MARMARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ HESAP VE KATSAYI SINIRLAMALARI

CİHAN BACACI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Programı

DANIŞMAN

Doç. Dr. A. Neşe DERNEK

İSTANBUL, 2015

MARMARA UNIVERSITY
INSTITUTE FOR GRADUATE STUDIES
IN PURE AND APPLIED SCIENCES

FRACTIONAL CALCULUS AND COEFFICIENT RESTRICTIONS

CİHAN BACACI

MASTER THESIS

Department of Mathematic

Thesis Supervisor
Doç. Dr. A. Neşe DERNEK

ISTANBUL, 2015

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tezin araştırma ve hazırlanma sürecinde benden yardımlarını esirgemeyen ve bana destek olan sayın hocam Prof. Dr. Ahmet DERNEK ve tez danışmanım Doç. Dr. A. Neşe DERNEK'e, benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen, yaptığım her işte yanımda olan aileme ve dostlarıma sonsuz saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Kesirli Hesap ve Katsayı Sınırlamaları

Bu tezin birinci kısmında Kesirli Türev ve Kesirli İntegral tanımı ve temel özellikleri verilmiştir. İkinci kısımda önce kompleks düzlemde birim dairede analitik ve yalınkat fonksiyonların bazı alt sınıfları tanıtılmakta ve geometrik gösterilişleri verilmektedir.

Analitik fonksiyon sınıflarında integral eşitsizlikleri üzerine, farklı açılardan çok sayıda araştırma yapılmaktadır. Bu kısımda analitik fonksiyonların kesirli integrali ve kesirli türevleri için eşitsizlikler incelenmekte, elde edilen eşitsizliklerden hareketle, distorsiyon teoremleri ve analitik fonksiyonların seri açılımlarındaki katsayı kısıtlamaları hakkındaki sonuçlar incelenmektedir.

ABSTRACT

Fractional Calculus and Coefficient Restrictions

In the first part of this thesis, definitions and principles of fractional derivative and fractional integral are given, In the second part of this thesis, some subclasses of univalent and analytic functions in the unit disc on complex plane are explained.

There are many investigations on different aspects of integral inequalities at analitic functional classes. In the third part of this thesis, analytic functions’ fractional integrals and fractional derivatives are examined. With using proven inequalities, results of distortion theorems and analytic functions’ serial expansion coefficient restrictions are examined.

I BÖLÜM

GİRİŞ

I.1 Giriş ve Amaç

Kesirli hesap, keyfi mertebeden türev ve integrallerin uygulamalarını araştıran matematiksel analizdir. Başlangıcı G.W. Leibniz (1695-1697) ve L.Euler (1730) ın çalışmalarına dayanır. m ve n tam sayı iken n. mertebeden türev, Leibniz türev gösterilişi ile

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(x^n\right)=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-m)}x^{n-m}$$

biçimindedir. Bundan yararlanarak, herhangi bir mertebeden türev, Leibniz gösterilişi yardımıyla $Re(\mu)>0$ için

$$\frac{d^\mu}{dx^\mu}\left(x^\nu\right)=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\mu)}x^{\nu-\mu}$$

biçiminde verilmiştir. Örneğin, $\nu=1$ ve $\mu=1/2$ için

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\left(x\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^{1/2}$$

dir. Günümüze kadar kesirli mertebeden türev ve integraller birçok matematikçinin ilgi alanı olmuş ve çok sayıda araştırma yapılmıştır. Kesirli integrallerin değişik matematikçiler tarafından farklı tanımı verilmiştir. Örneğin, iki farklı tanım aşağıdaki gibidir:

$$\text{Riemann} - \text{Liouville integral tanmı}; \quad {}_0D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\upsilon-1} f(t)dt$$

$$\text{Weyl integral tanmı}; \quad {}_xW_\infty^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_x^\infty (t-x)^{\upsilon-1} f(t)dt$$

Kesirli hesap fizik, kimya ve mühendislik gibi pek çok farklı alanda uygulamaktaır. Klasik analizde yapılan işlemlerin kesirli ana-lizde de uygulanması birçok problemin çözümünde daha gerçekçi sonuçlar elde edilmesi bakımından oldukça önemlidir. Birçok dinamik sistem, kesirli hesaplamaya dayanan kesirli mertebeden dinamik modeller kullanılarak daha iyi karakterize edilmektedir.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde analitik fonksiyonların seri gösterilişlerindeki katsayıların sınırlamaları ile ilgili araştırmalar önemli bir yer tutar. Analitik fonksiyonların katsayıları ve türevlerinin kompleks integrasyon yardımıyla gösterilişinden hareketle, kesirli hesaplar kompleks analizdeki bazı problemlerin incelenmesinde uygulanmaktadır. Birim dairede analitik olan $f(z)$ fonsiyonunun Taylor gösterilişi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (|z| < 1)$$

olsun. Analitik fonksiyonların farklı geometrik özelliklere sahip alt sınıflarında a_n katsayıları için kesirli türev ve kesirli integral yardımıyla yeni sınırlamalar verilmektedir.

Bu tezde birinci bölümde Riemann-Liouville kesirli integral ve kesirli türev tanımları incelenecektir. Birinci kısımda kesirli analizin tarihçesi, çeşitli kesirli integral ve türev tanımları yer alacaktır [23], [26]. İkinci kısımda ise Riemann-Liouville $(R-L)$ kesirli integrali ve $(R-L)$ kesirli türevi için örnekler verilmiştir. Üçüncü kısımda Dirichlet formülü verilerek kesirli integral için komütatif olma özelliği ispatlanmış, türevin kesirli integrali ve kesirli integralin türevinin hesabı için temel teoremler incelenecektir. [23], [24].

Üçüncü bölümde, birim dairede analitik ve normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı A olsun. A nın yıldızıl, α. mertebeden yıldızıl, konveks, α. mertebeden konveks,... gibi alt sınıfları incelenecektir. Dördüncü bölümde, kesirli integral ve kesirli türev yardımıyla, analitik fonksiyon alt sınıflarında bilinen bazı katsayı sınırlamaları incelenecektir. Daha sonra bazı alt sınıflar için distorsiyon teoremleri araştırılmaktadır. Ayrıca, kesirli hesaplar için kısıtlamalar incelenecektir. [4], [11], [22], [12].

Amaç ve Önemi Analizde tamsayı mertebeli işlemler doğaya uygun olmayan bir model iken herhangi bir mertebeden hesaplar, daha gerçekçi yaklaşımlar elde etmemizi sağlar. Bu nedenle kesirli integral, kesirli türev, geometrik karşılıkları olan fonksiyon sınıflarında verilen kısıtlamalar ile mühendislik problemleri, daha iyi karakterize edilmektedir. Bu amaçla bilinen sonuçları geliştirmek ve yeni çalışmalara katkı sağlamak amaçlanmaktadır.

II BÖLÜM

KESİRLİ ANALİZ

Bu bölümde Riemann-Liouville kesirli integral ve kesirli türevler tanımları incelenecektir. Önce kesirli analizin tarihçesi verilmiştir [23]. İkinci kısımda çeşitli kesirli integ-ral ve türev tanımları incelenmektedir [23], [25], [26]. Üçüncü kısımda ise Riemann-Liouville kesirli integrali ele alınmıştır.bu kesirli integrale sahip fonksiyonlar için özel bir sınıf tanımı verilmiştir [23]. Dördüncü kısımda $(R-L)$ kesirli integrali için örnekler yapılmıştır. Beşinci kısımda Dirichlet formülü verilerek kesirli integral için komdeğişme özelliği ispatlanmış, altıncı kısımda ise türevin kesirli integrali ve kesirli integralin türevinin hesabı için teoremler ispatlanmıştır [23], [25]. Yedinci kısımda ise kesirli integral için Leibniz formülünün ispatı yapılmıştır [23]. Sekizinci bölümde kesirli türev tanımı yapılmış ve çeşitli fonksiyonların kesirli türevleri hesaplanmıştır [23]. Dokuzuncu kısımda hem kesirli integralin hem de kesirli türevin uygulanabileceği fonksiyonların bir sınıfı tanımlanmış ve bu sınıfa ait fonksiyonların kesirli türevleri hesaplanmıştır. Onuncu kısımda kesirli türev için kuvvet kuralının, gerçeklendiğine dair teorem incelenmiştir ve son kısımda Leibniz formülü ispat edilmiştir [23], [25].

II.1 Kesirli Analizin Tarihsel Gelişimi

Kesirli mertebeden türev ve integral başlangıcı Leibniz'in 1695'de L'Hospital'e yazdığı mektupta 1/2 mertebeden türevin nasıl olacağı sorusuna dayanır. 1738'de Euler x^a kuvvet fonksiyonunun kesirli türevinin anlamlı olduğunu belirten ilk matematikçidir. 1820 de Lacroix, Euler'in iddiasını desteklemiş ve x^a kuvvet fonksiyonunun yarım mertebeden kesirli türevinin tam formülünü vermiştir. $y = x^m$ fonksiyonunun türevi, gama fonksiyonu yardımıyla

$$\frac{d^n y}{dx^n} x^m = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \tag{II.1.1}$$

biçiminde hesaplamıştır. Lacroix, $m=1$ ve $n=\frac{1}{2}$ için $y = x^m$ nin türevini

$$\frac{d^{1/2}y}{dx^{1/2}} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \tag{II.1.2}$$

biçiminde vermiştir. Daha sonra kuvvet fonksiyonu olmayan herhangi bir iyi fonksiyon için kesirli mertebeden türev 1822'de Fourier tarafından

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^\alpha d\lambda\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda x - t\lambda + \alpha\pi/2)dt$$

biçiminde tanımlanmıştır. Bütün bu çalışmaların ışığında, ilk kesirli mertebeden denk-lem çözümü, Tautochrone probleminin formülü ile 1823'de Abel tarafından $x > a,\ 0 < \mu < 1$ için

$$\int_a^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^\mu}dt = f(x)$$

integral denklemi ile verilmiştir. 1832'den sonra kesirli analizin bazı lineer adi diferansiyel denklemlere uygulanmasını Liouville vermiştir. Liouville'in tanımı, $Re(\alpha_k) > 0$ iken

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k e^{a_k x}$$

serisine genişletilebilen üstel fonksiyonların türetilebilmesine dayanır. Herhangi bir α komplex sayısı için kesirli türevi

$$D^\alpha f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k a_k^\alpha e^{a_k x}$$

olarak hesaplamıştır. Bu tanımdan yola çıkarak, bir kuvvet fonksiyonun kesirli türevini

$$D^\alpha f(x) = \frac{1}{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \varphi(x+t)t^{\alpha-1}dt \quad (-\infty < x < \infty, Re(\alpha) > 0)$$

biçiminde ifade edilmiştir. Bu Liouville'in birinci formülü olarak bilinir. Daha sonra, Riemann'ın 1847'de öğrenciyken yaptığı tanım temel formül haline gelmiştir. Riemann son olarak $x > 0$ için

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}dt$$

tanımını yapmıştır.

II.2 Kesirli İntegral ve Kesirli Türev Tanımı

Kesirli integral ve türevi birbirlerinden farklı şekillerde tanımlanmıştır. Bu anlamda [23], [25], [26] nın gösterimleri en çok ilgi çekmektedir. Bu gösterimler tablo olarak ifade edilirse, Samko, Kilbas ve Marichev, $\nu \in \mathbb{R}^+$ için $[a,b]$ *kapalı* aralığında kesirli türev ve integralleri sağ ve sol kısım olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left(I_{a+}^{\nu} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt \qquad (x > a) \\
\left(D_{a+}^{\nu} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\nu)} \frac{d}{dx} \int_a^x (x-t)^{\nu} f(t)dt \qquad (x > a, 0 < \nu < 1) \\
\left(D_{a+}^{\nu} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_a^x (x-t)^{\nu-n+1} f(t)dt \quad (x > a, n = [\nu]+1)
\end{aligned} \tag{II.2.1}$$

biçiminde tanımlamışlardır. $\left(I_{b-}^{\nu} f\right)(x)$ ve $\left(D_{b-}^{\nu} f\right)(x)$ integralleri de tanımlanır. *Yarı eksen* $[0,\infty)$ *ve reel eksen* de tanımlı kesirli türev ve integralleri Liouville kesirli türev ve integrali olarak $\nu \in \mathbb{R}^+$, $n = [\nu]+1$ için

$$\begin{aligned}
\left(I_{0+}^{\nu} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt \quad (x > 0) \\
\left(I_{-}^{\nu} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_x^{\infty} (t-x)^{\nu-1} f(t)dt \quad (x > 0) \\
\left(I_{+}^{\nu} f\right)(x) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt \quad (x \in \mathrm{R})
\end{aligned} \tag{II.2.2}$$

$$\begin{aligned}
\left(D_{0+}^{\nu} f\right)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{0+}^{n-\nu} f\right)(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x (x-t)^{n-\nu-1} f(t)dt \quad (x > 0)
\end{aligned} \tag{II.2.3}$$

$$\begin{aligned}
\left(D_{-}^{\nu} f\right)(x) &= \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{-}^{n-\nu} f\right)(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^n \int_x^{\infty} (t-x)^{n-\nu-1} f(t)dt, \quad x \in \mathrm{R}
\end{aligned} \tag{II.2.4}$$

$$\begin{aligned}
\left(D_{+}^{\nu} f\right)(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^n \left(I_{+}^{n-\nu} f\right)(x) \\
&= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_{-\infty}^x (x-t)^{\nu-n+1} f(t)dt \quad (x \in \mathrm{R})
\end{aligned} \tag{II.2.5}$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanımlarda $\nu \in \mathbb{C}$ için uygulanmasında $Re(\nu) > 0$ olarak alınır [26]. Podlubny ise Davis'in notasyonunu kullanıp kesirli türev ve integrali, *Riemann-Liouville* kesirli türev ve integrali adı altında $Re(\nu) > 0$ için

$$\begin{aligned}
{}_aD_x^{-\nu} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt \qquad (x > 0) \\
{}_aD_x^{\nu} f(x) &= \left(\frac{d}{dx}\right)^m \int_a^x (x-t)^{m-\nu} f(t)dt \quad (m \le \nu < m+1)
\end{aligned} \tag{II.2.6}$$

biçiminde ifade eder [25].

$$\text{Riemann integral tanmı;} \quad D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt$$

$$\text{Liouville integral tanmı;} \quad D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt \qquad \text{(II.2.7)}$$

$$\text{Riemann - Liouville tanmı;} \quad D^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt$$

biçiminde gösterilmiştir. Miller ve Ross daha çok Riemann-Liouville kesirli integral ve türevi üzerine uygulamalar yapmışlardır [23]. Bu gösterimlerin dışında *Caputo, Grünvald-Letnikov* ve *Erdelyi-Kober* tanımları da kesirli analizde sık kullanılan türev ve integral tanımlarıdır.

Bu formüllerle verilen her bir fonksiyonun sınıfı farklıdır. Bu sınıflar ilerleyen kısımlarda detaylı olarak anlatılacaktır. **D** operatörü, bu anlatımda sözü geçen bütün diferansiyel operatörleri temsil etsin. Bu durumda, f ve g uygun fonksiyonlar ve herhangi α ve β sabitleri için, tamsayı mertebeli türevlerde olduğu gibi kesirli türev operatörleri de

$$\mathbf{D}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathbf{D} f(t) + \beta \mathbf{D} g(t) \qquad \text{(II.2.8)}$$

lineerlik özelliğine sahiptir [23].

II.3 Riemann-Liouville Kesirli İntegrali

Kesirli integralin tanımı için farklı başlangıç yolları vardır. Bunlardan biri çok katlı integral yaklaşımıdır.

$b > x$ ve $[a,b]$ aralığında sürekli olan $f(t)$ fonksiyonunun n katlı integrali,

$$_aD_x^{-n} f(x) = \int_a^x dx_1 \int_a^x dx_2 \int_a^x dx_3 ... \int_a^x f(t)dt \qquad \text{(II.3.1)}$$

biçiminde tanımlanır. $K_n(x,t)$ çekirdeği n,x,t nin bir fonksiyonu olmak üzere, (II.3.1) integralindeki tek katlı integral

$$\int_a^x K_n(x,t) f(t)dt \qquad \text{(II.3.2)}$$

formunda tanımlanır. $n = 2$ için, $G(x,t)$ fonksiyonu , $[a,b] \times [a,b]$ karesinde sürekli olmak üzere $b > x$ için Fubini teoreminden

$$\int_a^x dx_1 \int_a^x G(x_1,t)dt = \int_a^x dt \int_t^x G(x_1,t)dx_1 \qquad \text{(II.3.3)}$$

eşitliği gerçeklenir. Özel olarak, $G(x_1,t)$ sadece t ye bağlı bir fonksiyon ise $G(x_1,t) = f(t)$ alınır. Bu durumda (II.3.1) formülü

$$\int_a^x dx_1 \int_a^x f(t)dt = \int_a^x \left(f(t) \int_t^x dx_1 \right) dt$$
$$= \int_a^x (x-t) f(t) dt$$

bulunur. $n=3$ alınırsa üçüncü mertebeden integral

$$
\begin{aligned}
{}_a D_x^{-3} f(x) &= \int_a^x dx_1 \int_a^x dx_2 \int_a^x f(t)dy \\
&= \int_a^x dx_1 \left[\int_a^x dx_2 \int_a^x f(t)dy \right] \\
&= \int_a^x dx_1 \left(\int_a^x (x_1 - t) f(t)dt \right) \\
&= \int_a^x \left(f(t) \int_t^x (x_1 - t) dx_1 \right) dt \\
&= \int_a^x f(t) \frac{(x-t)^2}{2} dt
\end{aligned}
$$

olur. Bu işlem n kez uygulandığında

$$ {}_a D_x^{-n} f(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)dt \qquad \text{(II.3.4)}$$

elde edilir. Bu nedenle,

$$K_n(x,t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \qquad \text{(II.3.5)}$$

olarak alınırsa (II.3.1) ile verilen integral

$$ {}_a D_x^{-n} f(x) = \int_a^x K_n(x,t) f(t)dt$$

biçimini alır. (II.3.4) eşitliği

$$ {}_a D_x^{-n} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_a^x (x-t)^{\nu-1} f(t)dt$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca $K_n(x,t)$, n pozitif tamsayı olmadığı durumda da anlam-lıdır. Bu nedenle integral gösterilişi keyfi mertebeye genişletilebilir. Her $Re(\nu) > 0$ için kesirli integral

$$ {}_a D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \qquad \text{(II.3.6)}$$

biçiminde tanımlanır.

(II.3.6) integralinde $a = 0$ alınarak yapılan çalışmalar daha yaygındır. Bu nedenle Riemann-Liouville kesirli hesabı için işlemler $a = 0$ özel hali için incelenecektir.

Riemann Liouville kesirli integrali, $(0,\infty)$ da parçalı sürekli ve $[0,\infty)$ da integrallenebilir fonksiyonların sınıfı için tanımlıdır. Bu sınıfı $\mathcal{N}$ ile gösterelim.

Tanım II.1 $f(t) \in \mathcal{N}$ *olsun. Bu durumda her* $t > 0$ *ve* $Re(\nu) > 0$ *için*

$$ {}_0D_t^{-\nu} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-\xi)^{\nu-1} f(\xi) d\xi \qquad \text{(II.3.7)} $$

integraline ν mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali denir.

II.4 Kesirli İntegral Örnekleri

Bu kısımda bazı elemanter fonksiyonların kesirli integrallerini ilişkin örnekler verilecektir.

Örnek II.1 $\mu > -1,\ x > 0$ *için* $f(x) = x^{\mu}$ *fonksiyonunun kesirli integralini bulalım.*

(II.3.7) den fonksiyonun kesirli integrali

$$ D^{-\nu} x^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (x-t)^{\nu-1} t^{\mu} dt \qquad \text{(II.4.1)} $$

olarak elde edilir ve

$$ D^{-\nu} x^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^x (1-\frac{t}{x})^{\nu-1} x^{\nu-1} t^{\mu} dt $$

biçiminde düzenlenir. $u = \dfrac{t}{x}$ dönüşümü yapılırsa

$$ \begin{aligned} D^{-\nu} x^{\mu} &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^1 (1-u)^{\nu-1} x^{\nu-1} (xu)^{\mu} x du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} x^{\mu+\nu} \int_0^1 (1-u)^{\nu-1} u^{\mu} du \end{aligned} \qquad \text{(II.4.2)} $$

bulunur. (II.4.2) integrali Beta fonksiyonuna benzetilebilir. Beta fonksiyonu her $x, y \in \mathbb{R}^{+}$ için

$$ B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \qquad \text{(II.4.3)} $$

olarak tanımlanır. Bu nedenle, x^{μ} fonksiyonunun kesirli integrali

$$D^{-\nu}x^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}x^{\mu+\nu}B(\mu+1,\nu)$$

olarak hesaplanır. Böylece $\nu > 0$, $\mu > -1$ ve $x > 0$ için

$$D^{-\nu}x^{\mu} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+1)}x^{\mu+\nu} \tag{II.4.4}$$

elde edilir.

Örnek II.2 $f(x) = K$ *sabit fonksiyonunun kesirli integralini bulalım.*

(II.4.1) denkleminde $f(x) = Kx^{\mu}$ olarak alınırsa,

$${}_0D_x^{-\nu}Kx^{\mu} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\nu-1}Kt^{\mu}dt \tag{II.4.5}$$

bulunur. $\mu = 0$ alınırsa,

$${}_0D_x^{-\nu}K = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^x (x-t)^{\nu-1}Kdt = \frac{K}{\Gamma(\nu)}\left.\frac{(x-t)^{\nu}}{\nu}\right|_0^x$$

elde edilir. Böylece, sabit bir fonksiyonunun kesirli integrali

$${}_0D_x^{-\nu}K = \frac{K}{\Gamma(\nu+1)}x^{\nu} \tag{II.4.6}$$

biçiminde bulunur.

Örnek II.3 $f(t) = e^{at}$ *fonksiyonun kesirli integralini bulalım.*

(II.3.7) den verilen fonksiyonun kesirli integrali $\nu > 0$ için

$${}_0D_t^{-\nu}e^{at} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-y)^{\nu-1}e^{ay}dy \tag{II.4.7}$$

olur. $t - y = \xi$ dönüşümü yapılırsa,

$${}_0D_t^{-\nu}e^{at} = \frac{e^{at}}{\Gamma(\nu)}\int_0^t \xi^{\nu-1}e^{-a\xi}d\xi \tag{II.4.8}$$

elde edilir. Bu eşitlik

$$\gamma^*(\nu,t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)t^{\nu}}\int_0^t \xi^{\nu-1}e^{-\xi}d\xi \tag{II.4.9}$$

biçiminde tanımlanan incomplete gamma fonksiyonu cinsinden yazılabilir. (II.4.8) denklemi t^ν ile genişletilir ve $a\xi = x$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-\nu}e^{at} &= \frac{e^{at}t^\nu}{\Gamma(\nu)t^\nu}\int_0^t \xi^{\nu-1}e^{-a\xi}d\xi \\ &= \frac{t^\nu e^{at}}{\Gamma(\nu)t^\nu}\int_0^t\left(\frac{x}{a}\right)^{\nu-1}e^{-x}\frac{dx}{a} \\ &= t^\nu e^{at}\frac{1}{\Gamma(\nu)(at)^\nu}\int_0^t x^{\nu-1}e^{-x}dx \end{aligned} \tag{II.4.10}$$

elde edilir. (II.4.9) denkleminde t yerine at alınarak

$${}_0D_t^{-\nu}e^{at} = t^\nu e^{at}\gamma^*(\nu, at) \tag{II.4.11}$$

bağınıtısı elde edilir. Bundan sonra ${}_0D_t^{-\nu}e^{at} = E_t(\nu, a)$ ile gösterilecektir. Buna göre

$$E_t(\nu, a) = t^\nu e^{at}\gamma^*(\nu, at) \tag{II.4.12}$$

olarak yazılır. Benzer biçimde ${}_0D_t^{-\nu}\cos(at) = C_t(\nu, a)$ ve ${}_0D_t^{-\nu}\sin(at) = S_t(\nu, a)$ ile gösterilir. Bu gösterilişler

$$\begin{aligned} {}_0D_t^{-\nu}e^{at} &= E_t(\nu, a) \\ {}_0D_t^{-\nu}\cos(at) &= C_t(\nu, a) \\ {}_0D_t^{-\nu}\sin(at) &= S_t(\nu, a) \end{aligned} \tag{II.4.13}$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer işlemlerle $logx$ ve $x^\lambda logx$ fonksiyonunun kesirli integrali bulunabilir:

$${}_0D_x^{-\nu}\log x = \frac{x^\nu \log(x)}{\nu\Gamma(\nu)} + \frac{x^\nu}{\Gamma(\nu)}B(1,\nu)[\psi(1) - \psi(1+\nu)],$$

$${}_0D_x^{-\nu}\left[x^\lambda \log x\right] = \frac{x^{\nu+\lambda}\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\nu+\lambda+1)}[\log x + \psi(\lambda+1) - \psi(\lambda+\nu+1)].$$

II.5 Kesirli İntegral için Kuvvet Kuralı

Operatörlerde kuvvetlerin toplanması önemli bir kuraldır. Bu bölümde N sınıfından fonksiyonlar için integral operatörünün değişme özelliği gösterilecektir. Kesirli integral için kuvvet kuralını ispatlamak için Dirichlet formülünden yararlanılır.

Dirichlet Formülü: F öklid uzayında sürekli ve $\lambda, \mu, \nu > 0$ olsun. O hâlde

$$\begin{aligned} &\int_a^t (t-x)^{\mu-1}\left(\int_a^x (y-a)^{\lambda-1}(x-y)^{\nu-1}F(x,y)dy\right)dx \\ &= \int_a^t (y-a)^{\lambda-1}\left(\int_y^t (t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\nu-1}F(x,y)dx\right)dy \end{aligned} \tag{II.5.1}$$

eşitliği gerçeklenir. Buradan $a=0$, $\lambda=1$ ve $F(x,y)=g(x)f(y)$ için

$$\int_0^t (t-x)^{\mu-1} g(x)\left(\int_0^x (x-y)^{\nu-1} f(y)dy\right)dx = \int_0^t f(y)\left(\int_y^t (t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\nu-1} g(x)dx\right)dy$$

elde edilir. Burada $g(x)\equiv 1$ seçilirse

$$\int_0^t (t-x)^{\mu-1}\left(\int_0^x (x-y)^{\nu-1} f(y)dy\right)dx = \int_0^t f(y)\left(\int_y^t (t-x)^{\mu-1}(x-y)^{\nu-1} dx\right)dy$$

eşitliği elde edilir. İntegralde $x=y+(t-y)s$ dönüşümü yapılırsa eşitliğin sağ tarafı

$$\begin{aligned}&\int_0^t f(y)\left(\int_0^1 (t-y)^{\nu-1} s^{\nu-1}(t-y)^{\nu-1}(1-s)^{\mu-1}(t-y)ds\right)dy\\ &= \int_0^t f(y)(t-y)^{\nu+\mu-1}\left(\int_0^1 s^{\nu-1}(1-s)^{\mu-1}ds\right)dy\end{aligned}$$

olur. (II.4.3) den

$$\int_0^t (t-x)^{\mu-1}\left(\int_0^x (x-y)^{\nu-1} f(y)dy\right)dx = B(\mu,\nu)\int_0^t f(y)(t-y)^{\nu+\mu-1}dy \qquad \text{(II.5.2)}$$

bulunur.

Teorem II.1 $f(t)$, $[0,\infty)$ *aralığında sürekli ve* $\mu,\nu>0$ *olsun. Bu halde her* t *için*

$$D^{-\nu}\left[D^{-\mu}f(t)\right] = D^{-(\mu+\nu)}f(t) = D^{-\mu}\left[D^{-\nu}f(t)\right]$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Tanım II.1 den

$$\begin{aligned}D^{-\nu}\left[D^{-\mu}f(t)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-x)^{\nu-1}\left[D^{-\mu}f(x)\right]dx\\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-x)^{\nu-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^x (x-y)^{\mu-1}f(y)dy\right]dx\end{aligned}$$

olur. (II.5.2) eşitliğinden ise

$$D^{-\nu}\left[D^{-\mu}f(t)\right] = \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}B(\mu,\nu)\int_0^t (t-y)^{\nu+\mu-1}f(y)dy$$

elde edilir. (II.4.3) den

$$\begin{aligned}D^{-\nu}\left[D^{-\mu}f(t)\right] &= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(\mu)}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^t (t-y)^{\nu+\mu-1}f(y)dy\\ &= \frac{1}{\Gamma(\mu+\nu)}\int_0^t (t-y)^{\nu+\mu-1}f(y)dy\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak Tanım II.1 den

$$D^{-\nu}\left[D^{-\mu}f(t)\right]=D^{-(\mu+\nu)}f(t) \qquad \text{(II.5.3)}$$

olduğu görülür.

Elemanter bir fonksiyonun kesirli integralinin elemanter olmasına gerekmez. Teorem II.1 elemanter olmayan fonksiyonların kesirli integrallerinin hesaplanmasında kullanılabilir. Örneğin $f(t)=e^{at}$ için, fonksiyonun sürekli olduğu yerlerde Teorem II.1 den, $\mu,\nu>0$ için

$$D^{-\nu}\left[D^{-\mu}e^{at}\right]=D^{-(\mu+\nu)}e^{at}$$

olur. Ayrıca (II.4.13) formüllerinden $D^{-\mu}e^{at}=E_t(\mu,a)$ idi. Bu durumda

$$D^{-(\mu+\nu)}e^{at}=E_t(\nu+\mu,a)$$

yazılabilir. Böylece, $\mu>-1,\nu>0$ için

$$D^{-\nu}E_t(\mu,a)=E_t(\nu+\mu,a) \qquad \text{(II.5.4)}$$

elde edilir. Benzer şekilde $C_t(\mu,a)$ ve $S_t(\mu,a)$ için

$$\begin{aligned} D^{-\nu}C_t(\mu,a)&=C_t(\nu+\mu,a) \quad (\mu>-1,\nu>0)\\ D^{-\nu}S_t(\mu,a)&=S_t(\nu+\mu,a) \quad (\mu>-2,\nu>0)\end{aligned} \qquad \text{(II.5.5)}$$

eşitlikleri elde edilir.

II.6 Kesirli İntegralin Türevi ve Türevin Kesirli İntegrali

Bir önceki kısımda kesirli integralin integrali için

$$D^{-\nu}\left[D^{-\mu}f(t)\right]=D^{-(\mu+\nu)}f(t)$$

eşitliğinin sağlandığı gösterildi. Türev için bu eşitlik her durumda sağlanmaz. Bu eşitlik bazı özel fonksiyon sınıfları için geçerlidir. Şimdi kesirli integralin türevi ve türevin kesirli integrali için bazı teoremler ispatlayalım.

Teorem II.2 $f(t)$ *fonksiyonu* $[0,\infty)$ *aralığında sürekli ve* $\nu>0$ *olsun. Bu halde*

a) $Df(t)\in\mathcal{N}$ *ise*

$$D^{-\nu-1}[Df(t)]=D^{-\nu}[f(t)]-\frac{f(0)}{\Gamma(\nu+1)}t^{\nu} \tag{II.6.1}$$

b) $Df(t)$ *fonksiyonu* $[0,\infty)$ *aralığında sürekli ise* $t>0$ *için,*

$$D[D^{-\nu}f(t)]=D^{-\nu}[Df(t)]+\frac{f(0)}{\Gamma(\nu)}t^{\nu-1} \tag{II.6.2}$$

eşitlikleri gerçeklenir.

İspat: (a) $f(t)$ fonksiyonu $[0,\infty)$ da sürekli, $\nu>0$ ve $Df(t)\in\mathcal{N}$ olsun. Tanım II.1 den

$$D^{-\nu-1}[Df(t)]=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^t(t-\xi)^{\nu}[Df(\xi)]d\xi \tag{II.6.3}$$

integrali elde edilir. Burada kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^t(t-\xi)^{\nu}[Df(\xi)]d\xi=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left[(t-\xi)^{\nu}f(\xi)\right]_0^t+\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\nu\int_0^t(t-\xi)^{\nu-1}f(\xi)d\xi$$

$$=-\frac{f(0)}{\Gamma(\nu+1)}t^{\nu}+\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t(t-\xi)^{\nu-1}f(\xi)d\xi$$

eşitliği bulunur. Böylece, (II.6.3) eşitliği

$$D^{-\nu-1}[Df(t)]=-\frac{f(0)}{\Gamma(\nu+1)}t^{\nu}+\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t(t-\xi)^{\nu-1}f(\xi)d\xi \tag{II.6.4}$$

biçiminde elde edilir. Burada integralin Tanım II.1 den kesirli integrale eşit olduğu görülür. Sonuç olarak

$$D^{-\nu-1}[Df(t)]=D^{-\nu}[f(t)]-\frac{f(0)}{\Gamma(\nu+1)}t^{\nu}$$

eşitliği gerçeklenir.

(b) (II.3.7) integralinde $\xi=t-x^{\lambda},\lambda=\dfrac{1}{\nu}$ dönüşümü yapılırsa

$$D^{-\nu}[f(t)]=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{t^{\nu}}(t-\xi)^{\nu-1}f(\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^{t^{\nu}}(t-t+x^{\lambda})^{\nu-1}f(t-x^{\lambda})\left(-\lambda x^{\lambda-1}dx\right)$$

$$=\frac{\lambda}{\Gamma(\nu)}\int_0^{t^{\nu}}x^{\lambda(\nu-1)}f(t-x^{\lambda})x^{\lambda-1}dx$$

$$=\frac{1}{\nu\Gamma(\nu)}\int_0^{t^{\nu}}x^{1-\lambda}x^{\lambda-1}f(t-x^{\lambda})dx$$

elde edilir. Buradan

$$D^{-\nu}\left[f(t)\right]=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^t f(t-x^{\lambda})dx$$

bulunur. $t>0$ için, her iki taraftan türev alınırsa Leibniz integral formülünden

$$D\left[D^{-\nu}f(t)\right]=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(f(0)\left(\nu t^{\nu-1}\right)+\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[f(t-x^{\lambda})\right]dt\right)$$

elde edilir. $\xi=t-x^{\lambda}$ değişken dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}D\left[D^{-\nu}f(t)\right]&=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left[f(\xi)\right]\nu(t-\xi)^{\nu-1}d\xi+\frac{f(0)}{\Gamma(\nu)}t^{\nu-1}\\&=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t(t-\xi)^{\nu-1}\left[Df(\xi)\right]d\xi+\frac{f(0)}{\Gamma(\nu)}t^{\nu-1}\end{aligned}$$

olur. Buradaki integralin Tanım II.1 den $Df(t)$ fonksiyonunun kesirli integrali olduğu açıktır. Bu nedenle

$$D\left[D^{-\nu}f(t)\right]=D^{-\nu}\left[Df(t)\right]+\frac{f(0)}{\Gamma(\nu)}t^{\nu-1}$$

eşitliği gerçeklenir.

Örnek olarak $f(t)=e^{at}$ fonksiyonunu alalım. (II.6.1) den

$$D^{-\nu-1}\left[ae^{at}\right]=D^{-\nu}\left[e^{at}\right]-\frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)}$$

eşitliği sağlanır. (II.4.13) formüllerinden

$$aE_t(\nu+1,a)=E_t(\nu,a)-\frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu+1)} \tag{II.6.5}$$

olarak yazılır. Böylece E_t için bir indirgeme formülü elde edilir. (II.6.2) den

$$D\left[D^{-\nu}e^{at}\right]=D^{-\nu}\left[ae^{at}\right]+\frac{f(0)}{\Gamma(\nu)}t^{\nu-1}$$

eşitliği vardır. (II.4.13) formüllerinden

$$DE_t(\nu,a)=aE_t(\nu,a)-\frac{t^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \tag{II.6.6}$$

olarak yazılır. Sonuç olarak (II.6.5) de $\nu\to\nu-1$ olarak alınır ve (II.6.6) da yerine yazılırsa

$$DE_t(\nu,a)=E_t(\nu-1,a)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$DC_t(\nu,a)=C_t(\nu-1,a)$$
$$DS_t(\nu,a)=S_t(\nu-1,a)$$

elde edilir.

Teorem II.3 $f(t)$, $[0,\infty)$ *de sürekli,* $p\in\mathbb{Z}^+,\nu>p$ *olsun. O hâlde her* $x\in[0,\infty)$ *için*

$$D^p\left[D^{-\nu}f(x)\right]=D^{-(\nu-p)}f(x)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat: $\nu>p$ olduğundan

$$D^{p-1}\left[D^{-\nu}f(x)\right]=D^{-(-p)-1}\left[D^{-\nu}f(x)\right]=D^{-(\nu-p)-1}f(x)$$

yazılabilir. Eşitliğin her iki tarafında türev alınırsa

$$D^p\left[D^{-\nu}f(x)\right]=D\left[D^{-(\nu-p)-1}f(x)\right] \quad \text{(II.6.7)}$$

bulunur. (II.6.2) eşitliğinde ν yerine $\nu-p+1$ konursa

$$D\left[D^{-(\nu-p)-1}f(x)\right]=D^{-(\nu-p)-1}\left[Df(x)\right]+\frac{f(0)}{\Gamma(\nu-p+1)}x^{\nu-p}$$

elde edilir. Bu eşitlik (II.6.7) denkleminin sağ tarafında yerine yazılırsa

$$D^p\left[D^{-\nu}f(x)\right]=D^{-(\nu-p)-1}\left[Df(x)\right]+\frac{f(0)}{\Gamma(\nu-p+1)}x^{\nu-p} \quad \text{(II.6.8)}$$

elde edilir. Öte yandan (II.6.1) de ν yerine $\nu-p$ konursa

$$D^{-(\nu-p)-1}\left[Df(x)\right]=D^{-(\nu-p)}\left[f(x)\right]-\frac{f(0)}{\Gamma(\nu-p+1)}x^{\nu-p}$$

bulunur. Bu eşitlik (II.6.8) denkleminde yerine konursa

$$D^p\left[D^{-\nu}f(x)\right]=D^{-(\nu-p)}\left[f(x)\right]-\frac{f(0)}{\Gamma(\nu-p+1)}x^{\nu-p}+\frac{f(0)}{\Gamma(\nu-p+1)}x^{\nu-p}$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan

$$D^p\left[D^{-\nu}f(x)\right]=D^{-(\nu-p)}\left[f(x)\right] \quad \text{(II.6.9)}$$

olarak bulunur.

II.7 Kesirli İntegral için Leibniz Formülü

Leibniz formülü, iki fonksiyonun çarpımının türevini, iki fonksiyonun türevleri çarpımının toplamı olarak ifade edilmesidir. Analizde klasik Leibniz formülü,

$$D^n\left[f(t)g(t)\right]=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D^k g(t)D^{n-k}f(t) \qquad \text{(II.7.1)}$$

biçimindedir. Leibniz formülü seri gösterimine sahip birçok özel fonksiyonun kesirli türev ve integralini bulmak için kullanılır.

Teorem II.4 *$f(t)$, $[0,X]$ de sürekli ve $g(t)$, her $a\in[0,X]$ için a da analitik olsun. Bu durumda, her $\nu>0$ ve $0\le t\le X$ için,*

$$D^{-\nu}\left[f(t)g(t)\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\nu}{k}D^k g(t)D^{-\nu-k}f(t) \qquad \text{(II.7.2)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $f(t)$, $[0,X]$ de sürekli ve $g(t)$ her $a\in[0,X]$ için a da analitik olsun. Bu durumda $fg\in\mathcal{N}$ olur. $\nu>0$ için Tanım II.1 den

$$D^{-\nu}\left[f(t)g(t)\right]=\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t(t-\xi)^{\nu}\left[f(\xi)g(\xi)\right]d\xi \quad \left(0<t\le X\right) \qquad \text{(II.7.3)}$$

kesirli integrali vardır. Özel olarak

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{D^k g(t)}{k!}(t-\xi)^k \\ &= g(t)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{D^k g(t)}{k!}(t-\xi)^k \end{aligned} \qquad \text{(II.7.4)}$$

biçiminde yazılabilir.

(II.7.4) deki seri her ξ için $[0,t]$ yi içeren belli bir aralıkta yakınsaktır. $[0,t]$ de düzgün yakınsaktır. (II.7.4) formülü (II.7.3) de yerine yazılırsa

$$D^{-\nu}\left[f(t)g(t)\right]=g(t)D^{-\nu}f(t)+\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t(t-\xi)^{\nu}f(\xi)\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{D^k g(t)}{k!}(t-\xi)^{k-1}d\xi \qquad \text{(II.7.5)}$$

olur. f, $[0,X]$ de sürekli ve $\nu>0$ iken

$$(t-\xi)^{\nu}f(\xi)$$

$\left[0,t\right]$ de sınırlıdır. Bu nedenle (II.7.5) de integral ve toplam yer değiştirebilir. (II.7.5) eşitliği

$$D^{-\nu}\left[f(t)g(t)\right]=g(t)D^{-\nu}f(t)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}\left[D^k g(t)\right]\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t(t-\xi)^{\nu+k-1}f(\xi)d\xi$$

biçimini alır. Bu eşitlik $\Gamma(\nu+k)$ ile genişletilerek

$$D^{-\nu}\left[f(t)g(t)\right]=g(t)D^{-\nu}f(t)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!}\left[D^k g(t)\right]\frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)}\frac{1}{\Gamma(\nu+k)}\int_0^t(t-\xi)^{\nu+k-1}f(\xi)d\xi$$

biçiminde düzenlenebilir. Burada $(-1)^k\dfrac{\Gamma(\nu+k)}{k!\Gamma(\nu)}=\begin{pmatrix}-\nu\\ k\end{pmatrix}$ eşitliğinden ve Tanım II.1 den

$$\begin{aligned}D^{-\nu}\left[f(t)g(t)\right]&=g(t)D^{-\nu}f(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix}-\nu\\ k\end{pmatrix}\left[D^k g(t)\right]\left[\frac{1}{\Gamma(\nu+k)}\int_0^t(t-\xi)^{\nu+k-1}f(\xi)d\xi\right]\\ &=g(t)D^{-\nu}f(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\begin{pmatrix}-\nu\\ k\end{pmatrix}\left[D^k g(t)\right]\left[D^{-\nu-k}f(t)\right]\\ &=\sum_{k=0}^{\infty}\begin{pmatrix}-\nu\\ k\end{pmatrix}\left[D^k g(t)\right]\left[D^{-\nu-k}f(t)\right]\end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir.

II.8 Riemann-Liouville Kesirli Türevi

Kesirli integral $\nu>0$ için $D^{-\nu}$ ile gösterilmişti. Bu bölümde ise $\mu>0$ için D^{μ} ile gösterilen kesirli türev incelenecektir. Kesirli integral için yapılan işlemler kesirli türev için de uygulanacaktır.

Tanım II.2 *$f\in\mathcal{N}$ ve $\mu,t>0$ olsun. $\mu\le m<\ \mu+1$ ve $\nu=m-\mu>0$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun μ mertebeden kesirli türevi*

$$D^{\mu}\left[f(t)\right]=D^{m}\left[D^{-\nu}f(t)\right]=D^{m}\left[D^{-(m-\mu)}f(t)\right] \qquad \text{(II.8.1)}$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek II.4 *$\lambda>-1$ için $f(t)=t^{\lambda}$ fonksiyonunun kesirli türevini bulalım.*

μ bir pozitif sayı ve $\mu \leq m < \mu + 1$ olsun. O hâlde t^{λ} fonksiyonunun μ mertebeden kesirli türevi Tanım II.2 den

$$D^{\mu}t^{\lambda} = D^{m}\left[D^{-\nu}t^{\lambda}\right]$$

olur. $t > 0$ için (II.4.4) den

$$\begin{aligned} D^{\mu}t^{\lambda} &= D^{m}\left[\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\nu+1)}t^{\lambda+\nu}\right] \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+\nu+1)}D^{m}t^{\lambda+\nu} \end{aligned}$$

elde edilir. $t^{\lambda+\nu}$ fonksiyonun m -mertebeden adi türevi (II.1.1) den

$$D^{m}t^{\lambda+\nu} = \frac{\Gamma(\lambda+\nu+1)}{\Gamma(\lambda+\nu-m+1)}t^{\lambda+\nu-m}$$

biçimindedir. Dolayısıyla

$$D^{\mu}t^{\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}t^{\lambda+\nu-m}$$

olur. $\nu - m = -\mu$ olduğundan $f(t) = t^{\lambda}$ fonksiyonunun kesirli türevi $\lambda > -1$ için

$$D^{\mu}t^{\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}t^{\lambda-\mu} \qquad \text{(II.8.2)}$$

olarak elde edilir.

Örnek II.5 $f(t) = K$ *sabit fonksiyonunun kesirli türevini bulalım.*

(II.8.2) de fonksiyon Kt^{λ} olarak alınırsa $\lambda > -1$ için

$$D^{\mu}Kt^{\lambda} = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\mu+1)}Kt^{\lambda-\mu}$$

olarak elde edilir. Burada $\lambda = 0$ olarak alınırsa sabit bir fonksiyonun türevi

$$D^{\mu}K = \frac{t^{-\mu}}{\Gamma(-\mu+1)}K$$

biçiminde bulunur.

Bu sonuç kesirli analizde, klasik analizde bilinen sabit fonksiyonun türevinden farklı bir sonuç elde edildiğini gösterir.

Örnek II.6 $f(t) = e^{at}$ *fonksiyonunun kesirli türevini bulalım.*

e^{at} fonksiyonunun μ mertebeden kesirli türevi Tanım II.2 den

$$D^{\mu}e^{at} = D^{m}\left[D^{-\nu}e^{at}\right]$$

olur. Daha önce $t > 0$ için verilen $D^{-\nu}e^{at} = E_t(\nu, a)$ eşitliğinden hareketle

$$D^{\mu}e^{at} = D^{m}[E_t(\nu, a)] = E_t(\nu - m, a)$$

elde edilir. $\nu - m = -\mu$ olduğundan $f(t) = e^{at}$ fonksiyonunun kesirli türevi

$$D^{\mu}e^{at} = E_t(-\mu, a) \qquad \text{(II.8.3)}$$

olarak bulunur.

Benzer biçimde $f(t) = \sin at$ ve $f(t) = \cos at$ fonksiyonlarının kesirli türevi

$$D^{\mu}\sin at = S_t(-\mu, a)$$
$$D^{\mu}\cos at = C_t(-\mu, a)$$

olduğu görülür. Ayrıca $E_t(\lambda, a)$, $S_t(\lambda, a)$, $C_t(\lambda, a)$ fonksiyonlarının kesirli türevi de kolayca hesaplanabilir. $\mu = m - \nu$ olmak üzere Tanım II.2 den

$$D^{\mu}[E_t(\lambda, a)] = D^{m}\left[D^{-\nu}E_t(\lambda, a)\right]$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} D^{\mu}[E_t(\lambda, a)] &= D^{m}[E_t(\lambda + \nu, a)] \\ &= E_t(\lambda + \nu - m, a) \end{aligned}$$

bulunur. $\nu - m = -\mu$ olduğundan

$$D^{\mu}[E_t(\lambda, a)] = E_t(\lambda - \mu, a)$$

elde edilir. Benzer şekilde S_t ve C_t fonksiyonlarının kesirli türevi

$$D^{\mu}[S_t(\lambda, a)] = S_t(\lambda - \mu, a)$$
$$D^{\mu}[C_t(\lambda, a)] = C_t(\lambda - \mu, a)$$

biçiminde bulunur.

II.9 Fonksiyon Sınıfları

Kesirli integral ve kesirli türevin uygulanabileceği bir fonksiyon sınıfı tanımlayalım.

Tanım II.3 $\nu > 0$ *mertebeden hem türetilebilen hem de integrallenebilen fonksiyonların sınıfını $\mathcal{T}$ ile gösterelim. $\mathcal{T}$ sınıfı $\mathcal{N}$ sınıfının bir alt sınıfıdır.*

Bu sınıfa ait fonksiyonlar aynı mertebeden hem kesirli integrale hem de kesirli türeve sahiptir. Dikkat edilirse, önceki bölümde incelenen iki fonksiyonun

$$f(t) = t^{\lambda}\eta(t) \tag{II.9.1}$$

veya

$$f(t) = t^{\lambda}(\log t)\eta(t) \tag{II.9.2}$$

biçiminde olduğu görülür. Burada $\lambda > -1$ ve $\eta(t)$ bir tam fonksiyondur ve

$$\eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

biçiminde gösterilebilir. O hâlde $\mathcal{T}$ sınıfının (II.9.1) ve (II.9.2) biçiminde tanımlanabilen fonksiyonların sınıfı olduğunu söyleyebiliriz. Böylece (II.9.1) biçimindeki bir fonksiyonun ν mertebeden türevi (II.4.4) ve (II.8.2) den

$$D^{\nu} f(t) = D^{\nu}\left[\sum_{n=2}^{\infty} a_n t^{n+\lambda}\right] = t^{\lambda-\nu}\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-\nu)} t^n \tag{II.9.3}$$

biçiminde olur. Fonksiyon (II.9.2) ile verilirse kesirli türevi (II.4.15) ve $t^{\lambda}(\log t)$ nin kesirli türevinden

$$\begin{aligned} D^{\nu} f(t) &= D^{\nu}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+\lambda} \log t\right] \\ &= t^{\lambda-\nu} \log t \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-\nu)} t^n \\ &+ t^{\lambda-\nu}\sum_{n=0}^{\infty} a_n [\psi(n+\lambda+1) - \psi(n+\lambda-\nu+1)] \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-\nu)} t^n \end{aligned} \tag{II.9.4}$$

biçiminde elde edilir.

Teorem II.5 $\eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *serisinin yakınsaklık yarıçapı R olsun. $\alpha > 0$ ve β keyfi sabitler olmak üzere*

$$\zeta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\beta)} t^n$$

olsun. $0 < S < R$ *koşulunu sağlayan* $S > 0$ *sayısı için* $\zeta(t)$ *fonksiyonu* $[-S,S]$ *aralığında mutlak ve düzgün yakınsaktır.*

İspat: T sayısı

$$0 < S < T < R$$

eşitsizliğini sağlasın. Buradan yeterince büyük n ler için

$$\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\beta)}\left(\frac{S}{T}\right)^n > \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+\beta+2)}\left(\frac{S}{T}\right)^{n+1}$$

eşitsizliğinin doğru olduğu görülür. Böylece $n \geq N$ eşitsizliğini sağlayan bir N vardır ve $|t| \leq S$ için

$$\left|\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\beta)}a_n t^n\right| \leq \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\beta)}|a_n|\left(\frac{S}{T}\right)^n T^n$$

$$\leq |a_n| T^n \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\beta)}$$

elde edilir. $T < R$ için

$$|a_n|T^n + |a_{n+1}|T^{n+1} + \cdots$$

serisi yakınsak bir seridir. Weierstrass karşılaştırma teoremine göre $\zeta(t)$ fonksiyonu $[-S,S]$ aralığında düzgün yakınsak ve $|t| \leq S$ olmak üzere her t için mutlak yakınsaktır.

II.10 Kesirli Türevde Üs Kuralı

Kesirli integralde Dirichlet formülünden yararlanarak

$$D^{-\mu}\left[D^{-\nu} f(t)\right] = D^{-(\mu+\nu)} f(t) = D^{-\nu}\left[D^{-\mu} f(t)\right]$$

olduğunu göstermiştik. Bu bölümde benzer eşitlik kesirli türev için gösterilecektir.

Teorem II.6 $f(t)$ *fonksiyonu (II.9.1) ya da (II.9.2) biçiminde bir fonksiyon olsun ve* $\eta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ *fonksiyonu bir* $R > 0$ *sayısı için yakınsasın.* $0 < X < R$ *olmak üzere her* $t \in (0, X]$ *için*

$$D^{\nu}\left[D^{u} f(t)\right] = D^{u+\nu} f(t) \qquad \text{(II.10.1)}$$

denklemi iki durumda gerçeklenir:

(a) $u < \lambda + 1$ *ve* ν *keyfi, veya*

(b) $u \geq \lambda + 1, u \leq m$, ν *keyfi ve* $k = 0,1,\cdots,m-1$ *için* $a_k = 0$ *dır.*

İspat: (a) $u < \lambda + 1$ olsun. $\lambda - u > -1$ olduğundan (II.9.1) ve (II.9.2) fonksiyon tanımından $D^u f(t) \in \mathcal{T}$ olur. Bu durumda $f(t) = t^\lambda \eta(t)$ için $D^\nu\left[D^u f(t)\right]$ kesirli türevinin (II.9.3) tanımından

$$
\begin{aligned}
D^\nu\left[D^u f(t)\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-u)} \frac{\Gamma(n+\lambda+1-u)}{\Gamma(n+\lambda+1-u-\nu)} t^{n+\lambda-u-\nu} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-(u+\nu))} t^{n+\lambda-(u+\nu)} \\
&= D^{u+\nu} f(t)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. $f(t) = t^\lambda (\log t)\eta(t)$ için ise kesirli türevin türevi (II.9.4) den

$$
\begin{aligned}
D^\nu\left[D^u f(t)\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-(u+\nu))} \cdot \\
&\quad \{\log t + \left[\psi(n+\lambda+1-u) - \psi(n+\lambda+1-(u+\nu))\right] \\
&\quad + \left[\psi(n+\lambda+1) - \psi(n+\lambda+1-u)\right]\} t^{n+\lambda-(u+\nu)} \\
&= t^{\lambda-(u+\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-(u+\nu))} \cdot \\
&\quad \cdot \{\log t + \left[\psi(n+\lambda+1) - \psi(n+\lambda+1-(u+\nu))\right]\} t^n \\
&= D^{u+\nu} f(t)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir.

(b) $u \geq \lambda + 1$ ve $k = 0,1,\ldots,m-1$ için $a_k = 0$ olsun. (II.9.3) den

$$
\begin{aligned}
D^u\left[t^\lambda \eta(t)\right] &= t^{\lambda-u} \sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-u)} t^n \\
&= t^{\lambda-(u-m)} \sum_{p=0}^{\infty} a_{p+m} \frac{\Gamma(p+m+\lambda+1)}{\Gamma(p+m+\lambda+1-u)} t^p
\end{aligned}
\qquad \text{(II.10.2)}
$$

elde edilir. (II.9.4) den $t^{\lambda}(\log t)\eta(t)$ fonksiyonun kesirli türevi

$$D^{u}\left[t^{\lambda}(\log t)\eta(t)\right]=t^{\lambda-u}(\log t)\sum_{n=m}^{\infty}a_{n}\frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-u)}t^{n}$$
$$+t^{\lambda-u}\sum_{n=m}^{\infty}a_{n}[\psi(n+\lambda+1)-\psi(n+\lambda+1-u)]\frac{\Gamma(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1-u)}t^{n}$$
$$=t^{\lambda-(u-m)}(\log t)\sum_{p=0}^{\infty}a_{p+m}\frac{\Gamma(p+m+\lambda+1)}{\Gamma(p+m+\lambda+1-u)}t^{p} \tag{II.10.3}$$
$$+t^{\lambda-(u-m)}\sum_{p=0}^{\infty}a_{p+m}[\psi(p+m+\lambda+1)-\psi(p+m+\lambda+1-u)]$$
$$\times\frac{\Gamma(p+m+\lambda+1)}{\Gamma(p+m+\lambda+1-u)}t^{p}$$

olarak bulunur. Böylece $D^{u}f(t)\in \mathrm{T}$ olur. Burada $\lambda' = m+\lambda$ seçilirse (II.10.2) ve (II.10.3) eşitlikleri (II.9.3) ve (II.9.4) eşitlikleri ile özdeş olur. (a) şıkkındakine benzer şekilde işlemler yürütülürse ispat tamamlanır. Bir önceki bölümde görmüş olduğumuz $\mathcal{N}$ sınıfına ait birçok fonksiyon aynı zamanda $\mathcal{T}$ sınıfına da aittir. Böylece $\mathcal{T}$ sınıfına ait fonksiyonların μ mertebeli kesirli türevi, ν mertebeli kesirli integralinde ν yerine $-\mu$ yazılarak kolayca hesaplanabilir.

II.11 Kesirli Türev için Leibniz Formülü

$f(t)\in\mathcal{T}$ olarak verilen bir fonksiyonun kesirli türevine Leibniz formülü uygulamak için (II.7.2) ile verilen kesirli integralin Leibniz formülünde $-\nu\to\mu$ almak yeterlidir. Yani $t,\mu>0$ için

$$D^{\mu}[f(t)g(t)]=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{\mu}{r}\left[D^{r}g(t)\right]\left[D^{\mu-r}f(t)\right] \tag{II.11.1}$$

eşitliği gerçeklenir. Örneğin $\mu>0, p\in N$ olsun. Herhangi bir $f\in\mathcal{N}$ için $t^{p}f(t)$ fonksiyonun kesirli integrali kesinlikle vardır. $\mu\leq m<\mu+1$ olmak üzere $t^{p}f(t)$ nin $\mu>0$ mertebeli kesirli türevi, Tanım II.2 den

$$D^{\mu}\left[t^{p}f(t)\right]=D^{m}\left[D^{-(m-\mu)}t^{p}f(t)\right]$$

biçimindedir. (II.7.2) de ν yerine $m-\mu>0$ yazılırsa

$$D^{-(m-\mu)}\left[t^{p}f(t)\right]=\sum_{k=0}^{p}\binom{\mu-m}{k}\left[D^{k}t^{p}\right]\left[D^{-m+\mu-k}f(t)\right] \tag{II.11.2}$$

elde edilir. $D^{\mu}\left[t^{p} f(t)\right]$ nin hesaplanması için (II.11.2) denkleminin m mertebeden adi türevinin bulunması gerekir. $f \in \mathcal{N}$ olmak üzere adi türevin Leibniz tanımından

$$\begin{aligned}
D^{\mu}\left[t^{p} f(t)\right] &= D^{m}\left[\sum_{k=0}^{p}\binom{\mu-m}{k}\left[D^{k} t^{p}\right]\left[D^{-m+\mu-k} f(t)\right]\right] \\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{\mu-m}{k} D^{m}\left\{\left[D^{k} t^{p}\right]\left[D^{-m+\mu-k} f(t)\right]\right\} \\
&= \sum_{k=0}^{p}\binom{\mu-m}{k}\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}\left[D^{k+j} t^{p}\right]\left[D^{\mu-j-k} f(t)\right]
\end{aligned}$$

bulunur. Toplamın indisi değiştirilirse $r = j+k$ ve $s = k$ için

$$D^{\mu}\left[t^{p} f(t)\right] = \sum_{r=0}^{p}\left[\sum_{s=0}^{r}\binom{\mu-m}{s}\binom{m}{r-s}\right]\left[D^{r} t^{p}\right]\left[D^{\mu-r} f(t)\right] \qquad \text{(II.11.3)}$$

olur. İçteki toplamı hesaplamak için

$$(1+x)^{\mu-m}(1+x)^{m} = (1+x)^{\mu}$$

özdeşliğini ele alalım. Binom teoreminden

$$\sum_{s=0}^{r}\binom{\mu-m}{s}\binom{m}{r-s} = \binom{\mu}{r} \qquad \text{(II.11.4)}$$

bulunur. (II.11.4) denklemine Vandermonde konvolüsyon formülü denir. Böylece (II.11.3) denklemi $p \in \mathbb{Z}^{+}$, $f \in \mathcal{N}$ ve $t > 0$ için

$$D^{\mu}\left[t^{p} f(t)\right] = \sum_{r=0}^{p}\binom{\mu}{r}\left[D^{r} t^{p}\right]\left[D^{\mu-r} f(t)\right] \qquad \text{(II.11.5)}$$

hâlini alır. Bu ise (II.11.1) formülü ile örtüşen bir sonuçtur.

III BÖLÜM

ANALİTİK FONKSİYON SINIFLARI

Bu bölümde birim dairede analitik ve normalize edilmiş fonksiyon sınıflarının yıldızıl, α. mertebeden yıldızıl, konveks, α. mertebeden konveks gibi alt sınıfların tanımları ve bazı özellikleri verilecektir.

III.1 Tanımlar ve Önbilgi

Sonlu kompleks düzlemi $\mathbb{C}$, kompleks düzlemde birim daireyi

$$D = \{z : |z| < 1\}$$

birim dairenin sınırını

$$\partial D = \{z : |z| = 1\}$$

ve $z_0 \in \mathbb{C}$ merkezli r yarıçaplı daireyi $D(z_0, r) = D(r)$ ile göstereceğiz, [21], [22].

Boştan farklı herhangi iki ayrık kümenin birleşimi olarak yazılamayan kümelere bağlantılı küme denir. Boştan farklı, açık, bağlantılı kümeye bölge denir.

Tanım III.1 *Kompleks değişkenli ve kompleks değerli f fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun.*

a) Eğer $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ limiti varsa f fonksiyonu z_0 noktasında türevlenebilirdir, denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $f'(z_0)$ sayısına f fonksiyonun z_0 noktasındaki türevi denir.

b) f fonksiyonu z_0 da ve z_0 noktasının bir komşuluğundaki tüm noktalarda türevlenebiliyorsa f fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir denir.

c) Eğer f fonksiyonu A kümesinin bütün noktalarında analitikse, f, A üzerinde analitiktir denir.

d) Bir f fonksiyonu $\mathbb{C}$ nin tüm noktalarında analitikse, f fonksiyonuna tam fonksiyon denir.

Tanım III.2 *$B \subset \mathbb{C}$ olsun. B içinde analitik ve bire-bir olan fonksiyona B de yalınkat fonksiyon denir, [22].*

D de analitik olan fonksiyonların sınıfını

$$H(D) = \{f : D \text{ de analitik}\},$$

normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını,

$$A = \{f : f \in H(D), f(0) = 0 \text{ ve } f'(0) = 1\}$$

D de yalınkat olan analitik fonksiyonların sınıfını

$$H_U(D) = \{f : f \in H(D) \text{ ve } f \text{ yalnkat}\}$$

ile göstereceğiz.

Tanım III.3 *Birim dairede analitik, yalınkat ve normalize edilmiş fonksiyonların oluşturduğu sınıf S ile gösterilir:*

$$S = \{f : f \in H_U(D), f(0) = f'(0) - 1 = 0\}$$

$f \in S$ *ise* $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ *biçimindedir,* D.

S sınıfına ait bir fonksiyon örneği olarak, Koebe fonksiyonu verilebilir,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + 3z^3 + \cdots$$

Koebe fonksiyonu birim daireyi, başlangıç noktası $-\frac{1}{4}$ olup sonsuza uzanan ışın hariç tüm düzleme resmeder.

$$k(z) : \mathrm{D} \to \mathrm{C} \setminus \left\{-\infty < Re(w) < -\frac{1}{4}, Im(w) = 0\right\}$$

biçimindedir.

1) $f(z) = z, \quad f : D \to D,$

2) $f(z) = \dfrac{z}{1-z}, \quad f : D \to Re(w) > -\dfrac{1}{2},$

3) $f(z) = \dfrac{z}{1-z^2}, \quad f : D \to \mathrm{C} - \left\{-\infty < Re(w) < -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} < Re(w) < \infty\right\},$

fonksiyonları S sınıfına aittir.

Tanım III.4 (***Yerel yalınkatlık***) $w = f(z)$ *fonksiyonu* z_0 *da analitik ve* $f'(z_0) \neq 0$ *ise,* f *fonksiyonu* z_0 *da yerel yalınkattır, [22].*

Örneğin, $f(z) = z^2$, $B = \left\{ z : 1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \dfrac{3\pi}{2} \right\}$ bölgesinde yerel yalınkattır.

Temel Özellikler

$f \in H_U(B)$ olsun.

1. $g(z)$ fonksiyonu bir G bölgesinde yalınkat ve $f(B) = \{ f(z) : z \in B \} \subset G$ ise $g \circ f$ bileşke fonksiyonu da yalınkattır:

f bire-bir olduğundan, z_1, $z_2 \in B$ ve $z_1 \neq z_2$ ise $f(z_1) \neq f(z_2)$ dir. $g(z)$, G bölgesinde bire-bir olduğu için $f(z_1) \neq f(z_2)$ iken $g(f(z_1)) \neq g(f(z_2))$ olur. $g \circ f$ nin analitikliğini gösterelim:

$$T = \lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{g(f(z)) - g(f(z_0))}{f(z) - f(z_0)} . \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

$w = f(z)$ dersek $w_0 = f(z_0)$ ve $f(z)$ nin sürekliliğinden $z \to z_0$ iken $w \to w_0$ olur. Buradan da,

$$T = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0)$$

bulunur.

2. $f(z) \neq 0$ olmak üzere $\dfrac{1}{f(z)}$ nin yalınkat olması için gerek ve yeter koşul, $f(z)$ nin yalınkat olmasıdır:

$\dfrac{1}{f(z)}$ yalınkat olsun. $g(z) = \dfrac{1}{z}$ yalınkat fonksiyonunu gözönüne alalım. Bu hâlde, $g\left(\dfrac{1}{f(z)}\right) = f(z)$ bileşke fonksiyonu da yalınkattır.

$f(z)$ yalınkat olsun. $g(f(z)) = \dfrac{1}{f(z)}$ bileşke fonksiyonu da yalınkattır.

3. z_0, $f(z)$ yalınkat fonksiyonu için bir kutup noktası ise, $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonu z_0 ın komşuluğunda analitik ve yalınkattır.

Yalınkat olan $f(z)$ için z_0 noktası bir kutup noktası olduğundan $\dfrac{1}{f(z_0)} = 0$ dır. Bu hâlde, z_0 noktası $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun bir sıfır noktasıdır ve bu noktanın uygun bir komşuluğunda $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonu bire-birdir.

III.2 Subordinasyon Prensibi

Yar.Teorem III.1 (***Schwarz Lemması***): *$f \in H(D)$ ve $f(0)=0$, $|f(z)| \leq 1$ olsun. Bu takdirde, $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ dir. Eşitlik durumu $\theta \in R$ olmak üzere $f(z)=e^{i\theta}z$ için gerçeklenir, ([21], s.* 135).

Tanım III.5 *$f(z)$ ve $g(z)$, D de analitik olsun. $f(z)=g(k(z))$ olacak biçimde Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleyen bir $k(z)$ fonksiyonu varsa, $f(z)$ fonksiyonu $g(z)$ fonksiyonuna subordinedir, denir ve $f \prec g$ ile gösterilir, D.*

Özellik 1. $f \prec g$ ise $f(D) \subset g(D)$ ve $f(0)=g(0)$ dir.

$f \prec g$ olsun. $f(z)=g(k(z))$ olacak biçimde Schwarz lemmasının koşullarını gerçekleyen bir $k(z)$ fonksiyonu vardır. $z_1 \in k(D)$ olsun. $z_1 = k(z)$ olacak biçimde bir $z \in D$ vardır. $z \in D_z$ için

$$|z_1| = |k(z)| < 1 \,\text{ve}\, |z_1| \in D_w$$

dir. O hâlde, $k(D)$ için, $k(D) \subset D$ ve buradan $f(D)=g(k(D)) \subset g(D)$ dir. Diğer taraftan, $k(0)=0$ olduğundan, $f(0)=g(k(0))=g(0)$ dır.

Özellik 2. $f \prec g$ ise $\max_{|z|\leq r}|f(z)| \leq \max_{|z|\leq r}|g(z)|$ dir.

$f \prec g$ olsun. $f(z)=g(k(z))$ olur. $k(z)$ fonksiyonu Schwarz lemmasının koşullarını gerçeklediğinden, $|k(z)| \leq |z| < 1$ dir. $z_1 \in k(D(r))$ alalım. $z_1 = k(z)$ olacak biçimde bir $z \in D(r)$ vardır. Buradan,

$$|z_1| = |k(z)| < r \,\text{ve}\, k(D(r)) \subset D(r)$$

gerçeklenir. $f(z)=g(k(z))$ olduğundan, $f(D(r)) \subset g\big(D(r)\big)$ ve maksimum prensibinden,

$$\max_{|z|\leq r}|f(z)| \leq \max_{|z|\leq r}|g(z)| \qquad \big(0 \leq |z| = r < 1\big)$$

eşitliği elde edilir.

Yar.Teorem III.2 *$g \in H_U(D)$ olsun. Yalnız ve ancak $f(0)=g(0)$ ve $f(D) \subset g(D)$ ise $f \prec g$ dir.*

İspat: $g \in H_U(D)$, $f(0) = g(0)$ ve $f(D) \subset g(D)$ olsun. $w = g(z)$ fonksiyonu D de yalınkat olduğundan, $g^{-1}(w)$ fonksiyonu $g(D)$ bölgesinde analitiktir. $f(D) \subset g(D)$ olduğundan, $g^{-1}(w)$ fonksiyonu $f(D)$ alt bölgesinde de analitiktir. f ve g^{-1} fonksiyonlarının analitikliğinden, $k(z) = g^{-1}(f(z)) = (g^{-1} \circ f)(z)$ biçiminde tanımlanan $k(z)$ fonksiyonu da analitik ve $|k(z)| \leq 1$ dir. Ayrıca $f(0) = g(0)$ olduğundan,

$$k(0) = g^{-1}(f(0)) = g^{-1}(g(0)) = 0$$

gerçeklenir ve $k(z)$ Schwarz lemmasının koşullarını sağlar. Bu biçimde tanımlanan $k(z)$ fonksiyonu için $f(z) = g(k(z))$ ve $f \prec g$ dir.

Tersine, $f \prec g$ olsun. Bu takdirde $f(z) = g(k(z))$ dir. $k(z)$, Schwarz lemmasının koşullarını gerçeklediğinden $|k(z)| \leq |z| < r$ dir. $z_1 \in k(D(r))$ olsun. $z_1 = k(z)$ olacak şekilde $z \in D(r)$ vardır. Bu nedenle $|z_1| = |k(z)| \leq |z| < r$ dir. Bu hâlde, $z_1 \in D(r)$ ve $k(D(r)) \subset D(r)$ dir. $g(z)$, D de yalınkat olduğundan,

$$f(D(r)) = g(k(D(r))) \subset g(D(r)) \text{ ve } r \to 1 \text{ iken } f(D) \subset g(D)$$

dir. Ayrıca, $f(0) = g(k(0)) = g(0)$ olur.

Tanım III.6 D *de analitik ve* $p(0) = 1$, $Re\{p(z)\} > 0$, $(|z| < 1)$ *koşullarını gerçekleyen* $p(z)$ *fonksiyonuna pozitif reel kısma sahip fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı* P *ile gösterilir, [22].*

III.2.1 Yıldızıl Fonksiyonlar

Tanım III.7 (***Yıldızıl Bölge***) *:* $E \subset \mathbb{C}$ *olsun. Her* $w \in E$ *ve* $0 \leq t \leq 1$ *için* $tw \in E$ *ise,* E *ye orjine göre yıldızıl bölge denir, [22].*

Tanım III.8 $f(z) = a_1 z + \cdots$ *fonksiyonu* D *de yalınkat ve* $f(D)$ *, başlangıç noktasına göre yıldızıl ise,* $f(z)$ *ye yıldızıl fonksiyon denir.* $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ *açılımına sahip yıldızıl fonksiyonların sınıfı* S^* *ile gösterilir, [22].*

Örnek III.1 $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ *orjine göre yıldızıl bir fonksiyondur.*

Teorem III.1 *$f(z)$ analitik fonksiyonunun D de yıldızıl olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \in P$$

olmasıdır, ([22], s 42).

Tanım III.9 $f \in A$ *olsun.* $0 \le \alpha < 1$ *için*

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in D)$$

koşulunu sağlayan $f(z)$ fonksiyonuna α mertebeden yıldızıldır denir. Bu sınıf $S^*(\alpha)$ ile gösterilir.

III.2.2 Konveks Fonksiyonlar

Tanım III.10 $B \subset \mathbb{C}$ *olsun.* $0 \le t \le 1$ *olmak üzere her $z_1, z_2 \in B$ için*

$$tz_1 + (1-t)z_2 \in B$$

ise B bölgesine konveks bölge denir, [22].

Tanım III.11 *$f(z) = a_1 z + \cdots$ fonksiyonu D de yalınkat ve $f(D)$ bölgesi konveks ise, $f(z)$ ye konveks fonksiyon denir. $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$ açılımına sahip konveks fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir, [22].*

Teorem III.2 *$f(z)$ analitik fonksiyonunun D de konveks olması için gerek ve yeter koşul,*

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in P$$

olmasıdır, ([22], s 42).

Uyarı III.1 *Koebe fonksiyonu yıldızıl bir fonksiyon olmasına rağmen konveks değildir.*

Tanım III.12 $f \in A$ *olsun.* $0 \le \alpha < 1$ *için*

$$Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha \qquad (z \in D)$$

koşulunu sağlayan $f(z)$ fonksiyonuna α mertebeden konvekstir denir. Bu sınıf $K(\alpha)$ ile gösterilir.

Teorem III.3 (*Alexander Teoremi*) *$f(z)$ analitik fonksiyonunun D de konveks olması için gerek ve yeter koşul, $zf^{'}(z)$ fonksiyonunun D de yıldızıl olmasıdır, [22].*

İspat: $f \in K$ olsun. $g(z) = zf^{'}(z)$ diyelim. Her iki tarafın logaritmik türevi alınıp düzenlenirse,

$$Re\left\{1+\frac{zf^{''}(z)}{f^{'}(z)}\right\} = Re\left\{\frac{zg^{'}(z)}{g(z)}\right\} > 0$$

gerçeklenir. Teorem III.1 den $g(z) = zf^{'}(z)$ yıldızıldır.

Tersine, $g(z) = zf^{'}(z)$ yıldızıl olsun.

$$Re\left\{\frac{zg^{'}(z)}{g(z)}\right\} = Re\left\{\frac{z(zf^{'}(z))^{'}}{zf^{'}(z)}\right\} = Re\left\{1+\frac{zf^{''}(z)}{f^{'}(z)}\right\} > 0$$

elde edilir. Teorem III.2. den f konvekstir.

Teorem III.4 *$f(z)$ analitik fonksiyonunun D de α mertebeden konveks olması için gerek ve yeter koşul, $zf^{'}(z)$ fonksiyonunun D de α mertebeden yıldızıl olmasıdır, [22].*

İspat: $f \in K(\alpha)$ olsun. $g(z) = zf^{'}(z)$ diyelim. Her iki tarafın logaritmik türevi alınıp düzenlenirse,

$$Re\left\{1+\frac{zf^{''}(z)}{f^{'}(z)}\right\} = Re\left\{\frac{zg^{'}(z)}{g(z)}\right\} > \alpha$$

olur. Buradan $g(z) = zf^{'}(z) \in S^{*}(\alpha)$ dır.

Tersine, $g(z) = zf^{'}(z) \in S^{*}(\alpha)$ olsun.

$$Re\left\{\frac{zg^{'}(z)}{g(z)}\right\} = Re\left\{\frac{z(zf^{'}(z))^{'}}{zf^{'}(z)}\right\} = Re\left\{1+\frac{zf^{''}(z)}{f^{'}(z)}\right\} > \alpha$$

elde edilir. Buradan $f \in K(\alpha)$ dır.

Uyarı III.2 *K sınıfına ait her fonksiyon S^{*} sınıfına aittir. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Karşıt örnek olarak Koebe fonksiyonu verilebilir. Buradan $K \subset S^{*} \subset S$ olduğu görülür.*

III.2.3 Konvekse Yakın Fonksiyonlar

Tanım III.13 *D de analitik olan $f(z)$ fonksiyonu için,*

$$Re\left\{\frac{zf^{'}(z)}{g(z)}\right\} > 0$$

olacak biçimde bir $g \in S^*$ *fonksiyonu varsa,* $f(z)$ *fonksiyonuna konvekse yakın denir. Konvekse yakın fonksiyonların sınıfını* C *veya bulunan* $g \in S^*$ *fonksiyonu için* $C(g)$ *ile gösterilir, [22].*

Sonuç III.1 D *de analitik olan* $f(z)$ *fonksiyonu için*

$$Re\left\{\frac{f'(z)}{h'(z)}\right\} > 0 \text{ veya } \left|Arg\,\frac{f'(z)}{h'(z)}\right| < \frac{\pi}{2}$$

olacak biçimde bir $h \in K$ *fonksiyonu varsa,* $f(z)$ *fonksiyonu konvekse yakındır, [22].*

İspat: $h \in K$ ise $zh'(z) \in S^*$ dir. Bu hâlde tanımdan,

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{g(z)}\right\} = Re\left\{\frac{zf'(z)}{zh'(z)}\right\} = Re\left\{\frac{f'(z)}{h'(z)}\right\} > 0$$

dir. $Arg\,\frac{f'(z)}{h'(z)} = \varphi$ olsun. $Re\left\{\frac{f'(z)}{h'(z)}\right\} > 0$ olduğundan,

$$\cos\varphi = \frac{Re\left\{\frac{f'(z)}{h'(z)}\right\}}{\left|\frac{f'(z)}{h'(z)}\right|} > 0 \Rightarrow \left|Arg\,\frac{f'(z)}{h'(z)}\right| < \frac{\pi}{2}$$

olur.

IV BÖLÜM

İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLERİ

IV.1 Özel Fonksiyon Sınıflarında Kesirli Hesap

$D=\{z: z\in\mathbb{C}\ ve\ |z|<1\}$ birim diskinde analitik ve

$$f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$$

açılımına sahip fonksiyonların kümesi A olsun. A sınıfında bulunan

$$f(z)=z+\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k z^k \qquad (a_{n+1}\neq 0, n\in\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\})$$

fonksiyonlarının sınıfı A_n olsun. $A(n)\subset A$ sınıfı

$$f(z)=z-\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k z^k \qquad (a_k\geq 0, n\in\mathbb{N})$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı olsun. $A(n)$ sınıfında bulunan ve D de yalınkat olan fonksiyonların sınıfı $T(n)$ olsun. $0\leq\alpha<1$ olmak üzere, $T(n)$ sınıfındaki α mertebeli yıldızıl fonksiyonların sınıfı $T_\alpha(n)$ ve α mertebeli konveks fonksyonların sınıfı $C_\alpha(n)$ olsun. g fonksiyonu

$$g(z)=z+b_j z^j \qquad (b_j\neq 0; j\geq n+1)$$

formunda bir fonksiyon olsun. $A(n), T(n), T_\alpha(n)$ ve $C_\alpha(n)$ sınıfları Chatterjea tarafından incelenmiştir, [3].

$$T:=T(1), T^*(\alpha):=T_\alpha(1) \text{ve} C(\alpha):=C_\alpha(1)$$

alt sınıfları Silverman [18] tarafından incelenmiştir. Chatterjea aşağıdaki eşitsizlikleri göstermiştir, [3].

Yar.Teorem IV.1 $f(z)\in A(n)$ *olsun. Yalnız ve ancak*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(k-\alpha)a_k\leq 1-\alpha \qquad (n\in\mathbb{N}; 0\leq\alpha<1)$$

ise, $f(z)\in T(n)$ *dir.*

Yar.Teorem IV.2 $f(z) \in A(n)$ *olsun. Yalnız ve ancak*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-\alpha)a_k \leq 1-\alpha \qquad (n \in \mathbb{N}; 0 \leq \alpha < 1)$$

ise $f(z) \in C_\alpha(n)$ *dir.*

Normalize edilmiş analitik fonksiyonların kesirli türev ve integralleri için integral eşitsizliklerini inceleyeceğiz. Daha sonra bu eşitsizliklerin negatif katsayılı fonksiyonlar için de doğru olduğunu göstereceğiz, [7].

Teorem IV.1 (*Littlewood [8]*) *:* $f(z)$ *ve* $g(z)$*,* D *de analitik olmak üzere*

$$g(z) \prec f(z)$$

ise

$$\int_0^{2\pi} \left|g(re^{i\theta})\right|^{\mu} d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta})\right|^{\mu} d\theta \qquad (\mu > 0; 0 < r < 1)$$

dir.

IV.1.1 İntegral Eşitsizlikleri

Öncelikle aşağıdaki kesirli türev için integral eşitsizliğini ispatlayalım.

Teorem IV.2 $f(z) \in A_n$ *ve* $g(z) = z + b_j z^j$ $(b_j \neq 0; j \geq n+1)$ *formunda olsun.* $p = 0$ *veya* 1 *iken* $0 \leq \lambda, \nu < 1$ *ve* $2 \leq p \leq n$ *iken* $0 < \lambda, \nu < 1$ *olmak üzere*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (k-p)_{p+1} |a_k| \leq \frac{\Gamma(2-\nu-p)\Gamma(j+1)\Gamma(n+2-\lambda-p)}{\Gamma(2-\lambda-p)\Gamma(j+1-\nu-p)\Gamma(n+1-p)} |b_j| \quad (j \geq n+1; n \in \mathbb{N}) \quad \text{(IV.1.1)}$$

olsun. O hâlde $z = re^{i\theta}$ *ve* $0 < r < 1$ *için*

$$\int_0^{2\pi} \left|D_z^{p+\lambda} f(z)\right|^{\mu} d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left|\frac{\Gamma(2-\nu-p)}{\Gamma(2-\lambda-p)} z^{\nu-\lambda} D_z^{p+\nu} g(z)\right|^{\mu} d\theta \quad (\mu > 0) \qquad \text{(IV.1.2)}$$

dır. Burada $(k-p)_{p+1}$ *Pochhammer sembolüdür ve* $(k-p)_{p+1} = (k-p)(k-p+1)\ldots k$ *dır,* *[12].*

İspat: (II.8.2) eşitliğini hatırlayalım.

$$
\begin{aligned}
D_z^{p+\lambda} f(z) &= \frac{d^p}{dz^p} D_z^{\lambda} f(z) = \frac{d^p}{dz^p} D_z^{\lambda}\left(z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k \right) \\
&= \frac{d^p}{dz^p}\left[D_z^{\lambda}(z) + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k D_z^{\lambda}\left(z^k\right) \right] \\
&= \frac{d^p}{dz^p}\left[\frac{1}{\Gamma(2-\lambda)} z^{1-\lambda} + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\lambda+1)} z^{k-\lambda} \right] \\
&= \frac{z^{1-\lambda-p}}{\Gamma(2-\lambda-p)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\lambda-p)} z^{k-\lambda-p} \\
&= \frac{z^{1-\lambda-p}}{\Gamma(2-\lambda-p)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-p)\frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1-\lambda-p)} a_k z^{k-\lambda-p} \\
&= \frac{z^{1-\lambda-p}}{\Gamma(2-\lambda-p)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-p)_{p+1} \Phi(k) a_k z^{k-\lambda-p}
\end{aligned}
$$

$$
D_z^{p+\lambda} f(z) = \frac{z^{1-\lambda-p}}{\Gamma(2-\lambda-p)}\left\{ 1 + \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-p)_{p+1} \Gamma(2-\lambda-p) \Phi(k) a_k z^{k-1} \right\} \tag{IV.1.3}
$$

elde edilir. Burada $\Phi(k)$ fonksiyonu, $p=0$ veya 1 iken $0 \le \lambda$ ve $2 \le p \le n$ iken $0 < \lambda$ olmak üzere

$$
\Phi(k) = \frac{\Gamma(k-p)}{\Gamma(k+1-\lambda-p)} \qquad (k \ge n+1; n \in \mathbb{N})
$$

biçimindedir. $\Phi(k)$, k ya göre azalan bir fonksiyon olduğundan, $p=0$ veya 1 iken $0 \le \lambda, \nu < 1$ ve $2 \le p \le n$ iken $0 < \lambda, \nu < 1$ olmak üzere

$$
0 < \Phi(k) \le \Phi(n+1) = \frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(n+2-\lambda-p)} \tag{IV.1.4}
$$

elde edilir. Benzer şekilde $g(z) = z + b_j z^j$ fonksiyonu için (II.8.2) eşitliğini hatırlayalım. Burada $p=0$ veya 1 iken $0 \le \nu < 1$ ve $2 \le p \le n$ iken $0 < \nu < 1$ olmak üzere, $k \ge n+1; n \in \mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
D_z^{p+\nu} g(z) &= D_z^{p+\nu}\left(z + b_j z^j\right) = D_z^{p+\nu}(z) + b_j D_z^{p+\nu}\left(z^j\right) \\
&= \frac{1}{\Gamma(2-p-\nu)} z^{1-p-\nu} + \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j-p-\nu+1)} b_j z^{j-p-\nu}
\end{aligned}
$$

$$
D_z^{p+\nu} g(z) = \frac{z^{1-p-\nu}}{\Gamma(2-p-\nu)}\left\{ 1 + \frac{\Gamma(2-p-\nu)}{\Gamma(j+1-p-\nu)} b_j z^{j-1} \right\} \tag{IV.1.5}
$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\Gamma(2-\nu-p)}{\Gamma(2-\lambda-p)} z^{\nu-\lambda} D_z^{p+\nu} g(z) = \frac{z^{1-\lambda-p}}{\Gamma(2-\lambda-p)}\left(1+\frac{\Gamma(2-\nu-p)\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\nu-p)} b_j z^{j-1}\right) \qquad \text{(IV.1.6)}$$

bulunur. $z = re^{i\theta}$ ve $0 < r < 1$ olmak üzere, (IV.1.3) ve (IV.1.6) eşitlikleri (IV.1.2) de yerlerine yazılırsa

$$\int_0^{2\pi} \left| 1+\sum_{k=n+1}^{\infty} (k-p)_{p+1} \Gamma(2-\lambda-p) \Phi(k) a_k z^{k-1} \right|^{\mu} d\theta$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \left| 1+\frac{\Gamma(2-\nu-p)\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\nu-p)} b_j z^{j-1} \right|^{\mu} d\theta \qquad (\mu > 0)$$

olduğu gösterilmelidir. Bunun için Teorem IV.1 den

$$1+\sum_{k=n+1}^{\infty} (k-p)_{p+1} \Gamma(2-\lambda-p) \Phi(k) a_k z^{k-1} \prec 1+\frac{\Gamma(2-\nu-p)\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\nu-p)} b_j z^{j-1}$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$1+\sum_{k=n+1}^{\infty} (k-p)_{p+1} \Gamma(2-\lambda-p) \Phi(k) a_k z^{k-1} = 1+\frac{\Gamma(2-\nu-p)\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\nu-p)} b_j \{w(z)\}^{j-1}$$

alırsak,

$$\{w(z)\}^{j-1} = \frac{\Gamma(2-\lambda-p)\Gamma(j+1-\nu-p)}{\Gamma(2-\nu-p)\Gamma(j+1) b_j} \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-p)_{p+1} \Phi(k) a_k z^{k-1}$$

elde edilir. Buradan $w(0) = 0$ bulunur. (IV.1.1) ve (IV.1.4) yardımıyla

$$\begin{aligned} |w(z)|^{j-1} &\leq \frac{\Gamma(2-\lambda-p)\Gamma(j+1-\nu-p)}{|b_j| \Gamma(2-\nu-p)\Gamma(j+1)} \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-p)_{p+1} \Phi(k) |a_k| |z|^{k-1} \\ &\leq |z|^n \frac{\Gamma(2-\lambda-p)\Gamma(j+1-\nu-p)}{|b_j| \Gamma(2-\nu-p)\Gamma(j+1)} \Phi(n+1) \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-p)_{p+1} |a_k| \\ &= |z|^n \frac{\Gamma(2-\lambda-p)\Gamma(j+1-\nu-p)}{|b_j| \Gamma(2-\nu-p)\Gamma(j+1)} \frac{\Gamma(n+1-p)}{\Gamma(n+2-\lambda-p)} \sum_{k=n+1}^{\infty} (k-p)_{p+1} |a_k| \\ &\leq |z|^n < 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $w(0) = 0$ ve $|w(z)| < 1$ olacak şekilde bir $w(z)$ bulunduğuna göre subordinasyon vardır. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem IV.3 $f(z) \in A_n$ *ve* $g(z) = z + b_j z^j$ *olsun. Her* $\lambda > 0$ *ve* $\nu > 0$ *için*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k| \leq \frac{\Gamma(2+\nu)\Gamma(j+1)\Gamma(n+2+\lambda)}{\Gamma(2+\lambda)\Gamma(j+1+\nu)\Gamma(n+1)} |b_j| \qquad (j \geq n+1; n \in \mathbb{N})$$

gerçeklensin. $z = re^{i\theta}$ *ve* $0 < r < 1$ *için*

$$\int_0^{2\pi} \left| D_z^{-\lambda} f(z) \right|^{\mu} d\theta \le \int_0^{2\pi} \left| \frac{\Gamma(2+\nu)}{\Gamma(2+\lambda)} z^{\lambda-\nu} D_z^{-\nu} d(z) \right|^{\mu} d\theta \qquad (\mu > 0)$$

dır, [12].

İspat: Teorem IV.2 de λ yerine $-\lambda$, $(\lambda > 0)$ ve ν yerine $-\nu$, $(\nu > 0)$ yazılır ve $p = 0$ alınırsa ispat biter.

Teorem IV.2 de $\lambda = \nu$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç IV.1 $f(z) \in A_n$ *ve* $g(z) = z + b_j z^j$ *olsun ve* $0 \le p \le n$ *ve* $0 \le \lambda < 1$ *ve* $(k-p)_{p+1} = (k-p)(k-p+1)\ldots k$ *Pochhammer sembolü olmak üzere*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (k-p)_{p+1} |a_k| \le \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(n+2-\lambda-p)}{\Gamma(j+1-\lambda-p)\Gamma(n+1-p)} |b_j| \qquad (j \ge n+1; n \in \mathbb{N})$$

olsun. O hâlde $z = re^{i\theta}$ *ve* $0 < r < 1$ *için*

$$\int_0^{2\pi} \left| D_z^{p+\lambda} f(z) \right|^{\mu} d\theta \le \int_0^{2\pi} \left| D_z^{p+\lambda} g(z) \right|^{\mu} d\theta \quad (\mu > 0)$$

bulunur, [12].

Teorem IV.3 te $\lambda = \nu$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç IV.2 $f(z) \in A_n$ *ve* $g(z) = z + b_j z^j$ *olsun.* $\lambda > 0$ *için*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k| \le \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(n+2+\lambda)}{\Gamma(j+1+\lambda)\Gamma(n+1)} |b_j| \qquad (j \ge n+1; n \in \mathbb{N})$$

olmak üzere, $z = re^{i\theta}$ *ve* $0 < r < 1$ *için*

$$\int_0^{2\pi} \left| D_z^{-\lambda} f(z) \right|^{\mu} d\theta \le \int_0^{2\pi} \left| D_z^{-\lambda} g(z) \right|^{\mu} d\theta \quad (\mu > 0)$$

bulunur, [12].

Sonuç IV.1 de $p = 0$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç IV.3 $f(z) \in A_n$ *ve* $g(z) = z + b_j z^j$ *olsun.*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k| \le \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(n+2-\lambda)}{\Gamma(j+1-\lambda)\Gamma(n+1)} |b_j| \qquad (0 \le \lambda < 1; j \ge n+1; n \in \mathbb{N}) \qquad \text{(IV.1.7)}$$

olmak üzere, $z = re^{i\theta}$ *ve* $0 < r < 1$ *için*

$$\int_0^{2\pi} \left| D_z^{\lambda} f(z) \right|^{\mu} d\theta \le \int_0^{2\pi} \left| D_z^{\lambda} g(z) \right|^{\mu} d\theta \qquad (\mu > 0)$$

bulunur, [12].

Sonuç IV.1 de $p = 1$ alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç IV.4 $f(z) \in A_n$ *ve* $g(z) = z + b_j z^j$ *olsun.*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)|a_k| \le \frac{\Gamma(j+1)\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(j-\lambda)\Gamma(n)} |b_j| \qquad (0 \le \lambda < 1;\, j \ge n+1;\, n \in \mathbb{N}) \qquad \text{(IV.1.8)}$$

olmak üzere, $z = re^{i\theta}$ *ve* $0 < r < 1$ *için*

$$\int_0^{2\pi} \left| D_z^{1+\lambda} f(z) \right|^{\mu} d\theta \le \int_0^{2\pi} \left| D_z^{1+\lambda} g(z) \right|^{\mu} d\theta \qquad (\mu > 0)$$

bulunur, [12].

IV.1.2 İntegral Eşitsizliği için Bir Uygulama

Sonuç IV.3 te $f \in T_\alpha(n)$ ve g fonksiyonu $b_j = -\frac{1}{j}$ olmak üzere $g(z) = z - \frac{1}{j} z^j$ alınırsa;

$$\frac{\Gamma(j+1)\Gamma(n+2-\lambda)}{\Gamma(j+1-\lambda)\Gamma(n+1)} \le j \qquad (0 \le \lambda < 1;\, j \ge n+1;\, n \in \mathbb{N})$$

olduğundan, (IV.1.7) den

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k \le 1$$

elde edilir. Yardımcı Teorem IV.1 den

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k a_k \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k-\alpha}{1-\alpha} a_k \le 1$$

katsayılar eşitsizliği $f \in T_\alpha(n)$ fonksiyonları için de geçerli olur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç IV.5 $f \in T_\alpha(n)$ *ve* $g(z) = z - \frac{1}{j} z^j$ $(j \ge n+1;\, n \in \mathbb{N})$ *olsun.* $z = re^{i\theta}$ *ve* $0 < r < 1$ *için*

$$\int_0^{2\pi} \left| D_z^{\lambda} f(z) \right|^{\mu} d\theta \le \int_0^{2\pi} \left| D_z^{\lambda} g(z) \right|^{\mu} d\theta \qquad (0 \le \lambda < 1;\, \mu > 0)$$

olur.

Sonuç IV.4 te $f \in C_\alpha(n)$ ve $b_j = -\frac{1}{j(j-1)}$ olmak üzere $g(z) = z - \frac{1}{j(j-1)} z^j$ alınırsa

$$\frac{\Gamma(j+1)\Gamma(n+1-\lambda)}{\Gamma(j-\lambda)\Gamma(n)} \leq j(j-1) \qquad (0 \leq \lambda < 1;\, j \geq n+1;\, n \in \mathbb{N})$$

olduğundan, (IV.1.8) den

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)a_k \leq 1$$

elde edilir. Yardımcı Teorem IV.2 den

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} k(k-1)a_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{k(k-\alpha)}{1-\alpha} a_k \leq 1$$

katsayılar eşitsizliği $f \in C_\alpha(n)$ fonksiyonları için de geçerli olur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç IV.6 *$f \in C_\alpha(n)$ ve $g(z) = z - \frac{1}{j(j-1)} z^j$ $(j \geq n+1; n \in \mathbb{N})$ olsun. $z = re^{i\theta}$ ve $0 < r < 1$ için*

$$\int_0^{2\pi} \left| D_z^{1+\lambda} f(z) \right|^\mu d\theta \leq \int_0^{2\pi} \left| D_z^{1+\lambda} g(z) \right|^\mu d\theta \qquad (0 \leq \lambda < 1; \mu > 0)$$

olur.

$n = 1$, $j = 2$ ve $\alpha = 0$ için Sonuç IV.5 ve Sonuç IV.6 Kim ve Choi'nin integral eşitsizlikleri olarak adlandırılır, ([7], Teorem 1, (i)) ve ([7], Teorem 2, (i)).

IV.2 B(α,β) Sınıfında Kesirli Hesap

Tanım IV.1 *$D = \{z : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik olan*

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad (a_n \geq 0)$$

formundaki fonksiyonların sınıfı A olsun. A sınıfındaki fonksiyonlardan birim diskte yalınkat olanların sınıfı T olsun. $f \in A$, $0 \leq \alpha < 1$ ve $0 < \beta \leq 1$ için

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ (1+\beta)_n a_n - (1-\beta+2\alpha\beta) b_n \right\} \leq 2\beta(1-\alpha)$$

ve

$$na_n \geq b_n \quad (n \geq 2)$$

koşullarını sağlayan ve T de bulunan bir

$$g(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

fonksiyonu varsa $f(z)$, $B(\alpha,\beta)$ sınıfına aittir denir. $B(\alpha,\beta)$ sınıfı, α mertebeli β tipli konvekse yakın fonksiyonların bir alt sınıfıdır.

$B(\alpha,\beta)$ sınıfı Gupta ([5]) tarafından incelenmiştir. Bulunan sonuçları türetebilmek için Gupta aşağıdaki yardımcı teoremi vermiştir, [5].

Yar.Teorem IV.3 $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *formunda ve* $B(\alpha,\beta)$ *sınıfında olsun. O hâlde*

$$\sum_{n=2}^{\infty} na_n \leq \frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2(1+\beta)} \tag{IV.2.1}$$

dır.

IV.2.1 Distorsiyon Teoremleri

Teorem IV.4 $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *formunda ve* $B(\alpha,\beta)$ *sınıfında olsun. O hâlde* $\lambda > 0$ *ve* $z \in D$ *için*

$$\left|D_z^{-\lambda} f(z)\right| \geq \frac{|z|^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)}\left\{1 - \frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2(2+\lambda)(1+\beta)}|z|\right\} \tag{IV.2.2}$$

ve

$$\left|D_z^{-\lambda} f(z)\right| \leq \frac{|z|^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)}\left\{1 + \frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2(2+\lambda)(1+\beta)}|z|\right\} \tag{IV.2.3}$$

dir. Sonuçlar kesindir, [11].

İspat: İspat için Owa ve Al-Bassam ([10]) tarafından kullanılan teknik uygulanır. $\lambda > 0$ için $F(z)$ fonksiyonu

$$F(z) = \Gamma(2+\lambda) z^{-\lambda} D_z^{-\lambda} f(z) \tag{IV.2.4}$$

olsun. Buradan (II.4.4) eşitliği yardımıyla

$$F(z) = \Gamma(2+\lambda) z^{-\lambda} D_z^{-\lambda}\left(z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right)$$

$$F(z) = \Gamma(2+\lambda) z^{-\lambda}\left(D_z^{-\lambda}(z) - \sum_{n=2}^{\infty} a_n D_z^{-\lambda}(z^n) \right)$$

$$F(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1)} a_n z^n \quad \lambda > 0 \tag{IV.2.5}$$

bulunur. $\dfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1)}$ ifadesi n ye göre azalandır ve $\dfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1)} \leq \dfrac{2}{2+\lambda}$ dır. (IV.2.1) den

$$2\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=2}^{\infty} n a_n \leq \frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2(1+\beta)}$$

bulunur. Buradan

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{4(1+\beta)} \tag{IV.2.6}$$

elde edilir. (IV.2.5) eşitliğinde üçgen eşitsizliği uygulanırsa ve (IV.2.6) eşitsizliği hatırlanırsa

$$|F(z)| \geq |z| - |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1)} a_n$$

$$|F(z)| \geq |z| - \left(\frac{2}{2+\lambda} \right) |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

$$|F(z)| \geq |z| - \frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2(2+\lambda)(1+\beta)} |z|^2 \tag{IV.2.7}$$

bulunur. (IV.2.4) ile verilen $F(z)$ fonksiyonu (IV.2.7) de yerine yazılırsa

$$\Gamma(2+\lambda)|z|^{-\lambda} \left| D_z^{-\lambda} f(z) \right| \geq |z| - \frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2(2+\lambda)(1+\beta)} |z|^2$$

$$\left| D_z^{-\lambda} f(z) \right| \geq \frac{|z|^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)} \left\{ 1 - \frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2(2+\lambda)(1+\beta)} |z| \right\}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$|F(z)| \leq |z| + |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1)} a_n$$

$$|F(z)| \leq |z| + \left(\frac{2}{2+\lambda} \right) |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

$$|F(z)| \leq |z| + \frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2(2+\lambda)(1+\beta)} |z|^2 \tag{IV.2.8}$$

bulunur. (IV.2.4) ile verilen $F(z)$ fonksiyonu (IV.2.8) de yerine yazılırsa

$$\Gamma(2+\lambda)|z|^{-\lambda}\left|D_z^{-\lambda} f(z)\right| \leq |z| + \frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2(2+\lambda)(1+\beta)}|z|^2$$

$$\left|D_z^{-\lambda} f(z)\right| \leq \frac{|z|^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)}\left\{1+\frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2(2+\lambda)(1+\beta)}|z|\right\}$$

elde edilir. $f(z) = z - \dfrac{1+3\beta-2\alpha\beta}{4(1+\beta)}z^2$ alınırsa sonuç kesin olarak görülür.

Sonuç IV.7 $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *formunda ve* $B(\alpha,\beta)$ *sınıfında olsun. O hâlde* $D_z^{-\lambda} f(z)$ *kesirli integrali, merkezi orjin ve yarıçapı*

$$r_0 = \frac{1}{\Gamma(2+\lambda)}\left\{1+\frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2(2+\lambda)(1+\beta)}\right\}$$

olan diskin içinde kalır, [11].

Teorem IV.5 $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *formunda ve* $B(\alpha,\beta)$ *sınıfında olsun. O hâlde* $\lambda > 0$ *ve* $z \in D$ *için*

$$\left|D_z^{1-\lambda} f(z)\right| \leq \frac{|z|^{\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)}\left\{(1+\lambda)+\frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2(1+\beta)}|z|\right\}$$

dir. Bu sonuç $f(z) = z - \dfrac{1+3\beta-2\alpha\beta}{4(1+\beta)}z^2$ *fonksiyonu için kesindir, [11].*

İspat: $\lambda > 0$ olmak üzere, (IV.2.5) eşitliğinin her iki tarafına adi türev uygulanırsa

$$F'(z) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1)}a_n z^{n-1}$$

elde edilir. Burada üçgen eşitsizliği uygulanır ve (IV.2.1) hatırlanırsa

$$\left|F'(z)\right| \leq 1 + |z|\sum_{n=2}^{\infty} n\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+\lambda+1)}a_n$$

$$\left|F'(z)\right| \leq 1 + \left(\frac{2}{2+\lambda}\right)|z|\sum_{n=2}^{\infty} na_n$$

$$\left|F'(z)\right| \leq 1 + \frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{(2+\lambda)(1+\beta)}|z| \tag{IV.2.9}$$

bulunur. (IV.2.4) eşitliğinin iki tarafına adi türev uygulanırsa

$$F(z) = \Gamma(2+\lambda)z^{-\lambda}D_z^{-\lambda} f(z)$$

$$F'(z) = \Gamma(2+\lambda)\left[(-\lambda)z^{-\lambda-1}D_z^{-\lambda} f(z) + z^{-\lambda}D_z^{1-\lambda} f(z)\right]$$

$$D_z^{1-\lambda} f(z) = \frac{z^{\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)} F^{'}(z) + \lambda z^{-1} D_z^{-\lambda} f(z) \qquad \text{(IV.2.10)}$$

elde edilir. (IV.2.10) da üçgen eşitsizliği uygulanıp, (IV.2.3) ve (IV.2.9) eşitsizlikleri yerlerine yazılırsa

$$\left|D_z^{1-\lambda} f(z)\right| \leq \frac{|z|^{\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)} \left|F^{'}(z)\right| + \lambda |z|^{-1} \left|D_z^{-\lambda} f(z)\right|$$

$$\left|D_z^{1-\lambda} f(z)\right| \leq \frac{|z|^{\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)} \left\{(1+\lambda) + \frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2(1+\beta)}|z|\right\}$$

elde edilir.

Teorem IV.6 $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *formunda ve* $B(\alpha,\beta)$ *sınıfında olsun. O hâlde* $0 \leq \lambda < 1$ *ve* $z \in D$ *için*

$$\left|D_z^{\lambda} f(z)\right| \geq \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)} \left\{1 - \frac{1+3\beta-\alpha\beta}{2(2-\lambda)(1+\beta)}|z|\right\}$$

ve

$$\left|D_z^{\lambda} f(z)\right| \leq \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)} \left\{1 + \frac{1+3\beta-\alpha\beta}{2(2-\lambda)(1+\beta)}|z|\right\}$$

dir. Sonuçlar kesindir, [11].

İspat: $0 \leq \lambda < 1$ olmak üzere $G(z)$ fonksiyonu

$$G(z) = \Gamma(2-\lambda) z^{\lambda} D_z^{\lambda} f(z) \qquad \text{(IV.2.11)}$$

olsun. (II.8.2) eşitliği yardımıyla

$$G(z) = \Gamma(2-\lambda) z^{\lambda} D_z^{\lambda} \left(z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right)$$

$$G(z) = \Gamma(2-\lambda) z^{\lambda} \left(D_z^{\lambda}(z) - \sum_{n=2}^{\infty} a_n D_z^{\lambda}(z^n) \right)$$

$$G(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n-\lambda+1)} a_n z^n \qquad \text{(IV.2.12)}$$

bulunur. Burada dikkat edilirse $0 \leq \lambda < 1$ ve $n \geq 2$ için

$$1 \leq \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n-\lambda+1)} < \frac{n}{2-\lambda} \qquad \text{(IV.2.13)}$$

dır. (IV.2.12) de üçgen eşitsizliği uygulanır, (IV.2.1) ve (IV.2.13) hatırlanırsa

$$|G(z)| \geq |z| - |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n-\lambda+1)} a_n$$

$$|G(z)| \geq |z| - |z|^2 \left(\frac{1}{2-\lambda}\right) \sum_{n=2}^{\infty} n a_n$$

$$|G(z)| \geq |z| - \frac{1+3\beta-\alpha\beta}{2(2-\lambda)(1+\beta)} |z|^2 \qquad \text{(IV.2.14)}$$

elde edilir. (IV.2.11) ile verilen $G(z)$ fonksiyonu (IV.2.14) te yerine yazılırsa

$$\Gamma(2-\lambda)|z|^{\lambda} \left|D_z^{\lambda} f(z)\right| \geq |z| - \frac{1+3\beta-\alpha\beta}{2(2-\lambda)(1+\beta)} |z|^2$$

$$\left|D_z^{\lambda} f(z)\right| \geq \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)} \left\{1 - \frac{1+3\beta-\alpha\beta}{2(2-\lambda)(1+\beta)} |z|\right\}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$|G(z)| \leq |z| + |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n-\lambda+1)} a_n$$

$$|G(z)| \leq |z| + \frac{1+3\beta-\alpha\beta}{2(2-\lambda)(1+\beta)} |z|^2 \qquad \text{(IV.2.15)}$$

elde edilir. (IV.2.11) ile verilen $G(z)$ fonksiyonu (IV.2.15) de yerine yazılırsa

$$\Gamma(2-\lambda)|z|^{\lambda} \left|D_z^{\lambda} f(z)\right| \leq |z| + \frac{1+3\beta-\alpha\beta}{2(2-\lambda)(1+\beta)} |z|^2$$

$$\left|D_z^{\lambda} f(z)\right| \leq \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)} \left\{1 + \frac{1+3\beta-\alpha\beta}{2(2-\lambda)(1+\beta)} |z|\right\}$$

bulunur. $f(z) = z - \dfrac{1+3\beta-2\alpha\beta}{4(1+\beta)} z^2$ alınırsa sonuç kesin olarak görülür.

Sonuç IV.8 *$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ formunda ve $B(\alpha,\beta)$ sınıfında olsun. O hâlde $D_z^{\lambda} f(z)$ kesirli türevi, merkezi orjin ve yarıçapı*

$$r_1 = \frac{1}{\Gamma(2-\lambda)} \left\{1 + \frac{1+3\beta-\alpha\beta}{2(2-\lambda)(1+\beta)}\right\}$$

olan bir disk içinde kalır, [11].

IV.2.2 B(α,β) Sınıfındaki Fonksiyonların Konveksliği

Yardımcı Teorem IV.3 ten $f(z)\in B(\alpha,\beta)$ fonksiyonunun $z\in D$, $0\le\alpha<1$ ve $0<\beta\le 1$ olmak üzere

$$\sum_{n=2}^{\infty} na_n \le \frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2(1+\beta)} \le 1 \qquad \text{(IV.2.16)}$$

eşitsizliğinin gerçeklendiğini biliyoruz. Silverman ([18], Teorem 2) Yardımcı Teorem IV.3 yardımıyla (IV.2.16) eşitsizliğinin gerçeklenmesi halinde $f(z)\in B(\alpha,\beta)$ fonksiyonunun D birim diskinde yıldızıl olduğunu göstermiştir. $B(\alpha,\beta)$ sınıfındaki fonksiyonların konveksliği için bir yarıçap bulalım.

Teorem IV.7 *$f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ formunda ve $B(\alpha,\beta)$ sınıfında olsun. $f(z)$ fonksi-yonu, yarıçapı $|z|<r_3$ olan diskte konvekstir. Burada*

$$r_3=\inf_{n\ge 2}\left(\frac{2(1+\beta)}{n(1+3\beta-2\alpha\beta)}\right)^{\frac{1}{n-1}}=\frac{1+\beta}{1+3\beta-2\alpha\beta}$$

dır. Sonuç kesindir, [11].

İspat: $|z|\le r_3$ olmak üzere teoremin ispatı

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|\le 1 \qquad \text{(IV.2.17)}$$

eşitsizliğini göstermek ile aynıdır.

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| = \left|\frac{-\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty} na_n z^{n-1}}\right|$$

$$\le \frac{\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n |z|^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty} na_n |z|^{n-1}}$$

elde edilir. Burada (IV.2.17) nın gerçeklenmesi için

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n |z|^{n-1} \le 1-\sum_{n=2}^{\infty} na_n |z|^{n-1} \qquad \text{(IV.2.18)}$$

olmalıdır. (IV.2.18) den

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^2 a_n |z|^{n-1} \le 1 \qquad \text{(IV.2.19)}$$

elde edilir. (IV.2.19) eşitsizliğinin doğru olması için

$$n|z|^{n-1} \le \frac{2(1+\beta)}{1+3\beta-2\alpha\beta} \qquad (n \ge 2) \tag{IV.2.20}$$

olmalıdır. (IV.2.20) dan

$$|z| \le \left(\frac{2(1+\beta)}{n(1+3\beta-2\alpha\beta)} \right)^{\frac{1}{n-1}} \qquad (n \ge 2)$$

elde edilir. $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ ifadesi $n \ge 2$ için artan olduğundan

$$|z| \le \inf_{n\ge 2} \left(\frac{2(1+\beta)}{n(1+3\beta-2\alpha\beta)} \right)^{\frac{1}{n-1}}$$
$$= \frac{1+\beta}{1+3\beta-2\alpha\beta}$$

ifadesi için ispat biter.

$$f(z) = z - \frac{1+3\beta-2\alpha\beta}{2n(1+\beta)} z^n \quad (n \ge 2)$$

fonksiyonu için sonuç kesindir.

IV.3 $R(\alpha)$ Sınıfında Kesirli Hesap

$D = \{z : |z| < 1\}$ birim diskinde analitik ve yalınkat fonksiyonların sınıfı olan S sınıfın-daki α mertebeli tüm yıldızıl fonksiyonların sınıfı $S^*(\alpha)$, α mertebeli tüm konveks fonksiyonların sınıfı $K(\alpha)$ olsun. Dikkat edilirse $f(z) \in K(\alpha)$ olması için gerek ve yeter koşul, $zf'(z) \in S^*(\alpha)$ dır, (Teo. III.3). Burada $0 \le \alpha < 1$ olmak üzere $S^*(\alpha) \subseteq S^*(0) \equiv S^*$ ve $K(\alpha) \subseteq K(0) \equiv K$ dır.

$S^*(\alpha)$ ve $K(\alpha)$ sınıflar ilk olarak Robertson [14] ve daha sonra Schild [17], MacGregor [9] ve Pinchuk [13] tarafından çalışılmıştır.

$$S_\alpha(z) = \frac{z}{(1-z)^{2(1-\alpha)}}$$

fonksiyonu $S^*(\alpha)$ sınıfındadır ve

$$C(\alpha, n) = \frac{\prod_{k=2}^{n}(k-2\alpha)}{(n-1)!} \tag{IV.3.1}$$

olmak üzere $S_\alpha(z)$

$$S_\alpha(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} C(\alpha,n) z^n$$

formunda yazılabilir. $C(\alpha,n)$, α ya göre azalandır ve

$$\lim_{n\to\infty} C(\alpha,n) = \begin{cases} \infty & \alpha < \frac{1}{2} \\ 1 & \alpha = \frac{1}{2} \\ 0 & \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$$

eşitliği sağlanır.

Tanım IV.2 $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *ve* $g(z)$ *fonksiyonu*

$$g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

olmak üzere, $f * g$ *iki fonksiyonun konvolüsyonu veya Hadamard çarpımı olarak adlandırılır ve*

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n$$

biçiminde verilir.

Tanım IV.3 $0 \le \alpha < 1$ *için* $f(z) \in S$ *fonksiyonu* $f * S_\alpha(z) \in S^*(\alpha)$ *yı sağlıyorsa,* $f(z)$ *ye* α *mertebeli yarı-yıldızıldır denir.* α *mertebeli tüm yarı-yıldızıl fonksiyonların sınıfı* R_α *ile gösterilir, [15].*

R_α sınıfı Ruscheweyh tarafından çalışılmıştır, [15]. $f(z) \in R_\alpha$ olması için gerek ve yeter koşul, $z \in D$ için

$$G(\alpha,z) = \frac{f * \frac{S_\alpha(z)}{1-z}}{f * S_\alpha(z)}$$

olmak üzere $Re\{G(\alpha,z)\} > \frac{1}{2}$ olmasıdır. $z \in D$ için $S_1(z) = z$ olmak üzere $f(z)$ nin 1. mertebeden yarı-yıldızıl olması için gerek ve yeter koşulun $Re\left\{\frac{f(z)}{z}\right\} > \frac{1}{2}$ olduğunu biliyoruz. Burada $R_0 = K_0$ ve $R_{\frac{1}{2}} = S^*(\frac{1}{2})$ dir.

Tanım IV.4 $R(\alpha)$ *sınıfı,* S *sınıfında bulunan*

$$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

negatif katsayılı fonksiyonların sınıfı T *olmak üzere* $R(\alpha)=R_\alpha \cap T$ *şeklinde tanımlanır.* $R(\alpha)$ *sınıfı negatif katsayılı* α *mertebeli yarı-yıldızıl fonksiyonların sınıfı olarak isimlendirilir.*

$R(\alpha)$ sınıfı Silverman ve Silvia ([19]) tarafından çalışılmıştır. Aşağıdaki yardımcı teorem Silverman ve Silvia tarafından verilmiştir, [19].

Yar.Teorem IV.4 $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ *şeklinde olsun.* $f(z)\in R(\alpha)$ *olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)C(\alpha,n)a_n \le 1-\alpha \tag{IV.3.2}$$

dır.

$R(\alpha)$ sınıfına ait $f(z)$ fonksiyonunun kesirli türev ve integralleri için distorsiyon teoremlerini inceleyelim.

Teorem IV.8 $f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ *formunda ve* $0\le\alpha\le\frac{1}{2}$ *için* $R(\alpha)$ *sınıfında olsun. O hâlde* $\lambda>0$ *ve* $z\in D$ *olmak üzere*

$$\left|D_z^{-\lambda}f(z)\right| \ge \frac{|z|^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)}\left\{1-\frac{1}{(2+\lambda)(2-\alpha)}|z|\right\} \tag{IV.3.3}$$

ve

$$\left|D_z^{-\lambda}f(z)\right| \le \frac{|z|^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)}\left\{1+\frac{1}{(2+\lambda)(2-\alpha)}|z|\right\} \tag{IV.3.4}$$

dir. Sınırlar kesindir, [10].

İspat: $\lambda>0$ olmak üzere $F(z)$ fonksiyonu

$$F(z)=\Gamma(2+\lambda)z^{-\lambda}D_z^{-\lambda}f(z) \tag{IV.3.5}$$

olsun. Buradan (II.4.4) yardımıyla

$$F(z)=\Gamma(2+\lambda)z^{-\lambda}D_z^{-\lambda}\left(z-\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n\right)$$

$$F(z)=\Gamma(2+\lambda)z^{-\lambda}\left(D_z^{-\lambda}(z)-\sum_{n=2}^{\infty}a_n D_z^{-\lambda}(z^n)\right)$$

$$F(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+1+\lambda)}a_n z^n \tag{IV.3.6}$$

elde edilir. $n\geq 2$ için $\dfrac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+1+\lambda)}$ ifadesi n nin azalan bir fonksiyonu olduğundan $\lambda>0$ için

$$\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+1+\lambda)}\leq\frac{2}{2+\lambda} \tag{IV.3.7}$$

dır. (IV.3.1) tanımından $0\leq\alpha\leq\dfrac{1}{2}$ ve $n\geq 2$ için $C(\alpha,n+1)\geq C(\alpha,n)$ dir. (IV.3.2) den

$$(2-\alpha)C(\alpha,2)\sum_{n=2}^{\infty}a_n\leq\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)C(\alpha,n)a_n\leq 1-\alpha$$

elde edilir ve buradan

$$\sum_{n=2}^{\infty}a_n\leq\frac{1}{2(2-\alpha)} \tag{IV.3.8}$$

bulunur. (IV.3.6) da üçgen eşitsizliği uygulanıp, (IV.3.7) ve (IV.3.8) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$F(z)\geq|z|-|z|^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+1+\lambda)}a_n$$

$$F(z)\geq|z|-\left(\frac{2}{2+\lambda}\right)|z|^2\sum_{n=2}^{\infty}a_n$$

$$F(z)\geq|z|-\frac{1}{(2+\lambda)(2-\alpha)}|z|^2 \tag{IV.3.9}$$

bulunur. (IV.3.5) ile verilen $F(z)$ fonksiyonu (IV.3.9) da yerine yazılırsa

$$\Gamma(2+\lambda)|z|^{-\lambda}\left|D_z^{-\lambda}f(z)\right|\geq|z|-\frac{1}{(2+\lambda)(2-\alpha)}|z|^2$$

$$\left|D_z^{-\lambda}f(z)\right|\geq\frac{|z|^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)}\left\{1-\frac{1}{(2+\lambda)(2-\alpha)}|z|\right\}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$F(z)\leq|z|+|z|^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+1+\lambda)}a_n$$

$$F(z)\leq|z|+\left(\frac{2}{2+\lambda}\right)|z|^2\sum_{n=2}^{\infty}a_n$$

$$F(z)\leq|z|+\frac{1}{(2+\lambda)(2-\alpha)}|z|^2 \tag{IV.3.10}$$

bulunur. (IV.3.5) ile verilen $F(z)$ fonksiyonu (IV.3.10) da yerine yazılırsa

$$\Gamma(2+\lambda)|z|^{-\lambda}\left|D_z^{-\lambda} f(z)\right| \le |z| + \frac{1}{(2+\lambda)(2-\alpha)}|z|^2$$

$$\left|D_z^{-\lambda} f(z)\right| \le \frac{|z|^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)}\left\{1+\frac{1}{(2+\lambda)(2-\alpha)}|z|\right\}$$

elde edilir.

$$D_z^{-\lambda} f(z) = \frac{z^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)}\left\{1-\frac{1}{(2+\lambda)(2-\alpha)}z\right\}$$

fonksiyonu için sınırlar kesindir.

Sonuç IV.9 $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *formunda ve* $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$ *için* $R(\alpha)$ *sınıfında olsun. O hâlde* $D_z^{-\lambda} f(z)$ *kesirli integrali, merkezi orjin ve yarıçapı*

$$r_0 = \frac{1}{\Gamma(2+\lambda)}\left\{1+\frac{1}{(2+\lambda)(2-\alpha)}\right\}$$

olan disk içinde kalır, [10].

Teorem IV.9 $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *formunda ve* $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$ *için* $R(\alpha)$ *sınıfında olsun. O hâlde* $0 \le \lambda < 1$ *ve* $z \in D$ *olmak üzere*

$$\left|D_z^{\lambda} f(z)\right| \ge \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)}\left\{1-\frac{1}{2-\alpha}|z|\right\}$$

ve

$$\left|D_z^{\lambda} f(z)\right| \le \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)}\left\{1+\frac{1}{2-\alpha}|z|\right\}$$

dir. Sınırlar kesindir, [10].

İspat: $0 \le \lambda < 1$ olmak üzere $P(z)$ fonksiyonu

$$P(z) = \Gamma(2-\lambda) z^{\lambda} D_z^{\lambda} f(z) \tag{IV.3.11}$$

olsun. (II.8.2) eşitliği yardımıyla

$$P(z) = \Gamma(2-\lambda) z^{\lambda} D_z^{\lambda}\left(z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n\right)$$

$$P(z) = \Gamma(2-\lambda) z^{\lambda}\left(D_z^{\lambda}(z) - \sum_{n=2}^{\infty} a_n D_z^{\lambda}(z^n)\right)$$

$$P(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+1-\lambda)} a_n z^n \qquad \text{(IV.3.12)}$$

bulunur. $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$ için $C(\alpha, n+1) \ge C(\alpha, n)$ olduğundan (IV.3.2) den

$$\left(\frac{2-\alpha}{2}\right) C(\alpha,2) \sum_{n=2}^{\infty} n a_n \le \sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha) C(\alpha,n) a_n \le 1-\alpha$$

elde edilir ve buradan

$$\sum_{n=2}^{\infty} n a_n \le \frac{1}{2-\alpha} \qquad \text{(IV.3.13)}$$

bulunur. $0 \le \lambda < 1$ ve $n \ge 2$ için

$$1 \le \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+1-\lambda)} < n \qquad \text{(IV.3.14)}$$

dir. (IV.3.12) de üçgen eşitsizliği uygulanıp, (IV.3.13) ve (IV.3.14) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa

$$|P(z)| \ge |z| - |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+1-\lambda)} a_n$$

$$|P(z)| \ge |z| - |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} n a_n$$

$$|P(z)| \ge |z| - \frac{1}{2-\alpha} |z|^2 \qquad \text{(IV.3.15)}$$

bulunur. (IV.3.11) ile verilen $P(z)$ fonksiyonu (IV.3.15) te yerine yazılırsa

$$\Gamma(2-\lambda)|z|^{\lambda} \left|D_z^{\lambda} f(z)\right| \ge |z| - \frac{1}{2-\alpha}|z|^2$$

$$\left|D_z^{\lambda} f(z)\right| \ge \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)} \left\{1 - \frac{1}{2-\alpha}|z|\right\}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$|P(z)| \le |z| + |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2-\lambda)}{\Gamma(n+1-\lambda)} a_n$$

$$|P(z)| \le |z| + |z|^2 \sum_{n=2}^{\infty} n a_n$$

$$|P(z)| \le |z| + \frac{1}{2-\alpha} |z|^2 \qquad \text{(IV.3.16)}$$

bulunur. (IV.3.11) ile verilen $P(z)$ fonksiyonu (IV.3.16) da yerine yazılırsa

$$\Gamma(2-\lambda)|z|^{\lambda}\left|D_z^{\lambda} f(z)\right| \le |z| + \frac{1}{2-\alpha}|z|^2$$

$$\left|D_z^{\lambda} f(z)\right| \le \frac{|z|^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)}\left\{1+\frac{1}{2-\alpha}|z|\right\}$$

bulunur.

$$D_z^{\lambda} f(z) = \frac{z^{1-\lambda}}{\Gamma(2-\lambda)}\left\{1-\frac{1}{2-\alpha}z\right\}$$

fonksiyonu için sınırlar kesindir.

Sonuç IV.10 $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *formunda ve* $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$ *için* $R(\alpha)$ *sınıfında olsun. O hâlde* $D_z^{\lambda} f(z)$ *kesirli türevi, merkezi orjin ve yarıçapı*

$$r_1 = \frac{3-\alpha}{(2-\alpha)\Gamma(2-\lambda)}$$

olan disk içinde kalır, [10].

Teorem IV.10 $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ *formunda ve* $0 \le \alpha \le \frac{1}{2}$ *için* $R(\alpha)$ *sınıfında olsun. O hâlde* $\lambda > 0$ *ve* $z \in D$ *olmak üzere*

$$\left|D_z^{1-\lambda} f(z)\right| \le \frac{|z|^{\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)}\left\{(1+\lambda)+\left(\frac{1}{2-\alpha}\right)|z|\right\}$$

dir. Sonuç kesindir, [10].

İspat: $\lambda > 0$ olmak üzere (IV.3.6) her iki tarafına adi türev uygulanırsa

$$F'(z) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+1+\lambda)} a_n z^{n-1}$$

elde edilir. Burada üçgen eşitsizliği uygulanıp, (IV.3.7) ve (IV.3.13) hatırlanırsa

$$\left|F'(z)\right| \le 1 + |z| \sum_{n=2}^{\infty} n \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2+\lambda)}{\Gamma(n+1+\lambda)} a_n$$

$$\left|F'(z)\right| \le 1 + |z| \frac{2}{2+\lambda} \sum_{n=2}^{\infty} n a_n$$

$$\left|F'(z)\right| \le 1 + \frac{2}{(2+\lambda)(2-\alpha)}|z| \qquad \text{(IV.3.17)}$$

elde edilir. (IV.3.5) in iki tarafına adi türev uygulanırsa

$$F^{'}(z)=\Gamma(2+\lambda)(-\lambda)z^{-\lambda-1}D_z^{-\lambda}f(z)+\Gamma(2+\lambda)z^{-\lambda}D_z^{1-\lambda}f(z)$$

$$\Gamma(2+\lambda)z^{-\lambda}D_z^{1-\lambda}f(z)=F^{'}(z)+\lambda\Gamma(2+\lambda)z^{-\lambda-1}D_z^{-\lambda}f(z)$$

$$D_z^{1-\lambda}f(z)=\frac{z^{\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)}F^{'}(z)+\lambda z^{-1}D_z^{-\lambda}f(z) \qquad \text{(IV.3.18)}$$

bulunur. (IV.3.18) de üçgen eşitsizliği uygulanıp, (IV.3.4) ve (IV.3.17) eşitsizlikleri yerlerine yazılırsa

$$\left|D_z^{1-\lambda}f(z)\right|\leq\frac{|z|^{\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)}\left|F^{'}(z)\right|+\lambda|z|^{-1}\left|D_z^{-\lambda}f(z)\right|$$

$$\left|D_z^{1-\lambda}f(z)\right|\leq\frac{|z|^{\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)}\left\{(1+\lambda)+\left(\frac{1}{2-\alpha}\right)|z|\right\}$$

elde edilir.

$$D_z^{-\lambda}f(z)=\frac{z^{1+\lambda}}{\Gamma(2+\lambda)}\left\{1-\frac{1}{(2+\lambda)(2-\alpha)}z\right\}$$

fonksiyonu için sonuç kesindir.

IV.4 $T_n(\lambda,\alpha)$ Sınıfında Kesirli Hesap

Tanım IV.5 *D^n türev operatörü $f(z)\in S$ için*

$$D^0 f(z)=f(z)$$
$$D^{'}f(z)=Df(z)=zf^{'}(z)$$

ve

$$D^n f(z)=D\left(D^{n-1}f(z)\right) \quad \left(n\in\mathrm{N}=\{1,2,\ldots\}\right)$$

biçiminde verilir.

D^n türev operatörü Salagean *GS* tarafından incelenmiştir. D^n türev operatörü yardımıyla, S sınıfındaki bir $f(z)$ fonksiyonunun $S_n(\lambda,\alpha)$ sınıfında olması için gerek ve yeter koşul,

$$Re\left\{\frac{\dfrac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}}{\lambda\dfrac{D^{n+1}f(z)}{D^n f(z)}+(1-\lambda)}\right\}>\alpha \qquad \left(n\in\mathrm{N}_0=\mathrm{N}\cup\{0\}\right)$$

olmasıdır. Burada $z\in D$, $0\leq\alpha<1$ ve $0\leq\lambda<1$ dir.

Tanım IV.6 S *sınıfında bulunan*

$$f(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k \qquad (a_k\geq 0)$$

formundaki fonksiyonların sınıfı T *olmak üzere* $T_n(\lambda,\alpha)$ *sınıfı*

$$T_n(\lambda,\alpha)=S_n(\lambda,\alpha)\cap T$$

şeklinde tanımlanır.

$T_n(\lambda,\alpha)$ sınıfı Aouf ve Cho tarafından çalışılmıştır. *n*, λ, α parametrelerini özelleştirerek aşağıdaki sınıflar elde edilmiştir.

$i)$ $T_0(\lambda,\alpha)=T(\lambda,\alpha)$ ve $T_1(\lambda,\alpha)=C(\lambda,\alpha)$ (Altıntaş ve Owa [1])
$ii)$ $T_0(0,\alpha)=T^*(\alpha)$ ve $T_1(0,\alpha)=C(\alpha)$ (Silverman [18])
$iii)$ $T_n(0,\alpha)=T(n,\alpha)$ (Hur ve Oh [6])

$T_n(\lambda,\alpha)$ sınıfındaki fonksiyonlara ait sonuçların ispatı için, Aouf ve Cho [2] aşağıdaki yardımcı teoremi vermişlerdir.

Yar.Teorem IV.5 $f(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ *ve* $a_k\geq 0$ *olsun.* $f(z)\in T_n(\lambda,\alpha)$ *olması için gerek ve yeter koşul,*

$$\sum_{k=2}^{\infty}k^n\{k-\alpha[1+\lambda(k-1)]\}a_k\leq 1-\alpha \qquad \text{(IV.4.1)}$$

olmasıdır.

Teorem IV.11 $f(z)\in T_n(\lambda,\alpha)$ *fonksiyonu* $f(z)=z-\sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k$ *formunda ve* $a_k\geq 0$ *olsun. O hâlde* $\nu>0$ *ve* $z\in D$ *için*

$$\left|D_z^{-\nu}f(z)\right|\geq\frac{|z|^{1+\nu}}{\Gamma(2+\nu)}\left\{1-\frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2+\nu)[2-\alpha(1+\lambda)]}|z|\right\} \qquad \text{(IV.4.2)}$$

ve

$$\left|D_z^{-\nu}f(z)\right|\leq\frac{|z|^{1+\nu}}{\Gamma(2+\nu)}\left\{1+\frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2+\nu)[2-\alpha(1+\lambda)]}|z|\right\} \qquad \text{(IV.4.3)}$$

dir, [4].

İspat: $\nu > 0$ olmak üzere $F(z)$ fonksiyonu

$$F(z) = \Gamma(2+\nu) z^{-\nu} D_z^{-\nu} f(z) \tag{IV.4.4}$$

olsun. Buradan (II.4.4) yardımıyla

$$F(z) = \Gamma(2+\nu) z^{-\nu} D_z^{-\nu}\left(z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \right)$$

$$F(z) = \Gamma(2+\nu) z^{-\nu}\left(D_z^{-\nu}(z) - \sum_{k=2}^{\infty} a_k D_z^{-\nu}\left(z^k\right) \right)$$

$$F(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)} a_k z^k \tag{IV.4.5}$$

olur. Burada $k \geq 2$ için $\Psi(k) = \dfrac{\Gamma(k+1)\Gamma(2+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)}$ olsun. $\Psi(k)$ fonksiyonu k ya göre azalan olduğundan

$$0 < \Psi(k) \leq \Psi(2) = \frac{2}{2+\nu} \tag{IV.4.6}$$

bulunur. (IV.4.1) den

$$2^n [2 - \alpha(1+\lambda)] \sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=2}^{\infty} k^n [k - \alpha(1+\lambda(k-1))] a_k \leq 1-\alpha$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k \leq \frac{1-\alpha}{2^n [2-\alpha(1+\lambda)]} \tag{IV.4.7}$$

elde edilir. (IV.4.5) te üçgen eşitsizliği uygulanıp, (IV.4.6) ve (IV.4.7) eşitsizlikleri hatırlanırsa

$$|F(z)| = \left| z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)} a_k z^k \right|$$

$$|F(z)| \geq |z| - \sum_{k=2}^{\infty} \Psi(k) a_k |z|^k$$

$$|F(z)| \geq |z| - |z|^2 \frac{2}{2+\nu} \sum_{k=2}^{\infty} a_k$$

$$|F(z)| \geq |z| - \frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2+\nu)[2-\alpha(1+\lambda)]} |z|^2 \tag{IV.4.8}$$

bulunur. (IV.4.4) ile verilen $F(z)$ fonksiyonu (IV.4.8) de yerine yazılırsa

$$\Gamma(2+\nu) |z|^{-\nu} \left| D_z^{-\nu} f(z) \right| \geq |z| - \frac{1-\alpha}{2^{n-1}(\nu+2)[2-\alpha(1+\lambda)]} |z|^2$$

$$\left| D_z^{-\nu} f(z) \right| \geq \frac{|z|^{1+\nu}}{\Gamma(2+\nu)} \left\{ 1 - \frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2+\nu)[2-\alpha(1+\lambda)]} |z| \right\}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$|F(z)| = \left| z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(2+\nu)}{\Gamma(k+\nu+1)} a_k z^k \right|$$

$$|F(z)| \le |z| + \sum_{k=2}^{\infty} \Psi(k) a_k |z|^k \tag{IV.4.9}$$

elde edilir. (IV.4.4) ile verilen $F(z)$ fonksiyonu (IV.4.9) da yerine yazılırsa

$$\left|D_z^{-\nu} f(z)\right| \le \frac{|z|^{1+\nu}}{\Gamma(2+\nu)} \left\{ 1 + \frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2+\nu)[2-\alpha(1+\lambda)]} |z| \right\}$$

elde edilir. Denklemde eşitlik hali

$$D_z^{-\nu} f(z) = \frac{z^{1+\nu}}{\Gamma(2+\nu)} \left\{ 1 - \frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2+\nu)[2-\alpha(1+\lambda)]} z \right\}$$

veya

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2^n[2-\alpha(1+\lambda)]} z^2$$

fonksiyonu için görülür.

Sonuç IV.11 *$f(z) \in T_n(\lambda,\alpha)$ fonksiyonu $f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ formunda ve $a_k \ge 0$ olmak üzere, $D_z^{-\nu} f(z)$ kesirli integrali, merkezi orjin ve yarıçapı*

$$r_1 = \frac{1}{\Gamma(2+\nu)} \left\{ 1 + \frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2+\nu)[2-\alpha(1+\lambda)]} \right\}$$

olan diskin içinde kalır.

Teorem IV.12 *$f(z) \in T_n(\lambda,\alpha)$ fonksiyonu $f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ formunda ve $a_k \ge 0$ olsun. O hâlde $0 \le \nu < 1$, $z \in D$ için*

$$\left|D_z^{\nu} f(z)\right| \ge \frac{|z|^{1-\nu}}{\Gamma(2-\nu)} \left\{ 1 - \frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2-\nu)[2-\alpha(1+\lambda)]} |z| \right\}$$

ve

$$\left|D_z^{\nu} f(z)\right| \le \frac{|z|^{1-\nu}}{\Gamma(2-\nu)} \left\{ 1 + \frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2-\nu)[2-\alpha(1+\lambda)]} |z| \right\}$$

dir, [4].

İspat: $0 \le \nu < 1$ olmak üzere $G(z)$ fonksiyonu

$$G(z) = \Gamma(2-\nu) z^{\nu} D_z^{\nu} f(z) \tag{IV.4.10}$$

olsun. (II.8.2) eşitliği yardımıyla

$$G(z) = \Gamma(2-\nu) z^{\nu} D_z^{\nu} \left(z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \right)$$

$$G(z) = \Gamma(2-\nu) z^{\nu} \left(D_z^{\nu}(z) - \sum_{k=2}^{\infty} a_k D_z^{\nu}\left(z^k\right) \right)$$

$$G(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k)\Gamma(2-\nu)}{\Gamma(k-\nu+1)} k a_k z^k \tag{IV.4.11}$$

bulunur. Burada $k \ge 2$ için $\Phi(k) = \dfrac{\Gamma(k)\Gamma(2-\nu)}{\Gamma(k-\nu+1)}$ olsun. $\Phi(k)$ fonksiyonu k ya göre azalan olduğundan

$$0 < \Phi(k) \le \Phi(2) = \frac{1}{2-\nu} \tag{IV.4.12}$$

elde edilir. (IV.4.1) den

$$2^{n-1}\left[2-\alpha(1+\lambda)\right]\sum_{k=2}^{\infty} k a_k \le \sum_{k=2}^{\infty} k^n \left[k-\alpha(1+\lambda(k-1))\right] a_k \le 1-\alpha$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k a_k \le \frac{1-\alpha}{2^{n-1}\left[2-\alpha(1+\lambda)\right]} \tag{IV.4.13}$$

elde edilir. (IV.4.11) de üçgen eşitsizliği uygulanıp, (IV.4.12) ve (IV.4.13) eşitsizlikleri hatırlanırsa

$$|G(z)| = \left| z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k)\Gamma(2-\nu)}{\Gamma(k-\nu+1)} k a_k z^k \right|$$

$$|G(z)| \ge |z| - \sum_{k=2}^{\infty} \Phi(k) k a_k |z|^k$$

$$|G(z)| \ge |z| - |z|^2 \frac{1}{2-\nu} \sum_{k=2}^{\infty} k a_k$$

$$|G(z)| \ge |z| - \frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2-\nu)\left[2-\alpha(1+\lambda)\right]} |z|^2 \tag{IV.4.14}$$

bulunur. (IV.4.10) ile verilen $G(z)$ fonksiyonu (IV.4.14) te yerine yazılırsa

$$\left|\Gamma(2-\nu) z^{\nu} D_z^{\nu} f(z)\right| \ge |z| - \frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2-\nu)\left[2-\alpha(1+\lambda)\right]} |z|^2$$

$$\left|D_z^{\nu} f(z)\right| \ge \frac{|z|^{1-\nu}}{\Gamma(2-\nu)} \left\{ 1 - \frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2-\nu)\left[2-\alpha(1+\lambda)\right]} |z| \right\}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\left|G(z)\right| = \left| z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k)\Gamma(2-\nu)}{\Gamma(k-\nu+1)} k a_k z^k \right|$$

$$\left|G(z)\right| \le |z| + \sum_{k=2}^{\infty} \Phi(k) k a_k |z|^k \tag{IV.4.15}$$

elde edilir. (IV.4.10) ile verilen $G(z)$ fonksiyonu (IV.4.15) te yerine yazılırsa

$$\left|D_z^{\nu} f(z)\right| \le \frac{|z|^{1-\nu}}{\Gamma(2-\nu)} \left\{ 1 + \frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2-\nu)[2-\alpha(1+\lambda)]} |z| \right\}$$

bulunur. Denklemde eşitlik hali

$$D_z^{\nu} f(z) = \frac{z^{1-\nu}}{\Gamma(2-\nu)} \left\{ 1 - \frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2-\nu)[2-\alpha(1+\lambda)]} z \right\}$$

için görülür.

Sonuç IV.12 *$f(z) \in T_n(\lambda,\alpha)$ fonksiyonu $f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ formunda ve $a_k \ge 0$ olmak üzere, $D_z^{\nu} f(z)$ kesirli türevi, merkezi orjin ve yarıçapı*

$$r_2 = \frac{1}{\Gamma(2-\nu)} \left\{ 1 + \frac{1-\alpha}{2^{n-1}(2-\nu)[2-\alpha(1+\lambda)]} \right\}$$

olan diskin içinde kalır.

IV.4.1 Kesirli İntergal Operatörü

Srivastava, Saigo ve Owa [20] tarafından verilen aşağıdaki kesirli integral operatör tanımını inceleyelim.

Tanım IV.7 *$\beta > 0$, γ ve η reel sayıları için $I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta}$ integral operatörü*

$$I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta} f(z) = \frac{z^{-\beta-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^z (z-t)^{\beta-1} F\left(\beta+\gamma, -\eta; \beta; 1-\frac{t}{z} \right) f(t) dt$$

şeklindedir. Burada $f(z)$ fonksiyonu z-düzleminin orjini içeren bağlantılı bir bölgesinde analitik ve $\varepsilon > \max(0,\gamma-\eta)-1$ için

$$f(z) = O\left(|z|^{\varepsilon}\right), z \to 0$$

dır ve

$$F(a,b;c;z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k (1)_k} z^k$$

hipergeometrik fonksiyondur.

Uyarı IV.1 $\gamma = -\beta$ *için*

$$I_{0,z}^{\beta,-\beta,\eta} f(z) = D_z^{-\beta} f(z)$$

dir.

Yar.Teorem IV.6 $\beta > 0$ *ve* $k > \gamma - \eta - 1$ *ise*

$$I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta} z^k = \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\gamma+\eta+1)}{\Gamma(k-\gamma+1)\Gamma(k+\beta+\eta+1)} z^{k-\gamma} \qquad \text{(IV.4.16)}$$

dır, [20].

Yardımcı Teorem IV.6 dan faydalanarak aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem IV.13 $\beta < 0,\ \gamma < 2,\ \beta + \eta > -2,\ \gamma - \eta < 2$ *ve* $\gamma(\beta+\eta) \le 3\beta$ *olsun.* $f(z) \in T_n(\lambda, \alpha)$ *fonksiyonu* $f(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ *formunda ve* $a_k \ge 0$ *olmak üzere*

$$\left| I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta} f(z) \right| \ge \frac{\Gamma(2-\gamma+\eta)|z|^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(2+\beta+\eta)} \left\{ 1 - \frac{(1-\alpha)(2-\gamma+\eta)}{2^{n-1}[2-\alpha(1+\lambda)](2-\gamma)(2+\beta+\eta)} |z| \right\} \qquad \text{(IV.4.17)}$$

ve

$$\left| I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta} f(z) \right| \le \frac{\Gamma(2-\gamma+\eta)|z|^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(2+\beta+\eta)} \left\{ 1 + \frac{(1-\alpha)(2-\gamma+\eta)}{2^{n-1}[2-\alpha(1+\lambda)](2-\gamma)(2+\beta+\eta)} |z| \right\} \qquad \text{(IV.4.18)}$$

dir. Burada $z \in D_0$ *dır ve*

$$D_0 = \begin{cases} D & (\gamma \le 1) \\ D - \{0\} & (\gamma > 1) \end{cases}$$

dir. Eşitlik hali

$$f(z) = z - \frac{1-\alpha}{2^n[2-\alpha(1+\lambda)]} z^2$$

fonksiyonu için görülür, [4].

İspat: Yardımcı Teorem IV.6 dan faydalanarak $I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta} f(z)$ yi inceleyelim.

$$I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta} f(z) = I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta} \left(z - \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \right)$$

$$I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta} f(z) = I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta}(z) - \sum_{k=2}^{\infty} a_k I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta}\left(z^k\right)$$

bulunur. (IV.4.16) dan

$$I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta} f(z) = \frac{\Gamma(2-\gamma+\eta)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(2+\beta+\eta)} z^{1-\gamma} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(k-\gamma+\eta+1)}{\Gamma(k-\gamma+1)\Gamma(k+\beta+\eta+1)} a_k z^{k-\gamma} \quad \text{(IV.4.19)}$$

elde edilir. $H(z)$ fonksiyonu

$$H(z) = \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(2+\beta+\eta)}{\Gamma(2-\gamma+\eta)} z^{\gamma} I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta} f(z) \quad \text{(IV.4.20)}$$

olsun. (IV.4.19) eşitliği (IV.4.20) de yerine yazılıp düzenlenirse

$$H(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(2+\beta+\eta)\Gamma(k+1)\Gamma(k-\gamma+\eta+1)}{\Gamma(2-\gamma+\eta)\Gamma(k-\gamma+1)\Gamma(k+\beta+\eta+1)} a_k z^k$$

$$H(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\dfrac{\Gamma(k-\gamma+\eta+1)}{\Gamma(2-\gamma+\eta)} \dfrac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(1)}}{\dfrac{\Gamma(k-\gamma+1)}{\Gamma(2-\gamma)} \dfrac{\Gamma(k+\beta+\eta+1)}{\Gamma(2+\beta+\eta)}} a_k z^k \quad \text{(IV.4.21)}$$

elde edilir. Burada

$$h(k) = \frac{(2-\gamma+\eta)_{k-1}(1)_k}{(2-\gamma)_{k-1}(2+\beta+\eta)_{k-1}} \qquad (k \geq 2)$$

alınırsa (IV.4.21) eşitliği

$$H(z) = z - \sum_{k=2}^{\infty} h(k) a_k z^k \quad \text{(IV.4.22)}$$

biçiminde yazılır. $k \geq 2$ için $h(k)$ fonksiyonu azalan olduğundan

$$0 < h(k) \leq h(2) = \frac{2(2-\gamma+\eta)}{(2-\gamma)(2+\beta+\eta)} \quad \text{(IV.4.23)}$$

bulunur. (IV.4.22) de üçgen eşitsizliği uygulanıp, (IV.4.7) ve (IV.4.23) yerlerine yazılırsa

$$|H(z)| = \left| z - \sum_{k=2}^{\infty} h(k) a_k z^k \right|$$

$$|H(z)| \geq |z| - h(2)|z|^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k$$

$$|H(z)| \geq |z| - \frac{(1-\alpha)(2-\gamma+\eta)}{2^{n-1}[2-\alpha(1+\lambda)](2-\gamma)(2+\beta+\eta)} |z|^2 \quad \text{(IV.4.24)}$$

bulunur. (IV.4.20) ile verilen $H(z)$ fonksiyonu (IV.4.24) de yerine yazılırsa

$$\frac{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(2+\beta+\eta)}{\Gamma(2-\gamma+\eta)} |z|^{\gamma} \left| I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta} f(z) \right| \geq |z| - \frac{(1-\alpha)(2-\gamma+\eta)}{2^{n-1}[2-\alpha(1+\lambda)](2-\gamma)(2+\beta+\eta)} |z|^2$$

elde edilir ve eşitsizlik düzenlendiğinde

$$\left|I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta} f(z)\right| \geq \frac{\Gamma(2-\gamma+\eta)|z|^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(2+\beta+\eta)}\left\{1-\frac{(1-\alpha)(2-\gamma+\eta)}{2^{n-1}[2-\alpha(1+\lambda)](2-\gamma)(2+\beta+\eta)}|z|\right\}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$|H(z)| = \left|z-\sum_{k=2}^{\infty} h(k) a_k z^k\right|$$

$$|H(z)| \leq |z| + h(2)|z|^2 \sum_{k=2}^{\infty} a_k \qquad \text{(IV.4.25)}$$

elde edilir. (IV.4.20) ile verilen $H(z)$ fonksiyonu (IV.4.25) te yerine yazılır ve ifade düzenlenirse

$$\left|I_{0,z}^{\beta,\gamma,\eta} f(z)\right| \leq \frac{\Gamma(2-\gamma+\eta)|z|^{1-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(2+\beta+\eta)}\left\{1+\frac{(1-\alpha)(2-\gamma+\eta)}{2^{n-1}[2-\alpha(1+\lambda)](2-\gamma)(2+\beta+\eta)}|z|\right\}$$

elde edilir.

Uyarı IV.2 $\gamma = -\beta$ *için (IV.4.17) ve (IV.4.18) eşitsizlikleri daha önce ispatladığımız (IV.4.2) ve (IV.4.3) eşitsizliklerini verir.*

V BÖLÜM

SON DEĞERLENDİRMELER VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, kesirli türev ve integraller hakkında yazılmış kitap ve makalelerde verilen teoremler ve sonuçlar incelendi. Bazı fonksiyonların kesirli türevi ve integralleri hesaplandı. Birim dairede analitik ve yalınkat fonksiyonların tanımları ve özellikleri incelendi. Bu fonksiyoların kesirli türev ve integralleri için integral eşitsizlikleri incelendi ve bu eşitsizliklerin negatif katsayılı yalınkat fonksiyonlar için de geçerli olduğu gösterildi. $B(\alpha,\beta)$, $R(\alpha)$ ve $T_n(\lambda,\alpha)$ gibi özel fonksiyon sınıfları tanımlandı. Bu sınıflara ait fonksiyonların kesirli türev ve integralleri için distorsiyon teoremleri incelendi. $B(\alpha,\beta)$ sınıfındaki fonksiyonların konveksliği için bir yarıçap bulundu. Kesirli integral operatörü tanımı verildi ve distorsiyon teoremi ispatlandı.

Yalınkat fonksiyonların alt sınıfları için incelenen katsayı kısıtlamaları ve distorsiyon teoremleri, alt sınıfların en kapsamlısı olan Bazilevic fonksiyonları için yapılabilir. Loewner-Kufarev diferansiyel denkleminin çözümleri olarak tanımlanan Bazilevic fonksiyon sınıflarının, özel koşullar altında incelenmesinin ilginç olacağı açıktır.

KAYNAKLAR

Makale:

[1] *Altintas, O., Owa, S. (1988) On subclasses of univalent functions with negative coefficients, Pusan Kyongnam Math. J.,* **4, 41-46**

[2] *Aouf, M. K., Cho, N. E. (1998) On a certain class of analytic functions with negative coefficients, Tr. J. of Math.,* **22, 15-32**

[3] *Chatterjea, S. K. (1981) On starlike functions, J. Pure Math.,* **1, 23-26**

[4] *Cho, N. E., Aouf, M. K. (1996) Some app. of fractional calculus operators to a certain subclass of analytic functions with negative coefficients, Tr. J. of Mathematics,* **20, 553-562**

[5] *Gupta, V. P. (1984) Convex class of starlike functions, Yokohama Math. J.,* **32, 55-59**

[6] *Hur, M. D., Oh, G. H. (1989) On certain class of analytic functions with negative coefficients, Pusan Kyongnam Math. J.,* **5, 69-80**

[7] *Kim, Y. C., Choi, J. H. (2000) Integral means of the fractional derivative of univalent functions with negative coefficients, Mathematica Japonica,* **51, 453-457**

[8] *Littlewood, J. E. (1925) On inequalities in the theory of functions, Proc. London Math. Soc.,* **23(2), 481-519**

[9] *MacGregor, T. H. (1963) The radius of convexity for starlike functions of order 1/2, Proc. Amer. Math. Soc.,* **14, 71-76**

[10] *Owa, S., Al-Bassam, M. A. (1986) An application of the fractional calculus, Pure Appl. Math. Sci.* **24, 1-7**

[11] *Owa, S., Shen, C. Y. (1986) Certain classes of univalent functions and an app. of the fractional calculus, Bull. Korean Math. Soc.* **23(1), 5-12**

[12] *Owa, S., Tsurumi, K., Nunokawa, M., Sekine, T. (2003) On integral means for the fractional calculus of analytic functions, Bull. of the ins. of math. academia Sinica, Vol. 21. No.4.,* **243-255**

[13] *Pinchuk, B. (1968) On the starlike and convex functions of order α, Duke Math. J.,* **35, 721-734**

[14] *Robertson, M. S. (1936) On the theory of univalent functions, Ann. of Math.,* **37, 374-408**

[15] *Ruscheweyh, S. (1977) Linear operators between classes of prestarlike functions, Comment. Math. Helv.,* **52, 497-509**

[16] *Salagean, G. S. (1983) Subclasses of univalent functions, lecture Notes in Math. (Springer Verlag),* **1013, 362-372**

[17] *Schild, A. (1965) On starlike functions of order α,* Amer.J.Math., **87, 65-70**

[18] *Silverman, H. (1975) Univalent functions with negative coefficients, Proc. Amer. Math. Soc.,* **51, 109-116**

[19] *Silverman, H., Silvia, E. M. (1979) Prestarlike functions with negative coefficients, Internat. J. Math. and Math. Sci.,* **2, 427-439**

[20] *Srivastava, H. M., Saigo, M., Owa, S. (1988) A class of distortion theorems involving certain operators of fractional calculus, J. Math. Anal. Appl.,* **131, 412-420**

Kitap:

[21] *Ahlfors, L.V. (1966) Complex Analysis, 2nd ed., McGraw-Hill, New York*

[22] *Duren, P.L. (1983) Univalent Functions, Springer Verlag, New York Inc.*

[23] *Miller, K. S., Ross, B. (1993) An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, John Wiley and Sons, Inc., New York-Chichester-Brisbane-Toronto-Singapore*

[24] *Mitrinovic, D. S. (1970) Analytic Inequalities, Springer-Verlag, Berlin*

[25] *Podlubny, I. (1999) Fractional Differential Equations, Academic Press, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto*

[26] *Samko, S. G., Kilbas, A. A., Marichev, O. I. (1993) Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications, Gordon and Breach*

ÖZGEÇMİŞ

27.06.1987 yılında İstanbul'un Bayrampaşa ilçesinde doğdum. İlköğrenimimi Esentepe İlköğretim Okulu'nda, ortaöğrenimimi Vefa Poyraz Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi'nde tamamladım. 2005 yılında girdiğim Uludağ Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü 2009 yılında bitirdim. Üniversitenin dördüncü yılında Erasmus Öğrenci Değişim Programı'ndan faydalanarak Polonya'da bulunan University of Rzeszow'da bir dönem öğrenim gördüm. 2013 yılında İstanbul Üniversitesi'nde Pedagojik Formasyon Sertifikası aldım. Askerlik görevimi Kahramanmaraş'ta yedek subay olarak yaptım.