_q=q^{\mathbb{Z}}\cup\{0\}$, $q>1$ halinde her $t\in\mathbb{K}_q$ ve $t>0$ için

$$\sigma(t)=\inf\left\{qt,q^2t,q^3t,...\right\}=qt$$

$$\rho(t)=\sup\left\{...,\frac{1}{q^3}t,\frac{1}{q^2}t,\frac{1}{q}t\right\}=\frac{1}{q}t$$

ve $t=0$ için

$$\sigma(0)=\rho(0)=0$$

dır. Dolayısıyla her $t\in\mathbb{K}_q$ için

$$\sigma(t)=qt,\ \rho(t)=\frac{1}{q}t$$

yazılabilir.

d. $\mathbb{T}=\mathbb{N}$ ise her $t\in\mathbb{N}$ için

$$\sigma(t)=t+1$$

$$\rho(t)=\begin{cases} t-1, & t>1 \\ 1, & t=1 \end{cases}$$

bulunur.

e. $\mathbb{T}=\{0,1\}\cup[2,3]\cup\{4\}$ ise her $t\in\mathbb{T}$ için

$$\sigma(t)=\begin{cases} t, & t\in[2,3)\cup\{4\}, \\ t+1, & t\in\{0,1,3\} \end{cases}$$

$$\rho(t)=\begin{cases} t, & t\in\{0\}\cup(2,3], \\ t-1, & t\in\{1,2,4\} \end{cases}$$

bulunur.

Tanım 2.1.4: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası ve $t\in\mathbb{T}$ olmak üzere, $\sigma(t)=t$ ise t'ye sağ yoğun nokta, $\sigma(t)>t$ ise t'ye sağ saçılmış nokta, $\rho(t)=t$ ise t'ye sol yoğun nokta ve $\rho(t)<t$ ise t'ye sol saçılmış nokta denir. Hem sol yoğun hem de sağ yoğun olan noktaya yoğun nokta adı verilir. $\rho(t)<t<\sigma(t)$ ise t izole noktadır (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 2.1.5: $\mathbb{T}=[0,2]\cup\{3\}\cup[4,5]$ zaman skalası için

$t_0=0$: sağ yoğun, $\qquad \sigma(0)=0$

$t_1=2$: sağ saçılmış ve sol yoğun, $\qquad \sigma(2)=3$ ve $\rho(2)=2$

$t_2=5$: sol yoğun, $\qquad \rho(5)=5$

$t_3=4$: sol saçılmış ve sağ yoğun, $\qquad \sigma(4)=4$ ve $\rho(4)=3$

$t_4=3$: izole, $\qquad \sigma(3)=4$ ve $\rho(3)=2$

$t_5=1$: yoğun, $\qquad \sigma(1)=\rho(1)=1$

Tanım 2.1.6: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere

$$\mathbb{T}^k := \begin{cases} \mathbb{T} - \{m\}, & \mathbb{T} \text{ sol-saçılmış bir maksimum } m \text{ noktasına sahipse} \\ \\ \mathbb{T}, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

kümesi $\mathbb{T}$'deki türevlenebilme bölgesi olarak adlandırılır (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.1.7: Kabul edelim ki

$$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$$

bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için t'nin en az bir $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ komşuluğu, her $s \in U$ elemanı için

$$\left| [f(\sigma(t)) - f(s)] - f^{\triangle}(t)[\sigma(t) - s] \right| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde mevcut ise, f'e t noktasında $\Delta - diferansiyellenebilir$ veya $\triangle - türevlenebilir$ fonksiyon ve $f^{\triangle}(t)$ sayısına f fonksiyonunun t noktasındaki delta türevi veya Hilger türevi denir. Bununla birlikte, $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $f^{\triangle}(t)$ mevcut ise f 'ye $\mathbb{T}^k$'da Δ-diferansiyellenebilirdir denir .

$$f^{\triangle} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu f 'nin $\mathbb{T}^k$'daki türevi(delta türevi) olarak adlandırılır (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.1.8: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin ve $t \in \mathbb{T}^k$ olsun. O halde

(i) Eğer f fonksiyonu t noktasında $\triangle$-türevlenebilirse t'de süreklidir.

(ii) Eğer f, t'de sürekli ve t bir sağ saçılmış nokta ise f, t'de $\triangle$-türevlenebilirdir ve

$$f^{\triangle}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t}$$

eşitliği geçerlidir.

(iii) Eğer t sağ yoğun nokta ise f'nin t'de $\triangle$-türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul sonlu

$$\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limitinin var olmasıdır. Bu durumda türev

$$f^{\triangle}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

eşitliği ile hesaplanabilir.

(iv) f, t'de $\triangle$-türevlenebilir ise

$$f^{\sigma}(t) = f(t) + \mu(t) . f^{\triangle}(t)$$

eşitliği geçerlidir. Burada $f^{\sigma}(t) = f(\sigma(t))$ dir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanımdan, $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise f'nin Δ-türevi

$$f^{\triangle}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

şeklindedir. Yani $\triangle$-türev $\mathbb{R}$ üzerinde klasik türevle çakışmaktadır. Diğer yandan $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $t \in \mathbb{Z}$'de Δ-diferansiyellenebilir ve

$$f^{\triangle}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t+1) - f(t) = \triangle f(t)$$

dir.

Örnek 2.1.9:

$\mathbb{T}$ herhangi zaman skalası olmak üzere aşağıdaki eşitliklerin geçerli olduğu türev tanımından elde edilebilir (Bohner ve Peterson, 2001).

a. Herhangi bir c sabiti için $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f(t) = c$ ise $f^{\triangle}(t) \equiv 0$.

b. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f(t) = ct$ ise $f^{\triangle}(t) \equiv c$.

c. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^2$ ise $f^{\triangle}(t) = t + \sigma(t)$.

d. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^n$ ise $f^{\triangle}(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} t^{n-k} \sigma^{k-1}(t)$.

e. $f : \mathbb{T} \cap (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sqrt{t}$ ise $f^{\triangle}(t) = \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{\sigma(t)}}$.

f. $f : \mathbb{T} - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{t}$ ise $\sigma(t) \neq 0$ için $f^{\triangle}(t) = -\frac{1}{t\sigma(t)}$.

Örnek 2.1.10:

Bazı özel zaman skalalarında bazı fonksiyonların türevleri aşağıda verilmektedir.

a. $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise $\sigma(t) = t$ olduğundan

$$\left(t^2\right)^{\triangle} = 2t.$$

b. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ ise $\sigma(t) = t + h$ olduğundan

$$\left(t^2\right)^{\triangle} = t + (t + h) = 2t + h.$$

c. $\mathbb{T} = \mathbb{K}_q$ ise $\sigma(t) = qt$ olduğundan

$$\left(t^2 + 3t - 2\right)^{\triangle} = t + qt + 3.$$

d. $\mathbb{T} = \mathbb{N}_0^{\frac{1}{2}} = \left\{\sqrt{k} : k \in \mathbb{N}_0\right\}$ ise $\sigma(t) = \sqrt{t^2 + 1}$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left(t^3\right)^{\triangle} &= t^2 + t\sigma(t) + \sigma^2(t) \\ &= 2t^2 + t\sqrt{t^2 + 1} + 1. \end{aligned}$$

e. $\mathbb{T} = \left\{2^{\left(2^k\right)} : k \in \mathbb{N}_0\right\}$ ise $\sigma(t) = t^2$ olduğundan

$$\begin{aligned} \left(t^4\right)^{\triangle} &= t^3 + t^2\sigma(t) + t\sigma^2(t) + \sigma^3(t) \\ &= t^6 + t^5 + t^4 + t^3 \end{aligned}$$

Teorem 2.1.11: $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında $\triangle$-türevlenebilir olduğunu varsayalım. Bu durumda:

(i) $f + g$, bir α sabiti için αf ve fg fonksiyonları da t'de $\triangle$-türevlenebilirdir. Ayrıca t noktasında

$$\begin{aligned} (f + g)^{\triangle}(t) &= f^{\triangle}(t) + g^{\triangle}(t) \\ (\alpha f)^{\triangle}(t) &= \alpha f^{\triangle}(t) \\ (fg)^{\triangle}(t) &= f^{\triangle}(t)\, g(t) + f(\sigma(t))\, g^{\triangle}(t) \\ &= f(t)\, g^{\triangle}(t) + f^{\triangle}(t)\, g(\sigma(t)) \end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir.

(ii) Eğer $g(t)\,g(\sigma(t)) \neq 0$ ise $\dfrac{f}{g}$ oranı da t'de $\triangle$-türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\triangle}(t) = \frac{f^{\triangle}(t)\,g(t) - f(t)\,g^{\triangle}(t)}{g(t)\,g(\sigma(t))}$$

eşitliği geçerlidir.

(iii) Eğer $f(t)\,.f(\sigma(t)) \neq 0$ ise, $\dfrac{1}{f}$, t'de $\triangle$-türevlenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\triangle}(t) = -\frac{f^{\triangle}(t)}{f(t)\,.f(\sigma(t))}$$

dir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.1.12: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bir $t_0 \in \mathbb{T}-\{\max\mathbb{T}\}$ noktasında
i) t_0 sağ saçılmış nokta iken $f(\sigma(t_0)) > f(t_0)$;
ii) t_0 sağ yoğun nokta iken öyle bir $U(t_0)$ komşuluğu var ki, $t > t_0$ olan her $t \in U(t_0)$ için $f(t) > f(t_0)$ ise f'e t_0 noktasında sağ-artan fonksiyon denir (Bohner ve Peterson, 2003).

Tanım 2.1.13: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bir $t_0 \in \mathbb{T}-\{\max\mathbb{T}\}$ noktasında
i) t_0 sağ saçılmış nokta iken $f(\sigma(t_0)) < f(t_0)$;
ii) t_0 sağ yoğun nokta iken öyle bir $U(t_0)$ komşuluğu var ki, $t > t_0$ olan her $t \in U(t_0)$ için $f(t) < f(t_0)$ ise f'e t_0 noktasında sağ-azalan fonksiyon denir (Bohner ve Peterson, 2003).

Teorem 2.1.14: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $t_0 \in \mathbb{T}-\{\max\mathbb{T}\}$ noktasında $\triangle$-türevlenebilir ve $f^{\triangle}(t_0) > 0$ ($f^{\triangle}(t_0) < 0$) ise f'e t_0 noktasında sağ-artan (sağ-azalan) fonksiyondur (Bohner ve Peterson, 2003).

Teorem 2.1.15: $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$, $[a,b]_{\mathbb{T}}$ aralığında sürekli, $[a,b)_{\mathbb{T}}$ aralığında $\triangle$-türevlenebilir bir fonksiyon ve $f(a) = f(b)$ ise

$$f^{\triangle}(u) \leq 0 \leq f^{\triangle}(v)$$

eşitsizliğin sağlayan $u, v \in [a,b)$ noktaları vardır (Bohner ve Peterson, 2003).

Teorem 2.1.16(Ortalama Değer Teoremi): $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $[a,b]_{\mathbb{T}}$ aralığında sürekli ve $[a,b)_{\mathbb{T}}$ aralığında $\triangle$-türevlenebilir bir fonksiyon ise

$$f^{\triangle}(u) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f^{\triangle}(v)$$

eşitsizliğini sağlayan $u, v \in [a,b)$ noktaları vardır (Bohner ve Peterson, 2003).

Sonuç 2.1.17: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $[a,b]_{\mathbb{T}}$ aralığında sürekli ve $[a,b)_{\mathbb{T}}$ aralığında $\triangle$-türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall t \in [a,b)_{\mathbb{T}}$ için

i) $f^{\triangle}(t) > 0$ ise f fonksiyonu $[a,b]_{\mathbb{T}}$ aralığında artandır.

ii) $f^{\triangle}(t) < 0$ ise f fonksiyonu $[a,b]_{\mathbb{T}}$ aralığında azalandır.

iii) $f^{\triangle}(t) = 0$ ise f fonksiyonu $[a,b]_{\mathbb{T}}$ aralığında sabittir (Bohner ve Peterson, 2003).

Tanım 2.1.18: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^k$ da $\triangle$-türevlenebilir olsun. $f^{\triangle} : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da $\mathbb{T}^{k^2} = \{\mathbb{T}^k\}^k$ kümesinde $\triangle$-türevlenebilir ise f fonksiyonu ikinci mertebeden $\triangle$-türevlenebilirdir denir ve ikinci Δ-türev

$$f^{\triangle^2} = f^{\triangle\triangle} = \left(f^{\triangle}\right)^{\triangle}$$

şeklinde tanımlanır. Genel şekilde, f'nin n. *mertebeden* $\triangle$-türevi, $f^{\triangle^n} : \mathbb{T}^{k^n} \to \mathbb{R}$ her $t \in \mathbb{T}^{k^n}$ için

$$f^{\triangle^n}(t) = \left(f^{\triangle^{n-1}}\right)^{\triangle}(t), \ n \geqslant 2$$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson, 2003).

Örnek 2.1.19:

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olmak üzere. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f(t) = t^3 - 2t^2 + t - 1$ fonksiyonu için $f^{\triangle}(t) = 13t^2 - 8t + 1$, $f^{\triangle\triangle}(t) = 52t - 8$ ve $f^{\triangle^3}(t) = 52$ dir.

Tanım 2.1.20: Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$'deki tüm sağ yoğun noktalarda sağ taraflı limitleri var(sonlu) ve $\mathbb{T}$'deki tüm sol yoğun noktalarda sol taraflı limitleri var(sonlu) ise bu f fonksiyonuna $\mathbb{T}$'de düzenli (regulated) fonksiyon denir (Bohner ve Peterson, 2003).

$\mathbb{T}$'de sürekli her fonksiyonun düzenli olduğu açıktır fakat bunun tersi doğru değildir.

Tanım 2.1.21: Eğer $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, $\mathbb{T}$'deki sağ yoğun noktalarda sürekli ve sol yoğun noktalarda sonlu limite sahip ise f fonksiyonuna rd-sürekli fonksiyon denir.

$\mathbb{T}$'den $\mathbb{R}$'ye tüm rd-sürekli fonksiyonların kümesi

$$C_{rd} = C_{rd}(\mathbb{T}) = C_{rd}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

ile gösterilir. $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ n. mertebeden Δ-türevlenebilir ve n. Δ-türevi rd-sürekli fonksiyonların kümesi ise

$$C_{rd}^{n} = C_{rd}^{n}(\mathbb{T}) = C_{rd}^{n}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$$

şeklinde ifade edilir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.1.22: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

(i) f fonksiyonu sürekli ise rd-süreklidir.

(ii) f fonksiyonu rd-sürekli ise düzenlidir.

(iii) σ operatörü rd-süreklidir.

(iv) Eğer f rd-sürekli ise f^{σ} da rd-süreklidir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.1.23: Bir

$$F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu, $\forall t \in \mathbb{T}^{k}$ için

$$F^{\triangle}(t) = f(t)$$

eşitliğini sağlıyorsa F fonksiyonuna $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun anti türevi(ilkeli) denir. Bu durumda f'in belirsiz integrali

$$\int f(t)\,\triangle t = F(t) + c, \qquad (c \text{ integral sabiti})$$

ve Cauchy integrali, $a, b \in \mathbb{T}$ için

$$\int_{a}^{b} f(t)\,\triangle t = F(b) - F(a)$$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 2.1.24:

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve $\alpha \neq 1$ olmak üzere,

$$\int_a^b \alpha^t \triangle t$$

belirli integralini hesaplayalım.

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ olduğundan

$$\left(\frac{\alpha^t}{\alpha - 1}\right)^{\triangle} = \triangle\left(\frac{\alpha^t}{\alpha - 1}\right) = \frac{\alpha^{t+1} - \alpha^t}{\alpha - 1} = \alpha^t$$

eşitliği geçerlidir. Bu nedenle,

$$\int \alpha^t \triangle t = \frac{\alpha^t}{\alpha - 1} + C \quad \text{ve} \quad \int_a^b \alpha^t \triangle t = \frac{\alpha^b - \alpha^a}{\alpha - 1}$$

dir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.1.25 (Anti Türevlerin Varlığı). Her rd-sürekli fonksiyon anti türeve sahiptir. Özel olarak $t_0 \in \mathbb{T}$ için f fonksiyonunun anti türevi,

$$F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{t_0}^{t} f(\tau) \triangle \tau,$$

şeklinde tanımlanır (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.1.26: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası, $a, b \in \mathbb{T}$ ve $a < b$ olsun. $P = \{t_0, t_1, ...t_n\} \subset \mathbb{T}$ kümesi $a = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = b$ şeklinde tanımlanırsa bu kümeye $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığının bir parçalanması denir. $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığının tüm parçalanmalarının ailesi $P(a, b)$ ile gösterilir. Ayrıca bir $P = \{t_i : i = \overline{0, n}\} \in P(a, b)$ parçalanması herhangi bir $\delta > 0$ için "$\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, $t_i - t_{i-1} < \delta$ veya $t_i - t_{i-1} > \delta$ ve $\rho(t_i) = t_{i-1}$" koşulunu sağlarsa P ye $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığının bir $\delta-$parçalanması denir. $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığının tüm $\delta-$parçalanmalarının ailesi de $P_\delta(a, b)$ ile gösterilir (Bohner ve Peterson, 2003).

Tanım 2.1.27: f, $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında sınırlı bir fonksiyon, $P = \{t_i : i = \overline{0, n}\} \in P(a, b)$ ve $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{T}}$ keyfi bir nokta olmak üzere

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

ifadesine f'in P parçalanmasına karşılık gelen Riemann $\Delta-$toplamı denir (Bohner ve Peterson, 2003).

Klasik analizdekine benzer olarak Riemann Δ-integralinin tanımı aşağıdaki şekilde verilmektedir.

Tanım 2.1.28: f $[a,b]_{\mathbb{T}}$ aralığında sınırlı bir fonksiyon olsun.
"$\forall\varepsilon > 0$ için $\exists\delta > 0$ vardır öyle ki, her bir $P \in P_\delta(a,b)$ parçalanması için $\xi_i \in [t_{i-1}, t_i]_{\mathbb{T}}$ noktalarının seçiminden bağımsız olarak $|S - I| < \varepsilon$ eşitsizliği geçerlidir." önermesi sağlanacak şekilde bir I sayısı varsa f'e $[a,b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ-integrallenebilir fonksiyon (veya Riemann Δ-integrallenebilir fonksiyon) denir. Bu I sayısı tektir ve bu sayıya da f'in $[a,b]_{\mathbb{T}}$ aralığındaki Δ-integrali (veya Riemann Δ-integrali) denir.

$$I = \int_a^b f(\tau) \triangle\tau$$

şeklinde gösterilir (Bohner ve Peterson, 2003).

Teorem 2.1.29: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, $f(t) = c$ sabit fonksiyonu Δ-integrallenebilirdir ve

$$\int_a^b f(\tau) \triangle\tau = c(b-a)$$

dir (Bohner ve Peterson, 2003).

Teorem 2.1.30: $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}$ olsun. Eğer f $[t, \sigma(t)]_{\mathbb{T}}$'de Δ-integrallenebilirdir ve

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau) \triangle\tau = \mu(t) f(t)$$

dir (Bohner ve Peterson, 2003).

Teorem 2.1.31: $[a,b]_{\mathbb{T}}$ aralığında tanımlı her bir
i) monoton, ii) sürekli, iii) rd-sürekli veya iv) düzenli
fonksiyon bu aralıkta Δ-integrallenebilirdir (Bohner ve Peterson, 2003).

Teorem 2.1.32: f, $[a,b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ-integrallenebilir bir fonksiyon, $m = \inf\{f(t) : t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\}$ ve $M = \sup\{f(t) : t \in [a,b]_{\mathbb{T}}\}$ olsun. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$[m, M]$ aralığında sürekli ise $\varphi \circ f$ bileşke fonksiyonu $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ-integrallenebilirdir (Bohner ve Peterson, 2003).

Teorem 2.1.33(Analizin Temel Teoremi-1): f, $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında süreki, $[a, b)_{\mathbb{T}}$ aralığında $\Delta - türevlenebilir$ ve f^{Δ}, $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ-integrallenebilir ise

$$\int_a^b f^{\Delta}(t) \triangle t = f(b) - f(a)$$

geçerlidir (Bohner ve Peterson, 2003).

Teorem 2.1.34(Analizin Temel Teoremi-2): f, $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ-integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ için

$$F(t) = \int_a^t f(\tau) \triangle \tau$$

fonksiyonu $[a, b]_{\mathbb{T}}$'de süreklidir. Ayrıca f bir $t_0 \in [a, b)_{\mathbb{T}}$ sağ yoğun noktasında sürekli ise F bu noktada $\Delta - türevlenebilirdir$ ve $F^{\Delta}(t_0) = f(t_0)$ dır (Bohner ve Peterson, 2003).

Teorem 2.1.35: f ve f^{Δ} sürekli fonksiyonlar ise

$$\left(\int_a^t f(t, \tau) \triangle \tau \right)^{\Delta} = f(\sigma(t), t) + \int_a^t f^{\Delta}(t, \tau) \triangle \tau$$

eşitliği geçerlidir. Burada $f^{\Delta}(t, \tau)$ ifadesi f'in t'ye göre türevini göstermektedir (Bohner ve Peterson, 2003).

Teorem 2.1.36: Eğer $a, b, c \in \mathbb{T}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve f, g fonksiyonları $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ-integrallenebilir ise

(i)

$$\int_a^b [f(t) + g(t)] \triangle t = \int_a^b f(t) \triangle t + \int_a^b g(t) \triangle t$$

(ii)

$$\int_a^b (\alpha f)(t) \triangle t = \alpha \int_a^b f(t) \triangle t$$

(iii)

$$\int_a^b f(t)\,\triangle t = -\int_b^a f(t)\,\triangle t$$

(iv)

$$\int_a^b f(t)\,\triangle t = \int_a^c f(t)\,\triangle t + \int_c^b f(t)\,\triangle t$$

(v)

$$\int_a^b f(\sigma(t))\,g^{\triangle}(t)\,\triangle t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\triangle}(t)\,g(t)\,\triangle t$$

(vi)

$$\int_a^b f(t)\,g^{\triangle}(t)\,\triangle t = (fg)(b) - (fg)(a) - \int_a^b f^{\triangle}(t)\,g(\sigma(t))\,\triangle t$$

(vii)

$$\int_a^a f(t)\,\triangle t = 0$$

(viii) Her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) \leq g(t)$ ise

$$\int_a^b f(t)\,\triangle t \leq \int_a^b g(t)\,\triangle t$$

dir.

(ix) Her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t) \geq 0$ ise

$$\int_a^b f(t)\,\triangle t \geq 0$$

dır (Bohner ve Peterson, 2003).

Teorem 2.1.37: $[a, b]_{\mathbb{T}}$ aralığında Δ-integrallenebilen her bir f fonksiyonu için

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t)\,\triangle t = \int_a^b f(t)\,dt$$

dir. Burada sağ taraftaki integral bilinen Riemann integralidir.

(ii) Eğer $\mathbb{T}$ yalnızca izole noktalar içeren bir zaman skalası ise

$$\int_a^b f(t)\,\triangle t = \sum_{t\in[a,b)} \mu(t)\, f(t)$$

dir.

(iii) Eğer $h > 0$ için $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ ise

$$\int_a^b f(t)\,\triangle t = \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{b}{h}-1} f(kh)\, h$$

dir.

(iv) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$\int_a^b f(t)\,\triangle t = \sum_{t=a}^{b-1} f(t)$$

dir (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 2.1.38:

a. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ iken

$$\begin{aligned}
\int_0^t s\triangle s &= \sum_{s=0}^{t-1} s \\
&= 0+1+2+3+\ldots+(t-2)+(t-1) \\
&= \frac{(t-1)\,.\,(t-1+1)}{2} \\
&= \frac{t.\,(t-1)}{2}
\end{aligned}$$

dir.

b. $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ iken

$$
\begin{aligned}
\int_0^t s\triangle s &= \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} f(sh)\, h \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} sh^2 \\
&= h^2 \sum_{k=0}^{\frac{t}{h}-1} s \\
&= h^2 \left[0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + \left(\frac{t}{h} - 1\right)\right] \\
&= h^2 \left(\frac{t}{h} - 1\right) \frac{t}{h} \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} (t - h)\, t
\end{aligned}
$$

dir (Bohner ve Peterson, 2001).

2.2 Birinci Mertebeden Lineer Dinamik Denklemler

$f : \mathbb{T} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon olmak üzere

$$y^{\triangle}(t) = f(t, y(t), y^{\sigma}(t)) \tag{2.2}$$

şeklindeki denkleme *1. mertebeden dinamik denklem* adı verilir.

Eğer özel olarak

$$f(t, y(t), y^{\sigma}(t)) = f_1(t)\, y(t) + f_2(t)$$

veya

$$f(t, y(t), y^{\sigma}(t)) = f_1(t)\, y^{\sigma}(t) + f_2(t)$$

olacak şekilde $f_1 : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ve $f_2 : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları varsa (2.2)'ye $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde tanımlı *1. mertebeden lineer(doğrusal) dinamik denklem* denir.

Bir $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$'de birinci mertebeden $\triangle$-diferansiyellenebilir ve $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$y^{\triangle}(t) = f(t, y(t), y^{\sigma}(t))$$

eşitliğini sağlıyorsa bu fonksiyona (2.2) denkleminin bir çözümü denir.
(2.2) denkleminin çözümlerinden oluşan bir fonksiyon ailesi bir tek keyfi sabit bulunduruyorsa bu aile denklemin genel çözümü olarak adlandırılır.
Belirli $t_0 \in \mathbb{T}$ ve $y_0 \in \mathbb{R}$ sayıları için (2.2) denkleminin

$$y(t_0) = y_0 \tag{2.3}$$

koşulunu sağlayan çözümünün aranmasına başlangıç değer problemi, (2.3) koşuluna da başlangıç koşulu denir (Bohner ve Peterson, 2001).
Bu bölümde 1. mertebeden lineer dinamik denklemler ve onlar için başlangıç değer problemleri incelenecektir. Bunun için öncelikle, klasik analizdeki üstel fonksiyonun zaman skalasındaki genelleştirilmesi sayılan genelleştirilmiş üstel fonksiyon ve onun bazı önemli özellikleri verilmelidir.

Tanım 2.2.1: $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olmak üzere $p : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $1 + \mu(t)\, p(t) \neq 0$ ise p'ye regresif fonksiyon denir. $\mathbb{T}$'den $\mathbb{R}$'ye tanımlı tüm rd-sürekli ve regresif fonksiyonların kümesi $\mathcal{R}$ veya $\mathcal{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ şeklinde gösterilir (Bohner ve Peterson, 2001).

Lemma 2.2.2: $\mathcal{R}$ kümesi

$$(p \oplus q)(t) := p(t) + q(t) + \mu(t)\, p(t)\, q(t), \quad t \in \mathbb{T}^k \tag{2.4}$$

işlemine göre bir değişmeli gruptur. Bu gruba regresif grup adı verilir (Bohner ve Peterson, 2001).

$p \in \mathcal{R}$ olmak üzere $\ominus p = -\frac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)}$ seçersek $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$[p \oplus (\ominus p)](t) = p(t) \oplus \left(-\frac{p(t)}{1 + \mu(t)\, p(t)} \right) = p(t) - \frac{p(t)}{1 + \mu(t)\, p(t)} - \mu(t)\, p(t)\, \frac{p(t)}{1 + \mu(t)\, p(t)} = \theta$$

eşitliği sağlanır. Bu ise p'nin bu işleme göre ters elemanının $\ominus p$ olduğunu gösterir.

$\oplus$ işlemi ve bu işleme göre ters eleman kullanılarak $p \ominus q$ işlemi

$$\begin{aligned}(p \ominus q)(t) &= (p \oplus (\ominus q))(t) \\ &= p(t) - \frac{q(t)}{1+\mu(t)q(t)} - \mu(t)\frac{p(t)-q(t)}{1+\mu(t)q(t)} \\ &= \frac{p(t)+\mu(t)p(t)q(t)-q(t)-\mu(t)p(t)q(t)}{1+\mu(t)q(t)} \\ &= \frac{p(t)-q(t)}{1+\mu(t)q(t)}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.3: $p \in \mathcal{R}$ olmak üzere $e_p : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \to \mathbb{R}$,

$$e_p(t,s) = \exp\left(\int_s^t \xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) \triangle\tau\right) \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlı $e_p(t,s)$ fonksiyonuna genelleştirilmiş üstel fonksiyon denir. Burada

$$\xi_{\mu(\tau)}(p(\tau)) = \begin{cases} \frac{1}{\mu(\tau)} Log(1+p(\tau)\mu(\tau)), & \mu(\tau) > 0 \\ p(\tau), & \mu(\tau) = 0 \end{cases} \tag{2.6}$$

dir (Bohner ve Peterson, 2001).

Lemma 2.2.4: $p \in \mathcal{R}$ ise $\forall s,t,u \in \mathbb{T}$ için

i) $e_0(t,s) \equiv 1, \quad e_p(t,t) \equiv 1,$

ii) $e_p(t,u)\,e_p(u,s) = e_p(t,s),$

iii) $e_p(\sigma(t),s) = (1+\mu(t)p(t))\,e_p(t,s)$

eşitlikleri geçerlidir (Bohner ve Peterson, 2001).

Tanım 2.2.5: $p \in \mathcal{R}$ ise

$$y^{\triangle}(t) = p(t)\,y(t) + q(t) \tag{2.7}$$

denklemine *1. mertebeden regresif lineer dinamik denklem* denir. Özel olarak $q(t) = 0$ ise (2.7) denklemine *homojen lineer regresif denklem* adı verilir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.2.6: $t_0 \in \mathbb{T}$ olmak üzere $e_p(t, t_0)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} y^{\triangle}(t) = p(t)\, y(t) \\ y(t_0) = 1 \end{cases} \tag{2.8}$$

başlangıç değer probleminin çözümüdür (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.2.7: $p \in \mathcal{R}$ olmak üzere (2.8) başlangıç değer probleminin tek çözümü

$$y(t) = e_p(t, t_0)$$

fonksiyonudur (Bohner ve Peterson, 2001).

Sonuç 2.2.8: $p \in \mathcal{R}$ ise

$$y^{\triangle}(t) = p(t)\, y(t)$$

denkleminin genel çözümü

$$y(t) = c e_p(t, t_0) \tag{2.9}$$

şeklindedir. Burada c bir keyfi sabittir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.2.9: $p \in \mathcal{R}$ ise

$$\begin{cases} y^{\triangle}(t) = p(t)\, y(t) + q(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü

$$y(t) = e_p(t, t_0) \left\{ y_0 + \int_{t_0}^{t} e_p(t_0, \sigma(\tau))\, q(\tau) \triangle\tau \right\} \tag{2.10}$$

şeklindedir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.2.10: $p, q \in \mathcal{R}$ olmak üzere

i) $\frac{1}{e_p(t,s)} = e_{\ominus p}(t, s)$

ii) $e_p(t, s)\, e_q(t, s) = e_{p \oplus q}(t, s)$

iii) $\frac{e_p(t,s)}{e_q(t,s)} = e_{p \ominus q}(t, s)$

bağıntıları geçerlidir (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 2.2.11: $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise

$$\begin{cases} y^{'}=p(t)\,y \\ y(t_0)=1 \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümünün

$$y(t)=e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(t)dt}$$

olduğunu biliyoruz. Buna göre $\mathbb{R}$'de

$$e_p(t,t_0)=e^{\int\limits_{t_0}^{t} p(t)dt}$$

geçerlidir.

Özel olarak $p(t)=\alpha$ (sabit) ise

$$e_\alpha(t,t_0)=e^{\alpha(t-t_0)}$$

olur (Bohner ve Peterson, 2001).

Örnek 2.2.12: $\mathbb{T}=h\mathbb{Z}$, $h>0$ zaman skalasını alalım. $\alpha\in\mathbb{C}\backslash\left\{-\frac{1}{h}\right\}$ sabit olsun.

$$e_\alpha(t,0)=(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}, \quad t\in\mathbb{T}$$

için geçerlidir. Gerçekten, $y(t)=(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}$ alalım.

$$\begin{cases} y^{\triangle}(t)=\alpha y(t) \\ y(0)=1 \end{cases}$$

olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz. $y(0)=(1+\alpha h)^0=1$ olduğu açıktır.

Diğer yandan $h\mathbb{Z}$'de

$$\begin{aligned} y^{\triangle}(t) &= \frac{y(t+h)-y(t)}{h} \\ &= \frac{(1+\alpha h)^{\frac{t+h}{h}}-(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}}{h} \\ &= \frac{(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}+1}-(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}}{h} \\ &= (1+\alpha h)^{\frac{t}{h}}\left(\frac{1+\alpha h-1}{h}\right) \\ &= \alpha(1+\alpha h)^{\frac{t}{h}} \\ &= \alpha y(t) \end{aligned}$$

olduğunda istenen eşitlik elde edilir.

Örnek 2.2.13: $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise

$$e_\alpha(t,0) = (1+\alpha)^t$$

dır. Özel olarak

$$e_1(t,0) = 2^t$$

dir.

Örnek 2.2.14:

$$\begin{cases} y^\triangle = y + 3^t, \quad t \in \mathbb{Z} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

başlangıç değer problemini çözelim. Teorem 2.2.9'dan

$$\begin{aligned} y &= e_1(t,0) \int_0^t e_1(0,\tau+1)\, 3^\tau \triangle\tau \\ &= 2^t \int_0^t 2^{-(\tau+1)} 3^\tau \triangle\tau \\ &= 2^{t-1} \int_0^t \left(\frac{3}{2}\right)^\tau \triangle\tau \\ &= 3^t - 2^t \end{aligned}$$

bulunur.

2.3 İkinci Mertebeden Lineer Dinamik Denklemler

Bu bölümde p, q ve f, C_{rd} uzayından alınan fonksiyonlar olmak üzere $\mathbb{T}^{k^2}$ kümesinde verilen

$$y^{\triangle\triangle} + p(t)\, y^\triangle + q(t)\, y = 0 \tag{2.11}$$

ve

$$y^{\triangle\triangle} + p(t)\, y^\triangle + q(t)\, y = f(t) \tag{2.12}$$

denklemlerinin çözümlerini araştıracağız.

(2.11) ve (2.12) denklemlerine *ikinci mertebeden sırasıyla homojen ve homojen olmayan lineer dinamik denklemler* denir (Bohner ve Peterson, 2001).

Birinci mertebeden denklemlere benzer olarak, $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$1 - \mu(t)\, p(t) + \mu^2(t)\, q(t) \neq 0$$

ise (2.11)'e (veya (2.12)'ye) *regresif denklem* adı verilir. Bundan böyle aksi belirtilmedikçe (2.11) ve (2.12) denklemlerinin regresif denklemler olduğu kabul edilecektir.

Bir $y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathbb{T}$'de 2. mertebeden $\triangle$-diferansiyellenebilir ve $\forall t \in \mathbb{T}^{k^2}$ için (2.11) (veya (2.12)) denklemini sağlıyorsa bu fonksiyona denklemin bir çözümü denir.

$y_1(t)$ ve $y_2(t)$ (2.11)'nin herhangi iki çözümü olmak üzere

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{\triangle} & y_2^{\triangle} \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

determinantına $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ çözümlerinin Wronksy determinantı veya Wronksiyanı denir.

Eğer $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ ise $\{y_1(t), y_2(t)\}$ kümesi (2.11) denkleminin *temel çözüm sistemi (kümesi)* olarak adlandırılır (Bohner ve Peterson, 2001).

Lemma 2.3.1: $y_1(t)$ ve $y_2(t)$ (2.11)'nin herhangi iki çözümü olmak üzere $\forall t \in \mathbb{T}^{k^2}$ için aşağıdakiler geçerlidir (Bohner ve Peterson, 2001).

i) $\mu(t)\, W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1^{\sigma} & y_2^{\sigma} \end{vmatrix}$,

ii) $W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1^{\sigma} & y_2^{\sigma} \\ y_1^{\triangle} & y_2^{\triangle} \end{vmatrix}$,

iii) $W^{\triangle}(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} y_1^{\sigma} & y_2^{\sigma} \\ y_1^{\triangle\triangle} & y_2^{\triangle\triangle} \end{vmatrix}$.

Teorem 2.3.2(Abel): $t_0 \in \mathbb{T}^k$ ve $y_1(t)$, $y_2(t)$ (2.11) denkleminin çözümleri olsun. Bu durumda

$$W(y_1, y_2)(t) = e_{-p+\mu q}(t, t_0)\, W(y_1, y_2)(t_0) \tag{2.14}$$

eşitliği geçerlidir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.3.3: $\{y_1(t),\ y_2(t)\}$ kümesi (2.11) denkleminin temel çözüm sistemi ise bu denklemin genel çözümü

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \tag{2.15}$$

şeklindedir (Bohner ve Peterson, 2001).

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{T}$ zaman skalasında

$$y^{\triangle\triangle} + \alpha y^{\triangle} + \beta y = 0 \tag{2.16}$$

dinamik denklemini gözönüne alalım.
Açıktır ki $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $1 - \alpha\mu(t) + \beta\mu^2(t) \neq 0$ ise (2.16) denklemi regresiftir.
Bu denklemin çözümünü $y(t) = e_\lambda(t, t_0)$ şeklinde arayalım. Burada $\lambda \in \mathbb{C}$, $t_0 \in \mathbb{T}^k$ ve $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $1 + \lambda\mu(t) \neq 0$ olduğu kabul edilmektedir. $e_\lambda(t, t_0)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden Δ-türevleri

$$\begin{aligned} e_\lambda^{\triangle}(t, t_0) &= \lambda e_\lambda(t, t_0) \\ e_\lambda^{\triangle\triangle}(t, t_0) &= \lambda^2 e_\lambda(t, t_0) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağladığından bu eşitlikler (2.16) denkleminde yerine yazılırsa

$$\left(\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta\right) e_\lambda(t, t_0) = 0$$

ve dolayısıyla

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0 \tag{2.17}$$

elde edilir. (2.17)'e (2.16)'nin *karakteristik denklemi* denir.
Açıktır ki bu denklemin çözümleri

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \tfrac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \\ \lambda_2 &= \tfrac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \end{aligned} \tag{2.18}$$

şeklindedir.
Buna göre $e_\lambda(t, t_0)$ fonksiyonunun (2.16) denkleminin çözümü olması için gerekli ve yeterli koşul λ sayısının (2.18)'da verilen λ_1 ve λ_2 sayılarından birine eşit olmasıdır (Bohner ve Peterson, 2001).

Lemma 2.3.4: (2.16) denkleminin regresif olması için gerekli ve yeterli koşul (2.18) eşitlikleri ile tanımlanan λ_1 ve λ_2 sayılarının regresif olmasıdır.
Yani $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için

$$1 - \alpha\mu(t) + \beta\mu^2(t) \neq 0 \Longleftrightarrow 1 + \lambda_1\mu(t) \neq 0 \text{ ve } 1 + \lambda_2\mu(t) \neq 0$$

geçerlidir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.3.5: $\alpha^2 - 4\beta \neq 0$ olsun. (2.16 denklemi regresif ise bu denklemin temel çözümler sistemi

$$\{e_{\lambda_1}(t, t_0), \ e_{\lambda_2}(t, t_0)\}$$

şeklindedir. Burada $t_0 \in \mathbb{T}^k$ ve λ_1, λ_2 (2.18) eşitlikleri ile tanımlı sayılardır (Bohner ve Peterson, 2001).

Sonuç 2.3.6: (2.16) denklemi regresif ise genel çözümü

$$y(t) = c_1 e_{\lambda_1}(t, t_0) + c_2 e_{\lambda_2}(t, t_0)$$

şeklindedir.

(2.11) denklemine alternatif olarak aşağıda verilen dinamik denklemi gözönüne alalım.

$$y^{\triangle\triangle} + p(t)\, y^{\triangle^\sigma} + q(t)\, y^\sigma = 0 \tag{2.19}$$

Burada $y^{\triangle^\sigma}(t) = y^\triangle \circ \sigma$ dır.

Tanım 2.3.7: $p \in \mathcal{R}$ ve $q \in C_{rd}$ ise (2.19) denklemine *regresif denklem* denir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.3.8: (2.11) ve (2.19) tipindeki regresif denklemler birbirine denktir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 2.3.9: (2.11) (veya (2.19)) denklemi regresif ise bir $t_0 \in \mathbb{T}^k$ için bu denklemin $y(t_0) = y_0$, $y^\Delta(t_0) = y_1$ başlangıç koşullarını sağlayan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm $\mathbb{T}$'nin tamamında tanımlıdır. Burada y_0 ve y_1 verilen sabitlerdir (Bohner ve Peterson, 2001).

Şimdi de homojen olmayan (2.12) dinamik denklemini gözönüne alalım. Buna karşılık gelen (2.11) homojen denkleminin temel çözüm sistemi $\{y_1(t), y_2(t)\}$ olsun.

(2.12) denkleminin çözümünü

$$y(t) = c_1(t)\, y_1(t) + c_2(t)\, y_2(t) \tag{2.20}$$

şeklinde arayalım. Burada $c_1(t)$ ve $c_2(t)$, $\mathbb{T}$'de Δ-türevlenebilir fonksiyonlardır.

(2.20)'nin Δ-türevini alırsak

$$y^{\triangle}(t) = c_1^{\triangle}(t)\, y_1^{\sigma}(t) + c_2^{\triangle}(t)\, y_2^{\sigma}(t) + c_1(t)\, y_1^{\triangle}(t) + c_2(t)\, y_2^{\triangle}(t)$$

yazabiliriz.

$$c_1^{\triangle}(t)\, y_1^{\sigma}(t) + c_2^{\triangle}(t)\, y_2^{\sigma}(t) = 0 \tag{2.21}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$y^{\triangle\triangle}(t) = c_1^{\triangle}(t)\, y_1^{\triangle^{\sigma}}(t) + c_2^{\triangle}(t)\, y_2^{\triangle^{\sigma}}(t) + c_1(t)\, y_1^{\triangle\triangle}(t) + c_2(t)\, y_2^{\triangle\triangle}(t)$$

bulunur.

$y(t)$, $y^{\triangle}(t)$ ve $y^{\triangle\triangle}(t)$ ifadeleri (2.12) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{aligned} & c_1^{\triangle}(t)\, y_1^{\triangle^{\sigma}}(t) + c_2^{\triangle}(t)\, y_2^{\triangle^{\sigma}}(t) + c_1(t)\, y_1^{\triangle\triangle}(t) + c_2(t)\, y_2^{\triangle\triangle}(t) \\ & \quad + p(t)\left[c_1(t)\, y_1^{\triangle}(t) + c_2(t)\, y_2^{\triangle}(t)\right] + q(t)\left[c_1(t)\, y_1(t) + c_2(t)\, y_2(t)\right] = f(t) \end{aligned}$$

ve

$$c_1^{\triangle}(t)\, y_1^{\triangle^{\sigma}}(t) + c_2^{\triangle}(t)\, y_2^{\triangle^{\sigma}}(t) = f(t) \tag{2.22}$$

elde edilir.

(2.21) ve (2.22) eşitliklerinden oluşan cebirsel denklem sistemi çözülürse

$$\begin{aligned} c_1^{\triangle}(t) &= \frac{-f(t)\, y_2^{\sigma}(t)}{W^{\sigma}(y_1, y_2)} \\ c_2^{\triangle}(t) &= \frac{f(t)\, y_1^{\sigma}(t)}{W^{\sigma}(y_1, y_2)} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
c_1(t) &= -\int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)\, y_2^{\sigma}(\tau)}{W^{\sigma}(y_1, y_2)} \triangle\tau + a \\
c_2(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)\, y_1^{\sigma}(\tau)}{W^{\sigma}(y_1, y_2)} \triangle\tau + b
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada a ve b integral sabitleridir. Bu ifadelerin (2.20)'de yerine yazılmasıyla (2.11) denkleminin genel çözümü

$$
y(t) = a y_1(t) + b y_2(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{y_1^{\sigma}(\tau)\, y_2(t) - y_2^{\sigma}(\tau)\, y_1(t)}{W(y_1, y_2)(\sigma(\tau))} f(\tau) \triangle\tau \tag{2.23}
$$

şeklinde bulunur (Bohner ve Peterson, 2001).

3. ZAMAN SKALASINDA PARAMETREYE BAĞLI STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

3.1 Problemin Tanımı ve Çözümlerin Özellikleri

$\mathbb{T}$ sınırlı bir zaman skalası $\alpha = \inf \mathbb{T}$ ve $\beta = \rho(\sup \mathbb{T})$ olsun. Aşağıda verilen sınır değer problemini gözönüne alalım.

$$-y^{\triangle\triangle}(t) + q(t)\, y^{\sigma}(t) = \lambda y^{\sigma}(t), \qquad t \in \mathbb{T}^{k^2} \tag{3.1}$$

$$a(\lambda) y(\alpha) - b(\lambda) y^{\Delta}(\alpha) = 0 \tag{3.2}$$

$$c(\lambda) y(\beta) - d(\lambda) y^{\Delta}(\beta) = 0 \tag{3.3}$$

Burada $q(t)$, $\mathbb{T}$'de sürekli reel değerli bir fonksiyon, $a(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n_a} a_k \lambda^k$, $b(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n_b} b_k \lambda^k$, $c(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n_c} c_k \lambda^k$, $d(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{n_d} d_k \lambda^k$ ve $a_{n_a} \neq 0$, $b_{n_b} \neq 0$, $c_{nc} \neq 0$, $d_{n_d} \neq 0$ dir.
Bu koşullar altında her bir λ kompleks sayısı için (3.1) denkleminin regresif olduğu açıktır. Dolayısıyla Teorem 2.3.9'a göre $t_0 \in \mathbb{T}^k$ olmak üzere (3.1) denkleminin $y(t_0) = y_0$, $y^{\Delta}(t_0) = y_1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü var ve tektir.

Lemma 3.1.1(Gronwall Eşitsizliği): $y,f \in C_{rd}$, $\forall t \in \mathbb{T}^k$ için $p(t) \geq 0$ olsun. Bu durumda $\forall t \in \mathbb{T}$ için

$$y(t) \leq f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} p(\xi)\, y(\xi)\, \Delta\xi$$

eşitsizliği geçerli ise

$$y(t) \leq f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} (e_p(t, \sigma(\xi)))\, f(\xi)\, p(\xi)\, \Delta\xi$$

eşitsizliği de geçerlidir (Bohner ve Peterson, 2001).

Teorem 3.1.2: $y = y(t, \lambda)$ fonksiyonu (1) denkleminin $y(\alpha) = f(\lambda)$, $y^{\Delta}(\alpha) = g(\lambda)$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. Eğer f ve g fonksiyonları λ nın sürekli fonksiyonları ise herbir fikse edilmiş $t \in \mathbb{T}$ için $y(t, \lambda)$ fonksiyonu da λ ya göre süreklidir.

İspat: $y^{\triangle\triangle}(t)=0$ homojen denkleminin genel çözümü $y=A_1t+A_2$ şeklindedir. Sabitlerin değişimi yöntemi kullanılarak $y(t,\lambda)=A_1(t).t+A_2(t)$ şeklinde aranırsa:

$$A_1^{\Delta}(t).\sigma(t)+A_2^{\Delta}(t)=0$$

koşulu altında

$$A_1^{\Delta}(t)=\{q(t)-\lambda\}\,y^{\sigma}(t)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$A_1(t)=\int\limits_{\alpha}^{t}(q(\xi)-\lambda)\,y^{\sigma}(\xi)\,\Delta\xi+A_1^{\star}$$

ve

$$A_2(t)=-\int\limits_{\alpha}^{t}(q(\xi)-\lambda)\,y^{\sigma}(\xi)\,\sigma(\xi)\,\Delta\xi+A_2^{\star}$$

bulunur. Dolayısıyla $y(t,\lambda)$ fonksiyonu için

$$y(t,\lambda)=A_1^{\star}t+A_2^{\star}+\int\limits_{\alpha}^{t}(q(\xi)-\lambda)\,(t-\sigma(\xi))\,y^{\sigma}(\xi,\lambda)\,\Delta\xi$$

integral denklemi yazılabilir. Verilen başlangıç koşulları kullanılarak $A_1^{\star}=g(\lambda)$ ve $A_2^{\star}=f(\lambda)-\alpha g(\lambda)$ olarak bulunmasıyla

$$y(t,\lambda)=f(\lambda)+(t-\alpha)\,g(\lambda)+\int\limits_{\alpha}^{t}(q(\xi)-\lambda)\,(t-\sigma(\xi))\,y^{\sigma}(\xi,\lambda)\,\Delta\xi$$

elde edilir. λ_0 herhangi bir komleks sayı olmak üzere

$$\begin{aligned}
y^{\sigma}(t,\lambda) &= f(\lambda)+(\sigma(t)-\alpha)\,g(\lambda)+\int\limits_{\alpha}^{\sigma(t)}(q(\xi)-\lambda)\,(\sigma(t)-\sigma(\xi))\,y^{\sigma}(\xi,\lambda)\,\Delta\xi \\
y^{\sigma}(t,\lambda_0) &= f(\lambda_0)+(\sigma(t)-\alpha)\,g(\lambda_0)+\int\limits_{\alpha}^{\sigma(t)}(q(\xi)-\lambda_0)\,(\sigma(t)-\sigma(\xi))\,y^{\sigma}(\xi,\lambda_0)\,\Delta\xi
\end{aligned}$$

ifadeleri açıktır. Bu ifadelerin taraf tarafa çıkarılmasıyla

$$\begin{aligned} y^{\sigma}(t,\lambda)-y^{\sigma}(t,\lambda_0) &= f(\lambda)-f(\lambda_0)+(\sigma(t)-\alpha)(g(\lambda)-g(\lambda_0)) \\ &+\int_{\alpha}^{\sigma(t)} q(\xi)(\sigma(t)-\sigma(\xi))(y^{\sigma}(\xi,\lambda)-y^{\sigma}(\xi,\lambda_0))\Delta\xi \\ &-\int_{\alpha}^{\sigma(t)} [\lambda(\sigma(t)-\sigma(\xi))y^{\sigma}(\xi,\lambda)-\lambda_0(\sigma(t)-\sigma(\xi))y^{\sigma}(\xi,\lambda_0)]\Delta\xi \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son eşitlik düzenlenek

$$\begin{aligned} y^{\sigma}(t,\lambda)-y^{\sigma}(t,\lambda_0) &= f(\lambda)-f(\lambda_0)+(\sigma(t)-\alpha)(g(\lambda)-g(\lambda_0)) \\ &-(\lambda-\lambda_0)\int_{\alpha}^{\sigma(t)} (\sigma(t)-\sigma(\xi))y^{\sigma}(\xi,\lambda_0)\Delta\xi \\ &+\int_{\alpha}^{\sigma(t)} (q(\xi)-\lambda)(\sigma(t)-\sigma(\xi))(y^{\sigma}(\xi,\lambda)-y^{\sigma}(\xi,\lambda_0))\Delta\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} |y^{\sigma}(t,\lambda)-y^{\sigma}(t,\lambda_0)| &\leq |f(\lambda)-f(\lambda_0)|+(\sigma(\beta)-\alpha)|g(\lambda)-g(\lambda_0)| \\ &+|\lambda-\lambda_0|\int_{\alpha}^{\sigma(t)} |\sigma(t)-\sigma(\xi)||y^{\sigma}(\xi,\lambda_0)|\Delta\xi \\ &+\int_{\alpha}^{\sigma(t)} |q(\xi)-\lambda||\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)||y^{\sigma}(\xi,\lambda)-y^{\sigma}(\xi,\lambda_0)|\Delta\xi \end{aligned}$$

eşitsizliğinin doğru olduğu kolayca görülebilir. Lemma 3.1.1 dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |y^{\sigma}(t,\lambda)-y^{\sigma}(t,\lambda_0)| &\leq |f(\lambda)-f(\lambda_0)|+(\sigma(\beta)-\alpha)|g(\lambda)-g(\lambda_0)| \\ &+|\lambda-\lambda_0|\int_{\alpha}^{\sigma(t)} |\sigma(t)-\sigma(\xi)||y^{\sigma}(\xi,\lambda_0)|\Delta\xi \\ &+\int_{\alpha}^{\sigma(t)} e_G(t,\sigma(\xi))F(\xi,\lambda,\lambda_0)G(\xi,\lambda,\lambda_0)\Delta\xi \end{aligned}$$

eiştsizliğinin sağlandığı görülebilir. Burada

$$\begin{aligned} F(\xi,\lambda,\lambda_0) &= |f(\lambda)-f(\lambda_0)|+(\sigma(\beta)-\alpha)|g(\lambda)-g(\lambda_0)| \\ &\quad +|\lambda-\lambda_0|\int_{\alpha}^{\sigma(\xi)}|\sigma(\xi)-\sigma(\tau)||y^{\sigma}(\tau,\lambda_0)|\Delta\tau \\ G(\xi,\lambda,\lambda_0) &= |q(\xi)-\lambda||\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)| \end{aligned}$$

dır. Son olarak $\lambda\to\lambda_0$ iken limit alınırsa

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}|y^{\sigma}(t,\lambda)-y^{\sigma}(t,\lambda_0)|=0$$

olduğu görülür. Bu ise $y(t,\lambda)$ fonksiyonunun λ_0 noktasında sürekli olduğunu kanıtlar.

Sonuç 3.1.4: $y^{\Delta}(t,\lambda)=g(\lambda)+\int_{\alpha}^{t}(q(\xi)-\lambda)\,y^{\sigma}(\xi,\lambda)\,\Delta\xi$ eşitliği geçerli olduğundan $y^{\Delta}(t,\lambda)$ fonksiyonu da her $t\in\mathbb{T}^k$ için λ'ya göre süreklidir.

3.2 Problemin Özdeğerlerinin Özellikleri

$S(t,\lambda),C(t,\lambda),\varphi(t,\lambda)$ ve $\psi(t,\lambda)$ fonksiyonları (3.1) denkleminin sırasıyla

$$S(\alpha,\lambda)=0,\quad S^{\triangle}(\alpha,\lambda)=1 \tag{3.4}$$

$$C(\alpha,\lambda)=1,\quad C^{\triangle}(\alpha,\lambda)=0 \tag{3.5}$$

$$\varphi(\alpha,\lambda)=b(\lambda),\quad \varphi^{\triangle}(\alpha,\lambda)=a(\lambda) \tag{3.6}$$

$$\psi(\beta,\lambda)=d(\lambda),\quad \psi^{\triangle}(\beta,\lambda)=c(\lambda) \tag{3.7}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

Teorem 3.2.1: $S(t,\lambda),C(t,\lambda),\varphi(t,\lambda),\psi(t,\lambda)$ çözümleri ve bu çözümlerin birinci mertebeden $\triangle$-türevleri her bir t için λ'ya göre tüm kompleks düzlemde analitiktir.

İspat: $\varphi(t,\lambda)$'nın analitik olduğunu ispatlayalım. Diğer fonksiyonların analitikliği benzer şekilde ispatlanabilir. $\lambda,\lambda_0\in\mathbb{C}$ herhangi bir kompleks sayı olsun.

$$\phi(t,\lambda,\lambda_0):=\varphi(t,\lambda)-\varphi(t,\lambda_0)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon

$$\begin{aligned}
\phi^{\triangle\triangle}(t,\lambda,\lambda_0) &= \varphi^{\triangle\triangle}(t,\lambda) - \varphi^{\triangle\triangle}(t,\lambda_0) \\
&= \varphi^{\sigma}(t,\lambda)\{q(t)-\lambda\} - \varphi^{\sigma}(t,\lambda_0)\{q(t)-\lambda_0\} \\
&= q(t)\{\varphi^{\sigma}(t,\lambda) - \varphi^{\sigma}(t,\lambda_0)\} - \lambda\varphi^{\sigma}(t,\lambda) + \lambda_0\varphi^{\sigma}(t,\lambda_0) \\
&= q(t)\{\varphi^{\sigma}(t,\lambda) - \varphi^{\sigma}(t,\lambda_0)\} - \lambda\{\varphi^{\sigma}(t,\lambda) - \varphi^{\sigma}(t,\lambda_0)\} - (\lambda-\lambda_0)\varphi^{\sigma}(t,\lambda_0) \\
&= q(t)\phi^{\sigma}(t,\lambda) - \lambda\phi^{\sigma}(t,\lambda) - (\lambda-\lambda_0)\varphi^{\sigma}(t,\lambda_0)
\end{aligned}$$

eşitliğini sağlamaktadır. Buna göre $\phi(t,\lambda)$ fonksiyonu

$$-\phi^{\triangle\triangle}(t,\lambda) + q(t)\phi^{\sigma}(t,\lambda) = \lambda\phi^{\sigma}(t,\lambda) + (\lambda-\lambda_0)\varphi^{\sigma}(t,\lambda_0) \tag{3.8}$$

denklemini bir çözümüdür. Diğer yandan (3.6) başlangıç koşullarına göre

$$\begin{cases} \phi(\alpha,\lambda,\lambda_0) = \varphi(\alpha,\lambda) - \varphi(\alpha,\lambda_0) = b(\lambda) - b(\lambda_0) \\ \phi^{\Delta}(\alpha,\lambda,\lambda_0) = \varphi^{\Delta}(\alpha,\lambda) - \varphi^{\Delta}(\alpha,\lambda_0) = a(\lambda) - a(\lambda_0) \end{cases} \tag{3.9}$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla $\phi(t,\lambda,\lambda_0)$ fonksiyonu (3.8), (3.9) başlangıç değer probleminin çözümüdür. Sabitlerin değişimi yöntemi kullanılarak bu başlangıç değer problemi çözülürse

$$\begin{aligned}
\phi(t,\lambda,\lambda_0) &= (a(\lambda)-a(\lambda_0))S(t,\lambda) + (b(\lambda)-b(\lambda_0))C(t,\lambda) \qquad (3.10)\\
&\quad - (\lambda-\lambda_0)\int_{\alpha}^{t}[C^{\sigma}(\xi,\lambda)S(t,\lambda) - S^{\sigma}(\xi,\lambda)C(t,\lambda)]\varphi^{\sigma}(\xi,\lambda_0)\triangle\xi
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. (3.10) eşitliğinin her iki tarafını $\lambda-\lambda_0$'a bölünürse;

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(t,\lambda)-\varphi(t,\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0} &= \frac{a(\lambda)-a(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}S(t,\lambda) + \frac{b(\lambda)-b(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}C(t,\lambda) \\
&\quad - \int_{\alpha}^{t}[C^{\sigma}(\xi,\lambda)S(t,\lambda) - S^{\sigma}(\xi,\lambda)C(t,\lambda)]\varphi^{\sigma}(\xi,\lambda_0)\triangle\xi
\end{aligned}$$

eşitliğinin geçerli olduğu görülür. $S(t,\lambda)$ ve $C(t,\lambda)$ fonksiyonları λ'ya göre sürekli olduğundan ve $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ birer polinom olduğundan son eşitlikte $\lambda \to \lambda_0$ iken limit alınırsa $\varphi(t,\lambda)$ fonksiyonunun λ_0 noktasında diferansiyellenebilir olduğu görülür. λ_0 keyfi seçildiğinden $\varphi(t,\lambda)$ fonksiyonu tüm kompleks düzlemde analitiktir.

Lemma 3.2.2: $y(t)$ ve $z(t)$ (3.1) denkleminin iki farklı çözümü olsun. Bu çözümlerin $W[y(t),z(t)]$ Wronsky determinantı t'den bağımsızdır.

İspat:

$$\begin{aligned} W^{\triangle}(y(t), z(t)) &= \left(y(t) z^{\triangle}(t) - y^{\triangle}(t) z(t)\right)^{\triangle} \\ &= y^{\triangle}(t) z^{\triangle}(t) + y^{\sigma}(t) z^{\triangle\triangle}(t) - y^{\triangle}(t) z^{\triangle}(t) - y^{\triangle\triangle}(t) z^{\sigma}(t) \\ &= y^{\sigma}(t) \{q(t) - \lambda\} z^{\sigma}(t) - y^{\sigma}(t) \{q(t) - \lambda\} z^{\sigma}(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği geçerli olduğundan ispat açıktır.
Lemma 3.2.2'ye göre

$$W[C(t,\lambda), S(t,\lambda)] = C(t,\lambda) S^{\Delta}(t,\lambda) - C^{\Delta}(t,\lambda) S(t,\lambda) = 1$$

eşitliği geçerlidir. Bu nedenle $\{S(t,\lambda),\ C(t,\lambda)\}$ kümesi (3.1) denkleminin temel çözüm sistemidir.
Şimdi

$$\Delta(\lambda) := W(\varphi(\beta,\lambda), \psi(\beta,\lambda)) = c(\lambda) \varphi(\beta,\lambda) - d(\lambda) \varphi^{\Delta}(\beta,\lambda) \tag{3.11}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bir önceki teoreme göre $\Delta(\lambda)$ bir tam fonksiyondur ve onun sıfırları kompleks düzlemde ayrık bir kümedir.

Teorem 3.2.3: (3.1) -(3.3) probleminin özdeğerleri ile $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları çakışır.

İspat: Bir $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ için $\Delta(\lambda_0) = 0$ olsun. Bu durumda (3.11) den $\varphi(t, \lambda_0)$ fonksiyonunun (3.3) sınır koşulunu sağladığı görülür. $\varphi(t, \lambda_0)$ (3.1) denkleminin (3.2) sınır koşulunu sağlayan çözümü olduğuna göre (3.1)-(3.3) probleminin sıfırdan farklı bir çözümü olur. Dolayısıyla λ_0 sayısı (3.1)-(3.3) probleminin bir özdeğeridir.
Tersine λ_0 sayısı (3.1)-(3.3) probleminin bir özdeğeri ve $y(t, \lambda_0)$ o özdeğere karşılık gelen öz fonksiyon olsun. Bu durumda $y(t, \lambda_0) = \gamma_1 S(t, \lambda_0) + \gamma_2 C(t, \lambda_0)$ olacak şekilde sıfırdan farklı $\gamma_1,\ \gamma_2$ sabitleri vardır. Diğer yandan $y(t, \lambda_0)$ öz fonksiyon olduğundan (3.2) ve (3.3) sınır koşullarını sağlamalıdır. O halde

$$a(\lambda_0) [\gamma_1 S(\alpha, \lambda_0) + \gamma_2 C(\alpha, \lambda_0)] - b(\lambda_0) \left[\gamma_1 S^{\Delta}(\alpha, \lambda_0) + \gamma_2 C^{\Delta}(\alpha, \lambda_0)\right] = 0$$

ve

$$c(\lambda_0)\left[\gamma_1 S(\beta,\lambda_0)+\gamma_2 C(\beta,\lambda_0)\right]-d(\lambda_0)\left[\gamma_1 S^{\Delta}(\beta,\lambda_0)+\gamma_2 C^{\Delta}(\beta,\lambda_0)\right]=0$$

geçerlidir. Buradan ;

$$\begin{aligned} & b(\lambda_0)\gamma_1-a(\lambda_0)\gamma_2=0 \\ & \left[c(\lambda_0)S(\beta,\lambda_0)-d(\lambda_0)S^{\Delta}(\beta,\lambda_0)\right]\gamma_1+\left[c(\lambda_0)C(\beta,\lambda_0)-d(\lambda_0)C^{\Delta}(\beta,\lambda_0)\right]\gamma_2=0 \end{aligned}$$

yazılabilir. Sistemin katsayılar determinantı sıfır olacağından

$$c(\lambda_0)\left[a(\lambda_0)S(\beta,\lambda_0)+b(\lambda_0)C(\beta,\lambda_0)\right]-d(\lambda_0)\left[a(\lambda_0)S^{\Delta}(\beta,\lambda_0)+b(\lambda_0)C^{\Delta}(\beta,\lambda_0)\right]=0$$

dır. Bu ise

$$c(\lambda_0)\varphi(\beta,\lambda_0)-d(\lambda_0)\varphi^{\Delta}(\beta,\lambda_0)=0$$

demektir. Sonuç olarak $\Delta(\lambda_0)=0$ geçerlidir.

Teorem 3.2.4: $\mathbb{T}$, m elemanlı zaman skalası olmak üzere $\mathbb{T}$ üzerinde kurulan (3.1)-(3.2) tipindeki sınır değer probleminin özdeğerlerinin sayısını s ile gösterelim. Bu durumda
$dera(\lambda)\neq derb(\lambda)$ ve $derc(\lambda)\neq derd(\lambda)+1$ ise problemin özdeğer sayısı için

$$s=n+k+m-3 \tag{3.12}$$

geçerlidir. Burada $n=\max\{dera(\lambda),derb(\lambda)\}$ ve $k=\max\{derc(\lambda),derd(\lambda)+1\}$ dir.

İspat: $\mathbb{T}$, sonlu m elemanlı bir zaman skalası olduğundan tüm noktaları izole noktadır. Dolayısıyla $\mathbb{T}=\{\alpha,\ \sigma(\alpha),\ \sigma^2(\alpha),...,\ \sigma^{m-2}(\alpha)=\beta,\ \sigma^{m-1}(\alpha)\}$ şeklinde yazılabilir.
Burada

$$\sigma^r(\alpha)=\left(\sigma\circ\sigma^{r-1}\right)(\alpha),\quad r\geq 2$$

dır.
(3.6) başlangıç koşullarından

$$\varphi^{\sigma}(\alpha,\lambda)=\varphi(\alpha,\lambda)+\mu(\alpha)\varphi^{\triangle}(\alpha,\lambda)=b(\lambda)+\mu(\alpha)a(\lambda)$$

geçerlidir.

$\mathbb{T}$ izole noktalardan oluştuğundan her bir $t \in \mathbb{T}^k$ için $\varphi^{\triangle}(t,\lambda) = \dfrac{\varphi^{\sigma}(t,\lambda) - \varphi(t,\lambda)}{\mu(t)}$

ve her bir $t \in \mathbb{T}^{k^2}$ için

$$\varphi^{\triangle\triangle}(t,\lambda) = \frac{\varphi^{\triangle^{\sigma}}(t,\lambda) - \varphi^{\triangle}(t,\lambda)}{\mu(t)} = \frac{1}{\mu(t)}\left[\frac{\varphi^{\sigma^2}(t,\lambda) - \varphi^{\sigma}(t,\lambda)}{\mu^{\sigma}(t)} - \frac{\varphi^{\sigma}(t,\lambda) - \varphi(t,\lambda)}{\mu(t)}\right]$$

$$= \frac{1}{\mu^{\sigma}(t)(\mu(t))^2}\left[\mu(t)\varphi^{\sigma^2}(t,\lambda) - (\mu(t) + \mu^{\sigma}(t))\varphi^{\sigma}(t,\lambda) + \mu^{\sigma}(t)\varphi(t,\lambda)\right]$$

eşitlikleri geçerlidir. Diğer taraftan

$$\varphi^{\triangle\triangle}(t,\lambda) = \{q(t) - \lambda\}\varphi^{\sigma}(t,\lambda)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \varphi^{\sigma^2}(t,\lambda) &= \mu^{\sigma}(t)\mu(t)\{q(t) - \lambda\}\varphi^{\sigma}(t,\lambda) \\ &\quad + \frac{\mu(t) + \mu^{\sigma}(t)}{\mu(t)}\varphi^{\sigma}(t,\lambda) - \frac{\mu^{\sigma}(t)}{\mu(t)}\varphi(t,\lambda) \\ &= [f(t)\lambda + g(t)]\varphi^{\sigma}(t,\lambda) + h(t)\varphi(t,\lambda) \end{aligned} \tag{3.13}$$

elde edilir. Burada $f(t) = -\mu^{\sigma}(t)\mu(t)$, $g(t) = \mu^{\sigma}(t)\mu(t)q(t) + \frac{\mu^{\sigma}(t)}{\mu(t)} + 1$ ve $h(t) = -\frac{\mu^{\sigma}(t)}{\mu(t)}$ dir.

$dera(\lambda) \neq derb(\lambda)$ olduğundan (3.13) eşitliği kullanılarak

$$der\varphi^{\sigma^j}(\alpha,\lambda) = n + j - 1,\ j = 2,3,...,m-1 \tag{3.14}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= c(\lambda)\varphi\left(\sigma^{m-2}(\alpha)\right) - d(\lambda)\varphi^{\Delta}\left(\sigma^{m-2}(\alpha)\right) \\ &= c(\lambda)\varphi\left(\sigma^{m-2}(\alpha)\right) - d(\lambda)\frac{\varphi(\sigma^{m-1}(\alpha)) - \varphi(\sigma^{m-2}(\alpha))}{\mu(\beta)} \\ &= \frac{1}{\mu(\beta)}\left[(\mu(\beta)c(\lambda) + d(\lambda))\varphi\left(\sigma^{m-2}(\alpha)\right) - d(\lambda)\varphi\left(\sigma^{m-1}(\alpha)\right)\right] \end{aligned} \tag{3.15}$$

eşitliği geçerlidir.

(3.14)' den,

$$der\varphi(\beta) = der\varphi^{\sigma^{m-2}}(\alpha) = n + m - 3, \tag{3.16}$$

$$der\varphi^{\sigma}(\beta) = der\varphi^{\sigma^{m-1}}(\alpha) = n + m - 2 \tag{3.17}$$

dır. (3.15)-(3.17) eşitlikleri dikkate alınarak $derc(\lambda) \neq derd(\lambda)+1$ ise

$$der\Delta(\lambda) = n+m-3+k \tag{3.18}$$

olduğu hesaplanabilir. Burada $k = \max\{\text{der}c(\lambda), \text{der}d(\lambda)+1\}$ dır. Böylece özdeğer sayısının (3.12) formülü ile verilebileceği açıktır.

Uyarı: Teorem 3.2.4 ün koşulları sağlanmadığında problemin özdeğer sayısı için $s \leq n+k+m-3$ eşitsizliği geçerlidir.

Örnek 3.2.5: $\mathbb{T} = \{0,1,2,...,m-1\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} -y^{\Delta\Delta} + q(t)\,y^{\sigma}(t) &= \lambda y^{\sigma}(t) \\ \lambda^2 y(0) - (\lambda+1)\,y^{\Delta}(0) &= 0 \\ \left(\lambda^4+1\right) y(1) - \lambda^2 y^{\Delta}(1) &= 0 \end{aligned}$$

problemini ele alalım. Burada $\alpha(\lambda) = \lambda^2$, $b(\lambda) = \lambda+1$, $c(\lambda) = \lambda^4+1$, $d(\lambda) = \lambda^2$ ve $dera(\lambda) \neq derb(\lambda), derc(\lambda) \neq derd(\lambda)+1$ olduğundan $s = m+3$ olarak bulunur.

3.3 Parametreye Doğrusal Şekilde Bağlı Sınır Koşulları

Bu bölümde, ele alınan problemin sınır koşullarındaki katsayıların özel durumlarında problemin özdeğerlerinin bazı önemli özellikleri verilmektedir.
(3.2) ve (3.3) sınır koşullarındaki polinomların doğrusal fonksiyonlar olduğunu kabul edelim Bu durumda probleminin aşağıdaki şekilde yazılabileceği açıktır.

$$\ell y := -y^{\Delta\Delta}(t) + q(t)\,y^{\sigma}(t) = \lambda y^{\sigma}(t), \qquad t \in \mathbb{T}^{k^2} \tag{3.19}$$

$$U(y) := (a_1\lambda + a_0)\,y(\alpha) - (b_1\lambda + b_0)\,y^{\Delta}(\alpha) = 0 \tag{3.20}$$

$$V(y) := (c_1\lambda + c_0)\,y(\beta) - (d_1\lambda + d_0)\,y^{\Delta}(\beta) = 0 \tag{3.21}$$

Burada $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1$, $K_1 := a_0b_1 - a_1b_0 \ > 0$ ve $K_2 := c_1d_0 - c_0d_1 > 0$ olduğu kabul ediliyor.
$H = L_2\left(\mathbb{T}^k\right) \oplus \mathbb{C}^2$ kümesi, $Y = (y(t), Y_\alpha, Y_\beta)$, $Z = (z(t), Z_\alpha, Z_\beta) \in H$ olmak üzere,

$$\langle Y, Z\rangle := \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,\overline{z}(t)\,\Delta(t) + \frac{1}{K_1} Y_\alpha \overline{Z}_\alpha + \frac{1}{K_2} Y_\beta \overline{Z}_\beta \tag{3.22}$$

şeklindeki dönüşümle birlikte bir Hilbert uzayıdır.

Tanım kümesi $D(L) = \{Y = (y(t), Y_\alpha, Y_\beta) : y(t) \in C^2_{rd}(\mathbb{T}),\ Y_\alpha = b_1 y^\Delta(\alpha) - a_1 y(\alpha),\ Y_\beta = d_1 y^\Delta(\beta) - c_1 y(\beta)\}$ olan ve

$$L(Y) = (z(t), Z_\alpha, Z_\beta),$$

$$z(t) = -y^{\Delta\Delta}(t) + q(t)\, y^\sigma(t),$$

$$Z_\alpha = a_0 y(\alpha) - b_0 y^\Delta(\alpha),$$

$$Z_\beta = c_0 y(\beta) - d_0 y^\Delta(\beta)$$

şeklinde tanımlanan L operatörünü ele alalım. En az bir $Y \neq 0$ için $LY = \lambda Y^\sigma$ eşitliğini sağlayan λ sayıları ile (3.19)-(3.21) probleminin özdeğerleri çakışmaktadır.

Teorem 3.3.1: $\forall Y, Z \in D(L)$ için

$$\langle LY, Z^\sigma \rangle = \langle Y^\sigma, LZ \rangle$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$$\begin{aligned}
\langle LY, Z^\sigma \rangle &= \int_\alpha^\beta \left(-y^{\triangle\triangle} + q(t)\, y^\sigma(t)\right) \overline{z}^\sigma(t) \triangle t + \\
&\quad + \frac{1}{K_1} \left(a_0 y(\alpha) - b_0 y^\Delta(\alpha)\right) \left(b_1 \overline{z}^\Delta(\alpha) - a_1 \overline{z}(\alpha)\right) + \\
&\quad + \frac{1}{K_2} \left(c_0 y(\beta) - d_0 y^\Delta(\beta)\right) \left(d_1 \overline{z}^\Delta(\beta) - c_1 \overline{z}(\beta)\right) \\
\langle Y^\sigma, LZ \rangle &= \int_\alpha^\beta y^\sigma(t) \left(-\overline{z}^{\Delta\Delta}(t) + q(t)\, \overline{z}^\sigma(t)\right) \triangle t + \\
&\quad + \frac{1}{K_1} \left(b_1 y^\Delta(\alpha) - a_1 y(\alpha)\right) \left(a_0 \overline{z}(\alpha) - b_0 \overline{z}^\Delta(\alpha)\right) + \\
&\quad + \frac{1}{K_2} \left(d_1 y^\Delta(\beta) - c_1 y(\beta)\right) \left(c_0 \overline{z}(\beta) - d_0 \overline{z}^\Delta(\beta)\right)
\end{aligned}$$

dır. O halde,

$$\begin{aligned}
\langle LY, Z^{\sigma}\rangle - \langle Y^{\sigma}, LZ\rangle &= \int_{\alpha}^{\beta} \left(-y^{\triangle\triangle}(t) + q(t)\, y^{\sigma}(t)\right) \overline{z}^{\sigma}(t) \triangle t \\
&\quad - \int_{\alpha}^{\beta} y^{\sigma}(t) \left(-\overline{z}^{\Delta\Delta}(t) + q(t)\, \overline{z}^{\sigma}(t)\right) \triangle t \\
&\quad + \frac{1}{K_1}\left(a_0 y(\alpha) - b_0 y^{\Delta}(\alpha)\right)\left(b_1 \overline{z}^{\Delta}(\alpha) - a_1 \overline{z}(\alpha)\right) \\
&\quad - \frac{1}{K_1}\left(b_1 y^{\Delta}(\alpha) - a_1 y(\alpha)\right)\left(a_0 \overline{z}(\alpha) - b_0 \overline{z}^{\Delta}(\alpha)\right) \\
&\quad + \frac{1}{K_2}\left(c_0 y(\beta) - d_0 y^{\Delta}(\beta)\right)\left(d_1 \overline{z}^{\Delta}(\beta) - c_1 \overline{z}(\beta)\right) \\
&\quad - \frac{1}{K_2}\left(d_1 y^{\Delta}(\beta) - c_1 y(\beta)\right)\left(c_0 \overline{z}(\beta) - d_0 \overline{z}^{\Delta}(\beta)\right)
\end{aligned}$$

Kısmi integrasyon yöntemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\int_{\alpha}^{\beta} \left(-y^{\triangle\triangle}(t) + q(t)\, y^{\sigma}(t)\right) \overline{z}^{\sigma}(t) \triangle t - \int_{\alpha}^{\beta} y^{\sigma}(t)\left(-\overline{z}^{\Delta\Delta}(t) + q(t)\, \overline{z}^{\sigma}(t)\right) \triangle t \\
&\quad = -y^{\triangle}(\beta)\, \overline{z}(\beta) + \overline{z}^{\Delta}(\beta)\, y(\beta) + y^{\triangle}(\alpha)\, \overline{z}(\alpha) - \overline{z}^{\Delta}(\alpha)\, y(\alpha) \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

ifadesinin geçerli olduğu gösterilebilir. Diğer taraftan

$$\frac{1}{K_1}\left[\left(a_0 y(\alpha) - b_0 y^{\Delta}(\alpha)\right)\left(b_1 \overline{z}^{\Delta}(\alpha) - a_1 \overline{z}(\alpha)\right)\right]$$

$$-\frac{1}{K_1}\left[\left(b_1 y^{\Delta}(\alpha) - a_1 y(\alpha)\right)\left(a_0 \overline{z}(\alpha) - b_0 \overline{z}^{\Delta}(\alpha)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{K_1}\overline{z}^{\Delta}(\alpha)\left[a_0 b_1 y(\alpha) - b_0 b_1 y^{\Delta}(\alpha) + b_1 b_0 y^{\Delta}(\alpha) - a_1 b_0 y(\alpha)\right]$$

$$+\frac{1}{K_1}\overline{z}(\alpha)\left[-a_0 a_1 y(\alpha) + a_1 b_0 y^{\Delta}(\alpha) - b_1 a_0 y^{\Delta}(\alpha)\, \overline{z}(\alpha) + a_0 a_1 y(\alpha)\right]$$

$= -\overline{z}^{\Delta}(\alpha)\, y(\alpha) + \overline{z}(\alpha)\, y^{\Delta}(\alpha)$ ve

$$\frac{1}{K_2}\left[\left(c_0 y(\beta) - d_0 y^{\Delta}(\beta)\right)\left(d_1 \overline{z}^{\Delta}(\beta) - c_1 \overline{z}(\beta)\right)\right]$$

$$-\frac{1}{K_2}\left[\left(d_1 y^{\Delta}(\beta) - c_1 y(\beta)\right)\left(c_0 \overline{z}(\beta) - d_0 \overline{z}^{\Delta}(\beta)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{K_2}\overline{z}^{\Delta}(\beta)\left[c_0 d_1 y(\beta) - d_0 d_1 y^{\Delta}(\beta) + d_1 d_0 y^{\Delta}(\beta) - c_1 d_0 y(\beta)\right]$$

$$+\frac{1}{K_2}\overline{z}(\beta)\left[-c_0c_1y(\beta)+d_0c_1y^{\Delta}(\beta)-d_1c_0y^{\Delta}(\beta)+c_1c_0y(\beta)\right]$$

$$=\overline{z}^{\Delta}(\beta)\,y(\beta)-\overline{z}(\beta)\,y^{\Delta}(\beta)$$

elde edilir. Bu eşitlikler (3.23) ile birlikte $\langle LY, Z^{\sigma}\rangle - \langle Y^{\sigma}, LZ\rangle = 0$ eşitliğini verir ve böylece ispat biter.

Sonuç 3.3.2: **i)** L operatörünün ve dolayısıyla (3.19)-(3.21) probleminin tüm özdeğerleri reel sayılardır.

ii) $y(t)$ ve $z(t)$ (3.19)-(3.21) probleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları ise

$$\int_{\alpha}^{\beta} y(t)\,\overline{z}(t)\,\triangle t+\frac{1}{K_1}\left[b_1y^{\Delta}(\alpha)-a_1y(\alpha)\right]\left[b_1z^{\Delta}(\alpha)-a_1z(\alpha)\right]$$
$$+\frac{1}{K_2}\left[d_1y^{\Delta}(\beta)-c_1y(\beta)\right]\left[d_1z^{\Delta}(\beta)-c_1z(\beta)\right]=0$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: **i)** λ_0, L operatörünün bir özdeğeri ve $y(t)$ bu özdeğere karşılık gelen öz fonksiyon olsun. Teorem 3.3.1'den

$$\langle LY, Y^{\sigma}\rangle = \langle Y^{\sigma}, LY\rangle$$

geçerlidir. Dolayısıyla $\langle LY, Y^{\sigma}\rangle \in \mathbb{R}$ dir. Diğer yandan

$$\langle LY, Y^{\sigma}\rangle = \langle \lambda_0 Y^{\sigma}, Y^{\sigma}\rangle = \lambda_0\langle Y^{\sigma}, Y^{\sigma}\rangle$$

eşitliği geçerli olduğundan λ_0 özdeğerinin reel sayı olduğu açıktır.

ii)

$$\begin{aligned} LY &= \lambda_1 Y^{\sigma} \\ LZ &= \lambda_2 Z^{\sigma} \end{aligned}$$

olsun. Teorem 3.3.1'den

$$\begin{aligned} \lambda_1\langle Y^{\sigma}, Z^{\sigma}\rangle &= \langle LY, Z^{\sigma}\rangle = \langle Y^{\sigma}, LZ\rangle = \lambda_2\langle Y^{\sigma}, Z^{\sigma}\rangle \\ &= (\lambda_1-\lambda_2)\langle Y^{\sigma}, Z^{\sigma}\rangle \end{aligned}$$

yazılabilir. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan

$$\langle Y, Z \rangle = 0$$

geçerlidir. Bu ise iddia edilen eşitliği verir.

Bu bölümde $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ ve $d(\lambda)$ fonksiyonlarının özel seçilmesinden dolayı $\varphi(t,\lambda)$ ve $\psi(t,\lambda)$ fonksiyonları için konulan (3.5) ve (3.6) başlangıç koşulları aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varphi(\alpha,\lambda) = a_1\lambda + a_0, \quad \varphi^{\triangle}(\alpha,\lambda) = b_1\lambda + b_0$$

$$\psi(\beta,\lambda) = c_1\lambda + c_0, \quad \psi^{\triangle}(\beta,\lambda) = d_1\lambda + d_0$$

Lemma 3.3.3: Herbir λ_n özdeğeri için $\varphi(t,\lambda_n) = \chi_n \psi(t,\lambda_n)$ eşitliği geçerlidir. Burada $\chi_n = \dfrac{\left[c_1\varphi^{\triangle}(\beta,\lambda_n) - d_1\varphi(\beta,\lambda_n)\right]}{K_2}$ dır.

İspat: λ_n özdeğer olduğundan $\Delta(\lambda_n) = 0$ dır. Buna göre her bir $t \in \mathbb{T}^k$ için $\left(\varphi^{\triangle}\psi - \psi^{\Delta}\varphi\right)(t,\lambda_n) = 0$ geçerlidir. Bu ise $\varphi(t,\lambda_n)$ ve $\psi(t,\lambda_n)$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olması demektir. Dolayısıyla

$$\varphi(t,\lambda_n) = \chi_n \psi(t,\lambda_n)$$

eşitliğini gerçekleyen bir χ_n sabiti vardır. Diğer yandan $\varphi(\beta,\lambda_n) = \chi_n\psi(\beta,\lambda_n) = \chi_n(c_1\lambda_n + c_0)$ ve $\varphi^{\Delta}(\beta,\lambda_n) = \chi_n\psi^{\Delta}(\beta,\lambda_n) = \chi_n(d_1\lambda_n + d_0)$ eşitlikleri kullanılarak $\chi_n = \dfrac{\left[c_1\varphi^{\triangle}(\beta,\lambda_n) - d_1\varphi(\beta,\lambda_n)\right]}{K_2}$ ifadesi elde edilir.

Teorem 3.3.4: (3.19)- (3.21) probleminin tüm özdeğerleri cebirsel olarak basittir.

İspat: λ_n, probleminin herhangi bir özdeğeri olsun.O halde $\Delta(\lambda_n) = 0$ dır. Basit olduğunu göstermek için $\Delta'(\lambda_n) \neq 0$ olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$$-\varphi^{\Delta\Delta}(t,\lambda) + q(t)\varphi^{\sigma}(t,\lambda) = \lambda\varphi^{\sigma}(t,\lambda) \tag{3.24}$$

eşitliğinin her iki tarafının λ ya göre türevi alınırsa;

$$-\varphi_{\lambda}^{\Delta\Delta}(t,\lambda) + q(t)\varphi_{\lambda}^{\sigma}(t,\lambda) = \varphi^{\sigma}(t,\lambda) + \lambda\varphi_{\lambda}^{\sigma}(t,\lambda) \tag{3.25}$$

bulunur. Burada $\varphi_\lambda = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ dır. (3.24) denklemi $\varphi_\lambda^\sigma(t,\lambda)$, (3.25) denklemi $-\varphi^\sigma(t,\lambda)$ ile çarpılıp taraf tarafa toplanırsa;

$$\varphi_\lambda^{\Delta\Delta}(t,\lambda)\,\varphi^\sigma(t,\lambda) - \varphi^{\Delta\Delta}(t,\lambda)\,\varphi_\lambda^\sigma(t,\lambda) = -\left(\varphi^\sigma(t,\lambda)\right)^2$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı α dan β ya integrallenerek

$$\varphi(t,\lambda)\,\varphi_\lambda^\Delta(t,\lambda) - \varphi^\Delta(t,\lambda)\,\varphi_\lambda(t,\lambda)\,|_\alpha^\beta = -\int_\alpha^\beta \left[\varphi^\sigma(t,\lambda)\right]^2 \Delta(t) \tag{3.26}$$

yazılabilir. $\varphi(t,\lambda)$ (3.6) başlangıç koşullarını sağladığından

$$-\int_\alpha^\beta \left[\varphi^\sigma(t,\lambda)\right]^2 \Delta(t) = K_1 + \varphi(\beta,\lambda)\,\varphi_\lambda^\Delta(\beta,\lambda) - \varphi^\Delta(\beta,\lambda)\,\varphi_\lambda(\beta,\lambda)$$

olduğu açıktır. Son eşitlikte $\lambda = \lambda_n$ yazılırsa Lemma 3.3.3 yardımıyla

$$\begin{aligned}
-\int_\alpha^\beta \left[\varphi^\sigma(t,\lambda_n)\right]^2 \Delta(t) &= K_1 + \varphi(\beta,\lambda_n)\,\varphi_\lambda^\Delta(\beta,\lambda_n) - \varphi^\Delta(\beta,\lambda_n)\,\varphi_\lambda(\beta,\lambda_n) \\
&= K_1 + \chi_n\left[(c_1\lambda_n + c_0)\,\varphi_\lambda^\Delta(\beta,\lambda_n) - (d_1\lambda_n + d_0)\,\varphi_\lambda(\beta,\lambda_n)\right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafına $\chi_n\left[d_1\varphi^\Delta(\beta,\lambda_n) - c_1\varphi_\lambda(\beta,\lambda_n)\right]$ ifadesini ekleyip çıkarırsak

$$\begin{aligned}
-\int_\alpha^\beta \left[\varphi^\sigma(t,\lambda_n)\right]^2 \Delta(t) &= K_1 + \chi_n\Delta'(\lambda_n) - \chi_n\left[d_1\varphi^\Delta(\beta,\lambda_n) - c_1\varphi(\beta,\lambda_n)\right] \\
&= K_1 + \chi_n\Delta'(\lambda_n) - \chi_n\left[d_1\chi_n\psi^\Delta(\beta,\lambda_n) - c_1\chi_n\psi(\beta,\lambda_n)\right] \\
&= K_1 + \chi_n\Delta'(\lambda_n) + \chi_n^2 K_2
\end{aligned}$$

eşitliğini buluruz. Buradan

$$\chi_n\Delta'(\lambda_n) = -\int_\alpha^\beta \left[\varphi^\sigma(t,\lambda_n)\right]^2 \Delta(t) - K_1 - \chi_n^2 K_2 < 0$$

olacağından $\Delta'(\lambda_n) \neq 0$ olur ve ispat biter.

3.4 Herglotz-Nevanlinna Tipinde Fonksiyon Bulunduran Sınır Koşulları

Bu bölümde de ele alınan problemin sınır koşullarındaki katsayıların farklı bir özel durumu ele alınmaktadır. (3.2) ve (3.3) sınır koşullarındaki $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ ve $d(\lambda)$ polinomlarının

$$\frac{a(\lambda)}{b(\lambda)} = f\left(\lambda\right) := f_1.\lambda + f_0 - \sum_{k=1}^{N_1} \frac{a_k}{\lambda - b_k}$$

ve

$$\frac{c(\lambda)}{d(\lambda)} = g\left(\lambda\right) := g_1.\lambda + g_0 - \sum_{k=1}^{N_2} \frac{c_k}{\lambda - d_k}$$

şeklinde verildiğini kabul edelim. Analitik fonksiyonlar teorisinde önemli bir yere sahip olan bu tip fonksiyonlar Herglotz-Nevanlinna tipinde fonksiyon olarak adlandırılmaktadır. Katsayılar bu şekile alındığında (3.1)-(3.3) problemi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$-y^{\Delta\Delta}\left(t\right) + q\left(t\right) y^{\sigma}\left(t\right) = \lambda y^{\sigma}\left(t\right), \qquad t \in \mathbb{T}^{k^2} \tag{3.27}$$

$$y^{\Delta}\left(\alpha\right) - f\left(\lambda\right) y\left(\alpha\right) = 0 \tag{3.28}$$

$$y^{\Delta}\left(\beta\right) - g\left(\lambda\right) y\left(\beta\right) = 0 \tag{3.29}$$

Burada $f\left(\lambda\right)$ ve $g\left(\lambda\right)$ fonksiyonlarının tüm katsayıları reel sayılar olup ayrıca $f_1 < 0$, $g_1 > 0$, $b_1 < b_2 < \cdots < b_{N_1}$, $d_1 < d_2 < \cdots < d_{N_2}$ ve her bir k için $a_k < 0$, $c_k > 0$ olduğu kabul edilmektedir. (3.27)-(3.29) probleminin bir önceki alt bölümde ele alınan (3.19)-(3.21) probleminden daha genel olduğu açıktır.

$H = L_2\left(\mathbb{T}^k\right) \oplus \mathbb{C}^{N_1+1} \oplus \mathbb{C}^{N_2+1}$; $Y, Z \in H$,

$Y = \left(y\left(t\right); u_1, u_2, \ldots, u_{N_1+1}; v_1, v_2, \ldots, v_{N_2+1}\right)$,

$Z = \left(z\left(t\right); u_1', u_2', \ldots, u_{N_1+1}'; v_1', v_2', \ldots, v_{N_2+1}'\right)$ olmak üzere

$$\left\langle Y, Z\right\rangle := \int_{\alpha}^{\beta} y\left(t\right) \overline{z}\left(t\right) \triangle t - \sum_{k=1}^{N_1} \frac{u_k.\overline{u_k'}}{a_k} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{v_k.\overline{v_k'}}{c_k} - \frac{u_{N_1+1}.\overline{u'}_{N_1+1}}{f_1} + \frac{v_{N_2+1}.\overline{v'}_{N_2+1}}{g_1}$$

dönüşümü tanımlansın. $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bir iç çarpım uzayıdır. Gerçekten;

i) $\left\langle Y, Y\right\rangle \geq 0$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} \left\langle Y, Y\right\rangle &= \int_{\alpha}^{\beta} \left|y\left(t\right)\right|^2 \triangle t - \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\left|u_k\right|^2}{a_k} + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{\left|v_k\right|^2}{c_k} \\ &\quad - \frac{\left|u_{N_1+1}\right|^2}{f_1} + \frac{\left|v_{N_2+1}\right|^2}{g_1} \end{aligned}$$

olduğundan $\langle Y,Y\rangle \geq 0$ olduğu görülür.

ii) $\langle Y,Y\rangle = 0 \Leftrightarrow Y=0$ olduğu açıktır.

iii) $W=\left(w(t);w_1,w_2,\ldots,w_{N_1+1};\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_{N_2+1}\right)$ olmak üzere ; $\langle Y+W,Z\rangle = \langle Y,Z\rangle + \langle W,Z\rangle$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\langle Y+W,Z\rangle &= \int_\alpha^\beta \left(y(t)+w(t)\right)\overline{z}(t)\,\triangle t \\
&\quad -\sum_{k=1}^{N_1}\frac{(u_k+w_k).\overline{u'_k}}{a_k}-\frac{\left(u_{N_1+1}+w_{N_1+1}\right).\overline{u'}_{N_1+1}}{f_1} \\
&\quad +\sum_{k=1}^{N_2}\frac{(v_k+\gamma_k).\overline{v'_k}}{c_k}+\frac{\left(v_{N_2+1}+\gamma_{N_2+1}\right).\overline{v'}_{N_2+1}}{g_1} \\
&= \int_\alpha^\beta y(t)\,\overline{z}(t)\,\triangle t+\int_\alpha^\beta w(t)\,\overline{z}(t)\,\triangle t \\
&\quad -\sum_{k=1}^{N_1}\frac{u_k.\overline{u'_k}}{a_k}-\sum_{k=1}^{N_1}\frac{w_k.\overline{u'_k}}{a_k} \\
&\quad -\frac{u_{N_1+1}.\overline{u'}_{N_1+1}}{f_1}-\frac{w_{N_1+1}.\overline{u'}_{N_1+1}}{f_1} \\
&\quad +\sum_{k=1}^{N_2}\frac{v_k.\overline{v'_k}}{c_k}+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{\gamma_k.\overline{v'_k}}{c_k} \\
&\quad +\frac{v_{N_2+1}.\overline{v'}_{N_2+1}}{g_1}+\frac{\gamma_{N_2+1}.\overline{v'}_{N_2+1}}{g_1}
\end{aligned}$$

eşitliğinde gerekli düzenlemeler yapılırsa $\langle Y+W,Z\rangle = \langle Y,Z\rangle + \langle W,Z\rangle$ olduğu görülür.

iv) $\langle \gamma Y, Z\rangle = \gamma \langle Y, Z\rangle$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\langle \gamma Y, Z\rangle &= \int_{\alpha}^{\beta} (\gamma . y(t))\, \overline{z}(t) \triangle t \\
&\quad - \sum_{k=1}^{N_1} \frac{(\gamma . u_k)\, \overline{u'_k}}{a_k} - \frac{(\gamma . u_{N_1+1})\, \overline{u'}_{N_1+1}}{f_1} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{(\gamma . v_k)\, \overline{v'_k}}{c_k} + \frac{(\gamma . v_{N_2+1})\, \overline{v'}_{N_2+1}}{g_1} \\
&= \gamma \{ \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, \overline{z}(t) \triangle t - \sum_{k=1}^{N_1} \frac{u_k . \overline{u'_k}}{a_k} - \frac{u_{N_1+1} . \overline{u'}_{N_1+1}}{f_1} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{v_k . \overline{v'_k}}{c_k} + \frac{v_{N_2+1} . \overline{v'}_{N_2+1}}{g_1} \} \\
&= \gamma \langle Y, Z\rangle
\end{aligned}$$

olur.

v) $\langle Y, Z\rangle = \left\langle \overline{Z, Y} \right\rangle$ olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\left\langle \overline{Z, Y} \right\rangle &= \int_{\alpha}^{\beta} \overline{z(t)\, \overline{y}(t)} \triangle t - \sum_{k=1}^{N_1} \frac{\overline{u'_k . \overline{u_k}}}{a_k} - \frac{\overline{u'_{N_1+1} . \overline{u}_{N_1+1}}}{f_1} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{\overline{v'_k . \overline{v_k}}}{c_k} + \frac{\overline{v'_{N_2+1} . \overline{v}_{N_2+1}}}{g_1} \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\, \overline{z}(t) \triangle t - \sum_{k=1}^{N_1} \frac{u_k . \overline{u'_k}}{a_k} - \frac{u_{N_1+1} . \overline{u'}_{N_1+1}}{f_1} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N_2} \frac{v_k . \overline{v'_k}}{c_k} + \frac{v_{N_2+1} . \overline{v'}_{N_2+1}}{g_1} \\
&= \langle Y, Z\rangle
\end{aligned}$$

Dolayısıyla tüm koşullar sağlandığından $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bir iç çarım uzayıdır.

H üzerinde tanım kümesi ;

$D(L) = Y \in H : Y = \{(y(t); u_1, u_2, \ldots, u_{N_1+1}; v_1, v_2, \ldots, v_{N_2+1}),$ **i)**$\mathbf{y} \in \mathbf{C}^2_{rd}(\mathbb{T}), \ell y \in L_2(\mathbb{T}^k),$

ii)$u_{N_1+1} = f_1 y(\alpha),$

iii)$v_{N_2+1} = g_1 y(\beta)\}$

olmak üzere

$$L(Y)=\begin{bmatrix} -y^{\Delta\Delta}(t)+q(t)\,y^{\sigma}(t) \\ b_1u_1-a_1y(\alpha) \\ b_2u_2-a_2y(\alpha) \\ \vdots \\ b_{N_1}u_{N_1}-a_{N_1}y(\alpha) \\ y^{\Delta}(\alpha)-f_0.y(\alpha)-\sum\limits_{k=1}^{N_1}u_k \\ d_1v_1-c_1y(\beta) \\ d_2v_2-c_2y(\beta) \\ \vdots \\ d_{N_2}v_{N_2}-c_{N_2}y(\beta) \\ y^{\Delta}(\beta)-g_0.y(\beta)-\sum\limits_{k=1}^{N_2}v_k \end{bmatrix} \tag{3.30}$$

şeklinde tanımlanan L operatörünü göz önüne alalım.

Teorem 3.4.1: En az bir $Y\neq 0$ için $LY=\lambda Y^{\sigma}$ eşitliğini sağlayan λ sayıları ile (3.27)-(3.29) probleminin özdeğerleri çakışmaktadır.

İspat: Bir λ sayısı ve $Y=(y(t);u_1,u_2,\dots,u_{N_1+1};v_1,v_2,\dots,v_{N_2+1})\neq 0$ vektörü için $LY=\lambda Y^{\sigma}$ olsun. Bu durumda L' nin tanımı gereği

$$-y^{\Delta\Delta}(t)+q(t)\,y^{\sigma}(t) = \lambda y^{\sigma}(t) \tag{3.31}$$

$$b_ku_k-a_ky(\alpha) = \lambda u_k,\ k=\overline{1,N_1} \tag{3.32}$$

$$y^{\Delta}(\alpha)-f_0.y(\alpha)-\sum_{k=1}^{N_1}u_k = \lambda f_1.y(\alpha) \tag{3.33}$$

eşitlikleri geçerlidir. (3.31) eşitliği $y(t)$ fonksiyonunun (3.27) denklemini sağladığını gösterir. (3.32) den $u_k=\dfrac{a_k}{b_k-\lambda}y(\alpha)$ yazılabilir. Bu ise (3.33) kullanılarak

$$y^{\Delta}(\alpha)-f_0.y(\alpha)-\sum_{k=1}^{N_1}\frac{a_k}{b_k-\lambda}y(\alpha)=\lambda f_1y(\alpha)$$

eşitliğini verir. Böylece $y^{\Delta}(\alpha)-\left[f_1\lambda+f_0-\sum\limits_{k=1}^{N_1}\frac{a_k}{\lambda-b_k}\right]y(\alpha)=0$ olup (3.28) sınır koşulu gerçeklenir. Benzer şekilde (3.29) in de sağlandığı gösterilebilir. Dolayısıyla

λ sayısı (3.27)-(3.29) probleminin de bir özdeğeridir.

Şimdi de tersine λ sayısının (3.27)-(3.29) probleminin bir özdeğeri ve $y(t) \neq 0$ fonksiyonunun ona karşılık gelen özfonksiyon olduğunu kabul edelim.

$$Y = \begin{bmatrix} y(t) \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{N_1} \\ f_1.y(\alpha) \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{N_2} \\ g_1.y(\beta) \end{bmatrix}$$

vektörünü $u_k = \dfrac{a_k}{b_k - \lambda} y(\alpha),\ k = \overline{1, N_1}$ ve $v_j = \dfrac{c_j}{d_j - \lambda} y(\alpha)$ şartları altında göz önüne alırsak $LY = \lambda Y^{\sigma}$ eşitliği geçerli olur ve ispat biter.

Teorem 3.4.2: Her bir $Y \in D(L)$ için $\langle LY, Y^{\sigma} \rangle$ ifadesi bir reel sayıdır.

İspat: Gerekli hesaplamalar yapılarak

$$\begin{aligned}
\langle LY, Y^{\sigma}\rangle &= \int_{\alpha}^{\beta}\left(-y^{\Delta\Delta}(t)+q(t)\,y^{\sigma}(t)\right)\overline{y}^{\sigma}(t)\,\Delta(t) \\
&\quad -\sum_{k=1}^{N_1}\frac{(b_k.u_k-a_k.y(\alpha))\,\overline{u_k}}{a_k}-\frac{\left(y^{\Delta}(\alpha)-f_0.y(\alpha)-\sum\limits_{k=1}^{N_1}u_k\right)f_1.\overline{y}(\alpha)}{f_1} \\
&\quad +\sum_{k=1}^{N_2}\frac{(d_k.v_k-c_k.y(\beta))\,\overline{v_k}}{c_k}+\frac{\left(y^{\Delta}(\beta)-g_0.y(\beta)-\sum\limits_{k=1}^{N_2}v_k\right)g_1.\overline{y}(\beta)}{g_1} \\
&= -y^{\Delta}.\overline{y}\,|_{\alpha}^{\beta}+\int_{\alpha}^{\beta}\left|y^{\Delta}\right|^2\Delta(t)+\int_{\alpha}^{\beta}q.\left|y^{\sigma}\right|^2\Delta(t) \\
&\quad -\sum_{k=1}^{N_1}\frac{b_k}{a_k}\left|u_k\right|^2+\sum_{k=1}^{N_1}y(\alpha)\,\overline{u_k}-y^{\Delta}(\alpha)\,\overline{y}(\alpha)+f_0.\left|y(\alpha)\right|^2+\sum_{k=1}^{N_1}u_k\overline{y}(\alpha) \\
&\quad +\sum_{k=1}^{N_2}\frac{d_k}{c_k}\left|v_k\right|^2-\sum_{k=1}^{N_2}y(\beta)\,\overline{v_k}+y^{\Delta}(\beta)\,\overline{y}(\beta)+g_0.\left|y(\beta)\right|^2-\sum_{k=1}^{N_2}v_k\overline{y}(\beta)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $\langle LY, Y^{\sigma}\rangle \in \mathbb{R}$ olduğu görülür.

Sonuç 3.4.3: (3.27)-(3.29) probleminin tüm özdeğerleri reel sayılardır.

Teorem 3.4.4 (3.27)-(3.29) probleminin özdeğerleri $\Delta(\lambda)$ nın basit sıfırlarıdır.

İspat: λ_0 (3.27)-(3.29) probleminin özdeğeri olsun. $\Delta'(\lambda_0) \neq 0$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. φ ve ψ fonksiyonları (3.27) denkleminin çözümleri olduğundan aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$-\psi^{\Delta\Delta}(t,\lambda)+q(t)\,\psi^{\sigma}(t,\lambda)=\lambda\psi^{\sigma}(t,\lambda) \tag{3.34}$$

$$-\varphi^{\Delta\Delta}(t,\lambda_0)+q(t)\,\varphi^{\sigma}(t,\lambda_0)=\lambda_0\varphi^{\sigma}(t,\lambda_0) \tag{3.35}$$

(3.34) denklemini $\varphi^{\sigma}(t,\lambda_0)$ ile, (3.35) denklemini $-\psi^{\sigma}(t,\lambda)$ ile çarpılıp, taraf tarafa toplanıp ardından da α dan β ya integrallenirse;

$$\begin{aligned}
(\lambda-\lambda_0)\int_{\alpha}^{\beta}\varphi^{\sigma}(t,\lambda_0)\,\psi^{\sigma}(t,\lambda)\,\Delta t &= d(\lambda)\,\varphi^{\Delta}(\beta,\lambda_0)-c(\lambda)\,\varphi(\beta,\lambda_0) \\
&\quad -a(\lambda_0)\,\psi(\alpha,\lambda)+b(\lambda_0)\,\psi^{\Delta}(\alpha,\lambda) \\
&\quad +a(\lambda)\,\psi(\alpha,\lambda)-b(\lambda)\,\psi^{\Delta}(\alpha,\lambda)-\Delta(\lambda)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda-\lambda_0} &= -\int\limits_{\alpha}^{\beta}\varphi^{\sigma}(t,\lambda_0)\,\psi^{\sigma}(t,\lambda)\,\Delta t + \\
&\quad \frac{a(\lambda)-a(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\psi(\alpha,\lambda) - \frac{b(\lambda)-b(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\psi^{\Delta}(\alpha,\lambda) \\
&\quad -\frac{c(\lambda)-c(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\varphi(\beta,\lambda_0) + \frac{d(\lambda)-d(\lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\varphi^{\Delta}(\beta,\lambda_0)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $\lambda \to \lambda_0$ iken limite geçilirse;

$$
\begin{aligned}
\Delta'(\lambda_0) &= -\chi_0\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\varphi^{\sigma}(t,\lambda_0))^2\,\Delta t + a\prime(\lambda_0)\,\chi_0 b(\lambda_0) - b'(\lambda_0)\,\chi_0 a(\lambda_0) \\
&\quad -c'(\lambda_0)\,\frac{1}{\chi_0}d(\lambda_0) + d\prime(\lambda_0)\,\frac{1}{\chi_0}c(\lambda_0) \\
&= -\chi_0\left\{\int\limits_{\alpha}^{\beta}(\varphi^{\sigma}(t,\lambda_0))^2\,\Delta t - [b(\lambda_0)]^2 f\prime(\lambda_0) + \frac{1}{\chi_{0^2}}[d(\lambda_0)]^2 g'(\lambda_0)\right\}
\end{aligned}
$$

olur ve $f'(\lambda_0) < 0$ ve $g'(\lambda_0) > 0$ olduğundan $\Delta'(\lambda_0) \neq 0$ olup ispat biter.

KAYNAKLAR

[1] **Agarwal, R.P., Bohner, M. and Wong, P.J.Y.** (1999). Sturm-Liouville eigenvalue problems on time scales, Appl. Math. Comput. 99, pp. 153–166.

[2] **Allahverdiev, B.P., Eryilmaz, A., Tuna, H.** (2017). Dissipative Sturm-Liouville operators with a spectral parameter in the boundary condition on bounded time scales. Electronic Journal of Differential Equations, 95, 1–13

[3] **Amster, P., De Na´poli, P. and Pinasco, J.P.** (2008). Eigenvalue distribution of second-order dynamic equations on time scales considered as fractals, J. Math. Anal. Appl. 343, pp. 573–584.

[4] **Amster, P., De Na´poli, P. and Pinasco, J.P.** (2009). Detailed asymptotic of eigenvalues on time scales, J. Differ. Equ. Appl. 15, pp. 225–231.

[5] **Atkinson, F.** (1964). Discrete and Continuous Boundary Problems, Academic Press, New York.

[6] **Bohner, M. and Peterson, A.** (2001). Dynamic Equations on Time Scales, Birkha¨user, Boston, MA.

[7] **Bohner, M. and Peterson, A. (eds.)** (2003). Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkha¨user, Boston, MA.

[8] **Davidson, F.A. and Rynne, B.P.** (2002). Global bifurcation on time scales, J. Math. Anal. Appl. 267, pp. 345–360.

[9] **Davidson, F.A. and Rynne, B.P.** (2007). Self-adjoint boundary value problems on time scales, Electron. J. Differ. Equ. 2007(175), pp. 1–10.

[10] **Davidson, F.A. and Rynne, B.P.** (2007). Eigenfunction expansions in L2 spaces for boundary value problems on time-scales, J. Math. Anal. Appl. 335, pp. 1038–1051.

[11] **Erbe, L. and Hilger, S.** (1993). Sturmian theory on measure chains, Differ. Equ. Dyn. Syst. 1, pp. 223–244.

[12] **Erbe, L. and Peterson, A.** (2000). Eigenvalue conditions and positive solutions, J. Differ. Equ. Appl. 6, pp. 165–191.

[13] **Guseinov, G.S.** (2007). Eigenfunction expansions for a Sturm-Liouville problem on time scales, Int. J. Differ. Equ. 2, pp. 93–104.

[14] **Guseinov, G.S.** (2008). An expansion theorem for a Sturm-Liouville operator

on semi-unbounded time scales, Adv. Dyn. Syst. Appl. 3, pp. 147–160.

[15] **Hilger, S.** (1990). Analysis on measure chains – a unified approach to continuous and discrete calculus, Results in Math. 18, 18–56.

[16] **Huseynov, A.** (2010). Limit point and limit circle cases for dynamic equations on time scales, Hacet. J. Math. Stat. 39, pp. 379–392.

[17] **Huseynov, A. and Bairamov, E.** (2009). On expansions in eigenfunctions for second order dynamic equations on time scales, Nonlinear Dyn. Syst. Theory 9, pp. 7–88.

[18] **Kong, Q.** (2008). Sturm-Liouville problems on time scales with separated boundary conditions, Results Math. 52, pp. 111–121.

[19] **Ozkan, A.S**. (2017). Sturm-Liouville operator with parameter-dependent boundary conditions on time scales. Electron. J. Differential Equations, 212, 1-10.

[20] **Rynne, B.P.** (2007). L2 spaces and boundary value problems on time-scales, J. Math. Anal. Appl. 328, pp. 1217–1236.

[21] **Sun, S., Bohner, M. and Chen, S.** (2010).Weyl-Titchmarsh theory for Hamiltonian dynamic systems, Abstr. Appl. Anal., Art. ID 514760, 18 pp.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Ayşegül AKTAŞ
Doğum Yeri ve Tarihi	Yıldızeli, 26.04.1994
Medeni Hali	Evli
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü 58140 Sivas
E-posta Adresi	aysegul.simsir94@gmail.com

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Sivas Kongre Lisesi, 2007
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2011
Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2016