T. C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REGÜLER STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gamze ŞAHİN
(201592171466)

Matematik Ana Bilim Dalı
Tez Danışmanı:Doç. Dr. Yaşar ÇAKMAK

SİVAS
EYLÜL 2019

Gamze Şahin'in hazırladığı ve **"Regüler Sturm-Liouville Operatörü Üzerine Ters Problemler"** adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANA BİLİM DALI**'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı	**Doç. Dr. Yaşar ÇAKMAK** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK** Adıyaman Üniversitesi	....
Jüri Üyesi	**Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN** Sivas Cumhuriyet Üniversitesi	....

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Özlem Pelin CAN
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

Çalışma sırasında bana destek olan aileme ve tüm arkadaşlarıma...

ETİK

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

20.08.2019

Gamze ŞAHİN

ÖZET

REGÜLER STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ ÜZERİNE TERS PROBLEMLER

Gamze ŞAHİN
Yüksek Lisans Tezi, Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Yaşar ÇAKMAK

2019, 76+x sayfa

Bu çalışmada Regüler Sturm-Liouville operatörü ele alınmıştır. Tez, giriş ve üç bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümü, konunun önemini ve spektral teorideki yerini göstermektedir. Birinci bölümde, diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık kullanılan önemli tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde, verilen operatörün çözümleri için integral denklemler elde edilmiş, oldukça kullanışlı olan integral gösterilim verilmiş ve operatörün özdeğer ve özfonksiyonlarının önemli özellikleri araştırılmıştır. Son olarak üçüncü bölümde, ele alınan operatör için bazı ters problemler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville operatörü, Özdeğer, Özfonksiyon, Weyl fonksiyonu, Yarı-ters problem, Nodal nokta.

ABSTRACT

REGÜLER STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ ÜZERİNE TERS PROBLEMLER

Gamze ŞAHİN
Master of Science Thesis, Department of Mathematics

Supervisor: Associate Prof. Dr. Yaşar ÇAKMAK

2019, 76+x page

In this work Regüler Sturm-Liouville operator is considered. This thesis consists of introduction and three chapters. In the introduction, important of subject and location in spectral theory are shown. In the first chapter, important definitions and theorems which are used frequently in spectral theory of differential operators are given. In the second chapter, integral equations has been obtained for the solution of given operator and useful integral representation has been derived and then some important properties of eigenvalues and eigenfunctions have been investigated. Finally,.in the third chapter, some of the inverse problems for discussing operator have been given.

Key words: Sturm-Liouville operator, Eigenvalues, Eigenfunctions, Weyl function, Half- Inverse problem, Nodal point.

KATKI BELİRTME VE TEŞEKKÜR

Bilgi ve deneyimlerinden sürekli yararlandığım, tezin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Yaşar ÇAKMAK'a ve tecrübeleriyle bana büyük destek sağlayan Doç. Dr. A. Sinan ÖZKAN hocama çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Modern fonksiyonel analiz ve uygulamalarının ana dallarından biri olan spektral teori bazı uygulamalı bilimlerde önemli yere sahiptir. Özellikle fizikte ve matematiksel fizikte, diferansiyel operatörlerin spektral teorisi karşımıza çıkmaktadır.

Diferansiyel operatörlerin spektral teorisi düz spektral problemler ve ters spektral problemler olmak üzere ikiye ayrılır. Bir diferansiyel operatör verildiğinde operatörün spektrumunun ve özfonksiyonlarının aranması ve verilen bir fonksiyonun bu operatörün özfonksiyonlarına göre ayrışımının incelenmesine düz spektral problem denir. Spektral analizin ters problemleri ise, verilen belirli dizilere göre spektal karakteristikleri bu diziler olan operatörün inşasından ibarettir.

Fizikteki bir çok problem ters problemlere indirgenmektedir. Örneğin, mekanikte verilen dalga boylarına göre homojen olmayan yayda yoğunluk dağılımının öğrenilmesi, parçacıkların enerji seviyelerine göre parçacıklar arasındaki etkileşim kuvvetlerinin belirlenmesi, kuantum fiziğinde saçılma verilerine göre alan potansiyellerinin bulunması, jeofizikte yer altı madenlerinin yer altındaki elementlerin dağılım karakteristiklerine göre belirlenmesi problemlerinin her biri birer ters problemdir.

Matematiksel fizik ve bir çok mühendislik problemi diferansiyel denklemlerden oluşan sınır değer problemlerini içermektedir. Örneğin,

$$-\frac{d}{dx}\left(p\left(x\right)\frac{dy}{dx}\right)+q\left(x\right)y=\lambda\rho\left(x\right)y \tag{0.1}$$

diferansiyel denklemine Sturm-Liouville denklemi, bu denklem veya bu denklem ve farklı birtakım sınır koşulları tarafından üretilen operatörlere Sturm-Liouville operatörleri, bu operatörler için konulan spektral problemlere ise Sturm-Liouville problemleri adı verilmektedir.

1836 yılında Sturm ve Liouville tarafından ortaya konulan Sturm-Liouville teorisi başlangıçta ısı problemlerine uygulanmış olsa da günümüzde bir çok fiziksel problemin araştırılmasında etkin yöntemlerden biridir.

Diferansiyel operatörler regüler ve singüler olmak üzere iki kolda tanımlanmış ve bu operatörlerin spektral teorisi yapılandırılmıştır. Tanım bölgesi sonlu ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatörlere regüler diferansiyel operatör, tanım bölgesi sonsuz veya katsayılardan bazıları veya tamamı toplanabilir olmayan veya her iki durum da sağlanacak şekildeki diferansiyel operatörlere singüler diferansiyel operatör denir. XIX. yüzyılın sonlarında ikinci mertebeden diferansiyel operatörler için sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekildeki adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı Birkoff tarafından incelenmiştir. Ayrık spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Singüler operatörler için spektral teori ilk olarak Weyl tarafından incelenmiştir. İntegral denklemler teorisinde yapılan çalışmalarda, lineer cebir problemleri ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerlikten faydalanan ilk olarak Hilbert olmuştur. Bunların sonucu olarak önce ℓ_2 uzayı sonra da genel Hilbert uzayı kavramları kurulmuştur. H Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra lineer self adjoint operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. Daha sonra Rietsz, Neumann, Friedrichs ve diğer matematikçiler tarafından simetrik ve self-adjoint operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuştur.

Diferansiyel denklemler için ters problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma Ambartsumyan'a aittir. 1929 yılında Ambartsumyan tarafından Sturm-Liouville operatörleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 0.1 (Ambartsumyan, 1929) $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ 'ler

$$\begin{cases} y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \quad 0 < x < \pi, \\ y'(0) = y'(\pi) = 0 \end{cases} \tag{0.2}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2, (n = 0, 1, ...)$ ise $q(x) \equiv 0$ dır.

Ambartsumyan'ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmış ve bu tip problemlerin çözümü için farklı yöntemler verilmiştir. Bu problemlerle ilgili en önemli sonuçlardan birisi Borg' a aittir ve elde ettiği sonuç, aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 0.2 (Borg, 1945) $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n, ...$ 'ler (0.2) deki diferansiyel denklemi ve

$$\begin{cases} y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases} \tag{0.3}$$

sınır koşulları ile verilen problemin; $\mu_0, \mu_1, ..., \mu_n, ...$ 'ler ise (0.2) deki diferansiyel denklemi ve

$$\begin{cases} y'(0) - h_1 y(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases} \tag{0.3'}$$

sınır koşulları ile verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri, $q(x)$ fonksiyonunu ve h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirtir ($h \neq h_1$ ve h, h_1, H sonlu gerçel sayılardır).

Borg' un bu çalışmasında, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin, verilen operatörün farklı özdeğerleri (spektrumları) olduğu varsayılır ve operatör bu diziler yardımıyla belirlenir, yani bu tip operatörün varlığı önceden kabul edilir. Borg aynı çalışmada, bu tip diferansiyel operatörün tek olarak belirtilmesi için bir tek $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ spektrumunun yeterli olmadığını göstermiştir. O yüzden de, Ambartsumyan' ın sonucu istisna bir durum olarak düşünülmektedir.

Borg' un çalışmasından sonra potansiyelin $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulunu sağlaması durumunda bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü belirlediği Levinson (1949) tarafından ispatlanmıştır.

Dönüşüm operatörleri ters problemlerin çözümünde önemli bir araç olmuştur. Bu kavramı Delsarte (1938), Lions (1957) ve Levitan (1964) yaptıkları çeşitli çalışmalarda kullanmışlardır.

II. mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde bir sonraki en önemli aşamalardan birisi Marchenko (1950) tarafından kaydedilmiştir. 1950 yılında Marchenko, ters problemlerin çözümünde Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (0.1) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=1,\ \varphi'(0,\lambda)=h, \tag{0.7}$$

başlangıç koşullarını saşlayan çözümü, $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonları ise bu operatörün özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n=\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)dx \tag{0.8}$$

sayılarına verilen operatörün normalleştirici sayıları,

$$\rho(\lambda)=\sum_{\lambda_n<\lambda}\frac{1}{\alpha_n}$$

fonksiyonuna ise bu operatörün spektral fonksiyonu denir. Marchenko, Borg'un ispatladığı teoremin benzerini $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla vermiştir. Ayrıca, bu çalışmada, $\rho(\lambda)$ fonksiyonun Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonu olması için gerek ve yeter koşulu verilmiştir. Marchenko'nun çalışmaları ile hemen hemen aynı zamanda Krein (1951), çalışmalarında Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirtmek için etkili yöntem vermiştir. Fakat, bu çalışmalarda verilen gerekli ve yeterli koşul, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri yardımıyla değil, bu dizilerin yardımıyla kurulan yardımcı fonksiyon kullanılarak verilmiştir.

1951 yılında Gelfand-Levitan (1951) çalışmasında, $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları verdiler. Ayrıca, bu çalışmada Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ $(\alpha_n>0)$ dizilerine göre belirlenmesi için yani, verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıda verilen klasik asimptotik eşitliklerin sağlanmasıdır:

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \cdots + \frac{a_{\|\frac{m}{2}\|}}{n^{2\|\frac{m}{2}\|+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2\|\frac{m}{2}\|+1}},$$

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + \cdots + \frac{b_{\|\frac{m}{2}\|}}{n^{2\|\frac{m}{2}\|+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2\|\frac{m+1}{2}\|}},$$

burada $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[h + H + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} q(t)dt\right]$ dir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum \left(\dfrac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$, eğer m tek ise $\sum \left(\dfrac{\gamma_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n^2 < \infty$ dir.

Fakat, bu çalışmalarda ters problemin iki spektrumuna göre tam çözümü verilmemiştir. Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani, iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi Gasimov-Levitan (1968) çalışmasında verilmiştir. Bu çalışmada, verilen problemin $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_k - \lambda_n} \tag{0.9}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod'$ sembolü, sonsuz çarpımda $k = n$. çarpanın bulunmadığını gösterir. (0.9) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir. Gerçekten de, eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş ise (0.9) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimptotik iadesi bulunur ve Gasimov-Levitan, (1968) çalışmasının sonuçlarından yararlanarak $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir. Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşulları verecektir ve o koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri ortak olarak sıralıdır,

yani $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \cdots$ olsun.

2) λ_n ve μ_n'ler

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

$$\sqrt{\mu_n} = n + \frac{a_0'}{n} + \frac{a_1'}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

asimptotik formüllerine sahiptir.

3) $a_0 \neq a_0'$

Son yıllarda operatörü belirlemeye yardımcı olan farklı veriler sıklıkla kullanılmaya başlanmıştır. Bunların en önemlilerinden biri Weyl fonksiyonudur. Weyl fonksiyonu ilk olarak H. Weyl (1910) tarafından literatüre katılmıştır. Weyl' in adıyla anılan m fonksiyonu öncelikle singüler problemler için Sturm-Liouville teorisinde standart bir araç olmuştur. Daha sonra regüler problemlerde detaylıca çalışılmıştır.

Brasche-Malamud-Neidhardt (2002), simetrik operatörün self adjoint genişlemelerinin Weyl fonksiyonlarını karakterize etmişlerdir.

Genel olarak, regüler veya singüler problemlerde iki özdeğerler dizisi yardımıyla potansiyel fonksiyonun tek türlü belirlenebildiği bilinmektedir.

Yarı-ters spektral problem, spektrumun ve yarı aralıkta potansiyelin bilinmesi durumunda tüm aralıkta operatörün yeniden inşa edilmesini içerir. Diferansiyel operatörler için yarı-ters problem Hochstadt, Lieberman, Hald, Gesztesy, Sakhnovich, Hryniv, Buterin, Yang gibi bir çok matematikçiye çalışma konusu olmuştur. Yarı-ters problem üzerine yapılan ilk çalışma Hochstadt-Lieberman (1978) a aittir. Bu çalışmada $(0,1)$ aralığı üzerinde

$$\begin{cases} Lv \equiv -v'' + qv \\ v(0)\cos\alpha + v'(0)\sin\alpha = 0 \\ v(1)\cos\beta + v'(1)\sin\beta = 0 \end{cases}$$

problemi ele alınmıştır. Burada $0 \leq \alpha < \pi$ ve $q \in L_1(0,1)$ biçimindedir. Ek olarak

$$\begin{cases} \widetilde{L}v \equiv -v'' + \widetilde{q}v \\ v(0)\cos\alpha + v'(0)\sin\alpha = 0 \\ v(1)\cos\beta + v'(1)\sin\beta = 0 \end{cases}$$

problemi ele alınmış ve aşağıdaki teorem ispatlanmıştır:

Teorem 0.3 L ve $\widetilde{L}$ operatörlerinin spektrumları $\{\lambda_n\}$ ve $(1/2, 1)$ aralığı üzerinde $\widetilde{q}(x) = q(x)$ olsun. Bu durumda $(0, 1)$ aralığı üzerinde hemen hemen her yerde (h.h.y.)
$q(x) = \widetilde{q}(x)$ dir.

Teorem 0.4 L ve $\widetilde{L}$ operatörlerinin spektrumları $\{\lambda_n\}$ olsun. Eğer $[\pi/2, \pi]$ aralığı üzerinde $q(x) = \widetilde{q}(x)$ ise $[0, \pi]$ aralığı üzerinde h.h.h.y. $q(x) = \widetilde{q}(x)$ dır.

Regüler Sturm-Liouville operatörü üzerine ters problemler konulu bu tez literatürden derlenmiştir. Tezin bölümleri hazırlanırken Freiling-Yurko (2001), Levitan-Sargsyan (1988), Naimark (1968) gibi önemli kaynaklar esas alınmıştır. Bu tez, singüler diferansiyel operatörler, sınır koşulları parametreye bağlı diferansiyel operatörler, süreksizlik koşullarına sahip diferansiyel operatörler, Dirac operatörleri, Difüzyon operatörleri gibi daha birçok operatörler için ters problemlerin temelini oluşturmaktadır.

Tezin birinci bölümünde diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık kullanılan önemli tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümünde verilen denklemin belirli başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri için integral denklemler ve bu denklem için oldukça kullanışlı olan integral gösterilim verilmiştir. Ayrıca ele alınan operatörün spektral karakteristiklerinin bazı önemli özellikleri araştırılmıştır. Üçüncü bölümde ise ele alınan operatör için bazı ters problemlere yer verilmiştir.

1 TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sık sık kullanılan önemli tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1 $V \neq \varnothing$ herhangi bir küme ve K herhangi bir cisim olsun.
$+ : V \times V \to V$ ve $. : K \times V \to V$ fonksiyonları için aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa V ye K cismi üzerinde vektör uzay denir.

A) $(V, +)$ cebirsel yapısı değişmeli gruptur.

a$_1$) $\forall x, y \in V$ için $x + y \in V$ dir. (Kapalılık Özelliği)

a$_2$) $\forall x, y, z \in V$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir. (Birleşme Özelliği)

a$_3$) $\forall x \in V$ için $x + e = e + x = x$ olacak şekilde bir tek $e \in V$ vardır.

a$_4$) $\forall x \in V$ için $x + x^* = x^* + x = 0$ olacak şekilde bir tek $x^* \in V$ vardır.

a$_5$) $\forall x, y \in V$ için $x + y = y + x$ dir. (Değişme Özelliği)

B) $\forall x, y \in V$ ve $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır.

b$_1$) $\alpha x \in V$ dir.

b$_2$) $\alpha (x + y) = \alpha x + \alpha y$ dir.

b$_3$) $(\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta y$ dir.

b$_4$) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ dir.

b$_5$) $\forall x \in V$ için $1.x = x$ olacak şekilde $1 \in K$ vardır. Burada 1, K cisminin birim elemanıdır.

Tanım 1.2 $D(L)$ ve $R(L)$ aynı cisim üzerindeki vektör uzayları olmak üzere $L : D(L) \to R(L)$ biçiminde tanımlanan dönüşüme operatör denir. Bu operatör $\forall x, y \in D(L)$ ve $\forall \alpha$ skaleri için

L_1) $L(x + y) = L(x) + L(y)$

L_2) $L(\alpha x) = \alpha L(x)$

koşullarını sağlıyorsa L ye lineer operatör veya lineer homomorfizm adı verilir. $L : D(L) \to R(L)$ operatörü birebir örten ise L operatörüne lineer izomorfizm denir. Değer kümesi reel sayılar ($\mathbb{R}$) veya kompleks sayılar ($\mathbb{C}$) olan operatörlere ise fonksiyonel denir.

Tanım 1.3 H, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olmak üzere, $\forall x, y, z \in H$

ve $\forall\lambda \in \mathbb{C}$ için aşağıdaki koşulları sağlayan $< .,. >: H \times H \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna H da bir iç çarpım denir.

$i) < x, x > \geq 0; < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$

$ii) < x, y >= \overline{< y, x >}$

$iii) < \lambda x, y >=< \lambda x, y >$

$iv) < x + z, y >=< x, y > + < z, y > .$

$\|x\| := \sqrt{< x, x >}$ ifadesi x in normu olarak tanımlanmaktadır.

Bir iç çarpım uzayındaki her Cauchy dizisi uzay içinde bir limite sahipse bu uzaya Hilbert uzay adı verilir. Örneğin,

$$L_2[a, b] = \left\{ f(x) : \int_a^b [f(x)]^2 \, dx < \infty \right\}$$

uzayı

$$< f, g >= \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

iç çarpımı ile bir Hilbert uzayıdır.

Tanım 1.4 Bir H Hilbert uzayında tanımlı L lineer operatörü verilsin. Eğer $\forall x \in D(L)$ için $\|Lx\| \leq m \|x\|$ olacak şekilde bir $m > 0$ sayısı varsa L ye sınırlı lineer operatör denir.

Tanım 1.5 H bir Hilbert uzayı ve M, H ın altuzayı olsun. Her bir $x \in H$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ olacak şekilde $\exists (x_n) \subset M$ dizisi varsa M ye H da yoğun alt uzay adı verilir ve $\overline{M} = H$ ile gösterilir.

Tanım 1.6 $\{x : \forall m \in M \text{ için } (x, m) = 0\}$ kümesine M kümesinin ortogonal tümleyeni denir ve $M^{\perp}$ ile gösterilir.

Teorem 1.7 $\overline{M} = H$ olması için gerek ve yeter koşul $M^{\perp} = \{0\}$ olmasıdır.

Tanım 1.8 L bir H Hilbert uzayından kendi üzerine tanımlı bir lineer operatör ve $\overline{D(L)} = H$ olsun.

$M := \{y \in H : \forall x \in D(L) \text{ için } (Lx, y) = (x, z) \text{ olacak şekilde } z \in H \text{ mevcut}\}$

kümesi üzerinde $y \in M$ için $L^{*}y = z$ şeklinde tanımlı operatöre L operatörünün eşlenik (adjoint) operatörü denir.

Bir L operatörü için; $L = L^*$ ise bu operatöre özeşlenik (self-adjoint) operatör denir.

Tanım 1.9 $[a, b]$ aralığında tanımlı sonlu değerli $f(x)$ fonksiyonu verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için $[a, b]$ ye ait olan ve $\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta$ koşulunu sağlayan keyfi sonlu sayıda ikişerli ayrık $\{(a_k, b_k)\}$ aralıkları için

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa $f(x)$ fonksiyonuna $[a, b]$ kapalı aralığında mutlak süreklidir denir. $[a, b]$ aralığında mutlak sürekli olan fonksiyonlar uzayı $AC[a, b]$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 1.10 (a, b) aralığında tanımlı f fonksiyonunun $k = \overline{0, n-1}$ için $f^{(k)} \in AC[a, b]$ ve $f^{(n)} \in L_2[a, b]$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar uzayına Sobolev Uzayı denir ve $W_2^n[a, b]$ ile gösterilir.

Tanım 1.11 n. mertebeden bir lineer diferansiyel ifade

$$\ell(y) = p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + p_n(x)\, y \tag{1.1}$$

formundadır. Burada $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonlarına diferansiyel ifadenin katsayıları, n sayısına da mertebesi denir.

Tanım 1.12 a ve b sonlu sayılar olmak üzere $\dfrac{1}{p_0(x)}, p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonları $[a, b]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilirlerse, (1.1) diferansiyel ifadesine regüler diferansiyel ifade, a veya b sonsuz ya da $\dfrac{1}{p_0(x)}, p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonlarından en az biri $[a, b]$ aralığında integrallenebilir değilse, (1.1) diferansiyel ifadesine singüler diferansiyel ifade denir.

Tanım 1.13

$$\begin{aligned} U_\upsilon(y) = \; & a_{\upsilon 0} y(a) + a_{\upsilon 1} y'(a) + ... + a_{\upsilon(n-1)} y^{(n-1)}(a) \\ & + b_{\upsilon 0} y(b) + b_{\upsilon 1} y'(b) + ... + b_{\upsilon(n-1)} y^{(n-1)}(b) = 0 \end{aligned}$$

eşitliklerine $y \in C^{(n)}(a,b)$ fonksiyonu için konulan sınır koşulları adı verilir. Burada $C^{(n)}(a,b)$, (a,b) aralığında n. mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyonların uzayı ve a_{vi}, b_{vi} $\left(v=\overline{1,m},\ i=\overline{1,n-1}\right)$ reel katsayılardır.

Tanım 1.14 $D=\left\{y\in C^{(n)}(a,b): U_v(y)=0, v=\overline{1,m}\right\}$ kümesi üzerinde

$$Ly=\ell(y)$$

eşitliği ile bir lineer operatör tanımlanır. Bu operatöre $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve $U_v(y)=0$ sınır koşulları tarafından üretilen diferansiyel operatör denir.

Tanım 1.15 λ bir kompleks parametre olmak üzere

$$L:=\begin{cases}\ell(y)=\lambda y\\ U_v(y)=0, \quad v=\overline{1,m}\end{cases} \tag{1.2}$$

sınır değer probleminin sıfırdan farklı bir $y(x)$ çözümü varsa λ ya bu sınır değer probleminin özdeğeri, $y(x)$ e de λ ya karşılık gelen özfonksiyonu denir. L sınır değer problemine $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve $U_v(y)=0$ sınır koşulları tarafından üretilen özdeğer problemi de denir.

Tanım 1.16 Tanım 1.15 da $n=m$ olsun. $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), ..., y_n(x,\lambda)$ fonksiyonları

$$\ell(y)=\lambda y$$

denkleminin

$$y_i^{(j-1)}(a,\lambda)=\begin{cases}0, & i\neq j \text{ ise}\\ 1, & i=j \text{ ise}\end{cases}, \ i,j=\overline{1,n}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere;

$$\triangle(\lambda)=\begin{vmatrix}U_1(y_1) & ... & U_1(y_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ U_n(y_1) & ... & U_n(y_n)\end{vmatrix}$$

determinantına L problemine karşılık gelen diferansiyel operatörün karakteristik fonksiyonu denir.

Tanım 1.17 $(L-\lambda I)^{-1}$ in tüm $L_2[a,b]$ de mevcut ve sınırlı olduğu $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün regüler noktası denir. Tüm regüler noktalarının kümesine resolvent küme denir ve $\rho(L)$ ile gösterilir.

Tanım 1.18 $(L-\lambda I)^{-1}$ operatörüne L operatörünün Resolvent operatörü denir.

Tanım 1.19 Kompleks düzlemde bir z_0 noktası ve bu noktanın en az bir $\delta > 0$ komşuluğunda tanımlı olan bir $f(z)$ fonksiyonu verilsin. Eğer,

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{f(z_0 + \triangle z) - f(z_0)}{\triangle z}$$

limiti mevcut ve sonlu ise $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasında türevlenebilirdir denir. Bu limitin değeri de $f(z)$ fonksiyonun z_0 noktasındaki türevi olarak adlandırılır, $f'(z_0)$ ile gösterilir.

Tanım 1.20 $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir.

Tanım 1.21 Kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik olan fonksiyona tam fonksiyon denir.

Teorem 1.22 (Liouville) Kompleks düzlemin tamamında sınırlı olan tam fonksiyon sabit fonksiyondur.

Tanım 1.23 $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\delta > 0$ için, $f : U_\delta(z_0) \to \mathbb{C}$ herhangi bir fonksiyon olsun. Eğer $f(z_0) = 0$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonun bir sıfır yeri veya kısaca sıfırı denir. Eğer $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0, ..., f^{(n-1)}(z_0) = 0$ fakat $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ ise z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun n katlı sıfırı diye adlandırılır.

Teorem 1.24 (Rouché) $f(z)$ ve $g(z)$ kompleks düzlemin bir B bölgesinde sonlu sayıda sıfır yeri olan analitik fonksiyonlar olsun. Eğer γ, $f(z)$ ve $g(z)$ nin hiçbir sıfır yerinden geçmeyen, B içinde bulunan basit kapalı bir eğri ve de γ üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ ise bu durumda $f(z)$ ve $f(z) + g(z)$ fonksiyonlarının γ içindeki sıfırlarının sayısı katlılığı ile birlikte aynıdır.

Teorem 1.25 (Cauchy İntegral Teoremi**)** $f(z)$ bağlantılı G bölgesinde birebir analitik fonksiyon γ ise G'de bulunan keyfi düzlendirilebilir kapalı eğri olacak biçimde $f(z)$ nin γ eğrisi üzerinden integrali sıfıra eşittir yani,

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Teorem 1.26 (Cauchy İntegral Formülü**)** B bir bölge ve γ bu bölge içinde bir kapalı eğri olsun. Eğer a, γ 'nın sınırlandırdığı bölge içinde bir nokta ve $f(z)$, B' de analitik ise,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)}{z-a}dz$$

dir.

Tanım 1.27 Analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası z_0 olsun. Eğer

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

ise z_0 noktasına $f(z)$ nin kutup noktası denir.

Teorem 1.28 (Rezidü Teoremi**)** D bölgesinde ($f(z)$ nin sonlu sayıda ayrık tekil $z_1, z_2, ..., z_n$ noktaları hariç) ve D nin Γ sınırında hariç $f(z)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Re}_{z=z_k} s f(z)$$

eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ nin k katlı kutup noktası ise

$$\operatorname*{Re}_{z=z_k} s f(z) = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[f(z)(z-z_0)^k\right]$$

z_0 noktası $f(z)$ nin basit kutup noktası olduğunda ise

$$\operatorname*{Re}_{z=z_k} s f(z) = \lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]$$

dir.

Teorem 1.29 (Ahlfors, 1966) f, bir B bölgesinde analitik bir fonksiyon, γ ise B de bulunan ve f nin sıfır yerinden geçmeyen basit kapalı eğri olsun.f nin γ nın iç kısmındaki sıfır yerleri $z_1, z_2, ..., z_n$ ve katlılıklarıda sırasıyla $m_1, m_2, ...m_n$ ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

dir.

Teorem 1.30 (Ahlfors, 1966) f, bir B bölgesinde meromorf fonksiyon, γ ise B de bulunan f nin hiçbir sıfıryeri ve kutup yerinden geçmeyen basit kapalı eğri olsun. Eğer f nin γ içindeki sıfır yerlerinin sayısı Z_f ve kutup yerlerinin sayısı P_f ise

$$Z_f - P_f = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

dir.

Tanım 1.31 $f(z)$ fonksiyonu bir tam fonksiyon ve

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

olmak üzere yeterince büyük r ler için

$$M_f(r) < \exp(r^{\mu})$$

eşitsizliğini sağlayan $\mu > 0$ varsa $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir ve yukarıda verilen eşitsizliği sağlayan μ sayılarının infumumuna $f(z)$ nin mertebesi adı verilir ve ρ ile gösterilir.

Teorem 1.32 (Hadamard) Mertebesi $\rho \in (0,1)$ olan her bir $f(z)$ tam fonksi-yonu

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

şeklinde gösterilime sahiptir. Burada m, $f(z)$ fonksiyonunun orjindeki sıfırının katlılığı, $\{z_n\}_{n\geq 1}$ ise $f(z)$ nin diğer tüm sıfırlarının kümesidir.

Teorem 1.33 (Riemann-Lebesgue) Eğer $f(x)$, $x \in (a,b)$ aralığında mutlak integrallenebilir bir fonksiyon ise

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n \;&:= \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\cos nx dx = 0 \\ \lim_{n\to\infty} b_n \;&:= \lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\sin nx dx = 0\end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 1.34 $\forall\ f \in D\left(L\right)$ için

$$\left\langle Lf,\ f\right\rangle \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyor ise L operatörüne pozitif operatör denir.

Teorem 1.35 Pozitif bir operatörün tüm öz değerleri pozitiftir.

Tanım 1.36 O ve o sembollerine Landau sembolleri denir ve $x \mapsto x_0$ için

$$\left|f\left(x\right)\right| \leq c\left|g\left(x\right)\right| \Rightarrow f\left(x\right) = O\left(g\left(x\right)\right)$$

ve

$$\lim_{x \mapsto x_0} \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = 0 \Rightarrow f\left(x\right) = o\left(g\left(x\right)\right)$$

dir.

2 REGÜLER STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ

2.1 Temel Özellikler ve Düz Problem

Bu bölümde öncelikle regüler Sturm-Liouville operatörünün temel özellikleri incelenmiş, ele alınan problemin bazı başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri için integral denklemler elde edilmiş, bu çözümler için bir integral gösterilim türetilmiş ve son olarak da operatörün özdeğer ve özfonksiyonlarının bazı önemli özellikleri verilmiştir.

$L_2(0,\pi)$ uzayında aşağıdaki L regüler Sturm-Liouville operatörünü ele alalım.

$$\ell y := -y'' + q(x)\, y = \lambda y \tag{2.1.1}$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0 \tag{2.1.2}$$

$$V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{2.1.3}$$

Burada $q(x)$, $L_2(0,\pi)$ sınıfından reel değerli bir fonksiyon, h, $H \in \mathbb{R}$ ve λ kompleks spektral parametredir.

(2.1.1)-(2.1.3) sınır değer problemi, tanım kümesi

$$D(L) = \left\{ y : y \in W_2^1[0,\pi],\ \ell(y) \in L_2(0,\pi),\ y'(0) - hy(0) = 0,\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \right\}$$

biçiminde olan $Ly = \ell y$ şeklinde tanımlı L operatörü üretir.

(2.1.1) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = 1,\ \varphi'(0,\lambda) = h \tag{2.1.4}$$

$$S(0,\lambda) = 0,\ S'(0,\lambda) = 1 \tag{2.1.5}$$

$$\psi(\pi,\lambda) = 0,\ \psi'(\pi,\lambda) = -H \tag{2.1.6}$$

şeklindeki başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri sırasıyla $\varphi(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ olsun. Bu durumda lineer diferansiyel denklemler için bilinen başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği teoreminden $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümleri var ve tektir.

(2.1.2)-(2.1.3) sınır koşulları dikkate alınırsa,

$$\varphi^{'}(0,\lambda) - h\varphi(0,\lambda) = 0$$

$$\psi^{'}(\pi,\lambda) + H\psi(\pi,\lambda) = 0$$

eşitlikleri her bir λ için geçerli olur. Ayrıca

$$W(\varphi,\psi) = \psi(x,\lambda)\,\varphi^{'}(x,\lambda) - \psi^{'}(x,\lambda)\,\varphi(x,\lambda) \tag{2.1.7}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümlerinin Wronskiyan'ı denir. Bu fonksiyonun x'e bağlı olmadığı (2.1.1) denklemi kullanılarak kolayca gösterilebilir. Gerçektende,

(2.1.7) eşitliğinin her iki yanı $[0,\pi]$ aralığında x değişkenine göre türevlenirse,

$$\frac{d}{dx}W[\varphi,\psi] = \frac{d}{dx}\left[\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda)\right]$$
$$= \varphi'(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) + \varphi(x,\lambda)\psi''(x,\lambda) - \varphi''(x,\lambda)\psi(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)$$
$$= \varphi(x,\lambda)\psi''(x,\lambda) - \varphi''(x,\lambda)\psi(x,\lambda)$$

elde edilir. Burada $\psi''(x,\lambda)$ ve $\varphi''(x,\lambda)$ ifadeleri (2.1.1) denkleminden alınarak yerlerine yazılırsa,

$$\frac{d}{dx}W[\varphi,\psi] = \varphi(x,\lambda)(q(x)-\lambda)\psi(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)(q(x)-\lambda)\psi(x,\lambda) = 0$$

olduğu sonucuna varılır.

Dolayısıyla $W[\varphi,\psi]$ fonksiyonu, $[0,\pi]$ aralığında x değişkenine göre sabit fonksiyondur. Bu nedenle bu fonksiyon $\Delta(\lambda)$ ile gösterilir.

(2.1.7) eşitliğinde $x=0$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \psi(0,\lambda)\,\varphi^{'}(0,\lambda) - \psi^{'}(0,\lambda)\,\varphi(0,\lambda)\\ &= \psi(0,\lambda)\,h - \psi^{'}(0,\lambda)\\ &= -\left(\psi^{'}(0,\lambda) + h\psi(0,\lambda)\right)\\ &= -U(\psi)\end{aligned}$$

ve

$x=\pi$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) &= \psi(\pi,\lambda)\varphi^{'}(\pi,\lambda)-\psi^{'}(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\lambda)\\ &= \varphi^{'}(\pi,\lambda)-(-H)\varphi(\pi,\lambda)\\ &= \varphi^{'}(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)\\ &= V(\varphi)\end{aligned}$$

alınır. Böylece $\Delta(\lambda)$ için

$$\Delta(\lambda)=-U(\psi)=V(\varphi) \tag{2.1.8}$$

elde edilmiş olur.

$\Delta(\lambda)$ fonksiyonuna L operatörünün karakteristik fonksiyonu denir. Bu fonksiyon λ'nın tam fonksiyonudur. Bu nedenle $\Delta(\lambda)$'nın en fazla sayılabilir sayıda $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ sıfırına sahiptir.

Teorem 2.1.1 (Lagrange Eşitliği) $f,\ g\in W_2^1[0,\pi]$ olmak üzere

$$\langle \ell f,g\rangle = W(f,\overline{g})\big|_{x=\pi}-W(f,\overline{g})\big|_{x=0}+\langle f,\ell g\rangle \tag{2.1.9}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $q(x)$ reel değerli bir fonksiyon ve $\ell f:=-f''(x)+q(x)f(x)$ olduğundan

$$\begin{aligned}\langle \ell f,g\rangle &= \int_0^\pi\left(-f''(x)+q(x)f(x)\right)\overline{g(x)}dx\\ &= -\int_0^\pi f''(x)\overline{g(x)}dx+\int_0^\pi q(x)f(x)\overline{g(x)}dx\\ &= -\int_0^\pi \overline{g(x)}df'(x)+\int_0^\pi q(x)f(x)\overline{g(x)}dx\\ &= -\ f'(x)\overline{g(x)}\Big|_0^\pi+\int_0^\pi f'(x)d\overline{g(x)}+\int_0^\pi q(x)f(x)\overline{g(x)}dx\\ &= f'(0)\overline{g(0)}-f'(\pi)\overline{g(\pi)}+\int_0^\pi\overline{g'(x)}df(x)+\int_0^\pi q(x)f(x)\overline{g(x)}dx\\ &= f'(0)\overline{g(0)}-f'(\pi)\overline{g(\pi)}+\ f(x)\overline{g'(x)}\Big|_0^\pi\\ &\quad -\int_0^\pi f(x)d\overline{g'(x)}+\int_0^\pi q(x)f(x)\overline{g(x)}dx\end{aligned}$$

$$= f'(0)\,\overline{g(0)} - f'(\pi)\,\overline{g(\pi)} + f(\pi)\,g'(\pi) - f(0)\,g'(0)$$

$$-\int_0^\pi f(x)\,d\overline{g'(x)}dx + \int_0^\pi q(x)\,f(x)\,\overline{g(x)}dx$$

$$= W(f,\overline{g})\big|_{x=\pi} - W(f,\overline{g})\big|_{x=0} - \int_0^\pi f(x)\,\overline{g''(x)}dx + \int_0^\pi q(x)\,f(x)\,\overline{g(x)}dx$$

$$= W(f,\overline{g})\big|_{x=\pi} - W(f,\overline{g})\big|_{x=0} + \int_0^\pi f(x)\left(\overline{-g''(x) + q(x)\,g(x)}\right)dx\theta$$

$$= W(f,\overline{g})\big|_{x=\pi} - W(f,\overline{g})\big|_{x=0} + \langle f, \ell g\rangle$$

eşitliği gösterilmiş olur.

Teorem 2.1.2 $\forall\ f,\ g \in D(L)$ için

$$W(f,\overline{g})\big|_{x=\pi} = W(f,\overline{g})\big|_{x=0} = 0 \tag{2.1.10}$$

eşitlikleri doğrudur.

İspat: $f,\ g \in D(L)$ olduğundan

$$f'(0) - hf(0) = 0,\ \ f'(\pi) + Hf(\pi) = 0$$

eşitlikleri dolayısıyla

$$f'(0) = hf(0)\,,\ \ f'(\pi) = -Hf(\pi)$$

eşitlikleri sağlanır. Benzer şekilde

$$g'(0) - hg(0) = 0,\ \ g'(\pi) + Hg(\pi) = 0$$

olduğundan

$$g'(0) = hg(0)\,,\ \ g'(\pi) = -Hg(\pi)$$

eşitlikleri de gerçeklenir. Buna göre

$$W(f,\overline{g})\big|_{x=\pi} = f(\pi)\,\overline{g'(\pi)} - \overline{g(\pi)}f'(\pi)$$

$$= f(\pi)\,(-H)\,\overline{g(\pi)} - \overline{g(\pi)}\,(-H)\,f(\pi)$$

$$= -Hf(\pi)\,\overline{g(\pi)} + H\overline{g(\pi)}f(\pi) = 0$$

ve

$$W(f,\overline{g})|_{x=0} = f(\pi)\overline{g'(0)} - \overline{g(0)}f'(0)$$
$$= f(0)\,h\overline{g(0)} - \overline{g(0)}hf(0)$$
$$= hf(0)\,\overline{g(0)} - hf(0)\,\overline{g(0)} = 0$$

elde edilir. O halde (2.1.10) eşitliklerinin doğruluğu gösterilmiş olur.

Sonuç 2.1.3 $\forall\ f,\ g \in D(L)$ için $\langle \ell f, g\rangle = \langle f, \ell g\rangle$ dir.

Teorem 2.1.4 L operatörünün tüm öz değerleri reeldir.

İspat: L operatörünün bir öz değeri $\lambda = \lambda_0$ ve bu λ_0 a karşılık gelen bir öz fonksiyon $y(x,\lambda_0)$olsun. Bu durumda

$$\ell y(x,\lambda_0) = \lambda_0 y(x,\lambda_0)$$

sağlanır. Burada

$$\langle \ell f, g\rangle = \langle f, \ell g\rangle$$

eşitliğinden yararlanılırsa,

$$\langle \ell y(x,\lambda_0), y(x,\lambda_0)\rangle = \langle y(x,\lambda_0), \ell y(x,\lambda_0)\rangle = \overline{\langle \ell y(x,\lambda_0), y(x,\lambda_0)\rangle}$$

olduğundan $\langle \ell y(x,\lambda_0), y(x,\lambda_0)\rangle \in \mathbb{R}$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$\langle \ell y(x,\lambda_0), y(x,\lambda_0)\rangle = \lambda_0 \langle y(x,\lambda_0), y(x,\lambda_0)\rangle = \lambda_0 \|y(x,\lambda_0)\|^2$$

olduğundan $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ olur.

Yani L operatörünün tüm öz değerleri reeldir.

Teorem 2.1.5 L operatörünün farklı öz değerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlar ortogonaldir.

İspat: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ iki öz değer ve bu öz değere karşılık gelen öz fonksiyonlar sırasıyla $y_1(x) = y(x,\lambda_1)$ ve $y_2(x) = y(x,\lambda_2)$ olsun. Bu durumda Lagrange eşitliğinden,

$$\langle \ell y_1(x), y_2(x)\rangle = \langle y_1(x), \ell y_2(x)\rangle$$

$$\langle \lambda_1 y_1(x), y_2(x)\rangle = \langle y_1(x), \lambda_2 y_2(x)\rangle$$

$$\lambda_1 \langle y_1(x), y_2(x)\rangle = \lambda_2 \langle y_1(x), y_2(x)\rangle$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle y_1(x), y_2(x)\rangle = 0$$

elde edilir. $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ olduğundan $\langle y_1(x), y_2(x)\rangle = 0$ olur. Yani $y_1(x)$ ile $y_2(x)$ öz fonksiyonları ortogonaldir.

Şimdi yukarıda anlatılan kavramları basit bir örnek üzerinde görelim.

L operatörü

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y, \ 0 \leq x \leq \pi \\ y'(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

şeklinde verilmiş olsun. Bu operatörün öz değerlerini ve öz fonksiyonlarını bulalım.

Bu denklemin genel çözümü

$$y(x,\lambda) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

şeklindedir. Buradan

$$y'(x,\lambda) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$$

alınır. Sınır koşullarından

$$y'(0,\lambda) = c_2\sqrt{\lambda} = 0 \text{ ise } c_2 = 0$$

ve

$$y'(\pi,\lambda) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sin\sqrt{\lambda}\pi &= 0 \\ \sqrt{\lambda}\pi &= n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n \\ &\Rightarrow \lambda_n = n^2, \ n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan $\lambda = 0$ için,

$$-y'' = 0$$

denlemi alınır. Bu denklemin genel çözümü

$$y(x) = c_1 + c_2 x$$

şeklindedir. Sınır koşullarından

$$\begin{aligned} y'(x) &= c_2 \\ y'(0) &= y'(\pi) = 0 \text{ ise } c_2 = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $c_1 \neq 0$ için $y(x,0) \neq 0$ olacağından $\lambda = \lambda_0 = 0$ bir öz değer olur. Böylece verilen problemin özdeğerleri

$$\lambda_n = n^2, \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

şeklindedir. Bu özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar ise

$$y(x, \lambda_n) = y_n(x) = \cos(nx), \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi $n \neq m$ olmak üzere $\lambda_n \neq \lambda_m$ özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonlar sırasıyla $y_n(x)$ ve $y_m(x)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} &\langle y_n(x), y_m(x) \rangle = \int_0^\pi y_n(x) \overline{y_m(x)} dx = \int_0^\pi \cos(nx) \cos(mx) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(n+m) x + \cos(n-m) x] \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n+m} \sin(n+m) x + \frac{1}{n-m} \sin(n-m) x \right] \Bigg|_{x=0}^{x=\pi} = 0 \end{aligned}$$

olduğundan farklı özdeğerlere karşılık gelen öz fonksiyonların ortogonal olduğu görülür.

2.2 $\ell y = \lambda y$ Denkleminin Çözümleri

L operatöründen alınan

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda y,\ \ 0 \leq x \leq \pi \tag{2.2.1}$$

$$y(0) = c_1,\ \ y'(0) = c_2 \tag{2.2.2}$$

başlangıç değer problemini ele alalım.

Teorem 2.2.1 (2.2.1) ve (2.2.2) başlangıç değer probleminin her çözümü

$$y(x,\lambda) = c_1 + c_2 x + \int_0^x (x-s)\,(q(s)-\lambda)\, y(s,\lambda)\, ds \tag{2.2.3}$$

integral denkleminin bir çözümüdür. Tersi de doğrudur.

İspat:

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda y \text{ ise } y'' = (q(s)-\lambda)\, y$$

eşitliğin her iki tarafının $(0,x)$ için integrali alınırsa,

$$\int_0^x y''(s,\lambda)\, ds = \int_0^x (q(s)-\lambda)\, y(s,\lambda)\, ds$$

$$y'(x) - y'(0) = \int_0^x (q(s)-\lambda)\, y(s,\lambda)\, ds$$

$$y'(x) = y'(0) + \int_0^x (q(s)-\lambda)\, y(s,\lambda)\, ds$$

eşitliği elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafının tekrar $(0,x)$ için integrali alınırsa,

$$\int_0^x y'(t,\lambda)\, dt = \int_0^x y'(0,\lambda)\, dt + \int_0^x \int_0^t (q(s)-\lambda)\, y(s,\lambda)\, ds dt$$

$$\int_0^x y'(t,\lambda)\, dt = y'(0,\lambda)\, x + \int_0^x \int_0^t (q(s)-\lambda)\, y(s,\lambda)\, ds dt$$

$$y(x,\lambda) - y(0,\lambda) = c_2 x + \int_0^x \int_0^t (q(s)-\lambda)\, y(s,\lambda)\, ds dt$$

$$y(x,\lambda) = c_1 + c_2 x + \int_0^x \int_0^t (q(s)-\lambda)\, y(s,\lambda)\, ds dt$$

$$y(x,\lambda) = c_1 + c_2 x + \int_0^x \left[(q(s)-\lambda)\, y(s,\lambda) \textstyle\int_s^x dt\right] ds$$

$$= c_1 + c_2 x + \int_0^x (x-s)\,(q(s)-\lambda)\, y(s,\lambda)\, ds$$

elde edilir.

Şimdi (2.2.3) eşitliği ile verilen integral denkleminin (2.2.1) − (2.2.2) başlangıç değer probleminin çözümü olduğunu gösterelim. Bunun için son eşitlikten ikinci mertebeye kadar türev alınırsa,

$$\begin{aligned} y'(x,\lambda) &= c_2 + \int_0^x (q(s)-\lambda)\, y(s,\lambda)\, ds \qquad (2.2.4) \\ y''(x,\lambda) &= (q(x)-\lambda)\, y(x,\lambda) \\ -y''(x,\lambda) + q(x)\, y(x,\lambda) &= \lambda y(x,\lambda) \end{aligned}$$

diferansiyel denklemi ve (2.2.3) ile (2.2.4) eşitliklerinde $x=0$ alınırsa,

$$\begin{aligned} y(0,\lambda) &= c_1 \\ y'(0,\lambda) &= c_2 \end{aligned}$$

başlangıç koşulları elde edimiş olur.

Teorem 2.2.2

$$\begin{aligned} y_0(x,\lambda) &= c_1 + c_2 x \\ y_{n+1}(x,\lambda) &= \int_0^x (x-s)(q(s)-\lambda)\, y_n(x,\lambda)\, ds, \ \ n = 0,1,2,3,... \end{aligned}$$

olmak üzere

$$y(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x,\lambda) \qquad (2.2.5)$$

serisini ele alalım. (2.2.5) serisi düzgün yakınsaktır ve (2.2.3) denkleminin bir çözümüdür.

İspat: Öncelikle (2.2.5) serisi düzgün yakınsak ise bunun denklemin bir çözümü olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} y(x,\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x,\lambda) = y_0(x,\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,\lambda) \\ &= y_0(x,\lambda) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \left[(x-s)(q(s)-\lambda)\, y_{n-1}((s,\lambda))\right] ds \\ &= c_1 + c_2 x + \int_0^x \left[(x-s)(q(s)-\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} y_n(s,\lambda)\right] ds \\ &= c_1 + c_2 x + \int_0^x \left[(x-s)(q(s)-\lambda)\, y((s,\lambda))\right] ds \end{aligned}$$

olduğundan (2.2.3) denklemi gerçeklenir. Şimdi (2.2.5) serisinin düzgün yakınsak olduğunu gösterelim. $\exists$ k sabiti vardır öyle ki

$$|y_0(x,\lambda)| \leq k$$

eşitsizliği sağlanır. $q(x)$ integrallenebilir olduğundan sınırlıdır. Yani $M > 0$ için $|q(x)| \leq M$ sağlanır. Ayrıca $|\lambda| \leq N$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{R}^{+}$ alalım.

Buna göre tümevarım yöntemini kullanırsak,

$n = 1$ için,

$$y_1(x,\lambda) = \int_0^x [(x-s)(q(s)-\lambda)\, y_0(s,\lambda)]\, ds$$

$$\Rightarrow |y_1(x,\lambda)| \leq \int_0^x [(x-s)\,|q(s)| + |\lambda|\,|y_0(s,\lambda)|]\, ds$$

$$\leq \int_0^x [(x-s)(M+N)\,k]\, ds$$

$$\leq (M+N)\,k \int_0^x (x-s)\, ds$$

$$\leq (M+N)\,k\pi x$$

$$|y_1(x,\lambda)| \leq (M+N)\,k\pi x$$

eşitsizliği alınır.

$n = 2$ için,

$$y_2(x,\lambda) = \int_0^x (x-s)(q(s)-\lambda)\, y_1(s,\lambda)\, ds$$

$$\Rightarrow |y_2(x,\lambda)| = \int_0^x (x-s)(|q(s)| + |\lambda|)\,|y_1(s,\lambda)|\, ds$$

$$\leq K(M+N)^2\,\pi^2 \frac{x^2}{2!}$$

eşitsizliği alınır. Benzer şekilde $n = k$ için

$$y_k(x,\lambda) \leq K(M+N)^k\,\pi^k \frac{x^k}{k!}$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu varsayarak $n = k+1$ için

$$y_{k+1}(x,\lambda) \leq K(M+N)^{k+1}\,\pi^{k+1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

$$y_{k+1}(x,\lambda)=\int_0^x ((x-s)(q(s)-\lambda)\,y_k(s,\lambda))\,ds$$

$$\Rightarrow |y_{k+1}(x,\lambda)|=\int_0^x (x-s)(|q(s)|+|\lambda|)\,|y_k(s,\lambda)|\,ds$$

$$\leq K(M+N)^k\pi^k\int_0^x (x-s)(M+N)\frac{x^k}{k!}ds$$

$$\leq K(M+N)^{k+1}\pi^{k+1}\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$$

elde edilir.

Şimdi keyfi bir n için,

$$|y_n(x,\lambda)|\leq K(M+N)^n\pi^n\frac{x^n}{n!}$$

eşitsizliğini ele alalım. Bu eşitsizlik (2.2.5) serisinde gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}|y_n(x,\lambda)| &\leq K\sum_{n=0}^{\infty}(M+N)^n\pi^n\frac{x^n}{n!}\\ &= Ke^{(M+N)\pi x}\end{aligned}$$

serisi elde edilir. Dolayısıyla Weierstrass kriterinden (2.2.5) serisi düzgün yakınsaktır.

Sonuç 2.2.3 (2.2.3) integral denkleminin çözümü var ve bu çözüm tektir. Ayrıca bu çözüm λ nın tam fonksiyonudur. Weierstrass'a (2.2.5) serisi düzgün yakınsak olduğundan $y(x,\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre tam fonksiyondur.

$$\begin{aligned}y(x,\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty}|y_n(x,\lambda)|\\ &\leq Ke^{(M+N)\pi x}\end{aligned}$$

serisi terim terim türevlenebilirdir. Yani $y(x,\lambda)$ fonksiyonu λ ya göre türevlenebilirdir.

Sonuç 2.2.4 (2.2.1) ve (2.2.2) başlangıç değer probleminin çözümü var ve tektir. Ayrıca λ nın tam fonksiyonudur.

Lemma 2.2.5 $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun $\{\lambda_n\}$ sıfırları ile L operatörünün özdeğerleri çakışır ve $\psi(x,\lambda_n)$, $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonları λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere bir $\{\beta_n\}$ dizisi vardır öyle ki,

$$\psi(x,\lambda_n)=\beta_n\varphi(x,\lambda_n)\,,\quad \beta_n\neq 0 \tag{2.2.6}$$

bağıntısı sağlanır. Burada $\beta_n=\psi(0,\lambda_n)=\dfrac{1}{\varphi(\pi,\lambda_n)}$ şeklindedir.

İspat. İlk olarak λ_0'ın , $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun bir sıfırı olduğunu kabul edelim. Yani,

$$\Delta(\lambda_0)=0$$

eşitliği sağlansın. Böylece bir β_0 sabiti için $\psi(x,\lambda_0)=\beta_0\varphi(x,\lambda_0)$ eşitliği alınır. Ek olarak, $\varphi(x,\lambda_0)$ ve $\psi(x,\lambda_0)$ fonksiyonları sırasıyla (2.1.4) ve (2.1.6) başlangıç koşullarını sağlar. Dolayısıyla λ_0 özdeğerdir ve $\varphi(x,\lambda_0)$ ve $\psi(x,\lambda_0)$ fonksiyonları λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlardır.

Tersine λ_0, L sınır değer probleminin bir özdeğeri olsun. Bu durumda $\Delta(\lambda_0)=0$ olduğunu göstermek gerekir. Bunun için $\Delta(\lambda_0)\neq 0$ olduğu kabul edilirse, $\varphi(x,\lambda_0)$ ve $\psi(x,\lambda_0)$ fonksiyonları lineer bağımsız olur. Böylece C_1 ve C_2 keyfi sabitler olmak üzere,

$$y(x,\lambda_0)=C_1\psi(x,\lambda_0)+C_2\varphi(x,\lambda_0)$$

fonksiyonu L probleminin $\lambda=\lambda_0$ a karşılık gelen genel çözümüdür. Burada eğer $C_1\neq 0$ ise

$$\psi(x,\lambda_0)=\frac{1}{C_1}y(x,\lambda_0)-\frac{C_2}{C_1}\varphi(x,\lambda_0)$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\Delta(\lambda_0)=<\psi(x,\lambda_0)\,,\varphi(x,\lambda_0)>\\
&=\frac{1}{C_1}<y(x,\lambda_0)-C_2\varphi(x,\lambda_0)\,,\varphi(x,\lambda_0)>\\
&=\frac{1}{C_1}\left\{\left[y(x,\lambda_0)-C_2\varphi(x,\lambda_0)\right]\varphi'(x,\lambda_0)-\left[y'(x,\lambda_0)-C_2\varphi'(x,\lambda_0)\right]\varphi(x,\lambda_0)\right\}\\
&=\frac{1}{C_1}\left[y(x,\lambda_0)\varphi'(x,\lambda_0)-y'(x,\lambda_0)\varphi(x,\lambda_0)\right]\\
&=\frac{1}{C_1}<y(x,\lambda_0)\,,\varphi(x,\lambda_0)>
\end{aligned}$$

eşitliği alınır. Bu eşitlikte özel olarak $x = 0$ konur ve (2.1.2) ve (2.1.3) sınır koşulları göz önünde tutulursa,

$$\Delta(\lambda_0) = 0$$

çelişkisi elde edilir.

Her bir özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar bir sabit çarpanı ile birbirinden farklı olduğundan bir $\{\beta_n\}$ dizisi vardır öyle ki her n için,

$$\psi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi(x, \lambda_n), \quad \beta_n \neq 0$$

alınır.

Son eşitlikte $x = 0$ alınır ve $\varphi(0, \lambda_n) = 1$ olduğu göz önünde tutulursa,

$$\psi(0, \lambda_n) = \beta_n \varphi(0, \lambda_n) \Rightarrow \beta_n = \psi(0, \lambda_n)$$

ve benzer şekilde $x = \pi$ alınır ve $\psi(\pi, \lambda_n) = 1$ olduğu göz önünde tutulursa,

$$\psi(\pi, \lambda_n) = \beta_n \varphi(\pi, \lambda_n) \Rightarrow \beta_n = \frac{1}{\varphi(\pi, \lambda_n)}$$

eşitlikleri alınır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n)\, dx$$

işaretlemesini yapalım. $\{\alpha_n\}$ sayılarına L probleminin normalleştirici sayıları, $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ sayılarına ise L probleminin spektral verileri adı verilir.

Teorem 2.2.6 $\beta_n \alpha_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n)$ eşitliği sağlanır.

$$\dot{\Delta}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$$

şeklindedir.

İspat: $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları (2.1.1) denkleminin birer çözümü olduklarından

$$\begin{aligned} -\psi''(x,\lambda)+q(x)\psi(x,\lambda) &= \lambda\psi(x,\lambda) \\ -\varphi''(x,\lambda_n)+q(x)\varphi(x,\lambda_n) &= \lambda_n\varphi(x,\lambda_n) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitlikleri sırasıyla $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned} -\psi''(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)+q(x)\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n) &= \lambda\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n) \\ -\varphi''(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)+q(x)\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda) &= \lambda_n\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda) \end{aligned}$$

eşitlikleri alınır. Bu eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} -\psi''(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)+\varphi''(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda) &= (\lambda-\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda) \\ \frac{d}{dx}\left[\varphi'(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)-\psi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)\right] &= (\lambda-\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı $[0,\pi]$ aralığında integrallenirse,

$$\varphi'(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)-\psi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)\big|_0^\pi=\int_0^\pi(\lambda-\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\,dx$$

$$\varphi'(\pi,\lambda_n)\psi(\pi,\lambda)-\psi'(\pi,\lambda)\varphi(\pi,\lambda_n)-\varphi'(0,\lambda_n)\psi(0,\lambda)$$

$$+\psi'(0,\lambda)\varphi(0,\lambda_n)=\int_0^\pi(\lambda-\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\,dx$$

$$\varphi'(\pi,\lambda_n)+H\varphi(\pi,\lambda_n)+\psi'(0,\lambda)-h\psi(0,\lambda)=\int_0^\pi(\lambda-\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\,dx$$

$$\Delta(\lambda_n)-\Delta(\lambda)=\int_0^\pi(\lambda-\lambda_n)\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\,dx$$

$$\frac{\Delta(\lambda_n)-\Delta(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}=\int_0^\pi\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\,dx$$

alınır. Son eşitlikte $\lambda\to\lambda_n$ iken limite geçilirse, Teorem 2.2.5 den

$$-\dot{\Delta}(\lambda_n)=\beta_n\alpha_n$$

eşitliği alınır.

Sonuç 2.2.7 λ_n öz değerleri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun basit (tek katlı) sıfırlarıdır. Yani $\dot{\Delta}(\lambda_n)\neq 0$ dır.

İspat: $\alpha_n \neq 0,\ \beta_n \neq 0,\ \alpha_n\beta_n = -\dot{\Delta}(\lambda_n)$ eşitliğinden $\dot{\Delta}\lambda_n \neq 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla λ_n ler $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun basit sıfırlarıdır.

Teorem 2.2.8 $\lambda = k^2$ olmak üzere

$$\begin{cases} -\varphi''(x,\lambda) + q(x)\varphi(x,\lambda) = k^2\varphi(x,\lambda),\ 0 \leq x \leq \pi \\ \varphi(0,\lambda) = 0, \varphi'(x,\lambda) = 1 \end{cases} \tag{2.2.6}$$

probleminin $\varphi(x,\lambda)$ çözümü

$$\varphi(x,\lambda) = \cos kx + \frac{h}{k}\sin kx + \frac{h}{k}\int_0^x \sin k(x-t)\, q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt \tag{2.2.7}$$

integral denkleminin bir çözümüdür. Bunun tersi de doğrudur. Yani bu integral denkleminin her bir çözümü başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

İspat:

$$\varphi''(x,\lambda) + k^2\varphi(x,\lambda) = q(x)\varphi(x,\lambda)$$

denkleminde $q(x) = 0$ alınırsa,

$$\varphi''(x,\lambda) + k^2\varphi(x,\lambda) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin genel çözümü

$$\varphi(x,\lambda) = c_1\cos kx + c_2\sin kx$$

şeklinde bulunur. Sabitlerin değişimi metodu kullanılarak

$$\varphi''(x,\lambda) + k^2\varphi(x,\lambda) = q(x)\varphi(x,\lambda)$$

denkleminin genel çözümü

$$\varphi(x,\lambda) = c_1(x)\cos kx + c_2(x)\sin kx \tag{2.2.8}$$

şeklinde aranır. Burada $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ fonksiyonları

$$\begin{cases} c_1'(x)\cos kx + c_2'(x)\sin kx = 0 \\ -kc_1'(x)\sin kx + kc_2'(x)\cos kx = q(x)\varphi(x,\lambda) \end{cases}$$

sistemini gerçekleyen fonksiyonlardır. Bu sistem çözülürse $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ fonksiyonları

$$c_1'(x) = -\frac{1}{k}\sin(kx)\,q(x)\,\varphi(x,\lambda) \text{ ise } c_1(x) = -\frac{1}{k}\int_0^x \sin(kt)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt + c_1$$

$$c_2'(x) = \frac{1}{k}\cos(kx)\,q(x)\,\varphi(x,\lambda) \text{ ise } c_2(x) = \frac{1}{k}\int_0^x \cos(kt)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt + c_2$$

biçiminde bulunur. $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ fonksiyonlarının bulunan bu değerleri (2.2.8) de yerlerine yazılır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
&\varphi(x,\lambda) = c_1\cos kx + c_2\sin kx \\
&-\frac{1}{k}\int_0^x \sin(kt)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt + \frac{1}{k}\int_0^x \cos(kt)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt \\
&= c_1\cos kx + c_2\sin kx + \frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt
\end{aligned}$$

integral denklemi alınır. Başlangıç koşulları kullanılarak

$$\varphi(0,\lambda) = c_1 = 1$$

ve

$$\varphi'(x,\lambda) = -kc_1\sin kx + kc_2\cos kx + \int_0^x \cos k(x-t)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt$$

olduğundan

$$\varphi'(0,\lambda) = kc_2 = h \text{ ise } c_2 = \frac{h}{k}$$

elde edilir. c_1 ve c_2 nin bu değerleri yerlerine yazılırsa (2.1.6) probleminin çözümü

$$\varphi(x,\lambda) = \cos kx + \frac{h}{k}\sin kx + \frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt$$

şeklinde elde edilmiş olur.

Şimdi ise tersinin doğruluğunu gösterelim. Bunun için

$$\varphi(x,\lambda) = \cos kx + \frac{h}{k}\sin kx + \frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt$$

ve

$$\varphi'(x,\lambda) = -k\sin kx + h\cos kx + \int_0^x \cos k(x-t)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda)$$

eşitliklerinden

$$\varphi(0,\lambda)=1,\ \varphi'(x,\lambda)=h$$

başlangıç koşulları alınır. Diğer taraftan

$$\varphi''(x,\lambda)=-k^2\cos kx-hk\sin kx+q(x)\varphi(x,\lambda)-k\int_0^x \sin k(x-t)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt$$
$$=-k^2\left(\cos kx+\frac{h\sin kx}{k}+\frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-t)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt\right)-q(x)\varphi(x,\lambda)$$
$$=-k^2\varphi(x,\lambda)+q(x)\varphi(x,\lambda)$$

olduğundan

$$-\varphi''(x,\lambda)+q(x)\varphi(x,\lambda)=k^2\varphi(x,\lambda)$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

Teorem 2.2.9 $k=\sigma+i\tau$ olmak üzere $0\leq x\leq\pi$ için

i) $|\cos kx|\leq e^{|\tau|x}$

ii) $|\sin kx|\leq e^{|\tau|x}$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat: i) $\operatorname{Im}k=\tau\geq 0$ olsun. ($\tau<0$ için benzer işlem yapılır.)

$$\cos(kx)\,e^{-|\tau|x}=\cos kx e^{-\tau x}=\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}e^{-\tau x}$$
$$\Rightarrow \left|\cos(kx)\,e^{-|\tau|x}\right|=\left|\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}e^{-\tau x}\right|=\left|\frac{e^{i(\sigma+i\tau)x}+e^{-i(\sigma+i\tau)x}}{2}e^{-\tau x}\right|$$

ifadesinde üçgen eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left|\cos(kx)\,e^{-|\tau|x}\right|\leq\frac{e^{-\tau x}}{2}\left[\left|e^{i\sigma x}e^{-\tau x}\right|+\left|e^{-i\sigma x}e^{\tau x}\right|\right]$$
$$=\frac{e^{-\tau x}}{2}\left[e^{-\tau x}+e^{\tau x}\right]=\frac{1}{2}\left(1+e^{-2\tau x}\right)\leq\frac{1}{2}(1+1)=1$$

olur. Buradan

$$|\cos(kx)|\leq e^{|\tau|x}$$

elde edilmiş olur.

ii) $\operatorname{Im}k=\tau\leq 0$ olsun. ($\tau>0$ benzer şekilde yapılır.)

$$\left|\sin(kx)\,e^{-|\tau|x}\right| = \left|\sin(kx)\,e^{\tau x}\right| = \left|\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}e^{\tau x}\right|$$
$$= \frac{e^{\tau x}}{2}\left|e^{i(\sigma+i\tau)x} - e^{-i(\sigma+i\tau)x}\right|$$

ifadesinde üçgen eşitsizliği kullanılırsa,

$$\left|\sin(kx)\,e^{-|\tau|x}\right| \le \frac{e^{\tau x}}{2}\left[\left|e^{i\sigma x}e^{-\tau x}\right| + e^{-i\sigma x}e^{\tau x}\right]$$
$$= \frac{e^{\tau x}}{2}\left[e^{-\tau x}+e^{\tau x}\right] = \frac{1}{2}\left(1+e^{2\tau x}\right) \le \frac{1}{2}(1+1) = 1$$

olur. Buradan

$$|\sin kx| \le e^{|\tau|x}$$

elde edilmiş olur.

Teorem 2.2.10 L operatörünün $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümleri $|\rho|\to\infty$ için

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + O\left(\dfrac{1}{|\rho|}e^{|\tau|x}\right) = O\left(e^{|\tau|x}\right) \\ \psi(x,\lambda) = \cos\rho(\pi-x) + O\left(\dfrac{1}{|\rho|}e^{|\tau|(\pi-x)}\right) = O\left(e^{|\tau|(\pi-x)}\right) \end{cases} \tag{2.2.9}$$

ve

$$\begin{cases} \varphi'(x,\lambda) = -\rho\sin\rho x + O\left(e^{|\tau|x}\right) = O\left(|\rho|\,e^{|\tau|x}\right) \\ \psi'(x,\lambda) = -\rho\sin\rho(\pi-x) + O\left(e^{|\tau|(\pi-x)}\right) = O\left(|\rho|\,e^{|\tau|(\pi-x)}\right) \end{cases} \tag{2.2.10}$$

asimptotik ifadeleri geçerlidir. Burada $x\in[0,\pi]$, $\lambda=\rho^2$, $\tau=\operatorname{Im}\rho$. dir.

İspat: $\varphi(x,\lambda)$ için geçerli olan

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + \frac{\sin\rho x}{\rho} + \frac{1}{\rho}\int_0^x \sin\rho(x-t)\,q(t)\,\varphi(t,\rho)\,dt$$

integral denkleminden

$$|\varphi(x,\lambda)|\,e^{-|\tau|x} \le 1 + \frac{1}{|\rho|}\left(h + \mu(\lambda)\int_0^\pi |q(t)|\,dt\right) \le C_1 + \frac{C_2}{|\rho|}\mu(\lambda)$$

eşitsizliği alınır. Burada $|\rho|\ge 1$, $x\in[0,\pi]$ için

$$\mu(\lambda) = \max_{0\le x\le\pi}\left(\varphi(x,\lambda)\,e^{-|\tau|x}\right),\quad |\sin\rho x| \le e^{|\tau|x}\ ,|\cos\rho x| \le e^{|\tau|x}$$

oldukları gözönüne alınırsa,

$$\mu(\lambda) \leq C_1 + \frac{C_2}{|\rho|}\mu(\lambda)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\varphi(x,\lambda) = O\left(e^{|\tau|x}\right)$$

asimptotik ifadesi alınır. Ayrıca

$$\begin{cases} -\widetilde{\varphi}''(x,\lambda) + q(\pi - x)\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \lambda\widetilde{\varphi}(x,\lambda) \\ \widetilde{\varphi}(0,\lambda) = 1,\ \widetilde{\varphi}'(0,\lambda) = H \end{cases}$$

başlangıç değer probleminin çözümü $\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ olmak üzere

$$\widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \psi(\pi - x,\lambda)$$

ifadesi doğrudur. Böylece son eşitlik gözönüne alınırsa diğer asimptotikler benzer şekilde ispatlanabilir.

(2.2.9) ve (2.2.10) asimptotik eşitlikleri kullanılarak $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonu için

$$\Delta(\lambda) = -\rho\sin\rho\pi + \omega\cos\rho\pi + o(1)$$

asimptotik ifadesi elde edilebilir. Burada

$$\omega = h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.11 (Freiling, Yurko 2001) L operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ öz değerleri için

$$\sqrt{\lambda_n} = \rho_n = n + \frac{\omega}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

asimptotik ifadesi geçerlidir. Burada $n \mapsto \infty$ için $o\left(\frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ dir.

Sonuç 2.2.12.L operatörünün $\varphi(x,\lambda_n)$ öz fonksiyonu için

$$\varphi(x,\lambda_n) = \cos x + \frac{\epsilon_n(x)}{n}$$

asimptotik ifadesi geçerlidir. Burada $\epsilon_n(x)$, $n \mapsto \infty$ için $|\epsilon_n(x)| \leq c$ şeklinde düzgün sınırlı bir fonksiyondur.

$\varphi(x,\lambda_n)$ öz fonksiyonların asimptotik ifadelerinden faydalanarak α_n sayılarının

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right), n \mapsto \infty$$

şeklindeki asimptotik ifadesi ispatlanabilir.

Şimdi (2.1.1) denkleminin

$$\begin{cases} s(0,\lambda) = 0,\ s'(0,\lambda) = 1 \\ c(0,\lambda) = 1,\ c'(0,\lambda) = 0 \end{cases}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerini sırasıyla $s(x,\lambda)$ ve $c(x,\lambda)$ ile gösterelim. Bu durumda

$$s(x,\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{\pi} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t)\, s(x,t)\, dt$$

$$c(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^{x} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q(t)\, c(x,t)\, dt$$

eşitlikleri kolayca elde edilir. Ayrıca,

$$s(x,\lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{\pi} K_1(x,t) \frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} dt \tag{2.2.11}$$

$$c(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^{x} K_2(x,t) \cos\sqrt{\lambda}t dt \tag{2.2.12}$$

integral gösterimleri mevcuttur. Burada $K_1(x,t)$ ve $K_2(x,t)$ fonksiyonları λ ya bağlı olmayan sürekli fonksiyonlardır ve

$$K_1(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\, dt,\ K_2(x,t) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\, dt$$

eşitlikleri geçerlidir (Freiling, Yurko 2001). Ayrıca

$$W[s,c] = s(0)\, c'(0) - s'(0)\, c(0) = -1 \neq 0$$

olduğundan $\{s(x,\lambda),\ c(x,\lambda)\}$ kümesi (2.1.1) denklemi için bir temel çözüm sistemidir. Dolayısıyla daha önce tanımlanan $\varphi(x,\lambda)$ çözümü için

$$\varphi(x,\lambda)=c_1 s(x,\lambda)+c_2 c(x,\lambda) \tag{2.2.13}$$

eşitliğini sağlayan c_1, c_2 sabit sayıları vardır.

$\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=0$ başlangıç koşulları kullanılarak $c_1=h$, $c_2=1$ olduğu elde edilir. Sabitlerin bu değerleri ve (2.2.11) ve (2.2.12) ifadeleri (2.2.13) ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x+h\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+\int\limits_0^x\left(hK_1(x,t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}+K_2(x,t)\cos\sqrt{\lambda}t\right)dt$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca,

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}=\int\limits_0^x\cos\sqrt{\lambda}\tau d\tau$$

eşitliği kullanılarak $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu için

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x+\int\limits_0^x G(x,t)\cos\sqrt{\lambda}tdt \tag{2.2.14}$$

integral gösterimi elde edilir. Gerçektende,

$$\varphi(x,\lambda)=\cos\sqrt{\lambda}x+h\frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}+\int\limits_0^x\left(hK_1(x,t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}+K_2(x,t)\cos\sqrt{\lambda}t\right)dt$$

$$=\cos\sqrt{\lambda}x+h\int\limits_0^x\cos\sqrt{\lambda}tdt+\int\limits_0^x hK_1(x,t)\left(\int\limits_0^t\cos\sqrt{\lambda}\tau d\tau\right)dt$$

$$+\int\limits_0^x K_2(x,t)\cos\sqrt{\lambda}tdt$$

$$=\cos\sqrt{\lambda}x+\int\limits_0^x(h+K_2(x,t)+hK_1(x,t))\cos\sqrt{\lambda}tdt$$

$$=\cos\sqrt{\lambda}x+\int\limits_0^x G(x,t)\cos\sqrt{\lambda}tdt$$

alınır. Burada $G(x,t)$ fonksiyonu

$$G(x,t) = h + K_2(x,t) + hK_1(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt + h$$

eşitliğini sağlayan fonksiyondur.

Teorem 2.2.13 (Freiling, Yurko 2001) L operatörünün öz değerleri $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve öz fonksiyonları $\varphi(x,\lambda_n)$ olsun. Bu durumda

i) $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ kümesi $L_2(0,\pi)$ uzayında tamdır.

ii) $f(x)$, $(0,\pi)$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyon ise

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(x,\lambda_n)$$

eşitliği geçerlidir. Burada

$$a_n = \frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi \varphi(t,\lambda_n) f(t)\,dt.$$

iii) $\forall f \in L_2(0,\pi)$ için

$$\int_0^\pi |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n |a_n|^2$$

Parseval eşitliği geçerlidir.

Örneğin,

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y,\ x \in (0,\pi) \\ y'(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.2.15}$$

operatörünü ele alalım. $\varphi(x,\lambda)$ ile verilen diferansiyel denklemin $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü gösterirsek

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x$$

alınır. Buradan karakteristik denklemi

$$\Delta(\lambda) = \varphi'(\pi,\lambda) = \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x$$

özdeğerleri

$$\sqrt{\lambda} = n, \ n \geq 0$$

öz fonksiyonları

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos nx, n \geq 0$$

ve normalleştirici sayıları

$$\alpha_n = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n)\, dx = \int_0^\pi \cos^2 nx dx = \frac{\pi}{2}$$

şeklinde bulunur. Dolayısıyla

i) $\{\cos nx\}_{n \geq 0} = \{1, \cos x, \cos 2x, ...\}$ kümesi $L_2(0, \pi)$ uzayında tamdır.

ii) $(0, \pi)$ aralığında mutlak sürekli $f(x)$ fonksiyonu için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx, a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx dx$$

sağlanır ve

iii) $\forall f \in L_2(0, \pi)$ için

$$\int_0^\pi |f(x)|^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\pi}{2} |a_n|^2$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 2.2.14 (Salınım Teoremi) L operatörünün $\varphi(x, \lambda_n)$, $n \geq 0$ öz fonksiyonlarının her biri $(0, \pi)$ aralığında tam olarak n tane sıfıra sahiptir.

İspat: $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonunu düşünelim.

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \rho x + o\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} \rho| x}}{|\rho|}\right)$$

eşitliğinden dolayı $\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu yeterince büyük λ negatif sayısı için sıfırlara sahip değildir. Öyle ki $\varphi(x, \lambda) > 0$, $\lambda \leq -\lambda^* < 0$, $x \in [0, \pi]$'dir. Diğer taraftan $\varphi(\pi, \mu_n) = 0$'dır. Burada $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$, L operatörünün öz değeridir. Eğer λ, $-\infty$'dan $+\infty$'a taşınabilirse $[0, \pi]$ aralığında $\varphi(x, \lambda)$'nın sıfırları sürekli olarak sola taşınır. Yeni sıfırlar sadece $x = \pi$ noktası boyunca görülebilir. Böylece

i) $\varphi(x,\mu_n)$ fonksiyonlarının $x \in [0,\pi]$ aralığında n tane sıfırı vardır.

ii) Eğer $\lambda \in (\mu_n, ..., \mu_m)$, $n \geq 1$, $\mu_1 := -\infty$ ise $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu $x \in [0,\pi]$ aralığında n tane sıfıra sahiptir. $\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1, < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < ...$'dır.Sonuç olarak $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında n sayıda sıfıra sahiptir.

Örneğin yukarıdaki (2.2.15) operatörünün öz değer ve öz fonksiyonları

$$\lambda_n = n^2 \text{ ve } \varphi(x,\lambda_n) = \cos nx,\ n \geq 0$$

şeklinde olduğundan

$\lambda_0 = 0$ için $\varphi(x,\lambda_0) = 1$ fonksiyonun $[0,\pi]$ aralığında sıfırı yok,

$\lambda_1 = 1$ için $\varphi(x,\lambda_1) = \cos x$ fonksiyonun $[0,\pi]$ aralığında sıfırı $\frac{\pi}{2}$,

$\lambda_2 = 4$ için $\varphi(x,\lambda_2) = \cos 2x$ fonksiyonun $[0,\pi]$ aralığında sıfırları $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$,

ve benzer şekilde devam edilirse,

$\varphi(x,\lambda_n) = \cos nx$ fonksiyonun $[0,\pi]$ aralığında sıfırları

$$x_j = \frac{j+\frac{1}{2}}{n}\pi,\ j = \overline{0, n-1}$$

şeklinde alınır.

Teorem 2.2.15 $k = \sigma + i\tau$, $q(x) \in L_2[0,\pi]$, $0 \leq x \leq \pi$ olmak üzere $\exists k_0 > 0$ vardır öyle ki $|k| > k_0$ koşulunu sağlayan tüm k'lar için (k'nın yeterince büyük değerleri için)

i)

$$\varphi(x,\lambda) = o\left(e^{|\tau|x}\right),\ \ |k| > k_0$$

ii)

$$\varphi(x,\lambda) = \cos kx + o\left(\frac{e^{|\tau|x}}{|k|}\right),\ \ |k| > k_0$$

asimptotik ifadeleri, yani $\forall x \in [0,\pi]$ için k nın yeterince büyük değerlerinde

$$\left|\varphi(x,\lambda)\, e^{-|\tau|x}\right| \leq M$$

ve

$$\left|(\varphi(x,\lambda) - \cos kx)\, e^{-|\tau|x}\right| \leq M$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat i) $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (2.2.7) deki ifadesinden

$$\varphi(x,\lambda) = \cos kx + \frac{h}{k}\sin kx + \int_0^\pi \frac{\sin k(x-t)}{k} q(t)\varphi(t,\lambda)\,dt$$

$$\varphi(x,\lambda)e^{-|\tau|x} = e^{-|\tau|x}\cos kx + \frac{h}{k}e^{-|\tau|x}\sin kx$$

$$+\int_0^\pi \frac{\sin(x-t)}{k} e^{-|\tau|x} e^{-|\tau|(x-\psi)} q(t)\varphi(t,\lambda)\,dt$$

$$\Rightarrow \left|\varphi(x,\lambda)e^{-|\tau|x}\right| \le 1 + \frac{|h|}{|k|} + \int_0^\pi \frac{1}{|k|}\left|e^{-|\tau|x} q(t)\varphi(t,\lambda)\right| dt$$

alınır. Burada $q(x) \in L_2[0,\pi]$ için $\int_0^\pi |q(t)|\,dt = k_0$ ve $f(x) = \varphi(x,\lambda)e^{-|\tau|x}$ için $\mu = \max_{x\in[0,\pi]} \left|\varphi(x,\lambda)e^{-|\tau|x}\right| = \max_{x\in[0,\pi]} |f(x)|$ olduğundan

$$\left|\varphi(x,\lambda)e^{-|\tau|x}\right| \le 1 + \frac{|h|}{|k|} + \frac{\mu}{|k|}\int_0^\pi |q(t)|\,dt$$

$$|f(x)| \le 1 + \frac{|h|}{|k|} + \frac{\mu}{|k|}\int_0^\pi |q(t)|\,dt$$

$$\mu\left(1 - \frac{1}{|k|}\int_0^\pi |q(t)|\,dt\right) \le 1 + \frac{|h|}{|k|}$$

$$\mu\left(1 - \frac{k_0}{|k|}\right) \le 1 + \frac{|h|}{|k|}$$

$$\mu \le \left(1 + \frac{|h|}{|k|}\right)\left(1 - \frac{k_0}{|k|}\right)^{-1}$$

eşitsizliği elde edilir. k nın yeterince büyük değerlerinde

$$\mu = o(1)$$

olacaktır. Maksimumu sınırlı olan fonksiyonun kendisi de sınırlı olacağından

$$\left|\varphi(x,\lambda)e^{-|\tau|x}\right| \le M$$

olacak şekilde $0 < M < \infty$ vardır. Dolayısıyla

$$\varphi(x,\lambda)e^{-|\tau|x} = o(1) \text{ veya } \varphi(x,\lambda) = o\left(e^{|\tau|x}\right),\ \forall\ x \in [0,\pi]$$

elde edilir.

ii) Tekrar $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (2.2.7) deki ifadesinden

$$\varphi(x,\lambda)=\cos kx+\frac{h}{k}\sin kx+\int_0^\pi \frac{\sin k(x-t)}{k}q(t)\varphi(t,\lambda)\,dt$$

$$k(\varphi(x,\lambda)-\cos kx)e^{-|\tau|x}=e^{-|\tau|x}h\sin kx$$

$$+\int_0^\pi \sin k(x-t)\,e^{-|\tau|x}e^{-|\tau|(x-\psi)}q(t)\varphi(t,\lambda)\,dt$$

$$\Rightarrow \left|k(\varphi(x,\lambda)-\cos kx)e^{-|\tau|x}\right|\leq |h|+\int_0^\pi \left|q(t)\varphi(x,\lambda)e^{-|\tau|x}\right|dt$$

$$k(\varphi(x,\lambda)-\cos kx)e^{-|\tau|x}=o(1)$$

$$\varphi(x,\lambda)=\cos kx+o\left(\frac{e^{|\tau|x}}{|k|}\right),\ |k|>k_0$$

eşitliği alınır.

Tanım 2.2.16 (Rezolvent Operatör) $A:H\to H$ bir operatör olsun. $\mu\in\mathbb{C}$ olmak üzere $(A-\mu I)^{-1}$ mevcut sınırlı ve $D\left\{(A-\mu I)^{-1}\right\}=H$ ise μ'ye A operatörünün regüler noktası denir. A nın tüm regüler noktaları kümesine A nın rezolvent kümesi denir ve $\delta(A)$ ile gösterilir. $\mu\in\delta(A)$ olmak üzere $(A-\mu I)^{-1}$ operatörüne A nın rezolvent operatörü denir ve

$$R_\mu(A):=(A-\mu I)^{-1}$$

olarak gösterilir. Ayrıca $\delta(A)$ açık bir kümedir.

Teorem 2.2.17 $\mu,\ \lambda\in\delta(A)$ olmak üzere

$$R_\mu(A)-R_\lambda(A)=(\mu-\lambda)R_\mu(A)R_\lambda(A)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: Rezolvent operatörün tanımından

$$\begin{aligned}
R_\mu(A)-R_\lambda(A) &= (A-\mu I)^{-1}-(A-\lambda I)^{-1}\\
&= (A-\mu I)^{-1}(I-\lambda I-A-\mu I)(A-\mu I)^{-1}\\
&= R_\mu(A)(\mu-\lambda)R_\lambda(A)\\
&= (\mu-\lambda)R_\mu(A)R_\lambda(A)
\end{aligned}$$

olduğu alınır.

Teorem 2.2.18 Rezolvent operatörü $\delta(A)$ kümesinde analitik operatör fonksiyondur ve $\lambda \in \delta(A)$ için

$$\frac{d}{d\lambda} R_\lambda(A) = R_\lambda^2(A)$$

dır.

İspat: $\lambda \in \delta(A)$ olmak üzere $\lambda + \Delta\lambda \in \delta(A)$ olsun. Hilbert Eşitliğine göre

$$R_{\lambda+\Delta\lambda}(A) - R_\lambda(A) = \Delta\lambda R_{\lambda+\Delta\lambda} R_\lambda(A)$$

elde edilir.

$$\lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{R_{\lambda+\Delta\lambda}(A) - R_\lambda(A)}{\Delta\lambda} = \lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{\Delta\lambda R_{\lambda+\Delta\lambda}(A) R_\lambda(A)}{\Delta\lambda} = R_\lambda^2(A)$$

veya

$$\frac{d}{d\lambda} R_\lambda(A) = R_\lambda^2(A)$$

gerçeklenir.

$R_\lambda(A)$, A operatörünün rezolventi olmak üzere $y = R_\lambda(A) f \in D(L)$, $f \in H$ fonksiyonu

$$(A - \lambda I) y = f \quad \text{veya } Ay - \lambda y = f \tag{2.2.16}$$

denklemini sağlar. Yani A operatörünün rezolventini bulmak için (2.2.16) homojen olmayan denkleminin çözülmesi gerekir.

L operatörünün rezolventini bulmak için ise $f \in L_2[0,\pi]$, $y = R_\mu(L) f$ olmak üzere

$$L = \begin{cases} -y'' + q(x) y - \mu y = f \\ y'(0) - hy(0) = 0 \\ y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \end{cases} \tag{2.2.17}$$

sınır değer probleminin çözülmesi gerekir. Buradan

$$Ly - \mu y = f \text{ ise } (L - \mu I) y = f \text{ ise } y = (L - \mu I)^{-1} f$$

alınır.

Şimdi $u(x,\mu)$ ve $\nu(x,\mu)$ fonksiyonlarını ele alalım. Bu fonksiyonlar

$$-y'' + q(x)\,y - \mu y = 0 \tag{2.2.18}$$

diferansiyel denkleminin sırasıyla

$$\begin{cases} u(0,\mu) = 1,\ u'(0,\mu) = h \\ \nu(\pi,\mu) = 1,\ \nu'(\pi,\mu) = -H \end{cases} \tag{2.2.19}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun. Bu durumda $u(x,\mu)$ ve $\nu(x,\mu)$ fonksiyonlarının Wronskian'ı

$$W(\mu) = W(u(x,\mu),\ \nu(x,\mu))$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$y(x,\mu) = c_1 u(x,\mu) + c_2 v(x,\mu) \tag{2.2.20}$$

fonksiyonu (2.2.18) denkleminin genel çözümü olur. (2.2.17) denkleminin genel çözümünü bulmak için sabitlerin değişimi yöntemini kullanalım. Bu yöntem uyarınca (2.1.17) denkleminin genel çözümünü

$$y(x,\mu) = c_1(x)\,u(x,\mu) + c_2(x)\,v(x,\mu)$$

şeklinde arayalım. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\begin{cases} c_1'(x)\,u(x,\mu) + c_2'(x)\,v(x,\mu) = 0 \\ -c_1'(x)\,u'(x,\mu) - c_2'(x)\,v'(x,\mu) = f(x) \end{cases}$$

sistemi alınır. Bu sistem çözülürse $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ fonksiyonları

$$c_1'(x) = -\frac{f(x)\,v(x,\mu)}{W(\mu)} \text{ ise } c_1(x) = \alpha_1 - \int_x^\pi \frac{f(t)\,v(t,\mu)}{W(\mu)}dt$$

$$c_2'(x) = -\frac{f(x)\,u(x,\mu)}{W(\mu)} \text{ ise } c_2(x) = \alpha_2 - \int_0^x \frac{f(t)\,u(t,\mu)}{W(\mu)}dt$$

elde edilir. Burada $c_1(\pi) = \alpha_1$, $c_2(0) = \alpha_2$ şeklinde sabitlerdir. Elde edilen $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ fonksiyonları (2.2.20) ifadesinde yerlerine yazılırsa,

$$y(x,\mu) = \alpha_1 u(x,\mu) + \alpha_2 \upsilon(x,\mu)$$
$$-\int_0^x \frac{f(t)\,u(t,\mu)\,\upsilon(t,\mu)}{W(\mu)}dt - \int_x^\pi \frac{f(t)\,u(t,\mu)\,\upsilon(t,\mu)}{W(\mu)}dt$$

genel çözümü çözümü alınır. (2.1.19) sınır koşullarından $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bulunur. Dolayısıyla

$$y(x,\mu) = -\int_0^x \frac{f(t)\,u(t,\mu)\,\upsilon(t,\mu)}{W(\mu)}dt - \int_x^\pi \frac{f(t)\,u(t,\mu)\,\upsilon(t,\mu)}{W(\mu)}dt$$

olur. Eğer

$$G(x,t;\mu) = -\frac{1}{W(\mu)}\begin{cases} u(t,\mu)\,\upsilon(x,\mu),\ 0 \le t \le x \\ u(x,\mu)\,\upsilon(t,\mu),\ x \le t \le \pi \end{cases}$$

işaretlemesini yapılırsa L operatörünün rezolventi

$$y(x,\mu) = (R - \lambda I)^{-1} f = \int_0^\pi G(x,t;\mu)\,f(t)\,dt$$

şeklinde elde edilmiş olur.

3 L OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMLER

Bu bölümde, Regüler Sturm-Liouville operatörleri için günümüze kadar incelenmiş olan bazı ters problem türleri ve çözüm teknikleri gösterilecektir. L Regüler Sturm-Liouville operatörü için çeşitli veriler kullanılarak operatörün bilinmeyen katsayılarının araştırılmasına ters problem denir. Bu katsayıları belirlemek için verilen bilgiler çeşitlilik gösterebilir. Öncelikli soru ne kadar bilginin (verinin) katsayıları tek olarak belirlemeye yeteceğidir. Daha sonra mümkünse veriler kullanılarak katsayıların bulunmasını sağlayan algoritmalar ya da çözüm yöntemleri elde edilebilir.

3.1 Ambarzumian Teoremi

Sturm-Liouville operatörleri için ters problemler teorisini başlatan çalışma 1929 yılında Ambarzumian tarafından yapılmıştır. Şimdi Ambarzumian Teoremi'ni ve ispatını verelim:

Teorem 3.1.1 (Ambarzumian Teoremi) $q(x) \in C(0,\pi)$ olmak üzere

$$-y'' + q(x)\, y = \lambda y, \;\; x \in (0,\pi) \tag{3.1.1}$$

$$y'(0) = 0, \;\; y'(\pi) = 0 \tag{3.1.2}$$

problemi verilsin. Eğer bu problemin öz değerleri $\lambda_n = n^2$, $n \geq 0$ şeklinde ise

$$q(x) \equiv 0$$

olur.

İspat: Verilen $(3.1.1) - (3.1.2)$ problemin öz değerleri

$$\sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

asimptotik ifadesini sağlar. Burada

$$\omega = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)\, dt$$

şeklindedir. Verilen problemin öz değerleri $\lambda_n = n^2$ olduğundan

$$\omega = 0 \text{ veya } \int\limits_0^\pi q(t)\,dt = 0 \tag{3.1.3}$$

olmak zorundadır.

Şimdi $n = 0$ için $\lambda_0 = 0$ öz değerini dikkate alalım. Buna karşılık gelen öz fonksiyon $y_0(x) \neq 0$ olsun. Dolayısıyla $y_0(x)$ fonksiyonu (3.1.1) denklemini $\lambda_0 = 0$ için sağladığından

$$-y_0'' + q(x)\,y_0 = 0$$

denklemini sağlar. Buradan

$$q(x) = \frac{y_0''}{y_0} = \frac{y_0''y_0}{y_0^2} = \frac{y_0''y_0 - \left(y_0'\right)^2 + \left(y_0'\right)^2}{y_0^2} = \frac{y_0''y_0 - \left(y_0'\right)^{(2)}}{y_0^2} + \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2$$

yazılabildiğinden

$$q(x) = \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)' + \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2$$

elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafını $(0, \pi)$ aralığında integrallersek,

$$\int\limits_0^\pi q(x)\,dx = \int\limits_0^\pi \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)' dx + \int\limits_0^\pi \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2 dx$$

veya (3.1.3) ifadesinden

$$0 = \frac{y_0'(\pi)}{y_0(\pi)} - \frac{y_0'(0)}{y_0(0)} + \int\limits_0^\pi \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2 dx$$

alınır. Burada $y_0'(\pi) = 0$, $y_0(\pi) \neq 0$, $y_0'(0) = 0$ olduğundan

$$\int\limits_0^\pi \left(\frac{y_0'}{y_0}\right)^2 dx = 0 \Rightarrow \frac{y_0'}{y_0} = 0 \Rightarrow y_0'(x) = 0$$

ve

$$y_0(x) = c\text{−sabit}$$

bulunur. Burada $c \neq 0$ dır. Bu $y_0(x) = c$ değeri

$$-y_0''(x) + q(x)\,y_0(x) = 0$$

denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$0+q\left(x\right)c=0 \text{ ise } q\left(x\right)=0$$

alınır.

Ambarzumian Teoremi, ilk bakışta öz değerlerin $q\left(x\right)$ fonksiyonunu tek olarak belirleyebileceğini düşündürse de genel durumda bu mümkün değildir. 1945 yılında Borg, farklı iki Sturm-Liouville probleminin aynı öz değerlere sahip olabileceğini göstermiştir. Bunun yanı sıra $q\left(x\right)$'i tek olarak belirlemek için iki farklı öz değer dizisinin yeterli olduğunu da ispatlamıştır. Borg'a göre

$$y_0^{'}\left(0\right)-h_1y\left(0\right)=0,\ \left(h_1\neq h\right) \tag{3.1.4}$$

yeni bir sınır koşulu olmak üzere $\left(3.1.1\right),\left(3.1.2\right)$ probleminin öz değerleri $\left\{\lambda_n\right\}_{n\geq 0}$ ve $\left(3.1.1\right),\left(3.1.4\right)$ probleminin öz değerleri ise $\left\{\mu_n\right\}_{n\geq 0}$ olmak üzere $\left\{\lambda_n\right\}$ ve $\left\{\mu_n\right\}$ dizisi verilmişse $q\left(x\right)$ fonksiyonu tek olarak belirlenir.

Borg'un çalışmasından sonra birçok matematikçi ters problemler teorisi ile ilgili çalışmalar yapmış ve bu teorinin gelişmesine katkı sağlamışlardır.

3.2 Weyl Fonksiyonuna Göre Ters Problem

L operatörünü ele alalım. Bu operatörün $\varphi(x,\lambda)$ ve $s(x,\lambda)$ çözümleri için $W(s,\varphi) = s(0)\varphi'(0) - s'(0)\varphi(0) = -1 \neq 0$ olduğundan $s(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ çözümleri lineer bağımsızdır. Dolayısıyla $\{s(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)\}$ kümesi (2.1.1) denkleminin temel çözüm sistemidir. Bu nedenle

$$\psi(x,\lambda) = c_1 s(x,\lambda) + c_2\varphi(x,\lambda) \tag{3.2.1}$$

eşitliği sağlanacak şekilde c_1 ve c_2 sabitleri vardır. Buradan türev alınırsa,

$$\psi'(x,\lambda) = c_1 s'(x,\lambda) + c_2\varphi'(x,\lambda) \tag{3.2.2}$$

olur. (3.2.1) ve (3.2.2) eşitliklerinde $x = 0$ yazılırsa,

$$\psi(0,\lambda) = c_1 s(0,\lambda) + c_2\varphi(0,\lambda) = c_1 0 + c_2 1 = c_2$$

ve

$$\psi'(0,\lambda) = c_1 s'(0,\lambda) + c_2\varphi'(0,\lambda) = c_1 + c_2 h = c_1 + \psi(0,\lambda)h$$

$$c_1 = \psi'(0,\lambda) - h\psi(0,\lambda) = -\Delta(\lambda)$$

elde edilir. Buna göre (3.2.1) eşitliği düzenlenirse,

$$\psi(x,\lambda) = -\Delta(\lambda)s(x,\lambda) + \psi(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)$$

$$-\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = s(x,\lambda) - \frac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda) \tag{3.2.3}$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$M(\lambda) := -\frac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \text{ ve } \Phi(x,\lambda) := -\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

işaretlemeleri dikkate alınırsa (3.2.3) eşitliği

$$\Phi(x,\lambda) = s(x,\lambda) + M(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{3.2.4}$$

şeklinde elde edilir. (3.2.4)'deki $M(\lambda)$ fonksiyonuna L operatörünün Weyl Fonksiyonu denir. Dikkat edilirse Weyl Fonksiyonu, iki tam fonksiyonun oranı şeklindedir. Ayrıca problemin öz değerleri $M(\lambda)$'nın basit kutup noktalarıdır. Dolayısıyla

$M(\lambda)$ Weyl fonksiyonu bir Meromorf fonksiyondur.

Lemma 3.2.1 $G_\delta = \{\rho : |\rho - n| > \delta, \, n \in \mathbb{Z}\}$ bölgesindeki yeterince büyük ρ'lar için

$$\Delta(\lambda) \geq c_\delta |\rho| e^{\tau\pi}, \; \tau = |\mathrm{Im}\, \rho|$$

eşitliği geçerlidir.

İspat: $\Delta(\lambda) = -\rho \sin \rho\pi + O(\exp \tau\pi)$ olduğundan G_δ bölgesinde yeterince büyük ρ'lar için

$$|\sin \rho\pi| \geq ce^{\tau\pi}$$

olacak şekilde $c > 0$ sabiti mevcuttur. Bu durumda

$$\Delta(\lambda) \geq c |\rho| e^{\tau\pi} - c_1 \exp \tau\pi = c_\delta |\rho| e^{\tau\pi}$$

eşitsizliği alınır.

Şimdi L operatörünü $L = L(q, h, H)$ ile gösterelim ve $\widetilde{L} = L\left(\widetilde{q}, \widetilde{h}, \widetilde{H}\right)$ operatörünü

$$\widetilde{L}\left(\widetilde{q}, \widetilde{h}, \widetilde{H}\right) = \begin{cases} -y'' + \widetilde{q}(x)\, y = \lambda y \\ y'(0) - \widetilde{h} y(0) = 0 \\ y'(\pi) + \widetilde{H} y(\pi) = 0 \end{cases} \tag{3.2.5}$$

şeklinde tanımlayalım. L operatörünün Weyl fonksiyonu $M(\lambda)$, $\widetilde{L}$ operatörünün Weyl fonksiyonu $\widetilde{M}(\lambda)$ olsun. Bundan böyle L operatörü ile alakalı bir bilgi s ile gösterilirse buna karşılık olarak $\widetilde{L}$ operatörü ile alakalı bilgi $\widetilde{s}$ ile gösterilecektir.

Teorem 3.2.2 Eğer $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$ ise $q(x) = \widetilde{q}(x)$, $(0, \pi)$ aralığında h.h.y. ve $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$ geçerlidir. Yani $M(\lambda)$ Weyl fonksiyonu, L operatörünün katsayılarını tek olarak belirlemek için yeterlidir.

İspat:

$$\begin{aligned} P_1(x, \lambda) &:= \varphi(x, \lambda)\, \widetilde{\Phi}'(x, \lambda) - \widetilde{\varphi}'(x, \lambda)\, \Phi(x, \lambda) \\ P_2(x, \lambda) &:= \widetilde{\varphi}(x, \lambda)\, \Phi(x, \lambda) - \varphi(x, \lambda)\, \widetilde{\Phi}(x, \lambda) \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. (3.2.4) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
P_1(x,\lambda) &= \varphi(x,\lambda)\left(\widetilde{s}'(x,\lambda)+\widetilde{M}(\lambda)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\right)\\
&\quad -\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\left(s(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\right)\\
&= \varphi(x,\lambda)\widetilde{s}'(x,\lambda)-\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)s(x,\lambda)\\
&\quad +\varphi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\left(\widetilde{M}(\lambda)-M(\lambda)\right)\\
&= \varphi(x,\lambda)\widetilde{s}'(x,\lambda)-\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\widetilde{s}(x,\lambda)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
P_2(x,\lambda) &= \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\left(s(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\right)\\
&\quad -\varphi(x,\lambda)\left(\widetilde{s}(x,\lambda)+\widetilde{M}(\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\right)\\
&= \widetilde{\varphi}(x,\lambda)s(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\widetilde{s}(x,\lambda)\\
&\quad +\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\left(M(\lambda)-\widetilde{M}(\lambda)\right)\\
&= s(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\widetilde{s}(x,\lambda)
\end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir. $s(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ çözümleri λ'nın tam fonksiyonları olduğundan $P_1(x,\lambda)$ ve $P_2(x,\lambda)$ fonksiyonları da tamdır. Diğer yandan

$$\begin{aligned}
\varphi(x,\lambda) &= O(\exp\tau x), & \varphi'(x,\lambda) &= O\left(\sqrt{\lambda}\exp\tau\pi\right)\\
\psi(x,\lambda) &= O(\exp\tau(\pi-x)), & \psi'(x,\lambda) &= O\left(\sqrt{\lambda}\exp\tau(\pi-x)\right)
\end{aligned}$$

asimptotik ifadeleri ve $\forall\ \lambda\in G_\delta$ olmak üzere

$$|\Delta(\lambda)|\geq c_\delta\sqrt{\lambda}e^{\tau\pi}$$

ifadesi kullanılırsa,

$$|P_1(x,\lambda)|\leq c_1,\ \ |P_2(x,\lambda)|\leq\frac{c_2}{\sqrt{\lambda}}$$

oldukları gösterilebilir. Bu durumda $P_1(x,\lambda)$ ve $P_2(x,\lambda)$ fonksiyonları λ'ya göre tam ve sınırlı fonksiyonlar olup Liouville Teoremi gereğince bu fonksiyonlar λ'ya bağlı değil sadece x'e bağlıdırlar. O halde

$$\begin{aligned}
P_1(x,\lambda) &= A(x)\\
P_2(x,\lambda) &= B(x)
\end{aligned}$$

yazılabilir. $P_2(x,\lambda) = o(1)\,,\ |\lambda| \mapsto \infty$ olduğundan $B(x) \equiv 0$'dır. Dolayısıyla $P_2(x) \equiv 0$'dır. Ayrıca

$$\begin{aligned} W(\varphi,\Phi) &= \varphi(x,\lambda)\,\Phi'(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\,\Phi(x,\lambda) \\ &= \frac{\varphi(x,\lambda)\,\psi'(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\,\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \\ &= \frac{\Delta(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $W\left(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Phi}\right) = 1$ olduğu gösterilebilir. (3.2.6) eşitliklerinden alınan

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda)\,\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) - \widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\,\Phi(x,\lambda) = A(x) \\ \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\,\Phi(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\,\widetilde{\Phi}(x,\lambda) = 0 \end{cases}$$

sistemi Cramer yöntemiyle çözülürse,

$$\varphi(x,\lambda) = A(x)\,\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$$

ve

$$\Phi(x,\lambda) = A(x)\,\widetilde{\Phi}(x,\lambda)$$

alınır. Dolayısıyla

$$1 = W(\varphi,\Phi) = W\left(A\widetilde{\varphi},A\widetilde{\Phi}\right) = \begin{vmatrix} A\widetilde{\varphi}(x,\lambda) & A\widetilde{\Phi}(x,\lambda) \\ \left(A\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\right)' & \left(A\widetilde{\Phi}(x,\lambda)\right)' \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} A(x)\,\widetilde{\varphi}(x,\lambda) & A(x)\,\widetilde{\Phi}(x,\lambda) \\ A(x)\,\widetilde{\varphi}'(x,\lambda) + A(x)'\,\widetilde{\varphi}(x,\lambda) & A(x)\,\widetilde{\Phi}'(x,\lambda) + A(x)'\,\widetilde{\Phi}(x,\lambda) \end{vmatrix}$$

$$= A^2(x)\,W\left(\widetilde{\varphi},\widetilde{\Phi}\right) = A^2(x)$$

elde edilir. Buradan da $A(x) = \mp 1$ olmalıdır. Ayrıca

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{\tau x}\right) \\ \widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}e^{\tau x}\right) \end{cases}$$

asimptotik ifadeleri geçerli olduğundan $\varphi(x,\lambda)$ ve $\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ fonksiyonları ters işaretli olamaz. $\varphi(x,\lambda) = A(x)\,\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ olduğundan $A = -1$ olamaz. Bu nedenle

$A(x) = 1$ olmalıdır. Dolayısıyla $\varphi(x,\lambda) = \widetilde{\varphi}(x,\lambda)$'dir. Bu durumda (2.1.1) denklemi kullanılırsa h.h.y. $q(x) = \widetilde{q}(x)$ elde edilir.

Benzer şekilde (2.1.2) ve (2.1.3) sınır koşullarından

$$\begin{cases} \varphi'(0) - h\varphi(0) = 0 \\ \varphi'(0) - \widetilde{h}\varphi(0) = 0 \end{cases} \text{ve} \begin{cases} \varphi'(\pi) + H\varphi(\pi) = 0 \\ \varphi'(\pi) + \widetilde{H}\varphi(\pi) = 0 \end{cases}$$

eşitlikleri taraf taraf çıkarılırsa,

$$\varphi'(0) - h\varphi(0) - \varphi'(0) + \widetilde{h}\varphi(0) = 0$$

$$-h\varphi(0) + \widetilde{h}\varphi(0) = \left(\widetilde{h} - h\right)\varphi(0) = 0$$

$$\widetilde{h} - h = 0 \Rightarrow h = \widetilde{h}$$

ve

$$\varphi'(\pi) + H\varphi(\pi) - \varphi'(\pi) - \widetilde{H}\varphi(\pi) = 0$$

$$H - \widetilde{H} = 0 \Rightarrow H = \widetilde{H}$$

elde edilir.

O halde $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$ iken $q(x) = \widetilde{q}(x)$, $(0,\pi)$ aralığında h.h.y. ve $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$ oldukları gösterilmiş olur..

3.3 Spektral Verilere Göre Ters Problem

$L = L(q, h, H)$ ve $\widetilde{L} = L\left(\widetilde{q},\ \widetilde{h},\ \widetilde{H}\right)$ operatörlerini ele alalım. $\{\lambda_n,\ \alpha_n\}_{n\geq 0}$, L operatörünün spektral verileri ve $\left\{\widetilde{\lambda}_n,\ \widetilde{\alpha}_n\right\}_{n\geq 0}$ ise $\widetilde{L}$ operatörünün spektral verileri olsun. Burada iki sprektral verinin L operatörünün katsayılarını tek olarak belirlediği ispatlanacaktır.

Lemma 3.3.1 (Freiling, Yurko 2001)

$$M(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n (\lambda - \lambda_n)} \tag{3.3.1}$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 3.3.2 $\forall n$ için $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ ve $\alpha_n = \widetilde{\alpha}_n$ ise $q(x) = \widetilde{q}(x)$ h.h.y. ve $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$ dır. Yani L probleminin katsayıları, öz değerler ve normalleştirici sayılar tarafından tek olarak belirlenir.

İspat: (3.3.1) eşitliğine göre eğer $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$, $\alpha_n = \widetilde{\alpha}_n$ ise $M(\lambda) = M\left(\widetilde{\lambda}\right)$ eşitliği geçerlidir. Teorem 3.2.2 ye göre $M(\lambda) = M\left(\widetilde{\lambda}\right)$ geçerli ise $q(x) = \widetilde{q}(x)$, $(0, \pi)$ aralığında h.h.y. ve $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$'dır. Böylece ispat bitmiş olur.

Teorem 3.3.2 nin ispatı aşağıdaki gibi de yapılabilir:

$\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$, $\alpha_n = \widetilde{\alpha}_n$ olsun. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu λ nın tam fonksiyonu olduğundan Hadamard Faktorizasyon Teoremi gereğince

$$\Delta(\lambda) = c \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_n}\right)$$

eşitliği geçerlidir. Burada c sayısı yalnızca λ_n lere bağlı olan bir sabittir. Buna göre $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ ise

$$\Delta(\lambda) = \widetilde{\Delta}(\lambda) \tag{3.3.2}$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{cases} \dot{\Delta}(\lambda_n) = -\alpha_n \beta_n \\ \dot{\widetilde{\Delta}}(\lambda_n) = -\widetilde{\alpha}_n \widetilde{\beta}_n \end{cases}$$

eşitliklerine göre $\beta_n = \widetilde{\beta}_n$'dır ve ayrıca $\beta_n = \psi(0, \lambda_n)$ olduğundan

$$\psi(0, \lambda_n) = \widetilde{\psi}(0, \lambda_n)$$

yazılabilir. Buna göre

$$K(\lambda) = \frac{\psi(0, \lambda_n) - \widetilde{\psi}(0, \lambda_n)}{\Delta(\lambda)}$$

fonksiyonunu tanımlarsak λ_n öz değerleri bu fonksiyonun hem payını hem de paydasını sıfır yaptığından ve bu öz değerler fonksiyonun basit sıfırları olduğundan $K(\lambda)$ bir tam fonksiyondur. Ayrıca

$$\begin{aligned} \left|\psi(0, \lambda_n) - \widetilde{\psi}(0, \lambda_n)\right| &\leq c \exp \tau\pi \\ |\Delta(\lambda)| &\geq c_\delta |\rho| \exp \tau\pi \end{aligned}$$

eşitsizliklerinden

$$|K(\lambda)| \leq \frac{c}{|\rho|}$$

olur. Burada ρ nun yeterince büyük değerlerinde

$$|K(\lambda)| \equiv 0$$

alınır. Dolayısıyla

$$\psi(0, \lambda_n) = \widetilde{\psi}(0, \lambda_n) \tag{3.3.3}$$

yazılır. Buna göre (3.3.2) ve (3.3.3) eşitliklerinden

$$\frac{\psi(0, \lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{\widetilde{\psi}(0, \lambda_n)}{\widetilde{\Delta}(\lambda)}$$

eşitliğini yazabiliriz. Bu ise $M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$ demektir. Buradan $q(x) = \widetilde{q}(x)$ h.h.y. ve $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$ olduğu elde edilir.

Şimdi $h \neq h_1$ olmak üzere

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0 \tag{3.3.4}$$

sınır koşulu (2.1.2) koşulu ile yer değiştirilerek elde edilen $(2.1.1)$, $(3.3.4)$, $(2.1.3)$ problemini $L_1 = L(q, h_1, H)$ operatörü şeklinde gösterelim ve bu operatörün öz değerler dizisi $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ olsun.

Tanım 3.3.3 $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine L operatörünün klasik spektral verileri adı verilir.

Şimdi ise iki öz değerler dizisi denilen $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geq 0}$ spektral verilerinin, operatörün katsayılarını tek olarak belirlediğini ispatlayalım:

Teorem 3.3.4 $\forall n$ için $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ ve $\mu_n = \widetilde{\mu}_n$ ise $[0, \pi]$ aralığında $q(x) = \widetilde{q}(x)$ h.h.y. ve $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$ dır.

İspat: $\forall n$ için $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ olduğundan $\Delta(\lambda) = \widetilde{\Delta}(\lambda)$'dır. Diğer yandan öz değerleri $\{\widetilde{\mu}_n\}$'ler olan L_1 operatörünün karakteristik fonksiyonu

$$\Delta_1(\lambda) = \psi'(0, \lambda) - h_1\psi(0, \lambda)$$

şeklindedir. Buna göre $\Delta_1(\lambda)$ fonksiyonu μ'ler tarafından tek olarak belirlenen bir tam fonksiyon olduğundan

$$\mu = \widetilde{\mu}_n \Rightarrow \Delta_1(\lambda) = \widetilde{\Delta}_1(\lambda)$$

eşitliği geçerlidir. Buradan her λ için

$$\Delta_1(\lambda) = \psi'(0, \lambda) - h_1\psi(0, \lambda) = \widetilde{\psi}'(0, \lambda) - h_1\widetilde{\psi}(0, \lambda) = \widetilde{\Delta}_1(\lambda)$$

yazılabilir. O halde

$$\psi'(0, \lambda) = \widetilde{\psi}'(0, \lambda) = 0$$

eşitliğini sağlayan λ'ları gözönüne alırsak

$$\psi(0, \lambda) = \widetilde{\psi}(0, \lambda)$$

elde edilir. Buna göre

$$\psi(0, \lambda) \equiv \widetilde{\psi}(0, \lambda)$$

ve

$$\Delta(\lambda) = \widetilde{\Delta}(\lambda)$$

olduğundan

$$M(\lambda) = \widetilde{M}(\lambda)$$

eşitliği geçerlidir. Bu da ispatı tamamlar.

L operatörünün katsayılarını belirlemek için $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ öz değer dizisi tek başına yeterli olmamasına rağmen potansiyel fonksiyon denilen $q(x)$ fonksiyonunun her x için

$$q(\pi - x) = q(x)$$

simetriklik koşulunu sağladığı biliniyorsa bu durumda yalnızca öz değerler dizisi ile katsayıları belirlemek mümkündür. Bu aşağıdaki teoremle ifade edilebilir:

Teorem 3.3.5 L operatöründe $h = H$, $\forall x$ için $q(\pi - x) = q(x)$ ve $\forall n$ için $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ ise $q(x) = \widetilde{q}(x)$ h.h.y. ve $h = \widetilde{h}$ dır.

İspat: $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının yanı sıra $\varphi_1(x,\lambda)$ fonksiyonu

$$\begin{cases} \varphi_1'' + q(\pi - x)\varphi_1 = \lambda\varphi_1 \\ \varphi_1(0) = 1,\ \varphi_1'(0) = H \end{cases}$$

probleminin çözümü olsun. Bu durumda

$$\psi(x,\lambda) = \varphi(\pi - x,\lambda)$$

eşitliği sağlanmaktadır. Hipoteze göre $h = H$, ve $\forall x$ için $q(\pi - x) = q(x)$ olduğundan

$$\varphi_1(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)$$

eşitliği ve dolayısıyla

$$\psi(x,\lambda) = \varphi(\pi - x,\lambda)$$

olduğu elde edilir. Daha önce $\forall n$ için

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n)$$

sağlandığından

$$\varphi(\pi - x,\lambda_n) = \psi(x,\lambda_n)$$

$$= \beta_n \varphi(x, \lambda_n) = \beta_n \psi(\pi - x, \lambda_n)$$

$$= \beta_n \beta_n \varphi(\pi - x, \lambda_n)$$

$$= \beta_n^2 \varphi(\pi - x, \lambda_n)$$

alınır. Buradan ise

$$\beta_n^2 = 1 \text{ veya } \beta_n = \mp 1$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\dot{\Delta}(\lambda) = -\alpha_n \beta_n$$

eşitliğinden $\lambda_n = \widetilde{\lambda}_n$ ve $\alpha_n = \widetilde{\alpha}_n$ elde edilir. Dolayısıyla Teorem 3.3.2 gereği $q(x) = \widetilde{q}(x)$, $(0, \pi)$ aralığında h.h.y. ve $h = \widetilde{h}$ olur.

3.4 Yarı Ters Problem (Hochstadt-Lieberman Teoremi)

L operatörünü ele alalım. Bu operatör için için Hocstadt ve Lieberman 1978 yılında $[0,\pi]$ aralığının $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ aralığında $q(x)$ fonksiyonunun bilinmesi durumunda yalnızca $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ öz değer dizisi ile aralığın tamamında $q(x)$ fonksiyonunun tek olarak belirlenebildiğini göstermişlerdir.

Teorem 3.4.1 $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ dizisi L operatörünün öz değerler dizisi, $\left\{\widetilde{\lambda}_n\right\}_{n\geq 0}$ ise L operatöründe $q(x)$ yerine $\widetilde{q}(x)$ alınarak elde edilen $\widetilde{L}$ operatörünün öz değerler dizisi olsun. $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ aralığındaki $\forall x$ için $q(x)=\widetilde{q}(x)$ ve $\forall n$ için $\lambda_n=\widetilde{\lambda}_n$ ise $(0,\pi)$ aralığında h.h.y. $q(x)=\widetilde{q}(x)$ eşitliği geçerlidir.

Bu teoremi ispatlamak için bazı lemmalara ihtiyaç duyulmaktadır.

Lemma 3.4.2 (Marchenko, 1950) λ kompleks parametre olmak üzere $\{\cos\lambda x\}$ ve $\{\sin\lambda x\}$ fonksiyon kümeleri $L_2(0,\pi)$'de yoğundur. Yani $\forall\lambda$ için

$$\int_0^\pi f(x)\cos\lambda x dx=0 \tag{3.4.1}$$

eşitliğini sağlayan bir tek $f(x)$ fonksiyonu vardır. Bu $f(x)$ fonksiyonu da hemen hemen her yerde yakınsak $f(x)=0$ eşitliğini sağlayan fonksiyondur. Benzer şekilde $(0,\pi)$ aralığında h.h.y.

$$\int_0^\pi g(x)\sin\lambda x dx=0 \Longleftrightarrow g(x)=0$$

geçerlidir.

Lemma 3.4.3 (Freiling, Yurko 2001) $\varphi(x,\lambda)$, (2.1.1) denkleminin $\varphi(0)=1$, $\varphi'(0)=h$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olmak üzere

$$\varphi(x,\lambda)\widetilde{\varphi}(x,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1+\cos 2\sqrt{\lambda}x+\int_0^x K_1(x,\tau)\cos 2\sqrt{\lambda}\tau d\tau\right)$$

eşitliği geçerlidir. Burada

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int\limits_0^x G(x,t)\cos\sqrt{\lambda}t dt \\ \widetilde{\varphi}(x,\lambda) = \cos\sqrt{\lambda}x + \int\limits_0^x \widetilde{G}(x,t)\cos\sqrt{\lambda}t dt \end{cases}$$

olmak üzere

$$K_1(x,\tau) = 2\left[G(x,x-2\tau) - \widetilde{G}(x,x-2\tau)\right]$$

$$+2\int\limits_{-x+2\tau}^{x} G(x,s)\widetilde{G}(x,s-2\tau)ds + 2\int\limits_{-x}^{x-2\tau} G(x,s)\widetilde{G}(x,s+2\tau)ds$$

elde edilir.

Lemma 3.4.4 (Corduneanu, 1991) $f(x)$, $L_2(0,\pi)$ uzayında herhangi bir fonksiyon olmak üzere;

$$f(x) + \int\limits_x^\pi f(t)K(x,t)dt = 0 \tag{3.4.2}$$

eşitliğini sağlayan bir tek $f(x)$ fonksiyonu vardır. O da $f(x) = 0$ fonksiyonudur. Bu denkleme homojen Volterra integral denklemi denir. Burada $K(x,t)$ herhangi bir sürekli fonksiyondur.

Teoremin 3.4.1 in İspatı: $\varphi = \varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu $-y'' + q(x)y = \lambda y$ diferansiyel denkleminin $y(0) = 1$, $y'(0) = h$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü ve $\widetilde{\varphi} = \widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ fonksiyonu ise $-y'' + \widetilde{q}(x)y = \lambda y$ diferansiyel denkleminin $y(0) = 1$, $y'(0) = h$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} -\varphi'' + q(x)\varphi &= \lambda\varphi \\ -\widetilde{\varphi}'' + \widetilde{q}(x)\widetilde{\varphi} &= \lambda\widetilde{\varphi} \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanmaktadır. Bu eşitliklerin birincisini $\widetilde{\varphi}$ fonksiyonu ile, ikincisini φ fonksiyonu ile çarpalım ve taraf tarafa çıkaralım. Bu durumda

$$\begin{aligned} -\varphi''\widetilde{\varphi} + q(x)\varphi\widetilde{\varphi} + \widetilde{\varphi}''\varphi - \widetilde{q}(x)\widetilde{\varphi}\varphi &= \lambda\varphi\widetilde{\varphi} - \lambda\widetilde{\varphi}\varphi \\ \widetilde{\varphi}''\varphi - \varphi''\widetilde{\varphi} + (q(x) - \widetilde{q}(x))\varphi\widetilde{\varphi} &= 0 \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitliğin her iki tarafı $(0,\pi)$ aralığında x e göre integrallenirse,

$$\int_0^\pi (q(x)-\widetilde{q}(x))\,\varphi(x,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\,dx = \left(\varphi'(x,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\,\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\right)\Big|_0^\pi$$

elde edilir. Hipoteze göre $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ aralığında $q(x)=\widetilde{q}(x)$ olduğundan son eşitlik

$$\left(\varphi'(x,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\,\widetilde{\varphi}'(x,\lambda)\right)\Big|_0^\pi = \int_0^{\pi/2} (q(x)-\widetilde{q}(x))\,\varphi(x,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\,dx$$

şekline dönüşür. $\lambda_n=\widetilde{\lambda}_n$ olduğundan

$$\begin{cases} \varphi'(\pi,\lambda) = -H\varphi(\pi,\lambda) \\ \widetilde{\varphi}'(\pi,\lambda) = -H\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda) \end{cases} \tag{3.4.4}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\varphi(x,\lambda)$ ve $\widetilde{\varphi}(x,\lambda)$ fonksiyonlarının sağladığı

$$\begin{cases} \varphi(0)=1,\ \varphi'(0)=h \\ \widetilde{\varphi}(0)=1,\ \widetilde{\varphi}'(0)=h \end{cases}$$

başlangıç koşulları dikkate alınırsa,

$$\int_0^\pi (q(x)-\widetilde{q}(x))\,\varphi(x,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\,dx = \varphi'(\pi,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda)-\varphi(\pi,\lambda)\,\widetilde{\varphi}'(\pi,\lambda)$$

$$-\varphi'(0,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(0,\lambda)+\varphi(0,\lambda)\,\widetilde{\varphi}'(0,\lambda)$$

$$=\varphi'(\pi,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda)-\varphi(\pi,\lambda)\,\widetilde{\varphi}'(\pi,\lambda)-h.1+1.h$$

$$=\varphi'(\pi,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda)-\varphi(\pi,\lambda)\,\widetilde{\varphi}'(\pi,\lambda)$$

sağlanır. (3.4.4) eşitliklerinden,

$$\varphi'(\pi,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda)-\varphi(\pi,\lambda)\,\widetilde{\varphi}'(\pi,\lambda) = -H\varphi(\pi,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda)-\varphi(\pi,\lambda)\,(-H)\,\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda)$$

$$=-H\varphi(\pi,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda)+H\varphi(\pi,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(\pi,\lambda)$$

$$=0$$

olur. O halde,

$$F(\lambda) := \int\limits_0^{\pi/2} (q(x) - \widetilde{q}(x))\, \varphi(x,\lambda)\, \widetilde{\varphi}(x,\lambda)\, dx$$

fonksiyonunu tanımlanırsa $\forall n$ için $F(\lambda_n) = 0$ olduğu elde edilir. Buna göre

$$\chi(\lambda) := \frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

fonksiyonu bir tam fonksiyondur. Yani tüm düzlemde analitiktir. Çünkü $F(\lambda)$ ve $\Delta(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfırları aynı olan tam fonksiyonlardır. Ayrıca $\Delta(\lambda)$'nın sıfırları basittir. Öte yandan $\tau = \left|\operatorname{Im} \sqrt{\lambda}\right|$ olmak üzere

$$\begin{cases} \varphi(x,\lambda) = O(\exp \tau x) \\ \widetilde{\varphi}(x,\lambda) = O(\exp \tau x) \end{cases}$$

asimptotik ifadelerinden

$$\begin{aligned} |F(\lambda)| &\leq \int\limits_0^{\pi/2} |q(x) - \widetilde{q}(x)|\, |\varphi(x,\lambda)|\, |\widetilde{\varphi}(x,\lambda)|\, dx \\ &\leq c \int\limits_0^{\pi/2} |q(x) - \widetilde{q}(x)|\, e^{\tau x} e^{\tau x} dx \\ &\leq c e^{\frac{2\tau\pi}{2}} \int\limits_0^{\pi/2} |q(x) - \widetilde{q}(x)|\, dx \\ &= c_2 e^{\tau\pi} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca $|\Delta(\lambda)| \geq c_\delta \left|\sqrt{\lambda}\right| \exp \tau\pi$ olduğundan

$$|\chi(\lambda)| = \frac{|F(\lambda)|}{|\Delta(\lambda)|} \leq \frac{c}{\left|\sqrt{\lambda}\right|}$$

eşitsizliği elde edilir. Son eşitsizliğe göre $\chi(x)$ fonksiyonu sınırlıdır. Liouville teoreminden dolayı $\chi(x)$ fonksiyonu sabittir. Diğer yandan

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} |\chi(x)| = 0$$

olacağından $\forall\lambda$ için $\chi(\lambda)=0$ demektir. Dolayısıyla $F(\lambda)=0$ olur. Bu durumda

$$\int_0^{\pi/2}(q(x)-\widetilde{q}(x))\,\varphi(x,\lambda)\,\widetilde{\varphi}(x,\lambda)\,dx=0$$

dır. Burada $q(x)-\widetilde{q}(x)=Q(x)$ işaretlemesi kabul edilirse Lemma 3.4.3'den

$$\int_0^{\pi/2}Q(x)\left(1+\cos 2\sqrt{\lambda}x+\int_0^{x}K_1(x,\tau)\cos 2\sqrt{\lambda}\tau d\tau\right)dx=0$$

veya

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}Q(x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}Q(x)\cos 2\sqrt{\lambda}xdx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{x}Q(x)\,K_1(x,\tau)\cos 2\sqrt{\lambda}d\tau dx=0$$

alınır. Son eşitlikteki iki katlı integralde integrasyon sırası değiştirilirse,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}Q(x)\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}Q(x)\cos 2\sqrt{\lambda}xdx+\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_\tau^{\pi/2}Q(x)\,K_1(x,\tau)\cos 2\sqrt{\lambda}dxd\tau=0$$

veya

$$\int_0^{\pi/2}Q(x)\,dx+\int_0^{\pi/2}\left(Q(\tau)+\int_\tau^{\pi/2}Q(x)\,K_1(x,\tau)\,dx\right)\cos 2\sqrt{\lambda}\tau d\tau=0$$

elde edilir. Burada

$$Q(\tau)+\int_\tau^{\pi/2}Q(x)\,K_1(x,\tau)\,dx=f(\tau)$$

işaretlenirse,

$$\int_0^{\pi/2}Q(x)\,dx+\int_0^{\pi/2}f(\tau)\cos 2\sqrt{\lambda}\tau d\tau=0 \tag{3.4.5}$$

alınır. Riemann-Lebesque Lemması geregince $\sqrt{\lambda}\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\pi/2}f(\tau)\cos 2\sqrt{\lambda}\tau d\tau=0$$

dır. Dolayısıyla

$$\int_{0}^{\pi/2} Q(x)\,dx = 0$$

olur. Bu ifade (3.4.5) eşitliğinde yerine yazılırsa $\forall\lambda$ için

$$0 + \int_{0}^{\pi/2} f(\tau)\cos 2\sqrt{\lambda}\tau d\tau = 0$$

bulunur. Lemma 3.4.2'den h.h.y.

$$f(\tau) = 0$$

olur. Buradan

$$Q(\tau) + \int_{\tau}^{\frac{\pi}{2}} Q(x)\,K_1(x,\tau)\,dx = 0 \tag{3.4.6}$$

olur ve $\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ aralığında h.h.y. $Q(x) = 0$ olduğundan (3.4.6) eşitliği

$$Q(\tau) + \int_{\tau}^{\pi} Q(x)\,K_1(x,\tau)\,dx = 0$$

şeklinde yazılabilir. Lemma 3.4.4 'ten $Q(x) = 0$'dır. Dolayısıyla h.h.y. $q(x) = \widetilde{q}(x)$ eşitliği geçerlidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.5 Nodal Noktalara Göre Ters Problem

L operatörünü ele alalım. λ_n, $n \geq 1$ bu operatörün öz değerleri ve $\varphi(x, \lambda_n)$ bu öz değere karşılık gelen öz fonksiyonlar olmak üzere salınım teoremine göre her bir n için $\varphi(x, \lambda_n)$ öz fonksiyonu $(0, \pi)$ aralığında tam olarak n tane sıfıra sahiptir.

Tanım 3.5.1 Her bir n için $\varphi(x, \lambda_n)$ fonksiyonunun $(0, \pi)$ aralığındaki sıfırlarına L operatörünün nodal (düğüm) noktaları denir. Nodal noktaların kümesi

$$X = \left\{x_n^j : \varphi\left(x_n^j, \lambda_n\right) = 0,\ x_n^j \in (0, \pi)\right\} \tag{3.5.1}$$

$$X = \left\{x_1^0,\ x_2^0,\ x_2^1,\ x_3^0,\ x_3^1,\ x_3^2, ...\right\} \tag{3.5.2}$$

şeklinde gösterilebilir.

Örnek 3.5.2 L operatöründe $q(x) \equiv 0$, $h = H = 0$ alınırsa,

$$\begin{cases} -y'' = \lambda y \\ y'(0) = 0 \\ y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

problemi elde edilir. Bu problemin öz değerleri $\lambda_n = n^2$ ve öz fonksiyonları $\varphi(x, \lambda_n) = \cos nx$ şeklindedir. Buradan örneğin

$n = 1$ için $\lambda_1 = 1$, $\varphi(x, \lambda_1) = \cos x$ ve $x_1^0 = \dfrac{\pi}{2} \in (0, \pi)$

$n = 2$ için $\lambda_2 = 4$, $\varphi(x, \lambda_2) = \cos 2x$ ve $x_2^0 = \dfrac{\pi}{4}$, $x_2^1 = \dfrac{3\pi}{4}$

$n = 3$ için $\lambda_3 = 9$, $\varphi(x, \lambda_3) = \cos 3x$ ve $x_3^0 = \dfrac{\pi}{6}$, $x_3^1 = \dfrac{\pi}{2}$, $x_3^2 = \dfrac{5\pi}{6}$

ve benzer şekilde devam edilirse genel olarak

$$x_n^j = \frac{\left(j + \frac{1}{2}\right)\pi}{n},\ j = 0, 1, 2, ..., (n-1)$$

şeklinde nodal noktaları bulunur.

Lemma 3.5.3 (McLaughlin, 1986) $j = \left\{\dfrac{j_n}{n},\ n \geq 0\right\}$ kümesi $[0, 1]$ aralığında yoğundur.

Lemma 3.5.4 $\forall n \geq 1$ için $\rho_n = \sqrt{\lambda_n}$ olmak üzere

$$\left(j+\frac{1}{4}\right)\pi < x_n^j \rho_n < \left(j+\frac{3}{4}\right)\pi$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: $\varphi(x,\lambda_n) = \cos\rho_n x + O\left(\frac{1}{n}\right)$ asimptotik ifadesini alalım. Burada x yerine sırasıyla $\frac{\left(j+\frac{1}{4}\right)\pi}{\rho_n}$ ve $\frac{\left(j+\frac{3}{4}\right)\pi}{\rho_n}$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{\left(j+\frac{1}{4}\right)\pi}{\rho_n},\lambda_n\right) &= \cos\left(\rho_n \frac{\left(j+\frac{1}{4}\right)\pi}{\rho_n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \cos\left(j+\frac{1}{4}\right)\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= (-1)^j \frac{1}{\sqrt{2}} + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{\left(j+\frac{3}{4}\right)\pi}{\rho_n},\lambda_n\right) &= \cos\left(\rho_n \frac{\left(j+\frac{3}{4}\right)\pi}{\rho_n}\right) + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \cos\left(j+\frac{3}{4}\right)\pi + O\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= (-1)^{j+1} \frac{1}{\sqrt{2}} + O\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliklere göre $\varphi\left(\frac{\left(j+\frac{1}{4}\right)\pi}{\rho_n},\lambda_n\right)$ ve $\varphi\left(\frac{\left(j+\frac{3}{4}\right)\pi}{\rho_n},\lambda_n\right)$ ifadeleri zıt işaretlidir. Dolayısıyla sürekli fonksiyonlar için geçerli olan Cauchy-Bolzana teoremi gereğince $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonu $I = \left(\frac{\left(j+\frac{1}{4}\right)\pi}{\rho_n}, \frac{\left(j+\frac{3}{4}\right)\pi}{\rho_n}\right)$ aralığında en az bir sıfıra sahiptir. Üstelik $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonu $(0,\pi)$ aralığında toplam n tane sıfıra sahip olduğundan fonksiyonun I aralığında bir tek sıfırı vardır.

Yani $x_n^j \in \left(\frac{\left(j+\frac{1}{4}\right)\pi}{\rho_n}, \frac{\left(j+\frac{3}{4}\right)\pi}{\rho_n}\right)$ yazılabilir. Böylece Lemma ispatlanmış olur.

Lemma 3.5.5 $\sqrt{\lambda_n} = \rho_n$ sayıları için

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{n}\left[1 - \frac{\omega}{n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right], \ \frac{1}{\rho_n^2} = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{3.5.3}$$

asimptotik ifadeleri geçerlidir. Burada

$$\omega = h + H + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} q(t)\,dt$$

dir.

İspat: Özdeğerlerin

$$\sqrt{\lambda_n} = \rho_n = n + \frac{\omega}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

asimptotik ifadesinden

$$\frac{1}{\rho_n} = \frac{1}{n + \frac{\omega}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n}\frac{1}{\left[1 + \frac{\omega}{n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]}$$

$$= \frac{1}{n}\left[1 - \frac{\omega}{n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

ve

$$\frac{1}{\rho_n^2} = \frac{1}{n^2}\left[1 - \frac{\omega}{n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[1 - \frac{2\omega}{n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

oldukları kolayca görülür.

Teorem 3.5.6 X nodal noktaları kümesinde n'nin yerine yeterince büyük değerleri için

$$x_n^j = \frac{j + \frac{1}{2}}{n}\pi - \frac{\omega}{n^2\pi}\left(\frac{j + \frac{1}{2}}{n}\right)\pi + \frac{A\left(x_n^j\right)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{3.5.4}$$

asimptotik ifadesi geçerlidir. Burada

$$A\left(x_n^j\right) = h + H + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_n^j} q(t)\,dt, \omega = h + H + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi} q(t)\,dt$$

şeklindedir.

İspat: $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun asimptotik ifadesinden

$$\varphi(x,\lambda) = \cos\rho x + \frac{h}{\rho}\sin\rho x + \frac{1}{\rho}\int_0^{\pi}\sin(x-t)\,q(t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt$$

$$= \cos \rho x + \frac{h}{\rho} \sin \rho x + \frac{1}{\rho} \int_0^{\pi} \sin (x - t) \, q(t) \cos (\rho t) \, dt + o \left(\frac{1}{\rho} e^{\tau x} \right)$$

$$= \cos \rho x + \frac{h}{\rho} \sin \rho x + \frac{\sin \rho x}{2\rho} \int_0^{\pi} q(t) \, dt + o \left(\frac{1}{\rho} e^{\tau x} \right)$$

$$+ \frac{1}{2\rho} \int_0^{\pi} \sin (x - 2t) \, q(t) \, dt + o \left(\frac{1}{\rho} e^{\tau x} \right)$$

alınır. Burada $|\rho| \to \infty$ için

$$\int_0^x \sin \rho (x - 2t) \, q(t) \, dt = o \left(e^{\tau x} \right)$$

olduğundan

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \rho x + A(x) \frac{\sin \rho x}{\rho} + o \left(\frac{1}{\rho} e^{\tau x} \right)$$

alınır. Burada $A(x) = h + \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^x q(t) \, dt$ dir.

Eğer son eşitlikte $\lambda = \lambda_n$ yazılır ve öz değerlerin reel olduğu göz önüne alınırsa,

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos \rho_n x + A(x) \frac{\sin \rho_n x}{\rho_n} + o \left(\frac{1}{\rho_n} \right)$$

elde edilir. Nodal noktaları bu fonksiyonun sıfırları olduğundan

$$\varphi\left(x_n^j, \lambda_n\right) = 0 \Rightarrow \cos \rho_n x_n^j + A\left(x_n^j\right) \frac{\sin \rho_n x_n^j}{\rho_n} + o \left(\frac{1}{\rho_n} \right) = 0$$

alınır. Bu ifadenin her iki tarafı $\sin \rho_n x_n^j$ ile bölünürse,

$$\cot \rho_n x_n^j + \frac{A(x_n^j)}{\rho_n} + o \left(\frac{1}{\rho_n} \right) = 0$$

veya

$$- \cot \rho_n x_n^j = \frac{A(x_n^j)}{\rho_n} + o \left(\frac{1}{\rho_n} \right)$$

elde edilir. Ayrıca $\cot \alpha = \tan \left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha \right)$ olduğundan

$$\tan \left(\rho_n x_n^j - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{A(x_n^j)}{\rho_n} + o \left(\frac{1}{\rho_n} \right)$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$\rho_n x_n^j - \frac{\pi}{2} = \arctan \left(\frac{A(x_n^j)}{\rho_n} + o \left(\frac{1}{\rho_n} \right) \right) + j\pi$$

veya

$$\rho_n x_n^j = \arctan\left(\frac{A\left(x_n^j\right)}{\rho_n} + o\left(\frac{1}{\rho_n}\right)\right) + \left(j + \frac{1}{2}\right)\pi \tag{3.5.5}$$

yazılabilir. $u \to 0$ iken $\arctan u = u + o\left(u^2\right)$ olduğundan

$$\arctan\left(\frac{A\left(x_n^j\right)}{\rho_n} + o\left(\frac{1}{\rho_n}\right)\right) = \left(\frac{A\left(x_n^j\right)}{\rho_n} + o\left(\frac{1}{\rho_n}\right)\right)$$

olur. Dolayısıyla bu ifade (3.5.5) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \rho_n x_n^j &= \frac{A\left(x_n^j\right)}{\rho_n} + o\left(\frac{1}{\rho_n}\right) + \left(j + \frac{1}{2}\right)\pi \\ x_n^j &= \frac{A\left(x_n^j\right)}{\rho_n^2} + o\left(\frac{1}{\rho_n^2}\right) + \frac{\left(j + \frac{1}{2}\right)\pi}{\rho_n} \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.5.5'ten

$$\begin{aligned} x_n^j &= \left(j + \frac{1}{2}\right)\pi\frac{1}{n}\left[1 - \frac{\omega}{n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + A\left(x_n^j\right)\left(\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right] + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{j + \frac{1}{2}}{n}\pi - \frac{\omega}{n^2\pi}\left(\frac{\left(j + \frac{1}{2}\right)\pi}{n}\right) + \frac{A\left(x_n^j\right)}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

alınır. Burada

$$A\left(x_n^j\right) = h + \frac{1}{2}\int_0^{x_n^j} q(t)\,dt$$

şeklindedir.

Şimdi X, L operatörünün tüm nodal noktalarının kümesi ve $X_0 \subset X$ bu kümenin $[0, \pi]$'de yoğun bir alt kümesi olsun. Buna göre $\forall x \in [0, \pi]$ için $\exists \left(x_{n_k}^{j_{n_k}}\right) \subset \left(x_n^{j_n}\right)$ alt dizisi vardır ki

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k}^{j_{n_k}} = x$$

tir.

Teorem 3.5.7 X_0, L operatörünün, $\widetilde{X}_0$ ise $\widetilde{L}$ operatörünün nodal noktalarının $(0, \pi)$'de yoğun alt kümesi olmak üzere $X_0 = \widetilde{X}_0$ ve $\int_0^{\pi} \widetilde{q}(t)\,dt = \int_0^{\pi} q(t)\,dt$ ise $q(x) = \widetilde{q}(x)$ h.h.y. ve $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$'dır. Yani L operatörünün katsayıları olan $q(x)$ fonksiyonu h ve H sayıları nodal noktaların herhangi bir yoğun alt kümesi ile tek olarak belirlenir.

İspat: $x \in [0,\pi]$ alalım. $x_{n_k}^{j_{n_k}} \to x$ olsun. Bu durumda Teorem 3.5.6 daki asimptotik ifade kullanılarak

$$\left(x_{n_k}^{j_{n_k}} - \frac{j_{n_k} + \frac{1}{2}}{n_k}\pi\right) n_k^2 = -\frac{\omega}{\pi}\left(\frac{\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi}{n_k}\right)\pi + A\left(x_{n_n}^{j_{n_k}}\right) + o(1)$$

eşitliği yazılabilir. $x_{n_k}^{j_{n_k}} \to x$ olduğundan $\frac{\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi}{n_k} \to x$'tir. Diğer yandan $q(x)$ integrallenebilen bir fonksiyon olduğundan

$$A(x) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt$$

mutlak süreklidir. O halde

$$\left(x_{n_k}^{j_{n_k}} - \frac{j_{n_k} + \frac{1}{2}}{n_k}\pi\right) n_k^2$$

ifadesinin $k \to \infty$ iken limiti vardır ve bu limit sonludur. Yani

$$\lim_{k\to\infty}\left(x_{n_k}^{j_{n_k}} - \frac{j_{n_k} + \frac{1}{2}}{n_k}\pi\right) n_k^2 = -\frac{\omega}{\pi}x + A(x) \tag{3.5.6}$$

eşitliği geçerlidir. Burada

$$f(x) := -\frac{\omega}{\pi}x + A(x)$$

alınırsa f fonksiyonu $[0,\pi]$'de tanımlı mutlak sürekli bir fonksiyon olur. (3.5.6) eşitliğine göre $\varkappa_0$ kümesi verilirse $f(x)$ fonksiyonu bulunabilir.

$f(x) = -\frac{\omega}{\pi}x + A(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$'de mutlak sürekli olduğundan h.h.y. sonlu türeve sahiptir. Bu türev

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{\omega}{\pi}x + A'(x) \\ &= -\frac{1}{\pi}\left(h + H + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt\right) + \frac{1}{2}q(x) \end{aligned}$$

şeklindedir. Böylece $[0,\pi]$ aralığında h.h.y.

$$q(x) = 2\left(f'(x) + \frac{1}{\pi}(h+H)\right)$$

olur. Diğer yandan

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{\omega}{\pi}x + A'(x) \\ f(0) &= A(0) = h \Longrightarrow h = f(0) \\ f(\pi) &= -\frac{\omega}{\pi}\pi + A'(\pi) = -(h+H) + h = -H \Longrightarrow H = -f(\pi) \end{aligned}$$

alınır. Dolayısıyla $\varkappa_0 = \widetilde{\varkappa}_0$ ise (3.5.6)'ten $f(x) = \widetilde{f}(x)$ ve buradan da $h = \widetilde{h}$, $H = \widetilde{H}$ ve $q(x) = \widetilde{q}(x)$ h.h.y. olduğu söylenir.

Sonuç 3.5.8 $\varkappa_0$ yoğun nodal nokta kümesi verilirse L operatörünün katsayıları aşağıdaki adımlar kullanılarak bulunabilir.

1.ADIM: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(x_n^j - \frac{j_n + \frac{1}{2}}{n}\pi\right)n^2$ limiti hesaplanarak $f(x)$ fonksiyonu bulunur.

2.ADIM: $f(0) = h$, $-f(\pi) = H$ katsayıları belirlenir.

3.ADIM: $q(x) = 2\left(f'(x) + \frac{1}{\pi}(f(0) - f(\pi))\right)$ formülü ile $q(x)$ bulunur.

Örneğin $\begin{cases} -y'' + \cos xy = \lambda y, \ x \in (0,\pi) \\ y'(0) = 0 \\ y'(\pi) + y(\pi) = 0 \end{cases}$

operatörünü ele alalım. Burada $q(x) = \cos x$, $h = 0$, $H = 1$ olduğundan

$$\omega = h + H + \frac{1}{2}\int_0^\pi q(t)\,dt = 0 + 1 + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos t dt = 1 + \frac{1}{2}0 = 1$$

ve

$$A(x) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt = 0 + \frac{1}{2}\int_0^\pi \cos t dt = \frac{1}{2}\sin x$$

ifadeleri bulunur. Dolayısıyla nodal noktaların asimptotik ifadesi

$$x_n^j = \frac{j+\frac{1}{2}}{n}\pi - \frac{\omega}{n^2\pi}\left(\frac{j+\frac{1}{2}}{n}\right)\pi + \frac{A(x_n^j)}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

eşitliğinden

$$x_n^j = \frac{j+\frac{1}{2}}{n}\pi - \frac{1}{n^2\pi}\left(\frac{j_n+\frac{1}{2}}{n}\right)\pi + \frac{1}{2n^2}\sin(x_n^j) + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$ şeklinde bulunmuş olur.

Tersine, L tipinde bir operatörün nodal noktalarının yoğun bir alt kümesi

$$x_n^{j_n} = \left(\frac{j_n + \frac{1}{2}}{n}\right)\pi - \frac{1}{n^2\pi}\left(\frac{j_n + \frac{1}{2}}{n}\right)\pi + \frac{1}{2n^2}\sin x_n^{j_n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olmak üzere

$$X_0 = \left\{x_n^{j_n}\right\}$$

şeklinde verilmiş olsun. Buna göre L operatörünün katsayıları

1.ADIM:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(x_n^{j_n} - \frac{j_n + \frac{1}{2}}{n}\pi\right)n^2 &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-j_n + \frac{1}{2}}{n}\pi + \frac{1}{2}\sin x_n^j\right) \\ &\Rightarrow f(x) = \frac{-x}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x\end{aligned}$$

2. ADIM:

$$\begin{aligned}f(0) &= h \Rightarrow h = 0 \\ -f(\pi) &= H \Longrightarrow H = -1\end{aligned}$$

3. ADIM:

$$\begin{aligned}q(x) &= 2\left(f'(x) + \frac{1}{\pi}\left(f(0) - f(\pi)\right)\right) \\ &= 2\left(\frac{-1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{\pi}\right) = \cos x\end{aligned}$$

şeklinde bulunmuş olur.

KAYNAKLAR

Ambartsumyan, V. A. (1929). Über eine frage der eigenwerttheorie, Z. Physik, 53, 690-695.

Agranovich, Z. S. ve Marchenko, V. A. (1960).The Inverse Problem in the Theory of Scattering, Kharkov Univ.

Ahlfors, L. V. (1953). Complex Analysis, McGraw-Hill Book Company, Inc., Newyork-Tronto-London.

Akhiezer, N. I. ve Glazman, I. M. (1950).Theory of Linear Operators in Hilbert Space, Moskow.

Bellman, R. ve Kuk, K. L. (1967). Difference-differential equations. M., "Mir", (Russian).

Borg, G.(1945). Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen eigenwertaufgabe. Bestimnung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. 78, 1-96.

Brasche, J. F., Malamud, M ve Neidhardt, H. (2002). Weyl function and spectral properties of self-adjoint extensions, Integral Equations and Operator Theory, 43, 264-289.

Buterin, S. A. ve Yurko, V. A. (2006). Inverse spectral problem for pencils of differential operators on a finite interval, Vestnik Bashkir. Univ., 4, 8–12.

Coddington, E. A. ve Levinson, N., (1972).Theory of ordinary Differential Equations, Mcgraw-Hill Book Company, Inc. Newyork-Tronto-London, 195.

Coleman, C. F. ve Mclaughlin, J. R. (1993). Solution of inverse spectral problems for an impedance with integrable derivative, I, II, Commun. Pure Appl. Math. 46, 145-184, 185-212.

Corduneanu, C. (1991). Integral equations and applications, Cambridge Universityv Press, New York.

Courant, R. ve Hilbert, D. (1951). Methods of Mathematical Physics, vol. 1, Moscow.

Delsarte, J. (1938). Sur certains transformations fonctionelles relatives aux equations linears aux derivees partielles du second-order, C. R. Hebd. Acad. Sci.,206, 178-182.

Delsarte, J. ve Lions, J. (1957). Transmutations d'operateurs differentiels dans le domaine complexe, Comm. Math. Helv., 32(2), 113-128.

Faddeev, L. D. (1959). The Inverse Problem in the Quatum Theory of Scattering, Uspekhi Math. Nauk. 14, No.4, 57-119.

Freiling, G. ve Yurko, V. A. (1997). Inverse problems for differential equations with turning points, Inverse Probl. 13, 1247-1263.

Freiling, G. ve Yurko, V. A. (2001). Inverse Sturm-Liouville problems and their applications, NOVA Science Publishers, New York.

Gasymov, M. G. and Levitan, B. M. (1964). About Sturm-Liouville differential operators., Math. Sborn., 63 (105), No. 3.

Gasymov, M. G. ve Levitan, B. M. (1968). On the Sturm-Liouville differential operators with discrete spectra, Amer. Math. Soc. Transl. Ser., 68, 2.

Gelfand, I. M. ve Levitan, B. M. (1951). On the determination of a differential equation from its spectral function, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 15, 309-360.

Hochstadt, H. ve Lieberman, B. (1978). An inverse Sturm-Liouville problem with mixed given data, SIAM J. App. Math., 34, 676-680.

Isaacson, E. L. ve Trubowitz, E. (1983). The inverse Sturm-Liouville problem, I, Comm. Pure Appl. Math., 36, 767-783.

Krein, M. G. ve Levin, B. Ya (1948). On entire almost periodic functions of exponential type, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 64,No.3, 285-287.

Krein, M. G. (1951). Solution of the inverse Sturm-Liouville problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 76, 21-24.

Krein, M. G. (1954). On a method of the effective solution of an inverse boundary value problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 95, 767-770.

Levin, B. Ya (1971). Entire functions. MGV, Moscow, Russia.

Levinson, N. (1949). The inverse Sturm-Liouville problem, Mat. Tidsskr. B, 25-30.

Levinson, N. (1949). Criteria for the limit-point case for second-order linear differential operators, Casopis. Pest. Mat. Fys. 74 17-20.

Levitan, B. M. (1953). On the Asymptotic Behavior of the Spectral Function and on the Eigenfunction Expansion for a Self-Adjoint Second-Order Differential Operator, I, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 17 , 331-364.

Levitan, B. M. (1955). On the Asymptotic Behavior of the Spectral Function and on the Eigenfunction Expansion for a Self-Adjoint Second-Order Differential Operator, II, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Math. 19 , 33-58.

Levitan, B. M. (1964). Generalized Ttranslation operators and some its applications, Jerusalem.

Levitan, B. M.ve Sargsyan, I. S. (1970). Introduction to spectral theory, Moscow, Nauk.

Likov, A. V. ve Mikhailov, Yu. A. (1963). The theory of heat and mass transfer, Gosnergoizdat [in Russian].

Liouville, J. (1836). Memoire sur le developpment des fonctions ou parites de fonctions en series dont les divers terms sont assujettis a satisfaire a une meme equation differentielles du second ordre contenant un parametre variable, J. de Mathematique, 1, 253-265.

Litvinenko, O. N. ve Soshnikov V. I. (1964). The theory of heteregeneous lines and their applications in radio engineering, Radio, Moscow, [in Russian].

Marchenko, V.A. (1950). Some problems in the theory of second-order differential operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72, 457-560.

Marchenko, V. A. (1950). Concerning the theory of a differential operator of the second order, Dokl. Akad. Nauk.(N.S.), 72, 457-460.

Marchenko, V. A. (1977). Sturm-Liouville operators and their applications, Naukova Dumka, Kiev.

McLaughlin, J. R. (1986). Analytical methods for recovering coefficients in differential equations from spectral data, SIAM Rev. 28 53-72.

McLaughlin, J. ve Polyakov, P. (1994). On the uniqueness of a spherical symmetric speed of sound from transmission eigenvalues, J. Diff. Eq., 107, 351-382.

Naimark, M. A. (1967). Linear differential operators. Part I, II: Linear differential operators in Hilbert space. Frederick Ungar Publishing Co.

Poisson, S. D. (1820). Memoire sur la maniere d'exprimer les functions par des series periodiques, J. Ecole Polytechnique 18 417-489.

Povzner, A. V. (1948). On differential equations of Sturm-Liouville type on a half-axis, Mat. Sb, 23.

Pöschel, J. ve Trubowitz, E. (1987). Inverse spectral theory, Pure Appl. Math. Vol 130, Orlando, FL:Academic.

Sakhnovich, L. (2001). Half-inverse problems on the finite interval, Inverse Problems, 17, 527-532.

Simon, B. (1999). A new approach to inverse spectral theory, I. Fundamental formalism, Ann. of Math. 150 1029-1057.

Sturm, J. C. (1836). Sur les equations differentielle lineares du second ordre, J. de Mathematique, 1, 106-186.

Tikhonov, A. N. (1949). Uniqueness theorems for jeophysics problems, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, Vol 69, No 4, 797-800.

Tikhonov, A. N. ve Samarskii, A. A. (1990). Equations of mathematical physics, Pergamon, Oxford.

Titchmarsh, E. C. (1932). The Theory of Ffunctions, Oxford at the clarendon press, London.

Voitovich, N. N., Katsenelbaum, B. Z. ve Sivov, A. N. (1997). Generalized method of eigen-vibration in the theory of diffraction [M], Nauka, Moskov, [in Russian].

Weyl, H. (1910). Über gewohnliche differentialgleichungen mit singularitäten und die zugehörigen entwicklungen willkürlicher funktionen, Math. Ann., 68, 220-269.

Yamamoto, M. (1990). Inverse eigenvalue problem for a vibration of a string with viscous drag, J. Math. Anal. Appl., 152, 20–34.

Yurko, V. A. (2000). Inverse spectral problems for linear differential operators and their applications, Gordon and Breach, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Gamze ŞAHİN
Doğum Yeri ve Tarihi	Sivas, 20.06.1993
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dil	
İletişim Adresi	Huzur Mahallesi 38. Sokak Gözlem Evler A.2. Blok Kat:2 No:7 Sivas
E-posta Adresi	gamzem.3458@gmail.com

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Halis Gülle Anadolu Lisesi, 2011
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2015

İş Tecrübesi

Toki Ahmet Yesevi Ortaokulu Sivas	Ücretli Öğretmenlik, 2016-2017
Tercih Eğitim Kurumları	Matematik Öğretmeni 2018-2019

Yayınlar

Ulusal

Uluslararası

Kongreler ve Bildiriler

Ulusal

Uluslararası

Ödüller, Teşvikler ve Üyelikler