T.C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SİNGÜLER DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMLER

DOKTORA TEZİ

ELİF EMRAHOĞLU

(201192172008)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Rauf AMİROV

SİVAS
TEMMUZ 2019

Elif EMRAHOĞLU'nun hazırladığı ve **"SİNGÜLER DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMLER"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı	**Prof. Dr. Rauf AMİROV** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Hüseyin DEMİR** Samsun Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU** Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Sinan ÖZKAN** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Selma GÜLYAZ ÖZYURT** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	....

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **DOKTORA TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. İsmail ÇELİK

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu’nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)’nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

ETİK

Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

13.06.2019

Elif EMRAHOĞLU

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışması süresince bilgi ve deneyimleri ile bana yol gösteren, tezin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen sayın danışman hocam Prof. Dr. Rauf AMİROV' a içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca tez çalışmam boyunca sabırla manevi desteklerini üzerimden eksik etmeyen kıymetli eşim Arif EMRAHOĞLU'na, annem Semiha ERYILMAZ, babam Hayri ERYILMAZ'a ve kızlarım Melis'ime ve Selin'ime sonsuz teşekkürler ederim.

Elif EMRAHOĞLU

ÖZET

SİNGÜLER DİFÜZYON OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMLER

Elif EMRAHOĞLU

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Rauf AMİROV

2019, 84+vii

Bu çalışmada singüler difüzyon operatörü ele alınmıştır. Tez dört bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümü; konunun önemini ve spektral teorideki yerini göstermektedir. İkinci bölümde; diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık kullanılan önemli tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde; difüzyon opertörünün spektral karakteristiklerinin ve verilen denklemin belirli başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri için integral denklemler elde edilmiş, difüzyon denklemi için oldukça kullanışlı olan integral gösterilim verilmiş ve bu gösterilim kullanılarak sınır değer problemin özdeğer ve özfonksiyonlarının önemli özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca integral gösterilimin çekirdek fonksiyonlarının sağladığı hiperbolik tip II. Mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi elde edilmiştir. Ve bu sistemi sağlayan çekirdek fonksiyonlarının t=x ve t=-x karakteristikleri üzerindeki değerleri verilen diferansiyel denklemin katsayılarıyla ifade edilmiştir. Son olarak dördüncü bölümde ise ele alınan difüzyon operatörleri için ters problemlere yer verilmiştir. Verilen problemin katsayılarının Weyl fonksiyonu ve spektral veriler yardımıyla tek türlü belirlenebileceği ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Difüzyon Denklemi, Spektrum, İntegral Gösterilim, Weyl Fonksiyonu, Ters Problem

ABSTRACT

INVERS PROBLEMS FOR THE SINGULAR DIFFUSION OPERATOR

Elif EMRAHOĞLU

PhD Thesis

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Rauf AMİROV

2019, 84+ vii pages

In this study, diffusion operator is considered. This thesis consist of four chapters. In the introduction; important of subject and location in spectral theory are shown. In the second chapter; important definitions and theorems which are used frequently in spectral theory of differential operators are given. In the third chapter, behaviours of spectral characteristics of diffusion operator and integral equations for solution which satisfy certain initial condition of given equation has been obtained and useful integral represantation some important properties of eigenvalues and eigenfunction have been investigated. The hyperbolic type 2nd order partial derivative differential equations provided by the kernel functions of the integral representation is obtained. The values of the kernel functions that provide this system on the t=x and t=-x characteristics are expressed with the coefficients of the given differential equation. Finally, in the last chapter; It is proved that the coefficients of the given problem can be determined individually by means of Weyl function and spectral data.

Key Words: Diffusion Equation, Spectrum, Integral Representation, Weyl Function, Inverse Problem.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Modern fonksiyonel analiz ve uygulamalarının ana dallarından olan spektral teori bazı uygulamalı bilimlerde önemli bir yere sahiptir. Diferansiyel operatörlerin spektral teorisi özellikle fizikte ve matematiksel fizikte karşımıza çıkmaktadır.

Diferansiyel operatörlerin spektral teorisi düz spektral problemler ve ters spektral problemler olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Bir diferansiyel operatör verildiğinde operatörün spektrumunun ve öz fonksiyonlarının aranması ve verilen bir fonksiyonun bu operatörün öz fonksiyonlarına göre ayrışımının incelenmesine düz spektral problem, belirli verilere göre spektral karakteristikleri bu veriler olan operatörün inşasına ise ters spektral problem denmektedir.

Mekanik, elektronik, jeofizik, fizik gibi farklı bilim dallarında bir çok problem ters problemlere indirgenmektedir. Örneğin jeofizikte yer altı madenlerinin, yer altındaki elementlerin dağılım karakteristiklerine göre belirlenmesi; kuantum fiziğinde saçılma verilerine göre alan potansiyellerinin bulunması; mekanikte verilen dalga boylarına göre homojen olmayan yayda yoğunluk dağılımının öğrenilmesi ters problem örnekleri olarak verilebilir.

Literatürde

$$-\frac{d}{dx}\left(p\left(x\right)\frac{dy}{dx}\right)+q\left(x\right)y=\lambda y \tag{1.1}$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemine Sturm-Liouville Denklemi; bu denklem veya bu denklem ve farklı birtakım sınır koşulları tarafından üretilen operatörlere Sturm-Liouville Operatörleri, bu operatörler için konulan spektral problemlere ise Sturm-Liouville Problemi adı verilmektedir.

1836 yılında Sturm ve Liouville tarafından ortaya konulan Sturm-Liouville Teorisi başlangıçta ısı problemlerine uygulanmış olsa da günümüzde bir çok fiziksel problemin araştırılmasında etkin yöntemlerden biri olmuştur.

Diferansiyel operatörler regüler ve singüler diferansiyel operatörler olmak üzere ikiye ayrılarak tanımlanmış ve bu operatörlerin spektral teorisi yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları toplanabilir fonksiyonlar olan diferansiyel operatörlere regüler diferansiyel operatör; tanım bölgesi sonsuz veya katsayılarından bazıları veya tamamı toplanabilir olmayan veya her iki durumda sağlanacak şekildeki diferansiyel operatörlere singüler diferansiyel operatör denir.

Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisi ile ilgili ilk sonuçlar Bernoulli, D'Alembert, Euler, Sturm ve Liouville' e aittir. Sturm (1836) ve Liouville (1836) belirli koşullar altında (1.1) denklemi ve belli sınır koşullarını sağlayan sıfırdan farklı $y(x)$ fonksiyonlarının varlığını sağlayan λ sayılarının, yani özdeğerlerin, ayrık bir küme oluşturduğunu ispatlamıştır. XIX. yüzyılın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından incelenmiştir. Ayrık spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak Weyl tarafından incelenmiştir. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda, lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerlikten faydalanan ilk olarak Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce L_2 uzayı sonrada genel Hilbert Uzayı kavramları kurulmuştur. H Hilbert Uzayı tanımlandıktan sonra lineer self adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. Daha sonra Rietsz, Neumann, Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur.

Diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma Ambartsumyan'a aittir. 1929 yılında Ambartsumyan tarafından Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 1.1 (Ambartsumyan,1929): $q(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığın da gerçel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$'ler

$$\begin{aligned} y'' + \{\lambda - q(x)\} y &= 0 \ , \ \ 0 < x < \pi \\ y'(0) &= y'(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2; (n = 0, 1, ...)$ ise $q(x) \equiv 0$ dır.

Ambartsumyan'ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir. Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi de Borg'a aittir.

Teorem 1.2 (Borg,1945): h, h_1, H sonlu gerçel sayılar olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$'ler (1.2) diferansiyel denklemi ve

$$\begin{aligned} y'(0) - hy(0) &= 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

sınır koşulları ile verilen problemin; $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n, ...$'ler ise (1.2) deki diferansiyel denklemi ve

$$\begin{aligned} y'(0) - h_1 y(0) &= 0, \quad h_1 \neq h \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0 \end{aligned} \tag{1.4}$$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri, $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1, H sayılarını tek olarak belirler.

Borg'un bu çalışmasında $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin verilen operatörün farklı özdeğerleri (spektrumları) olduğu varsayılır ve operatör bu diziler yardımıyla belirlenir. Yani bu tip operatörün varlığı önceden kabul edilir. Borg, aynı çalışmada, bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirlenebilmesi için $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ özdeğerinin yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de Ambartsumyan'ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

Borg'un çalışmasından sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü belirlediği N. Levinson (1949) tarafından ispatlanmıştır.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı da 1946 yılında Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan veya artan potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlerin dağılımı formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Son yıllarda bu operatöre bir boyutlu $q(x)$ potansiyelli Schrödinger denklemi de denmektedir. Aynı zamanda bu çalışmada Schrödinger operatörü için özdeğerlerin dağılım formülü de verilmiştir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar, 1949 yılında Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için önemli bir yöntem vermiştir. Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özellikle özdeğerlerin, özfonksiyonların asimptotiğine ve özfonksiyonların tamlığına ilişkin konular matematikçiler Courant, Birman, Salamyak, Maslov, Keldych vs. tarafından geliştirilmiştir.

Dönüşüm operatörleri de ters problemlerin çözümünde önemli bir araç olmuştur. Bu kavramı J. Delsarte(1938), J. Lions(1957) ve B.M. Levitan (1964) yaptıkları çeşitli çalışmalarda kullanmışlardır.

Son yıllarda operatörü belirlemeye yardımcı olan farklı veriler sıklıkla kullanılmaya başlanmıştır. Bunların en önemlilerinden biri Weyl fonksiyunudur. Weyl fonksiyonu ilk olarak H. Weyl (1910) tarafından literatüre katılmıştır. Weyl'in adıyla anılan M fonksiyonu öncelikle singüler problemler için Sturm-Liouville teorisinde standart bir araç olmuştur.

G. Sh. Guseinov (1984) çalışmasında

$$y'' + [2\lambda p(x) + q(x)]\, y = \lambda^2 y \tag{1.5}$$

regüler diferansiyel denklemini ele almıştır. Guseinov bu çalışmasında verilen

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h \tag{1.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümler için bir integral gösterilimin varlığını ispatlamış ve integral gösterilimindeki çekirdek fonksiyonun sağladığı bir takım özellikleri elde etmiştir. Bununla ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır: $p(x) \in W_2^{m+1}[0,\pi]$ ve $q(x) \in W_2^m[0,\pi]$, $m \geq 0$ olmak üzere $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1.5) denkleminin (1.6) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun.

Bu durumda her iki değişkene göre $m+1$. mertebeden türevleri karesiyle toplanabilir $A(x,t)$ ve $B(x,t)$ gerçel değerli fonksiyonlar vardır öyleki

$$\varphi(x,\lambda) = \cos(\lambda x - \alpha(x)) + \int_0^x A(x,t)\cos\lambda t\,dt + \int_0^x B(x,t)\sin\lambda t\,dt \tag{1.7}$$

$$\alpha(x) = xp(0) + 2\int_0^x [A(\xi,\xi)\sin\alpha(\xi) - B(\xi,\xi)\cos\alpha(\xi)]\,d\xi \tag{1.8}$$

$$q(x) = -p^2(x) + 2\frac{d}{dx}[A(x,x)\cos\alpha(x) + B(x,x)\sin\alpha(x)] \tag{1.9}$$

$$A(0,0) = h, \quad \left.\frac{\partial A(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \;\; B(x,0) = 0 \tag{1.10}$$

Burada

$$\alpha(x) = \int_0^x p(t)\,dt \tag{1.11}$$

dir.

Ayrıca $m \geq 1$ ise

$$\frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial x^2} - 2p(x)\frac{\partial B(x,t)}{\partial t} - q(x)A(x,t) = \frac{\partial^2 A(x,t)}{\partial t^2} \tag{1.12}$$

$$\frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial x^2} + 2p(x)\frac{\partial A(x,t)}{\partial t} - q(x)B(x,t) = \frac{\partial^2 B(x,t)}{\partial t^2} \tag{1.13}$$

Tersine $A(x,t)$ ve $B(x,t)$ fonksiyonları değişkenlerine göre 2. mertebeden karesiyle integrallenebilir kısmi türevlere sahip olup $(1.12), (1.13)$ denklemlerini ve (1.8) ve (1.11) koşullarını sağlarsa (1.7) eşitliğiyle verilen $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (1.5) denkleminin (1.6) başlangıç koşullarını sağlayan çözümüdür.

Yukarıda ifadesi verilen teoremde elde edilen (1.7) gösteriliminden yararlanılarak (1.5) denklemi ve

$y'(0) - hy(0) = 0$

$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri için

$$\lambda_n = n + c_0 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_{1,n}}{n}$$

davranışları elde edilmiştir. Burada

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi p(x)\,dx, \quad \sum_n |c_{1,n}|^2 < \infty$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\right)\int_0^\pi [q(x) + p^2(x)]\,dx$$

dir. Ayrıca problemin normalleştirici sayıları için ise

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_{1,n}}{n}$$

davranışları elde edilmiştir. Burada

$$\alpha_1 = -\frac{\pi}{2} p(0), \quad \sum_n |\alpha_{1,n}|^2 < \infty$$

dır.

Bu çalışmada $\{\lambda_n, \mu_n\}$ ve $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ spektral karakteristiklere göre ters problemin çözümüyle ilgili algoritma verilmiştir.

Klasik sınır değer problemlerinin yanı sıra süreksiz sınır değer problemlerinin incelenmesi, hem matematiksel fiziğin yeni somut problemlerine çözüm sunmakta hem de teorik matematiğin gelişimine katkı sağlamaktadır. Aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip sınır değer problemleri de matematikte, fizikte, jeofizik ve doğa bilimlerinin bir çok dalında sıklıkla karşılaşılan problemlerdir. Genel olarak bu problemler süreksiz yapı özellikleri ile bağlantılıdır. Örneğin, elektronikte elektrik hattının parametrelerinin belirlenmesi için süreksiz ters probleme başvurulur. Bir başka örnek de yeryüzünün salınımı için jeofizik modellerdir. Buradaki süreksizlik yer kabuğunun temelindeki kesme dalgalarının yansıması ile ilgilidir.

Süreksiz katsayıya sahip sınır değer problemleri son günlerde uygulamalı matematikçilerin yöneldiği çalışma konularından biridir. Çünkü bu tip problemler fizikte, jeofizikte ve elektronikte doğrudan uygulama alanına sahiptir. Süreksiz katsayıya sahip sınır değer problemlerinde ayrıca süreksizlik koşulları da olabilmektedir. Örneğin $\rho(x)$ parçalı tanımlı bir fonksiyon olmak üzere

$$\rho(x) \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + q(x) u(x,t) + 2p(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

$$\begin{cases} u(d+0,t) = \alpha u(d-0,t) \\ u'_x(d+0,t) = \alpha^{-1} u'_x(d-0,t) + \beta u(d-0,t) \end{cases}$$

problemi, Fourier metodu kullanılarak

$$-y'' + [2\lambda p(x) + q(x)] y = \lambda^2 \rho(x) y, \quad x \in I \tag{1.14}$$

$$\begin{cases} y(d+0) = \alpha y(d-0) \\ y'(d+0) = \alpha^{-1} y'(d-0) + \beta y(d-0) \end{cases}$$

problemine dönüşür. Burada $I = (0,d) \cup (d,\pi)$, $\alpha > 0$ $|\alpha - 1|^2 + \beta^2 \neq 0$, $d \in (0,\pi)$ reel sabitlerdir. (1.14) diferansiyel denklemine difüzyon denklemi denir. Bu problem fiziksel olarak, iki farklı materyalin uç noktalarından birleştirilmesi ile oluşan katı cismin titreşim problemidir. Benzer şekilde iki farklı materyalin birleştirilmesi ile oluşturulan cisimler için ısı ya da elektrik iletimi problemleri de süreksiz katsayılı ya da aralıkta süreksizliğe sahip difüzyon problemine indirgenebilir.

A.M. Savchuk ve A.A. Shkalikov 1999 yılındaki çalışmalarında $q(x) \in L_{1,loc}(a,b)$ olmak üzere

$$l(y) = -y'' + q(x)\,y$$

diferansiyel ifadesiyle üretilen Sturm-Liouville operatörlerini ele almışlardır.

$$\begin{aligned}
L_M(y) &:= l(y) \\
D(L_M) &= \left\{ y \,\middle|\, y^{[1]} \in W_1^1[0,1],\, l(y) \in L_2(0,1) \right\} \\
y^{[1]}(x) &:= y'(x) - u(x)\,y(x),\ q(x) = u'(x),\ \ u(x) \in L_2(0,1) \\
D(L_m) &= \left\{ y \,\middle|\, y \in D(L_M),\ \ y(\pm 1) = y^{[1]}(\pm 1) = 0 \right\}
\end{aligned}$$

Sonlu bir aralıktaki bu tip potansiyellere karşılık gelen minimal (L_m) ve maksimal (L_M) operatörler inşa edilmiştir. Minimal operatörlerin bütün self adjoint genişlemeleri tanımlanmış ve bu genişlemelerin özdeğerlerinin asimptotları bulunmuştur. Ayrıca bu makalede Sturm-Liouville operatörünün tanımı ve onun $q(x)$ potansiyeli birinci mertebeden bir dağılım fonksiyonu olarak verilmiştir. Yani

$$q(x) = u'(x)\,,\, u(x) \in L_2(a,b)$$

regülerizasyon dönüşümü uygulanmıştır. Burada $u(x)$ fonksiyonu hemen hemen her yerde türevlenebilirdir.

R. Kh. Amirov' un (2004) çalışmasında

$$l(y) = -y''(x) + \frac{c}{x^{\alpha}} y(x) + q(x)\,y(x) \quad 0 < x < \pi$$

diferansiyel ifadenin ürettiği operatör ele alınmıştır. Burada c gerçel sayı, $\alpha \in [1,2)$, $q(x)$ ise gerçel değerli sınırlı fonksiyondur. A. M Savchuk ve A.A. Shkalikov' un yukarıda bahsedilen çalışmalarından farklı olarak bu çalışmada incelenen diferansiyel operatörün potansiyel fonksiyonu regüler olmayan bir singüler fonksiyondur. Dolayısıyla singülerlik derecesi daha yüksek olup potansiyel fonksiyon $W_2^{-\alpha}$ sınıfına aittir.

Bu çalışmada verilen diferansiyel ifadeye karşılık gelen

$$-y'' + u'(x)\, y = \lambda^2 y \qquad 0 < x < \pi$$

diferansiyel denklemi ve

$$\begin{aligned} U(y) &= (\Gamma_\alpha y)(0) - hy(0) = 0 \\ V(y) &= (\Gamma_\alpha y)(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{aligned}$$

sınır koşullarıyla verilen problemin çözümü için integral gösterimler elde edilmiş ve bu integral gösterilimlerin çekirdek fonksiyonlarının bazı özellikleri öğrenilmiştir.

İ. M. Nabiev'in (2004) çalışmasında

$$-y'' + q(x)\, y + 2\lambda p(x)\, y = \lambda^2 y$$

denkleminin $q(x) \in L_2[0,\pi]$, $p(x) \in W_2^1[0,\pi]$ olmak üzere

$$y(0) + wy(\pi) = 0,\ \overline{w}y'(0) + \alpha y(\pi) + y'(\pi) = 0$$

ayrık olmayan sınır koşullarını gerçekleyen lineer bağımsız çözümlerin varlığı ve onların özellikleri incelenmiştir. Burada $q(x)$ ve $p(x)$ gerçel değerli fonksiyonlar, w kompleks, α ise gerçel sayılar olup $|w| = 1$ dir. Ayrıca, bu çalışmada verilen problemin spektral karakteristikleri tanımlanmış ve bu spektral karakteristiklere göre farklı konumlarda verilen ters problemlerin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

İ. M. Guseinov, İ. M. Nabiev (2007) çalışmasında $q(x) \in L_2[0,\pi]$, $p(x) \in W_2^1[0,\pi]$ gerçel değerli fonksiyonlar ve a_{jk}'lar herhangi kompleks sayılar olmak üzere

$$l_\lambda y = y'' + \left[\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)\right] y = 0,\ x \in [0,\pi]$$

diferansiyel denklemi

$$a_{j1}y(0) + a_{j2}y'(0) + a_{j3}y(\pi) + a_{j4}y'(\pi) = 0,\ j = (1,2)$$

sınır koşullarının ürettiği sınır değer problemi incelenmiştir. Çalışmada verilen problemin spektral karakteristikleri tanımlanır, spektral karakteristiklere göre konumlanan ters problemlerin çözümü için yeterli koşullar belirlenir ve bir algoritma verilir. Ayrıca ek koşullar altında ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşullar belirlenmiştir.

İ. M. Nabiev (2007) çalışmasında $[0,\pi]$ aralığında

$$y'' + \left[\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)\right] y = 0 \tag{1.15}$$

difüzyon denklemi ve

$$y(\pi) = e^{it} y(0), y'(\pi) = e^{it} y'(0) \tag{1.16}$$

sınır koşulları tarafından üretilen L_t sınır değer problemi incelenmiştir. Burada $p(x) \in W_2^1[0,\pi]$ ve $q(x) \in L_2[0,\pi]$ dir. m tam sayı olmak üzere eğer $t = \pi m$ ise (m çift) (1.16) sınır koşulları periyodik sınır koşullarına ,eğer $t \neq \pi m$ (m tek) ise yarı periyodik sınır koşullarına dönüşür.

$p(x) \equiv 0$ olduğunda çeşitli Sturm-Liouville operatörleri için ters spektral problemler ayrık olmayan sınır koşullarıyla beraber I. V. Stankevich, V.A. Sadovnichii, V.A. Marchenko, O. A. Plaksina, V.A. Yurko, M.G. Gasymov, I. M. Guseinov tarafından çalışılmıştır. G. Sh. Guseinov (1984), I. M. Guseinov ve I. M. Nabiev (2000), I. M. Nabiev (2003) ve I. M. Nabiev (2004) de belli başlangıç koşulları altında verilen (1.15) difüzyon denklemi için dönüşüm problemleri çalışılmıştır. Özellikle G. Sh. Guseinov (1984), I. M. Guseinov ve I. M. Nabiev (2000), I. M. Nabiev (2003) de spektrumların karakteristikleri diferansiyel metodlarla periyodik durumları elde edilmiştir.

Yarı periyodik sınır koşullarının bazı özel durumları henüz çalışılmamıştır. Bu makalede bu durum göz önünde bulundurularak yarı periyodik ters problemlerin çözümünün tekliği ve operatörün inşası ile ilgili ters probleminin çözümü için yeterli koşullar elde edilmiştir.

R. Hryniv and N. Pronska (2012) çalışmasında

$$-y'' + q(x) y + 2\lambda p(x) y = \lambda^2 y \tag{1.17}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{1.18}$$

problemi ele alınmıştır. Burada $p(x)$ fonksiyonu gerçel değerli olup $L_2(0,1)$ uzayına ait, $q(x)$ ise gerçel değerli olup negatif indisli W_2^{-1} Sobolev Uzayına ait fonksiyondur.

Bu çalışmada verilen $(1.17), (1.18)$ problemi $y^{[1]} := y' - ry$ dönüşümü yardımıyla regülerize edilerek verilen başlangıç değer probleminin çözümleri için integral gösterilimlerinin varlığı ispatlanmış ve bu gösterilimlerden yararlanılarak özdeğer ve normalleştirici sayıların asimptotik ifadeleri ve $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ spektral karakteristiklerine göre ters problemin çözümüyle ilgili bir algoritma verilmiştir.

N. Pronska (2012) çalışmasında bir önceki çalışmasında olduğu gibi $q \in W_2^{-1}(0,1)$ iken $(1.17) - (1.18)$ problemi belirli dönüşümler yardımıyla Dirac sistemine indirgenerek bu sistemin temel çözümleri için integral gösterimler elde edilmiş, integral gösterilimden yararlanarak verilen problemin özdeğerlerinin asimptotikleri elde edilmiştir. Bu çalışmada iki farklı Dirichlet probleminin özdeğerlerini yani, $\{\lambda_n, \mu_n\}$ ikilisine göre ters problemin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Ayrıca çözümün inşası için bir algoritma önerilmiştir.

N.Pronska (2012) çalışmasında (1.17) denkleminin spektral özellikleri negatif indisli Sobolev Uzaylarında ele alınmış, bir önceki çalışmalarından farklı olarak spektral karakteristikler tanımlanmış ve quasi dönüşümünden yararlanarak incelenen problem 1. mertebeden denklem sistemine indirgenmiştir. Bu şekilde elde edilen sistem Pontryagin uzaylarında lineerleştirilerek daha kullanılır hale indirgenmiştir ve elde edilen sistemin verilen probleme denkliği ispatlanmıştır. Buradan da özdeğerlerinin geometrik tekrarlama derecelerinin yani katlılıklarının 1'e eşit olduğu gösterilmiştir. Ayrıca verilen problemin normallletirici sayıların $(1.17) - (1.18)$ Dirichlet probleminin özdeğerleriyle ifadesi verilmiştir. Son olarak ters problemin çözümü için bir algoritma verilmiştir.

N. Pronska (2013) çalışmasında $q(x)$ ve $p(x)$ fonksiyonları kompleks olduğu durumda difüzyon denklemi ele alınmıştır. Burada $p(x) \in L_2(0,1)$ uzayından olan kompleks değerli fonksiyon, $q(x)$ ise negatif indisli Sobolev Uzayına ait yani $W_2^{-1}(0,1)$ uzayından olan kompaszxleks değerli fonksiyondur. Bu durumda (1.14) denklemi için konulan Dirichlet sınır değer problemi incelenmiş ve bu problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları için davranışlar elde edilmiştir. Ayrıca α_n normalleştirici sayılarının iki farklı Dirichlet probleminin özdeğerleri ile ifadesi verilmiştir. Daha önceki çalışmalarında olduğu gibi bu çalışmasında da verilen problemin temel çözüm sistemi için integral gösterilimler elde edilmiş ve verilen problem özel tip Dirac sisteme indirgenerek özdeğerlerin ve özfonksiyonların özellikleri öğrenilmiştir.

Amirov ve Nabiev (2013)'in makalelerinde sonlu aralığın herhengi bir noktasında impulsif koşullara sahip yani parçanın içinde herhangi bir noktada çözümü süreksizliğe sahip kuadratik demetiyle üretilen sınır değer problemi için ters problemleri çalışmışlardır. Ayrıca Sturm Liouville denkleminin kuadratik demetinin lineer bağımsız çözümleri için integral gösterilimler elde edilmiştir.

$f_v(x,\lambda)$ $(v=1,2)$ fonksiyonu $f_v(0,\lambda)=1$, $f_v'(0,\lambda)=\lambda w_v$ başlangıç koşulları ve $y(a+0)=\alpha y(a-0)$, $y'(a+0)=\alpha^{-1}y'(a-0)$ süreksizlik koşullarını sağlasın. $L_\lambda y := y'' + \left[\lambda^2 - 2\lambda p(x) - q(x)\right] y$, $x\in[0,a)\cup(a,\pi]$ diferansiyel ifadesi tarafından üretilen

$$f_v(x,\lambda) = f_{0v}(x,\lambda) + \int_{-x}^{x} A_v(x,t)\, e^{\lambda w_v t} dt$$

integral gösterimleri verilmiştir. Burada

$$f_{0v}(x,\lambda) = l^+(x)\, e^{\lambda w_v x} R_v^+(x) + l^-(x)\, e^{\lambda w_v t} R_v^-(x)$$

$$R_v^\pm(x) = e^{\pm w_v \beta^\pm(x)},\ \ \beta^\pm(x) = \int_{(a\pm a)/2}^{x} p(t)\, dt$$

$$l^\pm(x) = \frac{1}{2}\left[l(x) + \frac{1}{l(x)}\right] \quad \text{ve} \quad l(x) = \left\{\begin{array}{l} 1,\quad 0\le x\le a \\ \alpha, ...a\le x\le\pi \end{array}\right\}$$

dır Bu integral gösterimlerden yola çıkılarak sınır değer problem için aşağıdaki şekilde asimptotik formüller elde edilmiştir.

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{d_n}{\lambda_n^0} + \frac{\delta_n}{\lambda_n^0}, \quad n\to\pm\infty$$

burada $\delta_n\in l_2$, d_n sınırlı bir dizi ve $\lambda_n^0 = n + \frac{1}{\pi} + \beta^+(\pi) + h_n$, $\sup_n |h_n| < \infty$ dır.

Ayrıca öncelikle verilen problem için Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu kavramları verilmiş bu şekilde tanımlanan Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonun λ' nın yeterince büyük değerlerinde davranışları öğrenilmiştir. Daha sonra ise Weyl fonksiyonunun özelliklerinden yaralanılarak bu fonksiyonun verilen problemi tek olarak belirleyebileceği ispatlanmıştır. Benzer şekilde iki spektruma ve bir spektrum ve normalleştirici sayılara göre konumlanan ters problemin çözümünün tekliği gösterilmiştir.

Seval Karaca'nın (2013) doktora tezinde

$$L := \begin{cases} -y'' + [2\lambda p(x) + q(x)] y = \lambda^2 \rho(x) y, \quad x \in I \\ U(y) := y'(0) = 0 \quad V(y) := y(\pi) = 0 \\ y(d+0) = \beta y(d-0) \\ y'(d+0) = \beta^{-1} y'(d-0) + \gamma y(d-0) \end{cases}$$

sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada λ spektral parametre, $q(x)$ ve $p(x)$ fonksiyonları sırasıyla $L_2(0,\pi)$ ve $W_2^1(0,\pi)$ sınıfına ait reel değerli fonksiyonlardır. Ayrıca

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < d \\ \alpha^2, & d < x \leq \pi \end{cases}, \ 0 < \alpha < 1$$

şeklinde basamak fonksiyonu ve $|\beta - 1|^2 + \gamma^2 \neq 0$, $d \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ sabitlerdir. Tezde verilen denklemin belirli başlangıç ve süreksizlik koşullarını sağlayan çözümleri için integral denklemler elde edilmiş, difüzyon denklemi için oldukça kullanışlı olan integral gösterilim verilmiş ve bu gösterilim kullanılarak sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının önemli özellikleri araştırılmıştır. Ayrıca ele alınan difüzyon operatörleri için ters problemlere yer verilerek operatörün katsayılarının Weyl fonksiyonu ve karışık spektral veriler (yarı-ters problem) ile tek olarak belirlendiği ispatlanmıştır.

A.A. Nabiev and R.Kh. Amirov (2015) çalışmasında süreksiz katsayılı

$$-y'' + (q(x) + 2\lambda p(x)) y = \lambda^2 \rho(x) y \quad 0 \leq x \leq \pi$$

difüzyon denklemi ele alınmıştır. Burada $q(x) \in L_2 \in (0,\pi)$, $p(x) \in W_2^1(0,\pi)$ koşulunu sağlayan gerçel değerli fonksiyonlar, $\rho(x)$ ise $\rho(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq a \\ \alpha^2, & a \leq x \leq \pi \end{cases}$ şeklinde verilen $a \in (0,\pi)$, $a > \dfrac{\alpha\pi}{\alpha+1}$ olmak üzere parçalı sabit fonksiyondur. Bu çalışmada verilen süreksiz katsayılı difüzyon denklemi için konulan $y_j(0,\lambda) = 1$, $y_j'(0,\lambda) = (-1)^{j+1} i\lambda$ $(i,j = 1,2)$ şeklinde başlangıç koşullarını sağlayan temel çözüm sistemi için integral gösterilimler elde edilmiştir. Ayrıca temel çözüm sistemin integral gösterilimlerinin çekirdek fonksiyonlarının özellikleri öğrenilmiş yani çekirdek fonksiyonların x ve t değişkenlerine göre türevlere sahip olduğu ve bu türev fonksiyonların $L_1\left(-\mu^+(x), \mu^+(x)\right)$ uzayına ait olduğu ispatlanmıştır. Burada $\mu^+(x) = x\alpha - \alpha a + a$ dır.

Sunulan tezde

$$L := \begin{cases} -y'' + \{q(x) + 2\lambda p(x)\} y \ , \ \ 0 < x < \pi \\ U(y) := y(0) = 0, \quad V(y) := y(\pi) = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada $q(x) = q_0(x) + \dfrac{A}{x^\alpha}$, $A \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$, $q_0(x)$, $p(x)$ fonksiyonları sırasıyla $L_2[0,\pi]$ ve $W_2^1[0,\pi]$ sınıfına ait reel değerli fonksiyonlar ve λ spektral parametredir.

Tezin birinci bölümünde diferansiyel denklemlerin spektral teorisindeki, özellikle Sturm-Liouville ve Difüzyon Denklemlerinin ürettiği diferansiyel operatörlerin spektral teorisindeki yeni gelişmeleri verilmiştir.

Tezin ikinci bölümünde; çalışmada kullanılan bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde singüler difüzyon denklemi yarı türev uygulanarak birinci mertebeden diferansiyel denklem sistemine indirgenmiş ve bu sistem için konulan belirli başlangıç koşullarıyla verilen başlangıç değer probleminin çözümü için integral gösterilimler elde edilmiş ve bu integral gösterilimlerin çekirdek fonksiyonlarının özellikleri öğrenilmiştir.

3.1 alt bölümünde singüler difüzyon denkleminin verilen başlangıç koşullarını sağlayan çözümü için

$$\begin{aligned} y_1(x,\lambda) &= e^{i\lambda x} + \int_0^x u(t)\, y_1(t) \cos\lambda(x-t)\, dt - \frac{1}{\lambda}\int_0^x u(t)\, y_2(t) \sin\lambda(x-t)\, dt \\ &+ \frac{1}{\lambda}\int_0^x \left\{q_0(t) + 2\lambda p(t) - u^2(t)\right\} y_1(t) \sin\lambda(x-t)\, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(x,\lambda) &= i\lambda e^{i\lambda x} - \lambda\int_0^x u(t)\, y_1(t) \sin\lambda(x-t)\, dt - \int_0^x u(t)\, y_2(t) \cos\lambda(x-t)\, dt \\ &+ \int_0^x \left\{q_0(t) + 2\lambda p(t) - u^2(t)\right\} y_1(t) \cos\lambda(x-t)\, dt \end{aligned}$$

integral denklemleri sistemi elde edilmiştir. Elde edilen integral denklemleri sisteminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilerek;

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= i\lambda \end{aligned}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü için aşağıdaki gösterilimleri elde edilmiştir.

$$y_1(x,\lambda) = a(x)e^{i\lambda x} + \int_{-x}^{x} K_{11}(x,t)e^{i\lambda t}dt$$

$$y_2(x,\lambda) = i\lambda a(x)e^{i\lambda x} + b(x)e^{i\lambda x} + \int_{-x}^{x} K_{21}(x,t)e^{i\lambda t}dt + i\lambda\int_{-x}^{x} K_{22}(x,t)e^{i\lambda t}dt$$

3.2. alt bölümünde, elde edilen integral gösterilim yardımıyla çekirdek fonksiyonlarının sağladığı hiperbolik tip 2. mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemler sistemi elde edilmiştir. Bu sistemi sağlayan çekirdek fonksiyonlarının $t = x$ ve $t = -x$ karakteristikleri üzerindeki değerleri verilen diferansiyel denklemin katsayıları ile ifade edilmiştir.

Tezin 4. bölümünde verilen problemin spektral özellikleri araştırılmıştır.

4.1. alt bölümünde L probleminin karakteristik fonksiyonunun özellikleri incelenmiştir.

4.2 alt bölümünde L probleminin n'in yeterince büyük değerlerindeki özdeğerlerinin;

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{d_n}{n} + \frac{\delta_n}{n}$$

şeklinde davranışları elde edilmiştir

Burada $\lambda_n^0 = n + \dfrac{\alpha(\pi)}{\pi}, \;\; n = 0, \pm1, \pm2, ...$

$$d_n = \int_0^{\pi} \widetilde{A}_t(\pi,t)\sin ntdt - \widetilde{B}(\pi,\pi) - \int_0^{\pi} \widetilde{B}_t(\pi,t)\cos ntdt$$

$$\delta_n = -\frac{(-1)^n d_n}{n\pi^2}\left[\int_0^{\pi} t\widetilde{A}(\pi,t)\sin ntdt - \int_0^{\pi} t\widetilde{B}(\pi,t)\cos ntdt\right]$$

dir. Ayrıca d_n sınırlı bir dizi ve $\delta_n \in l_2$ dir.

L probleminin n'in yeterince büyük değerlerindeki özfonksiyonlarının

$$\varphi_n(x) = \varphi(x,\lambda_n) = \sin\left(\lambda_n^0 x - \alpha(x)\right) + \frac{1}{\lambda_n^0}\left[A(x,x)\sin\lambda_n^0 x - B(x,x)\cos\lambda_n^0 x + B(x,0)\right]$$
$$-\frac{1}{\lambda_n^0}\int_0^x A_t(x,t)\sin\lambda_n^0 t dt + \int_0^x B_t(x,t)\cos\lambda_n^0 t dt + \frac{\Delta_n}{n}$$

şeklinde davranışa sahip olduğu elde edilmiştir. Burada $\Delta_n \in \ell_2$, $D_t A(x,t) \in L_1(0,x)$, $D_t B(x,t) \in L_1(0,x)$ ve

$$\Delta_n = \left(\frac{d_n}{n} + \frac{\delta_n}{n}\right)\left\{\int_0^\pi tB(x,t)\cos\lambda_n^0 t dt - \int_0^\pi tA(x,t)\sin\lambda_n^0 t dt\right\}$$
$$= \frac{d_{n_1}}{n} + \frac{\delta_{n_1}}{n}$$

dır. Burada

$$d_{n_1} = d_n\left\{\int_0^\pi tB(x,t)\cos\lambda_n^0 t dt - \int_0^\pi tA(x,t)\sin\lambda_n^0 t dt\right\}$$
$$\delta_{n_1} = \delta_n\left\{\int_0^\pi tB(x,t)\cos\lambda_n^0 t dt - \int_0^\pi tA(x,t)\sin\lambda_n^0 t dt\right\}$$

dır.

L probleminin n'in yeterince büyük değerlerindeki normalleştirici sayılarının

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha(\pi)}{2\lambda_n} + \frac{d_n}{\lambda_n^0} + \frac{\delta_n}{\lambda_n^0}$$

şeklindeki davranışları elde edilmiştir. Burada

$$\delta_n = -\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2\lambda_n x \sin 2\alpha(x) p(x) dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2\lambda_n x \cos 2\alpha(x) p(x) dx - 2\int_0^\pi x\widetilde{A}(x,x)\int_0^x \widetilde{A}(x,t)\cos\lambda_n t dt \cos\lambda_n x dx$$
$$-2\int_0^\pi x\widetilde{B}(x,x)\int_0^x \widetilde{B}(x,t)\sin\lambda_n t dt \sin\lambda_n x dx + 2\int_0^\pi \cos\alpha(x)\left(\int_0^x \widetilde{A}(x,t)\cos\lambda_n t dt\right)\sin\lambda_n x dx$$
$$-2\int_0^\pi \sin\alpha(x)\left(\int_0^x \widetilde{A}(x,t)\cos\lambda_n t dt\right)\cos\lambda_n x dx$$
$$+2\int_0^\pi \cos\alpha(x)\left(\int_0^x \widetilde{B}(x,t)\sin\lambda_n t dt\right)\sin\lambda_n x dx$$

$$-2\int_0^\pi \sin\alpha(x)\left(\int_0^x \widetilde{B}(x,t)\sin\lambda_n t dt\right)\cos\lambda_n x dx$$

$$-\alpha(\pi)\int_0^\pi \widetilde{A}(x,t)\cos\lambda_n t dt-\alpha(\pi)\int_0^\pi \widetilde{B}(x,t)\sin\lambda_n t dt$$

$$+2\int_0^\pi \alpha(x)\widetilde{A}(x,x)\int_0^x \widetilde{A}(x,t)\cos\lambda_n t dt\cos\lambda_n x dx$$

$$+2\int_0^\pi \alpha(x)\widetilde{B}(x,x)\int_0^x \widetilde{B}(x,t)\sin\lambda_n t dt\sin\lambda_n x dx$$

$$-2\int_0^\pi p(x)\cos\alpha(x)\left(\int_0^x \widetilde{A}(x,t)\cos\lambda_n t dt\right)\sin\lambda_n x dx$$

$$+2\int_0^\pi p(x)\sin\alpha(x)\left(\int_0^x \widetilde{A}(x,t)\cos\lambda_n t dt\right)\cos\lambda_n x dx$$

$$-2\int_0^\pi p(x)\cos\alpha(x)\left(\int_0^x \widetilde{B}(x,t)\sin\lambda_n t dt\right)\sin\lambda_n x dx$$

$$+2\int_0^\pi p(x)\sin\alpha(x)\left(\int_0^x \widetilde{B}(x,t)\sin\lambda_n t dt\right)\cos\lambda_n x dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2\alpha(x)\sin 2\lambda_n x dx+\frac{1}{2}\int_0^\pi \cos 2\alpha(x)\cos 2\lambda_n x dx$$

ve

$$d_n=-\frac{1}{2}\cos 2\alpha(\pi)\sin 2\lambda_n\pi$$

şeklinde tanımlanan sınırlı bir dizidir..

4.3 alt bölümünde L probleminin Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonunun özellikleri araştırılmıştır.

4.4 alt bölümünde Weyl fonksiyonu ve spektral verilere göre ters problemin çözümü için teklik teoremleri verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1: $E \neq \varnothing$ herhangi bir küme ve M herhangi bir cisim olsun. $+ : E$ x $E \rightarrow E$ ve $. : M$ x $E \rightarrow E$ fonksiyonları için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa E 'ye M cismi üzerinde vektör uzayı denir.

i) $(E, +)$ cebirsel yapısı değişmeli gruptur.

i_1) $\forall a, b \in E$ için $a + b \in E$ dir. (Kapalılık Özelliği)

i_2) $\forall a, b, c \in E$ için $a + (b + c) = (a + b) + c$ dir. (Birleşme Özelliği)

i_3) $\forall a \in E$ için $a + e = e + a = a$ olacak şekilde bir tek $e \in E$ vardır.

i_4) $\forall a \in E$ için $a + a' = a' + a = 0$ olacak şekilde bir tek $a' \in E$ vardır.

i_5) $\forall a, b \in E$ için $a + b = b + a$ dır. (Değişme Özelliği)

ii) $\forall a, b \in E$ ve $\forall \lambda, \mu \in M$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

ii_1) $\lambda a \in E$ dir.

ii_2) $\lambda (a + b) = \lambda a + \lambda b$ dir.

ii_3) $(\lambda + \mu) a = \lambda a + \mu a$ dır.

ii_4) $(\lambda \mu) a = \lambda (\mu a)$ dır.

ii_5) $\forall a \in E$ için $1.a = a$ olacak şekilde $1 \in M$ vardır. Burada 1, E cisminin birim elemenıdır.

Tanım 2.2 : $D(L)$ ve $R(L)$ aynı cisim üzerinde birer vektör uzayları olmak üzere $L : D(L) \rightarrow R(L)$ şeklinde tanımlanan dönüşüme operatör denir. Bu operatör $\forall x, y \in D(L)$ ve $\forall \lambda$ skaleri için

l_1) $L(x + y) = L(x) + L(y)$

l_2) $L(\lambda x) = \lambda L(x)$

koşulları sağlanıyorsa L 'ye Lineer Operatör veya Lineer Homomorfizm denir. $L : D(L) \rightarrow R(L)$ operatörü birebir ve örten ise L operatörüne Lineer İzomorfizm denir. Değer kümesi reel sayılar veya kompleks sayılar olan operatörlere ise Fonksiyonel denir.

Tanım 2.3 : H , $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olmak üzere

$\forall x, y, z \in H$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $(.,.) : H * H \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna H da bir İç Çarpım denir.

i) $(x, x) \geq 0$; $(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

ii) $(x, y) = \overline{(y, x)}$

iii) $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$

iv) $(x + z, y) = (x, y) + (x, z)$

$\|x\| : \sqrt{(x, x)}$ ifadesi x'in normu olarak tanımlanmaktadır.

Bir iç çarpım üzerindeki her Cauchy dizisi bu norma göre uzay içerisinde bir limite sahipse bu uzaya Hilbert Uzayıdır denir. Örneğin;

$$L_2[a, b] = \left\{ f(x) = \int_a^b [f(x)]^2 \, dx < \infty \right\}$$

uzayı $(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$ iç çarpımı ile bir Hilbert Uzayıdır.

Tanım 2.4.: Bir H Hilbert Uzayında tanımlı L lineer operatörü verilsin. Eğer $\forall x \in D(L)$ için $\|Lx\| \leq n \|x\|$ olacak şekilde bir $n > 0$ sayısı varsa L operatörüne sınırlı lineer operatör denir.

Tanım 2.5 : H bir Hilbert Uzayı ve M , H' ın bir alt uzayı olsun. Her bir $x \in H$ için $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ olacak şekilde $\exists (x_n) \subset M$ dizisi varsa M'ye H' da yoğun alt uzay denir ve $\overline{M} = H$ şeklinde gösterililir.

Tanım 2.6 : $\{x : \forall m \in M \text{ için } (x, m) = 0\}$ kümesine M kümesinin ortogonal tümleyeni denir ve $M^{\perp}$ ile gösterilir.

Teorem 2.7: $\overline{M} = H$ olması için gerek ve yeter koşul $M^{\perp} = 0$ olmasıdır.

Tanım 2.8 : H bir Hilbert Uzayı olmak üzere$L : H \to H$ bir lineer operatör ve $\overline{D(L)} = H$ olsun.

$$M := \{y \in H : \forall x \in D(L) \text{ için } (Lx, y) = (x, z) \text{ olacak şekilde } z \in H \text{ mevcut}\}$$

kümesi üzerinde $y \in M$ için $L^*y = z$ şeklinde tanımlı $L^* : H \to H$ operatörüne L operatörünün eşlenik (adjoint) operatörü denir.

Bir L operatörü için $L = L^*$ ise bu operatöre özeşlenik (self-adjoint) operatör denir.

Tanım 2.9 : $[a,b]$ aralığında tanımlı sonlu değerli $f(x)$ fonksiyonu verilsin. $\forall\varepsilon > 0$ sayısı için $[a,b]$ ' ye ait olan ve $\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta$ koşulunu sağlayan keyfi sonlu sayıda ikişerli ayrık $\{(a_k, b_k)\}$ aralıkları için $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa $f(x)$ fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon denir ve $[a,b]$' de mutlak sürekli fonksiyonlar uzayı $AC[a,b]$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 2.10 : $[a,b]$ aralığında tanımlı g fonksiyonunun $k = \overline{0, n-1}$ için $g^{(k)} \in AC[a,b]$ ve $g^{(n)} \in L_2[a,b]$ koşulunu sağlayan g fonksiyonlarının uzayına Sobolev Uzayı denir ve $W_2^n[a,b]$ ile gösterilir.

Tanım 2.11 :

$$l(y) = p_0(x)\, y^n + p_1(x)\, y^{n-1} + ... + p_n(x)\, y \tag{2.1}$$

formunda verilen ifadeye n. mertebeden bir lineer diferansiyel ifade denir. Burada $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonlarına diferansiyel ifadenin katsayıları , n sayısına da diferansiyel ifadenin mertebesi denir.

Tanım 2.12 : a ve b sonlu sayılar olmak üzere $\dfrac{1}{p_0(x)}, p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilirse (2.1) diferansiyel ifadesine regüler diferansiyel ifade , a veya b sonsuz ya da $\dfrac{1}{p_0(x)}, p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonlarının en az biri $[a,b]$ aralığında integrallenebilir değilse (2.1) diferansiyel ifadesine singüler diferansiyel ifade denir.

Tanım 2.13 :

$$U_v(y) = a_{v0}y(a) + a_{v1}y'(a) + ... + a_{v(n-1)}y^{(n-1)}(a)$$

$$+b_{v0}y(b) + b_{v1}y'(b) + ... + b_{v(n-1)}y^{(n-1)}(b) = 0 \ , \left(v = \overline{1,m}\right)$$

eşitliklerine $y \in C^{(n)}(a,b)$ fonksiyonu için konulan sınır koşulları adı verilir. Burada $C^{(n)}(a,b)$, (a,b) aralığında n. mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyonların uzayı ve a_{vi} ,b_{vi} $\left(v = \overline{1,m};\ i = \overline{1, n-1}\right)$ reel katsayılardır.

Tanım 2.14 : $D = \left\{y \in C^{(n)}[a,b] : U_v(y) = 0, v = \overline{1,m}\right\}$ kümesi üzerinde $Ly = l(y)$ eşitliği ile bir lineer operatör tanımlanır. Bu operatöre $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve $U_v(y) = 0$ sınır koşulları tarafından üretilen diferansiyel operatör denir.

Teorem 2.15 (Naimark, 1968) : $\dfrac{1}{p_0(x)}, p_1(x), ..., p_n(x)$ ve $f(x)$ fonksiyonları (a,b) aralığında ölçülebilir ve onun her bir $[\alpha,\beta]$ alt aralığında integrallenebilirse herhangi bir $x_0 \in (a,b)$ noktası ve $y_1, y_2, ..., y_{2n-1}$ keyfi sabitleri için

$$\left(p_0 y^{(n)}\right)^{(n)} + \left(p_1 y^{n-1}\right)^{n-1} + ... + p_n(x) = f(x)$$

denkleminin

$$y^{[k]}(x_0) = y_k \ , \ k = \overline{0, 2n-1}$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir tek $y(x)$ çözümü vardır. Burada $y^{[k]}(x)$ ifadesi $y(x)$ fonksiyonunun k. mertebeden quasi türevini gösterir ve

$$\begin{aligned} y^{[k]} &= \frac{d^k y}{dx^k} \ , k = \overline{1, n-1} \\ y^{[k]} &= p_0 \frac{d^n y}{dx^n} \\ y^{[n+k]} &= p_k \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} - \frac{dy^{[n+k-1]}}{dx} \ , \ k = \overline{1, m} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.16 : λ bir kompleks parametre olmak üzere

$$L := \begin{cases} l(y) = \lambda y \\ U_v(y) = 0 \ \ , \ v = \overline{1, m} \end{cases}$$

sınır değer probleminin sıfırdan farklı bir $y(x)$ çözümü varsa λ ' ya bu sınır değer probleminin özdeğeri , $y(x)$ e de λ 'ya karşılık gelen özfonksiyonu denir. L sınır değer problemine de $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve $U_v(y) = 0$ sınır koşulları tarafından üretilen özdeğer problemi denir.

Tanım 2.17 : Tanım 2.15'de $n = m$ olsun. $y_1(x,\lambda)$, $y_2(x,\lambda)$, ..., $y_n(x,\lambda)$ fonksiyonları

$$l(y) = \lambda y$$

denkleminin

$$y_i^{(j-1)}(a,\lambda) := \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ ise} \\ 1, & i = j \text{ ise} \end{cases} \ , i, j = \overline{1, n}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere;

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & ... & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & ... & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

determinantına L problemine karşılık gelen diferansiyel operatörün karakteristik fonksiyonu denir.

Tanım 2.18 : $(L-\lambda I)^{-1}$ ' in $L_2[a,b]$' nin yoğun bir alt kümesinde tanımlı ve sınırlı olduğu bir $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün bir regüler değeri denir. Tüm regüler değerlerinin kümesine de resolvent küme denir ve $\rho(L)$ ile gösterilir.

Tanım 2.19 : $(L-\lambda I)^{-1}$ operatörüne L operatörünün Resolvent Operatörü denir.

Tanım 2.20 : Kompleks düzlemde bir z_0 noktası ve bu noktanın en az bir $\delta > 0$ komşuluğunda tanımlı olan bir $f(z)$ fonksiyonu verilsin. Eğer,

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

limiti mevcut ve sonlu ise $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında türevlenebilirdir denir. Bu limitin değeri de $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi olarak adlandırılır, $f'(z_0)$ ile gösterilir.

Tanım 2. 21 : $f(z)$ fonksiyonunun kompleks düzlemin bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 2.22 : Kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik olan fonksiyona tam fonksiyon denir.

Teorem 2.23 (Liouville): Kompleks düzlemin tamamında sınırlı olan tam fonksiyon sabit fonksiyondur.

Tanım 2.24 : $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\delta > 0$ için , $f : U_\delta(z_o) \to \mathbb{C}$ herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer $f(z_0) = 0$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir sıfır yeri veya kısaca sıfırı denir.

Eğer $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ ...\ f^{(n-1)}(z_0) = 0$ fakat $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, ise z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun n katlı sıfırı diye adlandırılır.

Tanım 2.25 (Rouchē) : $f(z)$ ve $g(z)$ kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan analitik fonksiyonlar olsun. Eğer γ, $f(z)$ ve $g(z)$ nin hiçbir sıfır yerinden geçmeyen , B bölgesi içinde bulunan basit kapalı eğri ve $\forall z \in \gamma$ için $|g(z)| < |f(z)|$, ise bu durumda $f(z)$ ve $f(z)+g(z)$ fonksiyonlarının γ içindeki sıfırlarının sayısı katlılığı ile birlikte aynıdır.

Tanım 2.26 : $f(z)$ fonksiyonu tam fonksiyon ve

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

olmak üzere yeterince büyük r ler için

$$M_f(r) < \exp(r^{\mu}) \tag{2.2}$$

eşitsizliğini sağlayan $\mu > 0$ varsa $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir ve (2.2) eşitsizliğini sağlayan μ sayılarının infumumuna $f(z)$ nin mertebesi adı verilir ve ρ ile gösterilir.

Tanım 2.27 (Hadamard) : Mertebesi $\rho \in (0,1)$ olan her bir $f(z)$ tam fonksiyonu

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

şeklinde gösterilime sahiptir. Burada $m, f(z)$ fonksiyonunun orijindeki sıfırlarının katlılığı, $\{z_n\}_{n\geq 1}$ ise $f(z)$ nin diğer tüm sıfırlarının kümesidir.

Teorem 2.28 (Jdanovich, 1960) : $i = \overline{1,p}$ olmak üzere α_i ler $\alpha_0 > \alpha_1 > ... > \alpha_{p-1} > 0$ eşitsizliğini sağlayan gerçel sayılar, β_i ler ise herhangi kompleks sayılar olsun. Bu durumda $\beta_p \neq 0$ ise

$$e^{\alpha_0 \lambda} + \beta_1 e^{\alpha_1 \lambda} + ... + \beta_{p-1} e^{\alpha_{p-1} \lambda} + \beta_p = 0$$

denkleminin kökleri

$$\lambda_n = \frac{2n\pi i}{\alpha_0} + \psi(n) \quad (n = 0, \pm 1, ...)$$

şeklindedir. Burada $\psi(n)$ sınırlı kompleks değerli fonksiyondur.

Teorem 2.29 (Riemann-Lebesque) : Eğer $f(x)$, (a,b) aralığında mutlak integrallenebilir bir fonksiyon ise

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad : \quad = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\cos nx dx = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n \quad : \quad = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\sin nx dx = 0$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 2.30 (Mittang-Leffler Açılımı): Bir $f(z)$ fonksiyonunun kompleks düzlemdeki aykırılıkları mutlak değer büyüklüğüne göre sıralanmış, basit $a_1, a_{2,...}$ kutup yerleri ve bu noktalardaki rezidüleri sırasıyla $b_1, b_2, ...$ olsun. Eğer C_N hiçbir kutup yerinden geçmeyen , üzerinde $|f(z)| < M$ eşitsizliğinin gerçeklendiği R_N yarıçaplı çember ise ve $N \to \infty$ iken $R_N \to \infty$ oluyorsa;

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left[\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right]$$

yazılır.

3. ÇÖZÜMÜN İNTEGRAL GÖSTERİLİMİ VE ÖZELLİKLERİ

3.1 İntegral Denklemin Oluşturulması

$$l(y) := -y'' + \{q(x) + 2\lambda p(x)\} y \ , \ \ 0 < x < \pi$$

diferansiyel ifadesini ele alalım. Burada $q(x) = q_0(x) + \dfrac{A}{x^{\alpha}}$, $A \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$, $q_0(x) \in L_2[0,\pi]$ reel değerli bir fonksiyon, $p(x) \in W_2^1[0,\pi]$ ve λ spektral parametredir. $l(y)$ diferansiyel ifadesi

$$D(L) = \left\{ y(x) : y(x), y^{[1]}(x) \in AC[0,\pi], y^{[1]}(x) = y'(x) - u(x) y(x), \ l(y) \in L_2[0,\pi] \right\}$$

kümesinde

$$U(y) = y(0) = 0, \quad V(y) = y(\pi) = 0$$

sınır koşullarını ele alalım. Dolayısıyla

$$-y'' + \{q(x) + 2\lambda p(x)\} y = \lambda^2 y$$

veya $l(y) = \lambda^2 y$ diferansiyel denklemi bir singüler diferansiyel denklemdir. Ayrıca $y'(0)$ değeri mevcut değildir. Dolayısıyla, öncelikli olarak verilen diferansiyel operatörün bu değerlere benzer değerleri de tanımlı olacak şekilde yeni bir operatör tanımlamak gerekir. Bu operatör ise verilen operatörün self- adjoint genişlemesi olacak şekilde alınabilir.

$$l(y) := -y'' + \{q(x) + 2\lambda p(x)\} y = \lambda^2 y \tag{3.1.1}$$

diferansiyel denklemi ve

$$U(y) = y(0) = 0, \quad V(y) = y(\pi) = 0 \tag{3.1.2}$$

sınır koşullarının ürettiği L problemini ele alalım. $u(x) = A\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y(x) \\ y_2(x) &= (\Gamma_\alpha y)(x) = y^{[1]}(x) = y'(x) - u(x) y(x) \end{aligned}$$

alınırsa (3.1.1) denklemi

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1' - u(x)\,y_1 \\ -\lambda^2 y_1 &= y_2' + u(x)\,y_2 - \left\{q_0(x) + 2\lambda p(x) - u^2(x)\right\} y_1 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

denklem sistemine indirgenir.

(3.1.3) sisteminin matris gösterilimi

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -\lambda^2 + q_0 + 2\lambda p - u^2 & -u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılırsa $E = \begin{pmatrix} u & 1 \\ -\lambda^2 + q_0(x) + 2\lambda p(x) - u^2 & -u \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ olmak üzere $y' = Ey$ olur. E matrisinin elemanları toplanabilir olduklarından Naimark'ın (1967) çalışmasında $y' = Ey + f, \quad f \in L_1(0,\pi)$ sistemleri için başlangıç-değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili teorem gereği her $\eta \in [0,\pi]$ ve her $z = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{C}^2$ için (3.1.3) sisteminin $y_1(\eta) = z_1$, $y_2(\eta) = z_2$ başlangıç koşullarını sağlayan sadece bir tek çözümü vardır. Özel olarak $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = i\lambda$ alınabilir.

Tanım 3.1.1: (3.1.3) diferansiyel denklemler sisteminin $y_1(\eta) = z_1$, $y_2(\eta) = (\Gamma_\alpha y) = z_2$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümünün birinci bileşenine, (3.1.1) denkleminin aynı koşulları sağlayan çözümü denir.

(3.1.3) diferansiyel denklemleri sisteminde $A = 0$, $p(x) = 0$, $q(x) = 0$ alınırsa

$$\begin{cases} y_1' - y_2 = 0 \\ y_2' + \lambda^2 y_1 = 0 \end{cases}$$

lineer homojen diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin

$$y_1^0(0) = 1$$
$$y_2^0(0) = i\lambda$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$\begin{aligned} y_1^0(x) &= e^{i\lambda x} \\ y_2^0(x) &= i\lambda e^{i\lambda x} \end{aligned}$$

dir.

$A \neq 0$, $p(x) \neq 0$, $q(x) \neq 0$ için

$$\begin{aligned} y_1' - y_2 &= u(x)\, y_1 \\ y_2' + \lambda^2 y_1 &= -u(x)\, y_2 + \left\{ q_0(x) + 2\lambda p(x) - u^2(x) \right\} y_1 \end{aligned}$$

homojen olmayan lineer diferansiyel denklemleri sisteminin genel çözümünü bulmak için

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x \\ y_2 &= i\lambda e^{i\lambda x} = i\lambda \cos \lambda x - \lambda \sin \lambda x \end{aligned}$$

olduğu dikkate alınıp parametrelerin değişimi metodu uygulanırsa;

$$\begin{aligned} y_1(x) &= c_1(x) \cos \lambda x + i c_2(x) \sin \lambda x \\ y_2(x) &= -\lambda c_1(x) \sin \lambda x + i\lambda c_2(x) \cos \lambda x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= c_1'(x) \cos \lambda x + i c_2'(x) \sin \lambda x - \lambda c_1(x) \sin \lambda x + i\lambda c_2(x) \cos \lambda x \\ y_2'(x) &= -\lambda c_1'(x) \sin \lambda x + i\lambda c_2'(x) \cos \lambda x - \lambda^2 c_1(x) \cos \lambda x - i\lambda^2 c_2(x) \sin \lambda x \end{aligned}$$

şeklinde aranan çözümler için;

$$c_1(x) = \int_0^x u(t)\, y_1(t) \cos \lambda t dt + \frac{1}{\lambda} \int_0^x u(t)\, y_2(t) \sin \lambda t dt$$

$$-\frac{1}{\lambda} \int_0^x \{ q_0(t) + 2\lambda p(t) - u^2(t) \} y_1(t) \sin \lambda t dt$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{i\lambda} \int_0^x u(t)\, y_2(t) \cos \lambda t dt + \frac{1}{i} \int_0^x u(t)\, y_1(t) \sin \lambda t dt$$

$$+\frac{1}{i\lambda} \int_0^x \{ q_0(t) + 2\lambda p(t) - u^2(t) \} y_1(t) \cos \lambda t dt$$

elde edilir. $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ ifadeleri $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonlarının ifadelerinde yerlerine yazılırsa (3.1.3) sisteminin

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= i\lambda \end{aligned}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü için

$$\begin{aligned} y_1(x,\lambda) &= e^{i\lambda x} + \int_0^x u(t)\, y_1(t) \cos\lambda(x-t)\, dt - \frac{1}{\lambda}\int_0^x u(t)\, y_2(t) \sin\lambda(x-t)\, dt \\ &\quad + \frac{1}{\lambda}\int_0^x \left\{q_0(t) + 2\lambda p(t) - u^2(t)\right\} y_1(t) \sin\lambda(x-t)\, dt \qquad (3.1.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2(x,\lambda) &= i\lambda e^{i\lambda x} - \lambda\int_0^x u(t)\, y_1(t) \sin\lambda(x-t)\, dt - \int_0^x u(t)\, y_2(t) \cos\lambda(x-t)\, dt \\ &\quad + \int_0^x \left\{q_0(t) + 2\lambda p(t) - u^2(t)\right\} y_1(t) \cos\lambda(x-t)\, dt \qquad (3.1.5) \end{aligned}$$

integral denklemleri sistemi elde edilir.

Şimdi de (3.1.3) diferansiyel denklemleri sisteminin

$$\begin{aligned} y_1(0) &= 1 \\ y_2(0) &= i\lambda \end{aligned}$$

başlangıç koşullarını sağlayan her çözümünün

$$\begin{aligned} y_1(x,\lambda) &= a(x)\, e^{i\lambda x} + \int_{-x}^x K_{11}(x,t)\, e^{i\lambda t} dt \qquad (3.1.6) \\ y_2(x,\lambda) &= i\lambda a(x)\, e^{i\lambda x} + b(x)\, e^{i\lambda x} + \int_{-x}^x K_{21}(x,t)\, e^{i\lambda t} dt + i\lambda \int_{-x}^x K_{22}(x,t)\, e^{i\lambda t} dt \end{aligned}$$

şeklinde bir integral gösterilime sahip olduğunu ispatlayalım.

Burada $K_{11}(x,t)$, $K_{21}(x,t)$, $K_{22}(x,t)$, $a(x)$ ve $b(x)$ reel değerli fonksiyonlardır. İspat için (3.1.6) ifadeleri (3.1.4) ve (3.1.5) çözümlerinin ifadelerinde yerlerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} & y_1(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + \int_0^x u(t) \cos\lambda(x-t) \left[a(t)\, e^{i\lambda t} + \int_{-t}^t K_{11}(t,s)\, e^{i\lambda s} ds\right] dt \\ & -\frac{1}{\lambda}\int_0^x u(t) \sin\lambda(x-t) \left\{i\lambda a(t)\, e^{i\lambda t} + b(t)\, e^{i\lambda t} \right. \\ & \left. + \int_{-t}^t K_{21}(t,s)\, e^{i\lambda s} ds + i\lambda \int_{-t}^t K_{22}(t,s)\, e^{i\lambda s} ds \right\} dt \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^x \left\{q_0(t)+2\lambda p(t)-u^2(t)\right\}\sin\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}\left[a(t)\,e^{i\lambda t}+\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right]dt$$

$$y_1(x,\lambda)=a(x)\,e^{i\lambda x}+\int_{-x}^{x}K_{11}(x,t)\,e^{i\lambda t}dt=e^{i\lambda x}$$

$$+\int_0^x a(t)\,u(t)\cos\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$+\int_0^x u(t)\cos\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$-i\int_0^x a(t)\,u(t)\sin\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^x u(t)\,b(t)\sin\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^x u(t)\sin\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{21}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$-i\int_0^x u(t)\sin\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{22}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^x a(t)\,q_0(t)\sin\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^x q_0(t)\sin\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$+2\int_0^x a(t)\,p(t)\sin\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$+2\int_0^x p(t)\sin\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^x u^2(t)\,a(t)\sin\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^x u^2(t)\sin\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$=R_1+R_2+R_3+...+R_{12} \qquad (3.1.7)$$

$$y_2(x,\lambda)=i\lambda a(x)e^{i\lambda x}+b(x)e^{i\lambda x}+\int_{-x}^{x}K_{21}(x,t)e^{i\lambda t}dt$$

$$+i\lambda\int_{-x}^{x}K_{22}(x,t)e^{i\lambda t}dt=i\lambda e^{i\lambda x}$$

$$-\lambda\int_{0}^{x}u(t)\sin\lambda(x-t)\left(a(t)e^{i\lambda t}+\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$-\int_{0}^{x}u(t)\cos\lambda(x-t)\left\{i\lambda a(t)e^{i\lambda t}+b(t)e^{i\lambda t}\right.$$

$$\left.+\int_{-t}^{t}K_{21}(t,s)e^{i\lambda s}ds+i\lambda\int_{-t}^{t}K_{22}(t,s)e^{i\lambda s}ds\right\}dt$$

$$+\int_{0}^{x}\left\{q_0(t)+2\lambda p(t)-u^2(t)\right\}\cos\lambda(x-t)$$

$$.\left(a(t)e^{i\lambda t}+\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)e^{i\lambda s}ds\right)dt=i\lambda e^{i\lambda x}$$

$$-\lambda\int_{0}^{x}a(t)u(t)\sin\lambda(x-t)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\lambda\int_{0}^{x}u(t)\sin\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$-i\lambda\int_{0}^{x}a(t)u(t)\cos\lambda(x-t)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\int_{0}^{x}u(t)b(t)\cos\lambda(x-t)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\int_{0}^{x}u(t)\cos\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{21}(t,s)e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$-i\lambda\int_{0}^{x}u(t)\cos\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{22}(t,s)e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$+\int_{0}^{x}q_0(t)a(t)\cos\lambda(x-t)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\int_{0}^{x}q_0(t)\cos\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$+2\lambda\int_0^x a(t)\,p(t)\cos\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$
$$+2\lambda\int_0^x p(t)\cos\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right)dt$$
$$-\int_0^x u^2(t)\,a(t)\cos\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$
$$-\int_0^x u^2(t)\cos\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right)dt$$
$$= L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_{12} \tag{3.1.8}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa;

$$R_1 = \int_0^x a(t)\,u(t)\cos\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt = \frac{1}{2}e^{i\lambda x}\int_0^x a(t)\,u(t)\,dt$$
$$+\frac{1}{4}\int_{-x}^{x} a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$
$$R_2 = \int_0^x u(t)\cos\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right)dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x-t\backslash 2}^{x}K_{11}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t\backslash 2}^{x}K_{11}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$
$$R_3 = -i\int_0^x a(t)\,u(t)\sin\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$
$$= -\frac{1}{2}e^{i\lambda x}\int_0^x a(t)\,u(t)\,dt + \frac{1}{4}\int_{-x}^{x} a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$
$$R_4 = -\frac{1}{\lambda}\int_0^x u(t)\,b(t)\sin\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_0^{x+t\backslash 2}u(s)\,b(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$R_5 = -\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x u(t)\sin\lambda(x-t)\left(\int\limits_{-t}^{t} K_{21}(t,s)e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} e^{i\lambda t}\int\limits_0^x u(s)\int\limits_{t-x+s}^{x+t-s} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds dt$$

$$R_6 = -i\int\limits_0^x u(t)\sin\lambda(x-t)\left(\int\limits_{-t}^{t} K_{22}(t,s)e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x-t\backslash 2}^{x} K_{22}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x+t\backslash 2}^{x} K_{22}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$R_7 = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x a(t)\,q_0(t)\sin\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_0^{x+t\backslash 2} a(s)\,q_0(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$R_8 = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x q_0(t)\sin\lambda(x-t)\left(\int\limits_{-t}^{t} K_{11}(t,s)e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x} e^{i\lambda t}\int\limits_0^x q_0(s)\int\limits_{t-x+s}^{x+t-s} K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds dt$$

$$R_9 = 2\int\limits_0^x a(t)\,p(t)\sin\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$= -ie^{i\lambda x}\int\limits_0^x a(t)\,p(t)\,dt + \frac{i}{2}\int\limits_{-x}^{x} a\left(\frac{x+t}{2}\right)p\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$R_{10} = 2\int\limits_0^x p(t)\sin\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}\left(\int\limits_{-t}^{t} K_{11}(t,s)e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$= -i\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x-t\backslash 2}^{x} K_{11}(s,t-x+s)\,p(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+i\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x+t\backslash 2}^{x} K_{11}(s,t+x-s)\,p(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$R_{11}=-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x u^2(t)\,a(t)\sin\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_0^{x+t\backslash 2} u^2(s)\,a(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$R_{12}=-\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^x u^2(t)\sin\lambda(x-t)\left(\int\limits_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}e^{i\lambda t}\int\limits_0^x u^2(s)\int\limits_{t-x+s}^{x+t-s}K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds dt$$

$$L_1=-\lambda\int\limits_0^x a(t)\,u(t)\sin\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$=\frac{i\lambda}{2}e^{i\lambda x}\int\limits_0^x a(t)\,u(t)\,dt$$

$$-\frac{i\lambda}{4}\int\limits_{-x}^{x}a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$L_2=-\lambda\int\limits_0^x u(t)\sin\lambda(x-t)\left(\int\limits_{-t}^{t}K_{11}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$=\frac{i\lambda}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x-t\backslash 2}^{x}K_{11}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{i\lambda}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x+t\backslash 2}^{x}K_{11}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$L_3=-i\lambda\int\limits_0^x a(t)\,u(t)\cos\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$=-\frac{i\lambda}{2}e^{i\lambda x}\int\limits_0^x a(t)\,u(t)\,dt$$

$$-\frac{i\lambda}{4}\int\limits_{-x}^{x}a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$L_4=-\int\limits_0^x u(t)\,b(t)\cos\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$= -\frac{1}{2}e^{i\lambda x}\int_0^x b(t)\,u(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{4}\int_{-x}^x b\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$L_5 = -\int_0^x u(t)\cos\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^t K_{21}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-x}^x\left(\int_{x-t\backslash 2}^x K_{21}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^x\left(\int_{x+t\backslash 2}^x K_{21}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$L_6 = -i\lambda\int_0^x u(t)\cos\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^t K_{22}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$= -\frac{i\lambda}{2}\int_{-x}^x\left(\int_{x-t\backslash 2}^x K_{22}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{i\lambda}{2}\int_{-x}^x\left(\int_{x+t\backslash 2}^x K_{22}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$L_7 = \int_0^x q_0(t)\,a(t)\cos\lambda(x-t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$= \frac{1}{2}e^{i\lambda x}\int_0^x q_0(t)\,a(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-x}^x q_0\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$L_8 = \int_0^x q_0(t)\cos\lambda(x-t)\left(\int_{-t}^t K_{11}(t,s)\,e^{i\lambda s}ds\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-x}^x\left(\int_{x-t\backslash 2}^x K_{11}(s,t-x+s)\,q_0(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^x\left(\int_{x+t\backslash 2}^x K_{11}(s,t+x-s)\,q_0(s)\,ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$L_9 = 2\lambda \int_0^x a(t)\, p(t) \cos\lambda(x-t)\, e^{i\lambda t} dt = \lambda e^{i\lambda x} \int_0^x p(t)\, a(t)\, dt$$

$$+\frac{\lambda}{2} \int_{-x}^{x} p\left(\frac{x+t}{2}\right) a\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{i\lambda t} dt$$

$$L_{10} = 2\lambda \int_0^x p(t) \cos\lambda(x-t) \left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\, e^{i\lambda s} ds \right) dt$$

$$= \lambda \int_{-x}^{x} \left(\int_{x-t\backslash 2}^{x} K_{11}(s, t-x+s)\, p(s)\, ds \right) e^{i\lambda t} dt$$

$$+\lambda \int_{-x}^{x} \left(\int_{x+t\backslash 2}^{x} K_{11}(s, t+x-s)\, p(s)\, ds \right) e^{i\lambda t} dt$$

$$L_{11} = -\int_0^x u^2(t)\, a(t) \cos\lambda(x-t)\, e^{i\lambda t} dt$$

$$= -\frac{1}{2} e^{i\lambda x} \int_0^x u^2(t)\, a(t)\, dt$$

$$-\frac{1}{4} \int_{-x}^{x} u^2\left(\frac{x+t}{2}\right) a\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{i\lambda t} dt$$

$$L_{12} = -\int_0^x u^2(t) \cos\lambda(x-t) \left(\int_{-t}^{t} K_{11}(t,s)\, e^{i\lambda s} ds \right) dt$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_{x-t\backslash 2}^{x} K_{11}(s, t-x+s)\, u^2(s)\, ds \right) e^{i\lambda t} dt$$

$$-\frac{1}{2} \int_{-x}^{x} \left(\int_{x+t\backslash 2}^{x} K_{11}(s, t+x-s)\, u^2(s)\, ds \right) e^{i\lambda t} dt$$

şeklindedir. Bu şekilde elde edilen ifadeler yerlerine yazılırsa;

$$a(x)\, e^{i\lambda x} + \int_{-x}^{x} K_{11}(x,t)\, e^{i\lambda t} dt = e^{i\lambda x} + \frac{1}{2} e^{i\lambda x} \int_0^x a(t)\, u(t)\, dt$$

$$+\frac{1}{4} \int_{-x}^{x} a\left(\frac{x+t}{2}\right) u\left(\frac{x+t}{2}\right) e^{i\lambda t} dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x-t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t-x+s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x+t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t+x-s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}e^{i\lambda x}\int\limits_{0}^{x}a\left(t\right)u\left(t\right)dt+\frac{1}{4}\int\limits_{-x}^{x}a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{0}^{x+t\backslash 2}u\left(s\right)b\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}e^{i\lambda t}\int\limits_{0}^{x}u\left(s\right)\int\limits_{t-x+s}^{x+t-s}K_{21}\left(s,\xi\right)d\xi dsdt$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x-t\backslash 2}^{x}K_{22}\left(s,t-x+s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x+t\backslash 2}^{x}K_{22}\left(s,t+x-s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{0}^{x+t\backslash 2}a\left(s\right)q_{0}\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}e^{i\lambda t}\int\limits_{0}^{x}q_{0}\left(s\right)\int\limits_{t-x+s}^{x+t-s}K_{11}\left(s,\xi\right)d\xi dsdt$$

$$-ie^{i\lambda x}\int\limits_{0}^{x}a\left(t\right)p\left(t\right)dt+\frac{i}{2}\int\limits_{-x}^{x}a\left(\frac{x+t}{2}\right)p\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-i\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x-t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t-x+s\right)p\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+i\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t+x-s\right)p\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{x+t\backslash 2}u^{2}\left(s\right)a\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}e^{i\lambda t}\int_{0}^{x}u^{2}\left(s\right)\int_{t-x+s}^{x+t-s}K_{11}\left(s,\xi\right)d\xi dsdt$$

$$i\lambda a\left(x\right)e^{i\lambda x}+b\left(x\right)e^{i\lambda x}+\int_{-x}^{x}K_{21}\left(x,t\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+i\lambda\int_{-x}^{x}K_{22}\left(x,t\right)e^{i\lambda t}dt=i\lambda e^{i\lambda x}+\frac{i\lambda}{2}e^{i\lambda x}\int_{0}^{x}a\left(t\right)u\left(t\right)dt$$

$$-\frac{i\lambda}{4}\int_{-x}^{x}a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{i\lambda}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x-t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t-x+s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{i\lambda}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t+x-s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{i\lambda}{2}e^{i\lambda x}\int_{0}^{x}a\left(t\right)u\left(t\right)dt-\frac{i\lambda}{4}\int_{-x}^{x}a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}e^{i\lambda x}\int_{0}^{x}b\left(t\right)u\left(t\right)dt-\frac{1}{4}\int_{-x}^{x}b\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x-t\backslash 2}^{x}K_{21}\left(s,t-x+s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t\backslash 2}^{x}K_{21}\left(s,t+x-s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{i\lambda}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x-t\backslash 2}^{x}K_{22}\left(s,t-x+s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{i\lambda}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t\backslash 2}^{x}K_{22}\left(s,t+x-s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}e^{i\lambda x}\int_{0}^{x}q_{0}\left(t\right)a\left(t\right)dt+\frac{1}{4}\int_{-x}^{x}q_{0}\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x-t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t-x+s\right)q_{0}\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t+x-s\right)q_{0}\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\lambda e^{i\lambda x}\int_{0}^{x}p\left(t\right)a\left(t\right)dt+\frac{\lambda}{2}\int_{-x}^{x}p\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\lambda\int_{-x}^{x}\left(\int_{x-t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t-x+s\right)p\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\lambda\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t+x-s\right)p\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}e^{i\lambda x}\int_{0}^{x}u^{2}\left(t\right)a\left(t\right)dt-\frac{1}{4}\int_{-x}^{x}u^{2}\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x-t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t-x+s\right)u^{2}\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t+x-s\right)u^{2}\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$a\left(x\right)=1-i\int\limits_{0}^{x}p\left(t\right)a\left(t\right)dt$$

$$\int\limits_{-x}^{x}K_{11}\left(x,t\right)e^{i\lambda t}dt=\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x-t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t-x+s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x+t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t+x-s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{0}^{x+t\backslash 2}u\left(s\right)b\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\int\limits_{-x}^{x}\int\limits_{0}^{x}u\left(s\right)\left(\int\limits_{t-x+s}^{x+t-s}K_{21}\left(s,\xi\right)d\xi\right)e^{i\lambda t}dsdt$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x-t\backslash 2}^{x}K_{22}\left(s,t-x+s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x+t\backslash 2}^{x}K_{22}\left(s,t+x-s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{0}^{x+t\backslash 2}a\left(s\right)q_{0}\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\int\limits_{0}^{x}q_{0}\left(s\right)\left(\int\limits_{t-x+s}^{x+t-s}K_{11}\left(s,\xi\right)d\xi\right)e^{i\lambda t}dsdt$$

$$+\frac{i}{2}\int\limits_{-x}^{x}a\left(\frac{x+t}{2}\right)p\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-i\int\limits_{-x}^{x}\left(\int\limits_{x-t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t-x+s\right)p\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+i\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t+x-s\right)p\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{0}^{x+t\backslash 2}u^{2}\left(s\right)a\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{0}^{x}u^{2}\left(s\right)\left(\int_{t-x+s}^{x+t-s}K_{11}\left(s,\xi\right)d\xi\right)e^{i\lambda t}dsdt$$

$$b\left(x\right)=-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}b\left(t\right)u\left(t\right)dt+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}q_{0}\left(t\right)a\left(t\right)dt-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}u^{2}\left(t\right)a\left(t\right)dt$$

$$\int_{-x}^{x}K_{21}\left(x,t\right)e^{i\lambda t}dt=-\frac{1}{4}\int_{-x}^{x}b\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-x}^{x}q_{0}\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{4}\int_{-x}^{x}u^{2}\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x-t\backslash 2}^{x}K_{21}\left(s,t-x+s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t\backslash 2}^{x}K_{21}\left(s,t+x-s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x-t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t-x+s\right)q_{0}\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t+x-s\right)q_{0}\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x-t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t-x+s\right)u^{2}\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t\backslash 2}^{x}K_{11}\left(s,t+x-s\right)u^{2}\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$\int_{-x}^{x}K_{22}\left(x,t\right)e^{i\lambda t}dt=-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{i}{2}\int_{-x}^{x}p\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x-t/2}^{x}K_{11}\left(s,t-x+s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t/2}^{x}K_{11}\left(s,t+x-s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x-t/2}^{x}K_{22}\left(s,t-x+s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t/2}^{x}K_{22}\left(s,t+x-s\right)u\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-i\int_{-x}^{x}\left(\int_{x-t/2}^{x}K_{11}\left(s,t-x+s\right)p\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$-i\int_{-x}^{x}\left(\int_{x+t/2}^{x}K_{11}\left(s,t+x-s\right)p\left(s\right)ds\right)e^{i\lambda t}dt$$

$$a(x) = 1 - i\int\limits_0^x p(t)\,a(t)\,dt$$

$$b(x) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x \left[b(t)\,u(t) - q_0(t)\,a(t) + u^2(t)\,a(t)\right]dt$$

$$K_{11}(x,t) = \frac{1}{2}a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right) + b\left(\frac{x+t}{2}\right)$$

$$+\frac{i}{2}a\left(\frac{x+t}{2}\right)p\left(\frac{x+t}{2}\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t/2}^{x} K_{11}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{11}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^x u(s)\int\limits_{t-x+s}^{x+t-s} K_{21}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t/2}^{x} K_{22}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{22}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^x q_0(s)\int\limits_{t-x+s}^{x+t-s} K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds - i\int\limits_{x-t/2}^{x} K_{11}(s,t-x+s)\,p(s)\,ds$$

$$+i\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{11}(s,t+x-s)\,p(s)\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_0^x u^2(s)\int\limits_{t-x+s}^{x+t-s} K_{11}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$K_{21}(x,t) = -\frac{1}{4}b\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right) + \frac{1}{4}q_0\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{4}u^2\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right) - \frac{1}{2}\int\limits_{x-t/2}^{x} K_{21}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{21}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t/2}^{x} K_{11}(s,t-x+s)\,q_0(s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{11}(s,t+x-s)\,q_0(s)\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_{x-t/2}^{x} K_{11}(s,t-x+s)\,u^2(s)\,ds$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{11}(s,t+x-s)\,u^2(s)\,ds$$

$$K_{22}(x,t) = -\frac{1}{2}a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right) - \frac{i}{2}p\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t/2}^{x} K_{11}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{11}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t/2}^{x} K_{22}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds - \frac{1}{2}\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{22}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds$$

$$-i\int\limits_{x-t/2}^{x} K_{11}(s,t-x+s)\,p(s)\,ds - i\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{11}(s,t+x-s)\,p(s)\,ds$$

ifadelerini ve $b(x)$ fonksiyonu için de

$$b'(x) + \frac{1}{2}u(x)\,b(x) = -\frac{1}{2}\left[u^2(x) - q_0(x)\right]a(x)$$

lineer toplanabilir katsayılı diferansiyel denklemini elde ederiz. Buradan da

$$b(x) = -\frac{1}{2}\int\limits_0^x \left\{u^2(t) - q_0(t)\right\} e^{-i\int\limits_0^t p(\mu)d\mu - \frac{1}{2}\int\limits_t^x u(\mu)d\mu} dt$$

bulunur.

3.2 İntegral Denklemleri Sisteminin Çözümünün Varlığı Ve Özellikleri

Bu bölümde alınan integral denklemlerin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilecektir. Bunun için $K_{11}(x,t)$, $K_{21}(x,t)$ ve $K_{22}(x,t)$ fonksiyonlarının ifadelerine ardışık yaklaşımlar yöntemini uygulayalım.

$$K_{11}^{(0)}(x,t) = \frac{1}{2}a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right) + b\left(\frac{x+t}{2}\right)$$

$$+\frac{i}{2}a\left(\frac{x+t}{2}\right)p\left(\frac{x+t}{2}\right)$$

$$K_{21}^{(0)}(x,t) = -\frac{1}{4}b\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right) + \frac{1}{4}q_0\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{4}u^2\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)$$

$$K_{22}^{(0)}(x,t) = -\frac{1}{2}a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right) - \frac{i}{2}p\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)$$

$$K_{11}^{(n)}(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t/2}^{x} K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{x+t/2}^{x} K_{11}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_{0}^{x} u(s)\int_{t-x+s}^{x+t-s} K_{21}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$-\frac{1}{2}\int_{x-t/2}^{x} K_{22}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_{x+t/2}^{x} K_{22}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{x} q_0(s)\int_{t-x+s}^{x+t-s} K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds - i\int_{x-t/2}^{x} K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,p(s)\,ds$$

$$+i\int_{x+t/2}^{x} K_{11}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,p(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_{0}^{x} u^2(s)\int_{t-x+s}^{x+t-s} K_{11}^{(n-1)}(s,\xi)\,d\xi ds$$

$$K_{21}^{(n)}(x,t) = -\frac{1}{2}\int_{x-t/2}^{x} K_{21}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{21}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds+\frac{1}{2}\int\limits_{x-t/2}^{x} K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,q_0(s)\,ds$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{11}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,q_0(s)\,ds-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t/2}^{x} K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,u^2(s)\,ds$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{11}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,u^2(s)\,ds$$

$$K_{22}^{(n)}(x,t)=\frac{1}{2}\int\limits_{x-t/2}^{x} K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds-\frac{1}{2}\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{11}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x-t/2}^{x} K_{22}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,u(s)\,ds-\frac{1}{2}\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{22}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,u(s)\,ds$$

$$-i\int\limits_{x-t/2}^{x} K_{11}^{(n-1)}(s,t-x+s)\,p(s)\,ds-i\int\limits_{x+t/2}^{x} K_{11}^{(n-1)}(s,t+x-s)\,p(s)\,ds$$

ve

$$\sigma(x)=\int\limits_{0}^{x}\{|u(\xi)+p(\xi)|\,a(\xi)\}$$
$$+\frac{1}{2}\{|u(\xi)\,b(\xi)|+2\,|b(\xi)|+[u^2(\xi)+|q_0(\xi)|]\,a(\xi)\}\,(x-\xi)\,d\xi$$

olsun. Bu denklemlerin her birinin mutlak değeri alınıp, $[-x,x]$ aralığında t'ye göre integrallenirlerse

$$\int\limits_{-x}^{x}\left|K_{11}^{(0)}(x,t)\right|dt\leq\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left|a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|dt+\frac{1}{2}\int\limits_{-x}^{x}\left|a\left(\frac{x+t}{2}\right)p\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|dt$$
$$+\int\limits_{-x}^{x}\left|b\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|dt$$

$$\int\limits_{-x}^{x}\left|K_{11}^{(0)}(x,t)\right|dt\leq\int\limits_{0}^{x}|a(\xi)\,u(\xi)|\,d\xi+\int\limits_{0}^{x}|a(\xi)\,p(\xi)|\,d\xi$$
$$+2\int\limits_{0}^{x}|b(\xi)|\,d\xi$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{11}^{(0)}(x,t)\right|dt \le \int_{0}^{x}\{|u(\xi)|+|p(\xi)|\}|a(\xi)|$$

$$+\frac{1}{2}\{|u(\xi)b(\xi)|+2|b(\xi)|+[u^{2}(\xi)+|q_{0}(\xi)|]a(\xi)\}(x-\xi)d\xi$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{11}^{(0)}(x,t)\right|dt \le \sigma(x)$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{21}^{(0)}(x,t)\right|dt \le \frac{1}{4}\int_{-x}^{x}\left|b\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|dt+\frac{1}{4}\int_{-x}^{x}\left|q_{0}\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|dt$$

$$+\frac{1}{4}\int_{-x}^{x}\left|u^{2}\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|dt$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{21}^{(0)}(x,t)\right|dt \le \frac{1}{2}\int_{0}^{x}|b(\xi)u(\xi)|d\xi+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}|q_{0}(\xi)a(\xi)|d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}|u^{2}(\xi)a(\xi)|d\xi$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{21}^{(0)}(x,t)\right|dt \le \frac{1}{2}\int_{0}^{x}\{|b(\xi)u(\xi)|+2|b(\xi)|+[|q_{0}(\xi)|+u^{2}(\xi)]|a(\xi)|\}(x-\xi)d\xi$$

$$+\int_{0}^{x}[|u(\xi)|+|p(\xi)|]|a(\xi)|d\xi$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{21}^{(0)}(x,t)\right|dt \le \sigma(x)$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{22}^{(0)}(x,t)\right|dt \le \frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left|a\left(\frac{x+t}{2}\right)u\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|dt+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\left|p\left(\frac{x+t}{2}\right)a\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|dt$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{22}^{(0)}(x,t)\right|dt \le \int_{0}^{x}\{|u(\xi)|+|p(\xi)|\}a(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{x}\{|b(\xi)u(\xi)|+2|b(\xi)|+[|q_{0}(\xi)|+u^{2}(\xi)]|a(\xi)|\}(x-\xi)d\xi$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{22}^{(0)}(x,t)\right|dt \le \sigma(x)$$

eşitsizlikleri elde edilir. $n=1$ için

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{11}^{(1)}(x,t)\right|dt \leq \frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{11}^{(0)}(s,t-x+s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{11}^{(0)}(s,t+x-s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{0}^{x}|u(s)|\int_{t-x+s}^{x+t-s}\left|K_{21}^{(0)}(s,\xi)\,d\xi\right|dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{22}^{(0)}(s,t-x+s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{22}^{(0)}(s,t+x-s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{0}^{x}|q_0(s)|\int_{t-x+s}^{x+t-s}\left|K_{11}^{(0)}(s,\xi)\,d\xi\right|dsdt$$

$$+\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{11}^{(0)}(s,t-x+s)\right||p(s)|\,dsdt$$

$$+\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{11}^{(0)}(s,t+x-s)\right||p(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{0}^{x}|u^2(s)|\int_{t-x+s}^{x+t-s}\left|K_{11}^{(0)}(s,\xi)\,d\xi\right|dsdt$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{11}^{(1)}(x,t)\right|dt \leq \frac{\sigma(x)^2}{2}$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{21}^{(1)}(x,t)\right|dt \leq \frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{21}^{(0)}(s,t-x+s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{21}^{(0)}(s,t+x-s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{11}^{(0)}\left(s,t-x+s\right)\right|\left|q_0\left(s\right)\right|dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{11}^{(0)}\left(s,t+x-s\right)\right|\left|q_0\left(s\right)\right|dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{11}^{(0)}\left(s,t-x+s\right)\right|\left|u^2\left(s\right)\right|dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{11}^{(0)}\left(s,t+x-s\right)\right|\left|u^2\left(s\right)\right|dsdt$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{21}^{(1)}\left(x,t\right)\right|dt\leq\frac{\sigma\left(x\right)^2}{2}$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{22}^{(1)}\left(x,t\right)\right|dt\leq\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{11}^{(0)}\left(s,t-x+s\right)\right|\left|u\left(s\right)\right|dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{11}^{(0)}\left(s,t+x-s\right)\right|\left|u\left(s\right)\right|dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{22}^{(0)}\left(s,t-x+s\right)\right|\left|u\left(s\right)\right|dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{22}^{(0)}\left(s,t+x-s\right)\right|\left|u\left(s\right)\right|dsdt$$

$$+\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{11}^{(0)}\left(s,t-x+s\right)\right|\left|p\left(s\right)\right|dsdt$$

$$+\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{11}^{(0)}\left(s,t+x-s\right)\right|\left|p\left(s\right)\right|dsdt$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{22}^{(1)}\left(x,t\right)\right|dt\leq\frac{\sigma\left(x\right)^2}{2}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece tümevarım yöntemi kullanılırsa;

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{ij}^{(n)}(x,t)\right|dt\leq\frac{\sigma(x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$n=0,1$ için eşitsizlik sağlanmaktadır. $n=m-1$ için eşitsizliğin doğruluğunu kabul edip $n=m$ için eşitsizliğin sağlandığını gösterelim.

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{11}^{(m)}(x,t)\right|dt\leq\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{11}^{(m-1)}(s,t-x+s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{11}^{(m-1)}(s,t+x-s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{0}^{x}|u(s)|\int_{t-x+s}^{x+t-s}\left|K_{21}^{(m-1)}(s,\xi)\,d\xi\right|dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{22}^{(m-1)}(s,t-x+s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{22}^{(m-1)}(s,t+x-s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{0}^{x}|q_0(s)|\int_{t-x+s}^{x+t-s}\left|K_{11}^{(m-1)}(s,\xi)\,d\xi\right|dsdt$$

$$+\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{11}^{(m-1)}(s,t-x+s)\right||p(s)|\,dsdt$$

$$+\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{11}^{(m-1)}(s,t+x-s)\right||p(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{0}^{x}\left|u^2(s)\right|\int_{t-x+s}^{x+t-s}\left|K_{11}^{(m-1)}(s,\xi)\,d\xi\right|dsdt$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{11}^{(m)}(x,t)\right|dt\leq\frac{\sigma(x)^{m+1}}{(m+1)!}$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{21}^{(m)}(x,t)\right|dt \leq \frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{21}^{(m-1)}(s,t-x+s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{21}^{(m-1)}(s,t+x-s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{11}^{(m-1)}(s,t-x+s)\right||q_0(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{11}^{(m-1)}(s,t+x-s)\right||q_0(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{11}^{(m-1)}(s,t-x+s)\right|\left|u^2(s)\right|dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{11}^{(m-1)}(s,t+x-s)\right|\left|u^2(s)\right|dsdt$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{21}^{(m)}(x,t)\right|dt \leq \frac{\sigma(x)^{m+1}}{(m+1)!}$$

$$\int_{-x}^{x}K_{22}^{(m)}(x,t) = \frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{11}^{(m-1)}(s,t-x+s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{11}^{(m-1)}(s,t+x-s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{22}^{(m-1)}(s,t-x+s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\frac{1}{2}\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{22}^{(m-1)}(s,t+x-s)\right||u(s)|\,dsdt$$

$$+\int_{-x}^{x}\int_{x-t/2}^{x}\left|K_{11}^{(m-1)}(s,t-x+s)\right||p(s)|\,dsdt$$

$$+\int_{-x}^{x}\int_{x+t/2}^{x}\left|K_{11}^{(m-1)}(s,t+x-s)\right||p(s)|\,dsdt$$

$$\int_{-x}^{x}\left|K_{22}^{(m)}(x,t)\right|dt\leq\frac{\sigma(x)^{m+1}}{(m+1)!}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece

$$\sigma(x)=\int_{0}^{x}\{|u(\xi)+p(\xi)|\,a(\xi)\}+\frac{1}{2}\{|u(\xi)\,b(\xi)|+u^{2}(\xi)+|q_{0}(\xi)|\}(x-\xi)\,d\xi$$

olmak üzere $\forall i,j=1,2$ için

$$\int_{-x}^{x}|K_{ij}(x,t)|\,dt\leq e^{\sigma(x)}-1 \tag{3.2.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

Dolayısıyla aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu.

Teorem 3.2.1: (3.1.3) denklemleri sisteminin

$$\begin{aligned} y_{1}(0) &= 1 \\ y_{2}(0) &= i\lambda \end{aligned}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü için aşağıdaki gösterilim mevcuttur.

$$y_{1}(x,\lambda)=a(x)\,e^{i\lambda x}+\int_{-x}^{x}K_{11}(x,t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$y_{2}(x,\lambda)=i\lambda a(x)\,e^{i\lambda x}+b(x)\,e^{i\lambda x}+\int_{-x}^{x}K_{21}(x,t)\,e^{i\lambda t}dt+i\lambda\int_{-x}^{x}K_{22}(x,t)\,e^{i\lambda t}dt$$

Burada

$$a(x)=e^{-i\int_{0}^{x}p(t)dt}$$

$$b(x)=-\frac{1}{2}\int_{0}^{x}\{u^{2}(t)-q_{0}(t)\}\,e^{-i\int_{0}^{t}p(\mu)d\mu-\frac{1}{2}\int_{t}^{x}u(\mu)d\mu}dt$$

şeklindedir. Ayrıca $K_{11}(x,t)$, $K_{21}(x,t)$ ve $K_{22}(x,t)$ fonksiyonları için yukarıda elde edilen integral denklemlerden $t = x$ durumu için aşağıdaki ifadeleri kolaylıkla elde ederiz:

$$K_{11}(x,x) = \frac{1}{2} e^{-i\int\limits_0^x p(t)dt} \int\limits_0^x \left\{ [u(s) + ip(s)]\, a(s) + \frac{1}{2}\int\limits_0^t [q_0(s) + ip(s)\, u(s)]\, a(s)\, ds \right\}'$$

$$.e^{-i\int\limits_0^t p(\mu)d\mu} dt$$

$$K_{22}(x,x) = -\frac{1}{2}[u(x) + ip(x)\, a(x)] + b(x) - \frac{1}{2}\int\limits_0^x [q_0(s) + ip(s)\, u(s)]\, a(s)\, ds$$

$$+i\int\limits_0^x p(s)\, K_{11}(s,s)\, ds$$

$$K_{21}(x,x) = \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int\limits_0^x u(t)\, dt \right\} \frac{1}{2}\int\limits_0^x (b'(t) - [u^2(t) - q_0(t)])$$

$$.K_{11}(t,t) \exp\left\{ \frac{1}{2}\int\limits_0^t u(s)\, ds \right\} dt$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} K_{11}^{[1]}(x,t) + \dfrac{\partial}{\partial t} K_{22}(x,t) = K_{21}(x,t) \\ K_{11}(x,x) - K_{22}(x,x) = -a'(x) + b(x) + a(x)\, u(x) \\ K_{11}(x,-x) - K_{22}(x,-x) = 0 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial x}K_{21}^{[1]}(x,t)-\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}K_{22}^{[1]}(x,t)\right]-\left(q_0(x)-u^2(x)\right)K_{11}(x,t) \\
\qquad -2ip(x)\dfrac{\partial}{\partial t}K_{11}(x,t)=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}K_{11}(x,t) \\
K_{21}(x,x)+\left.\dfrac{\partial}{\partial x}K_{22}(x,t)\right|_{t=x}+u(x)K_{22}(x,x)+2ip(x)K_{11}(x,x) \\
\qquad =-\left.\dfrac{\partial}{\partial t}K_{11}(x,t)\right|_{t=x} \\
K_{21}(x,-x)-\left.\dfrac{\partial}{\partial x}K_{22}(x,t)\right|_{t=-x}-u(x)K_{22}(x,-x)-2ip(x)K_{11}(x,-x) \\
\qquad =\left.\dfrac{\partial}{\partial t}K_{11}(x,t)\right|_{t=-x}
\end{cases}
$$

2. mertebeden kısmi türevli hiperbolik tip diferansiyel denklemler sistemi sağlanır.

(3.2.1) eşitsizliklerinden alırız ki; $K_{ij}(x,.)\in L_1(-x,x)$ dir. Bu durumda $L_1(-x,x)$ uzayının yapısı gereği

$$\Psi_{ij}(x)=\int_0^x K_{ij}(x,t)\,dt$$

fonksiyonu $(-x,x)$ aralığında mutlak süreklidir. $\Psi_{ij}(x)$ fonksiyonu $(0,x)$ aralığında mutlak sürekli ve $\Psi_{ij}(0)=0$ olduğundan

$$\Psi_{ij}(x)=\int_0^x \Psi'_{ij}(s)\,ds$$

şeklinde yazılabilir.

$$\Psi'_{ij}(x)=K_{ij}(x,x)+K_{ij}(x,0)+\int_0^x D_xK_{ij}(x,t)\,dt$$

olduğundan

$$\int_0^x K_{ij}(x,t)\,dt=\int_0^x K_{ij}(t,t)\,dt+\int_0^x K_{ij}(t,0)\,dt+\int_0^x\int_0^t D_tK_{ij}(t,s)\,dsdt$$

$$=\int_0^x K_{ij}(t,t)\,dt+\int_0^x K_{ij}(t,0)\,dt+\int_0^x (x-t)\,D_xK_{ij}(x,t)\,dt$$

veya

$$\int_0^x (x-t)\,D_xK_{ij}(x,t)\,dt=\int_0^x K_{ij}(x,t)\,dt-\int_0^x K_{ij}(t,t)\,dt-\int_0^x K_{ij}(t,0)\,dt$$

eşitliği elde edilir. Buradan da (3.2.1) eşitsizliğinden yararlanarak

$$\int_{-x}^{x} (x-t) D_x K_{ij}(x,t)\, dt$$

integrali için gerekli değerlendirmeyi alabiliriz. Dolayısıyla $(x-t) D_x K_{ij}(x,t)$ fonksiyonlarının $L_1(-x,x)$ uzayına ait olduğunu elde etmiş oluruz.

Şimdi ise teorem (3.2.1) ile ispatlanan $y_1(x,\lambda)$ ve $y_2(x,\lambda)$ fonksiyonları için integral gösterimlerinin çekirdek fonksiyonları olan $K_{11}(x,t), K_{21}(x,t)$ ve $K_{22}(x,t)$ fonksiyonlarının bazı özelliklerini öğrenelim. Bunun için (3.1.3) sisteminde (3.1.7) integral gösterimleri yerlerine yazılıp gerekli kısmi integrasyonlar yapıldıktan sonra;

$$a'(x) e^{i\lambda x} + i\lambda a(x) e^{i\lambda x} + \int_{-x}^{x} \frac{\partial}{\partial x} K_{11}(x,t) e^{i\lambda t} dt + K_{11}(x,x) e^{i\lambda x} + K_{11}(x,-x) e^{-i\lambda x} -$$
$$i\lambda a(x) e^{i\lambda x} - b(x) e^{i\lambda x} - \int_{-x}^{x} K_{21}(x,t) e^{i\lambda t} dt - i\lambda \int_{-x}^{x} K_{22}(x,t) e^{i\lambda t} dt = a(x) u(x) e^{i\lambda x} +$$
$$u(x) \int_{-x}^{x} K_{11}(x,t) e^{i\lambda t} dt$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial}{\partial x} K_{11}(x,t) + \dfrac{\partial}{\partial t} K_{22}(x,t) - u(x) K_{11}(x,t) = K_{21}(x,t) \\ \\ K_{11}(x,x) - K_{22}(x,x) = -a'(x) + b(x) + a(x) u(x) \\ \\ K_{11}(x,-x) - K_{22}(x,-x) = 0 \end{array} \right\}$$

$$i\lambda a'(x) e^{i\lambda x} - \lambda^2 a(x) e^{i\lambda x} + b'(x) e^{i\lambda x} + i\lambda b(x) e^{i\lambda x} + \int_{-x}^{x} \frac{\partial}{\partial x} K_{21}(x,t) e^{i\lambda t} dt +$$
$$K_{21}(x,x) e^{i\lambda x} + K_{21}(x,-x) e^{-i\lambda x} + i\lambda \int_{-x}^{x} \frac{\partial}{\partial x} K_{22}(x,t) e^{i\lambda t} dt + i\lambda K_{22}(x,x) e^{i\lambda x}$$
$$+ i\lambda K_{22}(x,-x) e^{-i\lambda x} + i\lambda a(x) u(x) e^{i\lambda x} + b(x) u(x) e^{i\lambda x} + u(x) \int_{-x}^{x} K_{21}(x,t) e^{i\lambda t} dt +$$
$$i\lambda u(x) \int_{-x}^{x} K_{21}(x,t) e^{i\lambda t} dt - (q_0(x) - u^2(x)) a(x) e^{i\lambda x} - (q_0(x) - u^2(x)) \int_{-x}^{x} K_{11}(x,t) e^{i\lambda t} dt -$$
$$2\lambda p(x) a(x) e^{i\lambda x} - 2\lambda p(x) \int_{-x}^{x} K_{11}(x,t) e^{i\lambda t} dt = -\lambda^2 a(x) e^{i\lambda x} - \lambda^2 \int_{-x}^{x} K_{11}(x,t) e^{i\lambda t} dt$$

$$\int_{-x}^{x} \frac{\partial}{\partial x} K_{21}(x,t) e^{i\lambda t} dt + K_{21}(x,x) e^{i\lambda x} + K_{21}(x,-x) e^{-i\lambda x} + \left. \frac{\partial}{\partial x} K_{22}(x,t) \right|_{t=x} e^{i\lambda x} -$$
$$\left. \frac{\partial}{\partial x} K_{22}(x,t) \right|_{t=-x} e^{-i\lambda x} - \int_{-x}^{x} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} K_{22}(x,t) e^{i\lambda t} dt + u(x) \int_{-x}^{x} K_{21}(x,t) e^{i\lambda t} dt + u(x) K_{22}(x,x) e^{i\lambda x}$$

$$-u(x)K_{22}(x,-x)e^{-i\lambda x}-u(x)\int\limits_{-x}^{x}\frac{\partial}{\partial t}K_{22}(x,t)e^{i\lambda t}dt-\left(q_0(x)-u^2(x)\right)\int\limits_{-x}^{x}K_{11}(x,t)e^{i\lambda t}dt$$

$$+2ip(x)K_{11}(x,x)e^{i\lambda x}-2ip(x)K_{11}(x,-x)e^{-i\lambda x}-2ip(x)\int\limits_{-x}^{x}\frac{\partial}{\partial t}K_{11}(x,t)e^{i\lambda t}dt$$

$$=\int\limits_{-x}^{x}\frac{\partial^2}{\partial t^2}K_{11}(x,t)e^{i\lambda t}dt-\left.\frac{\partial}{\partial t}K_{11}(x,t)\right|_{t=x}e^{i\lambda x}+\left.\frac{\partial}{\partial t}K_{11}(x,t)\right|_{t=-x}e^{-i\lambda x}$$

$$\begin{cases} K_{21}(x,x)+\left.\dfrac{\partial}{\partial x}K_{22}(x,t)\right|_{t=x}+u(x)K_{22}(x,x)+2ip(x)K_{11}(x,x) \\ \qquad =-\left.\dfrac{\partial}{\partial t}K_{11}(x,t)\right|_{t=x} \\ K_{21}(x,-x)-\left.\dfrac{\partial}{\partial x}K_{22}(x,t)\right|_{t=-x}-u(x)K_{22}(x,-x)-2ip(x)K_{11}(x,-x) \\ \qquad =\left.\dfrac{\partial}{\partial t}K_{11}(x,t)\right|_{t=-x} \\ \dfrac{\partial}{\partial x}K_{21}(x,t)-\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial t}K_{22}(x,t)+u(x)K_{21}(x,t)-u(x)\dfrac{\partial}{\partial t}K_{22}(x,t) \\ \quad -\left(q_0(x)-u^2(x)\right)K_{11}(x,t)-2ip(x)\dfrac{\partial}{\partial t}K_{11}(x,t)=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}K_{11}(x,t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}K_{11}^{[1]}(x,t)=\dfrac{\partial}{\partial x}K_{11}(x,t)-u(x)K_{11}(x,t) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}K_{21}^{[1]}(x,t)=\dfrac{\partial}{\partial x}K_{21}(x,t)+u(x)K_{21}(x,t) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}K_{22}^{[1]}(x,t)=\dfrac{\partial}{\partial x}K_{22}(x,t)+u(x)K_{22}(x,t) \end{cases}$$

olarak gösterilirse;

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}K_{11}^{[1]}(x,t)+\dfrac{\partial}{\partial t}K_{22}(x,t)=K_{21}(x,t) \\ K_{11}(x,x)-K_{22}(x,x)=-a'(x)+b(x)+a(x)u(x) \\ K_{11}(x,-x)-K_{22}(x,-x)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}K_{21}^{[1]}(x,t)-\dfrac{\partial}{\partial t}\left[\dfrac{\partial}{\partial x}K_{22}^{[1]}(x,t)\right]-\left(q_0(x)-u^2(x)\right)K_{11}(x,t) \\ -2ip(x)\dfrac{\partial}{\partial t}K_{11}(x,t)=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}K_{11}(x,t) \\ K_{21}(x,x)+\left.\dfrac{\partial}{\partial x}K_{22}(x,t)\right|_{t=x}+u(x)K_{22}(x,x)+2ip(x)K_{11}(x,x) \\ =-\left.\dfrac{\partial}{\partial t}K_{11}(x,t)\right|_{t=x} \\ K_{21}(x,-x)-\left.\dfrac{\partial}{\partial x}K_{22}(x,t)\right|_{t=-x}-u(x)K_{22}(x,-x)-2ip(x)K_{11}(x,-x) \\ =\left.\dfrac{\partial}{\partial t}K_{11}(x,t)\right|_{t=-x} \end{cases}$$

hiperbolik denklemleri elde edilir.

4. PROBLEMİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

4.1 Karakteristik Fonksiyon Ve Özellikleri

$$L := \begin{cases} -y'' + \{q(x) + 2\lambda p(x)\} y = \lambda^2 y, \ 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \\ q(x) = q_0(x) + \dfrac{A}{x^\alpha}, \ A \in \mathbb{R}, \alpha \in \left(1, \dfrac{3}{2}\right), \ q_0(x) \in L_2(0,\pi), p(x) \in W_2^1[0,\pi] \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Bu bölümde (4.1.1) şeklinde tanımlanan L operatörünün spektrumunun özellikleri araştırılacaktır. $A = 0$, $q(x) = 0$ ve $p(x) = 0$ olması halinde L operatörü L_0 ile gösterilsin. $\phi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} \phi_1(x,\lambda) \\ \phi_2(x,\lambda) \end{pmatrix}$ vektör fonksiyonu da (3.1.3) denklem sisteminin $\phi_0(0,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ i\lambda \end{pmatrix}$ başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun. $A = 0$, $q(x) = 0$ ve $p(x) = 0$ olması halinde bu çözüm $\phi_0(x,\lambda)$ ile gösterilsin. $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$-y'' = \lambda^2 y$ eşitliğinin $y(0,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ i\lambda \end{pmatrix}$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $y(x,\lambda) = \begin{pmatrix} e^{i\lambda x} \\ i\lambda e^{-i\lambda x} \end{pmatrix}$ dir. $y(x,\lambda)$ bir çözümse onun eşleniği olan $\overline{y(x,\lambda)}$ da bir çözümdür. Ayrıca onların lineer kombinasyonları da bir çözümdür. O halde $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\phi_0(x,\lambda)$ çözümü

$$\phi_{01}(x,\lambda) = \frac{y_{01}(x,\lambda) - \overline{y_{01}(x,\lambda)}}{2i} = \frac{e^{i(\lambda x - \alpha(x))} - e^{-i(\lambda x - \alpha(x))}}{2i} = \sin(\lambda x - \alpha(x))$$

$$\phi_{02}(x,\lambda) = \frac{y_{02}(x,\lambda) - \overline{y_{02}(x,\lambda)}}{2i} = \frac{\lambda i e^{i\lambda x} + \lambda i e^{-i\lambda x}}{2i} = \lambda\cos(\lambda x - \alpha(x))$$

şeklinde elde edilir.

$\Delta_0(\lambda)$ ile L_0 probleminin karakteristik fonksiyonunu gösterelim.

$\phi_{01}(\pi,\lambda) = \Delta_0(\lambda)$ olduğu açıktır. Gerçekten de

$\alpha(x) = e^{-i\int_0^x p(t)dt}$ olmak üzere

$$y_{01}(x,\lambda)=a(x)e^{i\lambda x}=e^{i\left(\lambda x-\int\limits_0^x p(t)dt\right)}=e^{i(\lambda x-\alpha(x))} \text{ ve}$$

$\phi_{01}(\pi,\lambda)=\Delta_0(\lambda)=\sin(\lambda\pi-\alpha(\pi))$ olduğu açıktır. Bu durumda $\Delta_0(\lambda)=0$ denkleminin $n\in\mathbb{N}$ için λ_n^0 kökleri L_0 probleminin özdeğerleridir.

Tanım 4.1.1 : $y(x,\lambda), z(x,\eta)\in D(L)$ fonksiyonları

$$\int\limits_0^\pi y(x,\lambda)\,\overline{z}(x,\eta)\,dx=0$$

eşitliğini sağlıyorlarsa y ve z fonksiyonlarına ortogonaldir denir.

Tanım 4.1.2 : $y(x,\lambda)\in D(L)$ için

$$\alpha_n=\int\limits_0^\pi y^2(x,\lambda_n)\,dx-\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^\pi p(x)\,y^2(x,\lambda_n)\,dx$$

sayılarına normalleştirici sayılar denir.

Lemma (Lagrange Formülü) 4.1.3 : $y,z\in D(L_0^*)$ olsun. Bu durumda

$$(L_0^*y,z)=\int\limits_0^\pi l(y)\,\overline{z}dx=(y,L_0^*z)+[y,\overline{z}]\,|_0^\pi$$

eşitliği sağlanır.

Burada

$$[y,\overline{z}]\,|_0^\pi=[(\Gamma_\alpha\overline{z})(x)\,y(x)-(\Gamma_\alpha y)(x)\,\overline{z}(x)]_0^\pi$$

dir.

İspat : $l(y)$'nin ifadesi yerine yazılarak kısmi integrasyon işlemi uygulanırsa;

$$(L_0^*y,z)=\int\limits_0^\pi l(y)\,\overline{z}dx=\int\limits_0^\pi(-y''+\{q(x)+2\lambda p(x)\}\,y)\,\overline{z}dx$$

$$=-\int\limits_0^\pi(y'-uy)'\,\overline{z}dx-\int\limits_0^\pi u(y'-uy)\,\overline{z}dx-\int\limits_0^\pi(u^2-q(x)-2\lambda p(x))\,y\overline{z}dx$$

$$=-(y'-uy)\,\overline{z}\,|_0^\pi+\int\limits_0^\pi(y'-uy)\,\overline{z}'dx-\int\limits_0^\pi u(y'-uy)\,\overline{z}dx-\int\limits_0^\pi(u^2-q(x)-2\lambda p(x))\,y\overline{z}dx$$

$$= \int_0^{\pi} (y' - uy)(\overline{z}' - u\overline{z})\, dx - (\Gamma_\alpha y)(x)\, \overline{z(x)}\, |_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (u^2 - q(x) - 2\lambda p(x))\, y\overline{z}dx$$

$$= y(\overline{z}' - u\overline{z})\, |_0^{\pi} - \int_0^{\pi} y(\overline{z}' - u\overline{z})'\, dx - \int_0^{\pi} uy(\overline{z}' - u\overline{z})\, dx - (\Gamma_\alpha y)\, \overline{z}(x)\, |_0^{\pi}$$

$$- \int_0^{\pi} (u^2 - q(x) - 2\lambda p(x))\, y\overline{z}dx$$

$$= \int_0^{\pi} l(\overline{z})\, ydx + [(\Gamma_\alpha \overline{z})(x)\, y(x) - (\Gamma_\alpha y)(x)\, \overline{z}(x)]_0^{\pi}$$

$$= \int_0^{\pi} l(\overline{z})\, ydx + [y, \overline{z}]\, |_0^{\pi}$$

$$= (y, L_0^* z) + [y, \overline{z}]\, |_0^{\pi}$$

Böylece lemma ispatlanmış olur.

$\Delta(\lambda) = \langle \varphi(x,\lambda), \psi(x,\lambda) \rangle$, $[y(x), z(x)] := y(x)(\Gamma_\alpha z)(x) - (\Gamma_\alpha y)(x)\, z(x)$ ve $W[\varphi, \psi] = \begin{vmatrix} \varphi(x,\lambda) & \psi(x,\lambda) \\ (\Gamma\varphi)(x,\lambda) & (\Gamma\psi)(x,\lambda) \end{vmatrix}$ olarak tanımlansın.

$(\Gamma_\alpha y)(x) = y'(x) - u(x)\, y(x)$ olmak üzere $\Delta(\lambda)$ ifadesi x değişkenine bağlı değildir. Yani $\frac{d}{dx}\Delta(\lambda) = 0$ dır.

Ayrıca $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$l(y) := -y'' + \{q(x) + 2\lambda p(x)\}\, y = \lambda^2 y, 0 < x < \pi \tag{4.1.2}$$

diferansiyel denkleminin

$$\begin{cases} \varphi(0,\lambda) = 0 \\ (\Gamma_\alpha \varphi)(0,\lambda) = 1 \end{cases} \tag{4.1.3}$$

$\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu ise (4.1.2) diferansiyel denkleminin

$$\begin{cases} \psi(\pi,\lambda) = 0 \\ (\Gamma_\alpha \psi)(\pi,\lambda) = 1 \end{cases} \tag{4.1.4}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi)$$

yazılabilir. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu λ' ya göre tamdır ve onun sayılabilir sayıda olan sıfırları L probleminin özdeğerleridir.

Lemma 4.1.4: $\dot{\Delta}(\lambda_n) = -2\lambda_n\alpha_n\beta_n$ dir. Burada $\dot{\Delta}(\lambda_n) = \left.\frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)\right|_{\lambda=\lambda_n}$ dır.

İspat:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda) \\ \varphi_2(x,\lambda) = \varphi'(x,\lambda) - u(x)\varphi(x,\lambda) \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} \psi_1(x,\lambda) = \psi(x,\lambda) \\ \psi_2(x,\lambda) = \psi'(x,\lambda) - u(x)\psi(x,\lambda) \end{cases}$$

olmak üzere $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümlerini (3.1.3) sisteminde yerine yazalım.

$$\begin{cases} \varphi_1'(x,\lambda) - u(x)\varphi_1(x,\lambda) = \varphi_2(x,\lambda) \\ \varphi_2'(x,\lambda) + u(x)\varphi_2(x,\lambda) - \{q_0(x) + 2\lambda p(x) - u^2(x)\}\varphi_1(x,\lambda) = -\lambda^2\varphi_1(x,\lambda) \end{cases} \tag{4.1.5}$$

$$\begin{cases} \psi_1'(x,\lambda) - u(x)\psi_1(x,\lambda) = \psi_2(x,\lambda) \\ \psi_2'(x,\lambda) + u(x)\psi_2(x,\lambda) - \{q_0(x) + 2\lambda p(x) - u^2(x)\}\psi_1(x,\lambda) = -\lambda^2\psi_1(x,\lambda) \end{cases} \tag{4.1.6}$$

(4.1.5) ve (4.1.6) sistemlerinin λ' ya göre türevleri alınıp

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1'(x,\lambda) - u(x)\dot{\varphi}_1(x,\lambda) = \dot{\varphi}_2(x,\lambda) \\ \dot{\varphi}_2'(x,\lambda) + u(x)\dot{\varphi}_2(x,\lambda) - \{q_0(x) + 2\lambda p(x) - u^2(x)\}\dot{\varphi}_1(x,\lambda) = -\lambda^2\dot{\varphi}_1(x,\lambda) \\ -2\{\lambda - p(x)\}\varphi_1(x,\lambda) \end{cases} \tag{4.1.7}$$

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1'(x,\lambda) - u(x)\,\dot{\psi}_1(x,\lambda) = \dot{\psi}_2(x,\lambda) \\ \dot{\psi}_2'(x,\lambda) + u(x)\,\dot{\psi}_2(x,\lambda) - \left\{q_0(x) + 2\lambda p(x) - u^2(x)\right\}\dot{\psi}_1(x,\lambda) = -\lambda^2\dot{\psi}_1(x,\lambda) \\ -2\left\{\lambda - p(x)\right\}\psi_1(x,\lambda) \end{cases} \tag{4.1.8}$$

(4.1.5) sistemini $\dot{\psi}_1(x,\lambda)$ ile, (4.1.8) sistemi $\varphi_1(x,\lambda)$ ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak ve (4.1.7) sistemini $\psi_1(x,\lambda)$ ile (4.1.6) sistemini de $\dot{\varphi}_1(x,\lambda)$ ile çarpıp taraf tarafa çıkarırsak;

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1'(x,\lambda)\,\varphi_1(x,\lambda) - \dot{\psi}_1(x,\lambda)\,\varphi_1'(x,\lambda) = \dot{\psi}_2(x,\lambda)\,\varphi_1(x,\lambda) \\ -\varphi_2(x,\lambda)\,\dot{\psi}_1(x,\lambda) \\ \\ \dot{\psi}_2'(x,\lambda)\,\varphi_1(x,\lambda) + u(x)\,\dot{\psi}_2(x,\lambda)\,\varphi_1(x,\lambda) - \varphi_2'(x,\lambda)\,\dot{\psi}_1(x,\lambda) \\ -u(x)\,\varphi_2(x,\lambda)\,\dot{\psi}_1(x,\lambda) = -2\left\{\lambda - p(x)\right\}\varphi_1(x,\lambda)\,\psi_1(x,\lambda) \end{cases} \tag{4.1.9}$$

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1'(x,\lambda)\,\psi_1(x,\lambda) - \psi_1'(x,\lambda)\,\dot{\varphi}_1(x,\lambda) = \dot{\varphi}_2(x,\lambda)\,\psi_1(x,\lambda) \\ -\psi_2(x,\lambda)\,\dot{\varphi}_1(x,\lambda) \\ \\ \dot{\varphi}_2'(x,\lambda)\,\psi_1(x,\lambda) + u(x)\,\dot{\varphi}_2(x,\lambda)\,\psi_1(x,\lambda) - \psi_2'(x,\lambda)\,\dot{\varphi}_1(x,\lambda) \\ -u(x)\,\psi_2(x,\lambda)\,\dot{\varphi}_1(x,\lambda) = -2\left\{\lambda - p(x)\right\}\varphi_1(x,\lambda)\,\psi_1(x,\lambda) \end{cases} \tag{4.1.10}$$

sistemleri elde edilir. (4.1.9) ve (4.1.10) sistemleri düzenlenip

$$\begin{aligned} \varphi_2(x,\lambda) &= \varphi_1'(x,\lambda) - u(x)\,\varphi_1(x,\lambda) \\ \psi_2(x,\lambda) &= \psi_1'(x,\lambda) - u(x)\,\psi_1(x,\lambda) \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılırsa;

$$\begin{cases} \dot{\psi}_2'(x,\lambda)\,\varphi_1(x,\lambda) + u(x)\,\dot{\psi}_2(x,\lambda)\,\varphi_1(x,\lambda) - \varphi_2'(x,\lambda)\,\dot{\psi}_1(x,\lambda) \\ -u(x)\,\varphi_2(x,\lambda)\,\dot{\psi}_1(x,\lambda) = -2\left\{\lambda - p(x)\right\}\varphi_1(x,\lambda)\,\psi_1(x,\lambda) \\ \\ \dot{\varphi}_2'(x,\lambda)\,\psi_1(x,\lambda) + u(x)\,\dot{\varphi}_2(x,\lambda)\,\psi_1(x,\lambda) - \psi_2'(x,\lambda)\,\dot{\varphi}_1(x,\lambda) \\ -u(x)\,\psi_2(x,\lambda)\,\dot{\varphi}_1(x,\lambda) = -2\left\{\lambda - p(x)\right\}\varphi_1(x,\lambda)\,\psi_1(x,\lambda) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\dot{\psi}_1'(x,\lambda) - u(x)\dot{\psi}_1(x,\lambda)\right]'\varphi_1(x,\lambda) + u(x)\left[\dot{\psi}_1'(x,\lambda) - u(x)\dot{\psi}_1(x,\lambda)\right]\varphi_1(x,\lambda) \\ -\left[\varphi_1'(x,\lambda) - u(x)\varphi_1(x,\lambda)\right]'\dot{\psi}_1(x,\lambda) - u(x)\left[\varphi_1'(x,\lambda) - u(x)\varphi_1(x,\lambda)\right]\dot{\psi}_1(x,\lambda) \\ \qquad = -2\{\lambda - p(x)\}\varphi_1(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda) \\ \left[\dot{\varphi}_1'(x,\lambda) - u(x)\dot{\varphi}_1(x,\lambda)\right]'\psi_1(x,\lambda) + u(x)\left[\dot{\varphi}_1'(x,\lambda) - u(x)\dot{\varphi}_1(x,\lambda)\right]\psi_1(x,\lambda) \\ -\left[\psi_1'(x,\lambda) - u(x)\psi_1(x,\lambda)\right]'\dot{\varphi}_1(x,\lambda) - u(x)\left[\psi_1'(x,\lambda) - u(x)\psi_1(x,\lambda)\right]\dot{\varphi}_1(x,\lambda) \\ \qquad = -2\{\lambda - p(x)\}\varphi_1(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda) \end{cases}$$

buradan da

$$\begin{cases} \left[\left(\Gamma\dot{\psi}_1\right)'(x,\lambda) + u(x)\left(\Gamma\dot{\psi}_1\right)(x,\lambda)\right]\varphi_1(x,\lambda) \\ -\left[(\Gamma\varphi_1)'(x,\lambda) + u(x)(\Gamma\varphi_1)(x,\lambda)\right]\dot{\psi}_1(x,\lambda) \\ \qquad = -2\{\lambda - p(x)\}\varphi_1(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda) \\ \left[(\Gamma\dot{\varphi}_1)'(x,\lambda) + u(x)(\Gamma\dot{\varphi}_1)(x,\lambda)\right]\psi_1(x,\lambda) \\ -\left[(\Gamma\psi_1)'(x,\lambda) + u(x)(\Gamma\psi_1)(x,\lambda)\right]\dot{\varphi}_1(x,\lambda) \\ \qquad = -2\{\lambda - p(x)\}\varphi_1(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda) \end{cases}$$

sistemleri alınır.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(\left(\Gamma\dot{\psi}_1\right)(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda) - (\Gamma\varphi_1)(x,\lambda)\dot{\psi}_1(x,\lambda)\right) \\ \qquad = -2\{\lambda - p(x)\}\varphi_1(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda) \\ \dfrac{d}{dx}\left((\Gamma\dot{\varphi}_1)(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda) \dot{-} (\Gamma\psi_1)(x,\lambda)\dot{\varphi}_1(x,\lambda)\right) \\ \qquad = -2\{\lambda - p(x)\}\varphi_1(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda) \end{cases}$$

alınan son eşitlikler sırasıyla $[x,\pi]$ ve $[0,x]$ aralıklarında integrallenip (4.1.3) ve (4.1.4) başlangıç ve sınır koşulları kullanılırsa

$$W\left[\varphi_1, \dot{\psi}_1\right] + W\left[\dot{\varphi}_1, \psi_1\right] = -2\int_x^\pi \{\lambda - p(t)\}\varphi_1(t,\lambda)\psi_1(t,\lambda)\,dt$$

$$-2\int_0^x \{\lambda - p(t)\}\varphi_1(t,\lambda)\psi_1(t,\lambda)\,dt$$

$$\frac{d}{d\lambda}W\left[\varphi_1,\psi_1\right]=-2\int\limits_0^{\pi}\left\{\lambda-p\left(t\right)\right\}\varphi_1\left(t,\lambda\right)\psi_1\left(t,\lambda\right)dt$$

$$\dot{\Delta}\left(\lambda\right)=-2\int\limits_0^{\pi}\left\{\lambda-p\left(t\right)\right\}\varphi_1\left(t,\lambda\right)\psi_1\left(t,\lambda\right)dt$$

elde edilir. $\lambda\to\lambda_n$ iken limite geçip, $\psi_1\left(t,\lambda_n\right)=\beta_n\varphi_1\left(t,\lambda_n\right)$ eşitliği kullanılırsa

$$\dot{\Delta}\left(\lambda\right)=-2\beta_n\lambda_n\left[\int\limits_0^{\pi}\varphi_1^2\left(t,\lambda_n\right)dt-\frac{1}{\lambda_n}\int\limits_0^{\pi}p\left(t\right)\varphi_1^2\left(t,\lambda_n\right)dt\right]$$

$$\dot{\Delta}\left(\lambda\right)=-2\beta_n\lambda_n\alpha_n$$

elde edilir. Burada $W\left[\varphi_1,\psi_1\right]=\begin{vmatrix}\varphi_1\left(x,\lambda\right) & \psi_1\left(x,\lambda\right)\\ \left(\Gamma\varphi_1\right)\left(x,\lambda\right) & \left(\Gamma\psi_1\right)\left(x,\lambda\right)\end{vmatrix}$ dir.

4.2 Özdeğer Ve Normalleştirici Sayıların Asimptotik İfadeleri

Bu bölümde L probleminin özdeğerleri ve normalleştirici sayıları için n ' nin yeterince büyük değerlerinde asimptotik ifadeler elde edilecektir.

Lemma 4.2.1: L probleminin özdeğerleri aşağıdaki asimptotik davranışa sahiptir.

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{d_n}{\lambda_n^0} + \frac{\delta_n}{\lambda_n^0}$$

Burada $\delta_n \in \ell_2$ ve d_n sınırlı bir dizidir.

İspat: δ yeterince küçük bir sayı olmak üzere

$$\Gamma_n = \left\{ \lambda : |\lambda| = \left|\lambda_n^0\right| + \delta, \quad \delta > 0, \quad n = 0, 1, 2, ... \right\}$$

$$G_\delta = \left\{ \lambda : \left|\lambda - \lambda_n^0\right| \geq \delta, \quad \delta > 0, \quad n = 0, 1, 2, ... \right\}$$

olsun. $z = x + iy$ olmak üzere $|\sin z| = \sqrt{\sin^2 x + \sinh^2 y}$ eşitliğinden yararlanırsak; $\lambda \in \overline{G}_\delta$ için

$$\Delta_0 (\lambda) = \sin (\lambda\pi - \alpha (\pi)) = \frac{e^{i(\lambda\pi - \alpha(\pi))} - e^{-i(\lambda\pi - \alpha(\pi))}}{2i}$$

olduğundan;

$$|\Delta_0 (\lambda)| = \frac{1}{2} \left| e^{i(\lambda\pi - \alpha(\pi))} - e^{-i(\lambda\pi - \alpha(\pi))} \right| \geq \frac{1}{2} A_\delta e^{|\mathrm{Im}(\lambda - \alpha(\pi))|}$$

olacak biçimde A_δ vardır. Ayrıca

$$\varphi_1 (x, \lambda) = e^{i(\lambda x - \alpha(x))} + \int_0^x K_{11} (x, t) e^{i\lambda t} dt + \int_{-x}^0 K_{11} (x, t) e^{i\lambda t} dt$$

$$= e^{i(\lambda x - \alpha(x))} + \int_0^x K_{11} (x, t) e^{i\lambda t} dt + \int_0^x K_{11} (x, -t) e^{-i\lambda t} dt$$

olduğundan L probleminin karakteristik fonksiyonu da

$$\Delta (\lambda) = e^{i[\lambda\pi - \alpha(\pi)]} + \int_0^\pi A (\pi, t) \cos \lambda t dt + \int_0^\pi B (\pi, t) \sin \lambda t dt$$

olur. Burada

$$A(x,t)=K_{11}(x,t)+K_{11}(x,-t),$$

$$B(x,t)=i\left(K_{11}(x,t)-K_{11}(x,-t)\right) \text{ ve } \alpha(x)=e^{i\int\limits_0^x p(t)dt}$$

dir. Böylece

$$\Delta(\lambda)=\Delta_0(\lambda)+\int\limits_0^\pi A(\pi,t)\cos\lambda t dt+\int\limits_0^\pi B(\pi,t)\sin\lambda t dt$$

olarak elde edilir. $A(x,.),B(x,.)\in L_1(0,\pi)$ olduğundan Riemann Lebesque teoremi gereği

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int\limits_0^\pi A(x,t)\cos\lambda t dt=0$$

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty}\int\limits_0^\pi B(x,t)\sin\lambda t dt=0$$

olur. n'in yeterince büyük değerleri için ;

$$|\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)|<\frac{C_\delta}{2}e^{|\mathrm{Im}(\lambda-\alpha(\pi))|}$$

ve

$$|\Delta_0(\lambda)|>\frac{A_\delta}{2}e^{|\mathrm{Im}(\lambda-\alpha(\pi))|}>|\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)|$$

eşitsizliği sağlanmaktadır. Rouche Teoremi gereği Γ_n çevresinin içinde yeterince büyük n'ler için $\Delta_0(\lambda)$ ve $[\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)]+\Delta_0(\lambda)=\Delta(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırları aynı sayıdadır. Diğer bir değişle Γ_n'in içinde tam olarak $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n$ şeklinde $n+1$ tane sıfır vardır. Benzer şekilde Rouche Teoremi gereği n'in yeterince büyük değerleri için $\left|\lambda-\lambda_n^0\right|<\delta$ çemberlerinin her birinde $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun yalnızca bir sıfırı vardır. Dolayısıyla δ yeterince küçük pozitif bir sayı olduğunda $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_n=0$ olmak üzere $\lambda_n=\lambda_n^0+\varepsilon_n$ elde edilir. λ_n sayıları $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun kökleri ve $\Delta(\lambda)=\varphi_1(\pi,\lambda)$, $\Delta_0(\lambda)=\varphi_{10}(\pi,\lambda)$ olduğundan;

$$\Delta(\lambda_n)=\Delta\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)=\Delta\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)+\int\limits_0^\pi A(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)tdt$$

$$+\int\limits_0^\pi B(\pi,t)\sin\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)tdt=0$$

veya

$$\Delta(\lambda) = \sin(\lambda_n\pi - \alpha(\pi)) + \int_0^\pi A(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right) t dt + \int_0^\pi B(\pi,t)\sin\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right) t dt = 0 \tag{4.2.1}$$

yazılır.

$$\sin(\lambda\pi - \alpha(\pi)) = 0$$

denkleminin kökleri

$$\lambda\pi - \alpha(\pi) = \pi n \ , \ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

olduğundan

$$\lambda_n^0 = n + \frac{\alpha(\pi)}{\pi}, \ \ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

elde edilir. Burada $\alpha(\pi) = e^{i\int_0^\pi p(t)dt}$ dır.

$$\sin(\lambda\pi - \alpha(\pi)) = \sin\left[\lambda_n^0\pi + \varepsilon_n\pi - \alpha(\pi)\right]$$

$$= \sin\left(\lambda_n^0\pi - \alpha(\pi)\right).\cos\varepsilon_n\pi + \cos\left(\lambda_n^0\pi - \alpha(\pi)\right).\sin\varepsilon_n\pi$$

$$= \sin\left(\lambda_n^0\pi - \alpha(\pi)\right) + \varepsilon_n\pi\cos\left(\lambda_n^0\pi - \alpha(\pi)\right) + o\left(\varepsilon_n^2\right)$$

$$= \sin(n\pi + \alpha(\pi) - \alpha(\pi)) + \varepsilon_n\pi\cos(n\pi + \alpha(\pi) - \alpha(\pi)) + o\left(\varepsilon_n^2\right)$$

$$= (-1)^n\varepsilon_n\pi + o\left(\varepsilon_n^2\right)$$

olur.

$$\cos\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right) t = 1 - \frac{(\varepsilon_n t)^2}{2!} + \frac{(\varepsilon_n t)^4}{4!} - o\left(\varepsilon_n^5\right), \ \varepsilon_n \to 0$$

ve

$$\sin\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right) t = \varepsilon_n t - \frac{(\varepsilon_n t)^3}{3!} + \frac{(\varepsilon_n t)^5}{5!} - o\left(\varepsilon_n^6\right), \ \varepsilon_n \to 0$$

ifadelerini (4.2.1) eşitliğinde kullanırsak

$$\varepsilon_n\pi(-1)^n + o\left(\varepsilon_n^2\right) + \int_0^\pi A(\pi,t)\left[\cos\lambda_n^0 t - \frac{(\varepsilon_n t)^2}{2!}\cos\lambda_n^0 t + \frac{(\varepsilon_n t)^4}{4!}\cos\lambda_n^0 t\right.$$

$$-\varepsilon_n t\sin\lambda_n^0 t+\frac{(\varepsilon_n t)^3}{3!}\sin\lambda_n^0 t-\frac{(\varepsilon_n t)^5}{5!}\sin\lambda_n^0 t dt\Bigg]dt$$

$$+\int_0^\pi B(\pi,t)\Bigg[\sin\lambda_n^0 t-\frac{(\varepsilon_n t)^2}{2!}\sin\lambda_n^0 t+\frac{(\varepsilon_n t)^4}{4!}\sin\lambda_n^0 t$$

$$+\varepsilon_n t\cos\lambda_n^0 t-\frac{(\varepsilon_n t)^3}{3!}\cos\lambda_n^0 t+\frac{(\varepsilon_n t)^5}{5!}\cos\lambda_n^0 t\Bigg]dt+o(\varepsilon_n^5)=0$$

olur. Buradan ε_n' ler için

$$\varepsilon_n\Bigg\{\pi(-1)^n-\int_0^\pi tA(\pi,t)\sin\lambda_n^0 tdt+\int_0^\pi tB(\pi,t)\cos\lambda_n^0 tdt$$

$$-\frac{\varepsilon_n}{2!}\left[\int_0^\pi t^2A(\pi,t)\cos\lambda_n^0 tdt+\int_0^\pi t^2B(\pi,t)\sin\lambda_n^0 tdt\right]$$

$$+\frac{\varepsilon_n{}^2}{3!}\left[\int_0^\pi t^3A(\pi,t)\sin\lambda_n^0 tdt-\int_0^\pi t^3B(\pi,t)\cos\lambda_n^0 tdt\right]$$

$$+\frac{\varepsilon_n{}^3}{4!}\left[\int_0^\pi t^4A(\pi,t)\cos\lambda_n^0 tdt+\int_0^\pi t^4B(\pi,t)\sin\lambda_n^0 tdt\right]$$

$$-\frac{\varepsilon_n{}^4}{5!}\left[\int_0^\pi t^5A(\pi,t)\sin\lambda_n^0 tdt-\int_0^\pi t^5B(\pi,t)\cos\lambda_n^0 tdt\right]\Bigg\}$$

$$=-\left\{\int_0^\pi t^2A(\pi,t)\cos\lambda_n^0 tdt+\int_0^\pi t^2B(\pi,t)\sin\lambda_n^0 tdt+o(\varepsilon_n^2)\right\}$$

elde edilir. Buradan da

$$\varepsilon_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\left[\int_0^\pi\widetilde{A}(\pi,t)\cos ntdt+\int_0^\pi\widetilde{B}(\pi,t)\sin ntdt\right]$$

ifadesi elde edilir. Burada

$$\widetilde{A}(\pi,t)=\cos\frac{\alpha(\pi)}{\pi}tA(\pi,t)-\sin\frac{\alpha(\pi)}{\pi}tB(\pi,t)$$

$$\widetilde{B}(\pi,t)=\cos\frac{\alpha(\pi)}{\pi}tB(\pi,t)-\sin\frac{\alpha(\pi)}{\pi}tA(\pi,t)$$

Ayrıca $\widetilde{A_t}(\pi,.),\widetilde{B}_t(\pi,.)\in L_1(0,\pi)$ iken

$$\int_0^\pi \widetilde{A}(\pi,t)\cos ntdt = -\frac{1}{n}\int_0^\pi \widetilde{A_t}(\pi,t)\sin ntdt$$

$$\int_0^\pi \widetilde{B}(\pi,t)\sin ntdt = \frac{1}{n}\widetilde{B}(\pi,\pi) - \frac{1}{n}\widetilde{B}(\pi,0) + \frac{1}{n}\int_0^\pi \widetilde{B_t}(\pi,t)\cos ntdt$$

olmak üzere

$$\varepsilon_n = \frac{(-1)^n}{n\pi}\left[\int_0^\pi \widetilde{A_t}(\pi,t)\sin ntdt - \widetilde{B}(\pi,\pi) - \int_0^\pi \widetilde{B_t}(\pi,t)\cos ntdt\right]$$

elde edilir. Yani

$$\varepsilon_n = \frac{(-1)^n d_n}{n\pi} + \delta_n$$

olur. Burada

$$d_n = \int_0^\pi \widetilde{A_t}(\pi,t)\sin ntdt - \widetilde{B}(\pi,\pi) - \int_0^\pi \widetilde{B_t}(\pi,t)\cos ntdt$$

$$\delta_n = -\frac{(-1)^n d_n}{n\pi^2}\left[\int_0^\pi t\widetilde{A}(\pi,t)\sin ntdt - \int_0^\pi t\widetilde{B}(\pi,t)\cos ntdt\right]$$

dir ve

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{d_n}{n} + \frac{\delta_n}{n}$$

elde edilir. $(d_n)_{n\geq 1}$ sınırlı bir dizi ve $\delta_n \in l_2$ dir.

Lemma 4.2.2.: α_n normalleştirici sayıları

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha(\pi)}{2\lambda_n^0} + \frac{d_n}{\lambda_n^0} + \frac{\delta_n}{\lambda_n^0}$$

şeklinde asimptotik ifadeye sahiptir. Burada $\delta_n \in l_2$ ve $(d_n)_{n\geq 1}$ sınırlı bir dizidir.

İspat:

$$\alpha_n = \int_0^\pi y_n^2(x)\,dx - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^\pi p(x)\,y_n^2(x)\,dx$$

eşitliği ve

$$y_n(x,\lambda) = e^{i(\lambda_n x - \alpha(x))} + \int_{-x}^{x} K_{11}(x,t)\,e^{i\lambda_n t}dt$$

ifadesi kullanılırsa

$$S(x,\lambda_n) := \frac{y(x,\lambda_n) - \overline{y(x,\lambda_n)}}{2i}$$

$$S(x,\lambda_n)=\sin(\lambda_n x-\alpha(x))+\int_{-x}^{x}A(x,t)\cos\lambda_n t dt+\int_{-x}^{x}B(x,t)\sin\lambda_n t dt$$

elde edilir. Burada

$$A(x,t)=\frac{1}{2i}\left[K_{11}(x,t)-K_{11}(x,-t)\right]$$

$$B(x,t)=\frac{1}{2}\left[K_{11}(x,t)+K_{11}(x,-t)\right]$$

dir.

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}S_n^2(x)\,dx-\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\pi}p(x)\,S_n^2(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\left[\sin(\lambda_n x-\alpha(x))+\int_0^{x}A(x,t)\cos\lambda_n t dt+\int_0^{x}B(x,t)\sin\lambda_n t dt\right]^2dx$$

$$-\frac{1}{\lambda_n}\int_0^{\pi}p(x)\left[\sin(\lambda_n x-\alpha(x))+\int_0^{x}A(x,t)\cos\lambda_n t dt+\int_0^{x}B(x,t)\sin\lambda_n t dt\right]^2dx$$

Gerekli işlemler yapıldıktan sonra;

$$\alpha_n=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha(\pi)}{2\lambda_n}+\frac{d_n}{\lambda_n^0}+\frac{\delta_n}{\lambda_n^0}$$

elde edilir. Burada

$$\delta_n=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2\lambda_n x\sin 2\alpha(x)\,p(x)\,dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2\lambda_n x\cos 2\alpha(x)\,p(x)\,dx-2\int_0^{\pi}xA(x,x)\int_0^{x}A(x,t)\cos\lambda_n t dt\cos\lambda_n x dx$$

$$-2\int_0^{\pi}xB(x,x)\int_0^{x}B(x,t)\sin\lambda_n t dt\sin\lambda_n x dx+2\int_0^{\pi}\cos\alpha(x)\left(\int_0^{x}A(x,t)\cos\lambda_n t dt\right)\sin\lambda_n x dx$$

$$-2\int_0^{\pi}\sin\alpha(x)\left(\int_0^{x}A(x,t)\cos\lambda_n t dt\right)\cos\lambda_n x dx$$

$$+2\int_0^{\pi}\cos\alpha(x)\left(\int_0^{x}B(x,t)\sin\lambda_n t dt\right)\sin\lambda_n x dx$$

$$-2\int_0^{\pi}\sin\alpha(x)\left(\int_0^{x}B(x,t)\sin\lambda_n t dt\right)\cos\lambda_n x dx-\alpha(\pi)\int_0^{\pi}A(x,t)\cos\lambda_n t dt$$

$$+2\int_0^{\pi}\alpha(x)\,A(x,x)\int_0^{x}A(x,t)\cos\lambda_n t dt\cos\lambda_n x dx-\alpha(\pi)\int_0^{\pi}B(x,t)\sin\lambda_n t dt$$

$$+2\int_0^{\pi}\alpha(x)B(x,x)\int_0^{x}B(x,t)\sin\lambda_n t dt\sin\lambda_n x dx$$
$$-2\int_0^{\pi}p(x)\cos\alpha(x)\left(\int_0^{x}A(x,t)\cos\lambda_n t dt\right)\sin\lambda_n x dx$$
$$+2\int_0^{\pi}p(x)\sin\alpha(x)\left(\int_0^{x}A(x,t)\cos\lambda_n t dt\right)\cos\lambda_n x dx$$
$$-2\int_0^{\pi}p(x)\cos\alpha(x)\left(\int_0^{x}B(x,t)\sin\lambda_n t dt\right)\sin\lambda_n x dx$$
$$+2\int_0^{\pi}p(x)\sin\alpha(x)\left(\int_0^{x}B(x,t)\sin\lambda_n t dt\right)\cos\lambda_n x dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2\alpha(x)\sin 2\lambda_n x dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2\alpha(x)\cos 2\lambda_n x dx$$

ve

$$d_n=-\frac{1}{2}\cos 2\alpha(\pi)\sin 2\lambda_n\pi$$

dır.

Lemma 4.2.3: L probleminin özfonksiyonları n ' nin yeterince büyük değerlerinde aşağıdaki asimptotik davranışa sahiptir.

$$\begin{aligned}\varphi_n(x) &= \varphi(x,\lambda_n)=\sin\left(\lambda_n^0 x-\alpha(x)\right)+\frac{1}{\lambda_n^0}\left[A(x,x)\sin\lambda_n^0 x-B(x,x)\cos\lambda_n^0 x+B(x,0)\right]\\ &\quad -\frac{1}{\lambda_n^0}\int_0^{x}A_t(x,t)\sin\lambda_n^0 t dt+\int_0^{x}B_t(x,t)\cos\lambda_n^0 t dt+\frac{\Delta_n}{n}\end{aligned}$$

Burada $\Delta_n\in\ell_2,\ DA_t(x,t)\in L_1(0,x)\ ,\ DB_t(x,t)\in L_1(0,x)$dir.

İspat:

$$\varphi_n(x)=\varphi(x,\lambda_n)=\sin(\lambda_n x-\alpha(x))+\int_0^{x}A(x,t)\cos\lambda_n t dt+\int_0^{x}B(x,t)\sin\lambda_n t dt$$

özfonksiyonların ifadesinde

$$\lambda_n=\lambda_n^0+\frac{dn}{n}+\frac{\delta_n}{n}$$

yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\int_0^{x}A(x,t)\cos\lambda_n t dt+\int_0^{x}B(x,t)\sin\lambda_n t dt$$

$$= \int_0^x A(x,t)\cos\left(\lambda_n^0 + \frac{dn}{n} + \frac{\delta_n}{n}\right) tdt + \int_0^x B(x,t)\sin\left(\lambda_n^0 + \frac{dn}{n} + \frac{\delta_n}{n}\right) tdt$$
$$= \frac{1}{\lambda_n^0}\left[A(x,x)\sin\lambda_n^0 x - B(x,x)\cos\lambda_n^0 x + B(x,0)\right]$$
$$-\frac{1}{\lambda_n^0}\int_0^x A_t(x,t)\sin\lambda_n^0 tdt + \int_0^x B_t(x,t)\cos\lambda_n^0 tdt + \frac{\Delta_n}{n},\ \ \Delta_n \in \ell_2$$

elde edilir. Burada

$$\Delta_n = \left(\frac{d_n}{n} + \frac{\delta_n}{n}\right)\left\{\int_0^\pi tB(x,t)\cos\lambda_n^0 tdt - \int_0^\pi tA(x,t)\sin\lambda_n^0 tdt\right\}$$
$$= \frac{d_{n_1}}{n} + \frac{\delta_{n_1}}{n}$$

dır. Ayrıca

$$d_{n_1} = d_n\left\{\int_0^\pi tB(x,t)\cos\lambda_n^0 tdt - \int_0^\pi tA(x,t)\sin\lambda_n^0 tdt\right\}$$
$$\delta_{n_1} = \delta_n\left\{\int_0^\pi tB(x,t)\cos\lambda_n^0 tdt - \int_0^\pi tA(x,t)\sin\lambda_n^0 tdt\right\}$$

dır.Yani

$$\varphi_n(x) = \varphi(x,\lambda_n) = \sin\left(\lambda_n^0 x - \alpha(x)\right) + \frac{1}{\lambda_n^0}\left[A(x,x)\sin\lambda_n^0 x - B(x,x)\cos\lambda_n^0 x + B(x,0)\right]$$
$$-\frac{1}{\lambda_n^0}\int_0^x A_t(x,t)\sin\lambda_n^0 tdt + \int_0^x B_t(x,t)\cos\lambda_n^0 tdt + \frac{\Delta_n}{n}$$

elde edilir.

4.3 Weyl Fonksiyonu ve Weyl Çözümünün Özellikleri

Bu bölümde Weyl Fonksiyonunu tanımlayıp Weyl Fonksiyonu yardımı ile

$$-y'' + \{q(x) + 2\lambda p(x)\} y = 0,\ 0 < x < \pi \tag{4.3.1}$$

$$U(y) := y(0) = 0, \quad V(y) := y(\pi) = 0 \tag{4.3.2}$$

ile tanımlanan L sınır değer probleminin yeniden inşası araştırılacaktır.

Yani L ve $\widetilde{L}$ sınır değer problemleri aynı Weyl fonksiyonuna sahip olduklarında L ve $\widetilde{L}$ sınır değer problemleri birbirine eşittir.Başka bir değişle Weyl fonksiyonu L sınır değer probleminin potansiyellerini tek olarak belirler.

$$\widetilde{L} := \begin{cases} -y'' + \{\widetilde{q}(x) + 2\lambda \widetilde{p}(x)\} y = 0,\ 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0 \\ \widetilde{q}(x) = \widetilde{q}_0(x) + \dfrac{\widetilde{A}}{x^{\alpha}},\ \widetilde{A} \in \mathbb{R}, \alpha \in \left(1, \dfrac{3}{2}\right) \end{cases} \tag{4.3.3}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\widetilde{p}(x)$ ve $\widetilde{q}(x)$ fonksiyonlarının $(3.1.1) - (3.1.2)$ problemindeki koşulları sağladığını kabul edelim. $(4.3.1)$ denkleminin $U(\Phi) = 1$ ve $V(\Phi) = 0$ sınır koşullarını sağlayan çözümünü $\Phi(x, \lambda)$ fonksiyonu ile gösterelim. $\Phi(x, \lambda)$ fonksiyonunun 0 noktasındaki değerini de $M(\lambda)$ fonksiyonu ile tanımlayalım. Yani $\Phi(0, \lambda) := M(\lambda)$ olsun. $\Phi(x, \lambda)$ fonksiyonuna L sınır değer probleminin Weyl çözümü ve $M(\lambda)$ fonksiyonuna da L sınır değer probleminin Weyl fonksiyonu denir.

Lemma 4.3.1 : $\varphi(x, \lambda)$, $S(x, \lambda)$ ve $\Psi(x, \lambda)$ fonksiyonları $(4.3.1)$ denkleminin

$$\begin{aligned} \varphi(0, \lambda) &= 1, (\Gamma_{\alpha}\varphi)(0, \lambda) = 0; \\ S(0, \lambda) &= 0, (\Gamma_{\alpha}S)(0, \lambda) = 1; \\ \Psi(\pi, \lambda) &= 0, (\Gamma_{\alpha}\Psi)(\pi, \lambda) = -1 \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

$\Phi(x,\lambda) = M(\lambda).\varphi(x,\lambda) + S(x,\lambda)$, $(\lambda \neq \lambda_n,\ n = 1,2,3,...)$ ve $M(\lambda) = -\dfrac{\Psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ eşitliği geçerlidir.

İspat: $W[\varphi, S]|_{x=0} = \varphi(0,\lambda).S'(0,\lambda) - \varphi'(0,\lambda).S(0,\lambda) = 1$ olduğundan $\varphi(x,\lambda)$ ve $S(x,\lambda)$ fonksiyonları lineer bağımsızdırlar. Yani (4.3.1) denkleminin (4.3.4) ile verilen başlangıç koşullarını sağlayan bir temel çözüm sistemidir. Dolayısıyla (4.3.1) denkleminin tüm çözümleri bu iki çözümün lineer kombinasyonudur. $\Psi(x,\lambda)$ fonksiyonu da (4.3.1) denkleminin bir çözümü olduğundan

$$\Psi(x,\lambda) = c_1(\lambda)\varphi(x,\lambda) + c_2(\lambda) S(x,\lambda)$$

şeklinde yazılabilir. (4.3.4) koşullarından

$$c_1(\lambda) = \Psi(0,\lambda) \text{ ve } c_2(\lambda) = \Psi'(0,\lambda) = -\Delta(\lambda)$$

eşitlikleri sağlanır.

O halde;

$$\Psi(x,\lambda) = \Psi(0,\lambda)\varphi(x,\lambda) - \Delta(\lambda) S(x,\lambda)$$

eşitliği elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafı $\lambda \neq \lambda_n$ $(n = 1,2,...)$ olmak üzere $-\Delta(\lambda)$ ifadesine bölünürse;

$$\Phi(x,\lambda) := -\frac{\Psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = M(\lambda).\varphi(x,\lambda) + S(x,\lambda) \text{ ve } M(\lambda) = -\frac{\Psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

elde edilir. Burada $M(\lambda)$ fonksiyonu $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ noktalarında kutup noktalarına sahip meromorfik bir fonksiyondur.

Teorem 4.3.2: $M(\lambda) = \dfrac{1}{\alpha_0(\lambda - \lambda_0)} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left\{\dfrac{1}{\alpha_n(\lambda - \lambda_n)} + \dfrac{1}{\alpha_n^0 \lambda_n^0}\right\}$ gösterilimi doğrudur.

İspat: $\varphi(x,\lambda)$ çözümüne benzer bir çözüm elde edelim. Bunun için (3.1.3) sisteminin π noktasındaki

$$\psi(\pi,\lambda) = 0$$

$$\psi'(\pi,\lambda) = i\lambda$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü için aşağıdaki şekilde integral denklemleri sistemini elde ederiz.

$$\widetilde{\psi}_1(x,\lambda) = e^{-i\lambda(\pi-x)} + \int_x^{\pi} u(t)\,\widetilde{\psi}_1(t,\lambda)\cos\lambda(x-t)\,dt$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_x^{\pi}\left[q_0(t) + 2\lambda p(t) - u^2(t) - \widetilde{\psi}_2(t,\lambda)\,u(t)\right]\sin\lambda(x-t)\,dt$$

$$\widetilde{\psi}_2(x,\lambda) = i\lambda e^{-i\lambda(\pi-x)} - \lambda\int_x^{\pi} u(t)\,\widetilde{\psi}_1(t,\lambda)\cos\lambda(x-t)\,dt$$

$$-\int_x^{\pi}\left[q_0(t) + 2\lambda p(t) - u^2(t) - \widetilde{\psi}_2(t,\lambda)\,u(t)\right]\cos\lambda(x-t)\,dt$$

şeklinde bulunur. Burada $\psi(x,\lambda) = \left(\widetilde{\psi}_1(x,\lambda), \widetilde{\psi}_2(x,\lambda)\right)^t$

$\widetilde{\psi}(x,\lambda)$ çözümünün de $\varphi(x,\lambda)$ çözümüne benzer olarak

$$\psi_1(\pi-x,\lambda) = e^{i[\lambda(\pi-x)-\alpha(\pi-x)]} + \int_{\pi-x}^{\pi+x} E_{11}(x,t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$\psi_2(\pi-x,\lambda) = i\lambda e^{i[\lambda(\pi-x)-\alpha(\pi-x)]} + b(\pi-x)\,e^{i\lambda(\pi-x)} + \int_{\pi-x}^{\pi+x} E_{21}(x,t)\,e^{i\lambda t}dt$$

$$+i\lambda\int_{\pi-x}^{\pi+x} E_{22}(x,t)\,e^{i\lambda t}dt$$

şeklinde bir gösterilimi olduğu yukarıdaki yöntemle ispatlanabilir. Buradan

$$\psi_1(x,\lambda) = \frac{\widetilde{\psi}_1(\pi-x,\lambda) - \overline{\widetilde{\psi}_1(\pi-x,\lambda)}}{2i}$$

$$\psi_2(x,\lambda) = \frac{\widetilde{\psi}_2(\pi-x,\lambda) - \overline{\widetilde{\psi}_2(\pi-x,\lambda)}}{2i}$$

olarak alınırsa

$$\psi_1(x,\lambda) = \sin[\lambda(\pi-x) - \alpha(\pi-x)] + \int_{\pi-x}^{\pi+x} E_{11}(x,t)\sin\lambda t dt$$

$$\psi_2(x,\lambda) = i\lambda\sin[\lambda(\pi-x) - \alpha(\pi-x)] + b(\pi-x)\sin\lambda(\pi-x)$$

$$+\int_{\pi-x}^{\pi+x} E_{21}(x,t)\sin\lambda t dt + i\lambda\int_{\pi-x}^{\pi+x} E_{22}(x,t)\sin\lambda t dt$$

şeklinde integral gösterilim yazılır. Buradan da, $\widetilde{E}_{ij}(x,t) = E_{ij}(x,t) - E_{ij}(x,-t)$, $(i,j=1,2)$ olmak üzere

$$\psi_1(x,\lambda) = \sin[\lambda(\pi-x) - \alpha(\pi-x)] + \int_0^{\pi+x} \widetilde{E}_{11}(x,t)\sin\lambda t dt$$

$$\psi_2(x,\lambda) = i\lambda \sin\left[\lambda(\pi - x) - \alpha(\pi - x)\right] + b(\pi - x)\sin\lambda(\pi - x)$$
$$+ \int_0^{\pi+x} \widetilde{E}_{21}(x,t)\sin\lambda t dt + i\lambda \int_0^{\pi+x} \widetilde{E}_{22}(x,t)\sin\lambda t dt$$

elde edilir. $\widetilde{E}_{ij}$ $(i,j = 1,2)$ fonksiyonları her fix edilmiş $x \in [0,\pi]$ için t değişkenine göre $L_2(0,\pi)$ uzayına aittir.

$C \equiv 0$ ve $q \equiv 0$ durumuna karşılık gelen $\psi_i(x,\lambda)$ fonksiyonları $\psi_{0i}(x,\lambda)$ ve

$$e_1 = \int_0^{\pi+x} \widetilde{E}_{11}(x,t)\sin\lambda t dt$$
$$e_2 = b(\pi - x)\sin\lambda(\pi - x)$$
$$+ \int_0^{\pi+x} \widetilde{E}_{21}(x,t)\sin\lambda t dt + i\lambda \int_0^{\pi+x} \widetilde{E}_{22}(x,t)\sin\lambda t dt$$

olarak gösterilirse

$$\psi_1(x,\lambda) = \psi_{01}(x,\lambda) + e_1$$
$$\psi_2(x,\lambda) = \psi_{02}(x,\lambda) + e_2$$

şeklinde yazılabilir. Son alınan eşitlikler ve $\Delta(\lambda) = \psi_1(0,\lambda)$ ve $\Delta_o(\lambda) = \psi_0(0,\lambda)$ olduğu kullanılırsa

$$M(\lambda) - M(\lambda_0) = \frac{\psi_2(0,\lambda)}{\psi_1(0,\lambda)} - \frac{\psi_{02}(0,\lambda)}{\psi_{01}(0,\lambda)} = \frac{\psi_{02}(x,\lambda) + e_2}{\psi_{01}(x,\lambda) + e_1} - \frac{\psi_{02}(0,\lambda)}{\psi_{01}(0,\lambda)}$$
$$= \frac{\psi_{01}(x,\lambda)\psi_{02}(0,\lambda) + e_2\psi_{01}(0,\lambda) - \psi_{01}(x,\lambda)\psi_{02}(0,\lambda) - e_1\psi_{02}(0,\lambda)}{\left[\psi_{01}(0,\lambda) + e_1\right]\psi_{01}(0,\lambda)}$$
$$= \frac{e_2}{\psi_{01}(0,\lambda) + e_1} - \frac{e_1}{\psi_{01}(0,\lambda) + e_1} M(\lambda_0)$$
$$= \frac{e_2}{\Delta(\lambda)} - \frac{e_1}{\Delta(\lambda)} M(\lambda_0)$$

elde edilir.

Burada $\lambda \in G_\delta$ için $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \sup\limits_{\lambda\in G_\delta} e^{-|\operatorname{Im}\lambda\pi|}|e_i(\lambda)| = 0$ ve $\Delta(\lambda) > C_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda|\pi}$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \sup_{\lambda\in G_\delta} |M(\lambda) - M(\lambda_0)| = 0$$

alınır. Diğer taraftan $\varphi(x,\lambda_n)$, $\left(\varphi_0\left(x,\lambda_n^0\right)\right)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$, $\left(\psi_0\left(x,\lambda_n^0\right)\right)$ fonksiyonları $L(L_0)$ probleminin özfonksiyonlarıdır. O halde $\mu_n\left(\mu_n^0\right)$ sabitleri vardır öyle ki;

$$\psi(x,\lambda_n)=\mu_n\varphi(x,\lambda_n)$$
$$\psi_0\left(x,\lambda_n^0\right)=\mu_n^0\varphi_0\left(x,\lambda_n^0\right)$$

eşitliği sağlanır. O halde $\psi_2(0,\lambda_n)=\mu_n\varphi_2(0,\lambda_n)$ ve $\psi_2(\pi,\lambda_n)=\mu_n\varphi_2(\pi,\lambda_n)$ olduğundan

$$\mu_n=\psi_2(0,\lambda_n)=\frac{1}{\varphi_2(\pi,\lambda_n)} \text{ ve } \mu_n^0=\psi_2\left(0,\lambda_n^0\right)=\frac{1}{\varphi_2\left(\pi,\lambda_n^0\right)}$$
$$\alpha_n=-\dot{\Delta}(\lambda_n)\varphi_2(\pi,\lambda_n)$$
$$\alpha_n^0=-\dot{\Delta}(\lambda_n)\varphi_2\left(\pi,\lambda_n^0\right)$$

eşitlikleri elde edilir. $\psi_2(0,\lambda)$ ve $\Delta(\lambda)$ fonksiyonları $\lambda=\lambda_n$ de analitik ve $\psi_2(0,\lambda_n)\neq 0, \Delta(\lambda_n)=0,\ \dot{\Delta}(\lambda_n)\neq 0$ olduğundan $M(\lambda)$, $\lambda=\lambda_n$ve $M_0(\lambda)$,ise $\lambda=\lambda_n^0$ de basit kutup noktasına sahiptir. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda) &= \frac{\psi_2(0,\lambda_n)}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}=\frac{1}{\dot{\Delta}(\lambda_n)\varphi_2(\pi,\lambda_n)}=-\frac{1}{\alpha_n} \\ \operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n^0} M_0(\lambda) &= \frac{\psi_2\left(0,\lambda_n^0\right)}{\dot{\Delta}\left(\lambda_n^0\right)}=\frac{1}{\dot{\Delta}(\lambda_n)\varphi_2\left(\pi,\lambda_n^0\right)}=-\frac{1}{\alpha_n^0}\end{aligned} \tag{4.3.5}$$

elde edilir.

$$I_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n}\frac{M(\xi)-M_0(\xi)}{\lambda-\xi}d\xi, \qquad \lambda\in int\Gamma_n$$

eğrisel integrali ele alındığında $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}\sup\limits_{\lambda\in G_\delta}|M(\lambda)-M(\lambda_0)|=0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$ bulunur. $M(\xi)$ fonksiyonunun Γ_n deki aykırılıkları sırasıyla $\lambda_0,\lambda_1,...,\lambda_n$ şeklinde sıralanmış olup kutup yerleri ve buralardaki rezidüleri sırasıyla $\frac{1}{\alpha_0},\frac{1}{\alpha_1},...,\frac{1}{\alpha_n},...$ dir. Γ_n de hiçbir kutup yerinden geçmeyen ve üzerinde $|M(\lambda)|<M$ eşitsizliğinin sağlandığı R_n yarıçaplı çember ve $n\to\infty$ iken $R_n\to\infty$ olur. $M(\xi)$ fonksiyonunun bir kutbu olmadığından $\frac{M(\xi)}{\xi-\lambda}$ fonksiyonu, $\xi=\lambda_n$, $n=0,1,...$ ve λ noktalarında kutup yerlerine sahiptir. Bu durumda (4.3.5) den Rezidü Teoremi gereği

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{M(\xi)}{\xi-\lambda},\lambda_n\right)=\lim_{\lambda\to\lambda_n}(\xi-\lambda_n)\frac{M(\xi)}{\xi-\lambda_n}=-\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)}$$

$$\operatorname{Re}s\left(\frac{M(\xi)}{\xi-\lambda},\lambda\right)=\lim_{\lambda\to\lambda}(\xi-\lambda)\frac{M(\xi)}{\xi-\lambda}=M(\lambda)$$

olur. Rezidü Teoreminden

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n}\frac{M(\xi)-M_0(\xi)}{\lambda-\xi}d\xi = M(\lambda) - \sum_{\lambda_n\in int\Gamma_n}\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n}\frac{M(\xi)-M_0(\xi)}{\lambda-\xi}d\xi = M_0(\lambda) - \sum_{\lambda_n^0\in int\Gamma_n}\frac{1}{\alpha_n^0(\lambda_n^0-\lambda)}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n}\frac{M(\xi)-M_0(\xi)}{\lambda-\xi}d\xi = -M(\lambda)+M_0(\lambda)+\sum\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)}-\sum\frac{1}{\alpha_n^0(\lambda_n^0-\lambda)}$$

$n\to\infty$ için $\lim\limits_{n\to\infty} I_n(x)=0$ olduğundan

$$-M(\lambda)+M_0(\lambda)+\sum\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)}-\sum\frac{1}{\alpha_n^0(\lambda_n^0-\lambda)}=0$$

veya

$$M(\lambda)=M_0(\lambda)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)}-\frac{1}{\alpha_n^0(\lambda_n^0-\lambda)}\right\}$$

alınır. Mittag-Leffler açılımına göre

$$M_0(\lambda)=\frac{1}{\alpha_n^0\lambda}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\left\{\frac{1}{(\lambda-\lambda_n^0)}+\frac{1}{\lambda_n^0}\right\}$$

olur. $M(\lambda)$ ve $M_0(\lambda)$ için elde edilen yukarıdaki eşitlikler kullanılırsa ;

$$M(\lambda)=\frac{1}{\alpha_n^0\lambda}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\left\{\frac{1}{(\lambda-\lambda_n^0)}+\frac{1}{\lambda_n^0}\right\}$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)}-\frac{1}{\alpha_n^0(\lambda_n^0-\lambda)}\right\}$$

$$=\frac{1}{\alpha_n^0\lambda}+\frac{1}{\alpha_0(\lambda-\lambda_0)}-\frac{1}{\alpha_n^0\lambda}$$

$$+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n^0}\left(\frac{1}{(\lambda-\lambda_n^0)}+\frac{1}{\lambda_n^0}\right)+\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)}-\frac{1}{\alpha_n^0(\lambda_n^0-\lambda)}\right\}$$

elde edilir. Buradan da

$$M(\lambda)=\frac{1}{\alpha_0(\lambda-\lambda_0)}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)}+\frac{1}{\alpha_n^0\lambda_n^0}\right\}$$

eşitliği elde edilir.

4.4 Ters Problemler

Bu bölümde L probleminin belirlenmesi için Weyl fonksiyonu ve spektral karakteristiklere göre ters problemin çözümü verilmiştir.

Lemma 4.4.1: $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ $(n = 1, 2, ...)$ ise $\alpha(\pi) = \widetilde{\alpha}(\pi)$ dır.

İspat: $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ eşitliğinden ve lemma (4.2.1) den

$$n + \frac{\alpha(\pi)}{\pi} + \frac{d_n}{\lambda_n^0} + \frac{\delta_n}{\lambda_n^0} = n + \frac{\widetilde{\alpha}(\pi)}{\pi} + \frac{\widetilde{d}_n}{\lambda_n^0} + \frac{\widetilde{\delta}_n}{\lambda_n^0}$$

olur. Son eşitlikte $n \to \infty$ iken limite geçersek;

$$\alpha(\pi) = \widetilde{\alpha}(\pi), \ \ n \to \infty$$

elde edilir.

Teorem 4.4.2: Eğer $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$ ise $L = \widetilde{L}$ dır. Yani Weyl fonksiyonu L sınır değer problemini tek olarak belirler.

İspat: $P(x,\lambda) \cdot \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}(x,\lambda) & \widetilde{\Phi}(x,\lambda) \\ (\Gamma_\alpha \widetilde{\varphi})(x,\lambda) & \left(\Gamma_\alpha \widetilde{\Phi}\right)(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x,\lambda) & \Phi(x,\lambda) \\ (\Gamma_\alpha \varphi)(x,\lambda) & (\Gamma_\alpha \Phi)(x,\lambda) \end{pmatrix}$

eşitliği sağlanacak şekilde $P(x,\lambda) = [P_{i,j}(x,\lambda)]$, $(i, j = 1, 2)$ matrisini tanımlayalım. Eşitliğin her iki tarafı

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}(x,\lambda) & \widetilde{\Phi}(x,\lambda) \\ (\Gamma_\alpha \widetilde{\varphi})(x,\lambda) & \left(\Gamma_\alpha \widetilde{\Phi}\right)(x,\lambda) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\Gamma_\alpha \widetilde{\Phi}\right)(x,\lambda) & -\widetilde{\Phi}(x,\lambda) \\ -(\Gamma_\alpha \widetilde{\varphi})(x,\lambda) & \widetilde{\varphi}(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

matrisi ile çarpılırsa ;

$$\begin{pmatrix} P_{11}(x,\lambda) & P_{12}(x,\lambda) \\ P_{21}(x,\lambda) & P_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x,\lambda) & \Phi(x,\lambda) \\ (\Gamma_\alpha \varphi)(x,\lambda) & (\Gamma_\alpha \Phi)(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \left(\Gamma_\alpha \widetilde{\Phi}\right)(x,\lambda) & -\widetilde{\Phi}(x,\lambda) \\ -(\Gamma_\alpha \widetilde{\varphi})(x,\lambda) & \widetilde{\varphi}(x,\lambda) \end{pmatrix}$$

veya

$$P_{11}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)\left(\Gamma_\alpha\widetilde{\Phi}\right)(x,\lambda)-\Phi(x,\lambda)\left(\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi}\right)(x,\lambda)$$

$$P_{12}(x,\lambda)=\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\,\Phi(x,\lambda)-\widetilde{\Phi}(x,\lambda)\,\varphi(x,\lambda)$$

$$P_{21}(x,\lambda)=\left(\Gamma_\alpha\varphi\right)(x,\lambda)\left(\Gamma_\alpha\widetilde{\Phi}\right)(x,\lambda)-\left(\Gamma_\alpha\Phi\right)(x,\lambda)\left(\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi}\right)(x,\lambda)$$

$$P_{22}(x,\lambda)=\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\left(\Gamma_\alpha\Phi\right)(x,\lambda)-\widetilde{\Phi}(x,\lambda)\left(\Gamma_\alpha\varphi\right)(x,\lambda)$$

eşitlikleri elde edilir. $\Phi(x,\lambda)=-\dfrac{\Psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ ifadesinden faydalanılırsa ;

$$\begin{aligned}
P_{11}(x,\lambda) &= -\varphi(x,\lambda)\frac{\left(\Gamma_\alpha\widetilde{\Psi}\right)(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}+\frac{\Psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\left(\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi}\right)(x,\lambda) \qquad (4.4.1)\\
P_{12}(x,\lambda) &= -\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\frac{\Psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}+\frac{\widetilde{\Psi}(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\\
P_{21}(x,\lambda) &= -\left(\Gamma_\alpha\varphi\right)(x,\lambda)\frac{\left(\Gamma_\alpha\widetilde{\Psi}\right)(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}+\frac{\left(\Gamma_\alpha\widetilde{\Psi}\right)(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}\left(\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi}\right)(x,\lambda)\\
P_{22}(x,\lambda) &= -\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\frac{\left(\Gamma_\alpha\Psi\right)(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}+\frac{\widetilde{\Psi}(x,\lambda)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}\left(\Gamma_\alpha\varphi\right)(x,\lambda)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\Phi(x,\lambda)=M(\lambda).\varphi(x,\lambda)+S(x,\lambda)$ ifadesinden faydalanılırsa;

$$P_{11}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)\left[\widetilde{M}(\lambda).\left(\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi}\right)(x,\lambda)+\left(\Gamma_\alpha\widetilde{S}\right)(x,\lambda)\right]$$

$$-\left(\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi}\right)(x,\lambda)\left[M(\lambda).\varphi(x,\lambda)+S(x,\lambda)\right]$$

$$=\varphi(x,\lambda)\left(\Gamma_\alpha\widetilde{S}\right)(x,\lambda)-\left(\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi}\right)(x,\lambda)\,S(x,\lambda)$$

$$+\left[\widetilde{M}(\lambda)-M(\lambda)\right]\varphi(x,\lambda)\left(\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi}\right)(x,\lambda)$$

$$P_{12}(x,\lambda)=\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\left[M(\lambda).\varphi(x,\lambda)+S(x,\lambda)\right]$$

$$-\varphi(x,\lambda)\left[\widetilde{M}(\lambda).\widetilde{\varphi}(x,\lambda)+\widetilde{S}(x,\lambda)\right]$$

$$=\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\,S(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\,\widetilde{S}(x,\lambda)+\left[M(\lambda)-\widetilde{M}(\lambda)\right]\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\,\varphi(x,\lambda)$$

$$P_{21}(x,\lambda) = (\Gamma_\alpha\varphi)(x,\lambda)\left[\widetilde{M}(\lambda).(\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi})(x,\lambda) + \left(\Gamma_\alpha\widetilde{S}\right)(x,\lambda)\right]$$

$$-\left[M(\lambda).(\Gamma_\alpha\varphi)(x,\lambda) + (\Gamma_\alpha S)(x,\lambda)\right](\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi})(x,\lambda)$$

$$=(\Gamma_\alpha\varphi)(x,\lambda)\left(\Gamma_\alpha\widetilde{S}\right)(x,\lambda) - (\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi})(x,\lambda)(\Gamma_\alpha S)(x,\lambda)$$

$$+\left[\widetilde{M}(\lambda) - M(\lambda)\right](\Gamma_\alpha\varphi)(x,\lambda)(\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi})(x,\lambda)$$

$$P_{22}(x,\lambda) = \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\left[M(\lambda).(\Gamma_\alpha\varphi)(x,\lambda) + (\Gamma_\alpha S)(x,\lambda)\right]$$

$$-\left[\widetilde{M}(\lambda).\widetilde{\varphi}(x,\lambda) + \widetilde{S}(x,\lambda)\right](\Gamma_\alpha\varphi)(x,\lambda)$$

$$= \widetilde{\varphi}(x,\lambda)(\Gamma_\alpha S)(x,\lambda) - (\Gamma_\alpha\varphi)(x,\lambda)\widetilde{S}(x,\lambda)$$

$$+\left[M(\lambda) - \widetilde{M}(\lambda)\right]\widetilde{\varphi}(x,\lambda)(\Gamma_\alpha\varphi)(x,\lambda)$$

$M(\lambda) \equiv \widetilde{M}(\lambda)$ olduğundan

$$P_{11}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)\left(\Gamma_\alpha\widetilde{S}\right)(x,\lambda) - (\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi})(x,\lambda)S(x,\lambda)$$

$$P_{12}(x,\lambda) = \widetilde{\varphi}(x,\lambda)S(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\widetilde{S}(x,\lambda)$$

$$P_{21}(x,\lambda) = (\Gamma_\alpha\varphi)(x,\lambda)\left(\Gamma_\alpha\widetilde{S}\right)(x,\lambda) - (\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi})(x,\lambda)(\Gamma_\alpha S)(x,\lambda)$$

$$P_{22}(x,\lambda) = \widetilde{\varphi}(x,\lambda)(\Gamma_\alpha S)(x,\lambda) - (\Gamma_\alpha\varphi)(x,\lambda)\widetilde{S}(x,\lambda)$$

eşitlikleri elde edilir. $P_{j,k}\,(j,k=1,2)$ fonksiyonları her fix edilmiş x için λ'ya göre tamdırlar.

Diğer taraftan $\varphi(x,\lambda)$ ve $\Psi(x,\lambda)$ fonksiyonları (4.3.1) denkleminin $\varphi(0,\lambda)=1, (\Gamma_\alpha\varphi)(0,\lambda)=0$ ve $\Psi(\pi,\lambda)=0, (\Gamma_\alpha\Psi)(\pi,\lambda)=-1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olduğundan

$$(\Gamma_\alpha\varphi)(x,\lambda) = O(|\lambda|\exp|\operatorname{Im}\lambda|\,x)$$

$$(\Gamma_\alpha\Psi)(x,\lambda) = O(|\lambda|\exp|\operatorname{Im}\lambda|\,(\pi-x))$$

şeklinde asimptotik davranışlara sahip olduğu elde edilir.

(4.4.1) eşitliğinde $\varphi(0,\lambda) = 1, (\Gamma_\alpha\varphi)(0,\lambda) = 0$ kullanılarak $\forall x \in [0,\pi]$ için $|P_{11}(x,\lambda)| \leq c_\delta$ ve $|P_{12}(x,\lambda)| \leq C_\delta$ olacak şekilde c_δ ve C_δ sabitlerinin varlığı elde edilir. O halde Liouville teoremi gereği $P_{11}(x,\lambda) = A(x)$ ve $P_{12}(x,\lambda) = B(x)$ yazılabilir. $\forall x \in [0,\pi]$ için

$$P_{12}(x,\lambda) = \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\Phi(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\widetilde{\Phi}(x,\lambda)$$

$$= \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\varphi(x,\lambda)\widetilde{\Psi}(x,\lambda) - \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\Psi(x,\lambda)\right]$$

ve $\lambda \in G_\delta$ için $|\Delta(\lambda)| > c_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda|\pi}$ olduğundan Lebesque Lemmasından yararlanılırsa $\lim\limits_{\substack{\lambda\to\infty \\ \lambda\in G_\delta}} |P_{12}(x,\lambda)| = 0$ eşitliği, buradan da $P_{12}(x,\lambda) \equiv 0$ olur. O halde $\forall x \in [0,\pi]$ için $P_{11}(x,\lambda) \equiv A(x)$ ve $P_{12}(x,\lambda) \equiv 0$ eşitlikleri alınır. Elde edilen ifadeler yerlerine yazılırsa;

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda)\left(\Gamma_\alpha\widetilde{\Phi}\right)(x,\lambda) - \Phi(x,\lambda)(\Gamma_\alpha\widetilde{\varphi})(x,\lambda) = A(x) \\ \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\Phi(x,\lambda) - \widetilde{\Phi}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) = 0 \end{cases}$$

sistemi elde edilir. Bu sistem çözülürse;

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda) = \widetilde{\varphi}(x,\lambda)A(x) \\ \Phi(x,\lambda) = \widetilde{\Phi}(x,\lambda)A(x) \end{cases} \tag{4.4.2}$$

eşitlikleri bulunur.

$$\Phi(x,\lambda) = -\frac{\Psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = M(\lambda).\varphi(x,\lambda) + S(x,\lambda)$$
$$= \Delta(\lambda)S(x,\lambda) - \psi(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)$$

olduğundan;

$$W[\varphi,\Phi] = W\left[\varphi(x,\lambda), -\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right]$$
$$=\frac{1}{\Delta(\lambda)}W[\varphi(x,\lambda), -\psi(0,\lambda)\varphi(x,\lambda) + \Delta(\lambda)S(x,\lambda)]$$

$$=-\frac{\Psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}W[\varphi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)] + W[\varphi(x,\lambda), S(x,\lambda)] = 1$$

alınır. Benzer şekilde $W\left[\widetilde{\varphi},\widetilde{\Phi}\right] = 1$ elde edilir. Bu eşitliklerde (4.4.2) sisteminden yaralanılırsa;

$$1 = W\left[\varphi(x,\lambda), \Phi(x,\lambda)\right] = W\left[\widetilde{\varphi}(x,\lambda) A(x), \widetilde{\Phi}(x,\lambda) A(x)\right]$$

$$= A^2(x) W\left[\widetilde{\varphi}(x,\lambda), \widetilde{\Phi}(x,\lambda)\right]$$

olduğu alınır. O halde (4.4.2) sisteminden

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda) = \widetilde{\varphi}(x,\lambda) \\ \Phi(x,\lambda) = \widetilde{\Phi}(x,\lambda) \end{cases}$$

elde edilir.$\varphi(x,\lambda) = \widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ eşitliğini (4.3.1) denkleminde yerine yazarsak;

$$\begin{cases} -\varphi''(x,\lambda) + \left[q_0(x) + 2\lambda p(x) + \dfrac{A}{x^\alpha}\right] \varphi(x,\lambda) = \lambda^2 \varphi(x,\lambda) \\ -\widetilde{\varphi}''(x,\lambda) + \left[\widetilde{q}_0(x) + 2\lambda \widetilde{p}(x) + \dfrac{\widetilde{A}}{x^\alpha}\right] \widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \lambda^2 \widetilde{\varphi}(x,\lambda) \end{cases}$$

elde edilir. Son eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa $\forall\lambda$ için

$$\left\{2\lambda\left(p(x) - \widetilde{p}(x)\right) + \left(\left[q_0(x) + \frac{A}{x^\alpha}\right] - \left[\widetilde{q}_0(x) + \frac{\widetilde{A}}{x^\alpha}\right]\right)\right\} \varphi(x,\lambda) \equiv 0$$

özdeşliği elde edilir. Buradan ise hemen hemen her yerde

$$p(x) = \widetilde{p}(x), \;\; q_0(x) + \frac{A}{x^\alpha} = \widetilde{q}_0(x) + \frac{\widetilde{A}}{x^\alpha}$$

elde edilir. Burada $q_0(x) + \dfrac{A}{x^\alpha} = \widetilde{q}_0(x) + \dfrac{\widetilde{A}}{x^\alpha}$ eşitliğini

$$\left[q_0(x) - \widetilde{q}_0(x)\right] x^\alpha + \left(A - \widetilde{A}\right) = 0$$

şeklinde yazarsak $\{1, x^\alpha\}$, $\alpha > 0$ sistemi $[0,\pi]$'de tam olduğundan

$$q_0(x) = \widetilde{q}_0(x) \;\; \text{ve } A = \widetilde{A}$$

dır.Sonuç olarak

$$L = \widetilde{L}$$

dır.

Teorem 4.4.3: Eğer $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ ve $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$, $n = 0, \pm1, ...$ ise $L = \widetilde{L}$ dır.

İspat: Açıktır ki; sırasıyla $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu ve $\psi(0,\lambda)$ fonksiyonu $\{\lambda_n^2\}$ ve $\{\mu_n^2\}$, $n = 0, \pm1, ...$ dizileri tarafından tek olarak belirlenir.Eğer $\lambda_n =$

$\widetilde{\lambda}_n$ ve $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$ ise $\Delta(\lambda) = \widetilde{\Delta}(\lambda)$ ve $\psi(0,\lambda) = \widetilde{\psi}(0,\lambda)$ dır. $M(\lambda) = -\dfrac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ olduğundan $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$ dır. Teorem 4.4.2 den $L = \widetilde{L}$ dır.

Teorem 4.4.4: Eğer $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ ve $\alpha_n = \widetilde{\alpha}_n$ ise $L = \widetilde{L}$ dır. Yani $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ spektral verileri L problemini tek olarak belirler.

İspat: Açıktır ki; $M(\lambda)$ Weyl Fonksiyonu $\lambda = \lambda_n^2$ noktaları olan basit kutuplarında meromorfiktir.

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_0^\pi A(\pi,t)\cos\lambda t dt + \int_0^\pi B(\pi,t)\sin\lambda t dt$$

ifadesinden ve $2\lambda_n\beta_n\alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda)$, $\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n)$ eşitliklerinden

$$\underset{\lambda=\lambda_n}{\mathrm{Re}\,s} M(\lambda) = -\frac{\psi(0,\lambda)}{\dot{\Delta}(\lambda)} = -\frac{\beta_n}{\dot{\Delta}(\lambda)} = \frac{1}{2\lambda_n\alpha_n}$$

elde edilir. $\lambda \in \Gamma_n$ için $M(\lambda)$ Weyl Fonksiyonu regüler olduğundan ve Rouche Teoreminden

$$M(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{M(\mu)}{\mu-\lambda}d\mu, \quad \lambda \in int\Gamma_n$$

sonucuna varılır.$M(\lambda) = -\dfrac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ göz önünde bulundurulursa $\lambda \in G_\delta$ bulunur. Böylece

$$M(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{n_1}}\frac{M(\mu)}{\mu-\lambda}d\mu$$

dır. Burada $\Gamma_{n_1} = \left\{\lambda : |\lambda| = \left|\lambda_n^0\right|\right\}$, $n = 0, \pm1, \pm2, ...$ dır. Residue Teoreminden

$$M(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\lambda_n\alpha_n(\lambda-\lambda_n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\widetilde{\lambda}_n\widetilde{\alpha}_n\left(\lambda-\widetilde{\lambda}_n\right)} = \widetilde{M}(\lambda)$$

elde edilir. Sonuç olarak $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$ dır. Teorem 4.4.2 den $L = \widetilde{L}$ dır.

KAYNAKLAR

H. Weyl (1910) Über gewohnliche Differentialgleichungen mit Singularitaten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, Math Ann. 68,220-269

V. A. Ambartsumyan (1929) Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53, 690-695.

J. Delsarte (1938) Sur certaines Transformations Fonctionelles Relatives Aux Equations Lineaires Aux Derivees Partiellles du Second Ordre, C. R. Hebd. Acad. Sci., 206, 178-182

G: Borg. (1945) Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Bestimmung der Differentialg leichungdurch die Eigenvert, Acta Math.78, 1-96

B. M. Levitan (1949) The Application of Generalized Displacement Operators to Linear Differential Equations of the Second Order, Uspekhi Matematicheskikh Nauk 4 (1), 3-112

E. C. Titchmarsh (1946) Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations, vol. 1. Clarendon

N. Levinson, (1949) The İnverse Sturm-Liouville problem, Mat. Tidsskr. B, 25-30

J. Delsarte and J. Lions (1957) Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe, Comm. Math. Helv., 32(2), 113-128

B. M. Levitan (1964) Generalized Translation Operators and some of its Applications, Jerusalem.

V.A. Marchenko (1977), Sturm-Liouville Operators and Their Applications (Naukova Dumka, Kiev,1977) [in Russian]

G. Sh. Guseinov (1984) Asymptotic formulasşş for solutions and eigenvalues of quadratic pencıl of Sturm-Liouville equation, Preprint No.113, Inst Phys. Akad Nauk Azerb SSR Baku 49

G. Sh. Guseinov (1985), Dokl. Akad. Nauk SSSR 285 (6), 1292-1296

I. M. Guseinov and I. M. Nabiev (1995), Mat. Sb. 186 (5), 35-48

A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov (1999) Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials Mathematical Notes, Vol. 66 No. 6, 741-753

V. A. Sadovnichii, Ya. T. Sultanaev, and A. M. Akhtyamov (1999), Dokl. Math. 60, 118-119 [Dokl. Akad. Nauk 367,739-741]

I. M. Guseinov and I. M. Nabiev (2000), Differ. Equations 36, 471-473 [Differ. Uravn. 36, 418-420 (2000)]

I. M. Nabiev (2000), Mat. Zametki 67, 369-381

V. A. Yurko(2000), J. Math. Anal. Appl. 250,266-289

I. M. Nabiev (2003), Trans. NAS Azerb. Ser. Phys.-Tech. Mat. Sci. 23 (4), 125-130

R. Kh. Amirov (2004) Transformation Operators For Sturm-Liouville Operators With Singular Potentials,International Journal of Pure and Applied Mathematics,Vol.12 No.3, 311-334

I. M. Nabiev (2004) Inverse Spectral Problem For Diffusion Operator On The Segment Journal of Mathematical fyz., Analysis and Geometri

I. M. Nabiev (2004), Mat. Fizika, Analiz, Geometriya 11 (3) 302-313

I. M. Guseinov, I. M. Nabiev (2007) The Inverse Spectral Problem For Pencils Of Differential Operators Sbornik Mathematics,198 no.11, pp.1579-1598

I.. M. Nabiev (2007) The Inverse Quasperiodic Problem for a Diffusion Operator, Issn 1064-5624, Doklady Mathematics.Vol.76,No.1, pp.527-529

R. Hryniv and N. Pronska (2012) Inverse Spectral Problems For Energy-Dependent Sturm-Liouville Equationsé,arXiv:1203.4851v1 [math.SP]

N. Pronska (Mayıs 2012) Reconstruction Of Energy-Dependent Sturm-Liouville Equations From Two Spectra, arXiv:1205.4499v1 [math.SP]

N.Pronska (Aralık 2012) Spectral Properties Of Sturm-Liouville Equations With Singular Energy-Dependent Potentials, arXiv:1212.6671v1 [math.SP]

N. Pronska (11 Haziran 2013) Asymptotics Of Eigenvalues And Eigenfunctions Of Energy-Dependent Sturm-Liouville Equations, arXiv:1306.2450v1 [math.SP]

R.Kh. Amirov and A.A. Nabiev (2013) Inverse Problems for the Quadratic Pencil of the Sturm-Liouville Equations with Impulse,hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis

S. Işık (2013) Süreksizlik Koşullarına Sahip Süreksiz Katsayılı Difüzyon Operatörleri için Düz ve Ters Problemler Doktora Tezi

Y. Çakmak and S. Işık (2014) Recovery of the Impulsive Diffusion Operator with Discontinuous Coefficient, Appl. Math. Inf. SCI: ,(8), No:5, 2267-2275

A.A. Nabiev and R.Kh. Amirov (2015) İntegral Representations For The Solutions Of The Generalized Schroedinger Equation İn A Finite İnterval,Advances in Pure Mathematics, 5,777-795