SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YARIASAL HALKALARDA TERS TÜREVLER ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve Gamze KARA
(20169237008)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI

SİVAS
HAZİRAN 2019

Merve Gamze KARA'ın hazırladığı ve **"YARIASAL HALKALARDA TERS TÜREVLER ÜZERİNE"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı	**Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI** Cumhuriyet Üniversitesi	………………
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Hasret Yazarlı DURNA** Cumhuriyet Üniversitesi	………..………
Jüri Üyesi	**Dr. Öğr. Üyesi Filiz ÇITAK** Tokat Gazi Osman Paşa Üniversitesi	………..……...

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. İsmail ÇELİK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

ETİK

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

10.06.2019

Merve Gamze KARA

TEŞEKKÜR

Bilgi ve deneyimlerinden sürekli yararlandığım, tezin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Öznur Gölbaşı’na çok teşekkür ederim.

Destekleriyle yanımda olan sevgili aileme çok teşekkür ederim.

Tüm öğretmenlerime çok teşekkür ederim.

Özel olarak, İhsan Şenocak’a, Nureddin Yıldız’a, Kerem Önder’e, Adem Güneş’e, Fatih Yağcı’ya, Mehmet Yıldız’a, Osman Bostancı’ya, Yunus Oran’a, Ahmet Taha’ya, Harun Serkan Aktaş’a, Yusuf Efe Göçer’e ve Bilal İşgören’e çok teşekkür ederim.

ÖZET

YARIASAL HALKADA ÇARPIMSAL TERS TÜREV ÜZERİNE

Merve Gamze KARA

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI

2019, 47+x sayfa

Yarıasal halkalarda ters türevler ve çarpımsal ters türevler konusunu araştıran bu tez iki bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde tez konusuyla ilgili genel tanım, teorem ve kavramlardan bahsedilerek örnekler verilmiştir. İkinci bölümde ise S.K Tiwari, R. K. Sharma ve B. Dhara tarafından 2015 yılında genelleştirilmiş çarpımsal ters türevler için yapılan bir çalışmadan hareketle, karakteristiği ikiden farklı R yarıasal halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir U Lie ideali, $d: R \to R$ tanımlı dönüşümü ile belirlenmiş $F: R \to R$ tanımlı genelleştirilmiş çarpımsal ters türevi olmak üzere $\forall x, y \in U$ için aşağıda verilen değişmeli olma koşulları araştırılmıştır:

i) $F(x)F(y) \pm xy = 0$

ii) $F(x)F(y) \pm yx = 0$

iii) $F(x)F(y) \pm d(y)F(x) = 0$

iv) $F([x,y]) \pm (xoy) = 0$

v) $F(xy) \pm (xoy) = 0$

vi) $[F(x), d(y)] \pm yx = 0$

vii) $F(xy) = F(x)F(y)$

viii) $F(xy) = F(y)F(y)$

Anahtar kelimeler: Yarıasal Halka, Türev, Ters Türev, Genelleştirilmiş Çarpımsal Ters Türev.

ABSTRACT

ON MULTIPLICATIVE REVERSE DERIVATIONS IN SEMIPRIME RINGS

Merve Gamze KARA

Master of Science Thesis

Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI

2019, 47+x pages

This thesis which investigates the subject of inverse derivations and multiplicative inverse derivations in semiprime rings consists of two parts.

In the first part, general definitions, theorems, concepts related to the thesis topic and examples are given. In the second part inspired by the paper of S.K Tiwari, R. K. Sharma and B. Dhara in 2015 about of multiplicative generalized reverse derivations, we investigated the some commutativity conditions. Let R be a semiprime ring with $2-$torsion free and U a noncentral Lie ideal of R such that $u^2 \in U$ for all $u \in U, d: R \to R$ a map and $F: R \to R$ multiplicative generalized reverse derivation associated with d. We proved the following conditions for all $x, y \in U$:

i) $F(x)F(y) \pm xy = 0$

ii) $F(x)F(y) \pm yx = 0$

iii) $F(x)F(y) \pm d(y)F(x) = 0$

iv) $F([x,y]) \pm (xoy) = 0$

v) $F(xy) \pm (xoy) = 0$

vi) $[F(x), d(y)] \pm yx = 0$

vii) $F(xy) = F(x)F(y)$

viii) $F(xy) = F(y)F(yx)$

KeyWords: Semiprime Ring, Derivation, Reverse Derivation, Multiplicative Generalized Reverse Derivation.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

$\in$	:	Elemanı olmak
$\forall$	:	Her
$\subseteq$	:	Alt küme veya eşit
$=$	:	Eşit
$\neq$	:	Eşit değil
$-$	:	Fark
$\Leftrightarrow$	:	Ancak ve ancak
$[x, y]$	:	x, y elemanlarının komütatör çarpımı
$x \circ y$	:	x, y elemanlarının Jordan çarpımı
$\emptyset$	:	Boş küme
(0)	:	Sıfır ideali
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	:	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	:	Pozitif tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi

GİRİŞ

Türev konusu matematik, fizik ve mühendisliğin pek çok alanında önemli rol oynamaktadır. Türevin cebirsel olarak halkalar üzerindeki tanımı ve cebirsel ifadeler yardımıyla türevli bir asal halkanın değişmeli olup olmadığının araştırılması fikri ilk olarak 1957 yılında E. C. Posner tarafından yapılmıştır. Posner'ın ön kaynak olduğu bu makaleden sonra türevler ve halka yapısı arasındaki ilişkiyi inceleyen pek çok çalışma yapılmıştır.

Halka üzerinde türev içeren koşulların incelenmesi ile bazen halkanın sağladığı genel özellikler, bazen de üzerinde tanımlanan türev hakkında belirleyici sonuçlar elde edilmiştir. Yapılan çalışmalarda türev yerine zamanla daha genel dönüşümler olan yarıtürev, genelleştirilmiş türev, çarpımsal türev gibi farklı fonksiyonlar alınmıştır. Bu fonksiyonlardan yarıtürev tanımı 1983 yılında J. Bergen tarafından ve genelleştirilmiş türev tanımı 1991 yılında M. Bresar tarafından yapılmıştır. Çarpımsal türev kavramı ise ilk kez 1991 yılında M. N. Daif tarafından tanımlanmıştır. Çarpımsal türevler, türev tanımındaki toplamsal olma koşulu kaldırılarak elde edildiği için yeni ve daha genel bir türev tanımıdır. Öte yandan türevle ilgili literatürde yer alan bu çalışmalarda zaman zaman R halkası yerine, halkanın ideali veya Lie ideali alınarak da yeni sonuçlar elde edilmiştir. Böylece günümüze kadar asal ve yarıasal halkalarda türevler yardımıyla pek çok cebirsel özellik incelenmiştir.

1989 yılında M. Bresar ve J. Vukman tarafından ilk kez ters türev tanımı verilmiş ve bu tanımla birlikte literatürde olan türevli, yarı türevli veya genelleştirilmiş türevli halkalarla ilgili pek çok sonuç ters türevler için ispatlanmıştır. R halkası değişmeli bir halka ise bu durumda türev ve ters türev kavramlarının aynı olduğu bilinen bir gerçektir. Ancak R halkası değişmeli halka değil iken bu iki kavram birbirinden farklıdır.

2007 yılında M. Ashraf ve arkadaşları R bir asal halka, F, R halkasının d ile belirlenen bir genelleştirilmiş türevi olmak üzere her $x, y \in R$ için

$$F(xy) \pm xy \in Z, F(xy) \pm yx \in Z, F(x)F(y) \pm xy \in Z, F(x)F(y) \pm y\,x \in Z$$

koşullarını araştırmışlardır. Bu cebirsel ifadeler günümüze kadar pek çok matematikçi tarafından ele alınmıştır. 2013 yılında B. Dhara ve A. Ali bu koşulları R

yarıasal halkasının d ile belirlenen bir F genelleştirilmiş çarpımsal türevi için ispatlamışlardır. 2018 yılında S. K. Tiwari ve arkadaşları ise aynı problemleri genelleştirilmiş çarpımsal ters türevler için göstermişlerdir.

Öte yandan 1989 yılında H. E. Bell and L. C. Kappe yarıasal bir R halkası veya R halkasının sıfırdan farklı bir sağ ideali üzerinde tanımlı olan d türevinin bir homomorfizma veya anti-homomorfizma ise sıfır olması gerektiğini ispatlamışlardır. Bu teorem günümüze kadar pek çok araştırmacı tarafından genelleştirilmiştir. 2018 yılında S. K. Tiwari ve arkadaşları bu teoremi genelleştirilmiş çarpımsal ters türevler için araştırmışlardır.

Bu tez çalışmasında, yukarıda bahsedilen problemlerin bir yarıasal halkanın her $u \in U$ için $u^2 \in U$ şartını sağlayan ve merkezi olmayan bir U Lie ideali ve d dönüşümü ile belirlenen bir F genelleştirilmiş çarpımsal ters türevi için incelenmiştir.

1.BÖLÜM

GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tezde kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1: $G \neq \emptyset$ olan bir küme ve $*$, G üzerinde tanımlı bir ikili işlem olmak üzere

i) $\forall a, b, c \in G$ için $a * (b * c) = (a * b) * c$

ii) $\forall a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak şekilde bir $e \in G$ vardır

iii) $\forall a \in G$ için $a * x = x * a = e$ olacak şekilde bir $x \in G$ vardır

koşulları sağlanıyorsa G kümesine $*$ ikili işlemi altında bir grup denir ve $(G,*)$ ile gösterilir.

$(G,*)$ bir grup olmak üzere

iv) $\forall a, b \in G$ için $a * b = b * a$ dır,

koşulu sağlanıyorsa $(G,*)$ değişmeli gruptur denir.

Tanım 1.2: $(G,*)$ bir grup olmak üzere $A \neq \emptyset$ ve $A \subseteq G$ olsun. Eğer A kümesi G kümesi üzerinde tanımlı $*$ işlemine göre bir grup oluyorsa bu durumda A kümesine G grubunun bir alt grubu denir.

Tanım 1.3: Bir grubun, biriminden ve kendisinden farklı olan alt grubuna öz alt grup denir.

Tanım 1.4: $(G, +)$ ve $(S,*)$ iki grup olmak üzere bir $f: G \rightarrow S$ fonksiyonu

$\forall x, y \in G$ için $f(x + y) = f(x) * f(y)$ koşulunu sağlıyorsa f fonksiyonuna bir grup homomorfizması denir.

f grup homomorfizması, örten bir dönüşüm ise grup epimorfizması, birebir bir dönüşüm ise grup monomorfizması, birebir ve örten dönüşüm ise grup izomorfizması olarak adlandırılır.

Tanım 1.5: Boş kümeden farklı R kümesi üzerinde tanımlı " $+$ " ve "." ikili işlemleri için

i) $(R, +)$ değişmeli bir grup

ii) $\forall a, b, c \in R$ için $a(bc) = (ab)c$

iii) $\forall a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$

koşulları sağlanıyorsa R kümesine " $+$ " ve "." işlemleri ile birlikte bir halka denir ve $(R, +, .)$ ile gösterilir.

Ayrıca $(R, +, .)$ halkası için

iv) $\forall a, b \in R$ için $ab = ba$ ise R halkasına değişmeli (komütatif) halka denir.

v) $\forall a \in R$ için $a1_R = 1_R a$ olacak şekilde bir $1_R \in R$ varsa R halkasına birimli halka denir.

Tanım 1.6: R bir halka olmak üzere $S \neq \emptyset$ ve $S \subseteq R$ olsun. Eğer S kümesi R deki " $+$ " ve "." işlemleri ile birlikte bir halka oluyorsa bu durumda S ye R nin alt halkası denir.

Tanım 1.7: $(R, +, \cdot)$ ve $(S, *, \circ)$ iki halka olmak üzere bir $f: R \to S$ fonksiyonu $\forall x, y \in R$ için

i) $f(x + y) = f(x) * f(y)$
ii) $f(xy) = f(x) \circ f(y)$

koşullarını sağlıyorsa f fonksiyonuna bir halka homomorfizması denir.
f halka homomorfizması, örten bir dönüşüm ise halka epimorfizması, birebir bir dönüşüm ise halka monomorfizması, birebir ve örten bir dönüşüm ise halka izomorfizması olarak adlandırılır.

Tanım 1.8: R bir halka olmak üzere $x, y \in R$ için $xy - yx$ ifadesine x ile y elemanlarının komütatör çarpımı denir ve $[x, y]$ ile gösterilir.

$x, y \in R$ olmak üzere $xy + yx$ ifadesine ise x ile y elemanlarının Jordan çarpımı denir ve $x \circ y$ ile gösterilir.

Özellikler: R bir halka olmak üzere $\forall x, y, z \in R$ için aşağıdaki özdeşlikler doğrudur:

i) $[x+y, z] = [x, z] + [y, z]$

ii) $[x, yz] = y[x, z] + [x, y]z$

iii) $[xy, z] = x[y, z] + [x, z]y$

iv) $\big[[x, y], z\big] + \big[[y, z], x\big] + \big[[z, x], y\big] = 0$ (Jacobi özdeşliği)

v) $x \circ (yz) = (x \circ y)z - y[x, z] = y(x \circ z) + [x, y]z$

vi) $(xy) \circ z = x(y \circ z) - [x, z]y = (x \circ z)y + x[y, z]$

Tanım 1.9: R bir halka olmak üzere $A \neq \emptyset$ ve $A \subseteq R$ olsun.

$$\mathrm{C_A}(R) = \{a \in R | xa = ax, \forall x \in A\} = \{a \in R | [x, a] = 0, \forall x \in A\}$$

kümesine A kümesinin R halkasındaki merkezleştiricisi denir.

Özel olarak $\mathrm{C_R}(R)$ kümesine R halkasının merkezi denir ve $\mathrm{Z}(R)$ ile gösterilir.

Uyarı 1.10: Bir halkanın merkezi kendisinin bir alt halkasıdır.

Tanım 1.11: R bir halka ve I, R halkasının bir alt halkası olsun.

i) $\forall r \in R$ ve $a \in I$ için $ar \in I$ oluyorsa I kümesine R halkasının bir sağ ideali denir.

ii) $\forall r \in R$ ve $a \in I$ için $ra \in I$ oluyorsa I kümesine R halkasının bir sol ideali denir.

Eğer I kümesi R halkasının hem sağ, hem de sol ideali ise bu durumda I ya R halkasının bir ideali denir.

Örnek 1.12: $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ halkası verilsin Bu durumda

$$I = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R \middle| a \in \mathbb{Z}\right\}$$

alt kümesi R halkasının bir idealidir.

Tanım 1.13: R bir halka, A ve B alt grupları olsun. $a \in A$ ve $b \in B$ olmak üzere ab elemanları tarafından üretilen alt grup AB ile gösterilir. A ve B, R halkasının idealleri ve $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere

$AB = \{\sum_{sonlu} a_i\, b_i | a_i \in A, b_i \in B\}$
$A^n = \left\{\sum_{sonlu} a_{i_1}\, a_{i_2} \cdots a_{i_j} \middle| a_{i_j} \in A\right\}$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 1.14: R bir halka olmak üzere A, B, P kümeleri R halkasının idealleri ve $P \neq R$ olsun. Eğer $AB \subseteq P$ olduğunda $A \subseteq P$ veya $B \subseteq P$ oluyorsa bu durumda P idealine R halkasının bir asal ideali denir.

Tanım 1.15: Sıfır ideali asal ideal olan halkaya bir asal halka denir.

Önerme 1.16: R halkası asal halkadır. $\Leftrightarrow$ $a, b \in R$ olmak üzere $aRb = (0)$ iken $a = 0$ veya $b = 0$ dır.

Tanım 1.17: R bir halka ve I kümesi R halkasının bir ideali olsun. Eğer $I^n = (0)$ olacak biçimde $\exists n \in Z^+$ varsa I idealine R halkasının bir nilpotent ideali denir.

Tanım 1.18: R bir halka olmak üzere A, Q kümeleri R nin idealleri ve $Q \neq R$ olsun. Eğer $A^2 \subseteq Q$ iken $A \subseteq Q$ ise bu durumda Q idealine R halkasının bir yarıasal ideali denir.

Tanım 1.19: Sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan halkaya yarıasal halka denir.

Önerme 1.20: R halkası yarıasal halkadır. $\Leftrightarrow$ $a \in R$ olmak üzere $aRa = (0)$ iken $a = 0$ dır.

Uyarı 1.21: Her asal halka bir yarıasal halkadır. Ancak tersi her zaman doğru olmayabilir.

Tanım 1.22: R bir halka olmak üzere $\forall a \in R$ için $na = 0$ eşitliğini sağlayan $n \in \mathbb{Z}^+$ tamsayılarının en küçüğüne R halkasının karakteristiği denir ve $charR = n$ ile gösterilir. Böyle bir n tamsayısı yoksa R halkasının karakteristiği sıfırdır denir.

Tanım 1.23: R bir halka olmak üzere $m \in \mathbb{Z}$ ve $m \neq 0$ olsun. $\forall a \in R$ için $ma = 0$ olduğunda $a = 0$ oluyorsa R halkasına m-torsion free halka denir.

Uyarı 1.24: R bir 2-torsion free halka ise R halkasının karekteristiği ikiden farklıdır. Ancak tersi her zaman doğru olmayabilir.

Uyarı 1.25: R bir asal halka olmak üzere R halkasının karakteristiği ikiden farklı ise R halkası bir 2-torsion free halkadır.

İspat: R halkası karakteristiği ikiden farklı olan bir asal halka ve keyfi bir $x \in R$ için $2x = 0$ olsun. Bu durumda $\forall a,\ b \in R$ için

$$2(xab) = 0 \Rightarrow xab + xab = 0 \Rightarrow xa(b + b) = 0 \Rightarrow xa(2b) = 0$$

olur. R halkası asal halka olduğu için buradan $\forall b \in R$ için $2b = 0$ elde edilir. Hipotezden halkanın karekteristiği ikiden farklı olduğu için $x = 0$ olur. Böylece R halkası bir 2-torsion free halkadır.

Sonuç 1.26: R bir asal halka olsun. Bu durumda R halkasının $charR \neq 2$ olması ile 2-torsion free olması aynı anlama gelir.

Tanım 1.27: R bir halka, $U,\ R$ halkasının boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer

i) $\forall x, y \in U$ için $x - y \in U$

ii) $\forall x \in U$ ve $\forall r \in R$ için $[x, r] \in U$

koşulları sağlanıyorsa U kümesine R halkasının bir Lie ideali denir.

Not 1.28: R halkasının her ideali bir Lie idealidir.

İspat: I, R halkasının bir ideali olsun. Acaba I bir Lie ideal mi?

i) $\forall x, y \in I$ için I ideal olduğundan $x - y \in I$ sağlanır.

ii) $\forall x \in I$ ve $\forall r \in R$ için $[r, x] = rx - xr \in I$ mı?

I bir ideal olduğundan $r \in R,\ x \in I$ için $rx \in I$ve $xr \in I$ olur. Böylece

$rx - xr = [r, x] \in I$ dır. O halde I bir Lie idealdir.

Not 1.29: R halkasının her Lie ideali bir ideali değildir.

Örnek 1.30: $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $R = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z, t \in \mathbb{Z} \right\}$ halkası verilsin. $U = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \in R \middle| \, x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$ kümesi R halkasının bir Lie idealidir, ancak bir ideali değildir.

Çözüm:$X=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in U$ ve $Z=\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & t \end{pmatrix} \in R$ alalım.

i. $X-Y \in U$ mu?

$X-Y=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-a & y-b \\ 0 & x-a \end{pmatrix} \in U$ olur.

ii. $[Z,X] \in U$ mu?

$$[Z,X]=ZX-XZ=\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} mx & my+nx \\ 0 & tx \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} xm & xn+yt \\ 0 & xt \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} mx-xm & my+nx-xn-yt \\ 0 & tx-xt \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & my+nx-xn-yt \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in U$$

olur. Böylece U bir Lie idealdir. Ancak $X=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \in U,\ Z=\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & t \end{pmatrix} \in R$ için

$$XZ=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & n \\ 0 & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xm & xn+yt \\ 0 & xt \end{pmatrix} \notin U$$

olduğu için U ideal değildir.

Not 1.31: U, R halkasının bir Lie ideali olsun. Bu durumda $\forall x \in U$, $\forall r \in R$ için $[r,x] \in U$ olur. U Lie ideal olduğundan R halkasının toplamsal alt grubudur. Böylece $\forall x \in U$, $\forall r \in R$ için Lie ideal tanımının (i) şıkkından $[r,x] \in U$ iken $-[r,x] \in U$ dır. Buradan

$$-[r,x]=-(rx-xr)=xr-rx=[x,r] \in U$$

sağlanır. O halde $\forall x \in U$, $\forall r \in R$ için $[x,r] \in U$ olur.

Tanım 1.32: R bir halka, $d: R \to R$ tanımlı bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in R$ için

i) $d(x+y)=d(x)+d(y)$

ii) $d(xy)=d(x)y+xd(y)$

koşulları sağlanıyorsa d ye R halkasında bir türev denir.(Posner, 1957)

Örnek 1.33: $R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ halkası verilsin. $d: R \to R$,

$d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ile tanımlı dönüşüm R halkası üzerinde bir türevdir.

Çözüm: $X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$ alalım.

$i)$ $d(X+Y) = d(X) + d(Y)$ mi?

$$d(X+Y) = d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = d\left(\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a+x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olur. Öte yandan

$d(X) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $d(Y) = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ olduğundan

$$d(X) + d(Y) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a+x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dir. Böylece

$$d(X+Y) = d(X) + d(Y)$$

elde edilir.

$ii)$ $d(XY) = d(X)Y + Xd(Y)$ mi?

$$d(XY) = d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = d\left(\begin{bmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & ax \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dır. Ayrıca

$$d(X)Y = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$Xd(Y) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ax \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$d(X)Y + Xd(Y) = \begin{bmatrix} 0 & ax \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

dir. Böylece

$d(XY) = d(X)Y + Xd(Y)$

elde edilir. O halde d, R halkası üzerinde bir türevdir.

Örnek 1.34 R bir halka ve $a \in R$ olmak üzere $I_a: R \to R$, $\forall x \in R$ için

$$I_a(x) = [a, x]$$

biçiminde tanımlı dönüşüm R halkasının bir türevidir. Bu dönüşüme özel olarak a elemanı tarafından belirlenmiş iç türev adı verilir.

Tanım 1.35: R bir halka, $f: R \to R$ toplamsal bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in R$ için

$f(xy) = f(x)y + xd(y)$
koşulunu sağlayan bir $d: R \to R$ türevi varsa f ye d ile belirlenmiş bir genelleştirilmiş türev denir. (Bresar, 1991)

Uyarı 1.36: Her türev kendisi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türevdir. Ancak tersi her zaman doğru olmayabilir.

İspat: $d: R \to R$ bir türev olsun. d genelleştirilmiş türev mi?

d türev olduğundan

i) $d(x + y) = d(x) + d(y)$
ii) $d(xy) = d(x)y + xd(y)$

koşulları sağlanır. Bu durumda d dönüşümü yine d ile belirlenmiş bir genelleştirilmiş türev olur.

Örnek 1.37: $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası olmak üzere $R = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$ halkası üzerinde tanımlı $f, d: R \to R$, $f\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a + b & 0 \end{bmatrix}$ ve $d\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$ dönüşümleri verilsin. Bu durumda f dönüşümü d türevi ile belirlenen bir genelleştirilmiş türevdir. Ancak bir türev değildir.

Çözüm: $X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} m & 0 \\ n & k \end{bmatrix} \in R$ alalım.

i) $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ mi?

$$\begin{aligned} f(X+Y) &= f\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ n & k \end{bmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{bmatrix} a+m & 0 \\ b+n & c+k \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a+m+b+n & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. Öte yandan

$$\begin{aligned} f(X)+f(Y) &= f\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} m & 0 \\ n & k \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a+b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m+n & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a+b+m+n & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. Bu eşitliklerden $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ elde edilir. O halde f toplamsal dönüşümdür.

ii) $f(XY) = f(X)Y + Xd(Y)$ mi?

$$\begin{aligned} f(XY) &= f\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ n & k \end{bmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{bmatrix} am & 0 \\ bm+cn & ck \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ am+bm+cn & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Öte yandan

$$\begin{aligned} f(X)Y + Xd(Y) &= f\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} m & 0 \\ n & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} m & 0 \\ n & k \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a+b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ n & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ n & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (a+b)m & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ cn & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ am+bm+cn & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. Bu eşitliklerden

$f(XY) = f(X)Y + Xd(Y)$

sağlanır. Yani f dönüşümü bir genelleştirilmiş türevdir.

Ancak

$$f(X)Y + Xf(Y) = f\left(\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} m & 0 \\ n & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} f\left(\begin{bmatrix} m & 0 \\ n & k \end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a+b & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m & 0 \\ n & k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ m+n & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ am+bm+cm+cn & 0 \end{bmatrix}$$

olduğundan

$f(XY) = f(X)Y + Xf(Y)$

eşitliği sağlanmaz. Bu durumda f dönüşümü bir türev değildir.

Örnek 1.38: R bir halka ve a, $b \in R$ olmak üzere $f: R \to R$, $\forall x \in R$ için

$f(x) = ax + xb$ biçiminde tanımlı dönüşüm bir genelleştirilmiş türevdir. f dönüşümüne a, $b \in R$ elemanları ile belirlenen genelleştirilmiş iç türev denir.

Tanım 1.39: R bir halka, $d: R \to R$ tanımlı bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in R$ için

i. $d(x+y) = d(x) + d(y)$
ii. $d(xy) = d(y)x + yd(x)$

koşulları sağlanıyorsa d ye R halkasında bir ters türev denir. (Bresar, 1989)

Uyarı 1.40: Aşağıdaki örnekler türev ve ters türev arasındaki ilişkileri açıklamaktadır.

Örnek 1.41: S sıfırdan farklı değişmeli bir halka olmak üzere

$R = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in S\right\}$ halkası üzerinde tanımlı $d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dönüşümü hem türev, hem ters türevdir.

Çözüm: $\forall X, Y \in R$ için $X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, a, b,x,$y \in S$ olmak üzere

i) $d(X+Y) = d(X) + d(Y)$ mi?

$$\begin{aligned} d(X) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ d(Y) &= d\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(X+Y) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a+x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= d(X) + d(Y) \end{aligned}$$

olur. d toplamsal dönüşümdür.

ii) $d(XY) = d(X)Y + Xd(Y)$ mi?

$$\begin{aligned} d(XY) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & ax \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(X)Y + Xd(Y) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & ax \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ax \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. Böylece $d(XY) = d(X)Y + Xd(Y)$ sağlanır. d bir türevdir.

iii) $d(XY) = d(Y)X + Yd(X)$ mi?

$$\begin{aligned} d(Y)X + Yd(X) &= d\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & xa \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xa \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ax \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Böylece $d(XY) = d(Y)X + Yd(X)$ dir. O halde d bir ters türevdir.

Örnek 1.42: S sıfırdan farklı değişmeli bir halka olmak üzere

$R = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| \, a, b \in S \right\}$ halkası üzerinde tanımlı $d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dönüşümü verilsin. Bu durumda d dönüşümü türevdir, ancak ters türev değildir.

Çözüm: $\forall\, X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$, $a, b, x, y \in S$ olmak üzere

i) $d(X+Y) = d(X) + d(Y)$ mi?

$$\begin{aligned} d(X) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ d(Y) &= d\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(X+Y) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} a+x & b+y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b+y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= d(X) + d(Y) \end{aligned}$$

olur. O halde d toplamsal dönüşümdür.

ii) $d(XY) = d(X)Y + Xd(Y)$ mi?

$$\begin{aligned} d(XY) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} ax & ay \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & ay \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d(X)Y + Xd(Y) &= d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & ay \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ay \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda d bir türevdir.

iii) $d(XY) = d(Y)X + Yd(X)$ mi?

$$\begin{aligned} d(Y)X + Yd(X) &= d\left(\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & xb \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. Böylece $d(XY) \neq d(Y)X + Yd(X)$ dir. Dolayısıyla d bir ters türev değildir.

Örnek 1.43: S sıfırdan farklı değişmeli bir halka olmak üzere $R = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in S \right\}$ halkası üzerinde tanımlı $d\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dönüşümü bir ters türevdir, ancak türev değildir.

Çözüm: $\forall X = \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 0 & x & y & z \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R, \quad a, b, c, x, y, z \in S$ olmak üzere

i) $d(X + Y) = d(X) + d(Y)$ mi?

$$d(X) = d\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d(Y) = d\left(\begin{bmatrix} 0 & x & y & \mathrm{z} \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{z} \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$\begin{aligned} d(X+Y) &= d\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x & y & \mathrm{z} \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= d\left(\begin{bmatrix} 0 & a+x & b+y & c+\mathrm{z} \\ 0 & 0 & 0 & b+y \\ 0 & 0 & 0 & -a+(-x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -(c+\mathrm{z}) \\ 0 & 0 & 0 & b+y \\ 0 & 0 & 0 & -a+(-x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c-\mathrm{z} \\ 0 & 0 & 0 & b+y \\ 0 & 0 & 0 & -a+(-x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\mathrm{z} \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= d(X) + d(Y) \end{aligned}$$

sağlanır. d bir toplamsal dönüşümdür.

ii) $d(XY) = d(X)Y + Xd(Y)$ mi?

$$d(XY) = d\left(\begin{bmatrix}0 & a & b & c\\0 & 0 & 0 & b\\0 & 0 & 0 & -a\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & x & y & \mathrm{z}\\0 & 0 & 0 & y\\0 & 0 & 0 & -x\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$= d\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & ay+b(-x)\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right) = d\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & ay-bx\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -ay+bx\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ve

$$d(X)Y + Xd(Y) =$$

$$= d\left(\begin{bmatrix}0 & a & b & c\\0 & 0 & 0 & b\\0 & 0 & 0 & -a\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0 & x & y & \mathrm{z}\\0 & 0 & 0 & y\\0 & 0 & 0 & -x\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & a & b & c\\0 & 0 & 0 & b\\0 & 0 & 0 & -a\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix}0 & x & y & \mathrm{z}\\0 & 0 & 0 & y\\0 & 0 & 0 & -x\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -c\\0 & 0 & 0 & b\\0 & 0 & 0 & -a\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & x & y & \mathrm{z}\\0 & 0 & 0 & y\\0 & 0 & 0 & -x\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & a & b & c\\0 & 0 & 0 & b\\0 & 0 & 0 & -a\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & -\mathrm{z}\\0 & 0 & 0 & y\\0 & 0 & 0 & -x\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & ay-bx\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & ay-bx\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece $d(XY) \neq d(X)Y + Xd(Y)$ dir. Yani d bir türev değildir.

iii) $d(XY) = d(Y)X + Yd(X)$ mi?

$d(Y)X + Yd(X) =$

$$= d\left(\begin{bmatrix} 0 & x & y & z \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x & y & z \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -z \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x & y & z \\ 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & bx - ay \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & bx - ay \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -ay + bx \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Böylece $d(XY) = d(Y)X + Yd(X)$ dir. Yani d bir ters türevdir.

Tanım 1.44: R bir halka, $f: R \to R$ tanımlı bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in R$ için

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$

ii) $f(xy) = f(y)x + yd(x)$

koşulları sağlanıyorsa f ye d ters türevi ile belirlenen genelleştirilmiş ters türev denir. (Tiwari, 2018)

Örnek 1.45: S sıfırdan farklı değişmeli bir halka olmak üzere $R = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in S\right\}$ halkası üzerinde tanımlı $d\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a - c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ dönüşümü bir ters türevdir.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, B$= \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$ için

i) $d(A + B) = d(A) + d(B)$ mı?

$$d(A+B) = d\left(\begin{bmatrix}0 & a & b\\0 & 0 & c\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & x & y\\0 & 0 & z\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$= d\left(\begin{bmatrix}0 & a+x & b+y\\0 & 0 & c+z\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & a+x-(c+z)\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

olur. Öte yandan

$$d(A)+d(B) = d\left(\begin{bmatrix}0 & a & b\\0 & 0 & c\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)+d\left(\begin{bmatrix}0 & x & y\\0 & 0 & z\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & a-c\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 0 & x-z\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & a+x-(c+z)\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

dir. Bu eşitliklerden $d(A+B)=d(A)+d(B)$ sağlanır.

ii) $d(AB)=d(B)A+Bd(A)$ mi?

$$d(AB) = d\left(\begin{bmatrix}0 & a & b\\0 & 0 & c\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & x & y\\0 & 0 & z\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$= d\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & az\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

olur. Ayrıca

$$d(B)A+Bd(A) = d\left(\begin{bmatrix}0 & x & y\\0 & 0 & z\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}0 & a & b\\0 & 0 & c\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & x & y\\0 & 0 & z\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}d\left(\begin{bmatrix}0 & a & b\\0 & 0 & c\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & x-z\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & a & b\\0 & 0 & c\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & x & y\\0 & 0 & z\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & a-c\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

bulunur. Bu iki eşitlikten $d(AB)=d(B)A+Bd(A)$ sağlanır.

O halde d dönüşümü bir ters türevdir.

Örnek 1.46: Örnek 1.45 deki halka ve d ters türevi için

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlı dönüşüm d ters türevi ile belirlenmiş genelleştirilmiş ters türevdir.

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, B= $\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in R$ için

i) $f(A+B) = f(A) + f(B)$ mi?

$$\begin{aligned} f(A+B) &= f\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= f\left(\begin{bmatrix} 0 & a+x & b+y \\ 0 & 0 & c+z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a+x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(A) + f(B) &= f\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a+x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. Böylece $f(A+B) = f(A) + f(B)$ sağlanır.

ii) $f(AB) = f(B)A + Bd(A)$ mi?

$$
\begin{aligned}
f(AB) &= f\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= f\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & az \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
f(B)A + Bd(A) &= f\left(\begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} d\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & a-c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

olur. Bu eşitliklerden $f(AB) = f(B)A + Bd(A)$ sağlanır.

Böylece f dönüşümü d ters türevi ile belirlenmiş genelleştirilmiş ters türevdir.

Teorem 1.47: R sıfırdan farklı nilpotent ideali olmayan $2-$torsion free bir halka olsun. Eğer U, R halkasının sıfırdan farklı bir Lie ideali ve alt halkası ise bu durumda U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar veya $U \subseteq Z$ dir. (Herstein, 1969)

Önerme 1.48: R bir yarıasal halka, I, R halkasının sıfırdan farklı bir ideali ve $a \in R$ olsun. Eğer $aIa = (0)$ ise bu durumda $a = 0$ dır. (Samman, 2003)

Önerme 1.49: R bir yarıasal halka olsun. R halkasının sıfırdan farklı bir idealinin merkezi, R halkasının merkezinde yer alır. (Daif, 1992)

Önerme 1.50: R bir yarıasal halka olsun. Eğer R halkasının sıfırdan farklı bir I ideali R halkasının merkezinde ise bu durumda R halkası değişmeli bir halkadır.

İspat: $I \subseteq Z$ olsun. Bu durumda $\forall x \in I, r \in R$ için $[x, r] = 0$ sağlanır. Bu ifadede $s \in R$ olmak üzere x yerine sx yazılıp düzenlenirse

$$0 = [sx, r] = s[x, r] + [s, r]x$$

ve böylece $[R, R]I = (0)$ elde edilir. Önerme 1.48 den ise R halkası değişmeli bir halka olur.

2. BÖLÜM

YARIASAL HALKALARDA TERS TÜREVLER

Bu bölümde 2007 yılında M. Ashraf ve arkadaşları tarafından araştırılan ve günümüze kadar pek çok matematikçi tarafından ele alınan her $x, y \in R$ için

$$F(x)F(y) \pm xy \in Z, F(x)F(y) \pm y\,x \in Z$$

teoremi ile 1989 yılında H. E. Bell ve L. C. Kappe tarafından ispatlanan

$$d(xy) = d(x)d(y), d(xy) = d(y)d(x)$$

teoremi, her $u \in U$ için $u^2 \in U$ şartını sağlayan ve merkezi olmayan bir U Lie ideali ve d dönüşümü ile belirlenen bir F genelleştirilmiş çarpımsal ters türevine sahip yarıasal halkalar için incelenecektir.

Teorem 2.1: R, $2-$torsion free yarıasal halka ve U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali olsun. Bu durumda U Lie ideali R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar.

İspat: U, R halkasının her $u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali olsun. Bu durumda $\forall u, v \in U$ için $uv + vu = (u+v)^2 - u^2 - v^2 \in U$ yani $uv + vu \in U$ olur. Öte yandan U Lie ideal olduğu için $\forall u, v \in U$ için $uv - vu \in U$ dur. U toplamsal olduğu için bu iki ifadeden $\forall u, v \in U$ için $2uv \in U$ elde edilir.

Ayrıca $2U$ kümesi R halkasının hem Lie ideali ve hem de alt halkasıdır. Gerçekten;

$\forall 2u, 2v \in 2U$ için

$2u - 2v = 2(u-v) \in 2U$ ve

$2u2v = (u+u)(v+v) = uv + uv + uv + uv = 2(uv + uv) = 2(2uv) \in 2U$

olduğu açıktır. Böylece $2U$ bir alt halka olur. Yine $\forall 2u \in U, r \in R$ için

$[2u, r] = [u + u, r] = [u, r] + [u, r] = 2[u, r] \in 2U$

olduğu için $2U$ bir Lie idealdir. Üstelik $2U \neq (0)$ dır.

Böylece Teorem 1.47 den $2U$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar veya $2U \subseteq Z$ dir. Eğer $2U \subseteq Z$ olursa bu durumda R, $2-$ torsion free yarıasal halka olduğu için $U \subseteq Z$ olur ki bu hipotezden U nun merkezi olmayan bir Lie ideal oluşuyla çelişir. O halde $2U$, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar. Öte yandan $2U \subseteq U$ olduğu için U, R halkasının sıfırdan farklı bir idealini kapsar. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2.2: R, $2-$torsion free yarıasal halka, U, R halkasının $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali olsun. $d: R \to R$ bir dönüşüm ve $F: R \to R$ tanımlı d dönüşümü ile belirlenmiş genelleştirilmiş çarpımsal ters türev olmak üzere $\forall x, y \in U$ için $F(x)F(y) \pm xy = 0$ ise bu durumda R halkası değişmeli halkadır.

İspat: Teorem 2.1 den R halkasının $I \subseteq U$ olacak biçimde $I \neq (0)$ olan bir I ideali vardır. Böylece hipotezden $\forall x, y \in I$ için

$$F(x)F(y) + xy = 0 \tag{2.1}$$

sağlanır. (2.1) eşitliğinde y yerine zy yazılıp ters türev tanımı ve (2.1) eşitliği kullanılırsa $\forall x, y, z \in I$ için

$0 = F(x)F(zy) + xzy$

$= F(x)\big(F(y)z + yd(z)\big) + xzy$

$= F(x)F(y)z + F(x)yd(z) + xzy$

$= -xyz + F(x)yd(z) + xzy$

bulunur. Bu eşitlikte komütatör çarpım tanımı kullanılırsa $\forall x, y, z \in I$ için

$$F(x)yd(z) + x[z, y] = 0 \tag{2.2}$$

elde edilir. $r \in R$ olmak üzere (2.2) eşitliğinde y yerine ry yazılıp komütatör çarpım özelliği kullanılırsa $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$$0 = F(x)ryd(z) + x[z, ry] = F(x)ryd(z) + xr[z, y] + x[z, r]y$$

bulunur. Böylece $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$$F(x)ryd(z) + xr[z, y] + x[z, r]y = 0 \qquad (2.3)$$

elde edilir.

(2.2) eşitliğinde x yerine rx yazılıp ters türev tanımı kullanılırsa $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$$0 = F(rx)yd(z) + rx[z, y] = F(x)ryd(z) + xd(r)yd(z) + rx[z, y]$$

bulunur. O halde $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$$F(x)ryd(z) + xd(r)yd(z) + rx[z, y] = 0 \qquad (2.4)$$

elde edilir. (2.3) eşitliğinden (2.4) eşitliği çıkarılarak düzenlenirse $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$$[x, r][z, y] + x[z, r]y - xd(r)yd(z) = 0 \qquad (2.5)$$

elde edilir. (2.5) eşitliğinde $t \in R$ olmak üzere x yerine tx yazılıp komütatör çarpım özelliği kullanılırsa $\forall x, y, z \in I$, $r, t \in R$ için

$$0 = [tx, r][z, y] + tx[z, r]y - txd(r)yd(z)$$

$$= t[x, r][z, y] + [t, r]x[z, y] + tx[z, r]y - txd(r)yd(z)$$

ve böylece $\forall x, y, z \in I, r, t \in R$ için

$$t[x, r][z, y] + [t, r]x[z, y] + tx[z, r]y - txd(r)yd(z) = 0 \qquad (2.6)$$

elde edilir. (2.5) eşitliği soldan $t \in R$ ile çarpılarak $\forall x, y, z \in I, r, t \in R$ için

$$t[x, r][z, y] + tx[z, r]y - txd(r)yd(z) = 0 \qquad (2.7)$$

bulunur. (2.7) eşitliğinden (2.6) eşitliği çıkarılarak $\forall$ x,$y, z \in I, r, t \in R$ için

$[t,r]x[z,y] = 0$

elde edilir. Bu eşitlikte $t = z$, $r = y$ alınırsa $\forall x, y, z \in I$ için

$[z,y]x[z,y] = 0$

olur. Önerme 1.48 den $\forall y, z \in I$ için $[z,y] = 0$ sağlanır. Böylece Önerme 1.49 dan $I \subseteq Z$ ve Önerme 1.50 den ise R değişmeli halkadır. İspat tamamlanır.

Benzer işlemler uygulanarak $\forall x, y \in I$ için $F(x)F(y) - xy = 0$ hipotezi için de aynı sonuç elde edilir.

Teorem 2.3: R, $2-$torsion free yarıasal halka, U, R halkasının $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali olsun. $d: R \to R$ bir dönüşüm ve $F: R \to R$ tanımlı d dönüşümü ile belirlenmiş genelleştirilmiş çarpımsal ters türev olmak üzere $\forall x, y \in U$ için $F(x)F(y) \pm yx = 0$ ise bu durumda R halkası değişmeli halkadır.

İspat: Teorem 2.1 den R halkasının $I \subseteq U$ olacak biçimde $I \neq (0)$ olan bir I ideali vardır. Böylece hipotezden $\forall x, y \in I$ için

$$F(x)F(y) + yx = 0 \qquad (2.8)$$

sağlanır. (2.8) eşitliğinde y yerine zy yazılıp ters türev tanımı ve (2.8) eşitliği kullanılırsa $\forall x, y, z \in I$ için

$$0 = F(x)F(zy) + zyx = F(x)F(y)z + F(x)yd(z) + zyx$$

$$= -yxz + F(x)yd(z) + zyx = F(x)yd(z) - yxz + zyx - yzx + zyx$$

olur. Düzenlenerek

$$F(x)yd(z) + [z,y]x + y[z,x] = 0 \qquad (2.9)$$

elde edilir. $r \in R$ olmak üzere (2.9) eşitliğinde y yerine ry yazılarak $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$$0 = F(x)ryd(z) + [z,ry]x + ry[z,x]$$

$= F(x)ryd(z) + r[z,y]x + [z,r]yx + ry[z,x]$

ve böylece $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$$F(x)ryd(z) + r[z,y]x + [z,r]yx + ry[z,x] = 0 \quad (2.10)$$

elde edilir.

(2.9) eşitliğinde x yerine rx yazılıp ters türev tanımı ve komütatör çarpım özelliği kullanılarak $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$0 = F(rx)yd(z) + [z,y]rx + y[z,rx]$

$= F(x)ryd(z) + xd(r)yd(z) + [z,y]rx + yr[z,x] + y[z,r]x$

yani $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$$F(x)ryd(z) + xd(r)yd(z) + [z,y]rx + yr[z,x] + y[z,r]x = 0 \quad (2.11)$$

olur. (2.10) eşitliğinden (2.11) eşitliği çıkarılarak

$0 = F(x)ryd(z) + r[z,y]x + [z,r]yx + ry[z,x]$

$-F(x)ryd(z) - xd(r)yd(z) - [z,y]rx - yr[z,x] - y[z,r]x$

$= r[z,y]x + [z,r]yx + ry[z,x] - xd(r)yd(z) - [z,y]rx - yr[z,x] - y[z,r]x$

$= rzyx - ryzx + zryx - rzyx + ryzx - ryxz - xd(r)yd(z) - zyrx + yzrx$

$-yrzx + yrxz - yzrx + yrzx$

$= (zryx - zyrx) + (yrxz - ryxz) - xd(r)yd(z)$

$= z[r,y]x + [y,r]xz - xd(r)yd(z)$

bulunur. Yani $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$$z[r,y]x + [y,r]xz - xd(r)yd(z) = 0 \quad (2.12)$$

elde edilir.

(2.12) eşitliğinde $u \in R$ olmak üzere x yerine ux yazılırsa $\forall x, y, z \in I, r, u \in R$ için

$$z[r,y]ux+[y,r]uxz-uxd(r)yd(z)=0 \qquad (2.13)$$

elde edilir. (2.12) eşitliği soldan $u \in R$ ile çarpılıp (2.13) eşitliğinden çıkarılırsa $\forall x, y, z \in I, r, u \in R$ için

$$0=z[r,y]ux+[y,r]uxz-uxd(r)yd(z)-uz[r,y]x-u[y,r]xz+uxd(r)yd(z)$$

$$=([y,r]uxz-u[y,r]xz)+(z[r,y]ux-uz[r,y]x)$$

bulunur. Bu son eşitlik düzenlenerek $\forall x, y, z \in I, r, u \in R$ için

$$[z[r,y],u]x+\big[[y,r],u\big]xz=0 \qquad (2.14)$$

elde edilir.

(2.14) eşitliğinde $t \in R$ olmak üzere x yerine xt yazılırsa $\forall x, y, z \in I$, $r, u,\ t \in R$ için

$$[z[r,y],u]xt+\big[[y,r],u\big]xtz=0 \qquad (2.15)$$

olur. (2.14) eşitliği sağdan $t \in R$ ile çarpılıp (2.15) eşitliğinden çıkarılırsa

$\forall x, y, z \in I$, $r, u,\ t \in R$ için

$$\begin{aligned}0 &= [z[r,y],u]xt+\big[[y,r],u\big]xtz-\big([z[r,y],u]x+\big[[y,r],u\big]xz\big)t\\ &= [z[r,y],u]xt+\big[[y,r],u\big]xtz-[z[r,y],u]xt-\big[[y,r],u\big]xzt\\ &= \big[[y,r],u\big]xtz-\big[[y,r],u\big]xzt\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikte komütatör çarpım tanımı kullanılarak $\forall x, y, z \in I, r, u,\ t \in R$ için

$$\big[[y,r],u\big]x[t,z]=0 \qquad (2.16)$$

elde edilir. (2.16) eşitliğinde $t=[y,r]$ ve $u=z$ yazılırsa $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$$\big[[y,r],z\big]x\big[[y,r],z\big]=0$$

olur. Önerme 1.48 den $\forall y, z \in I, r \in R$ için

$$\big[[y,r],z\big]=0 \qquad (2.17)$$

bulunur. (2.17) eşitliğinde y yerine ry yazılıp komütatör çarpım özelliği kullanılırsa $\forall y, z \in I, r \in R$ için

$$0 = \big[[ry, r], z\big] = [r[y, r], z] = r\big[[y, r], z\big] + [r, z][y, r]$$

olur. Bu eşitlikte (2.17) eşitliği kullanılarak $\forall y, z \in I, r \in R$ için

$$[r, z][y, r] = 0$$

elde edilir. Bu ifadede z yerine yz yazılır ve bu eşitlik kullanılırsa $\forall y, z \in I, r \in R$ için

$$0 = [r, yz][y, r] = y[r, z][y, r] + [r, y]z[y, r]$$

ve böylece

$$[r, y]z[r, y] = 0$$

elde edilir. Yine Önerme 1.48 den $\forall y \in I, r \in R$ için $[r, y] = 0$ ve dolayısıyla da $I \subseteq Z(R)$ olur. Önerme 1.50 den ise R halkası değişmeli halkadır. İspat tamamlanır.

Benzer işlemler uygulanarak $\forall x, y \in I$ için $F(x)F(y) - yx = 0$ hipotezi için de aynı sonuç elde edilir.

Teorem 2.4: R, $2-$torsion free yarıasal halka, U, R halkasının $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali olsun. $d: R \to R$ bir dönüşüm ve $F: R \to R$ tanımlı d dönüşümü ile belirlenmiş genelleştirilmiş çarpımsal ters türev olmak üzere $\forall x, y \in U$ için $F(x)F(y) \pm d(y)F(x) = 0$ ise bu durumda R halkasının $\forall x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir I ideali vardır.

İspat: Teorem 2.1 den R halkasının $I \subseteq U$ olacak biçimde $I \neq (0)$ olan bir I ideali vardır. Böylece hipotezden $\forall x, y \in I$ için

$$F(x)F(y) + d(y)F(x) = 0 \qquad (2.18)$$

sağlanır. (2.18) eşitliğinde x yerine zx yazılıp ters türev tanım ve (2.18) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
0 &= F(zx)F(y) + d(y)F(zx) \\
&= \big(F(x)z + xd(z)\big)F(y) + d(y)\big(F(x)z + xd(z)\big) \\
&= F(x)zF(y) + xd(z)F(y) + d(y)F(x)z + d(y)xd(z)
\end{aligned}
$$

ve böylece $\forall x, y, z \in I$ için

$$F(x)zF(y) + xd(z)F(y) + d(y)F(x)z + d(y)xd(z) = 0 \qquad (2.19)$$

elde edilir. (2.19) eşitliğinde x yerine ux yazılıp (2.18) eşitliği ve ters türev tanımı kullanılırsa $\forall x, y, z, u \in I$ için

$$0 = F(ux)zF(y) + uxd(z)F(y) + d(y)F(ux)z + d(y)uxd(z) = \big(F(x)u + xd(u)\big)zF(y) + uxd(z)F(y) + d(y)\big(F(x)u + xd(u)\big)z + d(y)uxd(z)$$

eşitliğinden

$$F(x)uzF(y) + xd(u)zF(y) + uxd(z)F(y) + d(y)F(x)uz + d(y)xd(u)z + d(y)uxd(z) = 0 \qquad (2.20)$$

elde edilir. (2.19) eşitliğinde z yerine uz yazılırsa $\forall x, y, z, u \in I$ için

$$F(x)uzF(y) + xd(uz)F(y) + d(y)F(x)uz + d(y)xd(uz) = 0 \qquad (2.21)$$

olur. (2.20) eşitliğinden (2.21) eşitliği çıkarılırsa $\forall x, y, z, u \in I$ için

$$xd(u)zF(y) + uxd(z)F(y) + d(y)xd(u)z + d(y)uxd(z) - xd(uz)F(y) - d(y)xd(uz) = 0 \qquad (2.22)$$

elde edilir. (2.22) eşitliğinde x yerine $d(y)x$ yazılırsa $\forall x, y, z, u \in I$ için

$$d(y)xd(u)zF(y) + ud(y)xd(z)F(y) + d(y)d(y)xd(u)z + d(y)ud(y)xd(z) - d(y)xd(uz)F(y) - d(y)d(y)xd(uz) = 0 \qquad (2.23)$$

bulunur. (2.22) eşitliği soldan $d(y)$ ile çarpılıp (2.23) eşitliğinden çıkarılırsa

$\forall x, y, z, u \in I$ için

$$
\begin{aligned}
0 &= d(y)xd(u)zF(y) + ud(y)xd(z)F(y) + d(y)d(y)xd(u)z + d(y)ud(y)xd(z) \\
&\quad - d(y)xd(uz)F(y) - d(y)d(y)xd(uz) - d(y)xd(u)zF(y) - d(y)uxd(z)F(y)
\end{aligned}
$$

$$-d(y)d(y)xd(u)z - d(y)d(y)uxd(z) + d(y)xd(uz)F(y) + d(y)d(y)xd(uz)$$

$$= ud(y)xd(z)F(y) + d(y)ud(y)xd(z) - d(y)uxd(z)F(y) - d(y)d(y)uxd(z)$$

bulunur. Bu eşitlikte komütatör çarpım tanımı kullanılarak $\forall x$, y, z, $u \in I$ için

$$[u, d(y)]xd(z)F(y) + d(y)[u, d(y)]xd(z) = 0 \tag{2.24}$$

elde edilir. (2.24) eşitliğinde u yerine vu yazılıp (2.24) eşitliği kullanılarak $\forall x$, y, z, u, $v \in I$ için

$$0 = [vu, d(y)]xd(z)F(y) + d(y)[vu, d(y)]xd(z)$$

$$= v[u, d(y)]xd(z)F(y) + [v, d(y)]uxd(z)F(y)$$

$$+d(y)v[u, d(y)]xd(z) + d(y)[v, d(y)]uxd(z)$$

$$= v[u, d(y)]xd(z)F(y) + d(y)v[u, d(y)]xd(z)$$

bulunur. Böylece $\forall x$, y, z, u, $v \in I$ için

$$v[u, d(y)]xd(z)F(y) + d(y)v[u, d(y)]xd(z) = 0 \tag{2.25}$$

elde edilir. (2.24) eşitliği soldan v ile çarpılıp (2.25) eşitliğinden çıkarılırsa

$\forall x$, y, z, u, $v \in I$ için

$$0 = v[u, d(y)]xd(z)F(y) + d(y)v[u, d(y)]xd(z) - v[u, d(y)]xd(z)F(y)$$

$$-vd(y)[u, d(y)]xd(z) = d(y)v[u, d(y)]xd(z) - vd(y)[u, d(y)]xd(z)$$

bulunur. Bu eşitlikte komütatör çarpım tanımı kullanılarak $\forall x$, y, z, u, $v \in I$ için

$$[d(y), v][u, d(y)]xd(z) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikte v yerine vw yazılıp düzenlenirse $\forall x$, y, z, u, v, $w \in I$ için

$$0 = [d(y), vw][u, d(y)]xd(z)$$

$$= v[d(y), w][u, d(y)]xd(z) + [d(y), v]w[u, d(y)]xd(z)$$

ve böylece $\forall x$, y, z, u, v, $w \in I$ için

$$[d(y), v]w[u, d(y)]xd(z) = 0 \quad (2.26)$$

olur. Bu eşitlikte $x \mapsto xv$ yazılarak $\forall x, y, z, u, v, w \in I$ için

$$[d(y), v]w[u, d(y)]xvd(z) = 0 \quad (2.27)$$

elde edilir. (2.26) eşitliği sağdan $v \in I$ ile çarpılıp (2.27) eşitliğinden çıkarıldığında $\forall x, y, z, u, v, w \in I$ için

$$0 = [d(y), v]w[u, d(y)]xvd(z) - [d(y), v]w[u, d(y)]xd(z)v$$

$$= [d(y), v]w[u, d(y)]x[v, d(z)]$$

bulunur. Son ifadede $z = y$ ve $u = v$ alınarak $\forall x, y, v, w \in I$ için

$$[d(y), v]w[v, d(y)]x[v, d(y)] = 0$$

elde edilir. Bu eşitlik sağdan $t \in I$ ile çarpılarak $\forall x, y, v, w, t \in I$ için

$$[d(y), v]w[v, d(y)]x[v, d(y)]t = 0$$

olur. Buradan $\forall y, v \in I$ için $([d(y), v]I)^3$ =0 dır. R yarıasal halka olduğundan sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur. Dolayısıyla $\forall\ y, v \in I$ için $[d(y), v]I = (0)$ dır. Buradan $[d(y), v]I\ [d(y), v] = (0)$ olur. Önerme 1.48 den ise $\forall\ y, v \in I$ için $[d(y), v] = (0)$ elde edilir. Bu ifade $\forall r \in R$ olmak üzere $v \mapsto vr$ yazılıp düzenlenirse $\forall r \in R$, $\forall v, y \in I$ için

$$0 = [d(y), vr] = v[d(y), r] + [d(y), v]r = v[d(y), r]$$

bulunur. Buradan $I\ [d(y), r] = (0)$ olur. Yine Önerme 1.48 den $\forall y \in I$ ve $r \in R$ için $[d(y), r] = 0$ ve dolayısıyla $d(I) \subseteq Z(R)$ dir. Böylece $\forall x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ sağlanır.

Benzer işlemler uygulanarak aynı sonuç $\forall x, y \in I$ için $F(x)F(y) - d(y)F(x) = 0$ hipotezi için de elde edilir.

Teorem 2.5: R, $2-$torsion free yarıasal halka, U, R halkasının $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali olsun. $d: R \to R$ bir dönüşüm ve $F: R \to R$ tanımlı d dönüşümü ile belirlenmiş genelleştirilmiş çarpımsal ters türev olmak üzere $\forall x, y \in U$ için $F([x,y]) \pm (x \circ y) = 0$ ise bu durumda R halkasının $\forall x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir I ideali vardır.

İspat: Teorem 2.1 den R halkasının $I \subseteq U$ olacak biçimde $I \neq (0)$ olan bir I ideali vardır. Böylece hipotezden $\forall x, y \in I$ için

$$F([x,y]) - (x \circ y) = 0 \tag{2.28}$$

sağlanır. (2.28) eşitliğinde y yerine xy yazılıp düzenlenirse $\forall x, y \in I$ için

$$0 = F([x,xy]) - (x \circ xy) = F(x[x,y]) - (x \circ x)y - x[y,x]$$

$$= \big(F([x,y])x + [x,y]d(x)\big) - x^2y - x^2y - x(yx - xy)$$

$$= F([x,y])x + [x,y]d(x) - x^2y - x^2y - xyx + x^2y$$

$$= F([x,y])x + [x,y]d(x) - x^2y - xyx + yx^2 - yx^2$$

$$= (F([x,y])x - xyx - yx^2) + [x,y]d(x) + (yx^2 - x^2y)$$

$$= (F([x,y]) - xy - yx)x + [x,y]d(x) + (yx^2 - x^2y)$$

$$= \big(F([x,y]) - (x \circ y)\big) + [x,y]d(x) + [y,x^2]$$

bulunur. Burada (2.28) eşitliği kullanılırsa $\forall x, y \in I$ için

$$[x,y]d(x) + [y,x^2] = 0 \tag{2.29}$$

elde edilir. (2.29) eşitliğinde $r \in R$ olmak üzere y yerine ry yazılarak $\forall x, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$0 = [x,ry]d(x) + [ry,x^2] = r[x,y]d(x) + [x,r]yd(x) + r[y,x^2] + [r,x^2]y$$

olur. Böylece $\forall x, y \in I$ ve $r \in R$ için

$$r[x,y]d(x) + [x,r]yd(x) + r[y,x^2] + [r,x^2]y = 0 \tag{2.30}$$

elde edilir. (2.29) eşitliği soldan r ile çarpılıp (2.30) eşitliğinden çıkarılırsa

$$0 = r[x,y]d(x) + [x,r]yd(x) + r[y,x^2] + [r,x^2]y - r[x,y]d(x) - r[y,x^2]$$

$$= [x,r]yd(x) + [r,x^2]y$$

bulunur. Son eşitlikte $r = z$ yazılırsa $\forall x, y, z \in I$ için

$$[x, z]yd(x) + [z, x^2]y = 0 \tag{2.31}$$

elde edilir. (2.29) eşitliğinden $[z, x^2]y = -[x, z]d(x)y$ olması (2.31) eşitliğinde kullanılarak düzenlenirse $\forall x, y, z \in I$ için

$$0 = [x, z][y, d(x)] \tag{2.32}$$

elde edilir. (2.32) eşitliğinde z yerine $d(x)z$ yazılıp bu eşitlik kullanılarak

$$0 = [x, d(x)z][y, d(x)] = d(x)[x, z][y, d(x)] + [x, d(x)]z[y, d(x)] =$$
$$[x, d(x)]z[y, d(x)]$$

bulunur. Son ifadede $y = x$ alınırsa $[x, d(x)]I[x, d(x)] = (0)$ olur. Böylece Önerme 1.48 den $\forall x \in I$ için $[x, d(x)] = 0$ dır.

Benzer işlemlerle $\forall x, y \in I$ için $F([x, y]) + (x \circ y) = 0$ için aynı sonuç elde edilir.

Teorem 2.6: R, $2-$torsion free yarıasal halka, U, R halkasının $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali olsun. $d: R \to R$ bir dönüşüm ve $F: R \to R$ tanımlı d dönüşümü ile belirlenmiş genelleştirilmiş çarpımsal ters türev olmak üzere $\forall x, y \in U$ için $F(xy) \pm (x \circ y) = 0$ ise bu durumda R halkası değişmeli halkadır.

İspat: Teorem 2.1 den R halkasının $I \subseteq U$ olacak biçimde $I \neq (0)$ olan bir I ideali vardır. Böylece hipotezden $\forall x, y \in I$ için

$$F(xy) - (x \circ y) = 0 \tag{2.33}$$

sağlanır. (2.33) eşitliğinde x yerine zx yazılarak $\forall x, y, z \in I$ için

$$0 = F(zxy) - (zx \circ y)$$

$$= \big(F(xy)z + xyd(z)\big) - (zxy + yzx) - (x \circ y)z + (x \circ y)z$$

$$= \big(F(xy) - (x \circ y)\big)z + xyd(z) - zxy - yzx + xyz + yxz$$

ve böylece $\forall x, y, z \in I$ için

$$\big(F(xy) - (x \circ y)\big)z + xyd(z) + [xy, z] + y[x, z] = 0 \tag{2.34}$$

elde edilir. Bu ifadede (2.33) eşitliği kullanılarak $\forall x, y, z \in I$ için

$$xyd(z) + [xy, z] + y[x, z] = 0 \qquad (2.35)$$

bulunur. (2.35) eşitliğinde y yerine xy yazılıp düzenlenirse $\forall x, y, z \in I$ için

$$x^2yd(z) + x[xy, z] - [x, z]xy + xy[x, z] = 0 \qquad (2.36)$$

elde edilir. (2.35) eşitliği soldan x ile çarpılıp (2.36) eşitliğinden çıkarılırsa $\forall x, y, z \in I$ için

$$0 = x^2yd(z) + x[xy, z] + [x, z]xy + xy[x, z] - x^2yd(z) - x[xy, z] - xy[x, z]$$

ve böylece $\forall x, y, z \in I$ için

$$[x, z]xy = 0$$

bulunur. Bu eşitlikte $u \in I$ olmak üzere $z = zu$ yazılarak $\forall x, y, z, u \in I$ için

$$0 = [x, zu]xy = z[x, u]xy + [x, z]uxy = [x, z]uxy \qquad (2.37)$$

elde edilir. (2.37) eşitliğinde u yerine uz yazılırsa $\forall x, y, z, u \in I$ için

$$[x, z]uzxy = 0 \qquad (2.38)$$

olur. (2.37) eşitliğinde y yerine zy yazılıp (2.38) eşitliğinden çıkarılarak düzenlenirse $\forall x, y, z, u \in I$ için

$$0 = [x, z]uzxy - [x, z]uxzy = [x, z]u[x, z]y$$

bulunur. Böylece $\forall x,\ z \in I$ için $([x, z]I)^2 = (0)$ olur. R yarıasal halka olduğundan sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur. Dolayısıyla $[x, z]I = (0)$ dır. Buradan Önerme 1.48 den $\forall x, z \in I$ için $[x, z] = 0$ olur. Önerme 1.49 ve Önerme 1.50 kullanılırsa R halkası değişmeli bir halkadır.

Benzer işlemler uygulanarak $\forall x, y \in I$ $F(xy) + (x \circ y) = 0$ için de aynı sonuç elde edilir.

Teorem 2.7: R, $2-$torsion free yarıasal halka, U, R halkasının $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali olsun. $d: R \to R$ bir dönüşüm ve $F: R \to R$ tanımlı d dönüşümü ile belirlenmiş genelleştirilmiş çarpımsal ters türev olmak üzere $\forall x, y \in U$ için $[F(x), d(y)] \pm yx = 0$ ise bu durumda R halkasının $\forall x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir I ideali vardır.

İspat: Teorem 2.1 den R halkasının $I \subseteq U$ olacak biçimde $I \neq (0)$ olan bir I ideali vardır. Böylece hipotezden $\forall x, y \in I$ için

$$[F(x), d(y)] - yx = 0 \qquad (2.39)$$

olur. (2.39) eşitliğinde x yerine zx yazılarak $\forall x, y, z \in I$ için

$$0 = [F(zx), d(y)] - yzx = [F(x)z + xd(z), d(y)] - yzx$$

$$= F(x)[z, d(y)] + [F(x), d(y)]z + x[d(z), d(y)] + [x, d(y)]d(z) - yzx$$

elde edilir. Bu ifade (2.39) eşitliği kullanılarak düzenlenirse

$$0 = F(x)[z, d(y)] + yxz + x[d(z), d(y)] + [x, d(y)]d(z) - yzx$$

$$F(x)[z, d(y)] + y[x, z] + x[d(z), d(y)] + [x, d(y)]d(z) = 0 \qquad (2.40)$$

bulunur. (2.40) eşitliğinde $x = ux, u \in I$ yazılarak $\forall x, y, z, u \in I$ için

$$0 = F(ux)[z, d(y)] + y[ux, z] + ux[d(z), d(y)] + [ux, d(y)]d(z)$$

ve buradan

$$F(x)u[z, d(y)] + xd(u)[z, d(y)] + u[x, d(y)]d(z) + [u, d(y)]xd(z)$$

$$+ux[d(z), d(y)] + yu[x, z] + y[u, z]x = 0 \qquad (2.41)$$

elde edilir. (2.41) eşitliğinde $x = ux, u \in I$ yazılıp komütatör çarpım özelliği ve ters türev tanımı kullanılarak $\forall x, y, z, u \in I$ için

$$0 = F(x)u^2[z, d(y)] + xd(u)u[z, d(y)] + uxd(u)[z, d(y)] + u^2[x, d(y)]d(z)$$

$$+u[u, d(y)]xd(z) + [u, d(y)]uxd(z) + u^2x[d(z), d(y)]$$

$$+yu^2[x, z] + yu[u, z]x + y[u, z]ux \qquad (2.42)$$

elde edilir. (2.41) eşitliğinde u yerine u^2 yazılıp düzenlenirse $\forall x, y, z, u \in I$ için

$$0 = F(x)u^2 [z, d(y)] + xd(u^2)[z, d(y)] + u^2 [x, d(y)]d(z) + u[u, d(y)]xd(z)$$

$+[u, d(y)]uxd(z) + u^2\, x[d(z), d(y)]$

$+yu^2\, [x, z] + y[u\, , z]ux + yu[u, z]x = 0$ (2.43)

elde edilir. (2.42) eşitliğinden (2.43) eşitliği çıkarılarak $\forall x$, y, z, $u \in I$ için

$xd(u)u[z, d(y)] + uxd(u)[z, d(y)] - \; xd(u^2)[z, d(y)] = 0$ (2.44)

bulunur. (2.44) eşitliğinde $x = tx$, $t \in R$ yazılırsa $\forall x$, y, z, $u \in I$, $t \in R$ için

$txd(u)u[z, d(y)] + utxd(u)[z, d(y)] - \; txd(u^2)[z, d(y)] = 0$ (2.45)

elde edilir. (2.44) eşitliği soldan t ile çarpılıp (2.45) eşitliğinden çıkarılıp düzenlenirse $\forall x$, y, z, $u \in I$, $t \in R$ için

$0 = txd(u)u[z, d(y)] + utxd(u)[z, d(y)] - \; txd(u^2)[z, d(y)]$

$-txd(u)u[z, d(y)] - tuxd(u)[z, d(y)] + txd(u^2)[z, d(y)]$

ve böylece

$[u, t]xd(u)[z, d(y)] = 0$

bulunur. Bu eşitlikte z yerine zu yazılıp yine bu eşitlik kullanılarak

$0 = [u, t]xd(u)[zu, d(y)]$

$= [u, t]xd(u)z[u, d(y)] + [u, t]xd(u)[z, d(y)]u$

ve buradan

$[u, t]xd(u)z[u, d(y)] = 0$ (2.46)

olur. (2.46) eşitliğinde sırasıyla x yerine xu ve z yerine uz yazılırsa

$[u, t]xud(u)z[u, d(y)] = 0$ (2.47)

ve

$[u, t]xd(u)uz[u, d(y)] = 0$ (2.48)

bulunur. (2.47) eşitliğinden (2.48) eşitliği çıkarılıp düzenlenirse $\forall x$, y, z, $u \in I$, $t \in R$ için

$0 = [u,t]xud(u)z[u,d(y)] - [u,t]xd(u)uz[u,d(y)]$

$[u,t]x[u,d(u)]z[u,d(y)]$

olur. Bu eşitlikte özel olarak $t \in R$ yerine $d(u)$ ve $y,z \in I$ yerine ise sırasıyla $u,x \in I$ yazıldığında $\forall u \in I$ için

$$([u,d(u)]I)^3 = (0)$$

bulunur. R yarıasal halka olduğundan sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur. Dolayısıyla $[u,d(u)]I = (0)$ dır. Önerme 1.48 den $\forall u \in I$ için $[u,d(u)] = 0$ dır.

Benzer işlemlerle aynı sonuç $\forall x,y \in I$ için $[F(x),d(y)] + yx = 0$ için de elde edilir.

Teorem 2.8: R, $2-$torsion free yarıasal halka, U, R halkasının $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali olsun. $d: R \to R$ bir dönüşüm ve $F: R \to R$ tanımlı d dönüşümü ile belirlenmiş (F,d) genelleştirilmiş çarpımsal ters türevi olmak üzere $\forall x,y \in U$ için $F(xy) = F(x)F(y)$ ise bu durumda R halkasının $\forall x \in I$ için $[d(x),x] = 0$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir I ideali vardır.

İspat: Teorem 2.1 den R halkasının $I \subseteq U$ olacak biçimde $I \neq (0)$ olan bir I ideali vardır. Böylece hipotezden ve ters türev tanımından $\forall x, y \in I$ için

$$F(xy) = F(y)x + yd(x) = F(x)F(y) \tag{2.49}$$

dır. (2.49) eşitliğinde $y = zy$ alınıp ters türev tanımı kullanılırsa $\forall x, y, z \in I$ için

$0 = F(x)F(zy) - F(zy)x - zyd(x) = F(x)\big(F(y)z + yd(z)\big) - \big(F(y)z + yd(z)\big)x - zyd(x)$

bulunur. Bu eşitlikten $\forall x, y, z \in I$ için

$$F(x)F(y)z + F(x)yd(z) - F(y)zx - yd(z)x - zyd(x) = 0 \tag{2.50}$$

elde edilir. (2.49) eşitliği sağdan z ile çarpılıp (2.50) eşitliğinden çıkarılırsa $\forall x, y, z \in I$ için

$0 = F(x)F(y)z + F(x)yd(z) - F(y)zx - yd(z)x - zyd(x) - (F(x)F(y)z - F(y)xz - yd(x)z) = F(x)F(y)z + F(x)yd(z) - F(y)zx - yd(z)x - zyd(x) - F(x)F(y)z + F(y)xz + yd(x)z = F(x)yd(z) + F(y)(xz - zx) + \big(yd(x)z - zyd(x)\big) - yd(z)x$

bulunur. Bu eşitlikte komütatör çarpım tanımı kullanılrak $\forall x$, y, $z \in I$ için

$$F(x)yd(z) + F(y)[x,z] + [yd(x),z] - yd(z)x = 0 \qquad (2.51)$$

elde edilir. (2.51) eşitliğinde $y \mapsto zy$ düzenlenirse $\forall x$, y, $z \in I$ için

$$0 = F(x)zyd(z) + F(zy)[x,z] + [zyd(x),z] - zyd(z)x$$

$$= F(x)zyd(z) + \big(F(y)z + yd(z)\big)[x,z] + z[yd(x),z] - zyd(z)x$$

ve buradan

$$F(x)zyd(z) + F(y)z[x,z] + yd(z)[x,z]$$

$$+z[yd(x),z] - zyd(z)x = 0 \qquad (2.52)$$

elde edilir. (2.51) eşitliğinde x yerine zx yazılıp ters türev tanımı kullanılarak düzenlenirse $\forall x$, y, $z \in I$ için

$$0 = F(zx)yd(z) + F(y)[zx,z] + [yd(zx),z] - yd(z)zx$$

$$= \big(F(x)z + xd(z)\big)yd(z) + F(y)z[x,z] + [yd(zx),z] - yd(z)zx$$

yani $\forall x$, y, $z \in I$ için

$$F(x)zyd(z) + xd(z)yd(z) + F(y)z[x,z]$$

$$+[yd(zx),z] - yd(z)zx = 0 \qquad (2.53)$$

elde edilir. (2.53) eşitliğinden (2.52) eşitliği çıkarılarak $\forall x$, y, $z \in I$ için

$$0 = F(x)zyd(z) + xd(z)yd(z) + F(y)z[x,z] + [yd(zx),z] - yd(z)zx$$

$$-F(x)zyd(z) - F(y)z[x,z] - yd(z)[x,z] - z[yd(x),z] + zyd(z)x$$

ve buradan

$$xd(z)yd(z) + [yd(zx),z] - yd(z)zx$$

$$-yd(z)[x,z] - z[yd(x),z] + zyd(z) = 0 \tag{2.54}$$

bulunur. (2.54) eşitliğinde $y = zy$ alınarak $\forall x$, y, $z \in I$ için

$$0 = xd(z)zyd(z) + z[yd(zx),z] - zyd(z)zx - zyd(z)[x,z]$$

$$-z^2[yd(x),z] + z^2yd(z) \tag{2.55}$$

bulunur. (2.54) eşitliği soldan z ile çarpılıp (2.55) eşitliğinden çıkarılırsa $\forall x$, y, $z \in I$ için

$$0 = xd(z)zyd(z) + z[yd(zx),z] - zyd(z)zx - zyd(z)[x,z] - z^2[yd(x),z]$$

$$+z^2yd(z) - zxd(z)yd(z) - z[yd(zx),z] + zyd(z)zx$$

$$+zyd(z)[x,z] + z^2[yd(x),z] - z^2yd(z)x$$

$$= xd(z)zyd(z) - zxd(z)yd(z)$$

ve böylece

$$[xd(z),z]yd(z) = 0 \tag{2.56}$$

elde edilir. (2.56) eşitliği sağdan $z \in I$ ile çarpılırsa $\forall x$, y, $z \in I$ için

$$[xd(z),z]yd(z)z = 0 \tag{2.57}$$

olur. (2.57) eşitliğinde $y = yx$ alınırsa $\forall x$, y, $z \in I$ için

$$[xd(z),z]yxd(z)z = 0 \tag{2.58}$$

elde edilir. (2.56) eşitliğinde $y = yzx$ alınırsa $\forall x$, y, $z \in I$ için

$$[xd(z),z]yzxd(z) = 0 \tag{2.59}$$

bulunur. (2.59) eşitliğinden (2.58) eşitliği çıkarılarak $\forall x$, y, $z \in I$ için

$$[xd(z),z]y[xd(z),z] = 0$$

elde edilir. Önerme 1.48 den $\forall x, z \in I$ için $[xd(z),z] = 0$ dır. Bu eşitlikte x yerine $d(z)x$ yazılıp düzenlenerek $\forall x$, y, $z \in I$ için

$$[d(z),z]xd(z) = 0 \tag{2.60}$$

bulunur. Bu eşitlikte x yerine xz yazılırsa $\forall x, z \in I$ için

$$[d(z), z]xzd(z) = 0 \quad (2.61)$$

bulunur. (2.60) eşitliği sağdan $z \in I$ ile çarpılırsa $\forall x, z \in I$ için

$$[d(z), z]xd(z)z = 0 \quad (2.62)$$

bulunur. (2.62) eşitliğinden (2.61) eşitliği çıkarılıp düzenlendiğinde

$$[d(z), z]x[d(z), z] = 0$$

olur. Böylece Önerme 1.48 den $\forall x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ sonucu bulunur.

Teorem 2.9: R, $2-$torsion free yarıasal halka, U, R halkasının $\forall u \in U$ için $u^2 \in U$ koşulunu sağlayan ve merkezi olmayan bir Lie ideali olsun. $d: R \to R$ bir dönüşüm ve $F: R \to R$ tanımlı d dönüşümü ile belirlenmiş genelleştirilmiş çarpımsal ters türev olmak üzere $\forall x, y \in U$ için $F(xy) = F(y)F(x)$ ise bu durumda R halkasının $\forall x \in I$ için $[d(x), x] = 0$ olacak biçimde sıfırdan farklı bir I ideali vardır.

İspat: Teorem 2.1 den R halkasının $I \subseteq U$ olacak biçimde $I \neq (0)$ olan bir I ideali vardır. Böylece hipotezden ve ters türev tanımından $\forall x, y \in I$ için

$$F(y)F(x) - F(y)x - yd(x) = 0 \quad (2.63)$$

dır. (2.63) eşitliğinde $y = zy$ alınıp ters türev tanımı kullanılarak $\forall x, y, z \in I$ için

$$0 = F(zy)F(x) - F(zy)x - zyd(x)$$

$$= \big(F(y)z + yd(z)\big)F(x) - \big(F(y)z + yd(z)\big)x - zyd(x)$$

olur ve bu eşitlikten $\forall x, y, z \in I$ için

$$F(y)zF(x) + yd(z)F(x) - F(y)zx - yd(z)x - zyd(x) = 0 \quad (2.64)$$

elde edilir. (2.64) eşitliğinde z yerine tz yazılırsa $\forall x, y, z \in I$, $t \in R$ için

$$F(y)tzF(x) + yd(tz)F(x) - F(y)tzx - yd(tz)x - tzyd(x) = 0 \quad (2.65)$$

olur. (2.64) eşitliğinde y yerine ty yazılıp ters türev tanımı kullanılarak $\forall x, y, z \in I$ için

$$0 = F(ty)zF(x) + tyd(z)F(x) - F(ty)zx - tyd(z)x - ztyd(x)$$

$$= \big(F(y)t + yd(t)\big)zF(x) + tyd(z)F(x) - \big(F(y)t + yd(t)\big)zx$$

$$-tyd(z)x - ztyd(x)$$

bulunur. Böylece

$$F(y)tz(F(x) - x) + yd(t)z(F(x) - x)$$

$$+tyd(z)(F(x) - x) - ztyd(x) = 0 \qquad (2.66)$$

elde edilir. (2.66) eşitliğinden (2.65) eşitliği çıkarılarak

$$0 = F(y)tz(F(x) - x) + yd(t)z(F(x) - x) + tyd(z)(F(x) - x)$$

$$-ztyd(x) - F(y)tz(F(x) - x) - yd(tz)(F(x) - x) + tzyd(x)$$

bulunur. Bu eşitlik komütatör çarpım tanımı kullanılarak düzenlendiğinde

$$\big(yd(t)z + tyd(z) - yd(tz)\big)(F(x) - x) + [t, z]yd(x) = 0 \qquad (2.67)$$

elde edilir. (2.67) eşitliğinde $t = z$ alınarak $\forall x, y, z \in I$ için

$$0 = \big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)(F(x) - x) \qquad (2.68)$$

sağlanır. (2.68) eşitliğinde $x = rx, r \in R$ yazılarak

$$0 = \big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)(F(rx) - rx)$$

ve böylece

$$0 = \big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)(F(x)r + xd(r) - rx) \qquad (2.69)$$

elde edilir. (2.68) eşitliği sağdan $r \in R$ ile çarpılıp (2.69) eşitliğinden çıkarılırsa $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$$0 = \big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)(F(x)r + xd(r) - rx)$$

$$-\big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)(F(x) - x)r$$

$$= \big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)\big(xd(r) - (rx - xr)\big)$$

ve

$$\big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)\big(xd(r) - [r,x]\big) \tag{2.70}$$

olur. (2.70) eşitliğinde x yerine xr yazılarak $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$$0 = \big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)\big(xrd(r) - [r,xr]\big)$$

$$= \big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)\big(xrd(r) - x[r,r] - [r,x]r\big)$$

bulunur. O halde

$$\big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)\big(xrd(r) - [r,x]r\big) = 0 \tag{2.71}$$

elde edilir. (2.70) eşitliği sağdan r ile çarpılıp (2.71) eşitliğinden çıkarılıp düzenlendiğinde $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$$0 = \big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)\big(xrd(r) - [r,x]r\big)$$

$$-\big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)\big(xd(r) - [r,x]\big)r$$

$$= \big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)\big(xrd(r) - xd(r)r\big)$$

ve buradan

$$\big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)x[r,d(r)] = 0 \tag{2.72}$$

elde edilir. (2.72) eşitliğinde y yerine ty yazılırsa $\forall x, y, z \in I, r \in R$ için

$$\big(tyd(z)z + ztyd(z) - tyd(z^2)\big)x[r,d(r)] = 0 \tag{2.73}$$

olur. (2.72) eşitliği soldan t ile çarpılıp (2.73) eşitliğinden çıkarılırsa $\forall x, y, z \in I$, $r, t \in R$ için

$$0 = \big(tyd(z)z + ztyd(z) - tyd(z^2)\big)x[r,d(r)] - t\big(yd(z)z + zyd(z) - yd(z^2)\big)x[r,d(r)] = \big(tyd(z)z + ztyd(z) - tyd(z^2) - tyd(z)z - tzyd(z) + tyd(z^2)\big)x[r,d(r)] = (zt - tz)yd(z)x[r,d(r)] = [z,t]yd(z)x[r,d(r)]$$

bulunur. Bu eşitlikte $t = d(z)$ ve $r = z$ alınırsa $\forall x, y, z \in I$ için

$$[z,d(z)]yd(z)x[z,d(z)] = 0 \tag{2.74}$$

elde edilir. Bu eşitlikte y yerine yz yazılırsa

$$[z, d(z)]yzd(z)x[z, d(z)] = 0 \tag{2.75}$$

bulunur. (2.74) eşitliğinde x yerine zx yazılırsa

$$[z, d(z)]yd(z)zx[z, d(z)] = 0 \tag{2.76}$$

bulunur. (2.75) eşitliğinden (2.76) eşitliği çıkarılarak

$$0 = [z, d(z)]yzd(z)x[z, d(z)] - [z, d(z)]yd(z)zx[z, d(z)]$$

$$= [z, d(z)]y(zd(z) - d(z)z)x[z, d(z)]$$

$$= [z, d(z)]y[z, d(z)]x[z, d(z)]$$

elde edilir. Bu eşitlik sağdan $t \in I$ ile çarpılırsa $\forall\ y, z \in I$ için

$$[z, d(z)]y[z, d(z)]x[z, d(z)]t = 0$$

bulunur. Buradan $\forall\ z \in I$ için $([z, d(z)]I)^3 = (0)$ alınır. R yarıasal halka olduğundan sıfırdan farklı nilpotent ideali yoktur. Dolayısıyla $[z, d(z)]I = (0)$ dır. Önerme 1.48 den ise $\forall z \in I$ için $[d(z), z] = 0$ sağlanır. Böylece ispat tamamlanır.

KAYNAKLAR

[1] Ashraf, M., Ali, A. and Ali, S. (2007). Some commutativity theorems for rings with generalized derivations, *Southeast Asian Bull. Math.,* 31, 415-421.

[2] Bell, H. E. and Kappe, L. C. (1989). Rings in which derivations satisfy certain algebraic conditions, *Acta Math. Hungarica*, 53, 339-346.

[3] Bergen, J. (1983). Derivations in prime rings, *Canadian Math. Bull.*, 26 (3), 267-270.

[4] Bresar, M., Vukman, J. (1989). On some additive mappings in rings with involution, *Aequationes Mathematicae*, 38, 178-185.

[5] Bresar, M. (1991). On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations, *Glasgow Math. J.*, 33, 89-93.

[6] Daif, M. N. (1991). When is a multiplicative derivation additive, *Int. J. Math. Math. Sci*., 14 (3), 615-618.

[7] Daif, M. N. and Bell, H. E. (1992). Remarks on derivations on semiprime rings, *Internat J. Math. And Math. Sci.*, 15, No:1, 205-206.

[8] Daif, M.N. and Tamman El-Sayiad M. S. (1997). Multiplicative generalized derivation which are additive, *East-West J. Math.*, 9 (1), 31-37.

[9] Dhara B. and Ali, S. (2013). On multiplicative (generalized)-derivations in prime and semiprime rings, *Aequationes Mathematicae*, 86 (1-2), 65-79.

[10] Herstein I. N., (1969). Topics in ring theory, *University of Chicago Press.*

[11] Herstein I. N., (1976). Rings with involution, *University of Chicago Press.*

[12] Samman, M. S. and Thaheem, A. B. (2003). Derivations and reverse derivations in semiprime rings, *Int. Math. Forum,* 2, No:39, 1895-1902.

[13] Samman, M. S. and Alyamani, N. (2007). Derivations on semiprime rings, *Int. J. Of Pure and Applied Mathematic*s, 5(4), 469-477.

[14] Tiwari, S. K., Sharma, R. K. and Dhara, B. (2018). Some thorems of commutativity on semiprime rings with mappings, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics,* 42, 279-292.

[15] Vukman, J. (1990). Commuting and centralizing mappings in prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 109, 47-52.

[16] Posner, E. C. (1957). Derivations in prime rings, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 8, 1093-1100.

ÖZGEÇMİŞ

<u>Kişisel bilgiler</u>

Adı Soyadı	Merve Gamze KARA
Doğum Yeri ve Tarihi	Sivas, 19.05.1989
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dil	İngilizce, Arapça
E-posta Adresi	mervegamzekara@gmail.com

<u>Eğitim ve Akademik Durumu</u>

Lise	Hacı Mehmet Sabancı Lisesi, 2006
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2014