T.C

SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TODA LATTİCE DENKLEMİ İÇİN BAZI TAM ÇÖZÜMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Ali Askar DENİZER

(20169237007)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç.Dr. Nilüfer TOPSAKAL

SİVAS

HAZİRAN 2019

Ali Askar DENİZER’in hazırladığı **‘‘TODA LATTİCE DENKLEMİ İÇİN BAZI TAM ÇÖZÜMLER’’** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı **Doç.Dr. Nilüfer TOPSAKAL** ………………....

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyesi **Dr. Öğr. Üyesi Mehmet ÜNLÜ** ………………....

Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi

Jüri Üyesi **Dr. Öğr. Üyesi Figen KANGALGİL** ………………...

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. İsmail ÇELİK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu'nda belirtilen kurallara uygun olarak yazılmıştır.

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (CUBAP) komisyonu tarafından **F-524** Nolu Proje kapsamında desteklenmiştir.

ETİK

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı;

Beyan ederim.

Ali Askar DENİZER

ÖZET

TODA LATTİCE DENKLEMİ İÇİN BAZI TAM ÇÖZÜMLER

Ali Askar DENİZER

Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışmanı: Doç.Dr. Nilüfer TOPSAKAL

2019, 30+x sayfa

Bu tez on bölümden oluşmaktadır. 1. bölümde temel kavramlar verilmiştir. 2. bölümde, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin öneminden bahsedilmiştir. 3. bölümde, ters saçılım dönüşümü tanımlanıp, bu dönüşüm bir diyagram yardımıyla anlatılmıştır. 4. bölümde, Lax yöntemi ve 5. bölümde de AKNS yöntemi verilmiştir. 6. bölümde düz saçılım problemi ve 7. bölümde de saçılım verileri için zaman evolüsyonu anlatılmıştır. 8. bölümde ters saçılım problemi, 9. bölümde soliton teorisi verilmiştir. Son bölümde de Toda Lattice denkleminin tam çözümlerini elde etmek için bir algoritma ve örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: AKNS yöntemi, Lax yöntemi, Saçılım verisi, Soliton, Ters saçılım dönüşümü, Tam çözüm, Toda-Lattice denklemi.

ABSTRACT

SOME EXACT SOLUTIONS TO THE TODA LATTICE EQUATION

Ali Askar DENİZER

Master of Science Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Nilüfer TOPSAKAL

2019, 30+x pages

This thesis consists of ten sections. In the first section important concepts have been given. In the second section, importance of nonlinear partial differential equations have been given. In the third section, inverse scattering transform has been defined, then it has been explained with help of the diagram. In the fourth section, AKNS method and in the fifth section Lax method have been given. In the sixth section, direct scattering problem and in the seventh section, time evolution of the scattering data have been given. In the eight section, inverse scattering problem has been given. In the ninth section, the theory of soliton have been studied. Finally, in the last section, an algorithm for obtaining exact solution of Toda-Lattice equation and examples have been given.

Keywords: AKNS Method, Lax Method, Scattering data, Solitons, Inverse scattering transform, Exact solution, Toda-Lattice equation.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmalarım boyunca her yanına gittiğimde beni güler yüzü ile karşılayan, bilgisi ve donanımı ile bana her zaman yardımcı olan değerli danışman hocam Doç.Dr. Nilüfer TOPSAKAL'a ve bu süreçte çalışmalarımın en büyük destekçisi olan yol arkadaşım nişanlım Elif KASAP'a ve sevgili aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR DİZİNİ

$o(1)$………………...$x \to \infty$ iken limiti alınan ifade sıfıra gider.

tr…………………....Matris izi.

det………………….Matris determinantı

diag………………….Köşegen matris.

†……………………Transpozu ve kompleks eşleniği alınan matris.

KdV………………..Korteweg de Vries denklemi $u_t + \alpha u u_x + b u_{xxx} = 0$ $(\alpha, b\ sabit)$

mKdV…………...…Değiştirilmiş KdV denklemi $u_t - 6u^2 u_x + u_{xxx} = 0$

1.TEMEL KAVRAMLAR

Tanım 1.1:

$$y' = f(x,y) \tag{1.1}$$

şeklinde birinci mertebeden diferansiyel denklem verilsin. Denklemin sağ tarafındaki $f(x,y)$ fonksiyonunun, xoy düzleminin bir D alt bölgesinde tanımlandığını varsayalım ve $(x_0, y_0) \in D$ olsun. (1.1) diferansiyel denkleminin

$$y(x_0) = y_0$$

koşulunu sağlayan ((x_0, y_0) noktasından geçen) $y = y(x)$ çözümünün bulunması problemine **başlangıç değer problemi** veya **Cauchy problemi** denir.

Tanım 1.2: L, $D(L)$ tanım kümesinde sınırlı lineer bir operatör olsun.

$$Ly = \lambda y$$

eşitliğini sağlayan sıfırdan farklı $y(x)$ fonksiyonu varsa λ sayısına L operatörünün **öz değeri**, $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise, λ ya karşılık gelen **öz fonksiyon** denir.

Tanım 1.3: $\{\lambda_n\}$ dizisi L operatörünün öz değerleri ve $y\,(x, \lambda_n)$ ler de bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha_n = \int_a^b y^2\,(x, \lambda_n)\, dx$$

sayılarına L operatörünün **normalleştirici sayıları** denir.

Tanım 1.4: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ özdeğerler ve $\{\alpha_n\}$ normalleştirici sayılar dizilerine L operatörünün **spektral karakteristikleri** denir.

Tanım 1.5: L diferansiyel operatörü verildiğinde spektral karakteristiklerinin bulunması problemine **düz problem**, spektral karakteristikleri verildiğinde bu hangi L diferansiyel operatörüne ait spektral karakteristikleri olduğunun araştırılması problemine ise **ters problem** denir.

Tanım 1.6: Diferansiyel denklemde, verilen potansiyele karşılık gelen saçılım verisini bulma problemine **düz saçılım problemi** denir.

Tanım 1.7: Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem için başlangıç değer problemi, ters saçılım dönüşümü yardımıyla çözülebiliyorsa böyle lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere **integrallenebilirdir** denir.

Tanım 1.8: Diferansiyel denklemde, verilen saçılım verilerine karşılık gelen potansiyeli belirleme problemine **ters saçılım problemi** denir.

2. LİNEER OLMAYAN KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Literatürden de bilindiği gibi lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmek için genel bir çözüm yöntemi yoktur. Yine de bazı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemi, ters saçılım dönüşümü yardımıyla çözülebilmektedir. Bu tip denklemlere, literatürde integrallenebilir oluşum (evolucation) denklemleri adı verilmektedir. Bu denklemler için bazı temel fonksiyonlarla ifade edilen çözümleri var olabilmektedir. Bu tip çözümler, lineer olmayan denklemleri daha iyi anlayabilmek için büyük öneme sahiptir. Bu çözümler, bazı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemleri çözmek için nümerik metotların doğruluğunu test etmekte de kullanılabilmektedir.

İntegrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler bir çok önemli fiziksel uygulamalara sahiptir. Örneğin; KdV (Korteweg de Vries) denklemi

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.1}$$

uzun, dar ve karanlık kanallarda su dalga yüzeyini tanımlar [1], [2].

Lineer olmayan Schrödinger denklemi

$$iu_t + u_{xx} + 2\left|u\right|^2 u = 0 \tag{2.2}$$

dip sulardaki yüzey dalgalarında ve optik fiberdeki elektromanyetik dalgaların modellemesinde ortaya çıkmıştır [3]. Sine-Gordon denklemi de

$$u_{xt} = \sin u \tag{2.3}$$

süperkondüktörler arasında bir boşluktaki manyetik alanın incelenmesinde yardımcı olmaktadır [4].

1834'te Edinburg ve Glasgow arasındaki sendika kanalında İskoçyalı mühendis John Scott Russel tarafından solitonun ilk gözlemi yapıldı. Russel 1844' te İngiliz Bilimsel Gelişme derneğine bu gözlemini bildirdi [5]. Ancak topluluk bu gözleme ilgi göstermedi. Bu topluluktaki matematikçi George Airy, sakin su dalgalarının varlığına inanmadı [4].

Hollandalı matematikçi Korteweg ve onun doktora öğrencisi de Vries günümüzde KdV denklemi olarak bilinen dar, karanlık kanallarda dalga yüzeyiyle ilgili ilk çalışmalarını 1895' te yayınladı [1]. Günümüzde tek soliton çözüm olarak bilinen bu makalenin 1965'e kadar önemi anlaşılmadı.

Enrico Fermi, J. Pasta ve S. Ulam ile, birçok lineer olmayan terimleri de içeren güç kaynakları tarafından birleştirilen, komşu parçacıklardaki 64 parçanın tek boyutlu dinamik sistemini sayısal olarak analiz etti. Fermin'in, 1954'de ölümünden sonra Pasta ve Ulam son birkaç sayısal örneklerini tamamladı [6] ve hiç yayımlanmayan bir ön baskı hazırladı. Bu ön baskı Fermi'nin makalelerinde ortaya çıktı [7] ve aynı zamanda literatürde de mevcuttur [8].

1965'te Zabusky ve Kruskal KdV denklemi için sakin dalga (solitary wave) çözümleri açısından Fermi Pasta Ulam problemini açıklamışlardır [2]. Ters saçılım dönüşümü, 1967 de Gardner, Greene, Kruskal ve Miura tarafından düz ve ters saçılım problemi yardımıyla lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için konulan başlangıç değer problemini çözmek için geliştirilmiştir [9].

Burada yazarlar, integrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem olan KdV denklemi

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.1}$$

ile birleştirilen Schrödinger denkleminin

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + u(x,t)\Psi = k^2\Psi$$

şeklinde olduğunu gösterdiler.

1972 de Zakharov ve Shabat Schrödinger denklemi için başlangıç değer problemini ters saçılım metoduyla çözüldüğünü ispatlamıştır [3].

$$iu_t + u_{xx} + 2\left|u\right|^2 u = 0 \tag{2.2}$$

i karmaşık sayısı $\sqrt{-1}$ olmak üzere 1. mertebeden lineer

$$\begin{cases} \dfrac{d\zeta}{dx} = -i\lambda\zeta + u(x,t)\mu \\[2ex] \dfrac{d\mu}{dx} = i\lambda\mu - \overline{u(x,t)}\zeta \end{cases} \tag{2.4}$$

sistemiyle temsil edileceğini göstermişlerdir. Bu sistem Zakharov-Shabat sistemi olarak bilinmektedir. Ardından 1972 de Wadati, mKdV denklemi için

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0 \tag{2.5}$$

başlangıç değer probleminin,

$$\begin{cases} \dfrac{d\zeta}{dx} = -i\lambda\zeta + u(x,t)\mu \\[2ex] \dfrac{d\mu}{dx} = i\lambda\mu - u(x,t)\zeta \end{cases} \tag{2.6}$$

lineer sistemi için konulan ters saçılım problemi yardımıyla çözülebileceğini ispatlamıştır [10].

1973' te de, Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur Sine-Gordon denklemi

$$u_{xt} = \sin u$$

için başlangıç değer probleminin,

$$\begin{cases} \dfrac{d\varepsilon}{dx} = -i\lambda\varepsilon - \dfrac{1}{2}u_x(x,t)\mu \\ \dfrac{d\mu}{dx} = i\lambda\mu + \dfrac{1}{2}u_x(x,t)\varepsilon \end{cases}$$

lineer sistemi için konulan ters saçılım probleminin yardımıyla çözülebileceğini ispatlamışlardır [11], [12].

3. TERS SAÇILIM DÖNÜŞÜMÜ

Bir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denkleme karşılık gelen başlangıç değer problemi, ters saçılım dönüşümü yardımıyla çözülebilirse integrallenebilirdir şeklinde tanımlamıştık. Burada ters saçılım dönüşümü şu şekilde açıklanabilir: Herbir integrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere (λ parametresine bağlı) bir lineer adi diferansiyel denklem (veya lineer adi diferansiyel denklem sistemleri) karşılık getirilir. Burada lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü olan $u(x,t)$, lineer adi diferansiyel denklem de potansiyel olarak adlandırılan bir katsayı fonksiyonudur.

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem, sırasıyla boyut ve zaman koordinatları adı verilen x ve t bağımsız değişkenlerine sahiptir. Lineer adi diferansiyel denklemde de, x bağımsız değişken, λ ve t parametrelerdir.

Burada herbir sabit t değeri için x sonsuza giderken $u(x,t)$ sıfıra gider. O halde, $s(\lambda,t)$ saçılım verileri ile tek olarak belirlenebilen $u(x,t)$ potansiyelinin bulunduğu lineer adi diferansiyel denklem için bir saçılım dönüşümü bulunabilir.

Her x değeri için verilen $u(x,t)$ fonksiyonundan, her λ için $s(\lambda,t)$ yi belirleme problemi; lineer adi diferansiyel denklem için düz saçılım problemi olarak bilinir. Diğer taraftan $s(\lambda,t)$ den $u(x,t)$ yi belirleme problemi, lineer adi diferansiyel denklem için ters saçılım problemi olarak bilinir. Bir integrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için ters saçılım dönüşümünü aşağıdaki diyagram ile açıklayabiliriz:

$$\begin{tikzcd}
u(x,0) \arrow[r, "\text{lineer add icin } t=0 \text{ da düz saçılımı}"] \arrow[d, "\text{lineer olmayan ktdd çözümü}"'] & s(\lambda,0) \arrow[d, "\text{bir süre sonra saçılımı}"] \\
u(x,t) & s(\lambda,t) \arrow[l, "\text{lineer add icin ters saçılım}"']
\end{tikzcd}$$

lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denkleme karşılık gelen başlangıç değer problemini çözmek için yani verilen $u(x,0)$ fonksiyonundan $u(x,t)$ fonksiyonunu belirlemek için şu üç adım takip edilir:

i) $t=0$ anında lineer adi diferansiyel denklemle ilgili düz saçılım probleminin çözmek, şöyle ki $u(x,0)$ başlangıç verisinden $s(\lambda,0)$ başlangıç saçılım verisini belirlemek.

ii) $t=0$ anındaki $s(\lambda,0)$ saçılım verisinden herhangi bir t anında ki $s(\lambda,t)$ saçılım değerini elde etmek.

iii) Sabitlenmiş t anında, lineer adi diferansiyel denklem için ters saçılım problemini çözmek. Yani $s(\lambda,t)$ saçılım verisinden, $u(x,t)$ potansiyel fonksiyonunu elde etmek.

Burada, $u(x,t)$ fonksiyonunun integrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemi sağladığı ve $t \longrightarrow 0$ için limit değerinin, $u(x,0)$ başlangıç değeri ile aynı olduğu görülmektedir.

4. LAX YÖNTEMİ

Bir lineer adi diferansiyel denklem karşılık gelen integrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemi elde etmek için 1968 yılında Peter Lax, bir yöntem bulmuştur [13]. Lax ismi ile anılan bu yöntemde esas amaç şu şekilde verilir:

$L\Psi = \lambda\Psi$ problemi ile verilen bir L lineer operatörü ile aşağıdaki yöntemlerle bir A operatörü bulunur:

i) λ spektral parametresi, t zamanına bağlı değildir, yani $\lambda_t = 0$

ii) $\Psi_t - A\Psi$ ifadesi aynı $L\Psi = \lambda\Psi$ probleminin bir çözümüdür.

iii) $L_t + LA - AL$ değeri, bir diferansiyel operatör değil, bir çarpımsal operatördür. Burada ii) den

$$L\left(\Psi_t - A\Psi\right) = \lambda\left(\Psi_t - A\Psi\right) \tag{4.1}$$

bulunur. $L\Psi = \lambda\Psi$ yardımıyla ve $\lambda_t = 0$ olduğu bilindiğinden (4.1) den

$$\begin{aligned} L\Psi_t - LA\Psi &= \lambda\Psi_t - A\left(\lambda\Psi\right) = \partial_t\left(L\Psi\right) - AL\Psi \\ &= L_t\Psi + L\Psi_t - AL\Psi \end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir. Daha sonra (4.2) eşitliğininden,

$$\left(L_t + LA - AL\right)\Psi = 0$$

bulunur. iii) den

$$L_t + LA - AL = 0 \tag{4.3}$$

olduğu elde edilir. (4.3) denklemi I. mertebeden türev içeren bir evolüsyon denklemidir ve bu denklem bağdaşabilirlik koşulu olarak adlandandırılır.

Şimdi Lax yöntemi ile (2.2) Schrödinger denkleminden, (2.1) KdV denklemini elde edelim. Bunun için Schrödinger denklemini $\lambda := k^2$ ve

$$L := -\partial_x^2 + u\left(x,t\right) \tag{4.4}$$

olmak üzere $L\Psi = \lambda\Psi$ şeklinde yazalım.

(4.4) de tanımlanan L lineer operatörü ile A operatörünü

$$A := \alpha_3\partial_x^3 + \alpha_2\partial_x^2 + \alpha_1\partial_x + \alpha_0 \tag{4.5}$$

şeklinde belirleyelim. Burada $i = 0,1,2,3$ için α_i katsayıları x ve t ye bağlı olabilir ama λ spektral parametresine bağlı değildir.

$L_t = u_t$ olduğundan (4.3) denkleminde (4.4) ve (4.5) operatörleri kullanıldığında,

$$()\partial_x^5 + ()\partial_x^4 + ()\partial_x^3 + ()\partial_x^2 + ()\partial_x + () = 0 \tag{4.6}$$

elde edilir. iii) den dolayı () ile gösterilen herbir katsayı sıfır olmalıdır ve bu durumda

$$\alpha_3 = c_1, \quad \alpha_2 = c_2, \quad \alpha_1 = c_3 - \frac{3}{2}c_1 u, \quad \alpha_0 = c_4 - \frac{3}{4}c_1 u_x - c_2 u$$

olduğu görülür. Burada c_1, c_2, c_3 ve c_4 keyfi sabitlerdir. (4.6) daki katsayılarda $c_1 = -4$ ve $c_3 = 0$ olarak alınırsa (2.1) KdV denklemi elde edilir. Üstelik $c_2 = c_4 = 0$ alınırsa A operatörü,

$$A = -4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x \tag{4.7}$$

şeklinde bulunur.

(2.4) deki Zakharov-Shabat sistemi için de benzer yöntem uygulanabilir. L lineer diferansiyel operatörü,

$$L := i\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\partial_x - i\begin{bmatrix} 0 & u(x,t) \\ \overline{u(x,t)} & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmak üzere

$$L\Psi = \lambda\Psi$$

denklemini ele alalım. Bu durumda A operatörü

$$A = 2i\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\partial_x^2 - 2i\begin{bmatrix} 0 & u \\ \overline{u} & 0 \end{bmatrix}\partial_x - i\begin{bmatrix} -|u|^2 & u_x \\ \overline{u_x} & |u|^2 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

olarak elde edilir ve (4.3) deki bağdaşabilirlik koşulu (4.3) deki lineer olmayan Schrödinger denklemini verir.

(2.6) daki I. mertebeden lineer sistem için, $L\Psi = \lambda\Psi$ yazalım.

$$L := i\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\partial_x - i\begin{bmatrix} 0 & u(x,t) \\ u(x,t) & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanmak üzere karşılık gelen A operatörü

$$A = -4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\partial_x^3 - 6\begin{bmatrix} u^2 & -u_x \\ u_x & u^2 \end{bmatrix}\partial_x - \begin{bmatrix} 6uu_x & -3u_{xx} \\ 3u_{xx} & 6uu_x \end{bmatrix}$$

biçiminde bulunur ve (4.3) deki bağdaşabilirlik koşulu, (2.5) deki $mKdV$ denklemini verir.

5. AKNS YÖNTEMİ

1973 yılında Ablowitz, Kaup, Newell ve Segur integrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlere karşılık gelen lineer adi diferansiyel denklem için Lax yönteminden farklı bir yöntem buldular [11], [12]. AKNS yöntemi olarak adlandırılan bu yöntem şu şekildedir:

I.mertebeden

$$v_x = Xv$$

sistemine karşılık X lineer operatörü verildiğinde bir T operatörü şu şekilde bulunabilir:

i) λ parametresi, t zamanına bağlı değildir, yani $\lambda_t = 0$

ii) $v_t^{'} - Tv$ ifadesi $v_x = Xv$ denkleminin bir çözümüdür. Yani

$$(v_t - Tv)_x = X(v_t - Tv)$$

eşitliği sağlanır.

iii) $X_t - T_x + XT - TX$ bir diferansiyel operatör değil çarpımsal operatördür.

ii) den

$$\begin{aligned} v_{tx} - T_x v - T v_x &= X v_t - XTv \\ &= (Xv)_t - X_t v - XTv \\ &= (v_x)_t - X_t v - XTv \\ &= v_{xt} - X_t v - XTv \end{aligned} \quad . \tag{5.1}$$

bulunur. $v_{tx} = v_{xt}$ eşitliğinden ve $TXv = Tv_x$ olduğunu kullanırsak, (5.1) den,

$$v_{tx} - T_x v - \underbrace{Tv_x}_{=(TXv)} = v_{xt} - X_t v - XT_v$$

yani

$$(X_t - T_x + XT - TX)v = 0$$

olur ve iii) den

$$X_t - T_x + XT - TX = 0 \ . \tag{5.2}$$

olduğu elde edilir.

AKNS yöntemine bir örnek olarak, (2.2) Schrödinger denkleminden (2.1) KdV denkleminin elde edilebileceğini gösterelim. Schrödinger denklemindeki $\lambda := k^2$ alalım.

$$v_x = Xv$$

I. mertebeden lineer sistemini

$$v := \begin{bmatrix} \Psi_x \\ \Psi \end{bmatrix}, X := \begin{bmatrix} 0 & u(x,t)-\lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

alalım ve T operatörü de

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \rho & \sigma \end{bmatrix},$$

şeklinde olsun. α, β, ρ ve σ; x, t ve λ' ya bağlı olabilir.

(5.2) deki $(X_t - T_x + XT - TX = 0)$ bağdaşabilirlik koşulundan,

$$X_t = \begin{bmatrix} 0 & u_t(x,t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, T_x = \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ \rho_x & \sigma_x \end{bmatrix},$$

$$TX = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \rho & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & u(x,t)-\lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & \alpha u(x,t)-\alpha\lambda \\ \sigma & \rho u(x,t)-\rho\lambda \end{bmatrix},$$

$$XT = \begin{bmatrix} 0 & u(x,t)-\lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \rho & \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho u(x,t)-\rho\lambda & \sigma u(x,t)-\sigma\lambda \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

sağlanır. Bu ifadeler (5.2) de yerine yazılırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & u_t(x,t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_x & \beta_x \\ \rho_x & \sigma_x \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} \rho u(x,t)-\rho\lambda & \sigma u(x,t)-\sigma\lambda \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta & \alpha u(x,t)-\alpha\lambda \\ \sigma & \rho u(x,t)-\rho\lambda \end{bmatrix} = 0.$$

bulunur. Buradan da, $U = \alpha_x - \beta + \rho(u(x,t)-\lambda)$,
$V = u_t(x,t) - \beta_x + \sigma(u(x,t)-\lambda) - \alpha(u(x,t)-\lambda)$, $Y = -\rho_x + \alpha - \sigma$, $Z = \sigma_x + \beta - \rho(u(x,t)-\lambda)$ olmak üzere

$$\begin{bmatrix} U & V \\ Y & Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

elde edilir.

(5.3) deki matris denkleminden ,

$$\beta = -\alpha_x + \rho(u(x,t)-\lambda), \sigma = \alpha - \rho_x, \sigma_x = -\alpha_x \quad . \tag{5.4}$$

yazılabilir. Gerçekten de

$$\sigma_x = \beta - \rho(u-\lambda) = -\alpha_x + \rho(u-\lambda) - \rho(u-\lambda)$$

olduğundan $\sigma_x = -\alpha_x$ eşitliği sağlanır.

(5.3)'den

$$u_t = \beta_x - \sigma u + \sigma\lambda + \alpha u - \alpha\lambda,$$

dır ve

$$\beta = -\alpha x + (u-\lambda)\rho,$$

olduğundan,

$$\beta_x = (-\alpha x + (u-\lambda)\rho)_x = -\alpha_{xx} + (u-\lambda)_x\rho + (u-\lambda)\rho_x.$$

bulunur.

$\sigma = \alpha - \rho_x$ olduğu göz önünde bulundurularak denklemde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} u_t &= -\alpha_{xx} + u_x\rho - \lambda_x\rho + u\rho_x - \lambda\rho_x - \alpha u + \rho_x u + \alpha\lambda - \rho_x\lambda + \alpha u - \alpha\lambda \\ &= -2\rho_x\lambda + 2\rho_x u - \alpha_{xx} + u_x\rho - \lambda_x\rho \\ &= u_t - 2\rho_x(u-\lambda) + \alpha_{xx} - u_x\rho + \lambda_x\rho = 0 \end{aligned} \quad .$$

olur.

$\lambda_x\rho = 0$ olduğundan

$$u_t - 2\rho_x(u-\lambda) + \alpha_{xx} - u_x\rho = 0 \ .$$

olur. $\alpha_x = -\sigma_x$ ve $\sigma = \alpha - \rho_x$ olduğundan

$$\alpha_{xx} = -\sigma_{xx}, \rho_x = \alpha - \sigma, \rho_{xxx} = -2\sigma_{xx}$$

dir. Buradan da

$$\sigma_{xx} = -\frac{1}{2}\rho_{xxx}$$

yazılabilir. Dolayısıyla da,

$$u_t + \frac{1}{2}\rho_{xxx} - u_x\rho - 2\rho_x(u-\lambda) = 0 \ . \tag{5.5}$$

denklemi elde edilir.

(5.5) deki denklemde, ρ spektral parametresini $\rho = \lambda\varsigma + \mu$ şeklinde alıp,

$$\rho_x = (\lambda\varsigma + \mu)_x = \lambda_x\varsigma + \lambda\varsigma_x + \mu_x$$

$$\rho_{xx} = \lambda_{xx}\varsigma + 2\lambda_x\varsigma_x + \lambda\varsigma_{xx} + \mu_{xx}$$

$$\rho_{xxx} = \lambda_{xxx}\varsigma + 3\lambda_{xx}\varsigma_x + 3\lambda_x\varsigma_{xx} + \lambda\varsigma_{xxx} + \mu_{xxx}$$

bu türevler (5.5) deki denklemde yerine yazılırsa,

$$u_t + \frac{1}{2}(\lambda_{xxx}\varsigma + 3\lambda_{xx}\varsigma_x + 3\lambda_x\varsigma_{xx} + \lambda\varsigma_{xxx} + \mu_{xxx}) - u_x(\lambda\varsigma + \mu)$$

$$-2(\lambda_x\varsigma + \lambda\varsigma_x + \mu_x)(u - \lambda) = 0$$

$\lambda_x = \lambda_{xx} = \lambda_{xxx} = 0$ olduğundan

$$2\varsigma_x\lambda^2 + (\frac{1}{2}\varsigma_{xxx} - 2\varsigma_x u + 2\mu_x - u_x\varsigma)\lambda + (u_t + \frac{1}{2}\mu_{xxx} - 2\mu_x u - u_x\mu) = 0$$

elde edilir.

λ'nın herbir kuvvetinin katsayısını sıfıra eşitlersek,

$$\varsigma = c_1,\ \mu = \frac{1}{2}c_1 u + c_2,\ u_t - \frac{3}{2}c_1 u u_x - c_2 u_x + \frac{1}{4}c_1 u_{xxx} = 0, \tag{5.6}$$

olur ki burada c_1, c_2 keyfi sabitlerdir. Özel olarak $c_1 = 4, c_2 = 0$ seçersek (5.6) da KdV denklemini elde ederiz.

(5.4) yardımıyla da,

$$\alpha = u_x + c_3,\ \beta = -4\lambda^2 + 2\lambda u + 2u^2 - u_{xx},\ \rho = 4\lambda + 2u, \sigma = c_3 - u_x$$

yazılır ki burada c_3 keyfi sabittir. $c_3 = 0$ olarak seçilirse

$$T = \left[\begin{array}{cc} u_x & -4\lambda^2 + 2\lambda u + 2u^2 - u_{xx} \\ 4\lambda + 2u & -u_x \end{array} \right].$$

bulunur.

(2.4) Zakharov-Shabat sistemi içinde benzer şekilde $v_x = Xv$ yazarak X operatörü

$$X := \left[\begin{array}{cc} -i\lambda & u(x,t) \\ \hline -u(x,t) & i\lambda \end{array} \right]$$

ve T matris operatörü de

$$T = \left[\begin{array}{cc} -2i\lambda^2 + i\left|u\right|^2 & 2\lambda u + iu_x \\ -2\lambda\overline{u} + i\overline{u_x} & 2i\lambda^2 - i\left|u\right|^2 \end{array} \right]$$

olarak tanımlanırsa lineer olmayan Schrödinger denklemi denklemi elde edilir.

Benzer şekilde (2.6) 1. mertebeden lineer sistemin de $v_x = Xv$ yazılırsa

$$X := \begin{bmatrix} -i\lambda & u(x,t) \\ -u(x,t) & i\lambda \end{bmatrix}$$

ve T matris operatörü de

$$T = \begin{bmatrix} -4i\lambda^3 + 2i\lambda u^2 & 4\lambda^2 u + 2i\lambda u_x - u_{xx} - 2u^3 \\ -4\lambda^2 u + 2i\lambda u_x + u_{xx} + 2u^3 & 4i\lambda^3 - 2i\lambda u^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde seçilirse (2.5) $mKdV$ denklemi elde edilir.

Yine aynı şekilde $v_x = Xv$ ile

$$X := \begin{bmatrix} -i\lambda & -\frac{1}{2}u_x(x,t) \\ \frac{1}{2}u_x(x,t) & i\lambda \end{bmatrix},$$

ve T matris operatörü de

$$T = \frac{i}{4\lambda} \begin{bmatrix} \cos u & \sin u \\ \sin u & -\cos u \end{bmatrix},$$

seçilirse Sine-Gordon denklemi olan $u_{xt} = \sin u$ elde edilir.

6. DÜZ SAÇILIM DÖNÜŞÜMÜ

Düz saçılım dönüşümü, potansiyel bilindiği zaman saçılım verilerini belirlemekten ibarettir. Bu problem genellikle belli özel çözümler elde edilerek çözülür. Bu çözümler ilgili lineer adi diferansiyel denklem için Jost çözümü olarak bilinir. Uygun saçılım verileri, sonsuzda Jost çözümlerinin asimtotik davranışları yardımıyla veya Jost çözümlerinin Wronskiyanı yardımıyla kurulabilir. Bu bölümde (2.2) Schrödinger denklemi ve (2.4) Zakharov-Shabat sistemiyle ilgili saçılım verileri ele alınacaktır. Lineer adi diferansiyel denklemler için saçılım verileri, benzer şekilde elde edilebilir. Sabitlenmiş t noktasında Faddeev sınıfından (yani u reel değerli $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dx(1+|x|)\,|u(x,t)|$ integrali sonlu demektir), $u(x,t)$ potansiyel fonksiyonunu ele alalım. Schrödinger denklemi iki tip çözüme sahiptir. Bunlar saçılım çözümleri ve bağlı durum (bound-state) çözümleridir. Saçılım çözümleri $x \longrightarrow \mp\infty$ iken e^{ikx} ve e^{-ikx} lerin lineer kombinasyonundan oluşur $(k \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$.

İki lineer bağımsız saçılım çözümü sırasıyla f_l ve f_r, aşağıdaki asimtotik koşulları sağlayan Schrödinger denkleminin sol ve sağ Jost çözümleri olarak bilinir.

$$
\begin{aligned}
f_l(k,x,t) &= e^{ikx} + o(1),\ f_l'(k,x,t) = ike^{ikx} + o(1),\ x \longrightarrow +\infty, \\
f_r(k,x,t) &= e^{-ikx} + o(1),\ f_r'(k,x,t) = -ike^{-ikx} + o(1),\ x \longrightarrow -\infty.
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

Kalan kısımları

$$
\begin{aligned}
f_l(k,x,t) &= \frac{e^{ikx}}{T(k,t)} + \frac{L(k,t)e^{-ikx}}{T(k,t)} + o(1),\ x \longrightarrow -\infty, \\
f_r(k,x,t) &= \frac{e^{-ikx}}{T(k,t)} + \frac{R(k,t)e^{ikx}}{T(k,t)} + o(1),\ x \longrightarrow +\infty
\end{aligned}
\tag{6.2}
$$

şeklinde yazılır. Burada T, geçiş katsayısı, L ve R, sol ve sağ yansıma katsayıları olarak adlandırılır.

$\mathbb{C}^+$ üst yarı kompleks düzlemini ele alalım. (2.2) deki bound state çözümünde x değişkenine göre $L^2(\mathbb{R})$'ye aittir. $u(x,t)$ Faddeev sınıfından olduğundan bound state sayıları sonlu, her bir bound state tek katlı ve bound state çözümleri sadece $\mathbb{C}^+$ imajiner eksen üzerinde belli k değerlerinde ortaya çıkabilir $[5, 7-9]$. Bağlı durum (bound state) sayılarını N ile gösterelim.

$$0 < k_1 < k_2 < \cdots < k_N$$

olmak üzere $k = ik_j$ noktalarında bağlı durum (bound state) olduğunu varsayalım. Herbir bağlı durum (bound state), $\mathbb{C}^+$ da bir T kutbuna karşılık gelir. $k = ik_j$ de herhangi bağlı durum (bound state) çözümü, $f_l(ik_j, x, t)$ nin bir sabit katıdır.

Burada $c_{lj}(t)$ ve $c_{rj}(t)$ sol ve sağ bağlı durum (bound state) normalleştirici sayıları sırasıyla

$$c_{lj}(t) := \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx f_l(ik_j, x, t)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}, c_{rj}(t) := \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx f_r(ik_j, x, t)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu sayılar T nin herbir rezidüleri

$$\operatorname{Re} z(T, ik_j) = ic_{lj}(t)^2 \gamma_j(t) = i\frac{c_{rj}(t)^2}{\gamma_j(t)} \tag{6.3}$$

ile bağlantılıdır. Burada $\gamma_j(t)$ sayısı

$$\gamma_j(t) := \frac{f_l(ik_j, x, t)}{f_r(ik_j, x, t)} \tag{6.4}$$

şeklinde tanımlanan bağımlı sabitlerdir. $\gamma_j(t)$ nin işareti $(-1)^{N-j}$ ile aynıdır dolayısıyla $c_{rj}(t) = (-1)^{N-j}\gamma_j(t)c_{lj}(t)$ dir.

(2.2) ye karşılık gelen saçılım matrisi R ve L yansıma katsayıları ve T geçiş katsayısından oluşur ve yansıma katsayılarının biri ve $\{k_j\}$ den oluşturulabilmektedir. Örneğin; eğer $k \in \mathbb{R}$ için $R(k, t)$ sağ yansıma katsayısıyla başlarsak

$$T(k, t) = \left(\prod_{j=1}^{N} \frac{k + ik_j}{k - ik_j} \right) \exp\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} ds \frac{\log(1 - |R(s, t)|^2}{s - k - i0^+} \right), \ k \in \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}$$

elde edilir. Burada $i0^+$ terimi $\mathbb{C}^+$ da $k \in \mathbb{R}$ ler için limiti göstermektedir.

Bu durumda $L(k, t)$ sol yansıma katsayısı da

$$L(k, t) = -\frac{\overline{R(k, t)} T(k, t)}{\overline{T(k, t)}}, \ k \in \mathbb{R}$$

olur.

Bir boyutlu Schrödinger denklemi için düz saçılım problemi ile ilgili literatürde $[5, 7-9]$ çalışmaları mevcuttur. Burada $x \in \mathbb{R}$ ve herbir sabitlenmiş t için $u(x, t)$ nin $\{R, \{k_j\}, \{c_{lj}\}\}$ saçılım verilerinden tek olarak belirlendiği

[5, 7 − 9] çalışmalarında gösterilmiştir. $c_j(t) := c_{lj}(t)^2$ alarak bir saçılım verisi kümesi $\{R, \{k_j\}, \{c_j(t)\}\}$ şeklinde ifade edilmiştir.

Schrödinger denklemine karşılık gelen saçılım verisini tanımlayabilmek için (2.4) Zakharov-Shabat sistemine karşılık gelen saçılım verisini tanımlamak gerekir. Her t için $u(x,t)$ nin x' e göre integrallenebilir olduğunu ve (2.4) denkleminin sırasıyla aşağıdaki asimtotik koşulları sağlayan $\Psi(\lambda, x, t)$ ve $\phi(\lambda, x, t)$ sol ve sağ Jost çözümlerinin tek olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda,x,t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\lambda x} \end{bmatrix} + o(1),\ x \longrightarrow +\infty; \\ \phi(\lambda,x,t) &= \begin{bmatrix} e^{-i\lambda x} \\ 0 \end{bmatrix} + o(1),\ x \longrightarrow -\infty \end{aligned} \tag{6.5}$$

T geçiş katsayısı, L sol yansıma katsayısı ve R sağ yansıma katsayısı aşağıdaki asimptotik davranışlara sahiptir.

$$\begin{aligned} \Psi(\lambda,x,t) &= \begin{bmatrix} \frac{L(\lambda,t)e^{-i\lambda x}}{T(\lambda,t)} \\ \frac{e^{i\lambda x}}{T(\lambda,t)} \end{bmatrix} + o(1),\ x \longrightarrow -\infty; \\ \phi(\lambda,x,t) &= \begin{bmatrix} \frac{e^{-i\lambda x}}{T(\lambda,t)} \\ \frac{R(\lambda,t)e^{i\lambda x}}{T(\lambda,t)} \end{bmatrix} + o(1),\ x \longrightarrow +\infty \end{aligned} \tag{6.6}$$

(2.4) ün bağlı durum (bound state) çözümleri $\mathbb{C}^+$ da T kutuplarına karşılık gelen λ değerlerinde ortaya çıkar. Bu kutuplar kümesi $\{\lambda_j\}$, $j = 1, ..., N$ lerle gösterilsin. Belirtilmelidir ki bu kutuplar, pozitif imajiner eksen de yerleşmek zorunda değildir. Üstelik Schrödinger denklemi hariç bu kutupların birden büyük katlılıkları olabilir. Farzedelim ki λ_j, n_j katlı olsun. λ_j kutbuna n_j katlılığı ile karşılık normalleştirici sabitleri $c_{js}(t)$, $s = 0, 1, \ldots, n_j - 1$ dir. Kabul edelim ki Zakharov-Shabat sistemindeki $u(x,t)$ potansiyeli herbir sabitlenmiş t için $\{R, \{\lambda_j\}, \{c_{js}(t)\}\}$ saçılım verisi yardımıyla tek olarak belirlenir.

7. SAÇILIM VERİSİNİN ZAMAN EVOLÜSYONU

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemleri sağlayan $u(x,0)$ başlangıç değerinden $u(x,t)$ elde edilebildiği gibi $s(\lambda,0)$ a başlangıç saçılım verisinden $s(\lambda,t)$ bulunur. Saçılım verisi Jost çözümlerine karşılık gelen lineer adi diferansiyel denklemden elde edilebileceğinden saçılım verilerinin zaman evolüsyonunu belirlemek için AKNS veya Lax metodu yardımıyla Jost çözümlerinin zaman evolüsyonu analiz edilebilir.

Şimdi Lax metodu yardımıyla Schrödinger denkleminde saçılım verisinin zaman evolüsyonunun nasıl belirleneceği inceleyelim. 4. bölümde olduğu gibi k bir spektral parametre ve dolayısıyla k_j değerleriyle ilgili bound statelar zamanla değişmez. O halde sol taraftaki Jost çözümü $f_l(k,x,t)$' nin zaman evolüsyonu elde edelim. 4. bölümdeki ii) koşulundan $\partial_t f_l - Af_l$ ifadesi (2.2) nin bir çözümü olarak kalır. Dolayısıyla bu çözümü f_l ve f_r lineer bağımsız Jost çözümlerinin bir lineer birleşimi olarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}&\partial_t f_l(k,x,t) - (-4\partial_x^3 + 6u\partial x + 3u_x)f_l(k,x,t)\\&= p(k,t)f_l(k,x,t) + q(k,t)f_r(k,x,t).\end{aligned} \tag{7.1}$$

Burada $p(k,t)$ ve $q(k,t)$ katsayıları ve (4.7) deki A operatörü hesaplanabilir. Her bir sabitlenmiş t için $u(x,t) = o(1)$ ve $x \longrightarrow \infty$ $u_t(x,t) = o(1)$ olduğu kabul edilerek, (7.1) deki (6.1) ve (6.2) kullanılırsa $x \longrightarrow \infty$ için,

$$\partial_t e^{ikx} + 4\partial_x^3 e^{ikx} = p(k,t)e^{ikx} + q(k,t)\left[\frac{1}{T(k,t)}e^{-ikx} + \frac{R(k,t)}{T(k,t)}e^{ikx}\right] + o(1) \tag{7.2}$$

elde edilir.

(7.2) 'nin her iki tarafındaki e^{ikx} ve e^{-ikx}'nin katsayılarından,

$$q(k,t) = 0, p(k,t) = -4ik^3$$

olduğu elde edilir. Yani III. mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklem yardımıyla $f_l(k,x,t)$ ye bağlı

$$\partial_t f_l - Af_l = -4ik^3 f_l \tag{7.3}$$

denklemi yazılır. Benzer şekilde $f_r(k,x,t)$ içinde

$$\partial_t f_r - Af_r = 4ik^3 f_r \tag{7.4}$$

denklemi elde edilir.

Her bir Jost çözümü için zaman evolüsyonu oldukça karışıktır. Buna rağmen saçılım verisinin zaman evolüsyonu oldukça basittir. (7.3) de

$x \to -\infty$ iken limit alınıp (6.2) ve

$$u(x,t) = o(1) \text{ ve } u_x(x,t) = o(1) x \to -\infty$$

olduğu kullanılarak ayrıca her iki taraftaki e^{ikx} ve e^{-ikx}'in katsayılarını karşılaştırılarak

$$\partial_t T(k,t) = 0,\ \partial_t L(k,t) = -8ik^3 L(k,t),$$

$$T(k,t) = T(k,0),\ L(k,t) = L(k,0)e^{-8ik^3t}$$

eşitlikleri elde edilir. Benzer şekilde $x \longrightarrow +\infty$ iken (7.4) den,

$$R(k,t) = R(k,0)e^{8ik^3t} \tag{7.5}$$

bulunur.

Bu da geçiş katsayısının zamanla değişmeyeceği ve sadece zamanla yansıma katsayılarının aşamalarının değişeceği anlamına gelir.

Şimdi (6.4) te tanımlanan $\gamma_j(t)$ bağımlı sabitlerinin zaman evolüsyonu inceleyelim. (7.3), $k = ik_j$ noktalarında hesaplanırsa ve $\gamma_j(t) f_r(ik_j,x,t)$ ile $f_l(ik_j,x,t)$ yer değiştirmesiyle

$$\begin{aligned} f_r(ik_j,x,t)\partial_t\gamma_j(t) + \gamma_j(t)\partial_t f_r(ik_j,x,t) - \gamma_j(t) A f_r(ik_j,x,t) \\ = -4k_j^3\gamma_j(t) f_r(ik_j,x,t) \end{aligned} \tag{7.6}$$

elde edilir.

Öte yandan $k = ik_j$ noktasında (7.4) hesaplanırsa,

$$\gamma_j(t)\partial_t f_r(ik_j,x,t) - \gamma_j(t) A f_r(ik_j,x,t) = 4k_j^3\gamma_j(t) f_r(ik_j,x,t) \tag{7.7}$$

elde edilir. (7.6) ve (7.7) den

$$\partial_t\gamma_j(t) = -8k_j^3\gamma_j(t)$$

veya

$$\gamma_j(t) = \gamma_j(0)e^{-8k_j^3t} \tag{7.8}$$

olduğu görülür.

(6.3) ve (7.8) yardımıyla normalleştirici sayıların zaman evolüsyonu,

$$c_{lj}(t) = c_{lj}(0)e^{4k_j^3t}, c_{rj}(t) = c_{rj}(0)e^{-4k_j^3t}$$

şeklinde bulunur. 8. bölümdeki (8.1) Marchenko çekirdeğinde bulunan $c_j(t)$ normalleştirici sayıları $c_{lj}(t)$ lerle ilgilidir. Şöyleki $c_j(t) := c_{lj}(t)^2$ dir ve onların zaman evolüsyonu,

$$c_j(t) = c_j(0)e^{8k_j^3 t} \tag{7.9}$$

şeklinde tanımlanır.

Diğer integrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerde ve lineer olmayan Schrödinger denkleminde olduğu gibi ilgili saçılım verilerinin zaman evolüsyonu benzer şekilde elde edilebilir.

Bunun için ilk önce (4.8) deki A operatörü cinsinden (6.5) deki $\phi(\lambda, x, t)$ ve $\psi(\lambda, x, t)$ Jost çözümleri aşağıdaki kısmi diferansiyel denklemleri sağlar.

$$\psi_t - A\psi = -2i\lambda^2\psi, \phi_t - A\phi = 2i\lambda^2\phi.$$

(6.6) daki saçılım katsayıları

$$\begin{aligned} T(\lambda, t) = T(\lambda, 0), R(\lambda, t) = R(\lambda, 0)e^{4i\lambda^2 t}, \\ L(\lambda, t) = L(\lambda, 0)e^{-4i\lambda^2 t}. \end{aligned} \tag{7.10}$$

şeklinde değişirler.

T'nin λ_j bağlı durum (bound state) kutbu ile (8.4) te verilen $\Omega(y, t)$ Marchenko çekirdeğindeki $c_{js}(t)$ bağlı dıurum (bound state) normalleştirici sayılarına sahibiz. Bunların zaman evolüsyonu aşağıdaki şekilde [4] te verilmiştir:

$$\left[c_{j(n_j-1)}(t)\ c_{j(n_j-2)}(t)\ \cdots c_{j0}(t)\right] = \left[c_{j(n_j-1)}(0)\ c_{j(n_j-2)}(0)\ \cdots c_{j0}(0)\right] e^{-4iA_j^2 t}\ . \tag{7.11}$$

Burada $A_j, n_j \times n_j$ tipinde

$$A_j := \begin{bmatrix} -i\lambda_j & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -i\lambda_j & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\lambda_j & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -i\lambda_j & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -i\lambda_j \end{bmatrix}$$

şeklinde bir matristir.

8. TERS SAÇILIM DÖNÜŞÜMÜ

6. bölümde ilgili lineer adi türevli diferansiyel denklemler için düz saçılım problemini çözerek $u(x,0)$ başlangıç değerinden $S(\lambda,0)$ başlangıç saçılım verisinin nasıl kurulacağı anlatılmıştır. 7. bölümde $S(\lambda,0)$ başlangıç saçılım verisinden $S(\lambda,t)$ saçılım verisinin zaman evolüsyonunun nasıl elde edildiği görülmüştür. Ters saçılım dönüşümünde son aşama olarak bu bölümde ilgili ters saçılma problemini çözerek $S(\lambda,t)$ den $u(x,t)$'nin nasıl elde edilebileceğini göreceğiz. Bu tip ters saçılım probleminin Marchenko metoduyla da çözülebileceği, $[5,7-9,16-19]$ çalışmalarında gösterilmiştir. Literatürde Gel'fand-Levitan metodu veya Gel'fand-Levitan-Marchenko metodu olarak geçse de Gel'fand-Levitan metodu ters saçılım problemini çözmek için farklı bir metottur $[5,7,16,17,19]$. Gel'fand-Levitan integral denklemi, $(0,x)$ sonlu aralığında bir integrasyon içerir ve o denklemin çekirdeği, karşılık gelen lineer adi diferansiyel denklem ile ilgili spektral ölçümün Fourier dönüşümüyle ilişkilidir. Diğer taraftan Marchenko integral denklemi, $(x,+\infty)$ yarı sonsuz aralığında bir integrasyon içerir ve onun çekirdeği saçılım verisinin Fourier dönüşümü ile ilgilidir.

Bu bölümde amaç (7.5) ve (7.9) daki ilgili $\{R,\{k_j\},\{c_j(t)\}\}$ saçılım verisindeki zaman evolüsyonundan KdV denklemindeki $u(x,t)$ çözümünü geri elde etmektir. Daha sonra (7.10) ve (7.11) deki $\{R,\{\lambda_j\},\{c_{js}(t)\}\}$ saçılım verisindeki zaman evolüsyonundan lineer olmayan Schrödinger denklemindeki $u(x,t)$ çözümü tekrar elde etmektir.

(2.1) KdV denklemindeki $u(x,t)$ çözümü aşağıdaki gibi Marchenko metodunu kullanarak saçılım verisinin zaman evolüsyondan elde edilebilir.

a) (7.5) ve (7.9) daki $\{R,\{k_j\},\{c_j(t)\}\}$ saçılım verisinden, Ω Marchenko integral çekirdeği

$$\Omega(y,t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk R(k,t)e^{iky} + \sum_{j=1}^{N} c_j(t)e^{-k_j y} \tag{8.1}$$

şeklinde tanımlanır.

b) $0 < y < +\infty$ için karşılık gelen

$$K(x,y,t) + \Omega(x+y,t) + \int_{x}^{\infty} dz K(x,z,t)\Omega(z+y,t) = 0 \tag{8.2}$$

Marchenko integral denklemi çözülerek $K(x,y,t)$ çözümü elde edilir.

c)

$$u(x,t) = -2\frac{\partial K(x,x,t)}{\partial x} \tag{8.3}$$

ifadesi kullanılarak $u(x,t)$ yeniden elde edilir.

(2.3) deki lineer olmayan Schrödinger denklemi denkleminin $u(x,t)$ çözümü aşağıdaki gibi Marchenko metodu kullanılarak saçılım verilerinin zaman evolüs-

yonundan elde edilebilir:

i) (7.10) ve (7.11) deki $\{R, \{\lambda_j\}, \{c_{js}(t)\}\}$ saçılım verisinden, Ω Marchenko çekirdeği

$$\Omega(y,t) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda R(\lambda,t)e^{i\lambda y} + \sum_{j=1}^{N}\sum_{s=0}^{n_j-1} c_{js}(t)\frac{y^s}{s!}e^{-\lambda_j y} \tag{8.4}$$

şeklinde tanımlanır.

ii) $x < y < +\infty$ için Marchenko integral denklemi

$$K(x,y,t) - \overline{\Omega(x+y,t)} + \int_{x}^{\infty} dz \int_{x}^{\infty} dsK(x,s,t)\Omega(s+z,t)\overline{\Omega(z+y,t)} = 0$$

çözülerek $K(x,y,t)$ çözümü bulunur.

iii) $u(x,t) = -2K(x,x,t)$ eşitliği yardımıyla Marchenko denkleminin $K(x,y,t)$ çözümünden $u(x,t)$ yeniden elde edilir.

iv) Bulunmuş olan $K(x,y,t)$ den $|u(x,t)|^2$ ifadesi alternatif olarak

$$|u(x,t)|^2 = 2\frac{\partial G(x,x,t)}{\partial x}$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$G(x,y,t) := -\int_{x}^{\infty} dz\overline{K(x,z,t)\Omega(z+y,t)}.$$

9. SOLİTON ÇÖZÜM

Bir integrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin bir soliton çözümü, karşılık gelen saçılım verisindeki yansıma katsayısının dıfır olduğu bir $u(x,t)$ çözümüdür. Başka bir deyişle, bir integrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin bir $u(x,t)$ soliton çözümü, ilgili lineer adi diferansiyel denklem deki bir yansımasız potansiyelden başka birşey değildir. Yansıma katsayısı sıfır olduğunda, uygun Marchenko integral denkleminin çekirdeği ayrılabilir olur. Bir ayrılabilir çekirdekli integral denklem, lineer denklem veya bir lineer cebirsel denklemler sistemine dönüştürülerek açıkça çözülebilir. Bu durumda soliton çözüm olarak bilinen, integrallenebilir lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemin tam çözümleri elde edilmiş olur.

(8.1) de $R(k,t) = 0$ olduğu kullanılarak KdV denklemi için N-soliton çözümü elde edilir.

O halde

$$X(x) := \left[e^{-k_1 x}\ e^{-k_2 x}\ \cdots e^{-k_N x}\right], Y(y,t) := \begin{bmatrix} c_1(t)e^{-k_1 x} \\ c_2(t)e^{-k_2 x} \\ \vdots \\ c_N(t)e^{-k_N x} \end{bmatrix},$$

şeklinde alarak $\Omega(x+y,t) = X(x)Y(y,t)$ bulunur. Bu ayrılabilirliğinin bir sonucu olarak Marchenko integral denklemi cebirsel olarak çözülebilir ve çözüm $K(x,y,t) = H(x,t)Y(y,t)$ formundadır. Burada $H(x,t)$ x ve t nin fonksiyonu olan N boyutlu bir satır vektörüdür. $K(x,y,t)$, (8.2) de yerine yazılırsa

$$K(x,y,t) = -X(x)\Gamma(x,t)^{-1}Y(y,t) \tag{9.1}$$

bulunur. Burada Γ

$$\Gamma(x,t) := I + \int_x^\infty dz Y(z,t)X(z) \tag{9.2}$$

şeklinde verilen $N \times N$ boyutlu matris, I da $N \times N$ boyutlu birim matristir. Bu durumda δ_{jl} Kronecker deltasıyla ifade edilien Γ_{jl} aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\Gamma_{jl} = \delta_{jl} + \frac{c_j(0)e^{-2k_j x + 8k_j^3 t}}{k_j + k_l}.$$

(8.3) de (9.1) kullanarak

$$u(x,t) = 2\tfrac{\partial}{\partial x}\left[X(x)\Gamma(x,t)^{-1}Y(x,t)\right] = 2\mathrm{tr}\tfrac{\partial}{\partial x}\left[Y(x,t)X(x)\Gamma(x,t)^{-1}\right]$$

elde edilir. (9.2) den görürüz ki $-Y(x,t)X(x)$ ifadesi Γ nın x e göre türevine eşittir. Dolayısıyla N soliton çözümü

$$u(x,t) = -2tr\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\Gamma(x,t)}{\partial x}\Gamma(x,t)^{-1}\right] = -2\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial x}\det\Gamma(x,t)}{\det\Gamma(x,t)}\right] \tag{9.3}$$

şeklinde yazılabilir. $N=1$ olduğunda KdV denkleminin bir soliton çözümü $\theta := \log\sqrt{2k_1/c_1(0)}$ olmak üzere

$$u(x,t) = -2k_1^2 \sec h^2(k_1 x - 4k_1^3 t + \theta)$$

şeklinde ifade edilir.

Üstel matrisi kullanarak, (9.3) de görülen N soliton çözümü

$$u(x,t) = -4Ce^{-Ax+8A^3t}\Gamma(x,t)^{-1}A\Gamma(x,t)^{-1}e^{-Ax}B,$$

formunda ifade edilebilir [15]. Burada

$$A := diag\left\{k_1, k_2, \cdots k_N\right\},$$

$$B^\dagger := [1\ 1\ \ldots 1]\,,\ C := [c_1(0)\ c_2(0)\ldots c_N(0)] \tag{9.4}$$

dir. Burada B, N boyutludur. Bu durumda (9.2)

$$\Gamma(x,t) = I + \int_x^\infty dz e^{-zA}BCe^{-zA}e^{8tA^3}$$

şeklinde yazılabilir.

Lineer olmayan Schrödinger denklemi için iyi bilinen N soliton çözümü, basit (bound state) kutbu ile (8.4) de $n_j = 1$ ve $R(\lambda,t) = 0$ seçilerek elde edilebilir. KdV denklemindeki süreçle benzer olarak A, B, C matris üçlüsü ve

$$A := diag\left\{-i\lambda_1, -i\lambda_2, \ldots, -i\lambda_N\right\} \tag{9.5}$$

yardımıyla N soliton çözümü elde edilir. Burada λ_j kompleks sabitleri, $\mathbb{C}^+$ daki geçiş katsayılarının farklı kutuplarıdır ($c_j(0)$ sabitlerinin sıfırdan farklı kompleks sayı olması haricinde). $P(x,t), M$ ve Q matrisleri

$$P(x,t) := diag\left\{e^{2i\lambda_1 x+4i\lambda_1^2 t}, e^{2i\lambda_2 x+4i\lambda_2^2 t}, \ldots, e^{2i\lambda_N x+4i\lambda_N^2 t}\right\},$$
$$M_{jl} := \frac{i}{\lambda_j - \overline{\lambda_l}},\ Q_{jl} := \frac{-i\overline{c}_j c_1}{\overline{\lambda}_j - \lambda_l}$$

olarak tanımlanır.

Bu durumda lineer olmayan Schrödinger denkleminin N soliton $u(x,t)$ çözümü

$$u(x,t) = -2B^{\dagger}\left[I + P(x,t)^{\dagger}QP(x,t)M\right]^{-1} P(x,t)^{\dagger}\mathbb{C}^{\dagger} \tag{9.6}$$

veya eş değer olan

$$u(x,t) = -2B^{\dagger}e^{-A^{\dagger}x}\Gamma(x,t)^{-1}e^{-A^{\dagger}x+4i(A^{\dagger})^2t}\mathbb{C}^{\dagger} \tag{9.7}$$

şeklinde kurulabilir. Burada $\Gamma(x,t)$

$$\Gamma(x,t) := I + \left[\int_x^{\infty} ds \left(Ce^{-As-4iA^2t}\right)^{\dagger}\left(Ce^{-As-4iA^2t}\right)\right]\left[\int_x^{\infty} dz \left(e^{-Az}B\right)\left(e^{-Az}B\right)^{\dagger}\right] \tag{9.8}$$

şeklinde tanımlıdır. (9.8) de (9.4) ve (9.5) kullanılırsa $\Gamma(x,t)$ nin (j,l) girişleri

$$\Gamma_{jl} = \delta_{jl} - \sum_{m=1}^{N} \frac{\overline{c}_j c_1 e^{i\left(2\lambda_m - \overline{\lambda}_j - \overline{\lambda}_l\right)x + 4i\left(\lambda_m^2 - \overline{\lambda}_j^2\right)t}}{\left(\lambda_m - \overline{\lambda}_j\right)\left(\lambda_m - \overline{\lambda}_l\right)}.$$

Belirtelim ki $|u(x,t)|^2$ ifadesi

$$|u(x,t)|^2 = tr\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma(x,t)^{-1}\frac{\partial \Gamma(x,t)}{\partial x}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial x}\det\Gamma(x,t)}{\det\Gamma(x,t)}\right]$$

şeklinde verilir. lineer olmayan Schrödinger denklemi için $N=1$ olduğunda (9.6) veya (9.7) den tek soliton çözümü

$$u(x,t) = \frac{-8\overline{c}_1\left(\mathrm{Im}\left[\lambda_1\right]\right)^2 e^{-2i\overline{\lambda}_1 x - 4i\left(\overline{\lambda}_1\right)^2 t}}{4\left(\mathrm{Im}\left[\lambda_1\right]\right)^2 + |c_1|^2 e^{-4x(\mathrm{Im}[\lambda_1]) - 8t\left(\mathrm{Im}\left[\lambda_1^2\right]\right)}}$$

şeklinde bulunur.

10. TODA LATTİCE DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMÜNÜ BULMAK İÇİN BİR ALGORİTMA

Bu bölümde bu tezin ana amacı olan Toda-Lattice denkleminin verilen bir A, B, C matris üçlüsü yardımıyla bir tam çözümünü elde etmek için bir algoritma verilecektir.

Bu şekildeki algoritmalar, ters saçılım problemi, Marchenko integral denklemi kullanılarak çözülebilen, integrallenebilir diğer lineer olmayan kısmi türevli difernasiyel denklemler için de bulunabilir. Burada matris üçlüsü ve üstel matris yardımıyla elde edilen $u(x,t)$ çözümü, Marchenko integral denkleminin çekirdeği olan $K(x,y,t)$ nin ayrılabilir olarak bulunmasını sağlar ki bu da bazı lineer cebir işlemleriyle bu denklemin çözelebileceği anlamına gelir. Bu durumda Marchenko integral denkleminin çözümünün basit bir integralinin alınmasıyla Toda-Lattice denklemi için tam çözümler elde edilmiş olur.

Bu tip ters saçılma probleminin Gel'fand-Levitan-Marchenko metoduyla da çözülebileceği, $[5, 7-9]$ çalışmalarında gösterilmiştir.

$$u(x,t) = -4\int_x^\infty drK(r,r,t)$$

$$u_x(x,t) = 4K(x,x,t)$$

Burada $K(x,y,t)$,

$$K(x,y,t) - \overline{\Omega(x+y,t)} + \int_x^\infty dv \int_x^\infty drK(x,v,t)\,\Omega(x+v,t)\,\overline{\Omega(r+y,t)} = 0$$

Marchenko integral denkleminin çözümüdür. Burada

$$\Omega(y,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda R(\lambda,t)\,e^{i\lambda y} + \sum_{j=1}^{n} c_j e^{i\lambda_j y - it/(2\lambda_j)}$$

şeklindedir.

Şimdi

$$\ddot{u_n} = e^{u_{n-1}-u_n} - e^{u_n-u_{n+1}},\ n\in\mathbb{Z} \tag{1}$$

Toda-Lattice denkleminin verilen bir A, B, C matris üçlüsü yardımıyla bir tam çözümünü elde etmek için bir algoritma verelim. Burada A, $p\times p$ boyutlu, B, $p\times 1$ ve C de $1\times p$ boyutlu matrislerdir.

1)

$$P - APA = BC$$

eşitliğinden P matrisini bulunur.
2)

$$\Gamma_n := I + e^{-t(A-A^{-1})}A^n P A^n, n \in \mathbb{Z}$$

eşitliği yardımıyla bir yardımcı Γ_n matrisi tanımlanır.

3)

$$u_n := \log\det(\Gamma_n \Gamma_{n+1}^{-1})$$

şeklinde bir u_n ifadesi elde edilir.
4) u_n, Toda lattice denklemini sağlayan bir tam çözümdür.

Örnek 1: $p =: 1$ için $A = (a), B = (1), C = (c), a, b \in \mathbb{R}$ matris üçlüsü verilsin. Burada $P - APA = BC$ eşitliğinden,

$$P = (c/(1-a^2)),$$

$$\Gamma_n = 1 + \frac{a^{2n}c}{(1-a^2)}e^{-t(a-a^{-1})},$$

son olarak

$$u_n = \log(1 + \frac{a^{2n}c}{(1-a^2)}e^{-t(a-a^{-1})}/1 + \frac{a^{2n}c}{(1-a^2)}e^{-t(a-a^{-1})}$$

şeklinde elde edilir ki bu çözüm Toda-Lattice denklemini sağlar**.**

Örnek 2: $p =: 2$ için matris üçlüsü şu şekilde olsun:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \end{pmatrix}, a, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

$P - APA = BC$ eşitliğinden:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{c_1}{1-a^2} & \frac{c_2}{1-a^2} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{c_1 a^{2n}}{1-a^2} e^{-t\left(a-a^{-1}\right)} & \dfrac{c_2 a^{2n}}{1-a^2} e^{-t\left(a-a^{-1}\right)} \end{pmatrix}$$

ve

$$u_n = \log(1 + \frac{c_1 a^{2n}}{1-a^2} e^{-t\left(a-a^{-1}\right)} / 1 + \frac{c_2 a^{2n}}{1-a^2} e^{-t\left(a-a^{-1}\right)}$$

şeklinde Toda-Lattice denkleminin bir tam çözümü elde edilmiş olur.

KAYNAKLAR

[1] **Korteweg, D. J. and de Vries G.** (1895), On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel and on a new type of long stationary waves, *Phil.Mag*. 39,422-443

[2] **Zabusky, N. J. and Kruskal M.D.** (1965), Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett*. 15, 240-243

[3] **Zakharov, V. E. and Shabat A. B.** (1972), Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, *Soviet Phys*. JETP 34, 62-69 .

[4] **Ablowitz, M. J. and Clarkson P. A.** (1991), Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering, *Cambridge University Press*, *Cambridge*.

[5] **Russell, J. S.** (1845), Report on waves, Report of the 14th meeting of the British Association for the Advancement of Science, John Murray, *London*, pp. 311-390.

[6] **Fermi, E. Pasta J. and Ulam S.** (1940) Studies of non linear problems, I, Document LA, *Los Alamos National Labaratory*, May 1955

[7] **Fermi, E.** (1965), Collected papers, Vol. II: United States, 1939-1954, University of *Chicago Press, Chicago*.

[8] http:// www.osti.gov/ accomplishments/pdf/A80037041/A80037041.pdf (Nisan 2019)

[9] **Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D., and Miura, R. M**. (1967), Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev. Lett. 19,1095-1097 .

[10] **Wadati, M.** (1972), The exact solution of the modified Korteweg-de Vries equation, J. Phys. Soc. *Japan* 32,1681.

[11] **Ablowitz, M. J., Kaup,D. J., Newell, A.C. and Segur, H**. (1973), Method for solving the Sine-Gordon equation, Phys. Rev. Lett. 30, 1262-1264 .

[12] **Ablowitz, M. J., Kaup,D. J., Newell, A.C. and Segur, H.** (1974), The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems, Stud. Appl. Math. 53, 249-315.

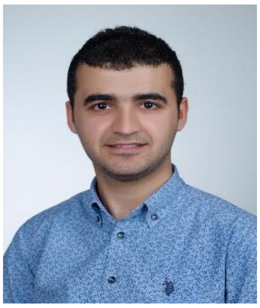
[13] **Lax, P. D.** (1968), Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, Commun. Pure Appl. Math. 21, 467-490.

[14] **Aktosun, T., Demontis, F., and van der Mee, C**. (2007), Exact solutions to the focusing nonlinear Schrödinger equation, Inverse Problems 23, 2171-2195.

[15] **Aktosun, T., and van der Mee, C.** (2006), Explicit solutions to the Korteweg-de Vries equation on the half-line, Inverse Problems 22, 2165-2174.

[16] **Kurt, M.**,(2015) Ters Saçılım Dönüşümü (IST) ve Soliton Teorisi, (Yüksek Lisans Tezi).*Sivas Cumhuriyet Üniversitesi* Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

ÖZGEÇMİŞ



Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	Ali Askar DENİZER
Doğum Yeri-Tarihi	Malatya-1991
Medeni Hali	Bekar
İletişim Adresi	Ahmet Turan Gazi Mah. Seheryeli Cad. Vefakent Siteleri I Blok Kat:3 Daire:16
E-Posta Adresi	aliaskardenizer@gmail.com

Eğitim ve Akademik Durum

Lise	Turgut Özal Lisesi, 2009.
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2015.
Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü, 2019.