T. C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKIN KÜMELERİN TOPOLOJİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Sedat ÇOBAN

(201492171141)

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Serkan ATMACA

SİVAS

EYLÜL 2019

Sedat ÇOBAN'ın hazırladığı ve **"YAKIN KÜMELERİN TOPOLOJİSİ ÜZERİNE"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı	**Dr. Öğr. Üyesi Serkan ATMACA** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. İdris ZORLUTUNA** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Prof. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK** Adıyaman Üniversitesi	....

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Özlem Pelin CAN

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu’nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)’nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

ETİK

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

4.09.2019

Sedat ÇOBAN

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Bilgi ve deneyimlerinden sürekli yararlandığım, tezin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Serkan ATMACA' ya çok teşekkür ederim. Ayrıca bu tez çalışmam süresince bilgi ve deneyimleri ile yol gösteren Prof. Dr. İdris ZORLUTUNA ve maddi, manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme teşekkür ediyorum.

ABSTRACT

ON TOPOLOGY OF NEAR SETS

Sedat ÇOBAN

Master of Science Thesis

Department of Mathematics

Supervisor: Dr. Öğr. Üyesi Serkan ATMACA

2019, 40+ix pages

This thesis, which is on two important theories of uncertainties which are rough sets and close sets, consists of two main chapters. In the first chapter, some studies related to rough set theory in the literature will be mentioned. In the second chapter, close sets will be introduced and the subject of r-near topological spaces defined by Atmaca will be examined. Finally, the topological concepts and the convergence of sequences in these spaces will be introduced.

Key Words: Rough Sets, Near Sets, r-Near Topological Spaces

ÖZET

YAKIN KÜMELERİN TOPOLOJİSİ ÜZERİNE

Sedat ÇOBAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Serkan ATMACA
2019, 40+ix sayfa

Belirsizliklerin iki önemli teorisi kaba kümeler ve yakın kümeler üzerine olan bu tez iki ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, literatürdeki kaba küme teorisi ile ilgili bazı çalışmalardan bahsedilecektir. İkinci bölümde ise yakın kümeler tanıtılarak, Atmaca tarafından tanımlanan r-yakın topolojik uzaylar konusu incelenecektir. Son olarak, bu uzaylardaki topolojik kavramlar ile dizilerin yakınsaklığı tanıtılacaktır.

Anahtar kelimeler: Kaba Kümeler, Yakın Kümeler, r-Yakın Topolojik Uzaylar

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Küme kavramı matematiğin temelini teşkil etmektedir. Günümüzdeki modern küme teorisi George Cantor tarafından kurulmuştur. Bertrand Russell ise bu teorinin bazı tartışmalı kısımlarının olduğunu öne sürmüştür. Bu sorunların çözümü için Cantor küme teorisinin aksiyomsal hale getirilmesini, bir çok bilim adamı ise alternatif küme teorileri üretilmesi fikrini ileri sürmüşlerdir.

Kümeler sadece matematik için değil, dil biliminde de önemli bir role sahiptir. Genellikle, birbiri ile ilgili nesnelerin kümeleri (koleksiyonları) hakkında konuşuruz (Örneğin; kitaplar, resimler, insanlar vb.). Webster Sözlüğünde bir kümenin sezgisel anlamı "Birbirine ait veya birlikte aynı türden bir dizi şey" olarak ifade edilmektedir. Oxford sözlüğünde ise " Aynı türden birbirine benzer veya tamamlayıcı bir dizi nesne " biçiminde ifade edilmektedir. Dolayısıyla küme, bir şekilde birbiriyle ilgili olan nesnelerin bir koleksiyonu olarak tanımlanabilir. Ancak bu ilişkinin niteliği bu tanımlarda belirtilmemiştir. Aslında bu tanımlar küme teorisinin yaratıcısı George Cantor tarafından verilen orijinal tanımdan kaynaklanmaktadır. Cantor 1883 de kaleme aldığı "Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" isimli kitabında bunu;

"Unter einer Mannigfaltigkeit oder Menge verstehe ich nämlich allgenein jedes Viele, welches sich als Eines denken lässt, d.h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann."
şeklinde ifade etmiştir. Cantor burada kümeyi bazı kurallara göre bir bütün olarak kabul edilebilecek herhangi bir objenin koleksiyonu olarak ifade etmektedir. Tüm matematiksel nesneler, örneğin, bağıntılar, fonksiyonlar, sayılar vb. kavramlar birer kümedirler. Sonuç olarak matematiksel kavramların hemen hemen hepsinde kümeler temel rol almaktadır. Bu nedenle matematikte düzen ancak küme teorisi ile mümkün olacaktır. Cantor'un ortaya attığı bu yeni teori zamanın önde gelen matematikçileri tarafından ilgi ile karşılanmıştır. Fakat Bertrand Russell, Cantor tarafından verilen bir kümenin sezgisel tanımının çelişkiler içerdiğini öne sürmüştür. Kuvvet kümesi çelişkisi adı verilen en iyi bilinen çelişki şöyledir; X kümesi ile tüm kümelerin

kümesini (sonsuz elemanlı) düşünelim. Böylece X en büyük kümedir. $P(X)$ ise X'in tüm altkümelerinin kümesini belirtsin. Açıktır ki $P(X)$, X' ten daha fazla elemana sahiptir, çünkü bir kümenin altkümelerinin sayısı her zaman eleman sayısından büyüktür. Örneğin, $X = \{1, 2, 3\}$ ise, $P(X) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$ biçimindedir. Dolayısıyla, bu bize X ten daha büyük bir kümenin varlığını gösterir. Bu ise çelişkidir. Dolaysıyla yukarıdaki örnekten de anlaşılacağı üzere matematiğin temel kavramı olan küme kavramı Cantor'un mevcut tanımı ile çelişkiler içermektedir. Bu ise bir kümenin Cantor tarafından öngörüldüğü gibi keyfi öğeler topluluğu olamayacağı anlamına gelir. Bu çelişkileri aşmak için bazı matematikçiler Cantor'un küme teorisinde bazı yenilikler önerilmişlerdir. Bunlardan bazıları;

- Aksiyomatik küme teorisi (Axiomatic set theory) (Zermello and Fraenkel, 1904)
- Çeşitlerin teorisi (Theory of types) (Whitehead and Russell, 1910)
- Sınıflar teorisi (Theory of classes) (V. Neumann, 1920)

Cantor'un teorisi üzerindeki bütün bu düzenlemeler, bir küme oluşturabilecek nesnelerin üzerindeki kısıtlamaları temel almaktadır. Burada kısıtlamalar, kümenin nasıl inşa edilebileceğini söyleyen, uygun şekilde seçilen aksiyomlardır. Dolayısıyla bu teoriler aksiyomatik küme teorileri olarak adlandırılmaktadır.

Öte yandan Cantor'un küme teorisini aksiyomlaştırma yoluyla geliştirmek yerine, bazı matematikçiler teoriyi çelişkilerden kurtaracak yeni teoriler arayışına girmişlerdir. Tamamen yeni olan bu fikirle klasik küme teorisinde oluşan bu çelişkilerden kurtulmaya çalışmışlardır. Bunlardan bazıları;

- Mereloji (Mereology) (Leśniewski, 1915)
- Alternatif küme teorisi (Alternative set theory) (Vopenka, 1970)
- Penumbral küme teorisi ("Penumbral" set theory) (Apostoli and Kanada, 1999)

teorileridir. Kuşkusuz bunlardan en ilginç olan öneri, klasik küme teorisinde kullanılan unsurlar ve kümeler arasındaki üyelik ilişkisi yerine, "bir parçası olma" ilişkisini öneren Stanisław Leśniewski tarafından ortaya atılan Mereloji teorisidir. Her ne kadar bir çok teori ortaya atılsa bile bu teoriler hiçbir zaman matematikçiler tarafından kabul görmemiştir. Buna rağmen son zamanlarda Leiewniewski'nin mereolojisi filozofların ve bilgisayar bilimcilerinin dikkatini çekmeyi başarmıştır. (Bkz, Lech Polkowski ve Andrzej Skowron).

Klasik küme teorisinde bir küme, elemanları tarafından benzersiz bir şekilde belirlenir. Başka bir deyişle, her elemanın kümeye ait olup olmadığı kesindir. Yani, bir küme kavramı, net (kesin) bir kavramdır. Örneğin, tek sayılar kümesi gibi, çünkü her sayı tek veya çifttir. Bu matematikte net kavramlar kullanılması zorunluluğunu göstermektedir, aksi takdirde kesin bir çözümleme mümkün değildir. Bununla birlikte, yıllarca filozoflar belirsiz (kesin olmayan) kavramlarla ilgilenmişlerdir. Örneğin, tek sayılar kümesinin aksine, güzel bir resim kavramı belirsizdir, çünkü tüm resimleri güzel ve güzel değil gibi iki sınıfa ayıramayız. Hatta bazı resimlerin güzel olup olmadığına dahi karar veremeyiz. Dahası kişiye göre, bakış açısına göre, duygusal değişikliklere göre güzellik kavramı değişiklik gösterir. Dolayısıyla güzellik kesin değil belirsiz bir kavramdır. Konuşma dilinde kullandığımız hemen hemen bütün kavramlar belirsizdir. Bu nedenle, konuşma diline dayalı çıkarım mantığı, klasik mantığa değil belirsiz kavramlara dayanmalıdır. Sonuç olarak belirsizlikler filozoflar ve bilgisayar bilimcileri için önemli bir yere sahiptir. Bu nedenle küme teorisi üzerinde tartışılan başka bir konu ise belirsizlik olmuştur. Belirsizlik kavramı ilk olarak 1893'te modern mantığın babası olarak kabul edilen Gottlob Frege'nin tarafından formüle edilen sınır bölgesi yaklaşımı karşımıza çıkmaktadır. Gottlob Frege ye göre matematik, tüm kavramlarının (küme dahil) kesin olmasını gerektirir. Fakat yukarıda değindiğimiz gibi filozoflar ve bilgisayar bilimciler için belirsiz kavramların kendine özgü matematiğinin olması gerekmektedir. Bu belirsizlikler üzerinde Lotfi Zadeh tarafından ortaya atılan bulanık küme kavramı ilk ve en başarılı yaklaşımdır. Bu yaklaşımda kümeler, kümenin klasik tanımında kullanılan kesin üyeliğin aksine kısmi üyelik ile tanımlanmaktadır. Zadeh'in yaklaşımında, bir elemanın kesinlikle bir kümeye ait olup olmaması gerekliliği bulunan klasik küme teorisinin aksine, k derecesi ile $(0 \leq k \leq 1)$ bir kümeye ait olabilir. Örneğin, klasik küme teorisinde bir birey kesinlikle hasta veya sağlıklı olabilir, ancak bulanık küme teorisinde birinin % 60 (yani 0.6 derecesinde) hasta (veya sağlıklı) olduğunu söyleyebiliriz. Böylece bulanık üyelik fonksiyonu $x \in X$ için $\mu_A(x) \in (0, 1)$ biçiminde gösterilebilir. Bulanık küme tanımı ileri matematiksel kavramlar, reel sayılar ve fonksiyonlar içermektedir; oysa klasik küme teorisinde ki küme kavramı, tüm matematiğin temeli olarak kullanılır. Örneğin, sayılar ve fonksiyonlar gibi matematiksel kavramları türetmek için kullanılır. Bu nedenle bulanık küme teorisi, klasik küme teorisinin yerine geçemez, çünkü bulanık kümeleri tanımlamak için yine klasik küme teorisine ihtiyaç duyulmaktadır. Bulanık küme teorisi ve uygulamaları son yıllarda oldukça yaygın bir şekilde gelişmiştir. Bu teori dünya çapında özellikle uygulamalı bilimler, dil bilimciler ve filozoflar tarafından kabul görmüştür.

Bir başka teori olan Kaba küme teorisi ise üyelik yoluyla değil, kümenin sınır bölgelerini kullanarak belirsizliği ifade etmektir. Bu teoriye göre bir kümenin sınır bölgesi boşsa, küme kesindir, aksi takdirde küme kabadır (tam olmayan). Bir kümenin boş olmayan sınır bölgesi, kümeyle ilgili bilgimizin kümeyi tam olarak tanımlamak için yeterli olmadığı anlamına gelir. Kaba küme teorisi bulanık küme teorisine benzer şekilde, klasik küme teorisine bir alternatif değil, içine gömülüdür. Fakat kaba kümeler, bulanık küme teorisinde olduğu gibi, kısmi bir üyelikle değil, kümenin sınır bölgesindeki belirsizliğin yaklaşımlarla belirlenmesi ile karakterize edilmesidir. Bu yaklaşımlar topolojideki iç ve kapanış işlemleri ile çakışmaktadır. Kabul edelim ki X kümesi nesnelerin bir evreni ve X in elemanları hakkındaki bilgi eksikliğimizi temsil eden bir R bağıntımız olduğunu varsayalım. Hatta daha da ileri gidersek R'nin bir denklik bağıntısı olduğunu kabul edelim. X in bir A alt kümesi için A kümesini R'ye göre karakterize edersek.

A kümesinin R'ye göre alt yaklaşımı, A nın kesin elemanı olan denklik sınıflarının birleşimidir.

A kümesinin R'ye göre üst yaklaşımı, A nın hem kesin hem de kısmi olarak elemanı olan denklik sınıflarının birleşimidir.

A kümesinin R'ye göre sınır bölgesi ise, A nın kısmi olarak elemanı olan denklik sınıflarının birleşimi olarak tanımlıdır.

Son zamanlarda belirsizliklerin incelenmesinde ortaya atılan bir başka teoride yakın küme teorisidir. Yakın küme teorisi, 2002 yılında Z. Pawlak ve J. F. Peters tarafından yazılan "How Near" adlı bir şiirden esinlenerek tanımlanmıştır. Şiirin teması, insanın yakınlık algısı, kar tanelerinin ağaçlara yakınlığı ve buz sarkıtlarının zemine yakınlığı ile ilgili görüntüleri aktarmasıdır. Dolayısıyla yakınlık kavramı ile günlük hayatımızda sıkça karşılaşırız. Nesneler, olaylar vb. kavramlar arasındaki ilişkiyi yorumlarız. Aslında buradaki ilişki fonksiyonel bir ilişki olarak düşünülebilir. Buradaki fonksiyonlar nesnelerin ortak özelliklerini eşleştiren dönüşümlerdir. Öte yandan topolojide ise proximity uzaylarında yakınlık kavramı karşımıza çıkar. Bu alanda ilk makale Friguyes Riesz'in 1908'deki iki kümenin yakınlığı üzerine olan makalesidir. Yakın küme teorisi ise yukarıda bahsi geçen kaba küme teorisinin daha genel bir halidir. Bu teoride indirgenemezlik bağıntısı, kaba kümelerdeki herhangi bir denklik bağıntısı ile değil nesne özelliklerini veren fonksiyonların her bir alt kümesinin oluşturduğu denklik bağıntıları yardımıyla kurulur. Kaba küme teoriye nazaran yakın kümede bulunan yakınlık eşlikten ziyade nesnelerin ortak özelliklerini nitelemektir. Bu ortak özellik sayısı ne kadar fazla ise nesneler birbirine o kadar yakındır. Örneğin içerisinde bir mavi bir kırmızı araba ve bir mavi bir kırmızı top bulunan oyuncak kutusunu düşünelim. Bir çocuğa bir oyuncak getir dediğimizde nesneyi tanımlayamayacaktır. Fakat bir mavi oyuncak getir dediğimizde nesneyi daha iyi algılayabilirken, bir mavi top getir dediğimizde nesneye en yakın tanımı vermiş oluruz. Yakın küme tanımı ilk olarak J. Peters tarafından "Near sets. Special theory about nearness of objects" isimli makalede tam anlamıyla bahsedilmiştir. Bu makaleden sonra bir çok araştırmacı bu yeni küme teoriyi matematiğin ve çeşitli bilim dallarının bir çok alanında etkin bir şekilde çalışmışlardır.

Özetle, belirsizlik kavramı klasik matematiğin izin vermediği, felsefenin ilgi alanı, bilgisayar bilimlerinin de vazgeçilmez bir kavramıdır.

Belirsizlikler üzerine iki önemli teori olan kaba kümeler ve yakın kümeler üzerine olan bu tez iki ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde literatürde kaba küme teorisi ile ilgili bazı çalışmalardan bahsedilecektir. İkinci bölümde ise yakın kümeler tanıtılacak ve Atmaca tarafından tanımlanan r-yakın topolojik uzaylar konusu ele alınacaktır. Son olarak bu uzayların sağladığı topolojik kavramlar ile bu uzaylardaki dizilerin yakınsaklığı kavramları tanıtılacaktır.

2. KABA KÜMELER

Bu bölümde belirsizliklerin incelenmesinde önde gelen teorilerden biri olan kaba (rough) küme teorisi tanıtılacaktır. Kaba küme teorisi 1982 de Pawlak tarafından tanımlanmıştır. Kısa süre içerisinde bu teori matematiğin ve belirsizlik içeren problemlerin kullanıldığı bilim dallarının çeşitli alanlarında kullanılmıştır. Kısaca kaba küme bir kümenin elemanlarını evrenin üzerinde tanımlı bir denklik bağıntısı yardımıyla iki farklı yaklaşım olarak ifade edilmesidir. Bu iki yaklaşım alt ve üst yaklaşım olarak adlandırılır. Kabaca alt yaklaşım kümenin altkümesi olan denklik sınıflarının birleşimi iken, üst yaklaşım küme ile arakesiti boştan farklı olan denklik sınıflarının birleşimi olarak tanımlanır.

2.1 Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1 *(Pawlak, 1982) X objelerin bir kümesi, $A \subseteq X$ ve X üzerinde bir "R" denklik bağıntısı verilsin. Bu durumda A kümesinin alt ve üst yaklaşımları;*

$$\underline{R}(A) = \{x \in X : [x]_R \subset A\} = \bigcup_{[x]_R \subset A} [x]_R$$

$$\overline{R}(A) = \{x \in X : [x]_R \cap A \neq \varnothing\} = \bigcup_{[x]_R \cap A \neq \varnothing} [x]_R$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 2.1.2 *(Pawlak, 1982) X objelerin bir kümesi, $A \subseteq X$ ve X üzerinde bir "R" denklik bağıntısı verilsin. Bu durumda A kümesinin sınır, pozitif ve negatif yaklaşımları;*

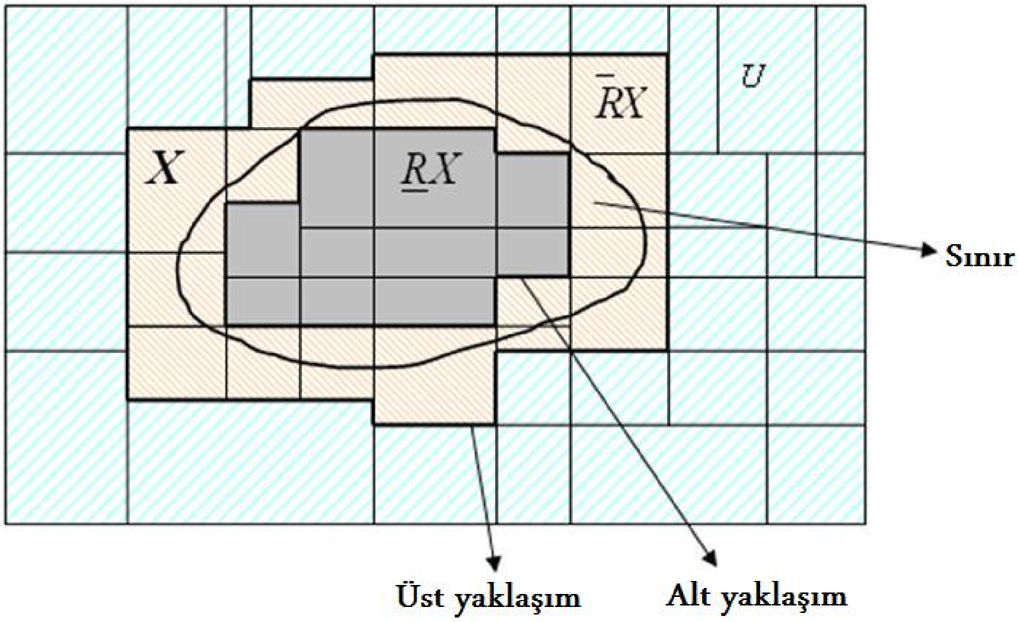
$$BN_R(A) = \overline{R}(A) - \underline{R}(A)$$

$$POS_R(A) = \underline{R}(A)$$

$$NEG_R(A) = U - \overline{R}(A)$$

biçiminde tanımlanır.

Yukarıda verilen tanımlara göre kümenin sınır bölgesi de üst ve alt yaklaşımların arasındaki farktan oluşmaktadır. Bunlar Şekil de açık bir şekilde görülmektedir.



Örnek 2.1.1 *$X = \{a, b, c, d, e\}$ ve X üzerinde $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, d), (e, e)\}$ denklik bağıntısı verilsin. Buna göre R nin denklik sınıfları aşağıdaki gibidir.*

$[a]_R = [b]_R = \{a, b\}$

$[c]_R = [d]_R = \{c, d\}$

$[e]_R = \{e\}$

$A = \{b, c, d\} \subset X$ kümesini üst yaklaşımı, alt yaklaşımı ve sınır bölgesi

$\overline{R}(X) = \{a, b, c, d\}$

$\underline{R}(X) = \{c, d\}$

$BN_R(X) = \overline{R}(X) - \underline{R}(X) = \{a, b\}$

biçimindedir.

Örnek 2.1.2 *(Aktaş ve Çağman,2005) $U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}\}$ objelerin bir kümesi, $F = \{a_1, a_2, a_3\}$ değişkenlerin kümesi ve $V_{a_1} = \{1, 2, 3\}, V_{a_2} = \{1, 2\}, V_{a_3} = \{1, 2, 3, 4\}$ kümeleri de her bir değişkenin aldığı değerlerin kümesini göstersin. Yukarıda verilen 10 obje için elde edilen üç sonucu bir matris formunda aşağıdaki gibi verelim. Ayrıca bu sistem için f_a fonksiyonu tablodaki gibi verilir.*

U	a_1	a_2	a_3
x_1	2	1	3
x_2	3	2	1
x_3	2	1	3
x_4	2	2	3
x_5	1	1	4
x_6	1	1	2
x_7	3	2	1
x_8	1	1	4
x_9	2	1	3
x_{10}	3	2	1

yukarıdaki şekilde verilen verilere göre $[x_i]_R$, x_i *elemanının denklik sınıfını göstermek üzere* $[x_i]_R = \{x_j : x_j, x_i$ *ile aynı değerlere sahip*$, 1 \leq i \leq 10$ *ve* $1 \leq j \leq 10\}$ *şeklinde tanımlansın. Buna göre*

$[x_1]_R = [x_3]_R = [x_9]_R = \{x_1, x_3, x_9\}$

$[x_2]_R = [x_7]_R = [x_{10}]_R = \{x_2, x_7, x_{10}\}$

$[x_4]_R = \{x_4\}$

$[x_5]_R = [x_8]_R = \{x_5, x_8\}$

$[x_6]_R = \{x_6\}$

denklik sınfları elde edilir. U *nun* $A = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_9\}$ *altkümesinin alt yaklaşımı, üst yaklaşımı ve sınırı*

$\overline{R}(A) = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}$

$\underline{R}(A) = \{x_1, x_3, x_4, x_9\}$

$BN_R(A) = \{x_5, x_8\}$

biçimindedir.

Önerme 2.1.1 *(Pawlak, 1982)* X *objelerin bir kümesi,* $A, B \subseteq X$ *ve* X *üzerinde bir "*R*" denklik bağıntısı verilsin. Buna göre aşağıdakiler doğrudur.*

(i) $\underline{R}(A) \subseteq X \subseteq \overline{R}(A)$

(ii) $\underline{R}(\varnothing) = \overline{R}(\varnothing) = \varnothing$

(iii) $\overline{R}(A \cup B) = \overline{R}(A) \cup \overline{R}(B)$

(iv) $\underline{R}(A \cap B) = \underline{R}(A) \cap \underline{R}(B)$

(v) $\underline{R}(A \cup B) \supseteq \underline{R}(A) \cup \underline{R}(B)$

(vi) $\overline{R}(A \cap B) \subseteq \overline{R}(A) \cap \overline{R}(B)$

(vii) $A \subseteq B \Rightarrow \underline{R}(A) \subseteq \underline{R}(B), \overline{R}(A) \subseteq \overline{R}(B)$

(viii) $\underline{R}(X \backslash A) = X \backslash \overline{R}(A)$

(ix) $\overline{R}(X \backslash A) = X \backslash \underline{R}(A)$

(x) $\underline{R}(\underline{R}(A)) = \overline{R}(\underline{R}(A)) = \underline{R}(A)$

(xi) $\overline{R}(\overline{R}(A)) = \underline{R}(\overline{R}(A)) = \overline{R}(A)$

İspat. (i)

$$\begin{aligned} x \in \underline{R}(A) \quad & \Rightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \subset A} [x]_R \\ & \Rightarrow \exists [x]_R \text{ için } x \in [x]_R \subseteq A \\ & \Rightarrow x \in A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in A \quad & \Rightarrow \; x \in A \text{ ve } x \in [x]_R \\ & \Rightarrow x \in [x]_R \cap A \\ & \Rightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \cap A \neq \varnothing} [x]_R \\ & \Rightarrow x \in \overline{R}(A) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \underline{R}(\varnothing) \quad & = x \in \bigcup_{[x]_R \subset \varnothing} [x]_R \\ & = \exists [x]_R \subset \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \\ & = \varnothing \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{R}(\varnothing) \quad & = \bigcup_{[x]_R \cap \varnothing \neq \varnothing} [x]_R \\ & = \varnothing \end{aligned}$$

(iii)

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{R}(A \cup B) \quad & \Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \cap (A \cup B) \neq \varnothing} [x]_R \\
& \Leftrightarrow \exists [x]_R \cap (A \cup B) \neq \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Leftrightarrow \exists [x]_R \cap A \neq \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \text{ veya } \exists [x]_R \cap B \neq \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Leftrightarrow x \in \overline{R}(A) \text{ veya } x \in \overline{R}(B) \\
& \Leftrightarrow x \in \overline{R}(A) \cup \overline{R}(B).
\end{aligned}
$$

(iv)

$$
\begin{aligned}
x \in \underline{R}(A \cap B) \quad & \Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \subset A \cap B} [x]_R \\
& \Leftrightarrow \exists [x]_R \subset A \cap B \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Leftrightarrow \exists [x]_R \subset A \text{ için } x \in [x]_R \text{ ve } \exists [x]_R \subset B \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Leftrightarrow x \in \underline{R}(A) \text{ ve } x \in \underline{R}(B). \\
& \Leftrightarrow x \in \overline{R}(A) \cup \overline{R}(B).
\end{aligned}
$$

(v)

$$
\begin{aligned}
x \in \underline{R}(A) \cup \underline{R}(B) \quad & \Rightarrow x \in \underline{R}(A) \text{ veya } x \in \underline{R}(B) \\
& \Rightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \subset A} [x]_R \text{ veya } x \in \bigcup_{[x]_R \subset B} [x]_R \\
& \Rightarrow \exists [x]_R \subset A \text{ için } x \in [x]_R \text{ veya } \exists [x]_R \subset B \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Rightarrow \exists [x]_R \subset A \cup B \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Rightarrow x \in \underline{R}(A \cup B).
\end{aligned}
$$

(vi)

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{R}(A \cap B) \quad & \Rightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \cap (A \cap B) \neq \varnothing} [x]_R \\
& \Rightarrow \exists [x]_R \cap (A \cup B) \neq \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Rightarrow \exists [x]_R \cap A \neq \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \text{ veya } \exists [x]_R \cup B \neq \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Rightarrow x \in \overline{R}(A) \text{ veya } x \in \overline{R}(B) \\
& \Rightarrow x \in \overline{R}(A) \cap \overline{R}(B).
\end{aligned}
$$

(vii)

$$\begin{aligned} x \in \underline{R}(A) &\Rightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \subset A} [x]_R \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \subset B} [x]_R \\ &\Rightarrow x \in \underline{R}(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x \in \overline{R}(A) &\Rightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \cap A \neq \varnothing} [x]_R \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \cap B \neq \varnothing} [x]_R \\ &\Rightarrow x \in \overline{R}(B) \end{aligned}$$

(viii)

$$\begin{aligned} x \in \underline{R}(X \backslash A) &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \subset X \backslash A} [x]_R \\ &\Leftrightarrow \exists [x]_R \subset X \backslash A \text{ için } x \in [x]_R \\ &\Leftrightarrow \exists [x]_R \cap A = \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \\ &\Leftrightarrow x \notin \overline{R}(A) \\ &\Leftrightarrow x \in X \backslash \overline{R}(A) \end{aligned}$$

(ix)

$$\begin{aligned} x \in \overline{R}(X \backslash A) &\Leftrightarrow \exists [x]_R \cap (X \backslash A) \neq \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \\ &\Leftrightarrow \exists [x]_R \nsubseteq A \text{ için } x \in [x]_R \\ &\Leftrightarrow x \in \underline{R}(A) \end{aligned}$$

(x)

$$\begin{aligned} x \in \underline{R}(\underline{R}(A)) &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \subset \underline{R}(A)} [x]_R \\ &\Leftrightarrow \exists [x]_R \subset \underline{R}(A) \text{ için } x \in [x]_R \\ &\Leftrightarrow \exists [x]_R \subset \bigcup_{[x]_R \subset A} [x]_R \text{ için } x \in [x]_R \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \subset A} [x]_R \\ &\Leftrightarrow x \in \underline{R}(A) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{R}(\underline{R}(A)) \quad & \Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \cap (\underline{R}(A)) \neq \varnothing} [x]_R \\
& \Leftrightarrow \exists [x]_R \cap (\underline{R}(A)) \neq \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Leftrightarrow \exists [x]_R \cap (\bigcup_{[x]_R \subset A} [x]_R) \neq \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Leftrightarrow \exists [x]_R \subset A \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \subset A} [x]_R \\
& \Leftrightarrow x \in \underline{R}(A)
\end{aligned}
$$

(xi)

$$
\begin{aligned}
x \in \overline{R}(\overline{R}(A)) \quad & \Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \cap (\overline{R}(A)) \neq \varnothing} [x]_R \\
& \Leftrightarrow x \in \exists [x]_R \cap (\overline{R}(A)) \neq \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Leftrightarrow x \in \exists [x]_R \cap (\bigcup_{[x]_R \cap A \neq \varnothing} [x]_R) \neq \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Leftrightarrow x \in \exists [x]_R \cap A \neq \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \cap A \neq \varnothing} [x]_R \\
& \Leftrightarrow x \in \overline{R}(A)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x \in \underline{R}(\overline{R}(A)) \quad & \Leftrightarrow x \in \bigcup_{[x]_R \subset \overline{R}(A)} [x]_R \\
& \Leftrightarrow \exists [x]_R \subset \overline{R}(A) \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Leftrightarrow \exists [x]_R \subset (\bigcup_{[x]_R \cap A \neq \varnothing} [x]_R) \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Leftrightarrow x \in \exists [x]_R \cap A \neq \varnothing \text{ için } x \in [x]_R \\
& \Leftrightarrow x \in \overline{R}(A)
\end{aligned}
$$

■

Rough kümeler üyelik fonksiyonu kullanılarak da tanımlanabilir.

Tanım 2.1.3 *X objelerin bir kümesi, $A \subseteq X$ ve X üzerinde bir "R" denklik bağıntısı verilsin. $|A|$, A in eleman sayısını göstermek üzere kaba üyelik fonksiyonu*

$$\mu_A^R(x) = \frac{|[x]_R \cap A|}{|[x]_R|}$$

biçiminde tanımlıdır.

Kaba üyelik fonksiyonu x elemanının A kümesine ait olma derecesini verir. Burada

$A \cap [x]_R = \varnothing$ olması halinde $\mu_A^R(x) = 0$

$A \cap [x]_R \neq \varnothing$ olması halinde $\mu_A^R(x) \neq 0$

$[x]_R \subseteq A$ olması halinde $\mu_A^R(x) = 1$

olacağı μ_A^R fonksiyonun tanımından açıktır.

Önerme 2.1.2 *(Aktaş ve Çağman,2005) X objelerin bir kümesi, $A, B \subseteq X$ ve X üzerinde bir "R" denklik bağıntısı verilsin. Bu durumda aşağıdakileri geçerlidir.*

(i) $\mu_A^R(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \underline{R}(A)$

(ii) $\mu_A^R(x) = 0 \Leftrightarrow x \in X - \overline{R}(A)$

(iii) $0 < \mu_A^R(x) < 1 \Leftrightarrow x \in BN_R(A)$

(iv) $\mu_{X \setminus A}^R(x) = 1 - \mu_A^R(x)$

(v) $\mu_{A \cup B}^R(x) \geq \max\{\mu_A^R(x), \mu_B^R(x)\} \qquad , x \in X$

(vi) $\mu_{A \cap B}^R(x) \leq \min\{\mu_A^R(x), \mu_B^R(x)\} \qquad , x \in X$

İspat. (i)

$$\begin{aligned} \mu_A^R(x) = 1 \quad &\Leftrightarrow \frac{|[x]_R \cap A|}{|[x]_R|} = 1 \\ &\Leftrightarrow [x]_R \cap A = [x]_R \\ &\Leftrightarrow [x]_R \subseteq A \\ &\Leftrightarrow x \in \underline{R}(A) \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\mu_A^R(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \frac{|[x]_R \cap A|}{|[x]_R|} = 0 \\
&\Leftrightarrow |[x]_R \cap A| = 0 \\
&\Leftrightarrow [x]_R \cap A = \varnothing \\
&\Leftrightarrow [x]_R \cap X \backslash A \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow x \in X - \overline{R}(A)
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
0 < \mu_A^R(x) < 1 \quad &\Leftrightarrow 0 < \frac{|[x]_R \cap A|}{|[x]_R|} < 1 \\
&\Leftrightarrow [x]_R \cap A \subset [x]_R \text{ ve } [x]_R \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{R}(A) \text{ ve } x \in \underline{R}(A) \\
&\Leftrightarrow x \in BN_R(A)
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\mu_{X \backslash A}^R(x) \quad &= \frac{|[x]_R \cap (X \backslash A)|}{|[x]_R|} \\
&= \frac{|[x]_R \cap X|}{|[x]_R|} - \frac{|[x]_R \cap A|}{|[x]_R|} \\
&= 1 - \frac{|[x]_R \cap A|}{|[x]_R|} \\
&= 1 - \mu_A^R(x)
\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}
\mu_{A \cup B}^R(x) \quad &= \frac{|[x]_R \cap (A \cup B)|}{|[x]_R|} \\
&= \frac{|([x]_R \cap A) \cup ([x]_R \cap B)|}{|[x]_R|} \\
&= \frac{|[x]_R \cap A|}{|[x]_R|} + \frac{|[x]_R \cap B|}{|[x]_R|} - \frac{|[x]_R \cap (A \cap B)|}{|[x]_R|} \\
&\geq \frac{|[x]_R \cap A|}{|[x]_R|} \text{ veya } \geq \frac{|[x]_R \cap B|}{|[x]_R|} \text{ dır.} \\
&= \max\{\mu_A^R(x), \mu_B^R(x)\}
\end{aligned}$$

(vi)

$$\begin{aligned}
\mu^R_{A\cap B}(x) &= \frac{|[x]_R \cap (A\cap B)|}{|[x]_R|} \\
&\leq \frac{|[x]_R \cap A|}{|[x]_R|} \text{ veya } \leq \frac{|[x]_R \cap B|}{|[x]_R|} \text{ dır.} \\
&= \min\{\mu^R_A(x), \mu^R_B(x)\}
\end{aligned}$$

■

Sonuç 2.1.1 *(Pawlak, 1982) Üyelik fonksiyonu yardımıyla alt yaklaşım, üst yaklaşım ve sınır bölgeleri*

$$\underline{R}(A) = \{x \in X : \mu^R_A(x) = 1\}$$

$$\overline{R}(A) = \{x \in X : \mu^R_A(x) > 0\}$$

$$BN_R(A) = \{x \in X : 0 < \mu^R_A(x) < 1\}$$

biçiminde de tanımlanabilir.

Örnek 2.1.3 *Örnek 2.1.2 ı göz önüne alırsak. A nın her bir elemanı için üyelik değerleri*

$$\mu^R_X(x_1) = \mu^R_X(x_3) = \mu^R_X(x_9) = 1$$

$$\mu^R_X(x_2) = \mu^R_X(x_7) = \mu^R_X(x_{10}) = 0$$

$$\mu^R_X(x_4) = 1$$

$$\mu^R_X(x_5) = \mu^R_X(x_8) = \frac{1}{2}$$

$$\mu^R_X(x_6) = 0$$

biçimindedir. Buna göre

$$\overline{R}(A) = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_8, x_9\}$$

$$\underline{R}(A) = \{x_1, x_3, x_4, x_9\}$$

$$BN_R(A) = \{x_5, x_8\}$$

olduğu bulunur.

2.2 Topolojik Uzaylarda Kaba Küme Teorisi

Bölümün girişinde de belirttiğimiz gibi kaba küme teorisi bir evrenin altkümelerinin evren üzerinde tanımlı denklik bağıntısın oluşturduğu bölüntüler yardımıyla karakterize edilmesi ihtiyacından dolayı ortaya atılmıştır. Bu bölüntüler, yaklaşım uzayı olarak adlandırılan bir $K = (X, R)$ topolojik uzayını karakterize eder. Burada X evren ve R bir denklik bağıntısıdır. ((Lin, 1992), (Pawlak, 1991)). Kaba küme teorisindeki uzay, R nin denklik sınıfları ile karakterize edilen yaklaşım uzayıdır. Bu topoloji, clopen (kaçık) topoloji olarak adlandırılan türdendir. Clopen topolojik uzayda açık kümeler aynı zamanda kapalı kümelerdir. Clopen topolojiye dijital geometride quasi-ayrık topolojide denir. Lin (1992) deki çalışmasında bu uzaya Pawlak uzayı demiştir. Clopen topoloji geçişli yaklaşımların bir türüdür. Ancak yaklaşımlar genelde geçişli olmadığı için bu çok kısıtlayıcıdır. Örneğin "L.A., Batı L.A.ya yakın, L.A., Doğu L.A. ya yakın olmasına rağmen Batı L.A., Doğu L.A. ya yakın olarak düşünülemez. Bu şekilde yakınlık kurulan yaklaşımlar genelde geçişli değildirler. Lin ((Lin, 1988), (Lin, 1990), (Lin, 1998)) deki çalışmalarında böyle durumları incelemek için komşuluklar sistemi tanımladı. Bunun için yaklaşım uzayını topolojik uzay olarak alacağız.

Bu kesimde kaba küme özellikleri topolojik kavramlarla verilecektir. $A \subseteq X$ olsun. A, A° ve A^b sırasıyla A nın kapanışını, içini ve sınırını gösterir. Eğer $A^b = \varnothing$ ise A belirlidir (exact). Aksi taktirde A belirsizdir (rough)dır. Açıkca A belirlidir ancak ve ancak $\overline{A} = A^\circ$dir. Pawlak uzayında $A \subseteq X$ için A ya belirsiz yada belirlidir. Genel topolojide $A \subseteq X$ ise A aşağıdaki koşulları sağlar.

(i) A belirli ise yani $\overline{A} = A = A^\circ$ ise A tamamen tanımlanabilirdir.

(ii) $A = A^\circ, A \neq \overline{A}$ ise A içsel tanımlanabilirdir.

(iii) $A \neq A^\circ$, $A = \overline{A}$ ise A dışsal tanımlanabilirdir.

(iv) $A \neq A^\circ, A \neq \overline{A}$ ise A tanımlamazdır.

Önerme 2.2.1 *(Lashin ve ark., 2005) A, (X, τ) da belirli bir küme ve $\tau \subset \tau'$ olsun. Bu durumda A, τ' ye göre de belirli kümedir.*

İspat. $BND_\tau A \supset BND_{\tau'} A$ ve $BND_\tau A = \varnothing$ olsun. $BND_{\tau'} A = \varnothing$ olduğundan A τ' de belirlidir. Başka bir deyişle A, τ da belirli olduğundan A τ da hem açık hem kapalı ve sonuç olarak τ' de de hem açık hem kapalıdır. Buradan A τ' de belirlidir. ■

τ' belirli olupta τ belirli olmayan kümeye kolayca örnek verilebilir. Açıktır ki $Cl_{\tau'} A = Cl_\tau A \Leftrightarrow int_{\tau'} A^C = int_\tau A^C$. Bir sonraki önerme $\tau \subset \tau'$ iken τ' ünde belirli olan bir kümenin τ da belirli olma şartını verir.

Önerme 2.2.2 *(Lashin ve ark., 2005) (X, τ) bir topolojik uzay ve $\tau \subset \tau'$ olsun. τ' deki her belirli küme τ da da belirlidir.* $\Leftrightarrow \forall G \in \tau'$ *için* $Cl_{\tau'} G = Cl_\tau G$

İspat. A τ' da belirli olduğundan $Cl_{\tau'} A = A$ ve $Cl_\tau A = A$ buradan $Cl_{\tau'} A = Cl_\tau A$ dır.

Tersine eğer $Cl_{\tau'} A = Cl_\tau A$ ve A τ' ün de belirli olsun. A τ da belirli olur. ■

Bir önceki bölümde tanımladığımız üyelik fonksiyonu denklik sınıfları yardımıyla tanımlanmıştı. Burada ise bunu topolojik uzaylara genişletileceğiz. Sonlu A kümesi üzerinde bir τ topolojisi verilsin. τ nun β tabanına göre kaba üyelik fonksiyonu

$$\mu_A^\tau(x) = \frac{|\{\cap B_x\} \cap A|}{|\{\cap B_x\}|}, \quad B_x \in \beta, \ x \in X$$

biçiminde tanımlanır. Burada B_x, β nın x i içeren herhangi bir elemanıdır. Farklı tabanlarda aynı sayıyı elde edebiliriz. Klasik topolojiden bilindiği üzere bir tabanda x bulunduran tüm elemanların kesişimi ile τ da x i bulunduran tüm elemanların kesişimi aynıdır. Eğer topoloji Clopen topoloji ise x noktası tabanın bir tek elemanına aittir. Yani taban elemanları ikişer ikişer ayrıktır. Bununla τ, ayrık topoloji ise üyelik fonksiyonu klasik küme teoriyi, eğer τ, Clopen topoloji (Quasi ayrık) ise kaba küme teoriyi verir. Şimdi üyelik fonksiyonunu açıklayan bir örnek verelim.

Örnek 2.2.1 *(Lashin ve ark., 2005)* $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $\beta = \{\{2\}, \{3\}, \{0, 1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{3, 5\}\}$, $A = \{2, 4, 5\}$ *olsun. Bu durumda A nın β ya göre üyelik fonksiyonu*

$$\mu_A^\tau(0) = \frac{|\{0, 1, 2\} \cap \{2, 4, 5\}|}{|\{0, 1, 2\}|} = \frac{1}{3}$$

$$\mu_A^\tau(1) = \frac{|\{0, 1, 2\} \cap \{2, 4, 5\}|}{|\{0, 1, 2\}|} = \frac{1}{3}$$

$$\mu_A^\tau(2) = \frac{|\{2\} \cap \{0,1,2\} \cap \{2,3,4\} \cap \{2,4,5\}|}{|\{2\} \cap \{0,1,2\} \cap \{2,3,4\}|} = 1$$

$$\mu_A^\tau(3) = \frac{|\{3\} \cap \{3,5\} \cap \{2,4,5\}|}{|\{3\} \cap \{3,5\}|} = 0$$

$$\mu_A^\tau(4) = \frac{|\{2,3,4\} \cap \{2,4,5\}|}{|\{2,3,4\}|} = \frac{2}{3}$$

$$\mu_A^\tau(5) = \frac{|\{3,5\} \cap \{2,4,5\}|}{|\{3,5\}|} = \frac{1}{2}$$

Eğer evren sonsuz elemanlı ise bu üyelik fonksiyonu her bir nokta için yalnızca sonlu tane minimal komşuluğun olması anlamındadır. Bu yerel sonlu komşuluklar sistemine sahip uzaylar için kullanılabilir. Kaba üyelik fonksiyonu yardımı ile topolojik uzaylar üzerinde bulanık (fuzzy) kümeler tanımlanabilir. $A \subseteq X$ olmak üzere bir (X, τ) topolojik uzayında kaba üyelik fonksiyonunu kullanarak $\widetilde{A}$ bulanık kümesi

$$\widetilde{A} = \{(x, \mu_A^\tau(x)) : \forall x \in U\}$$

biçiminde tanımlanabilir. Bu durumda yukarıdaki örnekten $A = \{2,4,5\}$ için

$$\widetilde{A} = \left\{\left(0, \tfrac{1}{3}\right), \left(1, \tfrac{1}{3}\right), (2,1), (3,0), \left(4, \tfrac{2}{3}\right), \left(5, \tfrac{1}{2}\right)\right\}$$

biçimindedir.

2.3 Bağıntıların Topolojisinde Kaba Küme Teorisi

Bir önceki bölümde de belirttiğimiz gibi Lin genel durumları ele almak için komşuluklar sistemi biçimselliğini inceledi. Burada R ikili bağıntısından doğrulan topolojiyi düşüneceğiz. X sonlu evren ve R, X üzerinde bir bağıntı olsun. Bir $x \in X$ elemanın sağ komşuluğu

$$xR = \{y : xRy\}$$

biçiminde tanımlanır. x in sağ komşuluğu xR dir. Bununla birlikte xR, xR deki herhangi bir elemanın sağ komşuluğu olmayabilir. Aslında xR yi sağ komşuluk olarak kabul eden tüm elemanların kümesi, xR nin merkezi olarak adlandırılır. Bütün merkezlerin koleksiyonu X in bir parçalanışıdır. (Bkz Lin (1998))

Konun devamında sağ komşuluklar yardımı ile doğrulan topoloji ele alınacaktır. Bu düşünceyle açık küme olmanın doğası gereği xR topolojik anlamda her noktasının komşuluğu olan bir açık kümedir. $S = \{xR : x \in U\}$ sağ komşuluklar ailesini alttaban kabul eden τ topolojisini ele alalım. S ailesi τ topolojisinin alttabanı olarak $S_R = \{xR : x \in U\}$ ile gösterilecek ve $S_x = \{G \in S_R : x \in G\}$ yazılacaktır.

Bir alttabanın elemanlarının bütün sonlu kesişimlerinin ailesi bir tabandır. Kaba üyelik fonksiyonu alt taban yardımı ile

$$\mu_A^{\tau}(x) = \frac{|\{\cap S_x\} \cap A|}{|\{\cap S_x\}|} \quad x \in S_x \ , \ S_x \in S$$

biçiminde formülize edilebilir. Bu kaba üyeliği rough küme teorisinden yada Lin in sağ komşuluklarının kaba üyelik fonksiyonundan oldukça farklıdır. Lin $\cap S_x$ yerine tek olan xR denklik sınıflarını kullanmıştır. Aşağıdaki örnekte de görüleceği üzere bir $y \in U$ birden fazla S_x e ait olabilir. Ayrıca S_x lerden biri ve xR aynı kümelerdir. Bununla beraber S_x, τ topolojisinde x in bir açık komşuluğu iken xR bir sağ komşuluktur ve tektir, yani farklıdırlar.

Örnek 2.3.1 *(Lashin ve ark., 2005)* $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *ve* $0_R = 1_R = \{0, 1, 2\}$ $2_R = 3_R = \{2, 3\}$ $\quad 4_R = \{3, 4\}$ $\quad 5_R = \{5\}$ *olsun.* $S = \{\{0, 1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5\}\}$

alt tabanı için $\beta = \{\{0,1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{5\}, \{2\}, \{3\}\}$ *tabanı elde edilir. Bu taban ait topoloji* $\tau = \{U, \varnothing, \{0,1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{5\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1,2,3\}, \{0,1,2,3,4\}, \{0,1,2,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{3,4,5\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{2,3,4,5\}\}$ *biçimindedir.* $A = \{0,1,2,3\}$ *için*

$$\mu_A^\tau(0) = \frac{|\{0,1,2\} \cap \{0,1,2,3\}|}{|\{0,1,2\}|} = 1 \qquad \mu_A^\tau(1) = \frac{|\{0,1,2\} \cap \{0,1,2,3\}|}{|\{0,1,2\}|} = 1$$
$$\mu_A^\tau(2) = \frac{|\{2\} \cap \{0,1,2,3\}|}{|\{2\}|} = 1 \qquad \mu_A^\tau(3) = \frac{|\{3\} \cap \{0,1,2,3\}|}{|\{3\}|} = 1$$
$$\mu_A^\tau(4) = \frac{|\{3,4\} \cap \{0,1,2,3\}|}{|\{3,4\}|} = \frac{1}{2} \qquad \mu_A^\tau(5) = \frac{|\{5\} \cap \{0,1,2,3\}|}{|\{5\}|} = 0$$

dır. Buradan $\widetilde{A} = \{(0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (4,1/2), (5,0)\}$ *olduğu bulunur.*

Kaba üyelik fonksiyonundan alt yaklaşım, üst yaklaşım, negatif ve sınır bölgeleri;

$\underline{R}(A) = A^\circ = \{0,1,2,3\}$

$\overline{R}(A) = \overline{A} = \{0,1,2,3,4\}$

$NEG_R(A) = \{5\}$

$BND_R(A) = \{4\}$

biçiminde olduğu elde edilir. τ *da kapanış ve iç tanımlarından* A *nın içi ve kapanışı*

$A^\circ = \cup\{G : G\ \tau$ *da açık küme ve* $G \subseteq A\} = \{0,1,2\} \cup \{2,3\} \cup \{2\} \cup \{3\} = \{0,1,2,3\}$

$\overline{A} = \cap\{F : F\ \tau$ *da kapalı küme ve* $F \subseteq X\} = X \cap \{0,1,2,3,4\} = \{0,1,2,3,4\}$

biçimindedir.

3. YAKIN KÜMELER

Literatürde yakınlık kavramından daha öncelerde bahsedilmesine rağmen yakın küme kavramı ilk olarak J. Peters tarafından 2007 de "Near sets. Special theory about nearness of objects" isimli makalede verilmiştir. Peters bu makalesinde nesnelerin ortak özelliklerini veren fonksiyonlar yardımıyla oluşturduğu ayırt edilmezlik bağıntısı ile yakın yaklaşım uzayını kurmuştur. Peters'in bu makalesini takiben birçok araştırmacı, yakın yaklaşım uzayını temel alarak bu yeni küme teorisini, matematiğin çeşitli alanlarına uygulamıştır.

Öte yandan matematikteki yakınlık kavramı ise ilk olarak komşuluk kavramı ile karşımıza çıkmaktadır. Komşuluk "kabaca bir noktaya belirli bir ölçüde yakın olan elemanların kümesi" olarak tanımlanabilir. Hatta klasik matematiğin dışına çıkılacak olunursa herhangi bir metrik uzayda noktalar arasındaki uzaklık kavramı yardımıyla da yakınlıktan bahsedilebilir. Topolojik uzaylarda ise açık küme kavramı noktaların yakınlığını söylemenin doğal bir yoludur. Bu yakınlık kavramı metrik uzaylardan bağımsız olarak bir uzaklığa bağlı kalmaksızın aynı kümenin elemanı olma durumudur. Kısacası yakınlık kavramının topolojik uzayların kuruluşunun bir temel yaklaşımı olduğu söylenebilir.

3.1 Temel Kavramlar

Bu bölümde yakın kümelerin özellikleri ve bazı tanımlarını vereceğiz.

Nesne Tanımlaması

Tanımlamada Kullanılan Gösterimler

Sembol	Anlamı
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
O	Algısal nesnelerin Kümesi
X	$X \subseteq O$ örnek nesnelerin kümesi
x	$x \in O$ örnek nesne
F	nesne özelliklerini temsil eden fonksiyonlar kümesi
B	$B \subseteq F$
Φ	$\Phi : O \to R^L$, nesne tanımı
L	tanım uzunluğu
i	$i \leq L$
φ_i	$\varphi_i \in B$ burada $\Phi_i : X \to \mathbb{R}$ çıkarım fonksiyonu
$\Phi(x)$	$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_L(x))$

Çevremizde olan nesneleri tanımları ile biliriz. Bir $x \in O$ nesnesinin tanımlaması denildiğinde $\Phi(x)$ fonksiyonel değer dizisinden bahsedilir. Burada önemli olan nesneyi tanımlamak için $\varphi_i : O \to \mathbb{R}$ bileşen fonksiyonlarının seçimidir. Burada verilen fonksiyon sayısı ne kadar azsa nesnenin tanımı o kadar zayıftır. Örneğin; φ_1 fonksiyonu büyüklüğü tanımlayan bir fonksiyon olsun. Büyük bir cisim denildiğinde aklımıza birden fazla cisim gelmektedir. Devam edecek olursak φ_2 fonksiyonu canlı olsun. Bu fonksiyonun değeri bizim nesnemize daha da yakınlaştırır. Bu şekilde fonksiyonları çoğaltarak nesnenin en yakın tanımını verebiliriz. Kabul edelim ki $B \subseteq F$ nesnenin özelliklerini yeterince sunan fonksiyonların bir kümesi olsun. O halde bu B kümesi üzerinde verilen φ_i fonksiyonları bize nesne hakkında yakın bir tanımlama verecektir. Yani $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_L(x))$ biçiminde bir vektör değerli fonksiyon tanımlarsak bu tanımlama nesnenin tanımlamasında temel teşkil edecektir.

Nesnelerin yakınlığı

Tanımlamada Kullanılan Gösterimler	
Sembol	Anlamı
$\sim_B$	$\sim_B = \{(x,x') : \varphi(x) = \varphi(x'), \forall \varphi \in B\}$
$[x]_B$	$[x]_B = \{x' \in X : x \sim_B x'\}$ Denklik sınıfı
$O/\sim_B$	$O/\sim_B = \{[x]_B : x \in O\}$ Bölüm kümesi
Δ_{φ_i}	$\Delta_{\varphi_i} = \lvert\varphi_i(x) - \varphi_i(x')\rvert$

Tanım 3.1.1 *(Peters 2007) $x, x' \in O, B \subseteq F$ olsun. Bu durumda*

$$\sim_B = \{(x,x') \in O \times O : \Delta_{\varphi_i} = 0, \forall \varphi_i \in B\}$$

biçiminde tanımlı $\sim_B$ bağıntısına O üzerinde ayırt edilemezlik bağıntısı denir.

Yukarıdaki tanımda verilen denklik bağıntısında aynı denklik sınıfında bulunan x ve x' nesnelerinin tanımlamalarının hepsinin aynı olduğu yani nesnelerin birbirleri ile çok yakın oldukları hatta aynı oldukları söylenebilir.

Tanım 3.1.2 *(Peters 2007) $B \subseteq F$ nesnelerin özelliklerinin veren fonksiyonların kümesi ve $x, x' \in O$ olsun. Eğer bir $\varphi_i \in B$ için $\Delta_{\varphi_i} = 0$ ise x ve x' nesneleri birbirlerine minimal olarak yakındır denir ve $x \sim_{\{\varphi_i\}} x'$ ile gösterilir. Bu tanımlamaya "Yakınlık Tanımlama Prensibi (Nearness Description Principle- NDP)" denir.*

Temel Yaklaşım Uzayı

Tanım 3.1.3 *(Peters 2007) O algılanabilir nesnelerin kümesi, F nesne özelliklerini belirleyen fonksiyonların kümesi, $B \subseteq F$ ve $\sim_B$ ayırt edilmezlik bağıntısı ise $FAS = (O, F, \sim_B)$ üçlüsüne temel yaklaşım uzayı denir.*

Tanım 3.1.4 *(Peters 2007) $(O, F, \sim_B)$ bir temel yaklaşım uzayı ve $A \subseteq O$ olsun.*

(1) A in alt kümesi olan $[x]_B \in O/ \sim_B$ elemanlarının birleşimine A kümesinin B alt yaklaşımı denir ve

$$B_*A = \bigcup_{[x]_B \subseteq A} [x]_B$$

ile gösterilir.

(2) A ile arakesiti boştan farklı olan $[x]_B \in O/ \sim_B$ elemanlarının birleşimine A kümesinin B alt yaklaşımı denir ve

$$B^*A = \bigcup_{[x]_B \cap A \neq \varnothing} [x]_B$$

ile gösterilir.

(3) A nın sınır bölgesi $Bnd_B A$ ile gösterilir ve

$$Bnd_B A = B^*A \backslash B_*A = \{x \in O : x \in B^*A \text{ ve } x \notin B_*A\}$$

biçiminde tanımlıdır.

Yukarıdaki tanım dikkatle incelenirse temel yaklaşım uzayı ile kaba kümenin karakterize ettiği evren benzerlik gösterir. Kaba kümeler evrenin üzerindeki denklik bağıntısı ile kurulurken temel yaklaşım uzayı nesne özelliklerini veren fonksiyonlar yardımı ile oluşturulan fonksiyonlar yardımı ile kurulur. Bu bağlamda temel yaklaşım uzayı ile kaba kümeler arasında yakın bir ilişki vardır. Bu nedenle Yakın küme teoriye Kaba küme teorinin bir genişlemesi gözü ile bakılabilir. Çünkü denklik bağıntıları temel yaklaşım uzayındaki gibi fonksiyonel olarak da üretilebilir. Şimdi yakın küme teorinin temelini teşkil eden yakın yaklaşım uzayını ve alt yaklaşım, üst yaklaşım ve sınır bölgelerini tanımlayalım.

Yakın Yaklaşım Uzayı

Tanımlamada Kullanılan Gösterimler	
Sembol	Anlamı
B	$B \subseteq F$
B_r	$r \leq \|B\|$ nesne özelliklerini veren B nin r li kombinasyonu
$\sim_{B_r}$	B_r üzerinde tanımlı ayırt edilmezlik bağıntısı
$[x]_{B_r}$	$[x]_{B_r} = \{x' \in X : x \sim_{B_r} x'\}$ denklik sınıfı
$O/\sim_{B_r}$	$O/\sim_{B_r} = \{[x]_{B_r} : x \in O\}$ Bölüm kümesi
$N_r(B)$	$N_r(B) = \{O/\sim_{B_r} : B_r \subseteq B\}$ her bir kombinasyon için bölüntü kümesi
$N_r(B)_* A$	$N_r(B)_* A = \bigcup\limits_{[x]_{B_r} \subseteq A} [x]_{B_r}$ alt yaklaşım
$N_r(B)^* A$	$N_r(B)^* A = \bigcup\limits_{[x]_{B_r} \cap A \neq \varnothing} [x]_{B_r}$ üst yaklaşım

O algılanabilir nesnelerin kümesi, F nesne özelliklerini belirleyen fonksiyonların kümesi olsun. $B_r \subseteq B \subseteq F$ ve $|B_r| = r$ olmak üzere her bir B_r alt fonksiyon kümesi için ayırt edilmezlik bağıntısı tanımlanabilir bu bağıntıyı $\sim_{B_r}$ ile gösterelim. Bu bağıntı O algılanabilir nesneler kümesinin her bir B_r kombinasyonu için temel yaklaşım uzayından farklı bir ayrışın oluşmasına yol açar. Burada $\sim_{B_r}$ bağıntısı O algılanabilir nesneler kümesini $[x]_{B_r}$ yakınlık sınıflarına ayırır ve $O/\sim_{B_r} = \{[x]_{B_r} : x \in O\}$ kümesi bölüm kümesidir. Sonuç olarak her bir B_r alt fonksiyon kümesi için ayrışım oluşacağından $N_r(B) = \{O/\sim_{B_r} : B_r \subseteq B\}$ her bir kombinasyon için bölüntü kümesi elde edilir.

Tanım 3.1.5 *(Peters 2007) O algılanabilir nesnelerin kümesi, F nesne özelliklerini belirleyen fonksiyonların kümesi, $B \subseteq F$ olsun. $NAS = (O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ dörtlüsüne yakın yaklaşım uzayı denir.*

Tanım 3.1.6 *(Peters 2007) $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ bir temel yaklaşım uzayı ve $A \subseteq O$ olsun.*

(1) A in alt kümesi olan $[x]_{B_r} \in O/\sim_{B_r}$ elemanlarının birleşimine A kümesinin B_r altyaklaşımı denir ve

$N_r(B)_*A = \underset{[x]_{B_r} \subseteq A}{\cup} [x]_{B_r}$

ile gösterilir.

(2) A ile arakesiti boştan farklı olan $[x]_{B_r} \in O/\sim_{B_r}$ *elemanlarının birleşimine A kümesinin* B_r *üst yaklaşımı denir ve*

$N_r(B)^*A = \underset{[x]_{B_r} \cap A \neq \varnothing}{\cup} [x]_{B_r}$

ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımları daha

Örnek 3.1.1 *(Peters 2007)* $X = \{a, b, c, d, e, \}$, $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ *nesne özelliklerini temsil eden* $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarının ailesi*

	a	b	c	d	e
φ_1	1	0	0	1	0
φ_2	0	0	2	1	2
φ_3	1	1	1	2	1

biçiminde tanımlı olsun. Şimdi nesne özelliklerini veren fonksiyonların her bir r li kombinasyonu için denklik sınıflarını oluşturalım. Bu denklik sınıfları

$[a]_{\{\varphi_1\}} = \{a, d\}$, $[b]_{\{\varphi_1\}} = \{b, c, e\}$

$[a]_{\{\varphi_2\}} = \{a, b\}$, $[c]_{\{\varphi_2\}} = \{c, e\}$, $[d]_{\{\varphi_2\}} = \{d\}$

$[a]_{\{\varphi_3\}} = \{a, b, c, e\}$, $[d]_{\{\varphi_3\}} = \{d\}$

$[a]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{a\}$, $[b]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{b\}$, $[c]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{c, e\}$, $[d]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{d\}$

$[a]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = \{a\}$, $[b]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = \{b\}$, $[c]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = \{c, e\}$, $[d]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = \{d\}$

$[a]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}} = \{a, b\}$, $[c]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}} = \{c, e\}$, $[d]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}} = \{d\}$

$[a]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}} = \{a\}$, $[b]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}} = \{b\}$, $[c]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}} = \{c, e\}$, $[d]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}} = \{d\}$

biçiminde olacaktır. Buradan

$N_1(B) = \{[a]_{\{\varphi_1\}}, [b]_{\{\varphi_1\}}, [a]_{\{\varphi_2\}}, [c]_{\{\varphi_2\}}, [d]_{\{\varphi_2\}}, [a]_{\{\varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_3\}}\}$

$N_2(B) = \{[a]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}}, [b]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}}, [c]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}}, [d]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}}, [a]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}}, [a]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}}\}$

$N_3(B) = \{[a]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}}\}$

biçimindedir. Örneğin $A = \{b, c, d\}$ alt kümesi için alt ve üst yaklaşımlar

$$N_1(B)_*A = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq A} [x]_{B_r} = \{d\} \qquad N_1(B)^*A = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap A \neq \varnothing} [x]_{B_r} = X$$

$$N_2(B)_*A = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq A} [x]_{B_r} = \{b, d\} \qquad N_2(B)^*A = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap A \neq \varnothing} [x]_{B_r} = \{b, c, d, e\}$$

$$N_3(B)_*A = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq A} [x]_{B_r} = \{b, d\} \qquad N_3(B)^*A = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap A \neq \varnothing} [x]_{B_r} = \{b, c, d, e\}$$

biçiminde olacaktır.

Teorem 3.1.1 *$(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ bir yakın yaklaşım uzayı, $X \subseteq O$, (X, τ) bir topolojik uzay ve $r \leq s \leq |B|$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.*

(1) $G \subseteq H$ ise $N_r(B)^*(G) \subseteq N_r(B)^*(H)$ dır.

(2) $B_r \subseteq B_s$ ise $[x]_{B_s} \subseteq [x]_{B_r}$ dir.

İspat. (1) $G \subseteq H$ olsun. Buradan $N_r(B)^*(G) = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap G \neq \varnothing} [x]_{B_r} \subseteq \bigcup_{[x]_{B_r} \cap H \neq \varnothing} [x]_{B_r} = N_r(B)^*(H)$ dır.

(2)

$$\begin{aligned}
[x]_{B_r} &= \{x' \in X : x \backsim_{B_r} x'\} \\
&= \{x' \in X : \{(x, x') : \varphi(x) = \varphi(x'),\ \forall \varphi \in B_r\} \\
&\subseteq \{x' \in X : \{(x, x') : \varphi(x) = \varphi(x'),\ \forall \varphi \in B_s\} \qquad \blacksquare \\
&= \{x' \in X : x \backsim_{B_s} x'\} \\
&= [x]_{B_s}
\end{aligned}$$

Tanım 3.1.7 *(Öztürk ve ark. 2019) O algılanabilen nesnelerin bir kümesi, F nesne özelliklerini veren fonksiyonların kümesi, B_r bir ayırtedilmezlik bağıntısı ve N_r ayrışımların kümesi olsun. Bu durumda $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ dörtlüsüne bir zayıf yakın yaklaşım uzayı denir.*

Takip eden bölüm boyunca aksi belirtilmediği sürece yakın yaklaşım uzayı yerine zayıf yakın yaklaşım uzayı düşünülecektir.

3.2 r-Yakın Topolojik Uzaylar

Bu bölümde ilk olarak bir yakın yaklaşım uzayında bulunan bir X kümesi üzerindeki topolojinin ayırt edilemezlik bağıntısı ile yeni küme ailelerine dönüştürülmesi amaçlanmaktadır. Bu işlem sonucunda, mevcut topolojinin açık kümeleri ilişkili elemanların kümesi olarak nitelendirilirse, yakın yaklaşım uzayı yardımıyla daha zayıf ilişkili elemanlara sahip başka küme aileleri elde edilecektir. Son olarak, bu yeni ailelerin sağladığı topolojik özellikler ve topolojik kavramlar incelenecektir.

Tanım 3.2.1 *(Atmaca 2019)*$(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ *bir yakın yaklaşım uzayı,* $X \subseteq O$ *ve* (X, τ) *bir topolojik uzay olsun.* $\tau_r^* = \{N_r(B)^*(G) : G \in \tau\}$ *ailesine* $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ *ailesi tarafından oluşturan r-yakın topoloji denir. Burada* $N_r(B)^*(G)$ *elemanlarına r-yakın açık kümeler adı verilir. Tümleyeni r-yakın açık kümeler olan kümelere r-yakın kapalı kümeler denir.*

$N_r(B)^*(G)$ *elemanlarına r-yakın açık kümelerini aksi gerekmediği sürece gösterimde kolaylık olması açısından* G_r^* *ile göstereceğiz.* τ_r^* *daki tüm r-yakın kapalı kümelerin ailesini ise* τ_r^{*k} *ile göstereceğiz.*

Örnek 3.2.1 *(Atmaca 2019)* $X = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ *nesne özelliklerini temsil eden* $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarının ailesi ve* $\tau = \{\varnothing, X, \{c\}, \{a, b, c\}, \{c, d, e, f\}\}$ *olsun. Burada* φ_i *fonksiyonları*

	a	b	c	d	e	f
φ_1	0	1	0	1	0	1
φ_2	0	1	2	0	1	1
φ_3	0	1	2	3	0	1

biçiminde tanımlıdır. Şimdi her bir r li kombinasyon için denklik sınıflarını oluşturalım. Bu denklik sınıfları

$[a]_{\{\varphi_1\}} = \{a, c, e\}, [b]_{\{\varphi_1\}} = \{b, d, f\}$

$[a]_{\{\varphi_2\}} = \{a, d\}, [b]_{\{\varphi_2\}} = \{b, e, f\}, [c]_{\{\varphi_2\}} = \{c\}$

$[a]_{\{\varphi_3\}} = \{a, e\}, [b]_{\{\varphi_3\}} = \{b, f\}, [c]_{\{\varphi_3\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_3\}} = \{d\}$

$[a]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{a\}, [b]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{b, f\}, [c]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{d\}, [e]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{e\}$

$[a]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = \{a, e\}, [b]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = \{b, f\}, [c]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = \{d\}$

$[a]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}} = \{a\}, [b]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}} = \{b, f\}, [c]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}} = \{d\}, [e]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}} = \{e\}$

$[a]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}} = \{a\}, [b]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}} = \{b, f\}, [c]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}} = \{c\}, [d]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}} = \{d\},$
$[e]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}} = \{e\}$

biçiminde olacaktır. Burada her bir r li kombinasyon için denklik sınıfları

$$N_1(B) = \{[a]_{\{\varphi_1\}}, [b]_{\{\varphi_1\}}, [a]_{\{\varphi_2\}}, [b]_{\{\varphi_2\}}, [c]_{\{\varphi_2\}}, [a]_{\{\varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_3\}}\}$$

$N_2(B) = \{[a]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}}, [b]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}}, [c]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}}, [d]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}}, [e]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}}, [a]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}},$
$[c]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}}, [a]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}}, [e]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}}\}$

$$N_3(B) = \{[a]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}}, [b]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}}, [c]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}}, [d]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}}, [e]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}}\}$$

biçimindedir. Şimdi τ_1^* 1-yakın topolojisini oluşturalım. Burada

$N_1(B)^*(\varnothing) = \varnothing$	$N_2(B)^*(\varnothing) = \varnothing$
$N_1(B)^*(X) = X$	$N_2(B)^*(X) = X$
$N_1(B)^*(\{c\}) = \{a, c, e\}$	$N_2(B)^*(\{c\}) = \{c\}$
$N_1(B)^*(\{a, b, c\}) = X$	$N_2(B)^*(\{a, b, c\}) = \{a, b, c, e, f\}$
$N_1(B)^*(\{c, d, e, f\}) = X$	$N_2(B)^*(\{c, d, e, f\}) = X$

$N_3(B)^*(\varnothing) = \varnothing$

$N_3(B)^*(X) = X$

$N_3(B)^*(\{c\}) = \{c\}$

$N_3(B)^*(\{a, b, c\}) = \{a, b, c, f\}$

$N_3(B)^*(\{c, d, e, f\}) = X$

olur ve $\tau_1^* = \{\varnothing, X, \{a, c, e\}\}$ dir. Benzer şekilde $\tau_2^* = \{\varnothing, X, \{c\}, \{a, b, c, e, f\}\}$ ve $\tau_3^* = \{\varnothing, X, \{c\}, \{a, b, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ olur.

Yukarıdaki örnekten anlaşılacağı üzere τ_1^* ve τ_2^* topoloji olmasına rağmen τ_3^* ailesi topoloji değildir. Şimdi τ_r^* ailelerinin topoloji olma şartlarından hangilerini sağladığını gösterelim.

Teorem 3.2.1 *(Atmaca 2019)* $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ *bir yakın yaklaşım uzayı,* $X \subseteq O$ *ve* (X,τ) *bir topolojik uzay olsun. Bu durumda* $\varnothing$ *ve* X *r-yakın açık kümedir.*

İspat. $\varnothing_r^* = \varnothing$ ve $X_r^* = X$ olmasından açıktır. ■

Teorem 3.2.2 *(Atmaca 2019)* $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ *bir yakın yaklaşım uzayı,* $X \subseteq O$ *ve* (X,τ) *bir topolojik uzay olsun.* I *keyfi indeks kümesi olmak üzere her* $i \in I$ *için* $(G_i)_r^* \in \tau_r^*$ *ise* $\cup_{i\in I}(G_i)_r^* \in \tau_r^*$ *dir.*

İspat. Her $i \in I$ için $(G_i)_r^* \in \tau_r^*$ olsun. Bu durumda

$$(G_i)_r^* = \bigcup_{[x]_{B_r}\cap G_i \neq \varnothing} [x]_{B_r}$$

biçimindedir. Öte yandan

$$\bigcup_{i\in I}(G_i)_r^* = \bigcup_{i\in I}\left(\bigcup_{[x]_{B_r}\cap G_i\neq\varnothing}[x]_{B_r}\right) = \bigcup_{[x]_{B_r}\cap\left(\bigcup_{i\in I} G_i\right)\neq\varnothing}[x]_{B_r}$$

olur. Buradan τ topoloji olduğundan $\bigcup_{i\in I} G_i \in \tau$ yani $\cup_{i\in I}(G_i)_r^* \in \tau_r^*$ dir. ■

Tanım 3.2.2 *(Mashour ve ark. 1983)* X *boştan farklı bir ve* $\tau \subseteq P(X)$ *olsun. Eğer* τ *keyfi birleşim işlemine göre kapalı ise* τ *ya bir supra topoloji denir.*

Sonuç 3.2.1 *(Atmaca 2019)* $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ *bir yakın yaklaşım uzayı,* $X \subseteq O$ *ve* (X,τ) *bir topolojik uzay olsun.* τ_r^* *aileleri bir supra topolojidir.*

Teorem 3.2.3 $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ *bir yakın yaklaşım uzayı,* $X \subseteq O$*,* (X,τ) *bir topolojik uzay ve* $r \leq s \leq |B|$ *olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.*

(1) Her $G \in \tau$ *için* $G \subseteq G_r^*$ *dir.*

(2) $G_s^* \subseteq G_r^*$

(3) $G \in \tau$ *ve* $x_0 \in G$ *ise* G_r^**,* x_0 *ın bir komşuluğudur.*

İspat. (1) $G = \bigcup_{x \in G} \{x\} \subseteq \bigcup_{[x]_{B_r} \cap G \neq \varnothing} [x]_{B_r} = G_r^*$

(2) $G_r^* = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap G \neq \varnothing} [x]_{B_r} \subseteq \bigcup_{[x]_{B_s} \cap G \neq \varnothing} [x]_{B_s} = G_s^*$

(3) Teorem 3.1.1(2) den açıktır. ■

Tanım 3.2.3 *(Atmaca 2019) $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ bir yakın yaklaşım uzayı, $X \subseteq O$, $U \subseteq X$ ve (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer $x \in X$ için $x \in G \subseteq G_r^* \subseteq N$ olacak biçimde $G_r^* \in \tau_r^*$ varsa bu U kümesine x elemanının r-yakın komşuluğu denir. Eğer U r-yakın açık küme ise U ye r-yakın açık komşuluk adı verilir.*

Bir x elemanının tüm r-yakın komşuluklarının ailesi $\mathcal{U}_r^*(x)$, tüm r-yakın açık komşuluklarının ailesi de $\tau_r^*(x)$ ile gösterilir.

Örnek 3.2.2 *(Atmaca 2019) Örnek 3.2.1 deki yakın yaklaşım uzayını ve $\tau_2^* = \{\varnothing, X, \{c\}, \{a, b, c, e, f\}\}$ ele alalım. $\mathcal{U}_2^*(b) = \{\{a, b, c, e, f\}, X\}$ ve $\tau_2^*(c) = \{X, \{c\}, \{a, b, c, e, f\}\}$ biçimindedir.*

Önerme 3.2.1 *(Atmaca 2019) $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ bir yakın yaklaşım uzayı, $X \subseteq O$ ve (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur.*

(1) $U \in \mathcal{U}_r^*(x)$ ise $x \in U$ dir.

(2) $U_1 \in \mathcal{U}_r^*(x)$ ve $U_1 \subseteq U_2$ ise $U_2 \in \mathcal{U}_r^*(x)$ dir.

(3) U_1,$U_2 \in \mathcal{U}_r^*(x)$ ise $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}_r^*(x)$ dir.

İspat. (1) $U \in \mathcal{U}_r^*(x)$ ise $x \in G \subseteq G_r^* \subseteq U$ olacak biçimde $G_r^* \in \tau_r^*$ vardır. Dolayısıyla $x \in U$ dir.

(2) $U_1 \in \mathcal{U}_r^*(x)$ ve $U_1 \subseteq U_2$ ise $x \in G \subseteq G_r^* \subseteq U_1 \subseteq U_2$ olacak biçimde $G_r^* \in \tau_r^*$ vardır. Dolayısıyla $U_2 \in \mathcal{U}_r^*(x)$ dir.

(3) U_1, $U_2 \in \mathcal{U}_r^*(x)$ olsun. Bu durumda $x \in G \subseteq G_r^* \subseteq U_1$ ve $x \in H \subseteq H_r^* \subseteq U_2$ olacak biçimde G_r^*,$H_r^* \in \tau_r^*$ vardır. τ bir topoloji olduğundan $G \cap H \in \tau$ ve $x \in G \cap H \subseteq (G \cap H)_r^* \subseteq G_r^* \subseteq U_1$ ve $x \in G \cap H \subseteq (G \cap H)_r^* \subseteq H_r^* \subseteq U_2$ elde edilir ki bu $x \in G \cap H \subseteq (G \cap H)_r^* \subseteq U_1 \cap U_2$ olduğunu verir. ■

Önerme 3.2.2 *(Atmaca 2019) $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ bir yakın yaklaşım uzayı, $X \subseteq O$ ve (X, τ) bir topolojik uzay olsun. U, x in bir komşuluğu ise $N_r(B)^*(U)$ da x in bir r- yakın komşuluğudur.*

İspat. U, x in bir komşuluğu olsun. Bu durumda $x \in G \subseteq U$ olacak biçimde $G \in \tau$ vardır. Öte yandan $G_r^* = N_r(B)^*(G) = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap G \neq \varnothing} [x]_{B_r} \overset{G \subseteq U}{\subseteq} \bigcup_{[x]_{B_r} \cap U \neq \varnothing} [x]_{B_r} = N_r(B)^*(U)$ olduğundan $x \in G \subseteq G_r^* \subseteq N_r(B)^*(U)$ olur ki istenen elde edilir. ∎

Teorem 3.2.4 *(Atmaca 2019) $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ bir yakın yaklaşım uzayı, $X \subseteq O$ ve (X, τ) bir topolojik uzay ve $r \leq s \leq |B|$ olsun. Bu durumda $x_0 \in X$ için $U \in \mathcal{U}_r^*(x_0)$ ise $U \in \mathcal{U}_s^*(x_0)$ dır.*

İspat. $U \in \mathcal{U}_r^*(x_0)$ olsun. Bu durumda $x_0 \in G \subseteq G_r^* \subseteq U$ olacak biçimde $G_r^* \in \tau_r^*$ vardır. 3.2.3 (2) den $G_s^* \subseteq G_r^*$ olduğundan $x_0 \in G \subseteq G_s^* \subseteq G_r^* \subseteq U$ elde edilir. Bu ise isteneni verir. ∎

Tanım 3.2.4 *(Atmaca 2019) $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ bir yakın yaklaşım uzayı, $X \subseteq O$, (X, τ) bir topolojik uzay olsun.*

(1) $A \subseteq X$ olmak üzere $cl_r^* A = \cap\{F_r^* : F_r^*$ r-yakın kapalı küme ve $A \subseteq F_r^*\}$kümesine A kümesinin r-yakın kapanışı denir.

(2) $A \subseteq X$ olmak üzere $int_r^* A = \cup\{G_r^* : G_r^*$ r-yakın açık küme ve $G_r^* \subseteq A\}$kümesine A kümesinin r-yakın içi denir.

Örnek 3.2.3 *(Atmaca 2019) Örnek 3.2.1deki yakın yaklaşım uzayını ve $\tau_3^* = \{\varnothing, X, \{c\}, \{a, b, c, f\}, \{b, c, d, e, f\}\}$ 3-yakın topolojik uzayını ele alalım. $A = \{a, b, c, d, f\}$ kümesi için $int_r^* A = \{a, b, c, f\}$ ve $cl_r^* A = X$ tir.*

Teorem 3.2.5 *(Atmaca 2019) $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ bir yakın yaklaşım uzayı, $X \subseteq O$, (X, τ) bir topolojik uzay ve $A, B \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.*

(1) $A \subseteq B$ ise $cl_r^* A \subseteq cl_r^* B$

(2) $A \subseteq B$ ise $int_r^* A \subseteq int_r^* B$

İspat. (1)

$$\begin{aligned} A \subseteq B \quad &\Rightarrow \{F_r^* : F_r^* \in \tau_r^{*k},\, B \subseteq F_r^*\} \subseteq \{F_r^* : F_r^* \in \tau_r^{*k},\, A \subseteq F_r^*\} \\ &\Rightarrow \cap\{F_r^* : F_r^* \in \tau_r^{*k},\, A \subseteq F_r^*\} \subseteq \cap\{F_r^* : F_r^* \in \tau_r^{*k},\, B \subseteq F_r^*\} \\ &\Rightarrow cl_r^* A \subseteq cl_r^* B \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} A \subseteq B \quad &\Rightarrow \{G_r^* : G_r^* \in \tau_r^*,\, G_r^* \subseteq A\} \subseteq \{G_r^* : G_r^* \in \tau_r^*,\, G_r^* \subseteq B\} \\ &\Rightarrow \cup\{G_r^* : G_r^* \in \tau_r^*,\, G_r^* \subseteq A\} \subseteq \cup\{G_r^* : G_r^* \in \tau_r^*,\, G_r^* \subseteq B\} \quad \blacksquare \\ &\Rightarrow int_r^* A \subseteq int_r^* B \end{aligned}$$

Önerme 3.2.3 *$(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ bir yakın yaklaşım uzayı, $X \subseteq O$, (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.*

(1) $X \backslash int_r^* A = cl_r^*(X \backslash A)$

(2) $X \backslash cl_r^* A = int_r^*(X \backslash A)$

İspat. (1)

$$\begin{aligned} X \backslash int_r^* A \quad &= X \backslash \cup \{G_r^* : G_r^* \text{ r-yakın açık küme ve } G_r^* \subseteq A\} \\ &= \cap\{X \backslash G_r^* : G_r^* \text{ r-yakın açık küme ve } G_r^* \subseteq A\} \\ &= \cap\{F_r^* : F_r^* \text{ r-yakın kapalı küme ve } X \backslash A \subseteq F_r^*\} \\ &= cl_r^*(X \backslash A) \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} X \backslash cl_r^* A \quad &= X \backslash \cap \{F_r^* : F_r^* \text{ r-yakın kapalı küme ve } A \subseteq F_r^*\} \\ &= \cup\{X \backslash F_r^* : F_r^* \text{ r-yakın kapalı küme ve } A \subseteq F_r^*\} \\ &= \cap\{G_r^* : G_r^* \text{ r-yakın açık küme ve } G_r^* \subseteq X \backslash A\} \quad \blacksquare \\ &= int_r^*(X \backslash A) \end{aligned}$$

Teorem 3.2.6 *(Atmaca 2019) $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ bir yakın yaklaşım uzayı, $X \subseteq O$, (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $x \in Cl_r^* A$ ancak ve ancak her $U \in \mathcal{U}_r^*(x)$ için $U \cap A \neq \varnothing$ dir.*

İspat. $x \in Cl_r^* A$ olsun. Buradan $x \in \cap\{F_r^* : F_r^*$ r-yakın kapalı küme ve $A \subseteq F_r^*\}$ dır. Kabul edelim ki bir $U \in \mathcal{U}_r^*(x)$ için $U \cap A = \varnothing$ olsun. Buradan $U \in \mathcal{U}_r^*(x)$ olduğundan $x \in G \subseteq G_r^* \subseteq U$ olacak biçimde $G_r^* \in \tau_r^*$ vardır. Dolayısıyla $G_r^* \cap A = \varnothing$ dir. $F_r^* = X \backslash G_r^*$ alırsak $A \subseteq F_r^*$ ve $x \notin F_r^*$ dır. Sonuç olarak $x \notin \cap\{F_r^* : F_r^*$ r-yakın kapalı küme ve $A \subseteq F_r^*\}$ olur ki bu çelişkidir.

Tersine her $U \in \mathcal{U}_r^*(x)$ için $U \cap A \neq \varnothing$ olsun. Kabul edelim ki $x \notin Cl_r^* A$ olsun. Bu durumda $x \notin \cap\{F_r^* : F_r^*$ r-yakın kapalı küme ve $A \subseteq F_r^*\}$ dır. Buradan en az bir A yı kapsayan F_r^* r-yakın kapalı kümesi için $x \notin F_r^*$ dır. $G_r^* = X \backslash F_r^*$ alırsak $G_r^* \in \tau_r^*$ ve $G_r^* \in \mathcal{U}_r^*(x)$ olur. Üstelik $A \subseteq F_r^*$ olduğundan $A \cap G_r^* = \varnothing$ olur ki bu ise çelişkidir. ■

Tanım 3.2.5 *(Atmaca 2019)* $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ *bir yakın yaklaşım uzayı,* $X \subseteq O$, (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $A \subseteq X$ *olsun.* $CoreA = \{x \in X : x \in G \subseteq G_r^* \subseteq A$ *ve* $G \in \tau\}$ *kümesine* A *kümesinin çekirdeği denir.*

Önerme 3.2.4 *(Atmaca 2019)* $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ *bir yakın yaklaşım uzayı,* $X \subseteq O$, (X, τ) *bir topolojik uzay ve* $A \subseteq X$ *olsun. Aşağıdaki kapsamlar doğrudur.*

(1) $CoreA \subseteq int_r^* A$

(2) $int_r^* A \subseteq intA$

(3) $clA \subseteq cl_r^* A$

İspat. (1)

$$\begin{aligned} x \in CoreA \quad & \Rightarrow x \in \{x \in X : x \in G \subseteq G_r^* \subseteq A \text{ ve } G \in \tau\} \\ & \Rightarrow x \in G \subseteq G_r^* \subseteq A \text{ olacak biçimde } G \in \tau \text{ vardır} \\ & \Rightarrow x \in G_r^* \subseteq A \text{ olacak biçimde } G_r^* \in \tau_r^* \text{ vardır} \\ & \Rightarrow x \in int_r^* A \end{aligned}$$

(2) $x \in int_r^* A$ olsun. Kabul edelim ki $x \notin intA$ olsun. Bu durumda $x \notin \cup\{G \in \tau : G \subseteq A\}$ dır. Buradan x i bulunduran her G açığı için $G \nsubseteq A$ dır. Dolayısıyla x i bulunduran her G_r^* r-açığı için $G_r^* \nsubseteq A$ dır. Sonuç olarak $x \notin int_r^* A$ çelişkisi elde edilir.

(3) $x \in clA$ olsun. Kabul edelim ki $x \notin cl_r^* A$ olsun. Bu durumda bir $U \in \mathcal{U}_r^*(x)$ vardır öyleki $U \cap A = \varnothing$ tur. $U \in \mathcal{U}_r^*(x)$ ise $x \in G \subseteq G_r^* \subseteq U$ olacak biçimde $G \in \tau$ vardır. Buradan $U \in \mathcal{U}(x)$ ve $U \cap A = \varnothing$ olur ki bu $x \notin clA$ çelişkisini verir.

■

Tanım 3.2.6 *(Atmaca 2019)* $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ *bir yakın yaklaşım uzayı,* $X \subseteq O$, (X, τ) *bir topolojik uzay ve* (x_n) X *de bir dizi olsun. Eğer her* $U \in \mathcal{U}_r^*(x_0)$ *r-yakın komşuluğu için bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *sayısı; her* $n \geq n_0$ *için* $x_n \in U$, *olacak biçimde* *bulunabiliyorsa* (x_n) *dizisine* x_0 *noktasına r-yakın yakınsıyor denir ve* $x_n \xrightarrow{r} x_0$ *ile gösterilir.*

Örnek 3.2.4 *(Atmaca 2019)* $X = \{a, b, c, d, e\}$*,* $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ *nesne özelliklerini temsil eden* $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$ *fonksiyonlarının ailesi ve* $\tau = \{\varnothing, X, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$ *olsun. Burada* φ_i *fonksiyonları*

	a	b	c	d	e
φ_1	0	1	0	2	2
φ_2	0	1	0	1	1
φ_3	0	2	0	1	2

biçiminde tanımlıdır. Şimdi her bir r *li kombinasyon için denklik sınıflarını oluşturalım. Bu denklik sınıfları*

$[a]_{\{\varphi_1\}} = \{a, c\}$, $[b]_{\{\varphi_1\}} = \{b\}$, $[d]_{\{\varphi_1\}} = \{d, e\}$

$[a]_{\{\varphi_2\}} = \{a, c\}$, $[b]_{\{\varphi_2\}} = \{b, d, e\}$

$[a]_{\{\varphi_3\}} = \{a, c\}$, $[b]_{\{\varphi_3\}} = \{b, e\}$, $[d]_{\{\varphi_3\}} = \{d\}$

$[a]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{a, c\}$, $[b]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{b\}$,$[d]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} = \{d, e\}$

$[a]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = \{a, c\}$, $[b]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = \{b\}$, $[d]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = \{d\}$, $[e]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = \{e\}$

$[a]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}} = \{a, c\}$, $[b]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}} = \{b, e\}$, $[d]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}} = \{d\}$

$[a]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}} = \{a, c\}$, $[b]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}} = \{b\}$, $[d]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}} = \{d\}$, $[e]_{\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}} = \{e\}$

biçiminde olacaktır. Buradan $\tau_1^* = \{\varnothing, X, \{b, d, e\}\}$ *dir. Benzer şekilde* $\tau_2^* = \{\varnothing, X, \{b, e\}, \{a, b, c, e\}, \{a, c, d, e\}\}$ *ve* $\tau_3^* = \{\varnothing, X, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$ *olur ve*

$\mathcal{U}_1^*(a) = \{X\}$, $\mathcal{U}_2^*(b) = \{X, \{b, d, e\}\}$, $\mathcal{U}_1^*(c) = \{X\}$, $\mathcal{U}_1^*(d) = \{X\}$,

$\mathcal{U}_1^*(e) = \{X\}$

$\mathcal{U}_2^*(a) = \{\{a, b, c, e\}, X\}$, $\mathcal{U}_2^*(b) = \{U \subseteq X : \{b, e\} \subseteq U\}$, $\mathcal{U}_2^*(c) = \{X\}$,

$\mathcal{U}_2^*(d) = \{\{a, c, d, e\}, X\}$, $\mathcal{U}_2^*(e) = \{X\}$

$\mathcal{U}_3^*(a) = \{U \subseteq X : \{a, b, c\} \subseteq U\}$, $\mathcal{U}_3^*(b) = \{U \subseteq X : \{b\} \subseteq U\}$,

$\mathcal{U}_3^*(c) = \{U \subseteq X : \{a, c, d\} \subseteq U\}$,

$\mathcal{U}_4^*(d) = \{U \subseteq X : \{a, c, d\} \subseteq U\}$, $\mathcal{U}_2^*(e) = \{X\}$

biçimindedir. Burada $(x_n) = (a, b, c, c, b, a, b, a, b, a...)$ *dizisi için yakınsama tablosu*

$x_n \rightarrow a$	$x_n \xrightarrow{1} a$	$x_n \xrightarrow{2} a$	$x_n \xrightarrow{3} a$
$x_n \nrightarrow b$	$x_n \overset{1}{\nrightarrow} b$	$x_n \overset{2}{\nrightarrow} b$	$x_n \overset{3}{\nrightarrow} b$
$x_n \nrightarrow c$	$x_n \xrightarrow{1} c$	$x_n \xrightarrow{2} c$	$x_n \overset{3}{\nrightarrow} c$
$x_n \nrightarrow d$	$x_n \xrightarrow{1} d$	$x_n \overset{2}{\nrightarrow} d$	$x_n \overset{3}{\nrightarrow} d$
$x_n \rightarrow e$	$x_n \xrightarrow{1} e$	$x_n \xrightarrow{2} e$	$x_n \xrightarrow{3} e$

biçiminde verilebilir.

Yukarıdaki örnek incelenirse bir (x_n) *dizisinin yakınsaklığı ile r-yakın topolojilerde olan yakınsaklığı arasında bir ilişki vardır. Şimdi bu ilişkiyi aşağıdaki teoremle açıklayalım.*

Teorem 3.2.7 *(Atmaca 2019)* $(O, F, \sim_{B_r}, N_r(B))$ *bir yakın yaklaşım uzayı,* $X \subseteq O$*,* (X, τ) *bir topolojik uzay ve* (x_n)*,* X *de bir dizi olsun.*

(1) Her $r \leq s$ *için* $x_n \xrightarrow{s} x_0$ *ise* $x_n \xrightarrow{r} x_0$ *dır.*

(2) $x_n \rightarrow x_0$ *ise her* $r \leq |B|$ *için* $x_n \xrightarrow{r} x_0$ *dır.*

İspat. (1) $r \leq s$ ve $x_n \xrightarrow{s} x_0$ olsun. Bu durumda her $U \in \mathcal{U}_s^*(x_0)$ r-yakın komşuluğu için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için $x_n \in U$ dir. Teorem 3.2.4 den her $U \in \mathcal{U}_s^*(x_0)$ r-yakın komşuluğu için bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyleki her $n \geq n_1$ için $(x_n) \in U$ dir. Bu ise $x_n \xrightarrow{r} x_0$ olduğunu verir.

(2) $x_n \rightarrow x_0$ ve $r \leq |B|$ olsun. Bu durumda her $U \in \mathcal{U}(x_0)$ komşuluğu için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyleki her $n \geq n_0$ için $x_n \in U$ dur. Dolayısıyla her x_0 ı bulunduran G açığı aynı zamanda bir komşuluk olduğundan bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $n \geq n_1$ için $x_n \in G$ dir. Sonuç olarak her $U \in \mathcal{U}_s^*(x_0)$ r-yakın komşuluğu için bir $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $n \geq n_1$ için $x_n \in G \subseteq G_r^* \subseteq U$ dir. ■

KAYNAKLAR

S. Atmaca, (2019) r-Near Topologies on Nearness Approximation Spaces, Turkish Journal of Mathematics (Submitted)

H. Herrlich, (1974) A concept of nearness, General Topology and Applications 4 191-212

E. Konrad, E. Orlowska, Z. Pawlak, (1981) Knowledge Representation Systems, Institute for Computer Science, Polish Academy of Science, Report 433

Z. Pawlak, (1982). Rough sets, Int. J. of Information and Computer Sciences, 11, 5, 341-356

Z. Pawlak, (1991). Rough Sets, Theoretical Aspects of Reasoning about Data, Kluwer Academic, Boston, Z. Pawlak, A. Skowron,(2007) Rudiments of rough sets, Information Sciences, 177, 3-27

Lashin, E. F., Kozae, A. M., Abo Khadra, A. A. ve Medhat, T. (2005). Rough set for topological spaces, Int. J. of Approximate Reasoning, 40, 35-43.

Z.Pawlak, (1981) Classifi cation of Objects by Means of Attributes, Institute for Computer Science, Polish Academy Of Science, Report 429

Z. Pawlak, (1982) Rough sets, International J.Comp. Inform. Science, 11, 341-356

J. F. Peters (2007) Near sets. Special Theory about nearness of objects, Fundamenta Informaticae, 75 407-433

H. Aktaş ve N. Çağman,(2005). Bulanı kve Yaklas¸ı mlı KümelerÇankaya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Journal of Arts and Sciences, Sayı: 3

J. F. Peters (2007) Classifi cation of objects by means of features, In: Proc. IEEE Symposium Serieson Foundations of Computational Intelligence, Honolulu, Hawaii, 1-8

J. F. Peters, A. Skowron, J. Stepaniuk, (2006) Nearness in approximation spaces. In: G. Lindemann, H. Schlilnglo et al. (Eds.), Proc. Concurrency, Specification & Programming (CS&p'2006) Informatik-Berichte Nr. 206, Humboldt-Universitat zu Berlin, 434-445

L. Polkowski, (2002) Rough Sets. Mathematical Foundations, Springer-Verlag, Heidelberg

A. Skowron, J. F. Peters, (2007), Rough granular computing. In:Pedrycz,W. Skowron, A., Kreinovich, V. (Eds.), handbook on Granular Computing, Wiley, NY

M. E. Abd El Monsef, Kozae, M.J.Iqelan, (2010) Near approximations in the topological spaces. International Journal of Mathematical Analysis 4(6), 279-290

J. F Peters, (2007). Near sets. Special theory about nearness of objects. Fundamenta Informaticae 76, 1-28.

J. F. Peters, (2007). Classifi cationof objects by means of features. In:Proc. IEEE Symposium Series on Foundations of Computational Intelligence (IEEE SCCI 2007), Honolulu, Hawaii, pp. 1-8

J. F. Peters, A. Skoowron, J. Stepaniuk, (2007). Nearness of objects: extension of approximation space model. Fundamenta Informaticae 79, 1-24

J. F. Peters, A. Skoowron, J. Stepaniuk, (2006). Nearness in approximation spaces. In: lindemann, G., Schl,lnglo¤, H., et al. (Eds.), Proc. Concurrency, Specification and Programming (CS,P2006). Informatik-Berichte Nr. 206, Humboldt-Universitat zu Berlin, pp. 434-445.

J. F. Peters, (2007). Near Sets. General Theory Abaout Nearness of Objects, Applied Mathematical Sciences, 1 (53-56), 2609-2629.

J. F Peters, (2008). Near sets, Special of Perceptual Objects by Means of Features, Int. J.Info.Technol. Intell.Comput.,3(2), 1-35

Z. Pawlak, J. F Peters, Jak Blisko (2002-2007) (how near), Systemy Wspomagania Decyzji I, 57, 109, ISBN:83-920730-4-5,

E. ·Inan, M. A. Öztürk, (2012) Near groups in nearness approximation spaces, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 41 (4), ,5445-558

M. A. Öztürk, M. Uçkun, E. İnan (2014). Near groups of weak cosets on nearness approximation spaces. Fundamenta Informaticae, 133(4), 433-448.

E. İnan, M. A. Öztürk (2015). Near semigroups on nearness approximation spaces. Ann. Fuzzy Math. Inform, 10(2), 287-297.

M. A. Öztürk, I. Ç. Siner , Y. B. Jun (2015). Nearness BCK-algebras. Int. J. Open Problems Compt. Math, 8(4), 37-57.

G. Cantor, (1883) Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig

B. Russell, (1903) The Principles of Mathematics, London, George Allen & Unwin Ltd.,

G. Frege, (1893) Grundlagen der Arithmetik, 2, Verlag von Herman Pohle, Jena.

St. Lesniewski, (1929) Grungzüge eines neuen Systems der Grundlagen der Mathematik, Fundamenta Matemaicae, XIV, 1- 81

Z. Pawlak, A. Skowron (1994) Rough membership function, in: R. E Yeager, M. Fedrizzi and J. Kacprzyk (eds.), Advaces in the Dempster-Schafer of Evidence, Wiley, New York, 251-271

L. Polkowski, (2002) Rough Sets, Mathematical Foundations, Advances in Soft Computing, Physica – Verlag,A Springer-Verlag Company.

L. Polkowski, A. Skowron, (2001) Rough mereological calculi granules: a rough set approach to computation, computational intelligence: An International Journal 17, 472-479

A. Skowron, J. Komorowski, Z. Pawlak, L. Polkowski, (2002) A rough set perspective on data and knowledge, in: W. Kloesgen, J. Zytkow (eds.), Handbook of KDD, Oxford University Press, 134-149

L. Zadeh, (1965) Fuzzy sets, Information and Control, 8, 338-353.

Lin, T.Y. (1988). Neighborhood systems and relational database, in Proceedings of 1988 ACM Sixteen Annual Computer Science Conference., February 23-25, 725.

Lin, T.Y., Huang, K.J., Liu, Q., ve Chen, W. (1990). Rough Sets, Neighborhood systems and approximation. in: Proceedings of the Fifth International Symposium an Methodolagies af Intelligent Systems. Selected Papers, Knoxville, Tennessee, October 25-27, 130-141

Lin, T.Y. (1992). Topological and fuzzy rough sets. In: R. Slowinski, Editor, Decision Support by Experience Application of the Rough Sets Theory, Kluwer Academic Publishers, 287-304.

Lin, T.Y. (1998). Granular computing on binary relations I: Data mining and neighborhood systems, in Rough Sets In Knowledge Discovery, Physica-Verlag, 121-140.

Öztürk M.A., Jun Y.B., İz A. (2019). Gamma Semigroups on Weak Nearness Approximation Spaces, Journal of the International Virtual Institue, 9, 53-72

Mashour A.S., Allam A.A., Mahmoud F.S., Khedr F.H. (1983) On Supra Topological Spaces, Indian Journal Pure and Applied Mathematics, 14(4) 502-510.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Sedat ÇOBAN
Doğum Yeri ve Tarihi	Bergama, 14.12.1990
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dil	İngilizce
İletişim Adresi	Cumhuriyet Üniversitesi Matematik Bölümü 58140 Sivas
E-posta Adresi	Sedatcoban1291@gmail.com

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Bergama Cumhuriyet Lisesi, 2009
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2009
Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2014

İş Tecrübesi

Özel Genç Bilgi Koleji	Matematik Öğretmeni, 2014
Nokta Özel Öğretim Kurs Merkezi	Matematik Öğretmeni, 2016
Başarı Özel Öğretim Kurs Merkezi	Matematik Öğretmeni, 2018