T.C
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIR VE SÜREKSİZLİK KOŞULLARI HERGLOTZ-NEVANLINNA FONKSİYONUNA BAĞLI BİR STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra ERTİK
(20169237006)

Matematik Ana Bilim Dalı
Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ

SİVAS
AĞUSTOS 2019

Kübra ERTİK’in hazırladığı “**SINIR VE SÜREKSİZLİK KOŞULLARI HERGLOTZ-NEVANLINNA FONKSİYONUNA BAĞLI BİR STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ**” adlı bu çalışma aşağıdaki jüri tarafından **MATEMATİK ANABİLİM DALI**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı **Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ**

....

Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Ahmet Sinan ÖZKAN**

....

Cumhuriyet Üniversitesi

Jüri Üyesi **Doç. Dr. Murat ŞAT**

....

Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tarafından **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak onaylanmıştır.

Prof. Dr. Özlem Pelin CAN
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜ MÜDÜRÜ

Bu tez, Cumhuriyet Üniversitesi Senatosu'nun 20.08.2014 tarihli ve 7 sayılı kararı ile kabul edilen Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırlanmıştır.

ETİK SÖZÜ

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,

- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,

- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,

- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,

- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

23/08/2019
Kübra ERTİK

TEŞEKKÜR

Araştırmam boyunca bana her türlü desteği veren danışman hocam Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ ’ye teşekkürlerimi sunarım.

Okula başladığım ilk günden itibaren daha başarılı olabilmem için her daim destekçim olan ve beni hiç yalnız bırakmayan aileme; alfabeyi, sayıları, problem çözmeyi ve daha birçok bilgiyi öğreten bütün öğretmenlerime; okudukça ne kadar az bildiğimi bana anlatan elimden hiç bırakmak istemediğim kitaplarıma ve yazarlarına sonsuz teşekkürler.

ÖZET

SINIR VE SÜREKSİZLİK KOŞULLARI HERGLOTZ-NEVANLINNA FONKSİYONUNA BAĞLI BİR STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

Kübra ERTİK
Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ
2019 , 60 sayfa+x

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çalışmada kullanılan temel bilgi ve kavramlar ile bir Sturm-Liouville operatörüne ait özellikler yer almaktadır.

İkinci bölümde, tez konusuyla ilgili genel bilgiler ile daha önce yapılmış olan çalışmalardan bahsedilmektedir.

Üçüncü bölümde, belirlenen probleme karşılık gelen ve üzerinde iç çarpım tanımlanmış, Hilbert uzayı oluşturulmuş ve probleme karşılık gelen operatör modeli bu uzay üzerinde kurulmuştur. Ele alınan problemin özfonksiyonlarının integral gösterimleri ile bu özfonksiyonların asimptotik ifadeleri elde edilmiştir. Daha sonra problemin karakteristik fonksiyonu tanımlanmış ve problemin özdeğerlerinin reel ve basit olduğu ispatlamış, normalleştirici sayılar tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde ise özfonksiyonların asimptotik ifadeleri kullanılarak, karakteristik fonksiyonun asimptotik fonksiyonu elde edilmiştir. Daha sonra probleme ait Weyl çözümü ile Weyl fonksiyonu tanımlanmıştır. Böylece tanımlanan Weyl fonksiyonuna ve bazı spektral verilere göre teklik teoremleri ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville operatörü, özdeğer, özfonksiyon, süreksizlik koşulları, ters problem, Herglotz-Nevanlinna fonksiyonu, Weyl çözümü, Weyl fonksiyonu

ABSTRACT

A STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH BOUNDARY AND TRANSMISSION CONDITIONS DEPEND ON HERGLOTZ-NEVANLINNA TYPE FUNCTION

Kübra ERTİK

Msc Thesis

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Yalçın GÜLDÜ

2019, 60 pages+x

This thesis consists of four parts.

In the first part, the basic information and concepts used in this study and some properties belong to Sturm-Liouville operator are included.

In the second part, general information about thesis subject and previous studies related to this subject are mentioned.

In the third part, the Hilbert space which is corresponding to the determined problem with inner product defined is formed. Then, corresponding operator model is established on this space.

The integral equations and asymptotics of eigenfunctions of the problem are obtained. After that, the characteristic function of the problem is defined and the eigenvalues of the problem is proved to be real and simple and normalizing numbers is defined.

In the last part, the asymptotic formula of the characteristic function is given by using asymptotics expressions of eigenfuntions. Then the Weyl solution and the Weyl function belong to problem are defined. Therefore, some uniqueness theorems are proved according to the defined Weyl function and some spectral data.

Key Words: Sturm-Liouville operator, eigenvalue, eigenfunction, transmission conditions, inverse problem, Herglotz-Nevanlinna function, Weyl solution, Weyl function

SİMGELER DİZİNİ

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$	x ve y vektörlerinin iç çarpımı
$\boldsymbol{L_2(a,b)}$	Mutlak değerin karesi (a,b) üzerinde Lebesque anlamında integrallenebilir olan fonksiyonların uzayı
W(x,y)	Wronsky determinantı (Wronskiyan)
$\int_{a}^{b} \boldsymbol{f(x)dx}$	f fonksiyonunun a’dan b’ye integrali
$\sum$	Toplam sembolü
$\prod$	Çarpım sembolü
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\Delta(\boldsymbol{\lambda})$	Karakteristik fonksiyon
H	Hilbert Uzayı
$\boldsymbol{D(T)}$	Tanım kümesi
$\boldsymbol{T}$	Operatör
$(\boldsymbol{\partial}/(\boldsymbol{\partial x}))$	Kısmi türev
$\vert \quad \vert$	Determinant
$\cap$	Kesişim işareti

İÇİNDEKİLER **SAYFA NO**

ÖZET…………………………………………………..…,,,,.……………….….……. vii
ABSTRACT……………………………………......………………………..….…. viii
SİMGELER DİZİNİ………………………………………………………………….. ix

BÖLÜM I
TEMEL KAVRAMLAR
1.Temel Tanım ve Teoremler……………….....……………………………..….. 1

BÖLÜM II
PROBLEMİN TARİHSEL GELİŞİMİ
2.Problemin Tarihsel Gelişimi…………....…………………………………..…...… 13

BÖLÜM III
PROBLEMİN KONUMU VE SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ........................... 21

BÖLÜM IV
TERS PROBLEMLER.. 38

KAYNAKÇA……….…..…………………...……………………………….................. 49

ÖZGEÇMİŞ…………………………………………………….............................. 60

1. TEMEL KAVRAMLAR

Birinci bölümde tezle ilgili temel tanım, teoremler ile bir Sturm-Liouville operatörüne ait bazı özellikler verilecektir. Bu bölüm hazırlanırken E. C. Titchmarsh (1939), E. A. Coddington, N. Levinson (1955), M. A. Naimark (1968), B. M. Levitan, I. S. Sargsjan (1970, 1988) kaynaklarından faydalanılmıştır.

1.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 1.1.1: $a \leq t \leq b$ ve $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Eğer

$$(L)\int_{a}^{b} [x(t)]^2 \, dt < \infty$$

integrali mevcut ise $x(t)$ fonksiyonuna, $[a, b]$ aralığında karesiyle Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyon denir ve bu fonksiyonların uzayı $L_2 [a, b]$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.2: $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir z_0 noktasının en az bir δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir adı verilir. $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir W alt kümesindeki tüm noktalarda analitik ise $f(z)$'ye W'de analitik fonksiyon denir.

Tanım 1.1.3: Kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik olan fonksiyona tam fonksiyon adı verilir.

Teorem1.1.4: Herhangi bir tam fonksiyonun sıfırları ayrıktır,yani düzlemde herhangi bir limit noktasına sahip değildir.

Tanım 1.1.5: $f(z)$, kompleks düzlemin bir W alt kümesinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, $\forall z \in W$ için $|f(z)| \leq M_f$ sağlanacak şekilde en az bir $M_f > 0$ varsa $f(z)$'ye W'da sınırlı fonksiyon denir.

Teorem 1.1.6(Liouville): Kompleks düzlemin tamamında sınırlı olan tam fonksiyon sabit fonksiyondur.

Tanım 1.1.7: $f(z)$ kompleks değişkenli herhangi bir fonksiyon, z_0 ise $f(z)$' nin tanımlı olduğu herhangi bir nokta olsun. Eğer $f(z_0) = 0$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun bir sıfır yeri veya kısaca sıfırı denir.

Eğer $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 0,\ ...,\ f^{(n-1)}(z_0) = 0,\ f^{(n)}(z_0) \neq 0$ ise z_0 noktası $f(z)$ fonksiyonunun n-katlı sıfırı diye adlandırılır.

Tanım 1.1.8: $f(z)$, z_0 noktasının en az bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebilir ama z_0' da diferansiyellenemeyen bir fonksiyon ise z_0' a $f(z)$' nin ayrık singüler (aykırı) noktası denir.

Tanım 1.1.9: z_0, bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık singüler noktası olsun.

i) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ limiti mevcut ve sonlu ise z_0 noktasına $f(z)$'nin kaldırılabilir aykırı noktası denir.

ii)

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

ise z_0 noktasına $f(z)$ nin kutup noktası (kutup yeri) denir.

iii) $\lim_{z\to z_0} f(z)$ limiti mevcut değilse, z_0 noktasına $f(z)$' nin esas aykırı noktası denir.

Tanım 1.1.10: $f(z)$ bir tam fonksiyon ve

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(r^{\mu})$$

eşitsizliğini sağlayan $\mu > 0$ sayısı varsa, $f(z)$ tam fonksiyonu sonlu mertebelidir denir. Bu eşitsizliği sağlayan μ sayılarının infimumuna $f(z)$' nin mertebesi adı verilir ve ρ ile gösterilir.

Tanım 1.1.11: $f(z)$ sonlu mertebeli bir tam fonksiyon olmak üzere yeterince büyük r'ler için

$$M(r) < \exp(ar^{\rho})$$

eşitsizliğini sağlayan $a > 0$ sayısı varsa $f(z)$ sonlu tipe sahiptir denir.
$M(r) < \exp(ar^{\rho})$ eşitsizliğini sağlayan a sayılarının infimumuna, $f(z)$ fonksiyonunun tipi adı verilir ve σ ile gösterilir.

Teorem 1.1.12:(Hadamard): Mertebesi $\rho \in (0,1)$ olan her bir $f(z)$ tam fonksiyonu

$$f(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Burada m, $f(z)$' nin orijindeki sıfırının katlılığı, $\{z_n\}_{n\geq 1}$ ise $f(z)$' nin 0'dan farklı tüm sıfırlarının kümesidir.

Teorem 1.1.13: f ve g kompleks düzlemin bir B bölgesinde analitik fonksiyonlar ve $\{z_n\} \subset B$

$$i) \lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \in B,$$
$$ii) \; \forall n \; için, \; f(z_n) = g(z_n)$$

koşullarını sağlayan bir dizi ise $\forall z \in B$ için $f(z) = g(z)$ eşitliği geçerlidir.

Tanım 1.1.14: n. mertebeden bir lineer diferansiyel ifade

$$\ell(y) = p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + ... + p_n(x)\, y \tag{1.1}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ fonksiyonlarına diferansiyel ifadenin katsayıları denir.

Tanım 1.1.15: a ve b sonlu sayılar olmak üzere $\dfrac{1}{p_0(x)}$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında integrallenebilirse (Lebesgue anlamında) (1.1) diferansiyel ifadesine regüler diferansiyel ifade; aksi halde, yani a veya b sonsuz veya $\dfrac{1}{p_0(x)}$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ fonksiyonlarından en az biri $[a,b]$ aralığında integrallenebilir değilse (1.1) diferansiyel ifadesine singüler diferansiyel ifade denir.

$C^n[a,b]$, $[a,b]$ aralığında n. mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyonların uzayı olmak üzere bir $y \in C^n[a,b]$ fonksiyonunun ve $(n-1)$. mertebeye kadar olan türevlerinin belli bir lineer birleşimi $U(y)$ ile gösterilsin:

$$U(y) = a_0y(a) + a_1y'(a) + ... + a_{n-1}y^{(n-1)}(a) + b_0y(b) + b_1y'(b) + ... + b_{n-1}y^{(n-1)}(b)$$

ifadesi a_i, b_i katsayılarına bağlıdır. Buna göre bu katsayılar değiştirilerek farklı şekillerde $U_v(y)$, $v = 1, 2, ..., m$ ifadeleri elde etmek mümkündür.

Tanım 1.1.16:

$$U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, ..., m \tag{1.2}$$

eşitliklerine $y \in C^n[a,b]$ fonksiyonu için a ve b noktalarında konulan sınır koşulları adı verilir.

Tanım 1.1.17: $D = \{y \in C^n[a,b] : \; U_v(y) = 0, \quad v = 1, 2, ..., m\}$ kümesi üzerinde $Ly = \ell(y)$ eşitliği ile bir lineer operatör tanımlanır. Bu operatöre, (1.1) diferansiyel ifadesi ve (1.2) sınır koşulları tarafından üretilen diferansiyel operatör denir.

Bu tanımdan anlaşıldığı gibi aynı diferansiyel ifade ile, sınır koşulları değiştirilerek, farklı operatörler tanımlamak mümkündür. Ayrıca (1.2) koşulları verilmeksizin de operatör tanımlanabilir ki bu, $C^n[a,b]$ üzerinde $\ell(y)$ ile üretilen tüm operatörlerin genişlemesi olur.

Tanım1.1.18(Lagrange Formülü): $C^n(a,b)$ uzayındaki herhangi y ve z fonksiyonları için,

$$\int_a^b \ell(y)\bar{z}dx = P(\xi,\eta) + \int_a^b y\bar{\ell}^*(z)dx \tag{1.3}$$

eşitliği geçerlidir. Burada,

$\ell^*(z) = (-1)^n(\bar{p}_0 z)^{(n)} + (-1)^{n-1}(\bar{p}_1 z)^{(n-1)} + (-1)^{n-2}(\bar{p}_2 z)^{(n-2)} + ... + \bar{p}_n z$ ve $P(\xi,\eta)$,

$$\begin{aligned}\xi &= (y(a), y'(a), ..., y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), ..., y^{(n-1)}(b)),\\ \eta &= \left(z(a), z'(a), ..., z^{(n-1)}(a), z(b), z'(b), ..., z^{(n-1)}(b)\right)\end{aligned}$$

değişkenlerinin belirli bir lineer formudur.

Teorem 1.1.19: Kabul edelim ki $p_{ij}(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ de integrallenebilen (Lebesgue anlamında) fonksiyonlardır. Bu durumda;

$$y_i' = \sum_{j=1}^{2} p_{ij}(x)y_j \quad (i=1,2)$$

lineer denklem sisteminin $\tau \in (a,b)$ için $y_i(\tau) = \xi_i$, $(i=1,2)$ koşulunu sağlayan bir tek çözümü vardır.(E. A. Coddington, N. Levinson, 1955)

Tanım 1.1.20: $(L-\lambda I)^{-1}$ operatörüne L operatörünün Resolvent operatörü denir.

Tanım 1.1.21: $(L-\lambda I)^{-1}$ in tüm $L_2[0,\pi]$ de mevcut ve sınırlı olduğu $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün regüler noktası denir. Tüm regüler noktalarının kümesine resolvent küme denir ve $\rho(L)$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.22:

I) $(L-\lambda I)^{-1}$ in mevcut olmadığı λ noktalarının kümesine L operatörünün spektrumu veya öz değerler kümesi denir ve

$$\sigma(L)=\{\lambda : Ly=\lambda y, y\in D(L)\}$$

ile gösterilir. Buradan,

$$\sigma(L)=\mathbb{C}\backslash\rho(L)$$

dır.

II) $(L-\lambda I)^{-1}$ mevcut olup, yoğun kümede tanımlı ve sınırlı olmayacak şekilde λ' ların kümesine sürekli spektrum denir.

III) $(L-\lambda I)^{-1}$ mevcut fakat,yoğun olmayan kümede tanımlı λ'ların kümesine rezidü spektrum denir.

Tanım 1.1.23: λ bir kompleks parametre olmak üzere,

$$\begin{cases} \ell(y)=\lambda y \\ U_v(y)=0,\ v=\overline{1,m} \end{cases} \tag{1.4}$$

sınır değer probleminin sıfırdan farklı bir $y(x)$ çözümü varsa λ'ya bu sınır değer probleminin bir özdeğeri; $y(x)$'e de λ'ya karşılık gelen özfonksiyonu denir. (1.4) sınır değer problemi çoğunlukla $\ell(y)$ diferansiyel ifadesi ve (1.2) sınır koşulları tarafından üretilen özdeğer problemi olarak adlandırılır.

Tanım 1.1.24: Tanım 1.1.23' da $n=m$ olsun.
$y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), ..., y_n(x,\lambda)$ fonksiyonları,

$$\ell(y)=\lambda y$$

denkleminin

$$y_i^{(j-1)}(a,\lambda)=\begin{cases} 0, & i\neq j \text{ ise} \\ 1, & i=j \text{ ise} \end{cases}, \quad i,j=\overline{1,n}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

determinantına (1.4) probleminin veya ona karşılık gelen diferansiyel operatörün karakteristik fonksiyonu denir.

Teorem 1.1.25: (1.4) probleminin özdeğerleri ile $\Delta(\lambda)$' nın sıfırları çakışır.

Tanım 1.1.26: Herhangi bir λ özdeğeri $\Delta(\lambda)$' nın k-katlı sıfırı ise k' ya λ özdeğerinin cebirsel katlılığı denir; eğer özel olarak $k = 1$ ise λ' ya cebirsel olarak basit özdeğer adı verilir.

Uyarı1.1.27:(1.4) probleminde $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ya da $U_v(y) = 0$ sınır koşullarının katsayıları λ parametresine bağlı seçilebilir. Bu durumda daha genel bir özdeğer problemi elde edilir.(Naimark,1968)

Tanım1.1.28: ρ bir kompleks parametre olmak üzere,

$$\ell(y) = -\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{du}{dt}\right) + Q(t)\,u = \rho\omega(t)\,u, \quad t \in (a,b) \tag{1.6}$$

diferansiyel denkleminin

$$\begin{cases} A_1 u(a) + B_1 u'(a) = 0 \\ A_2 u(b) + B_2 u'(b) = 0 \end{cases} \tag{1.7}$$

sınır koşullarını sağlayan çözümünün bulunması problemine Sturm-Liouville sınır değer problemi denir.Burada A_1, B_1, A_2, B_2 reel sabitler olup $A_1^2 + B_1^2 \neq 0$,
$A_2^2 + B_2^2 \neq 0$ koşulları sağlanmaktadır. Ayrıca $p(t), q(t)$ ve $\omega(t)$ reel değerli fonksiyonlardır.

Şimdi $p(t) > 0, \omega(t) > 0$ ve $\frac{dp(t)}{dt}$ ve $\frac{d^2}{dt^2}(p(t)\omega(t))$ fonksiyonlarının $(a.b)$ de sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$M=\int\limits_a^b\sqrt{\frac{\omega(s)}{p(s)}}ds\ ,\ \ f(t)=\sqrt[4]{p(t)\omega(t)}$$

olmak üzere

$$x=\frac{1}{M}\int\limits_a^t\sqrt{\frac{\omega(s)}{p(s)}}ds\ ,\ y=uf(t) \tag{1.8}$$

dönüşümü yapılırsa denklemi,(1.5) denklemi,

$$-y''+q(x)y=\lambda y\ ,\ x\in(0,1) \tag{1.9}$$

denklemine (1.6) sınır koşulları ise

$$\begin{cases} y'(0)+hy(0)=0 \\ y'(1)+Hy(1)=0 \end{cases} \tag{1.10}$$

koşullarına dönüşür. Burada,$q(x)=\dfrac{f''(x)}{f(x)}+M^2\dfrac{Q(x)}{\omega(x)}$, $\lambda=M^2\rho$ ve $h,H\in\mathbb{R}$ dir. (1.8)-(1.9) problemine Sturm-Liouville probleminin kanonik hali adı verilir.

$L_2(0,1)$ üzerinde tanım kümesi

$$D(L)=\left\{\begin{array}{c} y(x):y(x)\text{ ve }y'(x)\text{ fonksiyonları }(0,1)\text{ aralıklarında mutlak sürekli,} \\ \ell(y)\in L_2(0,1),y'(0)+hy(0)=0,y'(1)+Hy(1)=0 \end{array}\right\}$$

olan L operatörü şu şekilde tanımlansın:

$$Ly=-y''+q(x)y \tag{1.11}$$

L operatörü bir lineer diferansiyel operatördür. Ayrıca kolayca görülür ki (1.8)-(1.9) problemini L operatörü için özdeğer probleminden başka bir şey değildir. Bu şekilde tanımlı operatöre Sturm-Liouville operatörü denir.

Uyarı 1.1.29: (1.3) probleminde $\ell(y)$ diferansiyel ifadesinin ya da $U_v(y)=0$ sınır koşullarının katsayıları λ parametresine bağlı seçilebilir. Bu durumda daha genel bir özdeğer problemi elde edilir.(Naimark, 1968)

Tanım 1.1.30: H_1 ve H_2 iki Hilbert uzayları, $L:H_1\to H_2$ sınırlı lineer bir operatör ve $\overline{D(L)}=H_1$ olsun. Eğer $L^\star:H_2\to H_1$ operatörü $\langle Lx,y\rangle=\langle x,L^\star y\rangle$

şartını sağlıyorsa $L^{\star}$ operatörüne L' nin eşleniği (adjointi) denir. Eğer $L = L^{\star}$ ise L operatörüne öz eşlenik (self-adjoint) operatör denir.

Tanım 1.1.31: E lineer topolojik uzay, A ve B de $A : E \to E, B : E \to E$ şeklinde tanımlı iki lineer operatör olsun. E_1 ile E_2 de E lineer uzayının kapalı alt uzayları olmak üzere E uzayının tamamında tanımlı,E_1 den E_2 ye dönüşüm yapan ve lineer terse sahip X operatörü,

i) X ve X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

ii) $AX = XB$ operatör denklemi sağlanır,

şartlarını sağlıyorsa,bu operatöre A ve B operatörler çifti için çevirme operatörü denir.

Teorem1.1.32: $\lambda < 0$ olduğunda

$$U'' + \lambda\rho^2(x)\,U = 0, \quad x > 0, U(\infty) = 0$$

probleminin çözümü $U(x,\lambda)$ olsun. Burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyon ve $\rho(x) \geq \rho_0 > 0$ dır.

$R(\lambda) = \dfrac{U'(0,\lambda)}{U(0,\lambda)}$ olsun. Bu durumda $\lambda < 0$ olduğunda $R(\lambda)$ fonksiyonuna göre $\rho(x)$ fonksiyonu tek olarak belirtilir.

1951 yılında I.M.Gelfand ve B.M.Levitan [13] , $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartları vermişlerdir. Ayrıca bu çalışmada, Sturm-Liouville operatörünün belirtilmesi için etkili bir yöntem verilmiştir.

Diğer taraftan bu çalışmada verilen yöntem klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}\,(\alpha_n > 0)$ dizilerine göre belirlenmesi için yani,verilen dizilerin sırasıyla klasik Sturm-Liouville probleminin spektrumu ve normalleştirici sayıları olması için gerekli ve yeterli koşul aşağıda verilen klasik asimtotik eşitliklerin sağlanmasıdır.

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{a_0}{n} + ... + \frac{\alpha_{\left|\left|\frac{m}{2}\right|\right|}}{n^{2\left|\left|\frac{m}{2}\right|\right|+1}} + \frac{\gamma_n}{n^{2\left|\left|\frac{m}{2}\right|\right|+1}} \\ \alpha_n &= \frac{\pi}{2} + \frac{b_0}{n^2} + ... + \frac{b_{\left|\left|\frac{m}{2}\right|\right|}}{n^{2\left|\left|\frac{m}{2}\right|\right|+1}} + \frac{\tau_n}{n^{2\left|\left|\frac{m}{2}\right|\right|+1}}\end{aligned}$$

burada $\alpha_0 = \dfrac{1}{\pi}\left[h + H + \dfrac{1}{2}\int\limits_0^\pi q(t)dt\right]$ dir. Eğer m çift sayı ise $\sum \gamma_n^2 < \infty$ ve $\sum \left(\dfrac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$,eğer m tek ise $\sum \left(\dfrac{\tau_n}{n}\right)^2 < \infty$ ve $\sum \tau_n < \infty$ dir.

Fakat,bu çalışmalarda ters problemin iki spektrumuna göre tam çözümü verilmemiştir.Regüler Sturm-Liouville operatörleri için bu problemin yani,iki spektruma göre regüler Sturm-Liouville operatörünün belirlenmesi problemi B.M. Levitan ve M.G.Gasimov un [14] çalışmasında verilmiştir.Bu çalışmada,verilen problemin $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ normalleştirici sayılarının iki spektruma bağlı olduğunu gösteren en önemli formül,

$$\alpha_n = \frac{h_1 - h}{\mu_n - \lambda_n} \prod_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_k - \lambda_n}{\mu_{k-\lambda_n}} \tag{1.12}$$

şeklinde elde edilmiştir. Burada $\prod$ sembolü,sonsuz çarpımda k=n. çarpanın bulunmadığını gösterir. (1.12) formülü iki spektruma göre ters problemin çözümünü vermektedir.Gerçekten de,eğer $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri verilmiş ise (1.12) formülünden yararlanarak $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ sayılarının asimtotik ifadesi bulunur ve [14] çalışmasının sonuçlarından yararlanılarak $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre ters problemin çözümü verilir.Bu ise iki spektruma göre ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşulları verecektir ve o koşullar aşağıdaki şekilde sıralanabilir:

1) $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri sıralı,yani
$\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < ...$

2) λ_n ve μ_n ler

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_n} &= n + \frac{a_0}{n} + \frac{a_1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\\ \sqrt{\mu_n} &= n + \frac{\acute{a}_0}{n} + \frac{\acute{a}_1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\end{aligned}$$

asimtotik formüllerine sahiptir.

Tanım1.1.33: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine L operatörünün spektral karakteristikleri denir. L diferansiyel operatörü verildiğinde spektral karakteristiklerinin bulunması problemine düz problem, spektral karakteristikleri verildiğinde bu hangi Sturm-Liouville tipinde L diferansiyel operatörünün spektral karakteristikleri olduğu problemine ise ters problem denir.

Tanım1.1.34: $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ dizisi L operatörünün öz değerleri ve $\{y(x,\lambda_n)\}$ ler bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar olsun.

$$\alpha_n = \int_a^b y^2(x,\lambda_n)\,dx$$

sayılarına L operatörünün normalleştirici sayıları denir.

Teorem 1.1.35: a) L, $D(L)$ üzerinde kapalı, selfadjoint bir operatördür.

b) L sınır değer problemi,mutlak değerlerine göre sıralandığında sınırsız şekilde büyüyen,sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir.

c) L nin özdeğerleri reel sayılardır ve herhangi farklı iki özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldir,yani $\lambda_1 \neq \lambda_2$ özdeğerler ve $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ onlara karşılık gelen özfonksiyonlar ise,

$$\int_0^1 y(x,\lambda_1)\bar{z}(x,\lambda_2)dx = 0 \tag{1.13}$$

eşitliği geçerlidir.

d) Özdeğerler dizinini $\{\lambda_n\}$ ile gösterirsek n nin yeterince büyük değerlerinde aşağıdaki asimtotik ifade geçerlidir.

$$\sqrt{\lambda_n} = n\pi + \frac{c}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right) \tag{1.14}$$

Burada, $c = h + H + \frac{1}{2}\int_0^1 q(x)\,dx$ dir.

e) $u(x,\lambda)$ ve $\nu(x,\lambda)$ fonksiyonları (1.8) denkleminin sırasıyla

$$
\begin{aligned}
u(0,\lambda) &= 1, u^{'}(0,\lambda) = -h \\
\upsilon\left(1,\lambda\right) &= 1, \upsilon^{'}\left(1,\lambda\right) = -H
\end{aligned}
$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere,herhangi bir $f(x) \in L_2(0,1)$ fonksiyonu için

$$
-y^{''} + \{q(x) - \lambda\}\, y = f(x),\ \ x \in (0,1) \tag{1.15}
$$

denkleminin çözümü

$$
y\left(x,\lambda\right) = \int_0^1 G(x,t,\lambda) f(t) dt \tag{1.16}
$$

eşitliği ile verilebilir. Burada $G(x,t,\lambda)$,Green fonksiyonudur ve

$$
G(x,t,\lambda) = \frac{1}{\Delta\left(\lambda\right)} \begin{cases} u(x,\lambda)\upsilon\left(t,\lambda\right), x \leq t \\ u(t,\lambda)\upsilon\left(x,\lambda\right), t \leq x \end{cases}
$$

şeklindedir. ile tanımlanan operatöre L nin resolvent operatörü adı verilir ve bu operatör L nin özdeğerleri dışında tanımlıdır.

Tanım 1.1.36: $\varphi\left(x,\lambda\right)$ ve $\psi\left(x,\lambda\right)$ fonksiyonları

$$
\ell\left[y(x)\right] := -y^{''}(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), x \in [a,b]
$$

denkleminin herhangi iki çözümü olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
W\left[\varphi,\psi\right] \quad : &= \begin{vmatrix} \varphi\left(x,\lambda\right) & \psi\left(x,\lambda\right) \\ \varphi^{'}\left(x,\lambda\right) & \psi^{'}\left(x,\lambda\right) \end{vmatrix} \\
&= \varphi\left(x,\lambda\right)\psi^{'}\left(x,\lambda\right) - \varphi^{'}\left(x,\lambda\right)\psi\left(x,\lambda\right)
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

eşitliği ile tanımlanan $W[\varphi,\psi]$ fonksiyonuna $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının Wronksiyan determinantı adı verilir.Herhangi iki çözümün lineer bağımlı olması için bu determinantın sıfıra özdeş olması gerekli ve yeterli koşuldur.

Lemma 1.1.37: $W[\varphi,\psi]$ fonksiyonu $[0,\pi]\setminus\{d\}$ kümesinde x'e bağlı değil,sadece λ parametresine bağlıdır.

İspat: (1.5) eşitliğinin her iki yanı $[0.d)$ ve $(d,\pi]$ aralıklarında x'e göre türevlenirse ;

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}W[\varphi,\psi] &= \frac{d}{dx}\left[\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda)\right]\\ &= \varphi'(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)+\varphi(x,\lambda)\psi''(x,\lambda)\\ &\quad -\varphi''(x,\lambda)\psi(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)\\ &= \varphi(x,\lambda)\psi''(x,\lambda)-\varphi''(x,\lambda)\psi(x,\lambda)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\frac{d}{dx}W[\varphi,\psi]=\varphi(x,\lambda)(q(x)-\lambda)\psi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)(q(x)-\lambda)\psi(x,\lambda)=0$$

olduğu sonucuna varılır.

2. PROBLEMİN TARİHSEL GELİŞİMİ

Diferansiyel operatörlerin spektral teorisi başta matematik olmak üzere fizik ve mekaniğin farklı alanlarında pek çok yerde kullanılmaktadır. Lineer operatörlerin spektral teorisi esasen lineer cebire dayanmakla birlikte aynı zamanda titreşim teorisinin de problemleridir. Lineer cebir ve titreşim teorisi problemleri arasındaki benzerliklerin fark edilmesi çok eski tarihlere dayanır. İntegral denklemler teorisinde, bu benzerliklerden ilk olarak faydalanan D. Hilbert olmuştur. Bu çalışmaların sonucunda önce l_2 daha sonra da genel Hilbert uzayı meydana gelmiştir.

Öz eşlenik operatörler teorisi; tanımlanan l_2 ve H Hilbert uzaylarında gelişmeye başlamıştır. Özellikle bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, normalleştirici sayılar gibi spektral veriler tanımlanmış ve bunlar için asimptotik formüller elde edilmiştir.

Diferansiyel operatörler, regüler ve singüler olmak üzere iki sınıfa ayrılmıştır. Sonlu tanım bölgesine sahip ve katsayıları sürekli fonksiyonlar olan diferansiyel operatörlere regüler; tanım bölgesi sonsuz veya katsayıları (birkaçı veya tamamı) toplanabilir olmayan diferansiyel operatörlere singülerdir denir.

İkinci mertebeden regüler operatörler teorisi günümüzde Sturm Liouville teorisi olarak bilinir. Sonlu aralıkta regüler sınır şartları sağlanacak şekilde adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı G. D. Birkoff tarafından XIX. yüzyılın sonlarında incelenmiştir. Ardından; F. Rietsz, J. Neumann, K. O. Friedrichs başta olmak üzere matematikçiler tarafından öz eşlenik ve simetrik operatörlerin genel spektral teorisi oluşturulmuş, simetrik operatörlerin bütün öz eşlenik genişlemelerinin elde edilmesi Neumann tarafından yapılmıştır.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar, 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır.Farklı singüler durumlarda diferansiyel operatörlerin spektral teorisi, özdeğer ve özfonksiyonların asimptotiği, özfonksiyonların tamlığı ise R. Courant, T. Carleman, M. S. Birman, M. Z. Salamyak, V. P. Maslov, M. V. Keldish tarafından geliştirilmiştir.

Diferansiyel operatörlerin spektral teorisi düz ve ters spektral problemler olmak üzere ikiye ayrılır.

Düz spektral problemler; verilen operatörlerin özfonksiyonlarının ve spektrumlarının aranması; ters spektral problemler ise verilen bazı verilere göre spektral karakteristikleri bu diziler olan operatörün kurulması ile ilgilenmektedir. Bu konudaki bazı çalışmalarda verilen spektral karakteristiklerin operatörü tek şekilde belirlediği, ters problemin çözümü için verilen teklik teoremlerinde gösterilmiş; bazılarında ise verilen spektral karakteristiklere göre operatörün nasıl kurulacağı araştırılmıştır.

Ters problemler teorisi; operatörlerin spektral analizi ve fonksiyonel analizin yanı sıra fizik, mekanik, jeofizik, elektronik ve metalurji gibi farklı bilim dallarında önemli bir yere sahiptir. Homojen olmayan telin, onun öz titreşimlerine göre yoğunluğunun hesaplanması, kuantum fiziğinde saçılma verilerine göre alan potansiyellerinin bulunması, jeofizikte yeraltı madenlerinin ve yeraltındaki elementlerin dağılım karakteristiklerine göre belirlenmesi problemlerinin herbiri, spektral analizin ters problemlerine birer örnek teşkil eder.

Literatürde, ikinci mertebeden

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=\lambda w(x)y \tag{2.1}$$

diferansiyel denklemine Sturm-Liouville denklemi; bu denklem ve farklı bir takım sınır koşulları tarafından üretilen operatörlere Sturm-Liouville operatörleri; bu operatörler için konulan spektral problemlere ise Sturm-Liouville problemleri denir. Sturm-Liouville problemleri birçok somut uygulama alanına sahiptir.

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+V(x)u(x,t)=0 \tag{$\star$}$$

şeklindeki Schrödinger dalga denklemi bu uygulama alanına bir örnektir. Burada $u(x,t)$ parçacığın dalga fonksiyonu, $V(x)$ potansiyel alan, m parçacığın kütlesi ve $\hbar$ Planck sabitidir. E, u'nun konumuna karşılık gelen enerji seviyesi olmak üzere yukarıdaki denklemde

$$u(x,t)=e^{it\sqrt{E}}y(x)$$

dönüşümü yapılırsa,

$$-y''+\frac{2m}{\hbar}V(x)y=\frac{2m}{\hbar}Ey \tag{$\star\star$}$$

Sturm-Liouville tipinde denklem elde edilir.

Sturm-Liouville problemlerine bir başka örnek olarak telin titreşimi denklemi verilebilir. $p(x)$ telin x noktasındaki gerilimini; $w(x)$ yoğunluğunu; $q(x)$ ise geri çağırıcı kuvvet katsayısını belirtmek üzere bu denklem aşağıdaki şekildedir:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right) - q(x)u(x,t) = w(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Bu denklemin çözümü,

$$u(x,t) = y(x)\sin\sqrt{\lambda}t$$

şeklinde aranırsa, yeni aranan $y(x)$ fonksiyonunun (2.1) Sturm-Liouville denklemini sağlayacağı kolayca görülür.

Sturm-Liouville operatörlerinin spektral teorisine ait ilk sonuçlar Bernoulli, D' Alambert, Euler, Liouville ve Sturm tarafından verilmiştir. 1830' lu yıllarda Sturm ve Liouville tarafından, bazı belirli koşullar altında (2.1) denklemini ve belli sınır koşullarını sağlayan sıfırdan farklı $y(x)$ çözümlerinin varlığına olanak sağlayan λ özdeğerlerinin ayrık bir küme oluşturduğu ispatlanmıştır.

Diferansiyel operatörler için ters spektral problemler teorisinin başlangıcı sayılan ilk çalışma V. A. Ambartsumyan' a aittir. 1929 yılında Ambartsumyan, Sturm-Liouville problemleri için ters problemlerle ilgili aşağıdaki teoremi ispatlamıştır:

Teorem 2.1(Ambartsumyan, 1929): $q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında gerçel değerli sürekli bir fonksiyon olmak üzere $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ sayıları

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}\, y = 0 \tag{2.2}$$

$$y'(0) = y'(\pi) = 0 \tag{2.3}$$

probleminin özdeğerleri olsun. Eğer $\lambda_n = n^2$ $(n = 0, 1, ...)$ ise $q(x) \equiv 0$ dır.

V. A. Ambartsumyan' ın bu çalışmasından sonra ters problemler teorisinde çeşitli problemler ortaya çıkmıştır. V. A. Ambartsumyan' ın bu sonucu özdeğerlerin $q(x)$ fonksiyonunu tek şekilde belirleyebileceğini akla getirse de bunun genel durumda doğru olmadığı G. Borg tarafından 1945 yılında ispatlanmıştır. Dolayısıyla aslında V. A. Ambartsumyan' ın bu sonucu istisnai bir durum olarak değerlendirilmektedir. Borg, bu çalışmasında $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerinin verilen operatörün farklı spektrumları olduğunu kabul ederek, operatörü bu diziler yardımıyla belirlemektedir. Bu sonuç aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir:

Teorem 2.2(Borg, 1945): h, h_1 ve H sonlu gerçel sayılar olmak üzere, $\lambda_0, \lambda_1, \cdots, \lambda_n, \cdots$ ler (2.2) diferansiyel denklemi ve

$$y'(0) - hy(0) = 0 \tag{2.4}$$

$$y'(\pi) + Hy(\pi) = 0 \tag{2.5}$$

sınır koşulları ile verilen problemin; $\mu_0, \mu_1, \cdots, \mu_n, \cdots$ ler ise (2.2) denklemi, (2.5) ve

$$y'(0) - h_1 y(0) = 0 \qquad (h \neq h_1) \tag{2.6}$$

sınır koşullarıyla verilen problemin özdeğerleri olsun. O halde $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizileri $q(x)$ fonksiyonu ile h, h_1 ve H sayılarını tek olarak belirler.

Bu çalışmalardan sonra $q(x)$ potansiyel fonksiyonu için $q(\pi - x) = q(x)$ simetriklik koşulu sağlandığında bir spektrumun Sturm-Liouville operatörünü belirlediği N. Levinson (1949) tarafından ispatlanmıştır. Bununla birlikte N. Levinson tarafından, negatif özdeğerlerin mevcut olmadığı durumlarda saçılma fazının potansiyeli tek olarak belirlediği de gösterilmiştir.

Sturm-Liouville denkleminin incelenmesi sürecinde kullanılan metotlardan biri de dönüşüm operatörü kavramı olmuştur. Dönüşüm operatörü kavramı, operatörlerin genelleştirilmiş ötelemesi teorisinde J. Delsarte (1938), J. Delsarte, J. Lions (1957) ve B. M. Levitan (1964) tarafından verilmiştir. Sturm-Liouville denklemleri için dönüşüm operatörünün yapısı ise ilk olarak A. V. Povzner (1948) tarafından incelenmiştir.

II. mertebeden lineer diferansiyel operatörler için ters problemler teorisinde, bir sonraki en önemli aşamalardan birisi V.A. Marchenko tarafından kaydedilmiştir. V.A. Marchenko, 1950 yılında ters problemlerin çözümü için Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonundan yararlanmıştır.

$\varphi(x, \lambda)$ fonksiyonu (2.2) diferansiyel denkleminin

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \qquad \varphi'(0, \lambda) = h \tag{2.7}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü, $\varphi(x, \lambda_n) = \varphi_n(x)$ fonksiyonları ise bu operatörün özfonksiyonları olsun. Bu durumda

$$\alpha_n = \int_0^{\pi} \varphi^2(x, \lambda_n)dx \tag{2.8}$$

sayıları verilen operatörün normalleştirici sayıları,

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n < \lambda} \frac{1}{\alpha_n} \tag{2.9}$$

fonksiyonu ise bu operatörün spektral fonksiyonu olmak üzere V.A. Marchenko tarafından, G. Borg' un ispatladığı teoremin benzeri; $\rho(\lambda)$ spektral fonksiyonu yardımıyla ispatlanmıştır. Bununla birlikte bu çalışmada, Sturm-Liouville tipinde bir diferansiyel operatörün spektral fonksiyonunun $\rho(\lambda)$ olması için gerek ve yeter koşul verilmiştir. V. A. Marchenko' nun bu çalışmaları ile aynı zamanlarda M.G. Krein(1951, 1954) tarafından, Sturm-Liouville tipindeki diferansiyel operatörü $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirleyebilmek için çalışmalar yapılmıştır.

1951 yılında I. M. Gelfand ve B. M. Levitan tarafından, $\rho(\lambda)$ monoton fonksiyonunun Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyonu olması için gerekli ve yeterli şartlar verilmiştir.

Ayrıca bu çalışmada, klasik Sturm-Liouville operatörünün $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ dizilerine göre belirlenmesi için, λ_n özdeğerlerinin ve α_n normalleştirici sayılarının sağlaması gereken asimptotik eşitlikler gerekli ve yeterli koşul olarak verilmiştir.

Bu çalışmalarda iki spektruma göre ters problemin tam çözümü verilmemiştir. Fakat regüler Sturm-Liouville operatörünün iki spektruma göre belirlenmesi problemi M.G. Gasymov ve B. M. Levitan' ın (1964) çalışmasında verilmiştir.

Diğer taraftan aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip Sturm-Liouville problemleri ile ilgili ilk çalışma H. Hald'a aittir (1984). Bu çalışmada Hald tarafından, klasik sınır koşulları altında düz ve ters spektral problemler ele alınmış ve operatörün bir özdeğer dizisinin ve aralığın ilk yarısında $q(x)$ fonksiyonunun bilinmesi halinde operatörün tek olarak belirlenebileceği gösterilmiştir.

C. Willis' in (1985) çalışmasında ise klasik sınır koşullarına sahip, verilen aralıkta iki noktada süreksizliğe sahip Sturm-Liouville operatörü için ters problem incelenmiştir. V. A. Yurko (1998), R. Kh. Amirov, V. A. Yurko (2001) çalışmaları aralığın iç noktasında süreksizliğe sahip operatörler için düz ve ters problemleri içermektedir.

R. Kh. Amirov' un (2006) çalışmasında ise verilen Sturm-Liouville operatörünün belli başlangıç ve süreksizlik koşullarını sağlayan çözümlerinin integral gösterimleri elde edilmiştir. Buna ek olarak bu çalışmada operatörün spektral özellikleri ile bu spektral özelliklere göre ters problemin çözümü için teklik teoremleri ispatlanmıştır.

R. Kh. Amirov, N. Topsakal (2008), R. Kh. Amirov, N. Topsakal, Y. Güldü (2010), Q. Yang, W. Wang (2011) çalışmalarında da verilen aralıkta süreksizliğe sahip operatörler için düz ve ters problemler ele alınmıştır.

Diğer taraftan, spektral parametreye bağlı sınır koşulları ise ilk olarak S. D. Poisson (1820) ve ardından D. S. Cohen (1966) tarafından incelenmiştir. M. A. Naimark tarafından ise, "Linear Differential Operators"(1968) kitabında sınır koşullarının parametreye bağlı olduğu özdeğer problemlerinden bahsedilmiştir. Bu tip problemler (2.4) ve (2.5) sınır koşullarının birinin veya her ikisinin katsayılarının λ parametresine bağlanmasıyla elde edilir. Örneğin; $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere, $y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$ koşulu

$$a(\lambda)y(\pi) + b(\lambda)y'(\pi) = 0 \tag{2.10}$$

şeklinde yazılırsa parametreye bağlı bir sınır koşulu elde edilir. Eğer burada $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ fonksiyonları λ' nın lineer (doğrusal) fonksiyonları ise sınır koşulu parametreye lineer şekilde bağlıdır denir.

Sınır koşulları parametre içeren özdeğer problemleri sırasıyla J. Walter (1973), A. Schneider (1974) tarafından incelenmiştir. Diğer taraftan Sturm-Liouville operatörü için (2.10) tipinde sınır koşulu ilk olarak C. T. Fulton (1977, 1980) tarafından incelenmiştir. Fulton' un bu çalışmasında, probleme karşılık gelen operatör tanımlanarak, bu operatör yardımıyla, problemin özdeğerlerinin reel ve cebirsel olarak basit olması gibi bazı önemli özellikler elde edilmiştir. Ayrıca sınır koşulları lineer şekilde parametre içeren düz problem 1994 yılında Oktay Mukhtarov tarafından incelenmiştir. O. Sh. Mukhtarov, M. Kadakal, N. Altınışık (2003), N. Altınışık, M. Kadakal, O. Sh. Mukhtarov (2004), Z. Akdoğan, M. Demirci, O. Sh. Mukhtarov (2005) çalışmalarında, sınır ve süreksizlik koşulları lineer şekilde parametre içeren

Sturm-Liouville operatörü için düz problem incelenmiştir. N. J. Guliyev (2005) çalışmasında ise bir sınır koşulu parametreye lineer şekilde bağlı ters Sturm-Liouville problemi için, Gelfand-Levitan-Marchenko tipinde esas denklem elde edilip, bu problemin tam çözümü verilmiştir. Bununla birlikte, R. Kh. Amirov, B. Keskin ve A. S. Özkan (2009), R. Kh. Amirov, N. Topsakal, Y. Güldü (2011), B. Keskin, A. S. Özkan, N. Yalçın (2011), A. S. Özkan, B. Keskin (2012) ve benzeri bir takım çalışma, lineer koşullarla ilgili düz ve ters spektral problemleri içermektedir. Ayrıca bu çalışmaların bazılarında parametreye bağlı sınır koşullarının yanısıra aralıkta süreksizlik koşulları da bulunmaktadır.

Son zamanlarda ise daha çok $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ fonksiyonlarının λ' ya tam fonksiyon veya polinom şeklinde daha genel olarak bağlı olduğu durumlar araştırılmaktadır. $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$' nın keyfi birer polinom olduğu durum ilk olarak E. M. Russakovskii (1975) tarafından incelenmiştir. Bu çalışmada problemin teorik operatör ifadesi ve özdeğerlerinin önemli özellikleri araştırılmıştır. Bu tür operatörler için düz problemler yaygın olarak çalışılmasına rağmen ters problemler son zamanlarda dikkat çekmeye başlamıştır. $a(\lambda)$ ve $b(\lambda)$ fonksiyonlarının çeşitli durumlarına göre düz veya ters spektral problemler; P. Binding, P. J. Browne, K. Seddighi (1993), Zh. Ben Amara, A. A. Shkalikov (1999), N. Yu. Kapustin (1999), P. Binding, P. J. Browne, B. A. Watson (2000), N. B. Kerimov, V. S. Mirzoev (2003), P. Binding, P. J. Browne, B. A. Watson (2004) başta olmak üzere birçok matematikçi tarafından incelenmiştir. P. A. Binding, P, J. Browne ve B. A. Watson (2008) çalışmasında,

$$\begin{aligned}
&-y'' + q(x)y = \lambda y \\
&y(0)\cos\alpha = y^{'}(0)\sin\alpha,\ \ \alpha \in [0,\pi) \\
&\frac{y^{'}}{y}(1) = a\lambda + b - \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\lambda - c_k}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

problemi ele alınmış ve bu problem için özdeğerlerin varlığı , asimptotiği ile özfonksiyonların salınımı ve bu tip problemler arasındaki dönüşümler incelenmiştir.

Chernozhukova ve Freiling (2009) tarafından (2.11) problemi

$$\begin{aligned} &-y'' + q(x)y = \lambda y \\ &a(\lambda)y(0) + b(\lambda)y'(0) = 0 \\ &c(\lambda)y(\pi) + d(\lambda)y'(\pi) = 0 \end{aligned} \tag{2.11'}$$

şeklinde genelleştirilmiştir.

G. Freiling, V. A. Yurko (2010) çalışmasında, (2.11') tipindeki sınır koşullarına sahip Sturm-Liouville operatörü için düz ve ters problemler incelenmiştir.

A. S. Özkan (2012) çalışmasında ise (2.11) tipinde sınır koşullarına ve sonlu aralıkta bir noktada süreksizliğe sahip Sturm-Liouville operatörü için düz ve ters problemler araştırılmıştır.

A. S. Özkan (2015) çalışmasında sınır koşullarında Herglotz-Nevanlinna tipinde fonksiyonlar içeren Sturm Lioville problemi ele alınmıştır.

Y. Güldü, A. S. Özkan (2017) çalışmasında sınır koşulu Herglotz-Nevanlinna tipinde fonksiyon içeren Dirac operatörü için ters problem incelenmiştir.

3. PROBLEMİN KONUMU VE SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Aşağıda verilen Sturm-Liouville diferansiyel denklemi ile sınır ve süreksizlik koşulları tarafından üretilen L sınır değer problemi ele alınsın:

$$\ell\left[y(x)\right] := -y^{''}(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),\ x \in [a,b] \tag{3.1}$$

$$U\left(y\right) := y^{'}(a) + f_1(\lambda)y(a) = 0 \tag{3.2}$$

$$V\left(y\right) := y^{'}(b) + f_2(\lambda)y(b) = 0 \tag{3.3}$$

$$\begin{cases} y(\xi_i+0) = \alpha_i y(\xi_i-0) \\ y^{'}(\xi_i+0) = \alpha_i^{-1} y^{'}(\xi_i-0) + h_i\left(\lambda\right) y(\xi_i-0) \end{cases} \left(i = \overline{1,n}\right) \tag{3.4}$$

Burada $q(x)$ reel değerli $L_2(a,b)$ sınıfına ait fonksiyon, λ spektral parametre,

$a = \xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < ... < \xi_n < \xi_{n+1} = b,$

$$f_i\left(\lambda\right) = a_i\lambda + b_i - \sum_{k=1}^{N_i} \frac{f_{ik}}{\lambda - g_{ik}}\ \ (i = 1,2) \tag{3.5}$$

$$h_i\left(\lambda\right) = m_i\lambda + r_i - \sum_{k=1}^{L_i} \frac{c_{ik}}{\lambda - d_{ik}}\ \ \left(i = \overline{1,n}\right) \tag{3.6}$$

olup $a_i,\ b_i,\ f_{ik},\ g_{ik}, m_i, n_i, c_{ik}$ ve d_{ik} reel sayılar, $a_1 > 0,\ f_{1k} > 0,\ a_2 < 0,\ f_{2k} < 0,$ $\alpha_i > 0,\ m_i < 0,\ c_{ik} < 0$ ve $g_{i1} < g_{i2} < ... < g_{iNi}$ $\ i = 1,2,\ d_{i1} < d_{i2} < ... < d_{iLi}$ $i = \overline{1,n}$ dir.

Burada $f_i(\lambda) = \infty$ olursa, (3.2) ve (3.3) koşulları $y(a) = y(b) = 0$ biçiminde Dirichlet koşullarına dönüşür. Bunun dışında, (3.4) koşulunda, $h_i\left(\lambda\right) = \infty$ olursa, (3.4) süreksizlik koşulları ($i = \overline{1,n}$ sırasına göre) $y\left(\xi_i^-\right) = y\left(\xi_i^+\right) = 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ ve $i \neq 1,\ i \neq 2,\ \ldots,\ i \neq n$ sırasına göre,

$y(\xi_i+0) = \alpha_i y(\xi_i-0)$, $y^{'}(\xi_i+0) = \alpha_i^{-1} y'(\xi_i-0) + h_i\left(\lambda\right) y(\xi_i-0)$

koşullarına dönüşür.

$H := L_2(a,b) \oplus \mathbb{C}^{N_1+1} \oplus \mathbb{C}^{N_2+1} \oplus \mathbb{C}^{L_1+1} \oplus\ \mathbb{C}^{L_2+1} \oplus ... \oplus \mathbb{C}^{L_n+1}$ uzayını ele alalım

ve bu uzaya ait Y elemanı

$Y = (y(x), u_1, u_2, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ biçiminde olup

$u_i = \left(Y_1^{(i)}, Y_2^{(i)}, \ldots, Y_{N_i}^{(i)}, Y_{Ni+1}^{(i)}\right), i = 1, 2$

$w_i = \left(R_1^{(i)}, R_2^{(i)}, \ldots, R_{L_i}^{(i)}, R_{L_i+1}^{(i)}\right), i = \overline{1, n}$ dir.

Burada H uzayı; $Y = (y(x), u_1, u_2, w_1, w_2, \ldots, w_n)$ ve $Z = (z(x), u_1', u_2', w_1', w_2', \ldots, w_n')$ bu uzayın elemanları olmak üzere,

üzerinde

$$\begin{aligned} < \ Y, Z >:= & \int_a^b y\overline{z}dx \\ & + \frac{Y_{N_1+1}^{(1)} \overline{\left(Y_{N_1+1}^{(1)}\right)'}}{a_1} - \frac{Y_{N_2+1}^{(2)} \overline{\left(Y_{N_2+1}^{(2)}\right)'}}{a_2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{m_i} R_{L_{i+1}}^{(i)} \overline{\left(R_{L_{i+1}}^{(i)}\right)'} \\ & + \sum_{k=1}^{N_1} Y_k^{(1)} \overline{\left(Y_k^{(1)}\right)'} \frac{1}{f_{1k}} + \sum_{k=1}^{N_2} Y_k^{(2)} \overline{\left(Y_k^{(2)}\right)'} (-\frac{1}{f_{2k}}) \\ & - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{L_i} R_k^{(i)} \overline{\left(R_k^{(i)}\right)'} \frac{1}{c_{ik}} \alpha_i \right) \end{aligned} \tag{3.7}$$

biçiminde tanımlı bir Hilbert uzayıdır.

Bu H Hilbert uzayı üzerinde tanım kümesi

$D(T) = \{Y \in H : y(x)$ ve $y'(x) \in AC\,(a, b)\,,$

$ly \in L_2\,(a, b)\,, \; y(\xi_i^+) = \alpha_i y(\xi_i^-)$

$Y_{N_1+1}^{(1)} := -a_1 y(a), \; Y_{N_2+1}^{(2)} := -a_2 y(b),$

$R_{L_i+1}^{(i)} := -m_i y(\xi_i^-), i = \overline{1, n} \; \}$

olan T operatörü tanımlansın öyle ki

$$TY := (ly, Tu_1, Tu_2, Tw_1, Tw_2, \ldots, Tw_n)$$

dir. Burada, $Tu_1 = TY_i^{(1)} = \begin{cases} g_{1i} Y_i^{(1)} - f_{1i} y(a), \; i = \overline{1, N_1} \\ y^{'}(a) + b_1 y(a) + \sum\limits_{k=1}^{N_1} Y_k^{(1)}, \; i = N_1 + 1 \end{cases}$

$$Tu_2 = TY_i^{(2)} = \begin{cases} g_{2i} Y_i^{(2)} - f_{2i} y(b), \; i = \overline{1, N_2} \\ y^{'}(b) + b_2 y(b) + \sum\limits_{k=1}^{N_2} Y_k^{(2)}, \; i = N_2 + 1 \end{cases}$$

$$Tw_j = TR_i^{(j)} = \begin{cases} d_{ji}R_i^{(j)} - c_{ji}y(\xi_j^-),\ j=\overline{1,n},\ i=\overline{1,L_j} \\ -y'(\xi_j^+) + \alpha_j^{-1}y'\left(\xi_j^-\right) + n_j y\left(\xi_j^-\right) + \sum\limits_{k=1}^{L_j} R_k^{(j)},\ i = L_j+1 \end{cases}$$

şeklindedir. Buna göre $TY = \lambda Y$ eşitliği $D(T) \subset H$ tanım kümesi altında (3.1)-(3.4) problemine karşılık gelmektedir.

Teorem 3.2: T operatörünün özdeğerleri ile (3.1)-(3.4) probleminin özdeğerleri çakışır.

İspat: $\lambda \neq g_{ik}$ $(i = 1,2$ ve $k = \{1,2,\ldots N_i\})$ ve $\lambda \neq d_{ik}$ $\left(i = \overline{1,n}\right.$ ve $\left.k = \{1,2,\ldots L_i\}\right)$, T operatörünün özdeğeri olsun ve

$$Y = (y(x), u_1, u_2, w_1, w_2, \ldots, w_n) \in H$$

λ ya karşılık gelen özvektör olsun. $Y \in D(T)$ olduğundan
$y(\xi_i + 0) - \alpha_i y(\xi_i - 0) = 0$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ sağlanır. Ayrıca $TY = \lambda Y$ eşitliği kullanılarak ilk olarak $\ell y(x) = \lambda y(x)$ sağlanır.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} Tu_1 = TY_i^{(1)} &= g_{1i}Y_i^{(1)} - f_{1i}y(a) = \lambda Y_i^{(1)},\ i = \overline{1,N_1} \\ TY_{N_1+1}^{(1)} &= y'(a) + b_1 y(a) + \sum_{k=1}^{N_1} Y_k^{(1)} = -a_1 y\,(a)\,\lambda \\ Tu_2 = TY_i^{(2)} &= g_{2i}Y_i^{(2)} - f_{2i}y(b) = \lambda Y_i^{(2)},\ i = \overline{1,N_2} \\ TY_{N_2+1}^{(2)} &= y'(b) + b_2 y(b) + \sum_{k=1}^{N_2} Y_k^{(2)} = -a_2 y\,(b)\,\lambda \\ Tw_j = TR_i^{(j)} &= d_{ji}R_i^{(j)} - c_{ji}y(\xi_j^-),\ j = \overline{1,n},\ i = \overline{1,L_j} \\ TR_{L_j+1} &= -y'(\xi_j^+) + \alpha_j^{-1}y'\left(\xi_j^-\right) + n_j y\left(\xi_j^-\right) + \sum_{k=1}^{L_j} R_k^{(j)} = -m_j y\left(\xi_j^-\right)\lambda \end{aligned}$$

olup, böylece L probleminin (3.2)-(3.3) sınır koşulları ve (3.4) süreksizlik koşullarının sağlandığı görülür.

Diğer taraftan, eğer $\lambda = g_{ik}$ $(i = 1,2$ ve $k = \{1,2,\ldots N_i\})$ T operatörünün bir özdeğeri ise, bu durumda, yukarıdaki eşitlikler ve T tanım kümesinden,

(3.1) denklemi, $y(a, g_{1k}) = 0$, $y(b, g_{2k}) = 0$ eşitlikleri ve (3.4) süreksizlik koşulları sağlanır.

Ayrıca, $\lambda = d_{ik}$ $\left(i = \overline{1,n}\right.$ ve $\left.k = \{1,2,\ldots L_i\}\right)$ T operatörünün bir özdeğeri olursa, bu durumda, yukarıdaki eşitlikler ve T tanım kümesinden, (3.1) denklemi, (3.2) , (3.3) koşulları ve $i=\overline{1,n}$ sırasına göre

$y\left(\xi_i^-\right)=y\left(\xi_i^+\right)=0\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ ve $i\neq 1,\ i\neq 2,\ \ldots,\ i\neq n$ sırasına göre

$y(\xi_i+0)=\alpha_i y(\xi_i-0)\ ,\ y'(\xi_i+0)=\alpha_i^{-1}y'(\xi_i-0)+h_i(\lambda)\,y(\xi_i-0)$

sağlanır.

O halde, λ, L probleminin de bir özdeğeri olur.

Tersine λ, L probleminin bir özdeğeri ve $y(x)$, λ'ya karşılık gelen özfonksiyon olsun.

Eğer $\lambda\neq g_{ik}\,(i=1,2$ ve $k=\{1,2,\ldots N_i\})$ ve $\lambda\neq d_{ik}\left(i=\overline{1,n}\right.$ ve $\left.k=\{1,2,\ldots L_i\}\right)$

ise, $Ly=\lambda y$ olacağından, λ, T operatörünün bir özdeğeri ve

$$
\begin{aligned}
Y=\Big(&y(x),\tfrac{f_{11}}{g_{11}-\lambda}y(a),\tfrac{f_{12}}{g_{12}-\lambda}y(a),\ldots,\tfrac{f_{1N_1}}{g_{1N_1}-\lambda}y(a),-a_1y\,(a)\\
&\tfrac{f_{21}}{g_{21}-\lambda}y(b),\tfrac{f_{22}}{g_{22}-\lambda}y(b),\ldots,\tfrac{f_{2N_2}}{g_{2N_2}-\lambda}y(b),-a_2y\,(b)\,,\\
&\tfrac{c_{11}}{d_{11}-\lambda}y(\xi_1^-),\tfrac{c_{12}}{d_{12}-\lambda}y(\xi_1^-),\ldots,\tfrac{c_{1L_1}}{d_{1L_1}-\lambda}y(\xi_1^-),-m_1y(\xi_1^-),\\
&\tfrac{c_{21}}{d_{21}-\lambda}y(\xi_2^-),\tfrac{c_{22}}{d_{22}-\lambda}y(\xi_2^-),\ldots,\tfrac{c_{2L_2}}{d_{2L_2}-\lambda}y(\xi_2^-),-m_2y(\xi_2^-),\\
&\vdots\\
&\tfrac{c_{n1}}{d_{n1}-\lambda}y(\xi_n^-),\tfrac{c_{n2}}{d_{n2}-\lambda}y(\xi_n^-),\ldots,\tfrac{c_{nL_n}}{d_{nL_n}-\lambda}y(\xi_n^-),-m_ny(\xi_n^-)\Big)
\end{aligned}
$$

λ' ya karşılık gelen özvektör olur.

Eğer $\lambda=g_{1k}\,(k=\{1,2,\ldots N_1\})$ olursa, bu durumda $y(a)=0$ olup

$Y=\left(y(x),Y_1^{(1)},Y_2^{(1)},\ldots,Y_{N_1}^{(1)},0,u_2,w_1,w_2,\ldots,w_n\right)$

$Y_i^{(1)}=\begin{cases}0, & i\neq k\\ -y'\,(a)\,, & i=k\end{cases}\,,i=1,2,\ldots,N_1$ vektörü, g_{1k}'ya karşılık gelen özvektördür.

Eğer $\lambda=g_{2k}\,(k=\{1,2,\ldots N_2\})$ olursa, bu durumda

$Y=\left(y(x),u_1,Y_1^{(2)},Y_2^{(2)},\ldots,Y_{N_2}^{(2)},0,w_1,w_2,\ldots,w_n\right)$

$Y_i^{(2)}=\begin{cases}0, & i\neq k\\ -y'\,(b)\,, & i=k\end{cases}\,,i=1,2,\ldots,N_2$ vektörü, g_{2k}'ya karşılık gelen özvektördür.

Eğer $\lambda=d_{1k}\,(k=\{1,2,\ldots L_1\})$ olursa, bu durumda

$Y=\left(y(x),u_1,u_2,R_1^{(1)},R_2^{(1)},\ldots,R_{L_1}^{(1)},0,w_1,w_2,\ldots,w_n\right),$

$R_i^{(1)} = \begin{cases} 0, \ i \neq k \\ y'\left(\xi_1^+\right) - \alpha_1^{-1} y'\left(\xi_1^-\right), i = k \end{cases}$, $i = 1, 2, \ldots, L_1$ vektörü, d_{1k}'ya karşılık gelen özvektördür.

Eğer $\lambda = d_{2k}\,(k = \{1, 2, \ldots L_2\})$ olursa, bu durumda

$Y = \left(y(x), u_1, u_2, w_1, R_1^{(2)}, R_2^{(2)}, \ldots, R_{L_2}^{(2)}, 0, w_3, \ldots, w_n\right)$,

$R_i^{(2)} = \begin{cases} 0, i \neq k \\ y'\left(\xi_2^+\right) - \alpha_2^{-1} y'\left(\xi_2^-\right), i = k \end{cases}$, $i = 1, 2, \ldots, L_2$ vektörü, d_{2k}'ya karşılık gelen özvektördür.

$\vdots$

Eğer $\lambda = d_{nk}(k = \{1, 2, \ldots L_n\})$ olursa, bu durumda

$Y = (y(x), u_1, u_2, w_1, w_2, w_3, ..., w_{n-1}, R_1^{(n)}, R_2^{(n)}, \ldots, R_{L_n}^{(n)}, 0)$

$R_i^{(n)} = \begin{cases} 0, i \neq k \\ y'\left(\xi_n^+\right) - \alpha_n^{-1} y'\left(\xi_n^-\right), i = k \end{cases}$, $i = 1, 2, \ldots, L_n$ vektörü d_{nk} ya karşılık gelen özvektördür.■

Şimdi (3.1) denkleminin belirli çözümleri araştırılsın. Öncelikle homojen sistemin genel çözümü bulunsun. $q(x) = 0$ durumunda

$y'' + \lambda y = 0$ olup

$y_h(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda} x + c_2 \sin \sqrt{\lambda} x$ biçiminde elde edilir.

Buna göre sabitlerin değişimi yönteminden,

$y_1(x) = c_1(x) \cos \sqrt{\lambda} x + c_2(x) \sin \sqrt{\lambda} x$ şeklindedir.

Dolayısıyla

$$c_1'(x) \cos \sqrt{\lambda} x + c_2'(x) \sin \sqrt{\lambda} x = 0 \tag{3.8}$$

$$-\sqrt{\lambda} c_1'(x) \sin \sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} c_2'(x) \cos \sqrt{\lambda} x = q(x) y \tag{3.9}$$

sistemi elde edilir.

(3.8) denklemi $\sin \sqrt{\lambda} x$ ile (3.9) denklemi $\cos \sqrt{\lambda} x$ ile çarpılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda} c_1'(x) \cos \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} c_2'(x) \sin \sqrt{\lambda} x \sin \sqrt{\lambda} x = 0 \\ -\sqrt{\lambda} c_1'(x) \sin \sqrt{\lambda} x \cos \sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} c_2'(x) \cos \sqrt{\lambda} x . \cos \sqrt{\lambda} x = q(x) y \cos \sqrt{\lambda} x \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2'(x) = \dfrac{q(x)y\cos\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \\ c_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\displaystyle\int_a^x y(t)q(t)\cos\sqrt{\lambda}tdt \end{cases}$$

(3.8) denklemi $\cos\sqrt{\lambda}x$,(3.9) denklemi $-\sin\sqrt{\lambda}x$ ile çarpılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}c_1'(x)\cos\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}c_2'(x)\sin\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}x = 0 \\ \sqrt{\lambda}c_1'(x)\sin\sqrt{\lambda}x\sin\sqrt{\lambda}x - \sqrt{\lambda}c_2'(x)\cos\sqrt{\lambda}x\sin\sqrt{\lambda}x = -q(x)y\sin\sqrt{\lambda}x \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1'(x) = \dfrac{-q(x)y\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} \\ c_1(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\displaystyle\int_a^x y(t)q(t)\sin\sqrt{\lambda}tdt \end{cases}$$

bulunur. Bunlar $y_1(x)$ çözümünde yerine yazılırsa

$$y_1(x,\lambda) = \mathbf{c}_1\cos\sqrt{\lambda}x + c_2\sin\sqrt{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_a^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)y(t,\lambda)dt$$

$$y_1'(x,\lambda) = -\sqrt{\lambda}c_1\sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}c_2\cos\sqrt{\lambda}x + \int_a^x \cos(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)y(t,\lambda)dt$$

integral denklemleri bulunur.

$f_i(\lambda) = \dfrac{a_i(\lambda)}{b_i(\lambda)}$, $i = 1,2$ biçiminde yazılır öyleki; ,

$a_i(\lambda) = (a_i\lambda + b_i)\prod\limits_{k=1}^{N_i}(\lambda - g_{ik}) - \sum\limits_{k=1}^{N_i}\prod\limits_{j=1(j\neq k)}^{N_i} f_{ik}(\lambda - g_{ij})$

$b_i(\lambda) = \prod\limits_{k=1}^{Ni}(\lambda - g_{ik})$ dır. Burada $a_2(\lambda)$ ile $b_2(\lambda)$ ortak sıfırlara sahip değildir.

Buna göre,

$\varphi_1(x,\lambda)$ ve $\psi_{n+1}(x,\lambda)$ fonksiyonları

$\varphi_1(a,\lambda) = -b_1(\lambda)$ ve $\varphi_1'(a,\lambda) = a_1(\lambda)$

$\psi_{n+1}(b,\lambda) = -b_2(\lambda)$ ve $\psi_{n+1}'(b,\lambda) = a_2(\lambda)$

başlangıç koşullarını ve (3.4) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

Teorem 3.3: (3.1) denkleminin $\varphi(x,\lambda)$ çözümü için aşağıdaki integral denklemleri geçerlidir:

$a \leq x < \xi_1$ için

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,\lambda) &= -b_1(\lambda)\cos(\sqrt{\lambda}(x-a)) + \frac{a_1(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-a)) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_a^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)\varphi(t,\lambda)dt\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_1^{'}(x,\lambda) &= b_1(\lambda)\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}(x-a)) + a_1(\lambda)\cos(\sqrt{\lambda}(x-a)) \\ &\quad + \int_a^x \cos(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)\varphi(t,\lambda)dt\end{aligned}$$

$\xi_1 < x < \xi_2$ için

$$\begin{aligned}\varphi_2(x,\lambda) &= \alpha_1\cos(\sqrt{\lambda}(x-\xi_1))\varphi_1(\xi_1,\lambda) + \alpha_1^{-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_1^{'}(\xi_1,\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_1)) \\ &\quad + \frac{h_1(\lambda)}{\lambda}\varphi_1(\xi_1,\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_1)) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{\xi_1}^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)\varphi(t,\lambda)dt\end{aligned}$$

$\xi_2 < x < \xi_3$ için

$$\begin{aligned}\varphi_3(x,\lambda) &= \alpha_2\varphi_2(\xi_2,\lambda)\cos(\sqrt{\lambda}(x-\xi_2)) + \alpha_2^{-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_2^{'}(\xi_2,\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_2)) \\ &\quad + h_2(\lambda)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_2(\xi_2,\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_2)) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{\xi_2}^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)\varphi(t,\lambda)dt\end{aligned}$$

biçiminde olup, buradan

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1}(x,\lambda) &= \alpha_i\varphi_i(\xi_i,\lambda)\cos(\sqrt{\lambda}(x-\xi_i)) + \alpha_i^{-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_i^{'}(\xi_i,\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_i)) \\ &\quad + h_i(\lambda)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_i(\xi_i,\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_i)) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{\xi_i}^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)\varphi(t,\lambda)dt \ \left(i=\overline{1,n}\right)\end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

İspat:

$a \leq x < \xi_1$ için yukarıda elde edilen integral denklemleri ve

$$\begin{cases} \varphi_1(a,\lambda) = -b_1(\lambda) \\ \varphi_1'(a,\lambda) = a_1(\lambda) \end{cases} \quad \text{başlangıç koşulları dikkate alınırsa}$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(x,\lambda) &= -b_1(\lambda)\cos(\sqrt{\lambda}(x-a)) + \frac{a_1(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-a)) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_a^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)\varphi(t,\lambda)dt \end{aligned}$$

denklemi elde edilir.

$\xi_1 < x < \xi_2$ için

$\varphi_2(x,\lambda) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{\xi_1}^{x} \sin(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)dt$

şeklinde integral denklemi aranır. Daha sonra

$\varphi_2(\xi_1^+,\lambda) = \alpha_1\varphi_1(\xi_1^-,\lambda)$

$\varphi_2'(\xi_1^+,\lambda) = \alpha_1^{-1}\varphi_1'(\xi_1^-,\lambda) + h_1(\lambda)\varphi_1(\xi_1^-,\lambda)$

süreksizlik koşulları dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} \varphi_2(x,\lambda) &= \alpha_1\cos(\sqrt{\lambda}(x-\xi_1))\varphi_1(\xi_1,\lambda) + \alpha_1^{-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_1'(\xi_1,\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_1)) \\ &\quad + \frac{h_1(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\varphi_1(\xi_1,\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_1)) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{\xi_1}^x \sin(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)\varphi(t,\lambda)dt \end{aligned}$$

integral denklemi elde edilir.

$\xi_2 < x < \xi_3$ için

$\varphi_3(x,\lambda) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{\xi_2}^{x} \sin(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)dt$

şeklinde integral denklemi aranır. Daha sonra

$\varphi_3(\xi_2^+,\lambda) = \alpha_2\varphi_2(\xi_2^-,\lambda)$

$\varphi_3^{'}(\xi_2^+,\lambda)=\alpha_2^{-1}\varphi_2^{'}(\xi_2^-,\lambda)+h_2(\lambda)\varphi_2(\xi_2^-,\lambda)$

süreksizlik koşulları dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}\varphi_3(x,\lambda) &= \alpha_2\varphi_2(\xi_2,\lambda)\cos(\sqrt{\lambda}(x-\xi_2))+\alpha_2^{-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_2^{'}(\xi_2,\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_2))\\ &+h_2(\lambda)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_2(\xi_2,\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_2))\\ &+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\xi_2}^{x}\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)\varphi(t,\lambda)dt\end{aligned}$$

integral denklemi elde edilir.

Bu şekilde devam edilirse,

$$\begin{aligned}\varphi_{i+1}(x,\lambda) &= \alpha_i\varphi_i(\xi_i,\lambda)\cos(\sqrt{\lambda}(x-\xi_i))+\alpha_i^{-1}\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_i^{'}(\xi_i,\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_i))\\ &+h_i(\lambda)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\varphi_i(\xi_i,\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_i))\\ &+\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_{\xi_i}^{x}\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))q(t)\varphi(t,\lambda)dt\ \left(i=\overline{1,n}\right)\end{aligned}$$

genel integral denklemi elde edilir.

Teorem 3.4: (3.1) denkleminin $\psi(x,\lambda)$ çözümü için aşağıdaki integral denklemleri geçerlidir:

$\xi_n < x \le b$ için,

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(x,\lambda) &= -b_2(\lambda)\cos(\sqrt{\lambda}(x-b))+\frac{a_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-b))\\ &-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\int\limits_{x}^{b}y(t)q(t)\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))dt)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}^{'}(x,\lambda) &= b_2(\lambda)\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}(x-b))+a_2(\lambda)\cos(\sqrt{\lambda}(x-b))\\ &-\int\limits_{x}^{b}y(t)q(t)\cos(\sqrt{\lambda}(x-t))dt\end{aligned}$$

$\xi_{n-1} < x < \xi_n$ için,

$$\begin{aligned}
\psi_n(x,\lambda) &= \alpha_n^{-1}\cos(\sqrt{\lambda}(x-\xi_n))\psi_{n+1}(\xi_n,\lambda) \\
&+\frac{\alpha_n}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_n))\psi_{n+1}^{'}(\xi_n,\lambda) \\
&-h_n(\lambda)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_n))\psi_{n+1}(\xi_n,\lambda) \\
&-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\int\limits_x^{\xi_n} y(t)q(t)\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))dt)
\end{aligned}$$

$\xi_{n-2} < x < \xi_{n-1}$ için,

$$\begin{aligned}
\psi_{n-1}(x,\lambda) &= \alpha_{n-1}^{-1}\cos(\sqrt{\lambda}(x-\xi_{n-1}))\psi_n(\xi_{n-1},\lambda) \\
&+\frac{\alpha_{n-1}}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_{n-1}))\psi_n^{'}(\xi_{n-1},\lambda) \\
&-\frac{h_{n-1}(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_{n-1}))\psi_n(\xi_{n-1},\lambda) \\
&-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_x^{\xi_{n-1}} y(t)q(t)\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))dt
\end{aligned}$$

biçiminde olup,buradan

$$\begin{aligned}
\psi_i(x,\lambda) &= \alpha_i^{-1}\cos(\sqrt{\lambda}(x-\xi_i))\psi_{i+1}(\xi_i,\lambda)+\frac{\alpha_i}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_i))\psi_{i+1}^{'}(\xi_i,\lambda) \\
&-\frac{h_i(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-\zeta_i))\psi_{i+1}(\xi_i,\lambda)-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_x^{\xi_i}\psi(t)q(t)\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))dt \ \ \left(i=\overline{n,1}\right)
\end{aligned}$$

yazılır.

İspat: Bir önceki teoremde $\varphi(x,\lambda)$ için alınan integral denklemleri $\psi(x,\lambda)$ için

$$\psi_{n+1}(x,\lambda)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\int\limits_x^b y(t)q(t)\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))dt)$$

olup

$\xi_n < x \leq b$ için

$\left\{\begin{array}{l}\psi_{n+1}(b,\lambda)=-b_2(\lambda) \\ \psi_{n+1}^{'}(b,\lambda)=a_2(\lambda)\end{array}\right.$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}\psi_{n+1}(x,\lambda) &= -b_2(\lambda)\cos(\sqrt{\lambda}(x-b))+\frac{a_2(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-b)) \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\int_x^b y(t)q(t)\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))dt)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi'_{n+1}(x,\lambda) &= b_2(\lambda)\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}(x-b))+a_2(\lambda)\cos(\sqrt{\lambda}(x-b)) \\ &\quad -\int_x^b y(t)q(t)\cos(\sqrt{\lambda}(x-t))dt\end{aligned}$$

integral denklemleri elde edilir.

$\xi_{n-1}<x<\xi_n$ için,

$$\psi_n(x,\lambda)=c_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\int_x^{\xi_n} y(t)q(t)\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))dt)$$

$$\psi'_n(x,\lambda)=-c_1\sin\sqrt{\lambda}x+c_2\cos\sqrt{\lambda}x-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\int_x^{\xi_n} y(t)q(t)\cos(\sqrt{\lambda}(x-t))dt)$$

şeklinde integral denklemleri aranır.Daha sonra

$$\begin{cases}\psi_{n+1}\left(\xi_n^+,\lambda\right)=\alpha_n\psi_n(\xi_n^-,\lambda) \\ \psi'_{n+1}\left(\xi_n^+,\lambda\right)=\alpha_n^{-1}\psi'_n(\xi_n^-,\lambda)+h_n(\lambda)\psi_n(\xi_n^-,\lambda)\end{cases}$$

süreksizlik koşulları dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}\psi_n(x,\lambda) &= \alpha_n^{-1}\cos(\sqrt{\lambda}(x-\xi_n))\psi_{n+1}(\xi_n,\lambda) \\ &\quad +\frac{\alpha_n}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_n))\psi'_{n+1}(\xi_n,\lambda) \\ &\quad -h_n(\lambda)\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_n))\psi_{n+1}(\xi_n,\lambda) \\ &\quad -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\int_x^{\xi_n} y(t)q(t)\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))dt)\end{aligned}$$

integral denklemi elde edilir.

$\xi_{n-2}<x<\xi_{n-1}$ için

$$\psi_{n-1}(x,\lambda)=\mathbf{c}_1\cos\sqrt{\lambda}x+c_2\sin\sqrt{\lambda}x-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}(\int_x^{\xi_{n-1}} y(t)q(t)\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))dt)$$

$$\psi_{n-1}^{'}(x,\lambda) = -\mathbf{c}_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x - \int\limits_x^{\xi_{n-1}} y(t)q(t)\cos(\sqrt{\lambda}(x-t))dt$$

şeklinde integral denklemleri aranır.Daha sonra

$$\begin{cases} \psi_n\left(\xi_{n-1}^{+},\lambda\right) = \alpha_{n-1}\psi_{n-1}(\xi_{n-1}^{-},\lambda) \\ \psi_n^{'}\left(\xi_{n-1}^{+},\lambda\right) = \alpha_{n-1}^{-1}\psi_{n-1}^{'}(\xi_{n-1}^{-},\lambda) + h_{n-1}(\lambda)\psi_{n-1}(\xi_{n-1}^{-},\lambda) \end{cases}$$

süreksizlik koşulları dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} \psi_{n-1}(x,\lambda) &= \alpha_{n-1}^{-1}\cos(\sqrt{\lambda}(x-\xi_{n-1}))\psi_n(\xi_{n-1},\lambda) \\ &+\frac{\alpha_{n-1}}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_{n-1}))\psi_n^{'}(\xi_{n-1},\lambda) \\ &-\frac{h_n(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_{n-1}))\psi_n(\xi_{n-1},\lambda) \\ &-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_x^{\xi_{n-1}} y(t)q(t)\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))dt \end{aligned}$$

integral denklemi elde edilir.

Benzer şekilde devam edilirse,

$$\begin{aligned} \psi_i(x,\lambda) &= \alpha_i^{-1}\cos(\sqrt{\lambda}(x-\xi_i))\psi_{i+1}(\xi_i,\lambda) + \frac{\alpha_i}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-\xi_i))\psi_{i+1}^{'}(\xi_i,\lambda) \\ &-\frac{h_i(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}(x-\zeta_i))\psi_{i+1}(\xi_i,\lambda) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int\limits_x^{\xi_i}\psi(t)q(t)\sin(\sqrt{\lambda}(x-t))dt \ \left(i=\overline{n,1}\right) \end{aligned}$$

genellemesi elde edilir.

Teorem 3.5: $|\lambda| \to \infty$ iken $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik ifadeler geçerlidir:

$$\varphi_1(x,\lambda) = a_1\lambda^{N_1+\frac{1}{2}}\sin\sqrt{\lambda}(x-a) + o(|\lambda|^{N_1+\frac{1}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}(x-a)\right|})$$

$$\varphi_2(x,\lambda) = a_1m_1\lambda^{N_1+L_1+1}\sin\sqrt{\lambda}(\xi_1-a)\sin\sqrt{\lambda}(x-\xi_1)+o(|\lambda|^{N_1+L_1+1}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}(x-a)\right|})$$

$$\varphi_3(x,\lambda) = \begin{cases} a_1m_1m_2\lambda^{N_1+L_1+L_2+\frac{3}{2}}\sin\sqrt{\lambda}(\xi_1-a)\sin\sqrt{\lambda}(\xi_2-\xi_1)\sin\sqrt{\lambda}(x-\xi_2) \\ +o(|\lambda|^{N_1+L_1+L_2+\frac{3}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}(x-a)\right|}) \end{cases}$$

.

.

.

$$\varphi_{n+1}(x,\lambda)=\begin{cases} a_1\left(\prod_{k=1}^{n} m_k\right)\lambda^{N_1+L_1+L_2+...+\frac{n+1}{2}}\sin\sqrt{\lambda}(\xi_1-a)\sin\sqrt{\lambda}(\xi_2-\xi_1) \\ \sin\sqrt{\lambda}(\xi_3-\xi_2)...\sin\sqrt{\lambda}(x-\xi_n)+o(|\lambda|^{N_1+L_1+L_2+...+\frac{n+1}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}(x-a)\right|}) \end{cases}$$

biçimindedir.

Teorem 3.6: $|\lambda|\to\infty$ iken $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki asimptotik ifadeler geçerlidir:

$$\psi_1(x,\lambda)=a_2\lambda^{N_2+\frac{1}{2}}\sin\sqrt{\lambda}(x-b)+o(|\lambda|^{N_2+\frac{1}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}(x-b)\right|})$$

$$\psi_2(x,\lambda)=-m_n a_2\lambda^{L_n+N_2+1}\sin\sqrt{\lambda}(\xi_n-b)\sin\sqrt{\lambda}(x-\xi_n)+o(|\lambda|^{Ln+N_2+1}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}(x-b)\right|})$$

$$\psi_3(x,\lambda)=\begin{cases} m_n m_{n-1}a_2\lambda^{L_n+L_{n-1}+N_2+\frac{3}{2}}\sin\sqrt{\lambda}(\xi_n-b)\sin\sqrt{\lambda}(\xi_{n-1}-\xi_n)\sin\sqrt{\lambda}(x-\xi_{n-1}) \\ +o(|\lambda|^{L_n+L_{n-1}+N_2+\frac{3}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}(x-b)\right|}) \end{cases}$$

.

.

.

$$\psi_{n+1}(x,\lambda)=\begin{cases} (-1)^n m_n m_{n-1}m_{n-2}...m_1 a_2\lambda^{N_2+L_n+L_{n-1}+....+L_1+\frac{n+1}{2}}\sin\sqrt{\lambda}(\xi_n-b) \\ \sin\sqrt{\lambda}(\xi_{n-1}-\xi_n)...\sin\sqrt{\lambda}(x-\xi_1)+o(|\lambda|^{N_2+L_n+L_{n-1}+....+L_1+\frac{n+1}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}(x-b)\right|}) \end{cases}$$

biçimindedir.

Teorem 3.7: L probleminin $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ özdeğerleri reeldir.

İspat:

$$\begin{aligned} < Y,Z >:= & \int_a^b y\overline{z}dx \\ & +\frac{Y^{(1)}_{N_1+1}\overline{\left(Y^{(1)}_{N_1+1}\right)'}}{a_1}-\frac{Y^{(2)}_{N_2+1}\overline{\left(Y^{(2)}_{N_2+1}\right)'}}{a_2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{m_i}R^{(i)}_{L_{i+1}}\overline{\left(R^{(i)}_{L_{i+1}}\right)'} \\ & +\sum_{k=1}^{N_1}Y^{(1)}_k\overline{\left(Y^{(1)}_k\right)'}\frac{1}{f_{1k}}+\sum_{k=1}^{N_2}Y^{(2)}_k\overline{\left(Y^{(2)}_k\right)'}(-\frac{1}{f_{2k}}) \\ & \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{L_i}R^{(i)}_k\overline{\left(R^{(i)}_k\right)'}\frac{1}{c_{ik}}\alpha_i\right) \end{aligned}$$

iç çarpımı kullanılarak,

$$\langle TY,Y\rangle=\int_a^b (ly)\,\overline{y}dx+\frac{TY^{(1)}_{N_1+1}\overline{\left(Y^{(1)}_{N_1+1}\right)}}{a_1}-\frac{TY^{(2)}_{N_2+1}\overline{\left(Y^{(2)}_{N_2+1}\right)}}{a_2}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{m_i}TR^{(i)}_{L_{i+1}}\overline{\left(R^{(i)}_{L_{i+1}}\right)}$$

$$+\sum_{k=1}^{N_1}TY^{(1)}_k\overline{\left(Y^{(1)}_k\right)}\frac{1}{f_{1k}}+\sum_{k=1}^{N_2}TY^{(2)}_k\overline{\left(Y^{(2)}_k\right)}(-\frac{1}{f_{2k}})-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{L_i}TR^{(i)}_k\overline{\left(R^{(i)}_k\right)}\frac{1}{u_{ik}}\alpha_i$$

yazılır. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\langle TY,Y\rangle=\int_a^b \left|y'(x)\right|^2+q(x)\left|y(x)\right|^2dx+\sum_{i=1}^{n}\alpha_i n_i\left|y(\zeta_i^-)\right|^2-b_1\left|y(a)\right|^2+b_2\left|y(b)\right|^2$$
$$+\sum_{k=1}^{N_2}2\operatorname{Re}(Y^{(2)}_k\overline{y}(b))-\sum_{k=1}^{N_1}2\operatorname{Re}(Y^{(1)}_k\overline{y}(a))$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{L_i}\alpha_i 2\operatorname{Re}(R^{(i)}_k\overline{y}(\zeta_i^-))+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{g_{1k}}{f_{1k}}\left|Y^{(1)}_k\right|^2$$
$$-\sum_{k=1}^{N_2}\frac{g_{2k}}{f_{2k}}\left|Y^{(2)}_k\right|^2-\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{L_i}\alpha_i\frac{d_{ik}}{c_{ik}}\left|R^{(i)}_k\right|^2$$

elde edilir. Buna göre, $\langle TY,Y\rangle\in\mathbb{R}$ olup buradan $\lambda\in\mathbb{R}$ olduğu elde edilir.

Lemma 3.8 : (3.1)-(3.4) problemine ait normalleştirici sayılar aşağıdaki gibidir;

$$\begin{aligned}
\rho_n &= \int_a^b \varphi^2(x,\lambda_n)\,dx \\
&\quad+\varphi^2(a,\lambda_n)\left(a_1+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{f_{1k}}{(\lambda_n-g_{1k})^2}\right) \\
&\quad-\varphi^2(b,\lambda_n)\left(a_2+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{f_{2k}}{(\lambda_n-g_{2k})^2}\right) \\
&\quad-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi^2\left(\xi_i^-,\lambda_n\right)\left(m_i+\sum_{k=1}^{L_i}\frac{c_{ik}}{(\lambda_n-d_{ik})^2}\right) \\
&= \int_a^b \varphi^2(x,\lambda_n)\,dx \\
&\quad+\varphi^2(a,\lambda_n)f_1'(\lambda_n)-\varphi^2(b,\lambda_n)f_2'(\lambda_n) \\
&\quad-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi^2\left(\xi_i^-,\lambda_n\right)h_i'(\lambda_n).
\end{aligned}$$

Diğer taraftan,

$$W(\varphi,\psi)=\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda)$$

fonksiyonuna (3.1)-(3.4) probleminin karakteristik fonksiyonu denir. Ayrıca $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümleri L problemini sağladığından,

$\forall x \in [a,b]$ için,

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} W(\varphi,\psi) \\
&= \varphi'(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) + \varphi(x,\lambda)\psi''(x,\lambda) - \varphi''(x,\lambda)\psi(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) \\
&= \varphi(x,\lambda)\psi''(x,\lambda) - \varphi''(x,\lambda)\psi(x,\lambda) \\
&= \varphi(x,\lambda)\left(q(x)\psi(x,\lambda) - \lambda\psi(x,\lambda)\right) - \left(q(x)\varphi(x,\lambda) - \lambda\varphi(x,\lambda)\right)\psi(x,\lambda) \\
&= q(x)\varphi(x,\lambda)\psi(x,\lambda) - \lambda\varphi(x,\lambda)\psi(x,\lambda) - q(x)\varphi(x,\lambda)\psi(x,\lambda) + \lambda\varphi(x,\lambda)\psi(x,\lambda) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümleri (3.4) süreksizlik koşullarını sağladığından,

$$\begin{aligned}
W(\xi_i+0) &= \varphi(\xi_i+0,\lambda)\psi'(\xi_i+0,\lambda) - \varphi'(\xi_i+0,\lambda)\psi(\xi_i+0,\lambda) \\
&= \alpha_i\varphi(\xi_i-0,\lambda)\left[\alpha_i^{-1}\psi'(\xi_i-0,\lambda) + h_i(\lambda)\psi(\xi_i-0,\lambda)\right] \\
&- \left[\alpha_i^{-1}\varphi'(\xi_i-0,\lambda) + h_i(\lambda)\varphi(\xi_i-0,\lambda)\right]\alpha_i\psi(\xi_i-0,\lambda) \\
&= \varphi(\xi_i-0,\lambda)\psi'(\xi_i-0,\lambda) + \alpha_i\varphi(\xi_i-0,\lambda)h_i(\lambda)\psi(\xi_i-0,\lambda) \\
&- \psi(\xi_i-0,\lambda)\varphi'(\xi_i-0,\lambda) - \alpha_i\varphi(\xi_i-0,\lambda)h_i(\lambda)\psi(\xi_i-0,\lambda) \\
&= \varphi(\xi_i-0,\lambda)\psi'(\xi_i-0,\lambda) - \psi(\xi_i-0,\lambda)\varphi'(\xi_i-0,\lambda) \\
&= W(\xi_i-0) \text{ yazılır.}
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $W(\varphi,\psi)$ karakteristik fonksiyonu x'den bağımsız olduğundan,

$$\begin{aligned}
&W\{\varphi,\psi\} := \Delta(\lambda) \\
&= \varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda) \\
&= a_2(\lambda)\varphi(b,\lambda) + b_2(\lambda)\varphi'(b,\lambda) \\
&= -b_1(\lambda)\psi'(a,\lambda) - a_1(\lambda)\psi(a,\lambda)
\end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir.

Ayrıca, $\Delta(\lambda)$, λ' nın tam fonksiyonudur ve bu fonksiyonun sıfırları ile L probleminin özdeğerleri çakışır.

Buna göre, her bir λ_n özdeğeri için $\psi(x,\lambda_n) = s_n\varphi(x,\lambda_n)$ geçerlidir. Burada

$s_n = \dfrac{\psi(a,\lambda_n)}{-b_1(\lambda_n)} = \dfrac{\psi'(a,\lambda_n)}{a_1(\lambda_n)}$ dır.

Öte yandan, $\forall i \in \{1,2\}$ ve $k = \{1,2,\ldots,N_i\}$ için $a_i(g_{ik}) \neq 0$ ve $b_i(g_{ik}) = 0$ olduğundan,g_{ik}'ların bir özdeğer olması için gerek ve yeter koşul $\varphi(b,g_{2k}) = 0$,$\varphi(a,g_{1k}) = 0$ yani; $\Delta(g_{ik}) = 0$ olmasıdır.

Diğer taraftan, $i = \overline{1,n}$ ve $k = \{1,2,\ldots L_i\}$ olmak üzere, d_{ik}'ların özdeğer olması için gerek ve yeter koşul $\varphi(\xi_i^-, d_{ik}) = 0 = \varphi(\xi_i^+, d_{ik})$ yani; $\Delta(d_{ik}) = 0$ olmasıdır.

Teorem 3.9: (3.1)-(3.4) L probleminin özdeğerleri basittir.

İspat: φ ve ψ fonksiyonları belli başlangıç koşulları altında (3.1)-(3.4) probleminin çözümleri olup

$$\begin{cases} -\psi''(x,\lambda) + q(x)\psi(x,\lambda) = \lambda\psi(x,\lambda) \\ -\varphi''(x,\lambda_n) + q(x)\varphi(x,\lambda_n) = \lambda_n\varphi(x,\lambda_n) \end{cases}$$

geçerlidir. Buna göre, ilk denklem $\varphi(x,\lambda_n)$ ile ikinci denklem $\psi(x,\lambda)$ ile çarpılıp

taraf tarafa çıkarılırsa,

$\varphi''(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda) - \psi''(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n) = (\lambda-\lambda_n)\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)$ elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafının (a,b) aralığında integrali alınıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$(\lambda-\lambda_n)\int_a^b \psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)\,dx = \varphi'(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda) - \psi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)\Big|_a^b$$

yazılır ve buradan da

$$\begin{aligned}(\lambda-\lambda_n)\int_a^b \psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda_n)\,dx &= \varphi'(b,\lambda_n)\psi(b,\lambda) - \psi'(b,\lambda)\varphi(b,\lambda_n) \\ &-\varphi'(a,\lambda_n)\psi(a,\lambda) + \psi'(a,\lambda)\varphi(a,\lambda_n) \\ &+\sum_{i=1}^n \varphi'(\xi_i^-,\lambda_n)\psi(\xi_i^-,\lambda) - \sum_{i=1}^n \psi'(\xi_i^-,\lambda)\varphi(\xi_i^-,\lambda_n) \\ &-\sum_{i=1}^n \varphi'(\xi_i^+,\lambda_n)\psi(\xi_i^+,\lambda) + \sum_{i=1}^n \psi'(\xi_i^+,\lambda)\varphi(\xi_i^+,\lambda_n)\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra,

$$
\begin{aligned}
\int_a^b \psi(x,\lambda)\,\varphi(x,\lambda_n)\,dx - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi\left(\xi_i^-,\lambda_n\right)\psi\left(\xi_i^-,\lambda\right) \frac{h_i(\lambda)-h_i(\lambda_n)}{\lambda-\lambda_n} \\
-\psi(b,\lambda)\varphi(b,\lambda_n)\frac{f_2(\lambda)-f_2(\lambda_n)}{\lambda-\lambda_n} \\
+\varphi(a,\lambda_n)\,\psi(a,\lambda)\,\frac{f_1(\lambda)-f_1(\lambda_n)}{\lambda-\lambda_n} \\
= \frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\lambda_n)}{\lambda-\lambda_n}
\end{aligned}
$$

olduğu sonucuna varılır. Böylece,

$\psi(x,\lambda_n) = s_n\varphi(x,\lambda_n)$ olduğu dikkate alınıp, $\lambda \to \lambda_n$ iken limite geçilirse,

$\dot{\Delta}(\lambda_n) = s_n\rho_n$ olur.

4. TERS PROBLEMLER

Bu bölümde Weyl fonksiyonuna ve çeşitli spektral verilere göre ters problemin çözümü için teklik teoremleri verilecektir. Öncelikle, ele alınan problemin karakteristik fonksiyonu oluşturulup, bu fonksiyonun asimptotik ifadesi elde edilecek ve ardından, Weyl fonksiyonu kullanılarak ters problemin çözümü için teklik teoremleri ispatlanacaktır. Bunun için, L ile birlikte aynı formda fakat katsayıları farklı olan $\tilde{L}$ sınır değer problemi ele alınsın. Burada L problemi ile ilgili ifadeler s ve bunların $\tilde{L}$ ile ilgili olanları $\tilde{s}$ ile gösterilsin.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının asimptotik ifadesi kullanılarak,

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) = {} & [a_1 \prod_{k=1}^{n} m_k \lambda^{N_1+L_1+L_2+...+\frac{n+1}{2}} \sin\sqrt{\lambda}(\zeta_1 - a)\sin\sqrt{\lambda}(\zeta_2-\zeta_1)\sin\sqrt{\lambda}(\zeta_3-\zeta_2) \\ & ... \sin\sqrt{\lambda}(b-\zeta_n) + o(|\lambda|^{N_1+L_1+L_2+...+\frac{n+1}{2}} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}(b-a)\right|})] \\ & +\lambda^{N_2}[a_1 \prod_{k=1}^{n} m_k \lambda^{N_1+L_1+L_2+...+\frac{n+2}{2}} .. \sin\sqrt{\lambda}(\zeta_1-a)\sin\sqrt{\lambda}(\zeta_2-\zeta_1) \\ & \times \sin\sqrt{\lambda}(\zeta_3-\zeta_2)...\cos\sqrt{\lambda}(b-\zeta_n) + o(|\lambda|^{N_1+L_1+L_2+...+\frac{n+2}{2}} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}(b-a)\right|})] \\ = {} & a_1 a_2 \prod_{k=1}^{n} m_k \lambda^{N_1+N_2+L_1+L_2+...+\frac{n+3}{2}} \sin\sqrt{\lambda}(\zeta_1-a)\sin\sqrt{\lambda}(\zeta_2-\zeta_1) \\ & \times \sin\sqrt{\lambda}(\zeta_3-\zeta_2)...\cos\sqrt{\lambda}(b-\zeta_n) + o(|\lambda|^{N_1+L_1+L_2+...+\frac{n+3}{2}} e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}(b-a)\right|})]\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

$\Phi(x,\lambda)$, (3.1) denkleminin $U(\Phi)=1$, $V(\Phi)=0$ sınır koşulları ile (3.4) süreksizlik koşullarını sağlayan çözümü olsun.

$V(\Phi) = 0$ olduğundan $V(\psi) = 0$ olması gereğince ψ ile Φ lineer bağımlı yani $\Phi(x,\lambda) = k\psi(x,\lambda)$ $(k \neq 0)$ geçerlidir.

$$\begin{aligned} W(\varphi,\Phi) &= \varphi(x,\lambda)\Phi'(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)\Big|_{x=a} \\ &= \varphi(a,\lambda)\Phi'(a,\lambda) - \varphi'(a,\lambda)\Phi(a,\lambda) \\ &= -b_1(\lambda)\Phi'(a,\lambda) - a_1(\lambda)\Phi(a,\lambda)\end{aligned}$$

$U(\Phi) = 1$ olduğundan $W(\varphi,\Phi) = -1 \neq 0$ olur.

$\Phi(x,\lambda) = k\psi(x,\lambda)$ olduğundan,

$$-b_1(\lambda)\,k\psi'(a,\lambda) - a_1(\lambda)k\psi(a,\lambda) = -1$$
$$k(-b_1(\lambda)\,\psi'(a,\lambda) - a_1(\lambda)\psi(a,\lambda)) = -1$$
$$k\Delta(\lambda) = -1$$
$$k = -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \text{ olup}$$
$$\Phi(x,\lambda) = k\psi(x,\lambda) = -\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

olur.

Şimdi $C(x,\lambda)$ ve $S(x,\lambda)$, (3.1) denkleminin

$$C(a,\lambda) = 1, C'(a,\lambda) = 0$$
$$S(a,\lambda) = 0, S'(a,\lambda) = 1$$

koşullarını ve süreksizlik koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

$S(x,\lambda)$ ve $C(x,\lambda)$ fonksiyonları, $W(S,C) = 1 \neq 0$ yani lineer bağımsız olduğundan

$$\varphi(x,\lambda) = c_1(\lambda)\,C(x,\lambda) + c_2(\lambda)\,S(x,\lambda)$$

yazılabilir. Buna göre

$$\varphi(a,\lambda) = -b_1(\lambda), \varphi'(a,\lambda) = a_1(\lambda)$$

başlangıç koşulları kullanılarak,

$$\varphi(x,\lambda) = -b_1(\lambda)\,C(x,\lambda) + a_1(\lambda)\,S(x,\lambda)$$

yazılır. $S(x,\lambda)$ ile $\varphi(x,\lambda)$ lineer bağımsız olup yani

$$W(S,\varphi) = \begin{vmatrix} 0 & -b_1(\lambda) \\ 1 & a_1(\lambda) \end{vmatrix} = b_1(\lambda) \neq 0$$

olup

$$\Phi(x,\lambda) = A(\lambda)\,S(x,\lambda) + B(\lambda)\,\varphi(x,\lambda)$$

yazılabilir.

$$\Phi(a,\lambda) = -b_1(\lambda)B(\lambda) \Rightarrow B(\lambda) = -\frac{\Phi(a,\lambda)}{b_1(\lambda)}$$
$$\Phi'(a,\lambda) = A(\lambda) - \frac{\Phi(a,\lambda)}{b_1(\lambda)}a_1(\lambda)$$
$$A(\lambda) = \frac{b_1(\lambda)\Phi'(a,\lambda) + a_1(\lambda)\Phi(a,\lambda)}{b_1(\lambda)} = \frac{1}{b_1(\lambda)}$$

olur. O halde,

$$\Phi(x,\lambda)=\frac{1}{b_1(\lambda)}\left(S(x,\lambda)-\Phi(a,\lambda)\varphi(x,\lambda)\right) \tag{4.1}$$

elde edilir. Bu $\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonuna Weyl çözümü, $M(\lambda)=-\Phi(a,\lambda)$ fonksiyonuna ise Weyl fonksiyonu adı verilir.Buna göre,

$\Phi(x,\lambda)=-\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ olduğundan

$\Phi(a,\lambda)=-\dfrac{\psi(a,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ olup

$M(\lambda)=\dfrac{\psi(a,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$

yazılır.

Şimdi,

$$\ell[\tilde{y}(x)]:=-y''(x)+\tilde{q}(x)y(x)=\lambda y(x)$$

denklemi ve

$$\begin{aligned}\tilde{U}(y) &: =y'(a)+\tilde{f}_1(\lambda)y(a)=0\\ \tilde{V}(y) &: =y'(b)+\tilde{f}_2(\lambda)y(b)=0\\ y(\xi_i+0) &= \tilde{\alpha}_i y(\xi_i-0)\\ y'(\xi_i+0) &= \tilde{\alpha}_i^{-1}y'(\xi_i-0)+\tilde{h}_i(\lambda)y(\xi_i-0)\end{aligned}$$

sınır ve süreksizlik koşulları ile üretilen $\tilde{L}$ problemi göz önüne alınsın.

Teorem 4.1:.L sınır değer problemi, Weyl fonksiyonu ile tek olarak belirlenir yani eğer $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$, $f_1(\lambda)=\tilde{f}_1(\lambda)$ ise, $q(x)\equiv\tilde{q}(x)$ (a,b) de hemen hemen her yerde, $f_2(\lambda)=\tilde{f}_2(\lambda)$, $h_i(\lambda)=\tilde{h}_i(\lambda)$,ve $\alpha_i(\lambda)=\tilde{\alpha}_i(\lambda)$ $(i=\overline{1,n})$ dır.

İspat:

$$\begin{pmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{21} & P_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{\varphi} & \tilde{\Phi}\\ \tilde{\varphi}' & \tilde{\Phi}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi & \Phi\\ \varphi' & \Phi'\end{pmatrix}$$

olacak şekilde $P(x,\lambda)$ matrisini oluşturalım. Buna göre,

$\varphi(x,\lambda)=P_{11}\tilde{\varphi}+P_{12}\tilde{\varphi}'$, $\quad\Phi(x,\lambda)=P_{11}\tilde{\Phi}+P_{12}\tilde{\Phi}'$,

olur.

$\Phi(x,\lambda)=-\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ ve $\langle\varphi,\Phi\rangle\equiv-1$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} P_{11}(x,\lambda) &= -\varphi(x,\lambda)\tilde{\Phi}'(x,\lambda)+\Phi(x,\lambda)\tilde{\varphi}'(x,\lambda) \\ P_{12}(x,\lambda) &= -\tilde{\varphi}(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)+\varphi(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda) \end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir. Şimdi $P_{ij}(x,\lambda)$ fonksiyonlarının tam ve sınırlılığını inceleyelim.

$$\Phi(x,\lambda)=\frac{1}{b_1(\lambda)}\left[\left(S(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\right)\right]$$

$$\varphi(x,\lambda)=-b_1(\lambda)C(x,\lambda)+a_1(\lambda)S(x,\lambda)$$
$$\varphi'(x,\lambda)=-b_1(\lambda)C'(x,\lambda)+a_1(\lambda)S'(x,\lambda)$$

ve $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ olduğu dikkate alınıp

$P_{11}(x,\lambda)=-\varphi(x,\lambda).\tilde{\Phi}'(x,\lambda)+\Phi(x,\lambda).\tilde{\varphi}'(x,\lambda)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_{11}(x,\lambda) &= (-b_1(\lambda).\tilde{C}'(x,\lambda)+a_1(\lambda).\tilde{S}'(x,\lambda)(\frac{1}{b_1(\lambda)})(S(x,\lambda)+M(\lambda) \\ &\quad\times(-b_1(\lambda)C(x,\lambda)+a_1(\lambda)S(x,\lambda)) \\ &\quad-(-b_1(\lambda)C(x,\lambda)+a_1(\lambda)S(x,\lambda))\frac{1}{b_1(\lambda)}(\tilde{S}'(x,\lambda)+\tilde{M}(\lambda) \\ &\quad\times(-b_1(\lambda)\tilde{C}'(x,\lambda)+a_1(\lambda)\tilde{S}'(x,\lambda)) \\ &= C(x,\lambda)\tilde{S}'(x,\lambda)-\tilde{C}'(x,\lambda)S(x,\lambda) \text{ olur.} \end{aligned}$$

$P_{12}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda)-\Phi(x,\lambda).\tilde{\varphi}(x,\lambda)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} P_{12}(x,\lambda) &= (-b_1(\lambda)C(x,\lambda)+a_1(\lambda)S(x,\lambda))\frac{1}{b_1(\lambda)}(\tilde{S}(x,\lambda)+\tilde{M}(\lambda) \\ &\quad\times(-b_1(\lambda)\tilde{C}(x,\lambda)+a_1(\lambda)\tilde{S}(x,\lambda)) \\ &\quad-\frac{1}{b_1(\lambda)}(S(x,\lambda)+M(\lambda)(-b_1(\lambda)C(x,\lambda)+a_1(\lambda)S(x,\lambda)) \\ &\quad\times(-b_1(\lambda)\tilde{C}(x,\lambda)+a_1(\lambda)\tilde{S}(x,\lambda)) \\ &= \tilde{C}(x,\lambda)S(x,\lambda)-C(x,\lambda)\tilde{S}(x,\lambda) \text{ olur.} \end{aligned}$$

Yani,

$$\begin{aligned} P_{11}(x,\lambda) &= C(x,\lambda)\tilde{S}'(x,\lambda)-\tilde{C}'(x,\lambda)S(x,\lambda) \\ P_{12}(x,\lambda) &= \tilde{C}(x,\lambda)S(x,\lambda)-C(x,\lambda)\tilde{S}(x,\lambda) \end{aligned}$$

elde edilmiş olur. $S(x,\lambda)$ ve $C(x,\lambda)$, fonksiyonları herbir sabit x için λ' nın tam fonksiyonları olduğundan, $P_{11}(x,\lambda)$ ve $P_{12}(x,\lambda)$ fonksiyonları herbir sabit x için λ' nın tam fonksiyonlarıdır.

$G_\delta = \left\{\lambda : \lambda = k^2, \left|k - \sqrt{\lambda_n}\right| > \delta, n = 0,1,2....\right\}, \delta > 0$

$\tilde{G}_\delta = \left\{\lambda : \lambda = k^2, \left|k - \sqrt{\tilde{\lambda}_n}\right| > \delta, n = 0,1,2....\right\}$ olsun. Burada δ yeterince küçük pozitif sayıdır.

$\lambda \in G_\delta \cap \tilde{G}_\delta$ için $|\sin \lambda x| \geq C_\delta e^{|\mathrm{Im}\,\lambda| x}$geçerlidir.

Buradan,

$$\Delta(\lambda) = a_1 a_2 (\prod_{k=1}^{n} m_k) \lambda^{N_1+N_2+L_1+...+L_n+\frac{n+3}{2}} \sin\sqrt{\lambda}(\zeta_1 - a)$$
$$\times \sin\sqrt{\lambda}(\zeta_2 - \zeta_1) \ldots \sin\sqrt{\lambda}(b - \zeta_n)$$
$$+o(|\lambda|^{N_1+N_2+L_1+...+L_n+\frac{n+3}{2}} e^{\left|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\right|(b-a)}$$

olduğundan,

$\left|\sin\sqrt{\lambda}(\zeta_1 - a)\right| \geq C_\delta e^{\left|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\right|(\zeta_1 - a)}, \quad \left|\sin\sqrt{\lambda}(\zeta_2 - \zeta_1)\right| \geq C_\delta e^{\left|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\right|(\zeta_2 - \zeta_1)}$

$\left|\sin\sqrt{\lambda}(b - \zeta_n)\right| \geq C_\delta e^{\left|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\right|(b - \zeta_n)}$ olup

$$|\Delta(\lambda)| \geq C_\delta |\lambda|^{N_1+N_2+L_1+...+L_n+\frac{n+3}{2}} e^{\left|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\right|(b-a)} \qquad \lambda \in G_\delta \cap \tilde{G}_\delta \qquad |\lambda| \geq \lambda^*$$

$\lambda^* = \lambda^*(\delta)$olur.

Buradan,

$$P_{11}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)\frac{\tilde{\psi}'(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} - \tilde{\varphi}'(x,\lambda)\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$
$$= \left[\begin{array}{c} (\prod_{k=1}^{n} m_k) a_1 \lambda^{L_1+L_2+...L_n+N_1+\frac{n+1}{2}} \sin\sqrt{\lambda}(\zeta_1 - a)\sin\sqrt{\lambda}(\zeta_2 - \zeta_1)...\sin\sqrt{\lambda}(x - \zeta_n) \\ +o\left(|\lambda|^{L_1+L_2+...L_n+N_1+\frac{n+1}{2}} e^{\left|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\right|(x-a)}\right) \end{array}\right]$$

$$\times \left[a_2 \lambda^{N_2+1}\cos\sqrt{\lambda}(x-b) + o\left(|\lambda|^{N_2+1} e^{\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}(x-b)}\right)\right]$$

$$\times \left[C_\delta |\lambda|^{-N_1-N_2-L_1-....-L_n-\frac{n+3}{2}} e^{\left|\mathrm{Im}\sqrt{\lambda}\right|(x-b)}\right]$$

$$-\left[\begin{array}{c}\left(\prod_{k=1}^{n} m_k\right) a_1\lambda^{N_1+L_1+...+L_n+\frac{n+2}{2}} \sin\sqrt{\lambda}(\zeta_1-a)\sin\sqrt{\lambda}(\zeta_2-\zeta_1)...\sin\sqrt{\lambda}\left(\zeta_n-\zeta_{n-1}\right)\\ \cos\sqrt{\lambda}(x-\zeta_n)+o\left(|\lambda|^{L_1+L_2+...+L_n+\frac{n+2}{2}}.e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(x-a)}\right)\end{array}\right]$$

$$\times\left[a_2\lambda^{N_2+\frac{1}{2}}\sin\sqrt{\lambda}(x-b)+o\left(|\lambda|^{N_1+\frac{1}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(x-b)}\right)\right]$$

$$\times\left[C_\delta\,|\lambda|^{-N_1-N_2-L_1-....-L_n-\frac{n+3}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(a-b)}\right]\leq M$$

$$\leq C_\delta\lambda^{L_1+L_2+...L_n+N_1+\frac{n+1}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(x-a)}\left(C_{\delta_1}\lambda^{N_2+1}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(b-x)}\right)$$

$$\times\left(C_{\delta_2}\,|\lambda|^{-N_1-N_2-L_1-....-L_n-\frac{n+3}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(a-b)}\right)\leq M$$

olup

$|P_{11}(x,\lambda)|\leq M$ yazılır.

$$P_{12}=\varphi(x,\lambda)\,\tilde{\Phi}(x,\lambda)-\Phi(x,\lambda)\,\tilde{\varphi}(x,\lambda)=\tilde{\varphi}(x,\lambda)\,\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)}-\varphi(x,\lambda)\,\frac{\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(x,\lambda)}$$

$$=\left[\begin{array}{c}\left(\prod_{k=1}^{n}\tilde{m}_k\right)a_1\lambda^{N_1+L_1+...+L_n+\frac{n+1}{2}}\sin\sqrt{\lambda}(\zeta_1-a)\sin\sqrt{\lambda}(\zeta_2-\zeta_1)\ldots\sin\sqrt{\lambda}(x-\zeta_n)\\ +o\left(|\lambda|^{L_1+L_2+...L_n+N_1+\frac{n+1}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(x-a)}\right)\end{array}\right]$$

$$\times\left[a_2\lambda^{N_2+\frac{1}{2}}\sin\sqrt{\lambda}(x-b)+o\left(|\lambda|^{N_2+\frac{1}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(x-b)}\right)\right]\left[C_\delta\,|\lambda|^{-N_1-N_2-L_1-....-L_n-\frac{n+3}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(a-b)}\right]$$

$$-\left[\begin{array}{c}\left(\prod_{k=1}^{n}m_k\right)a_1\lambda^{L_1+L_2+...L_n+N_1+\frac{n+1}{2}}\sin\sqrt{\lambda}(\zeta_1-a)...\sin\sqrt{\lambda}(x-\zeta_n)\\ +o\left(|\lambda|^{L_1+L_2+...L_n+N_1+\frac{n+1}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(x-a)}\right)\end{array}\right]$$

$$\times\left[\tilde{a}_2\lambda^{N_2+\frac{1}{2}}\sin\sqrt{\lambda}(x-b)+o\left(|\lambda|^{N_2+\frac{1}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(x-b)}\right)\right]$$

$$\times\left[\tilde{C}_\delta\,|\lambda|^{-N_1-N_2-L_1-...-L_n-\frac{n+3}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(a-b)}\right]$$

$$\leq\left[C_{\delta_1}\lambda^{L_1+L_2+...L_n+N_1+\frac{n+1}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(x-a)}a_2\lambda^{N_2+\frac{1}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(b-x)}\right]$$

$$\times\left[C_{\delta_2}\,|\lambda|^{-N_1-N_2-L_1-...-L_n-\frac{n+3}{2}}e^{\left|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}\right|(a-b)}\right]\leq\frac{M}{\sqrt{\lambda}}$$ olduğu elde edilir.

O halde $P_{11}(x,\lambda)$ ve $P_{12}(x,\lambda)$ fonksiyonları tam ve sınırlı olup Liouville teoreminden sabittirler. Yani, λ dan bağımsızdırlar. Diğer taraftan,

$$P_{11}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)\frac{\tilde{\psi}^{'}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(x,\lambda)} - \tilde{\varphi}'(x,\lambda)\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)} = \varphi(x,\lambda)\frac{\tilde{\psi}^{'}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(x,\lambda)} - \varphi(x,\lambda)\frac{\psi^{'}(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)}$$

$$-\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)}\tilde{\varphi}^{'}(x,\lambda) + \frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)}\varphi^{'}(x,\lambda) + \varphi(x,\lambda)\frac{\psi^{'}(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)} - \frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)}\varphi^{'}(x,\lambda)$$

$$P_{11}(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)\left(\frac{\tilde{\psi}^{'}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(x,\lambda)} - \frac{\psi^{'}(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)}\right) - \frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)}.\left(\tilde{\varphi}^{'}(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\right) + 1$$

$$P_{12}(x,\lambda) = -\varphi(x,\lambda)\frac{\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(x,\lambda)} + \tilde{\varphi}(x,\lambda)\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)}$$

$$= \tilde{\varphi}(x,\lambda)\left(\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)} - \frac{\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(x,\lambda)}\right) - \frac{\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(x,\lambda)}\left(\varphi(x,\lambda) - \tilde{\varphi}(x,\lambda)\right)$$

Şimdi $P_{11}(x,\lambda)$ ve $P_{12}(x,\lambda)$ fonksiyonu λ dan bağımsız olduğundan , $\lambda \in \mathbb{R}$ olarak limit alabiliriz.

$P_{11}(x,\lambda)$ için,

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\varphi(x,\lambda)\left(\frac{\tilde{\psi}^{'}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(x,\lambda)} - \frac{\psi^{'}(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)}\right) = 0$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)}\left(\tilde{\varphi}^{'}(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\right) = 0 \text{ olup,}$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\left[P_{11}(x,\lambda) - 1\right] = 0 \text{ elde edilir.}$$

$P_{12}(x,\lambda)$ için

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\varphi(x,\lambda)\left(\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)} - \frac{\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)}\right) = 0$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(x,\lambda)}\left(\varphi(x,\lambda) - \tilde{\varphi}(x,\lambda)\right) = 0 \text{ olup}$$

$$\lim_{\lambda\to-\infty}P_{12}(x,\lambda) = 0 \text{ elde edilir.}$$

Böylece, $P_{11}(x,\lambda)$ ve $P_{12}(x,\lambda)$ fonksiyonlarının λ dan bağımsız olduğu gözönünde bulundurulursa,

$P_{11}(x,\lambda) \equiv 1$, $P_{12}(x,\lambda) \equiv 0$ elde edilir. Bu sonuç (4.2) denkleminde dikkate alınırsa,

$$\begin{cases} P_{11} = -\tilde{\varphi}'(x,\lambda)\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)} + \varphi(x,\lambda)\dfrac{\tilde{\psi}'(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(x,\lambda)} = 1 \\ P_{12} = -\varphi(x,\lambda)\dfrac{\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(x,\lambda)} + \tilde{\varphi}(x,\lambda)\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(x,\lambda)} = 0 \end{cases}$$

sistemi elde edilir. Buna göre bu sistem çözülürse,

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\tilde{\varphi}'(x,\lambda) \\ 0 & \tilde{\varphi}(x,\lambda) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dfrac{\tilde{\psi}'(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} & -\tilde{\varphi}'(x,\lambda) \\ -\dfrac{\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} & \tilde{\varphi}(x,\lambda) \end{vmatrix}} = \frac{\tilde{\varphi}(x,\lambda)}{\dfrac{\tilde{\psi}'(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda) - \tilde{\psi}(x,\lambda)\tilde{\varphi}'(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}}$$

$$= \tilde{\varphi}(x,\lambda)$$

$$\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\tilde{\psi}'(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} & 1 \\ -\dfrac{\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} & 0 \end{vmatrix}}{1} = \frac{\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}$$ olduğu elde edilir.

$\varphi(x,\lambda) = \tilde{\varphi}(x,\lambda)$ denklemi sağlandığından

$$-\varphi''(x,\lambda) + q(x)\varphi(x,\lambda) = \lambda\varphi(x,\lambda)$$
$$-\tilde{\varphi}''(x,\lambda) + \tilde{q}(x)\tilde{\varphi}(x,\lambda) = \lambda\tilde{\varphi}(x,\lambda)$$

yazılır. Bu iki denklem taraf tarafa çıkarılır ve $\varphi(x,\lambda) = \tilde{\varphi}(x,\lambda)$ olduğu dikkate alınırsa;

$$(q(x) - \tilde{q}(x))\,\varphi(x,\lambda) = 0$$

olur. Buradan $q(x) = \tilde{q}(x)$ elde edilir. Ayrıca;

$\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \dfrac{\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}$, $\dfrac{\psi'(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \dfrac{\tilde{\psi}'(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}$ olduğu dikkate alınır ve

$$b_2(\lambda)\,\psi'(x,\lambda) + a_2(\lambda)\,\psi(x,\lambda) = 0$$
$$\tilde{b}_2(\lambda)\,\tilde{\psi}'(x,\lambda) + \tilde{a}_2(\lambda)\,\tilde{\psi}(x,\lambda) = 0$$

denklemleri göz önüne alınırsa

$b_2(\lambda)\,\psi^{'}(x,\lambda) = -a_2(\lambda)\,\psi(x,\lambda)$ ise $\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\psi'(x,\lambda)} = -\dfrac{b_2(\lambda)}{a_2(\lambda)}$,

$\tilde{b}_2(\lambda)\,\tilde{\psi}^{'}(x,\lambda) = -\tilde{a}_2(\lambda)\,\tilde{\psi}(x,\lambda)$ ise $\dfrac{\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\tilde{\psi}^{'}(x,\lambda)} = -\dfrac{\tilde{b}_2(\lambda)}{\tilde{a}_2(\lambda)}$ ve

$\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\psi^{'}(x,\lambda)} = \dfrac{\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\tilde{\psi}^{'}(x,\lambda)}$ olduğu elde ediliir.

O halde $\dfrac{b_2(\lambda)}{a_2(\lambda)} = \dfrac{\tilde{b}_2(\lambda)}{\tilde{a}_2(\lambda)}$ veya $a_2(\lambda)\,\tilde{b}_2(\lambda) - b_2(\lambda)\,\tilde{a}_2(\lambda) = 0$ yazılır. $a_2(\lambda)$, $b_2(\lambda)$ ve öylece de $\tilde{a}_2(\lambda)$, $\tilde{b}_2(\lambda)$ polinomlarının ortak sıfırları olmadığından $a_2(\lambda) = \tilde{a}_2(\lambda)\,,\ b_2(\lambda) = \tilde{b}_2(\lambda)$ olur. O halde $f_2(\lambda) = \tilde{f}_2(\lambda)$ yazılır.

Diğer taraftan,

$\varphi(\xi_1^+,\lambda) = \alpha_1\varphi(\xi_1^-,\lambda)$

$\varphi(\xi_2^+,\lambda) = \alpha_2\varphi(\xi_2^-,\lambda)$

...

$\varphi(\xi_n^+,\lambda) = \alpha_n\varphi(\xi_n^-,\lambda)$

$\tilde{\varphi}(\xi_1^+,\lambda) = \tilde{a}_1\tilde{\varphi}(\xi_1^-,\lambda)$

$\tilde{\varphi}(\xi_2^+,\lambda) = \tilde{a}_2\tilde{\varphi}(\xi_2^-,\lambda)$

...

$\tilde{\varphi}(\xi_n^+,\lambda) = \tilde{a}_n\tilde{\varphi}(\xi_n^-,\lambda)$

$\varphi^{'}(\xi_1^+,\lambda) = \alpha_1^{-1}\varphi^{'}(\xi_1^-,\lambda) + h_1(\lambda)\,\varphi(\xi_1^-,\lambda)$

$\varphi^{'}(\xi_2^+,\lambda) = \alpha_2^{-1}\varphi^{'}(\xi_2^-,\lambda) + h_2(\lambda)\,\varphi(\xi_2^-,\lambda)$

...

$\varphi^{'}(\xi_n^+,\lambda) = \alpha_n^{-1}\varphi^{'}(\xi_n^-,\lambda) + h_n(\lambda)\,\varphi(\xi_n^-,\lambda)$

$\tilde{\varphi}^{'}(\xi_1^+,\lambda) = \tilde{\alpha}_1^{-1}\tilde{\varphi}^{'}(\xi_1^-,\lambda) + \tilde{h}_1(\lambda)\,\tilde{\varphi}(\xi_1^-,\lambda)$

$\tilde{\varphi}^{'}(\xi_2^+,\lambda) = \tilde{\alpha}_2^{-1}\tilde{\varphi}^{'}(\xi_2^-,\lambda) + \tilde{h}_2(\lambda)\,\tilde{\varphi}(\xi_2^-,\lambda)$

...

$\tilde{\varphi}^{'}(\xi_n^+,\lambda) = \tilde{\alpha}_n^{-1}\tilde{\varphi}^{'}(\xi_n^-,\lambda) + \tilde{h}_n(\lambda)\,\tilde{\varphi}(\xi_n^-,\lambda)$

ve

$\varphi(x,\lambda) = \tilde{\varphi}(x,\lambda)$, $\varphi^{'}(x,\lambda) = \tilde{\varphi}^{'}(x,\lambda)$ olduğundan

$$\frac{\varphi(\xi_i^+)}{\varphi(\xi_i^-)} = \frac{\tilde{\varphi}(\xi_i^+)}{\tilde{\varphi}(\xi_i^-)} \Rightarrow \alpha_i = \tilde{\alpha}_i \text{ ve}$$

böylece de

$$h_i(\lambda) = \frac{\varphi'(\xi_i^+,\lambda) - \alpha_i^{-1}\varphi'(\xi_i^-,\lambda)}{\varphi(\xi_i^-,\lambda)} = \frac{\tilde{\varphi}'(\xi_i^+,\lambda) - \tilde{\alpha}_i^{-1}\tilde{\varphi}'(\xi_i^-,\lambda)}{\tilde{\varphi}(\xi_i^-,\lambda)} = \tilde{h}_i(\lambda)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi de iki spektruma göre teklik teoremi verilsin. Bunun için L ile aynı formda fakat, yalnız birinci sınır koşulu değiştirilen aşağıdaki L_1 problemi ele alınsın:

$$\ell[y(x)] := -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x),\ x \in [a,b]$$

$$\begin{aligned} U(y) &:= y(a) = 0 \\ V(y) &:= y'(b) + f_2(\lambda)y(b) = 0 \\ y(\xi_i+0) &= \alpha_i y(\xi_i-0) \\ y'(\xi_i+0) &= \alpha_i^{-1}y'(\xi_i-0) + h_i(\lambda)\, y(\xi_i-0) \end{aligned}$$

Burada amaç; L ve L_1 problemlerinin özdeğerler dizisi biliniyorken, problemin katsayılarının tek olarak belirlenebileceğini göstermektir.

$\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ dizisi, L_1 probleminin özdeğerleri olsun. L_1 probleminin karakteristik fonksiyonunun

$$\Delta_1(\lambda) = W(\varphi,\psi) = \varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda) = -\psi(a,\lambda)$$

olduğu açıktır.

Teorem 4.2: Eğer her $n \geq 0$ için $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$, $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ ve $K = a_2\left(\prod_{k=1}^{n} m_k\right)$, $\tilde{K} = \tilde{a}_2\left(\prod_{k=1}^{n} \tilde{m}_k\right)$ olmak üzere $K = \tilde{K}$, $f_1(\lambda) = \tilde{f}_1(\lambda)$ ise bu durumda $q(x) = \tilde{q}(x)$ (a,b) de hemen hemen her yerde, $f_2(\lambda) = \tilde{f}_2(\lambda)$ ve $h_i(\lambda) = \tilde{h}_i(\lambda), \alpha_i(\lambda) = \tilde{\alpha}_i(\lambda)$ $(i = \overline{1,n})$ dır.

İspat: Her $n \geq 0$ için $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ ve $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ olduğundan $\dfrac{\Delta(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}$ ve $\dfrac{\Delta_1(\lambda)}{\tilde{\Delta}_1(\lambda)}$; λ' nın tam fonksiyonlarıdır. Diğer taraftan; $\Delta(\lambda)$ ve $\Delta_1(\lambda)$ karakteristik fonksiyonlarının asimptotik ifadeleri ve $K = \tilde{K}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\Delta(\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}=1 \text{ ve } \lim_{\lambda\to-\infty}\frac{\Delta_1(\lambda)}{\tilde{\Delta}_1(\lambda)}=1$$

olduğu gösterilir. Dolayısıyla $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ ve $\mu_n = \tilde{\mu}_n$ olduğundan, $\Delta(\lambda) = \tilde{\Delta}(\lambda)$ ve $\Delta_1(\lambda) = \tilde{\Delta}_1(\lambda)$ olur. $\Delta_1(\lambda) = \tilde{\Delta}_1(\lambda)$ durumu dikkate alındığında,

$$\psi(a,\lambda) = \tilde{\psi}(a,\lambda)$$

yazılır. Diğer taraftan; $M(\lambda) = \dfrac{\psi(a,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ olduğundan,
$M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$ elde edilir. Böylece, bir önceki teoremden $L = \tilde{L}$ olur.■

KAYNAKÇA

Abdukadyrov, E. (1967). Computation of the Regularized Trace for a Dirac System, *Vestnik Moskov Univ. Ser. Mat. Mekh.*, 22, (4), 17-24.

Adler, V. E A modification of Crum's method, Theoret. Math. Phys., 101 (1994) 1381-1386.

Akdoğan, Z.; Demirci, M.; Mukhtarov, O. Sh. (2005). Discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter-dependent boundary and transmissions conditions. *Acta Appl. Math.* 86, no. 3, 329–344.

Akdoğan, Z.; Demirci, M.; Mukhtarov, O. Sh. (2005). Sturm-Liouville problems with eigendependent boundary and transmissions conditions. *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.* 25, no. 4, 731–740.

Altınışık, N.; Kadakal, M.; Mukhtarov, O. Sh. (2004). Eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter-dependent boundary conditions. *Acta Math. Hungar.* 102, no. 1-2, 159–175.

Altınışık, N.; Mukhtarov, O. Sh.; Kadakal, M. (2012). Asymptotic formulas for eigenfunctions of the Sturm-Liouville problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions. *Kuwait J. Sci. Engrg.* 39, no. 1A, 1–17.

Amara, Zh. Ben; Shkalikov, A. A. (1999). The Sturm-Liouville problem with physical and spectral parameters in the boundary condition. (Russian), no. 2, 163–172, no. 1-2, 127–134.

Ambartsumyan, **V.A.** (1929). Über eine Frage der Eigenwerttheorie, Z. Physik 53, 690-695.

Amirov, **R. Kh.; Yurko, V. A.** (2001) On differential operators with a singularity and discontinuity conditions inside an interval. *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol.53, No.11.

Amirov, **R. Kh**. (2004). Boundary value problems for second-order singular differential equations on a finite interval. *Int. J. Pure Appl. Math.* 15, no. 3, 373–389.

Amirov, **R. Kh.** (2004). On a representation of solution of Dirac differential equation systems which have discontinuity in interval. *Int. J. Pure Appl. Math.* 12, no. 3, 299–310.

Amirov, **R. Kh**. (2005). On a System of Dirac Differential Equations with Discontinuity Conditions Inside an Interval, *Ukrainian Mathematical Journal*, Vol. 57, No.5.

Amirov, **R. Kh**. (2006). On Sturm-Liouville Operators with Discontinuity Conditions Inside an Interval. *J. Math. Anal. Appl.* 317, 163-176.

Amirov, **R. Kh.; Topsakal, N.** (2008). Sturm-Liouville operators with Coulomb potential which have discontinuity conditions inside an interval, *Integral Transforms and Special Functions*, Vol. 19, No.12, 923-937.

Amirov, **R. Kh.; Keskin, B.; Özkan, A. S.** (2009). Direct and inverse problems for the Dirac operator with spectral parameter linearly contained in boundary condition., *Ukrainian Math. J.* Vol. 61, No.9, 1155-1166.

Amirov, **R. Kh.; Keskin, B.; Özkan, A. S.**Inverse Problems for Impulsive Sturm-Liouville Operator with Spectral Parameter Linearly Contained in Boundary Conditions, Integral Transforms and Special Functions, 20, 607-618 (2009).

Amirov, **R. Kh.; Topsakal, N.; Güldü, Y.** (2010). Inverse Problem For Sturm-Liouville Operators with Coulomb potential and Discontinuity Conditions Inside an Interval.

Amirov, **R. Kh.; Topsakal, N.; Güldü, Y.** (2011). On impulsive Sturm-Liouville operators with Coulomb potential and spectral parameter linearly contained in boundary conditions. *Ukrainian Math. J.* 62, no. 9, 1345–1366.

Atkinson, F. V. ,Discrete and Continuous Boundary Problems, (Academic Press, 1964).

Benedek, A. I. ,**Panzone,R.** On inverse eigenvalue problems for a second-order differential equations with parameter contained in the boundary conditions, Notas Algebra y Analisis, 1–13 (1980).

Benedek, A. I. ,**Panzone,R.** On Sturm-Liouville problems with the square root of the eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Notas de Algebra y Anal., 10 (1981), 1-62.

Binding, P. A.; Browne, P. J.; Seddighi, K. (1993). Sturm–Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions, *Proc. Edinburgh*

Math. Soc. (2) 37 57–72.

Binding, P. A.; Browne, P. J.; Watson, B. A. (2000). Inverse spectral problems for Sturm–Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions, *J. London Math. Soc.* 62 161–182.

Binding, P. A.; Browne, P. J.; Watson, B. A. Transformations between Sturm-Liouville problems with eigenvalue dependent and independent boundary conditions, Bull. London Math. Soc., to appear.

Binding, P. A.; Browne, P. J.; Watson, B. A. (2004). Equivalence of inverse Sturm–Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter, *J. Math. Anal. Appl.* 291.

Binding, P. A.; Hryniv, R. Langer, H. Najman, B. Elliptic eigenvalue problems with eigenparameter dependent boundary conditions, J. Diff. Eq., 174 (2001), 30-54.

Borg, **G.** (1945). Eine Umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe, Bestimmung der Differentialg leichung durch die Eigenvert, *Acta Math.* 78, 1–96.

Chernozhukova, A.; Freiling, **G**. (2009). A uniqueness theorem for the boundary value problems with non- linear dependence on the spectral parameter in the boundary conditions, *Inverse Problems in Science and Engineering*, 1-9.

Chugunova, M.V. Inverse spectral problem for the Sturm– Liouville operator with eigenvalue parameter dependent boundary conditions Oper. Theory: Adv. Appl. 123 (Basel: Birkhauser), 187–94 (2001).

Coddington, E. A.; Levinson, N. (1955). Theory of Ordinary Differential Equations, *McGraw- Hill Book Company*, New York, Toronto, London.

Cohen, D. S. (1966). An integral transform associated with boundary conditions containing an eigenvalue parameter, *SIAM J. Appl. Math*, 14, 1164-1175.

Collatz, L. Eigenwertaufgaben mit Technischen Anwendungen, Akademische Verlag, Leipzig, (1963).

Crum, M. M. Associated Sturm-Liouville systems, Quart. J. Math. Oxford, 6 (1955), 121-127.

Deift, P. Applications of a commutation formula, Duke Math. J., 45 (1978), 267- 310.

Delsarte, J. (1938)b. Sur Certaines Transformations Fonctionelles Relatives Aux Equations Lineaires Aux Derivees Partielles du Second Ordre, *C. R. Hebd. Acad. Sci.*, 206, 178-182.

Delsarte, J.; Lions, J. (1957). Transmutations D'operateurs Differentiels Dans Le Domaine Complexe, *Comm. Math. Helv.*, 32(2), 113-128.

Dijksma, A. Eigenfunction expansions for a class of J-selfadjoint ordinary differential operators with boundary conditions containing the eigenvalue parameter, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 86A (1980), 1-27.

Dijksma, A. Langer, H. Snoo,H. de Symmetric Sturm-Liouville operators with eigenvalue depending boundary conditions, Canadian Math. Soc. Conf. Proc. 8 (1987), 87-116.

Dijksma, A. Langer, H. Operator theory and ordinary differential operators, Fields Inst. Monographs 3, (1996), 75-139.

Eberhard, W. Freiling, G. Schneider, A. Note on a paper of E. M. E. Zayed and S. F. M. Ibrahim: "Eigenfunction expansion for a regular fourth order eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the boundary conditions" [Internat. J. Math. Math. Sci. 12 (1989), no. 2, 341–348; MR 90h:34043]., Internat. J. Math. Math. Sci., 15 (1992), 809–811.

Etkin, A.E. Some boundary value problems with a spectral parameter in the boundary conditions, Amer. Math. Soc. Transl. Series 2, 136 (1987), 35-41.

Evans, W. D.; Harris, B. J. (1980). Bounds for the Point Spectra of Separated Dirac Operators, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect., A 88, 1-15.

Freiling, G.; Yurko, V. A. (2001). Inverse Sturm–Liouville Problems and Their Applications, Nova Science, New York.

Freiling, G.; Yurko, V. A. (2010). V. A. Inverse problems for Sturm-Liouville equations with boundary conditions polynomially dependent on the spectral parameter. *Inverse Problems* 26, no. 5, 055003, 17 pp.

Fulton, **C. T.** (1977). Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc. R. Soc. Edinburgh, A77, 293-308.

Fulton, **C. T.** (1980). Singular eigenvalue problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions, Proc. R. Soc. Edinburgh, A87 1-34.

Gasymov, M. G.; Levitan, B. M. (1964). About Sturm-Liouville Differential. Operators, *Math. Sborn.*, 63 (105),
No. 3.

Gasymov, M. G.; Levitan, B. M. (1966). The Inverse Problem for the Dirac System, Dokl. Akad. Nauk SSR, 167, 967-970.

Gasymov, M. G. (1966). The inverse scattering problem for a system of Dirac equations of order 2n. Dokl. Akad. Nauk SSSR 169 1037–1040 (Russian); 11 676–678.

Gasymov, M. G.; Dzhabiev, T. T. (1975). On the Determination of the Dirac System from Two Spectra, Transactions of the Summer School on Spectral Theory Operator, Baku/ELM., pp. 46-71.

Gelfand, I. M.; Levitan, B. M. (1951). On Determination of a Differential Equation by its Spectral Function Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.15, 309-60 (in Russian).

Grosse, H.; Martin, A. (1979). Theory of the Inverse Problem for Confining Potentials, Nuclear Phys., B 14 B, pp. 413-432.

Guliyev, **N. J.** (2005). Inverse eigenvalue problems for Sturm-Liouville equations with spectral parameter linearly contained in one of the boundary conditions. *Inverse Problems* 21 no. 4, 1315–1330.

Güldü, **Y.** (2006). Aralığın İç Noktasında Süreksizliğe Sahip Dirac Operatörü İçin Düz ve Ters Problemler.(*Cumhuriyet Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*)

Güldü, **Y.** (2016). On discontinuous Dirac operator with eigenparameter dependent boundary and two transmission conditions. *Bound. Value Probl.*, 135, 19 pp.

Güldü, **Y. Özkan, A. S.**(2006). Inverse problems for Dirac operator with boundary conditions involving a Herglotz-Nevanlinna function. Cumhuriyet Üniversitesi Fen Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi, 38, no. 2, 204-218.

Hald, **O. H.** (1984). Discontiuous inverse eigenvalue problems, *Comm. Pure Appl. Math.*, 37, 539-577.

Harris, **B. J.** (1983). Bounds for the Eigenvalues of Separated Dirac Operators, *Proc. of the Royal Society of Edinburgh*, 95 A, 341-366.

Hinton, D. B. Eigenfunction expansions for a singular eigenvalue problem with eigenparameter in the boundary conditions, SIAM J. Math. Anal., 12 (1981), 572-584.

Ince, E. L. Ordinary Differential Equations (Dover, New York, 1956).

Kadakal, M.; Mukhtarov, O. Sh. (2006). Discontinuous Sturm-Liouville problems containing eigenparameter in the boundary conditions. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)* 22, no. 5, 1519–1528.

Kapustin, **N. Yu.** (1999). N. Yu. Oscillation properties of solutions of a non-selfadjoint spectral problem with the spectral parameter in the boundary condition. (Russian); 35, no. 8, 1024–1027.

Kerimov, **N. B.; Mirzoev, V. S.** (2003). V. S. On the basis properties of a spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition. (Russian); 44, no. 5, 1041–1045 *Siberian Math.* J. 44 (2003), no. 5, 813–816.

Keskin, B.; Özkan, A. S. (2011). Inverse Spectral Problems for Dirac Operator with Eigenvalue Dependent Boundary and Jump Conditions**,** *Acta Math. Hungar.*, 130 (4) 309–320.

Keskin, B.; Özkan, A. S. Inverse spectral problems for Dirac operator with eigenvalue dependent boundary and jump conditions, Acta Math. Hungar., 130, 309-320 (2011).

Keskin, B.; Özkan, A. S.; Yalçin, N. (2011). Inverse spectral problems for discontinuous Sturm-Liouville operator with eigenparameter dependent boundary conditions. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser.* 60 no. 1, 15–25.

Keskin, **B.** (2013). Inverse problems for impulsive Dirac operators with spectral parameters contained in the boundary and multitransfer conditions polynomially, *Neural Comput & Applic* doi: 10.1007/s00521-012-1075-2.

Kozhevnikov, A. Yakubov, S. On operators generated by elliptic boundary problems with a spectral parameter in boundary conditions, Integral Eq. Oper. Theory, 23 (1995), 205-231.

Kraft, R.E. and Wells,W.R. Adjointness properties for differential systems with eigenvalue-dependent boundary conditions, with application to flow-duct acoustics

J. Acoust. Soc. Am. 61, 913–22 (1977).

Krein, **M.G.** (1951). Solution of the Inverse Sturm-Liouville Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 76 21-24.

Krein, **M.G.** (1954). On a Method of the Eɑective Solution of an Inverse Boundary Value Problem, Dokl. Akad., Nauk SSSR, 95 767-770.

Levinson, **N.** (1949). The Inverse Sturm-Liouville Problem, Mat. Tidsskr. B., pp. 25-30.

Levitan, **B. M.** (1949). "The application of generalized displacement operators to linear differential equations of the second order", Uspekhi Mat. Nauk, 4:1(29), 3–112.

Levitan, **B. M.** (1964). Generalized Translation Operators and some of its Applications, Jerusalem.

Levitan, **B. M. Gasymov, M. G.** Determination of a differential equation from two of its spectra, Russian Math. Surveys, 19 (1964), 1-63.

Levitan, B. M.;. Sargsjan, I. S. (1970). Introduction to Spectral Theory, Moscow, Nauk.

Levitan, B. M.; Sargsjan, I. S. (1988). Sturm-Liouville and Dirac Operators [in Russian], Nauka, Moscow.

Maksudov, F. G.; Veliev,. S. G. (1975). The Inverse Scattering Problem for the Nonself-Adjoint Dirac Operator on the Whole Axis, *Soviet Math. Dokl.* V. 16, No:6, 1629-1633.

Mamedov, **Kh. R.** (2003). Uniqueness of the solution of the inverse problem of scattering theory for the Sturm-Liouville operator with a spectral parameter in the boundary condition. (Russian), no. 1, 142–146.

Marchenko, **V.A.** (1950). Some Problems in the Theory of Second-order Differential Operators, Dokl. Akad., Nauk SSSR. 72 457-560.

Martynov, **V. V.** (1965). Conditions of Discreteness and Continuity of the Spectrum in the Case of a Self-Adjoint First-Order System of Differential Equations, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 165, 996-999.

Mukhtarov, **Oktay** (1994). Discontinuous boundary value problem with spectral parameter in boundary conditions. *Turkish J. Math.* 18, no. 2, 183–192.

Mukhtarov, O. Sh.; Kadakal, M.; Altınışık, N. (2003). Eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter in the boundary conditions. *Indian J. Pure Appl. Math.* 34, no. 3, 501–516.

Mukhtarov, O. Sh.; Kadakal, M.; Altınışık, N. (2006). Some spectral properties of discontinuous Sturm-Liouville problem with containing eigenparameter in one of boundary conditions. *J. Appl. Funct. Differ. Equ. JAFDE* 1, no. 1, 31–44.

Naimark, **M. A.** (1968). Linear Differential Operators, *Frederick ungar Publishing Co.*, New York.

Otelbayev, **M. O.** (1973). Distribution of the Eigenvalues of the Dirac Operator, *Mat. Zametki*, 14, 843-852.

Özkan, A. S.; Amirov, R. Kh. (2011). Inverse problems for impulsive Dirac operators with eigenvalue dependent boundary condition, *Journal of Advanced Research in Applied Mathematics*, Vol. 3, Issue. 4, pp. 33-43.

Özkan, A. S. (2012). Inverse Sturm–Liouville problems with eigenvalue dependent boundary and discontinuity conditions, *Inverse Problems in Science and Engineering.*

Özkan, A. S. Half-inverse Sturm-Liouville problem with boundary and discontinuity conditions dependent on the spectral parameter, Inverse Problems in Science and Engineering, i-first, (2013).

Özkan, A. S. An ımpulsıve Sturm-Liouville Problem wıth Boundary Condıtıons Containing Herglotz-Nevanlinna Type Functions (2015)

Özkan, A. S.; Keskin, B. (2012). Spectral problems for Sturm-Liouville operator with boundary and jump conditions linearly dependent on the eigenparameter. *Inverse Probl. Sci. Eng.* 20 no. 6, 799–808.

Özkan, A. S.; Keskin, B. Çakmak, Y. Double Discontinuous Inverse Problems for Sturm-Liouville Operator with Parameter-Dependent Conditions, Abstract and Applied Analysis, (2013).

Panakhov, **E. S.** (1985). Determination of a Dirac system from two incompletely given sets of eigenvalues. (Russian) *Akad. Nauk Azerbaĭdzhan.* SSR Dokl. 41 , no. 5, 8–12.

Poisson, **S. D.** (1820). Memoire sur la maniere d'exprimer les functions par des series periodiques, *J. Ecole Polytechnique* 18 417–489.

Povzner, **A. V.** (1948). On Differential Equations of Sturm-Liouville Type on a Half-Axis, Mat. Sb., 23.

Prats, F.; Toll, J. (1959). Construction of the Dirac Equation Central Potential from Phase Shifts and Bound States, Phys. Rev., 113, (1), 363-370.

Prats, F.; Toll, J. (1959). Construction of the Dirac Equation Central Potential from Phase Shifts and Bound States, Phys. Rev., 113, (1), 363-370.

Quigg, C.; Rosner, J. L.; Thacker, H. B. (1978). Inverse Scattering Problem for Quarkonium Systems, I and IIPhys. Rev., D 18, No:1, pp. 274-295.

Roos, B. W.; Sangren, W. C. (1961). Spectra for a Pair Singular First Order Differential Equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, V. 12, pp. 468-476.

Russakovskii, **E. M.** (1975). Operator treatment of boundary problems with spectral parameters entering via polynomials in the boundary conditions, *Funct. Anal. Appl.* 9 358–359.

Russakovskii, **E. M.** The matrix Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary conditions. Algebraic and operator aspects, Trans. Moscow Math. Soc., 57 (1996), 159-184.

Sargsjan, **I. S.** (1966)a. A Theorem of the Completeness of the Eigenfunctions of the Generalized Dirac System, Dokl. Akad. Nauk. Arm. SSR, 42, (2), 77-82.

Sargsjan, **I. S.** (1966)d. Solution of the Cauchy Problem for a One-Dimensional Dirac System. Izv. Akad. Nauk. Arm. SSSR Ser. Mat., 1, (6), 392-436.

Savchuk, A. M.; Shkalikov, A. A. (1999). Sturm-Liouville Operators with Singular Potentials *Mat. Zametki* 66 897-912 (in Russian).

Schmid, H. Tretter, C. Singular Dirac Systems and Sturm–Liouville Problems Nonlinear in the Spectral Parameter, Journal of Differential Equations, 181, 511-542 (2002).

Schneider, A. (1974), A note on eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions, Math. Z., 136, 163-167.

Shkalikov, A. A. Boundary problems for ordinary differential equations with parameter in the boundary conditions, J. Sov. Math., 33 (1986), 1311-1342.

Shkalikov, A. A. Mennicken, R. and Schmid, H. On the eigenvalue accumulation of Sturm-Liouville problems depending nonlinearly on the spectral parameter, Math. Nachr., 189, 157-170 (1998).

Straus, A. V. On spectral functions of differential operators, Izvest. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 19 (1955), 201-220.

Titchmarsh, **E. C**. (1939). The Theory of Functions, Oxford University Press, London.

Tretter, C. On λ-nonlinear boundary eigenvalue problems, Mathematics Research 71 (1993), Akademie Verlag.

Veliev, **S. G.** (1972). Inverse Problem for the Dirac Systems on the Whole Axis, 4917-4972.

Walter, J. (1973), Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions, *Math Z.*, 133, 301-312.

Willis, C. (1985). Inverse Sturm-Liouville Problems With Two Discontinuities, *Inverse Problems 1*, no.3, 263-289.

Yang, Q.; Wang, W. (2011). Asymptotic behavior of a differential operator with discontinuities at two points, *Math. Meth. Appl. Sci.* 34, 373-383.

Yang, C. Fu. (2015). Inverse problems for Dirac equations polynomially depending on the spectral parameter, *Applicable Analysis*.

Yurko, V. A. Boundary value problems with a parameter in the boundary conditions, Izv. Akad. Nauk Armyan. SSR, Ser. Mat., 19, 398–409 (1984), English translation in Soviet J. Contemporary Math. Anal., 19, 62-73 (1984).

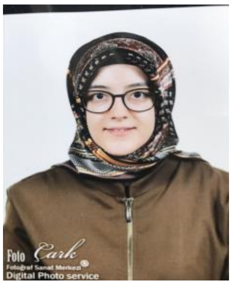
Yurko, V. A. (1998). On the reconstruction of Sturm-Liouville differential operators with singularities inside the interval. (Russian), no. 1, 143–156.

Yurko, V. A. Integral transforms connected with discontinuous boundary value problems, Integral Transforms and Special Functions, 10, 141-164 (2000).

Yurko, V. A. On boundary value problems with jump conditions inside the interval. Differ.Uravn. 36(8), 1139- 1140 (2000) (Russian); English transl. in Diff. Equations, 8, 1266-1269 (2000).

Zayed, E. M. E. Ibrahim, S. F. M. An expansion theorem for an eigenvalue problem on an arbitrary multiply connected domain with an eigenparameter in a general type of boundary conditions, Acta. Math. Sinica (N.S.), 11 (1995), 399-407.

ÖZGEÇMİŞ



Kişisel bilgiler

Adı Soyadı	Kübra ERTİK
Doğum Yeri ve Tarihi	Sakarya, 30.09.1993
Medeni Hali	Bekar
Yabancı Dil	İngilizce
E-posta Adresi	kubraertik@gmail.com

Eğitim ve Akademik Durumu

Lise	Gümüşova İMKB Anadolu Lisesi, 2011
Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2016
Yüksek Lisans	Cumhuriyet Üniversitesi, 2019

İş Tecrübesi

Sivas Bahçeşehir Koleji	Matematik Öğretmeni, 2016
Bitlis Şehit Tahsin Barutçu Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni, 2017