MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPOLOJİK UZAYLAR ARACILIĞI İLE BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ AÇIK KÜME TİPLERİ VE İLGİLİ KAVRAMLARIN UNİFİKASYONU

SEDA NUR DÜNDAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Bölümü
Teorik Matematik Anabilim Dalı

DANIŞMAN
Doç. Dr. Uğur ŞENGÜL

İSTANBUL, 2017

MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPOLOJİK UZAYLAR ARACILIĞI İLE BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ AÇIK KÜME TİPLERİ VE İLGİLİ KAVRAMLARIN UNİFİKASYONU

SEDA NUR DÜNDAR

(521013001)

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Matematik Bölümü
Teorik Matematik Anabilim Dalı

DANIŞMAN
Doç. Dr. Uğur ŞENGÜL

İSTANBUL, 2017

ÖNSÖZ

Bu çalışma, Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Öğretim Üyesi Doç. Dr. Uğur ŞENGÜL yönetiminde yapılmış ve Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsüne Yüksek Lisans tezi olarak sunulmuştur.

Bu konuyu bana veren ve çalışma boyunca değerli katkılarıyla yardımını esirgemeyen hocam Doç. Dr. Uğur ŞENGÜL Bey’e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPOLOJİK UZAYLAR ARACILIĞI İLE BAZI GENELLEŞTİRİLMİŞ AÇIK KÜME TİPLERİ VE İLGİLİ KAVRAMLARIN UNİFİKASYONU

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, önce çalışmamız için gerekli bilgi ve kavramları verdik. Sonra genelleştirilmiş topolojik uzaylardaki bazı küme çeşitleri ile ilgili yeni özellikler elde ettik.

İkinci bölümde, μg- açık küme ve μg-kapalı küme kavramlarından yararlanarak elde ettiğimiz μg-regüler, μg-normal ve μg-bağlantılı uzay kavramlarını verip, bu uzayların bazı özelliklerini elde ettik.

Üçüncü bölümde, μ-genelleştirilmiş sürekli fonksiyon kavramından yararlanarak (μg,λ)-sürekli ve (μg,λg)-irresolute fonksiyonları elde ettik ve bunlar arasındaki ilişkileri gösteren teoremleri ifade ettik. Ayrıca, contra (μ,λ)-sürekli fonksiyon kavramından yararlanarak contra (μg,λ)-sürekli fonksiyonları tanımladık. Bu süreklilik çeşitlerinin bazı özelliklerini inceledik ve genelleştirilmiş süreklilik konusunda bazı sonuçlar elde ettik.

ABSTRACT

UNIFICATION OF SOME TYPES OF GENERALIZED OPEN SETS AND RELATED CONCEPTS VIA GENERALIZED TOPOLOGICAL SPACES

This study consists of three chapters. In first chapter, it was given the background knowledge and necessary concepts for our study. Then we have obtained some new properties concerned with the set kinds in General Topological Spaces.

In the second chapter, utilizing μg-open set and μg-closed set concepts, we have given new concepts of spaces named as μg-regular, μg-normal and μg-connected spaces. Moreover, we have obtained some properties of these spaces.

In the third chapter, utilizing μ-generalized continuous functions, we have given new concepts named as $(\mu g,\lambda)$-continuous and $(\mu g,\lambda g)$-irresolute functions, we have expressed some theorems that show the relations between these two types of continuity. Moreover, utilizing contra (μ,λ)-continuous functions, we have defined a new concept named as contra $(\mu g,\lambda)$- continuous functions. Investigating some properties of these continuity types, we have given new results on generalized continuity.

SEMBOLLER/SYMBOLS

$\in$: elemanıdır

$\notin$: elemanı değildir

= : eşittir

$\neq$: eşit değildir

$\Rightarrow$:gerek şart

$\Leftrightarrow$:gerek ve yeter şart

$\Leftarrow$: yeter şart

$\forall$:her

(X,μ) : genelleştirilmiş topolojik uzay

$\alpha O(\mu)$: (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayındaki bütün α-açık kümeleri ailesi

$\beta O(\mu)$: (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayındaki bütün β-açık kümeleri ailesi

$PO(\mu)$: (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayındaki bütün ön-açık kümeleri ailesi

$SO(\mu)$: (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayındaki bütün yarı-açık kümeleri ailesi

$GO(\mu)$: (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayındaki bütün μg-açık kümeler ailesi

$GC(\mu)$: (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayındaki bütün μg-kapalı kümeler ailesi

KISALTMALAR/ABBREVIATIONS

GTS : Genelleştirilmiş Topolojik Uzay

gyk : gerek ve yeter koşul

1. GİRİŞ

1.1. Genelleştirilmiş Topoloji ve İlgili Kavramlar

Verilen bir küme üzerinde tanımlı bir topolojik uzayda iç, kapanış işlemleri aracılığıyla üretilebilen genelleştirilmiş açık küme tipleri genel topolojinin temel çalışma alanlarından birisidir.

Tanım 1.1.1. Bir (X,τ) topolojik uzayında göz önüne alınan bir S $(\subset X)$ alt kümesi

a) $S\subset cl(int(S)$ ise yarı-açık küme [16],
b) $S\subset int(cl(S))$, ise ön-açık küme [17],
c) $S\subset int(cl(int(S)))$ ise α-açık küme [21],
d) $S\subset cl(int(cl(S)))$ ise β-açık küme ([18] veya [1]),
e) $S\subset cl(int(S))\cup int(cl(S)))$ ise b-açık küme [2],

olarak isimlendirilir.

Bir örnekle bu kavramları somutlaştırabiliriz. R reel sayılar kümesi üzerinde standart topoloji $\tau_{st}=\{R,\emptyset\}\cup\{U\subseteq R|\forall x\in U,\exists(a,b)\subseteq U \text{ ve } x\in(a,b)\}$ göz önüne alınsın:

a) $A=[0,1)$ (R, τ_{st}) de yarı-açıktır, ama ön açık değildir.
b) $(1,2)\cap Q$) (R, τ_{st}) de ön-açıktır ama yarı-açık değildir.
c) Q rasyonel sayılar kümesi olmak üzere $S=[0,1]\cup((1,2)\cap Q)$ (R, τ_{st}) de b-açıktır ama β-açık değildir.
d) $U=[1,2)\cap Q$ kümesi (R, τ_{st}) de β-açıktır ama b-açık değildir.

(X,τ) topolojik uzayında yarı-açık (semi-open), ön-açık (pre-open), α-açık, b-açık (b-open) veya β-açık kümelerin ailesi $SO(X)$ (sırasıyla $PO(X)$, $\alpha O(X)$, $\beta O(X)$, $BO(X)$) ile gösterilir.

Tanım 1.1.2. [6] Boştan farklı bir X kümesi verilsin. Bir $\mu\subset expX$ ailesine, $\emptyset\in\mu$ ve μ birleşim işlemi altında kapalı ise X üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji (generalized topology, kısaca GT) denir. Verilen bir küme üzerinde tanımlı bir topolojik uzayda iç, kapanış işlemleri aracılığıyla üretilebilen genelleştirilmiş açık küme tiplerinin bir çoğu aynı küme üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji belirler. Örneğin bir (X,τ) topolojik uzayında yarı-açık (semi-open), ön-açık (pre-open), α-açık, b-açık (b-open) veya β-açık kümelerin ailesi X üzerinde birer genelleştirilmiş topolojidir. μ ailesinin elemanlarına μ-açık kümeler ve (X,μ) ikilisine genelleştirilmiş topolojik uzay (generalized topological space, kısaca GTS) denir. μ-açık bir kümenin bütünleyeni μ-kapalı adını alır.

Tanım 1.1.3. X kümesi üzerinde bir μ genelleştirilmiş topolojisine $X\in\mu$ gerçekleniyorsa güçlü genelleştirilmiş topoloji denir.

Önerme 1.1.4. (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayında μ-kapalı kümelerin kesişimi μ-kapalıdır.

Kanıt.

Her $i\in I$ için $F_i\subset X$ μ-kapalı ise $X\setminus F_i\in\mu$ dir. μ genelleştirilmiş topoloji olduğundan $\cup_{i\in I}(X\setminus F_i)=X\setminus\cap_{i\in I}F_i\in\mu$, yani $\cap_{i\in I}F_i$ μ-kapalıdır. □

Not 1.1.5. μ-açık iki kümenin kesişimi μ-açık olmayabilir. $X=\{a,b,c,d\}$ kümesi ve bu küme üzerinde $\mu=\{\emptyset,\{a,c\},\{b,c\},\{a,b,c\}\}$ genelleştirilmiş topolojisi verilsin. $\{a,c\},\{b,c\}\in\mu$, ancak $\{a,c\}\cap\{b,c\}=\{b\}\notin\mu$ olur.

Tanım 1.1.6. [8] X genelleştirilmiş topolojik uzayında bir $A\subset X$ kümesini kapsayan bütün μ-kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin μ-kapanışı denir ve $c_\mu(A)$ ile gösterilir. $c_\mu(A)$, A kümesini kapsayan en küçük μ-kapalı kümedir.

Lemma 1.1.7. [4] X genelleştirilmiş topolojik uzayında bir $x\in X$ noktasının $A\subset X$ kümesinin μ-kapanışının elemanı olması için gyk x noktasını içeren her μ-açık kümenin A ile kesişiminin boştan farklı olmasıdır.

Kanıt.

$\varkappa(A)=\{x\in X$:x noktasını içeren her $U\in\mu$ için $U\cap A\neq\emptyset\}$ yazılsın ve $x\notin\varkappa(A)$ olsun. O halde, $x\in U$ ve $U\cap A=\emptyset$ olacak şekilde bir $U\in\mu$ vardır. Buradan, $A\subset X\setminus U$ ve $X\setminus U$ μ-kapalı olduğundan $x\notin c_\mu(A)$ elde edilir. O halde, $c_\mu(A)=\{x\in X$:x noktasını içeren her $U\in\mu$ için $U\cap A\neq\emptyset\}$ dir. □

Tanım 1.1.8. [8] X genelleştirilmiş topolojik uzayında bir $A\subset X$ kümesinin μ-açık altkümelerinin birleşimine, yani $i_\mu(A)=\cup\{U:U\subset A$ ve $U\in\mu\}$ kümesine, A kümesinin μ-içi denir ve $i_\mu(A)$ ile gösterilir. $i_\mu(A)$, A kümesinin kapsadığı en büyük μ-açık kümedir.

Lemma 1.1.9. X genelleştirilmiş topolojik uzayında bir $x\in X$ noktasının $A\subset X$ kümesinin μ-içinin elemanı olması için gyk x noktasını içeren bir $U\in\mu$ kümesi için $U\subset A$ gerçeklenmesidir.

Kanıt.

$x\in i_\mu(A)=\cup\{U:U\subset A$ ve $U\in\mu\}$ ise bir $U\in\mu$, $x\in U\subset A$ gerçeklenmek üzere vardır.

Tersine x noktasını içeren bir $U\in\mu$ kümesi $U\subset A$ olacak şekilde varsa $\cup\{U:U\subset A$ ve $U\in\mu\}=i_\mu(A)$ bulunur. □

Not 1.1.10. (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayında bir $S\subset X$ kümesine $S\subset c_\mu(i_\mu(S))$ (sırasıyla $S\subset i_\mu(c_\mu(S))$, $S\subset i_\mu(c_\mu(i_\mu\}(S)))$, $S\subset c_\mu(i_\mu(c_\mu(S)))$, $S\subset i_\mu(c_\mu(S)\cup c_\mu(i_\mu(S))$, $S=i_\mu(c_\mu(S)))$ gerçekleniyorsa μ-yarı-açık [6](sırasıyla μ-önaçık [6], μ-α-açık [8], μ-β-açık [8], μ-b-açık [29], μr-açık [4]) küme denir. Hem μ-açık hem de μ-kapalı olan bir $S\subset X$ kümesine μ-regüler (μ-kapaçık) denir. (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayındaki bütün μ-yarı-açık (sırasıyla μ-önaçık, μ-α-açık, μ-β-açık, μ-b-açık) kümeler $SO(\mu)$ (sırasıyla $PO(\mu)$, $\alpha O(\mu)$, $\beta O(\mu)$, $BO(\mu)$) ile gösterilir.

Tanım 1.1.11. [4] μ, boştan farklı X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji olsun. $\theta(\mu)=\{A\subset X$: her $x\in A$ için $x\in M\subset c_\mu(M)\subset A$ gerçekleyen bir $M\in\mu$ var$\}$ şeklinde tanımlansın. $\theta(\mu)$ ailesi X üzerinde $\theta(\mu)\subset\mu$ gerçekleyen bir genelleştirilmiş topolojdir. $\theta(\mu)$ ailesine ait kümeler $\theta(\mu)$-açık olarak adlandırılır ve $\theta(\mu)$-açık kümenin bütünleyenine $\theta(\mu)$-kapalı adını alır.

$$c_{\theta(\mu)}(A)=\cap\{F\subset X:F\ \theta(\mu)\text{-kapalı ve } A\subset F\}$$

$$i_{\theta(\mu)}(A)=\cup\{V\subset X:V\ \theta(\mu)\text{-açık ve } V\subset A\}$$

$$\iota_{\theta(\mu)}(A)=\{x\in X:\text{bir } U\in\mu \text{ için } x\in U \text{ ve } c_\mu(U)\subset A\}$$

$$\gamma_{\theta(\mu)}(A)=\{x\in X: x \text{ i içeren her } M\in\mu \text{ için } c_\mu(M)\cap A\neq \emptyset\}$$

Teorem 1.1.12. [5] μ, boştan farklı X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji ve $A\subset X$ olsun. Aşağıdakiler geçerlidir:

(a) $A\subset\gamma_{\theta(\mu)}(A)\subset c_{\theta(\mu)}(A)$

(b) A kümesinin $\theta(\mu)$-kapalı olması için gyk $A=\gamma_{\theta(\mu)}(A)$ olmasıdır.

Kanıt.

(a) $x\in A$ ise $x\in c_\mu(A)$ ve böylece x i içeren her $U\in\mu$ için $U\cap A\neq \emptyset$, yani $c_\mu(U)\cap A\neq \emptyset$ elde edilir. O halde, $x\in\gamma_{\theta(\mu)}(A)$ ve dolayısıyla $A\subset c_\mu(A)\subset\gamma_{\theta(\mu)}(A)$ bulunur. $x\notin c_{\theta(\mu)}(A)$ alınsın. O halde, bir F $\theta(\mu)$-kapalı kümesi için $A\subset F$ ve $x\notin F$ olur. Buradan, $x\in X\setminus F$, $X\setminus F$ $\theta(\mu)$-açık (ve dolayısıyla μ-açık) olduğundan $A\cap(X\setminus F)= \emptyset$ ve böylece $x\notin\gamma_{\theta(\mu)}(A)$ elde edilir. Sonuçta, $A\subset c_\mu(A)\subset\gamma_{\theta(\mu)}(A)\subset c_{\theta(\mu)}(A)$ bulunur.

(b) A $\theta(\mu)$-kapalı $\Leftrightarrow$ $X\setminus A$ $\theta(\mu)$-açık

$\Leftrightarrow$ $x\in X\setminus A$ ise bir $U\in\mu$ için $x\in U\subset c_\mu(U)\subset X\setminus A$

$\Leftrightarrow$ $c_\mu(U)\cap A= \emptyset$

$\Leftrightarrow$ $x\in X\setminus \gamma_{\theta(\mu)}(A)$

$\Leftrightarrow$ $\gamma_{\theta(\mu)}(A)\subset A$ ve (a) şıkkından $A\subset \gamma_{\theta(\mu)}(A)$

$\Leftrightarrow A=\gamma_{\theta(\mu)}(A)$. □

Lemma 1.1.13. [20] μ, boştan farklı X kümesi üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji ve $A\subset X$ olsun. Aşağıdakiler geçerlidir:

(a) $x\in i_{\theta(\mu)}(A)$ olması için gyk $x\in M\subset c_\mu(M)\subset A$ olacak şekilde bir $M\in\mu$ bulunmasıdır.

(b) $A\subset X$ μ-açık ise $\gamma_{\theta(\mu)}(A)=c_\mu(A)$ olur.

(c) $A\subset X$ $\theta(\mu)$-kapalı ise $A=c_\mu(A)=\gamma_{\theta(\mu)}(A)=c_{\theta(\mu)}(A)$ olur.

(d) $A\subset X$ $\theta(\mu)$-açık ise $A=i_\mu(A)=\iota_{\theta(\mu)}(A))=i_{\theta(\mu)}(A)$ olur.

Kanıt.

(a): $x\in i_{\theta(\mu)}(A)$ ise, tanımdan $M\subset A$ ve $x\in M$ olacak şekilde bir $M\in\mu$ vardır. Tersine, $M\subset A$ ve $x\in M$ olacak şekilde bir $M\in\mu$ varsa, $M\subset i_{\theta(\mu)}(A)$ ve böylece $x\in i_{\theta(\mu)}(A)$ bulunur.

(b): Teorem 1.1.12. (a) dan, $A\subset\gamma_{\theta(\mu)}(A)\subset c_{\theta(\mu)}(A)$ dir. $A\in\mu$ ve $x\in\gamma_{\theta(\mu)}(A)$ ise, x i içeren her $M\in\mu$ için $c_\mu(M)\cap A\neq\emptyset$, ve böylece $M\cap A\neq\emptyset$ elde edilir. O halde, $x\in c_\mu(A)$, yani $c_\mu(A)\subset\gamma_{\theta(\mu)}(A)$ bulunur.

(c): $A\subset X$ $\theta(\mu)$-kapalı ise $c_{\theta(\mu)}(A)\subset A$ ve $A\subset c_\mu(A)\subset\gamma_{\theta(\mu)}(A)\subset c_{\theta(\mu)}(A)$ her zaman geçerli olduğundan, $A=c_{\theta(\mu)}(A)$ bulunur. □

(d): Tanım 1.1.11. den, $i_{\theta(\mu)}(A)\subset\iota_{\theta(\mu)}(A)\subset i_\mu(A)\subset A$ olur. $A\subset X$ $\theta(\mu)$-açık ise, $A\subset i_{\theta(\mu)}(A)$ ve böylece $A=i_{\theta(\mu)}(A)$ elde edilir. □

Teorem 1.1.14. (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. Aşağıdakiler geçerlidir:

(a) $c_\mu(A)=X\setminus i_\mu(X\setminus A)$[4]

(b) $i_\mu(A)=X\setminus c_\mu(X\setminus A)$[4]

(c) $c_{\theta(\mu)}(A)=X\setminus i_{\theta(\mu)}(X\setminus A)$[20]

(d) $i_{\theta(\mu)}(A)=X\setminus c_{\theta(\mu)}(X\setminus A)$[20]

Kanıt.

(a): $X\setminus c_\mu(A)=X\setminus\cap\{F\subset X: F\ \mu\text{-kapalı ve } A\subset F\}$

$=\cup\{X\backslash F: F\ \mu\text{-kapalı ve } X\backslash F\subset X\backslash A\}=i_\mu(X\backslash A)$.

(b): $X\backslash i_\mu(A)=X\backslash\cup\{U\subset X: U\in\mu, U\subset A\}=\cap\{X\backslash U: U\in\mu, X\backslash A\subset X\backslash U\}=c_\mu(X\backslash A)$.

(c): $X\backslash c_{\theta(\mu)}(A)=X\backslash\cap\{F\subset X: F\ \theta(\mu)\text{-kapalı ve } A\subset F\}$

$=\cup\{X\backslash F: F\ \theta(\mu)\text{-kapalı ve } X\backslash F\subset X\backslash A\}=i_{\theta(\mu)}(X\backslash A)$.

(d): $X\backslash i_{\theta(\mu)}(A)=X\backslash i_{\theta(\mu)}(A)=\cup\{V\subset X: V\ \theta(\mu)\text{-açık ve } V\subset A\}$

$=\cap\{X\backslash V: V\ \theta(\mu)\text{-açık ve } X\backslash A\subset X\backslash V\}=c_{\theta(\mu)}(X\backslash A)$. □

Tanım 1.1.15. [24] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına, birbirinden farklı her nokta çifti için bu noktalardan birini içerip diğerini içermeyen bir μ-açık küme bulunabilirse μ-T_0 uzayı denir.

Tanım 1.1.16. [24] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına, birbirinden farklı her $x,y\in X$ nokta çifti için $x\in U$, $y\notin U$ ve $x\notin V$, $y\in V$ olacak şekilde $U,V\in\mu$ kümeleri bulunabilirse μ-T_1 uzayı denir.

Tanım 1.1.17. [24] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına, birbirinden farklı her $x,y\in X$ nokta çifti için $x\in U$, $y\in V$ olacak şekilde ayrık $U,V\in\mu$ kümeleri bulunabilirse μ-T_2 uzayı denir.

Önerme 1.1.18. [24] Her μ-T_1 uzayı μ-T_0 uzayıdır.

Kanıt.

(X,μ) μ-T_1 uzayı olsun ve $x,y\in X$, $x\neq y$ noktaları alınsın. Varsayımdan, $x\in U$ ve $y\notin U$ olacak şekilde bir $U\in\mu$ var olduğundan (X,μ) μ-T_0 uzayıdır. □

Önerme 1.1.19. [24] Her μ-T_2 uzayı μ-T_1 uzayıdır.

Kanıt.

(X,μ) μ-T_2 uzayı olsun ve $x\neq y\in X$ noktaları alınsın. (X,μ) μ-T_2 uzayı olduğundan $x\in U$ ve $y\in V$ olacak şekilde ayrık $U,V\in\mu$ kümeleri vardır. $U\cap V=\emptyset$ olduğundan $x\notin V$ ve $y\notin U$ gerçeklenir. (X,μ) μ-T_1 uzayıdır. □

Önerme 1.1.20. [24] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayının μ-T_0 uzayı olması için gyk birbirinden farklı her $x,y\in X$ nokta çifti için $c_\mu(\{x\})\neq c_\mu(\{y\})$ olmasıdır.

Kanıt.

(X,μ) μ-T_0 uzayı olsun ve $x\neq y\in X$ noktaları alınsın. (X,μ) μ-T_0 uzayı olduğundan $x\in U$, $y\notin U$ olacak şekilde bir $U\in\mu$ vardır. Buradan, $y\in X\setminus U$ ve $X\setminus U$ μ-kapalıdır. Ayrıca, c_μ tanımından $c_\mu(\{y\})\subset X\setminus U$ olur. O halde, $x\notin c_\mu(\{y\})$, yani $c_\mu(\{x\})\neq c_\mu(\{y\})$ gerçeklenir. Tersine, $x\neq y\in X$ noktaları için $c_\mu(\{x\})\neq c_\mu(\{y\})$ ise, $z\in c_\mu(\{x\})$ ve $z\notin c_\mu(\{y\})$ olacak şekilde bir $z\in X$ vardır. $x\in c_\mu(\{y\})$ olsaydı, $c_\mu(\{x\})\subset c_\mu(\{y\})$ çelişkisi elde edilirdi. O halde, $x\notin c_\mu(\{y\})$ dir. Buradan, $x\in X\setminus c_\mu(\{y\})$ ve $X\setminus c_\mu(\{y\})\in\mu$ bulunur. □

Önerme 1.1.21. [24] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayının μ-T_1 uzayı olması için gyk her $x\in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesinin μ-kapalı olmasıdır.

Kanıt.

(X,μ) μ-T_1 uzayı ve $x\in X$ olsun. $y\in X\setminus\{x\}$ alınsın. $x\neq y$ olduğundan $y\in U\subset X\setminus\{x\}$ olacak şekilde bir $U\in\mu$ vardır. Buradan, $y\in i_\mu(X\setminus\{x\})$, yani $i_\mu(X\setminus\{x\})=X\setminus\{x\}$ elde edilir. O halde, $X\setminus\{x\}\in\mu$ ve dolayısıyla $\{x\}$ μ-kapalıdır. Tersine, her $x\in X$ için $\{x\}$ tek nokta kümesi μ-kapalı olsun ve $y\neq x$ noktası alınsın. $y\in X\setminus\{x\}$ ve $X\setminus\{x\}\in\mu$ bulunur. Benzer şekilde $X\setminus\{y\}$, y noktasını içerip x noktasını içermeyen μ-açık bir kümedir. □

Tanım 1.1.22. [24] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına, her $O\in\mu$ ver her $x\in O$ için $c_\mu(\{x\})\subset O$ gerçekleniyorsa μ-R_0 uzayı denir.

Tanım 1.1.23. [24] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına, $c_\mu(\{x\})\neq c_\mu(\{y\})$ gerçekleyen her $x,y\in X$ nokta çifti için $c_\mu(\{x\})\subset U$ ve $c_\mu(\{y\})\subset V$ olacak şekilde ayrık $U,V\in\mu$ kümeleri varsa μ-R_1 uzayı denir.

Önerme 1.1.24. [24] Her μ-R_1 uzayı μ-R_0 uzayıdır.

Kanıt.

(X,μ) μ-R_1 uzayı olsun. $U\in\mu$ ve $x\in U$ alınsın. $y\notin U$ ise $x\notin c_\mu(\{y\})$ ve böylece $c_\mu(\{x\})\neq c_\mu(\{y\})$ olur. Varsayımdan, $c_\mu(\{y\})\subset V$ ve $x\notin V$ olacak şekilde bir $V\in\mu$ vardır. Ayrıca, $y\notin c_\mu(\{x\})$ olduğundan $c_\mu(\{x\})\subset U$ olur. □

Tanım 1.1.25. (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına her $x,y\in X$ için $x\in c_\mu(\{y\})$ olması $y\in c_\mu(\{x\})$ gerektiriyorsa μ-simetrik denir.

Önerme 1.1.26. [24] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayının μ-R_0 uzayı olması için gyk μ-simetrik olmasıdır.

Kanıt.

(X,μ) μ-R_0 uzayı, $y\in c_\mu(\{x\})$, $y\in U$ ve $U\in\mu$ olsun. Buradan $x\in U$ ve böylece $y\in c_\mu(\{x\})$ bulunur. Tersine, $x\in U$ ve $U\in\mu$ olsun. $y\notin U$ ise $x\notin c_\mu(\{y\})$ ve varsayımdan $y\notin c_\mu(\{x\})$ elde edilir. Böylece, $c_\mu(\{x\})\subset U$ bulunur. □

Teorem 1.1.27. [24] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayının μ-T_1 uzayı olması için gyk μ-T_0 ve μ-R_0 uzayı olmasıdır.

Kanıt.

(X,μ) μ-T_1 uzayı olsun. Önerme 1.1.18. den (X,μ) μ-T_0 uzayıdır. $x\in U$ ve $U\in\mu$ olsun. $\{x\}\in U$ ve $\{x\}$ μ-kapalı olduğundan $c_\mu(\{x\})\subset U$ bulunur. Tersine, birbirinden farklı $x,y\in X$ noktaları alınsın. (X,μ) μ-T_0 uzayı olduğundan $x\in O\subset X\setminus\{y\}$ olacak şekilde bir $O\in\mu$ vardır. Buradan, $x\in c_\mu(\{y\})$ ve (X,μ) μ-R_0 uzayı olduğundan $y\in c_\mu(\{x\})$ bulunur. $y\in X\setminus c_\mu(\{x\})$ ve $X\setminus c_\mu(\{x\})\in\mu$ olduğundan (X,μ) μ-T_1 uzayıdır. □

Not 1.1.28. μ-T_0 uzayı olan bir (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı μ-T_1 uzayı değilse, μ-R_0 uzayı olmayabilir. $X=\{a,b,c\}$ ve $\mu=\{\emptyset,\{b\},\{b,c\}\}$ olsun. (X,μ) μ-T_0 uzayıdır, ancak μ-T_1 uzayı değildir. $\{b\}\in\mu$ ve $b\in\{b\}$ alınsın. $c_\mu(\{b\})=X$ kümesini kapsayan μ-açık küme olmadığından (X,μ) μ-R_0 uzayı olamaz.

Teorem 1.1.29. [24] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) (X,μ) μ-T_2 uzayıdır.

(b) (X,μ) μ-T_1 ve μ-R_1 uzayıdır.

(c) (X,μ) μ-T_0 ve μ-R_1 uzayıdır.

Kanıt.

(a)⇒(b): (X,μ) μ-T_2 uzayı ise Önerme 1.1.19. dan μ-T_1 uzayıdır. $c_\mu(\{x\})\neq c_\mu(\{y\})$ gerçekleyen $x,y\in X$ çifti için $x\neq y$ olduğundan $x\in U, y\in V$ olacak şekilde ayrık $U,V\in\mu$ kümeleri vardır. Buradan, (X,μ) μ-T_1 uzayı olduğundan $c_\mu(\{x\})\subset U$ ve $c_\mu(\{y\})\subset V$ olur.

(b)⇒(c): (X,μ) μ-T_1 uzayı ise Önerme 1.1.18. den μ-T_0 uzayıdır.

(c)⇒(a): $x,y\in X$ ve $x\neq y$ olsun. (X,μ) μ-T_0 uzayı olduğundan $c_\mu(\{x\})\neq c_\mu(\{y\})$ gerçeklenir. (X,μ) μ-R_1 uzayı olduğundan $c_\mu(\{x\})\subset U, c_\mu(\{y\})\subset V$ olacak şekilde ayrık

$U,V\in\mu$ kümeleri vardır. Buradan, $x\in U, y\in V$ ve $U\cap V=\emptyset$ bulunur. □

Sonuç 1.1.30. [24] μ-R_1 uzayı olan (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı için aşağıdakiler denktir:

(a) (X,μ) μ-T_2 uzayıdır.

(b) (X,μ) μ-T_1 uzayıdır.

(c) (X,μ) μ-T_0 uzayıdır.

Teorem 1.1.31.[24] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayının μ-R_0 uzayı olması için gyk her $x,y\in X$ nokta çifti için $c_\mu(\{x\})\neq c_\mu(\{y\})$ ise $c_\mu(\{x\})\cap c_\mu(\{y\})=\emptyset$ gerçeklenmesidir.

Kanıt.

(X,μ) μ-R_0 uzayı olsun ve $c_\mu(\{x\})\neq c_\mu(\{y\})$ gerçeklenecek biçimde $x,y\in X$ noktaları alınsın. O halde, $z\in c_\mu(\{x\})$ ve $z\notin c_\mu(\{y\})$ olacak şekilde bir $z\in X$ vardır. $z\notin c_\mu(\{y\})$ olduğundan $y\in V$ ve $z\notin V$ gerçekleyen bir $V\in\mu$ vardır. $z\in c_\mu(\{x\})$ olduğundan $x\in V$ ve böylece $x\notin c_\mu(\{y\})$ bulunur. Buradan, $x\in X\setminus c_\mu(\{y\})$ ve $X\setminus c_\mu(\{y\})\in\mu$ ve (X,μ) μ-R_0 uzayı olduğundan $c_\mu(\{x\})\subset X\setminus c_\mu(\{y\})$, yani $c_\mu(\{x\})\cap c_\mu(\{y\})=\emptyset$ elde edilir. Tersine, her $x,y\in X$ nokta çifti için $c_\mu(\{x\})\neq c_\mu(\{y\})$ ise $c_\mu(\{x\})\cap c_\mu(\{y\})=\emptyset$ olsun. $V\in\mu$ ve $x\in V$ alınsın. $y\notin V$ olsun. O halde, $x\in c_\mu(\{y\})$, yani $c_\mu(\{x\})\neq c_\mu(\{y\})$ bulunur. Varsayımdan, $c_\mu(\{x\})\cap c_\mu(\{y\})=\emptyset$ ve böylece $y\notin c_\mu(\{x\})$ olur. Buradan, $c_\mu(\{x\})\in V$ ve sonuçta (X,μ) μ-R_0 uzayıdır. □

1.2. Ekstremal Bağlantısız Genelleştirilmiş Topolojik Uzaylar

Tanım 1.2.1. [11] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına, her $U\in\mu$ için $c_\mu(U)\in\mu$ gerçekleniyorsa ekstremal bağlantısız denir.

Lemma 1.2.2. [23] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı ekstremal bağlantısız ise güçlü genelleştirilmiş topolojik uzaydır.

Not 1.2.3. (X,μ) ekstremal bağlantısız genelleştirilmiş topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $A=\emptyset$ olması durumunda $c_\mu(\emptyset)=\emptyset$ olur. $c_\mu(\emptyset)\neq\emptyset$ durumu bir $x\in c_\mu(\emptyset)$ için x noktasını içeren μ-açık küme bulunamayacağından mümkün değildir, dolayısıyla bu durum $c_\mu(\emptyset)\in\mu$ olmasıyla çelişir.

Teorem 1.2.4. [37] X boştan farklı bir küme ve μ, X üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji ise, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) X ekstremal bağlantısızdır.

(b) Her $A\subset X$ için $c_\mu(i_\mu(A))=i_\mu(c_\mu(i_\mu(A)))$ $(\subset i_\mu(c_\mu(A)))$ gerçeklenir.

(c) Her μ-yarı-açık küme μ-önaçıktır.

(d) Her μ-β-açık kümenin μ-kapanışı μ-açıktır.

(e) Her μ-β-açık küme μ-önaçıktır

(f) Her $A\subset X$ için $c_\mu(i_\mu(c_\mu(A)))=i_\mu(c_\mu(A))$ gerçeklenir.

(g) Her μ-yarı-açık küme μ-α-açıktır.

(h) Her $A\subset X$ μr-açık kümesi için $A=c_\mu(A)$ gerçeklenir.

Kanıt.

(a)⇒(b): Her $A\subset X$ için $i_\mu(A)\in\mu$ ve (X,μ) ekstremal bağlantısız olduğundan $c_\mu(i_\mu(A))\in\mu$, ve böylece $c_\mu(i_\mu(A))=i_\mu(c_\mu(i_\mu(A)))$ bulunur.

(b) ⇒(c): $B\subset X$ μ-yarı-açık kümesi alınsın. (b) şıkkından, $B\subset c_\mu(i_\mu(B))=i_\mu(c_\mu(i\mu(B)))\subset i_\mu(c_\mu(B))$, yani B μ-önaçıktır.

(c)⇒(d): $B\subset X$ μ-β-açık kümesi alınsın. $B\subset c_\mu(i_\mu(c_\mu(B)))$ ve buradan $c_\mu(B)\subset c_\mu(i_\mu(c_\mu(B)))$, yani $c_\mu(B)$ μ-yarı-açıktır. (c) şıkkından, $c_\mu(B)$ μ-önaçıktır. O halde, $c_\mu(B)\subset i_\mu(c_\mu(c_\mu(B)))=i_\mu(c_\mu(B))$ bulunur, yani $c_\mu(B)\in\mu$ gerçeklenir.

(d)⇒(e): $A\subset X$ μ-β-açık olsun. $A\subset c_\mu(i_\mu(c_\mu(A)))$ olur. (d) şıkkından, $c_\mu(A)\in\mu$ olduğundan $c_\mu(A)=i_\mu(c_\mu(A))$ ve böylece $A\subset c_\mu(A)=i_\mu(c_\mu(A))$, yani $A\subset X$ μ-önaçıktır.

(e)⇒(f): Her $A\subset X$ için $c_\mu(i_\mu(c_\mu(A)))=c_\mu(i_\mu(c_\mu(c_\mu(i_\mu(c_\mu(A))))))$ olduğundan $c_\mu(i_\mu(c_\mu(A)))$ kümesi μ-β-açıktır. (e) şıkkından, $c_\mu(i_\mu(c_\mu(A)))\subset i_\mu(c_\mu(i_\mu(c_\mu(A))))=i_\mu(c_\mu(A))$ bulunur. Ters kapsama her zaman geçerli olduğundan, $c_\mu(i_\mu(c_\mu(A)))=i_\mu(c_\mu(A))$ gerçeklenir.

(f)⇒(g): $A\subset X$ μ-yarı-açık kümesi alınsın. (f) şıkkından, $c_\mu(i_\mu(c_\mu(A)))=i_\mu(c_\mu(A))$ olur. $A\subset c_\mu(i_\mu(A))\subset c_\mu(i_\mu(c_\mu(A)))=i_\mu(c_\mu(A))$ olduğundan $A\subset X$ μ-önaçık ve dolayıysla μ-α-açıktır.

(g)$\Rightarrow$(a): $A\subset X$ μ-açık kümesi alınsın. O halde, $A=i_\mu(A)$ ve böylece $c_\mu(A)=c_\mu(i_\mu(A))\subset c_\mu(i_\mu(c_\mu(A)))$, yani $c_\mu(A)$ μ-yarı-açık ve (g) şıkkından, μ-α-açıktır. Buradan, $c_\mu(A)\subset i_\mu(c_\mu(A))\subset c_\mu(A)$ ve $c_\mu(A)=i_\mu(c_\mu(A))$, yani $c_\mu(A)\in\mu$ elde edilir. (X,μ) ekstremal bağlantısızdır.

(a)$\Rightarrow$(h): $A=i_\mu(c_\mu(A))$ olsun. O halde, $A\in\mu$ ve (a) şıkkından, $c_\mu(A)\in\mu$ olur. Buradan, $c_\mu(A)=i_\mu(c_\mu(A))=A$, yani $A\subset X$ μ-kapalıdır.

(h)$\Rightarrow$(a): $A\subset X$ μ-açık kümesi alınsın. $i_\mu(c_\mu(A))= i_\mu(c_\mu(i_\mu(c_\mu(A))))$ olduğundan $i_\mu(c_\mu(A))$ μr-açıktır. (h) şıkkından, $i_\mu(c_\mu(A))=c_\mu(i_\mu(c_\mu(A)))$ ve $A\subset c_\mu(A)$ olduğundan $A\subset i_\mu(c_\mu(A))=c_\mu(i_\mu(c_\mu(A)))$ bulunur. Buradan, $c_\mu(A)\subset c_\mu(i_\mu(c_\mu(A)))$, yani $c_\mu(A)\in\mu$ olur. (X,μ) ekstremal bağlantısızdır. □

X boştan farklı bir küme ve μ, X üzerinde bir GT olsun. Teorem 1.2.4 ün (b) ve (f) şıklarını göz önüne alalım. Csaszar'ın işaret ettiği üzere $\mu\in\{SO(X),BO(X), \beta O(X)\}$ için (X,μ) ekstremal bağlantısız bir GT'dir, dolayısıyla her bir $\mu\in\{SO(X),BO(X), \beta O(X)\}$, (b) ve (f) şıklarını gerçekler, bu da Andrijevic'in bazı sonuçlarının ([1] ve [2]) ekstremal bağlantısızlığın sonucu olduğunu gösterir.

Önerme 1.2.5. [37] (X,μ) ekstremal bağlantısız genelleştirilmiş topolojik uzay ise, her $A\subset X$ için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) $A\subset X$ μ-kapaçıktır.

(b) $A=i_\mu(c_\mu(A))$ gerçeklenir.

(c) $A=c_\mu(i_\mu(A))$ gerçeklenir.

Kanıt.

(a)$\Rightarrow$(b): $A\subset X$ μ-kapaçık ise hem μ-açık hem de μ-kapalı olduğundan $A=i_\mu(A)=c_\mu(A)$ ve böylece $A=i_\mu(c_\mu(A))$ olur.

(b)$\Rightarrow$(c): $A=i_\mu(c_\mu(A))$ ise $A=i_\mu(c_\mu(i_\mu(A)))=c_\mu(i_\mu(A))$ bulunur.

(c)$\Rightarrow$(a): $A=c_\mu(i_\mu(A))$ ise $A\subset X$ μ-kapalıdır ve $A=c_\mu(i_\mu(A))=c_\mu(i_\mu(c_\mu(A)))$ olur. Teorem 1.2.3. den, $A=c_\mu(i_\mu(A))=c_\mu(i_\mu(c_\mu(A)))=i_\mu(c_\mu(A))$ ve dolayısıyla $A\subset X$ μ-kapaçıktır. □

Not 1.2.6. (X,μ) ekstremal bağlantısız genelleştirilmiş topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) $V\in\mu$ ise $c_\mu(V)$ μ-kapaçıktır.

(b) $F\subset X$ μ-kapalı ise $i_\mu(F)$ μ-kapaçıktır.

Önerme 1.2.7. [37] (X,μ) ekstremal bağlantısız genelleştirilmiş topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $A\subset X$ kümesinin μ-kapaçık olması için gyk $A=c_\mu(B)$ olacak şekilde bir $B\subset X$ μ-β-açık kümesinin bulunmasıdır.

Kanıt.

$A\subset X$ μ-kapaçık ise $A=c_\mu(i_\mu(A))$ ve $i_\mu(A)$ μ-β-açıktır. Tersine, $A=c_\mu(B)$ olacak şekilde bir $B\subset X$ μ-β-açık kümesi bulunsun. O halde, $A\subset X$ μ-kapalıdır.
$B\subset c_\mu(i_\mu(c_\mu\}(B)))=i_\mu(c_\mu(B))$ ve Teorem 1.2.4. den,
$A=c_\mu(B)\subset c_\mu(i_\mu(c_\mu(B)))=i_\mu(c_\mu(B))=i_\mu(A)$ elde edilir. □

Teorem 1.2.8. [37] (X,μ) ekstremal bağlantısız genelleştirilmiş topoloji ise, aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) (X,μ) μ-T_2 uzayıdır.

(b) Birbirinden farklı her $x,y\in X$ nokta çifti için $x\in U, y\in V$ olacak biçimde $c_\mu(U)\cap c_\mu(V)=\emptyset$ gerçekleyen $U,V\in\mu$ kümeleri vardır.

(c) Birbirinden farklı her $x,y\in X$ nokta çifti için $x\in U, y\in V$ olacak biçimde $U\cap V=\emptyset$ gerçekleyen U,V μ-kapaçık kümeleri vardı

(d) Her $x\in X$ için $\{x\}=\cap\{U\subset X: x\in U$ ve U μ-kapaçık$\}$ olur.

Kanıt.

(a)⇒(b): (X,μ) μ-T_2 uzayı olsun. O halde, birbirinden farklı her $x,y\in X$ nokta çifti için $x\in U, y\in V$ olacak biçimde ayrık $U,V\in\mu$ kümeleri vardır. Buradan, $U\cap c_\mu(V)=\emptyset$ bulunur. Ancak, $c_\mu(V)=i_\mu(c_\mu(V))$ olduğundan $c_\mu(V)\in\mu$, ve böylece $c_\mu(U)\cap c_\mu(V)=\emptyset$ gerçeklenir.

(b)⇒(c): Her $U\in\mu$ için $c_\mu(U)$ μ-kapaçık olduğundan $c_\mu(U)\cap c_\mu(V)=U\cap V=\emptyset$ bulunur.

(c)⇒(d): $y\notin\{x\}$ olsun. O halde, $x\in U, y\notin U$ olacak şekilde bir $U\subset X$ μ-kapaçık kümesi vardır. Buradan, $y\notin\cap\{U\subset X: x\in U$ ve U μ-kapaçık$\}$ elde edilir.

(d)⇒(a): $x,y\in X$ ve $x\neq y$ olsun. O halde, $y\notin\cap\{U\subset X: x\in U$ ve U μ-kapaçık$\}$ olur.

Buradan, $x \in U_x$ ve $y \notin U_x = c_\mu(U_x)$ olacak şekilde bir U_x μ-kapaçık kümesi vardır. $y \notin c_\mu(U_x)$ olduğundan, $y \in U_y$ ve $U_x \cap U_y = \emptyset$ olacak şekilde bir $U_y \in \mu$ vardır. □

Sonuç 1.2.9. (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayının ekstremal bağlantısız olması için gyk $U \cap V = \emptyset$ gerçekleyen her $U,V \in \mu$ çifti için $c_\mu(U) \cap c_\mu(V) = \emptyset$ olmasıdır.

Teorem 1.2.10. [28] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayının ekstremal bağlantısız olması için gyk her $G \in \mu$ ve $G \subset F$ gerçekleyen her F μ-kapalı kümesi için $G \subset F_1 \subset G_1 \subset F$ olacak şekilde bir $G_1 \in \mu$ ve bir F_1 μ-kapalı kümesinin bulunmasıdır.

Kanıt.

(X,μ) ekstremal bağlantısız olsun. Bir $G \in \mu$ ve $G \subset F$ gerçekleyen bir F μ-kapalı kümesi alınsın. O halde, $G \cap (X \setminus F) = \emptyset$ olur. Buradan, $c_\mu(G) \cap c_\mu(X \setminus F) = \emptyset$, yani $c_\mu(G) \subset X \setminus c_\mu(X \setminus F)$ elde edilir. $X \setminus c_\mu(X \setminus F) \subset F$ olduğundan $c_\mu(G) = F_1$ ve $X \setminus c_\mu(X \setminus F) = G_1$ yazılarak $G \subset F_1 \subset G_1 \subset F$ bulunur. Tersine, $U,V \subset X$ ayrık μ-açık kümeleri alınsın. O halde, $U \subset X \setminus V$ ve $X \setminus V$ μ-kapalıdır. Varsayımdan, $U \subset F \subset G \subset X \setminus V$ olacak şekilde bir $G \in \mu$ ve bir F μ-kapalı kümesi vardır. Buradan, $c_\mu(U) \cap (X \setminus i_\mu(X \setminus V)) = \emptyset$, yani $c_\mu(V) = X \setminus i_\mu(X \setminus V)$ ve dolayısıyla $c_\mu(U) \cap c_\mu(V) = \emptyset$ bulunur. □

2 GENELLEŞTİRİLMİŞ TOPOLOJİK UZAYLARDA AYIRMA AKSİYOMLARI

2.1. μg-Regüler ve μg-Normal Uzaylar

Tanım 2.1.1. [29] (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayında bir $A\subset X$ alt kümesine, A yı kapsayan her $U\in \mu$ kümesi için $c_\mu(A) \subset U$ gerçekleniyorsa μg-kapalı küme denir.

Bu kavram ve varyantları ([29] ve [31])B. Roy tarafından çalışılmıştır.

Teorem 2.1.2. [29] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayında, her μ-kapalı küme μg-kapalıdır.

Kanıt.

$F\subset X$ μ-kapalı kümesi alınsın ve U, F kümesini kapsayan μ-açık bir küme olsun. $c_\mu(F)=F\subset U$ olduğundan F μg-kapalıdır. □

Lemma 2.1.3. [36] Bir $A\subset X$ kümesi için, $A\subset cl_{\mu g}(A)\subset c_\mu(A)$ gerçeklenir.

Kanıt.

A, (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayının bir alt kümesi olsun. Her μ-kapalı küme μg-kapalı olduğundan,

$$\begin{aligned} c_\mu(A) &= \cap\{F: A\subset F,\ F\ \mu\text{-kapalı}\} \\ &\supset \cap\{F: A\subset F,\ F\ \mu g\text{-kapalı}\} \\ &= cl_{\mu g}(A)\supset A \end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 2.1.4. [36] (X,μ) bir GTS, $A\subset X$ olsun ve bir $x\in X$ alınsın. $x\in cl_{\mu g}(A)$ olması için gyk x i içeren her U μg-açık kümesi için, $U\cap A\neq \emptyset$ gerçeklenmesidir.

Kanıt.

$x\notin cl_{\mu g}(A)=\cap\{F: A\subset F,\ F\ \mu g\text{-kapalı}\}$ olsun. Buradan, $x\in X\setminus cl_{\mu g}(A)=\cup\{U: U=X\setminus F, U\subset X, U\ \mu g\text{-açık}\}$ olur. O halde, $x\in U^*, U^*\cap A= \emptyset$ olacak şekilde μg-açık $U^*\subset X\setminus cl_{\mu g}(A)$ kümesi vardır.

Tersine, x i içeren bir U μg-açık kümesi $A\cap U= \emptyset$ olacak şekilde bulunsun. O halde, $X\setminus U$ kümesi μg-kapalıdır ve $x\notin X\setminus U$ olur. Yani, $A\subset cl_{\mu g}(A)\subset X\setminus U$ ve $x\notin cl_{\mu g}(A)$ çelişkisi elde edilir. □

Not 2.1.5. (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzay ve $A\subset X$ olsun. $\mu=SO(X)$ (veya $\mu=\beta O(X)$) alınırsa, $A\subset X$ yarı-genelleştirilmiş kapalı küme [3] (β-genelleştirilmiş kapalı küme) denir.

Tanım 2.1.6. [26] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına, her μg-kapalı küme μ-kapalı ise $\mu\text{-}T_{1/2}$ uzayı denir.

Teorem 2.1.7. [26] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayının $\mu\text{-}T_{1/2}$ uzayı olması için gyk her tek nokta kümesinin μ-kapalı ya da μ-açık olmasıdır.

Tanım 2.1.8. [29] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına, her $F\subset X$ μ-kapalı kümesi ve her $x\notin F$ için $x\in U, F\subset V$ olacak şekilde ayrık $U,V\in\mu$ kümeleri varsa (X,μ) ye μ-regüler uzay denir.

Teorem 2.1.9. (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) X μ-regülerdir,

(b) Her $x\in X$ ve x i içeren her $U\in\mu$ için, $x\in V\subset c_\mu(V)\subset U$ olacak şekilde bir $V\in\mu$ vardır,

(c) Her $F\subset X$ μ-kapalı kümesi için, $\cap\{c_\mu(V):F\subset V\in\mu\}=F$,

(d) Her $A\subset X$ ve $A\cap U\neq\emptyset$ gerçekleyen her $U\in\mu$ için, $A\cap V\neq\emptyset$ ve $c_\mu(V)\subset U$ olacak şekilde bir $V\in\mu$ vardır,

(e) Her $\emptyset\neq A$ ve $A\cap F=\emptyset$ gerçekleyen her $F\subset X$ μ-kapalı kümesi için, $A\cap V\neq\emptyset, F\subset W$ ve $W\cap V=\emptyset$ olacak şekilde $V,W\in\mu$ vardır,

(f) Her $F\subset X$ μ-kapalı kümesi ve $x\notin F$ için, $x\in U, F\subset V$ ve $U\cap V=\emptyset$ olacak şekilde $U\in\mu$ ve V μg-açık kümesi vardır,

(g) Her $A\subset X$ ve $A\cap F=\emptyset$ gerçekleyen her $F\subset X$ μ-kapalı kümesi için, $A\cap U\neq\emptyset, F\subset V$ ve $U\cap V=\emptyset$ olacak şekilde bir $U\in\mu$ ve bir V μg-açık kümesi vardır,

(h) Her $F\subset X$ μ-kapalı kümesi için, $F=\{c_\mu(V):F\subset V, V\ \mu g\text{-açık}\}$ gerçeklenir.

Kanıt.

(a)⇒(b): $x\in U$ ve $U\in\mu$ olsun. O halde, $x\notin X\setminus U$ ve $X\setminus U$ μ-kapalıdır. (a) şıkkından, $X\setminus U\subset G$ ve $x\in V$ olacak şekilde $G,V\in\mu$ ayrık kümeleri vardır. Buradan, $V\subset X\setminus G$ ve böylece $x\in V\subset c_\mu(V)\subset X\setminus G\subset U$ elde edilir.

(b)⇒(c): $F\subset X$ μ-kapalı ve $x\notin F$ olsun. (b) şıkkından, $x\in U\subset c_\mu(U)\subset X\setminus F$ olacak şekilde bir $U\in\mu$ vardır. O halde, $F\subset X\setminus c_\mu(U)=V\in\mu$ ve $U\cap V=\emptyset$ bulunur. Buradan, $x\in c_\mu(V)$ ve böylece $\cap\{c_\mu(V):F\subset V\in\mu\}\subset F$ elde edilir.

(c)⇒(d): $U\in\mu$ ve $x\in U\cap A$ olsun. O halde, $x\notin X\setminus U$ ve (c) şıkkından, $X\setminus U\subset W$, $x\notin c_\mu(W)$ olacak şekilde bir $W\in\mu$ vardır. $V=X\setminus c_\mu(W)\in\mu, x\in V$ ve $A\cap V\neq\emptyset$ bulunur. Böylece, $V\subset X\setminus W$ ve $c_\mu(V)\subset X\setminus W\subset U$ elde edilir.

(d)⇒(e): $F\subset X$ μ-kapalı ve $A\cap F=\emptyset$ olsun. $X\setminus F\in\mu$ ve $(X\setminus F)\cap A\neq\emptyset$ olur. O halde, $A\cap V\neq\emptyset, c_\mu(V)\subset X\setminus F$ olacak şekilde bir $V\in\mu$ vardır. $W=X\setminus c_\mu(V)$ yazılırsa, $F\subset W$ ve $W\cap V=\emptyset$ elde edilir.

(e)⇒(a): $F\subset X$ μ-kapalı ve $x\notin F$ olsun. (e) şıkkından, $F\subset W, x\in V$ ve $W\cap V=\emptyset$ olacak şekilde $W,V\in\mu$ vardır.

(a)⇒(f): Her μ-açık küme μg-açık olduğundan açıktır.

(f)⇒(g): $F\subset X$ μ-kapalı ve $A\cap F=\emptyset$ olsun. $a\in A$ için, $a\notin F$ ve böylece (f) şıkkından, $a\in U, F\subset V$ ve $U\cap V=\emptyset$ olacak şekilde bir $U\in\mu$ ve bir V μg-açık kümesi vardır. Buradan, $A\cap U=\emptyset$ elde edilir.

(g)⇒(a): $F\subset X$ μ-kapalı ve $x\notin F$ olsun. $\{x\}\cap F=\emptyset$ olduğundan, (g) şıkkından, $x\in U, F\subset W, U\cap W=\emptyset$ olacak şekilde bir $U\in\mu$, bir W μg-açık kümesi vardır. $V=i_\mu(W)$ yazılırsa, $F\subset V$ ve $U\cap V=\emptyset$ elde edilir.

(c)⇒(h): $F\subset\cap\{c_\mu(V):F\subset V, V\ \mu g\text{-açık}\}\subset\cap\{c_\mu(V):F\subset V, V\in\mu\}=F$.

(h)⇒(a): $F\subset X$ μ-kapalı ve $x\notin F$ olsun.(h) şıkkından, $F\subset W, x\in X\setminus c_\mu(W)$ olacak şekilde bir W μg-açık kümesi vardır. $F\subset X$ μ-kapalı ve $W\subset X$ μg-açık olduğundan, $F\subset i_\mu(W)$

gerçeklenir. $V=i_\mu(W)$ yazılırsa, $F\subset V$, $x\in X\setminus c_\mu(V)=U$ ve $U\cap V=\emptyset$ elde edilir. □

Tanım 2.1.10. (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına, her $F\subset X$ μg-kapalı kümesi ve her $x\notin F$ için $x\in U, F\subset V$ olacak şekilde ayrık $U,V\in\mu$ kümeleri varsa μg-regüler uzay denir.

Lemma 2.1.11. (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayının μg-regüler uzay olması için gyk μ-regüler ve μ-$T_{1/2}$ uzayı olmasıdır.

Kanıt.

(X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı μg-regüler uzay olsun. (X,μ) μ-regüler uzaydır. $A\subset X$ μg-kapalı kümesi alınsın. Her $x\notin A$ için, x noktasını içeren ve $V_x\cap A=\emptyset$ olacak şekilde bir $V_x\in\mu$ vardır. $V=\cup\{V_x:x\in A\}$ ise, $V\in\mu$ ve $V=X\setminus A$ dır. O halde, A μ-kapalıdır. Tersine, (X,μ) μ-regüler ve μ-$T_{1/2}$ uzayı olsun. $A\subset X$ μ-kapalı kümesi ve $x\notin A$ alınsın. A μg-kapalıdır. O halde, $x\in U, A\subset V$ olacak şekilde ayrık $U,V\in\mu$ kümeleri vardır. □

Örnek 2.1.12. μ-regüler olup μg-regüler olmayan genelleştirilmiş topolojik uzaylar vardır. $X=\{a,b,c,d\}$ ve $\mu=\{\emptyset,X,\{a,b\},\{c,d\}\}$ X üzerinde bir genelleştirilmiş topoloji olsun. (X,μ) μ-regülerdir. $\{a,b,c\}$ μg-kapalı kümesi ve $d\notin\{a,b,c\}$ alınsın. $\{a,b,c\}$ ve d yi içeren ayrık μ-açık kümeler bulunamadığından (X,μ) μg-regüler uzay değildir.

Teorem 2.1.13. (X,μ) ekstremal bağlantısız genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) (X,μ) μg-regülerdir,

(b) Her $U\subset X$ μg-açık kümesi μg-kapaçık kümelerin birleşimi olarak yazılabilir,

(c) Her $F\subset X$ μg-kapalı kümesi μg-kapaçık kümelerin kesişimi olarak yazılabilir.

Kanıt.

(a)⇒(b): $U\subset X$ μg-açık küme ve $x\in U$ olsun. $A=X\setminus U$ yazılırsa A μg-kapalıdır. (a) şıkkından, $x\in W_1$ ve $A\subset W_2$ olacak şekilde W_1,W_2 ayrık μ-açık kümeleri vardır. $V=c_\mu(W_1)$ ise V μ-kapaçık ve $V\cap A\subset V\cap W_2=\emptyset$ olur. Buradan, $x\in V\subset U$ ve böylece U, μ-kapaçık kümelerin birleşimidir.

(b)⇒(c): Açık.

(c)⇒(a): $A\subset X$ μg-kapalı küme ve $x\notin A$ olsun. (c) şıkkından, $A\subset V$ ve $x\in V$ olacak şekilde bir V μ-kapaçık kümesi vardır. $U=X\setminus V$ yazılırsa, $x\in U$, $U\subset\mu$ ve $U\cap V=\emptyset$ bulunur. O halde, (X,μ) μg-regülerdir. □

Tanım 2.1.14. (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına,

(a) birbirinden farklı her nokta çifti için, bu noktalardan birini içerip diğerini içermeyen bir μg-açık küme varsa μg-T_0 uzayı,

(b) her U μg-açık kümesi ve her $x\in U$ için $c_\mu(\{x\})\subset U$ oluyorsa $(\mu,\mu g)$-R_0 uzayı denir.

Not 2.1.15. $X=\{a,b,c\}$ ve $\tau=\{\emptyset,X,\{a\}\}$ X üzerinde bir topoloji olsun. Bu uzay μg-regüler, μ-$T_{1/2}$ ve $(\mu,\mu g)$-R_0 uzayı değildir. Ayrıca, her μ-T_2 uzayı μ-$T_{1/2}$ ve her μ-$T_{1/2}$ uzayı μg-T_0 uzayıdır.

Teorem 2.1.16. (X,μ) ekstremal bağlantısız genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. (X,μ) μg-regüler ise hem μ-T_2 hem de $(\mu,\mu g)$-R_0 uzayıdır.

Kanıt.

(X,μ) ekstremal bağlantısız genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. (X,μ) μg-regüler uzay ve $x,y\in X, x\neq y$ olsun. $\{x\}$ ya μ-açık ya da μ-kapalıdır. $\{x\}$ μ-açık ise, μg-açık ve böylece $\{x\}$ μ-kapaçıktır. O halde, $\{x\}$ ve $X\backslash\{x\}$, x ve y noktalarını ayıran μ-açık kümelerdir. $\{x\}$ μ-kapalı ise, $X\backslash\{x\}$ μ-açık ve böylece $X\backslash\{x\}$ μ-kapaçık kümelerin birleşimidir. O halde, y yi içeren ve $V\subset X\backslash\{x\}$ gerçekleyen bir V μ-kapaçık kümesi vardır. (X,μ) μ-T_2 uzayı ve dolayısıyla $(\mu,\mu g)$-R_0 uzayıdır. □

Tanım 2.1.17. [9] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına, her $F,K\subset X$ ayrık μ-kapalı kümeleri için $F\subset U, K\subset V$ olacak şekilde ayrık $U,V\in\mu$ kümeleri varsa μ-normal uzay denir.

Teorem 2.1.18. [29] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) X μ-normaldir,

(b) Her $A,B\subset X$ ayrık μ-kapalı küme çifti için, $A\subset U, B\subset V$ olacak şekilde $U\in\mu$ ve V μg-açık ayrık kümeleri vardır,

(c) Her $A\subset X$ μ-kapalı kümesi ve $A\subset B$ gerçekleyen her $B\in\mu$ için, $A\subset U\subset c_\mu(U)\subset B$ olacak şekilde bir U μg-açık kümesi vardır,

(d) Her $A\subset X$ μ-kapalı kümesi ve $A\subset B$ gerçekleyen her $B\subset X$ μg-açık kümesi için, $A\subset U\subset c_\mu(U)\subset i_\mu(B)$ olacak şekilde bir $U\in\mu$ vardır,

(e) Her $A\subset X$ μg-kapalı kümesi ve $A\subset B$ gerçekleyen her $B\in\mu$ için, $A\subset c_\mu(A)\subset U\subset c_\mu(U)\subset B$ olacak şekilde bir $U\in\mu$ vardır.

Kanıt.

(a)⇒(b): $A,B\subset X$ ayrık μ-kapalı kümeleri alınsın. O halde, $A\subset U, B\subset V$ olacak şekilde U,V ayrık μ-açık kümeleri vardır. Her μ-açık küme μg-açık olduğundan, U,V ayrık μg-açık kümelerdir.

(b)⇒(c): A μ-kapalı küme ve B, $A\subset B$ gerçekleyen μ-açık küme olsun. O halde, A ve $X\backslash B$ ayrık μ-kapalı kümelerdir. (b) şıkkından, $A\subset U, X\backslash B\subset V$ olacak şekilde U,V ayrık μg-açık kümeleri vardır. Buradan, $A\subset U\subset X\backslash V\subset B$ bulunur. $B\in\mu$ ve $X\backslash V$ μg-kapalı olduğundan, $c_\mu(X\backslash V)\subset B$ ve böylece $A\subset U\subset c_\mu(U)\subset B$ elde edilir.

(c)⇒(d): $A\subset X$ μ-kapalı küme ve B, $A\subset B$ gerçeklyen μg-açık küme olsun. A μ-kapalı ve B μg-açık olduğundan, $A\subset i_\mu(B)$ bulunur. (c) şıkkından, $A\subset U\subset c_\mu(U)\subset i_\mu(B)$ olacak şekilde bir U μg-açık kümesi vardır.

(d)⇒(e): $A\subset X$ μg-kapalı küme ve B, $A\subset B$ gerçekleyen μ-açık küme olsun. $A\subset B$, $c_\mu(A)$ μ-kapalı ve B μg-açık olduğundan, $c_\mu(A)\subset B$ olur. (d) şıkkından, $A\subset c_\mu(A)\subset U\subset c_\mu(U)\subset i_\mu(B)$ olacak şekilde bir $U\in\mu$ vardır. O halde, $A\subset c_\mu(A)\subset U\subset c_\mu(U)\subset B$ elde edilir.

(e)⇒(a): $A,B\subset X$ ayrık μ-kapalı kümeler olsun. O halde, A μg-kapalı ve $X\backslash B\in\mu$ için $A\subset X\backslash B$ olur. (e) şıkkından, $A\subset c_\mu(A)\subset U\subset c_\mu(U)\subset X\backslash B$ olacak şekilde bir $U\in\mu$ vardır. Böylece, $A\subset U, B\subset X\backslash c_\mu(U)$ ve $U\cap(X\backslash c_\mu(U))=\emptyset$ bulunur. □

Tanım 2.1.19. (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına, her $A,B\subset X$ ayrık μg-kapalı kümeleri için $A\subset U, B\subset V$ olacak şekilde ayrık $U,V\subset\mu$ kümeleri varsa μg-normal uzay denir.

Teorem 2.1.20. (X,μ) ekstremal bağlantısız genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) (X,μ) μg-normal uzaydır,

(b) Her $A\subset X$ μg-kapalı kümesi ve A yı kapsayan her $U\in\mu$ için, $A\subset V\subset U$ gerçekleyen bir V μ-kapaçık kümesi vardır.

Kanıt.

(a)⇒(b): $A\subset X$ μg-kapalı küme ve $U\subset X$, $A\subset U$ gerçekleyen bir μ-açık küme olsun. $A\cap(X\setminus U)=\emptyset$ ve böylece $A\subset W_1, X\setminus U\subset W_2$ gerçekleyen W_1,W_2 ayrık μ-açık kümeleri vardır. $V=c_\mu(W_1)$ yazılırsa, V μ-kapaçık kümesi için $A\subset V\subset U$ gerçeklenir.

(b)⇒(a): Açık. □

2.2 μ-kompakt ve μg-kompakt uzaylar

Tanım 2.2.1. [27] (X,μ) güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayına, X in μ-açık kümelerden oluşan her örtülüşünün sonlu bir alt örtülüşü varsa μ-kompakt uzay denir.

Teorem 2.2.2. (X,μ) μ-kompakt uzayının μ-kapalı alt kümesi μ-kompakttır.

Kanıt.

$A\subset X$ μ-kapalı alt kümesi alınsın. O halde, $X\setminus A\in\mu$ olur. $\{U_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ A nın μ-açık bir örtülüşü ise, $\{U_\alpha:\alpha\in \nabla\}\cup\{X\setminus A\}$ X in μ-açık bir örtülüşüdür. X μ-kompakt olduğundan, sonlu bir $\nabla_0\subset\nabla$ kümesi için $X=(\cup\{U_\alpha: \alpha\in \nabla_0\})\cup\{X\setminus A\}$ gerçeklenir. A ve $X\setminus A$ ayrık kümeler olduğundan, $A\subset\cup\{U_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}$ bulunur. □

Teorem 2.2.3. μ-kompakt bir uzayın, (μ,ν)-sürekli üzerine görüntüsü ν-kompakttır.

Kanıt.

$f:(X,\mu)\to(Y,\nu)$ (μ,ν)-sürekli üzerine fonksiyon ve (X,μ) μ-kompakt olsun ve Y nin $\{U_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ ν-açık örütlüşü alınsın. O halde, $\{f^{-1}(U_\alpha): \alpha\in \nabla\}$ X in μ-açık bir örtülüşüdür ve $X=\{f^{-1}(U_\alpha): \alpha\in \nabla\}$ olacak şekilde sonlu bir $\nabla_0\subset\nabla$ alt kümesi vardır. Buradan, $Y=\cup\{U_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}$ ve Y ν-kompakttır. □

Teorem 2.2.4. (X,μ) güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayının μ-kompakt olması için gyk X in μ-kapalı kümelerinden oluşan ve $\cap\{F_\alpha: \alpha\in \nabla\}=\emptyset$ gerçekleyen her $\{F_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ ailesi için $\cap\{F_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}=\emptyset$ olacak şekilde sonlu bir $\nabla_0\subset\nabla$ alt kümesinin olmasıdır.

Kanıt.

(X,μ) μ-kompakt olsun ve X in μ-kapalı kümelerinde oluşan ve $\cap\{F_\alpha: \alpha\in \nabla\}=\emptyset$ gerçekleyen bir $\{F_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ ailesi alınsın. O halde, her $\alpha\in\nabla$ için $X\setminus F_\alpha\in\mu$ ve $\cup\{X\setminus F_\alpha: \alpha\in \nabla\}=X$ olur. X μ-kompakt olduğundan, $X=\cup\{X\setminus F_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}$ olacak şekilde sonlu bir $\nabla_0\subset\nabla$alt kümesi vardır. Buradan, $\cap\{F_\alpha: \alpha\in \nabla\}=\emptyset$ elde edilir. Tersine, X in μ-kapalı kümelerinden oluşan ve $\cap\{F_\alpha: \alpha\in \nabla\}=\emptyset$ gerçekleyen her $\{F_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ ailesi için $\cap\{F_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}=\emptyset$ olacak şekilde sonlu bir $\nabla_0\subset\nabla$ alt kümesi var olsun. X μ-kompakt olmasın ve X in $\{U_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ μ-açık örtülüşü alınsın. O halde, $\{X\setminus U_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ μ-kapalı kümelerin $\cap\{X\setminus U_\alpha: \alpha\in \nabla\}=\emptyset$ gerçekleyen bir topluluğudur. Varsayımdan, sonlu bir $\nabla_0\subset\nabla$ alt kümesi için $\cap\{X\setminus U_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}=\emptyset$ ve buradan $X=\cup\{U_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}$ çelişkisi elde edilir. (X,μ) μ-kompakttır. □

Tanım 2.2.5. [36] (X,μ) güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayına, X in her μg-açık örtülüşünün sonlu bir alt örtülüşü varsa, μg-kompakt denir.

Teorem 2.2.6. [36] (X,μ) μg-kompakt uzayının μg-kapalı alt kümesi μg-kompakttır.

Kanıt.

$A\subset X$ μg-kapalı alt kümesi alınsın. O halde, $X\setminus A$ μg-açıktır. $\{U_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ A nın μg-açık bir örtülüşü ise, $\{U_\alpha: \alpha\in \nabla\}\cup\{X\setminus A\}$ X in μg-açık bir örtülüşüdür. X μg-kompakt olduğundan, sonlu bir $\nabla_0\subset\nabla$ kümesi için $X=(\cup\{U_\alpha: \alpha\in \nabla_0\})\cup\{X\setminus A\}$ gerçeklenir. A ve $X\setminus A$ ayrık kümeler olduğundan, $A\subset\cup\{U_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}$ bulunur. □

Teorem 2.2.7. [36] 1.μg-kompakt bir uzayın, (μg,ν)-sürekli üzerine görüntüsü ν-kompakttır.

2. $f:(X,\mu)\to(Y,\nu)$ (μg,νg)-irresolute ve (X,μ) μg-kompakt ise, (Y,ν) νg-kompakttır.

Kanıt.

1. $f:(X,\mu)\to(Y,\nu)$ (μg,ν)-sürekli üzerine bir fonksiyon ve (X,μ) μg-kompakt olsun. Y nin $\{U_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ ν-açık örtülüşü alınsın. O halde, $\{f^{-1}(U_\alpha): \alpha\in \nabla\}$ X in μg-açık örtülüşüdür ve böylece $X=\cup\{f^{-1}(U_\alpha): \alpha\in \nabla_0\}$ olacak şekilde sonlu bir $\nabla_0\subset\nabla$ alt kümesi vardır. Buradan, $Y=\cup\{U_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}$ ve Y ν-kompakttır.

2. $f:(X,\mu)\to(Y,\nu)$ (μg,νg)-irresolute ve (X,μ) μg-kompakt olsun. Y nin $\{U_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ νg-açık örtülüşü alınsın. O halde, $\{f^{-1}(U_\alpha): \alpha\in \nabla\}$ X in μg-açık örtülüşüdür ve böylece $X=\cup\{f^{-1}(U_\alpha): \alpha\in \nabla_0\}$ olacak şekilde sonlu bir $\nabla_0\subset$ alt kümesi vardır. Buradan, $Y=\cup\{U_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}$ ve Y νg-kompakttır. □

Teorem 2.2.8. (X,μ) güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayının μg-kompakt olması için gyk X in μg-kapalı kümelerinden oluşan ve $\cap\{F_\alpha: \alpha\in \nabla\}=\emptyset$ gerçekleyen her $\{F_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ ailesi için $\cap\{F_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}=\emptyset$ olacak şekilde sonlu bir $\nabla_0\subset\nabla$ alt kümesinin olmasıdır.

Kanıt.

(X,μ) μg-kompakt olsun ve X in μg-kapalı kümelerden oluşan ve $\cap\{F_\alpha: \alpha\in \nabla\}=\emptyset$ gerçekleyen bir $\{F_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ ailesi alınsın. O halde, her $\alpha\in\nabla$ için $X\setminus F_\alpha$ μg-açık ve $\cup\{X\setminus F_\alpha: \alpha\in \nabla\}=X$ olur. X μg-kompakt olduğundan, $X=\cup\{X\setminus F_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}$ olacak şekilde sonlu bir $\nabla_0\subset\nabla$ alt kümesi vardır. Buradan, $\cap\{F_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}=\emptyset$ elde edilir.

Tersine, X in μg-kapalı kümelerinden oluşan ve $\cap\{F_\alpha: \alpha\in \nabla\}=\emptyset$ gerçekleyen her $\{F_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ ailesi için $\cap\{F_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}=\emptyset$ olacak şekilde sonlu bir $\nabla_0\subset\nabla$ alt kümesi var olsun. X μg-kompakt olmasın ve X in $\{U_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ μg-açık örtülüşü alınsın. O halde, $\{X\setminus U_\alpha: \alpha\in \nabla\}$ μg-kapalı kümelerin $\cap\{X\setminus U_\alpha: \alpha\in \nabla\}=\emptyset$ gerçekleyen bir topluluğudur. Varsayımdan, sonlu bir $\nabla_0\subset\nabla$ alt kümesi için $\cap\{X\setminus U_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}=\emptyset$ ve buradan $X=\cup\{U_\alpha: \alpha\in \nabla_0\}$ çelişkisi elde edilir. (X,μ) μg-kompakttır. □

2.3 μ-bağlantılı ve μg-bağlantılı uzaylar

Tanım 2.3.1. [13] (X,μ) güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayına, $X=A\cup B$ olacak şekilde $A,B\in\mu$ ayrık kümeleri varsa, μ-bağlantısız denir. μ-bağlantısız olmayan X uzayına μ-bağlantılı denir.

Teorem 2.3.2. (X,μ) güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler biribirine denktir:

(a) X μ-bağlantılıdır,

(b) X in μ-kapaçık alt kümeleri yalnızca X ve Ø tur.

Kanıt.

(a)⇒(b): $A\subseteq X$ μ-kapaçık olsun. O halde, $X\backslash A$ μ-kapaçıktır. X, A ve $X\backslash A$ nın ayrık birleşimi olarak yazılabildiğinden, A= Ø veya A=X olmalıdır.

(b)⇒(a): $X=A\cup B$ ve $A,B\in\mu$ ayrık kümeler olsun. O halde, A μ-kapaçıktır. Varsayımdan, A= Ø veya A=X elde edilir. Buradan, X μ-bağlantılıdır. □

Teorem 2.3.3. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\nu)$ (μ,ν)-sürekli üzerine bir fonksiyon ve (X,μ) μ-kompakt ise, (Y,ν) ν-kompakttır.

Kanıt.

$f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\nu)$ (μ,ν)-sürekli üzerine bir fonksiyon ve (X,μ) μ-bağlantılı olsun. $Y=A\cup B$, ve $A,B\in\nu$ ayrık kümeleri alınsın. O halde, $X=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$ ve $f^{-1}(A),f^{-1}(B)\in\mu$ ayrık kümelerdir. X μ-bağlantılı olduğundan $f^{-1}(A)=$ Ø veya $f^{-1}(A)=X$ ve buradan, A= Ø veya A=Y bulunur. Böylece, Y ν-bağlantılıdır. □

Tanım 2.3.4. [36] (X,μ) güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayına, $X=A\cup B$ olacak şekilde A,B μg-açık ayrık kümeleri varsa, μg-bağlantısız denir. μg-bağlantısız olmayan X uzayına μg-bağlantılı denir.

Teorem 2.3.5. [36] (X,μ) güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler biribirine denktir:

(a) X μg-bağlantılıdır,

(b) X in μg-kapaçık alt kümeleri yalnızca X ve Ø tur.

Kanıt.

(a)⇒(b): $A\subseteq X$ μg-kapaçık olsun. O halde, $X\backslash A$ μg-kapaçıktır. X, A ve $X\backslash A$ nın ayrık birleşimi olarak yazılabildiğinden, A= Ø veya A=X olmalıdır.

(b)⇒(a): $X=A\cup B$, ve A,B μg-açık ayrık kümeler olsun. O halde, A μg-kapaçıktır. Varsayımdan, A= Ø veya A=X elde edilir. Buradan, X μg-bağlantılıdır. □

Teorem 2.3.6. [36] 1. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\nu)$ $(\mu g,\nu)$-sürekli üzerine bir fonksiyon ve (X,μ) μg-bağlantılı ise, (Y,ν) ν-bağlantılıdır.

2. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\nu)$ $(\mu g,\nu g)$-irresolute üzerine bir fonksiyon ve (X,μ) μg-bağlantılı ise, (Y,ν) νg-bağlantılıdır.

Kanıt.

1. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\nu)$ $(\mu g,\nu)$-sürekli, üzerine bir fonksiyon ve (X,μ) μg-bağlantılı olsun.

$Y=A\cup B$ ve A,B ν-açık ayrık kümeleri alınsın. O halde, $X=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$ ve

$f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ μg-açık ayrık kümelerdir. X μg-bağlantılı olduğundan $f^{-1}(A)=$ Ø veya $f^{-1}(A)=X$ ve buradan, A= Ø veya A=Y bulunur. Böylece, Y ν-bağlantılıdır.

2. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\nu)$ $(\mu g,\nu g)$-irresolute üzerine bir fonksiyon ve (X,μ) μg-bağlantılı olsun. $Y=A\cup B$ ve A,B νg-açık ayrık kümeleri alınsın. O halde, $X=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$ ve

$f^{-1}(A)$,$f^{-1}(B)$ μg-açık ayrık kümelerdir. X μg-bağlantılı olduğundan $f^{-1}(A)= Ø$ veya $f^{-1}(A)=X$ ve buradan, A= Ø veya A=Y bulunur. Böylece, (Y,ν) νg-bağlantılıdır. □

3. μ-GENELLEŞTİRİLMİŞ SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Tanım 3.0.1. [31] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayında bir $A\subset X$ kümesine, $A\subset O$ gerçekleyen her $O\in\mu$ için $c_\mu(A)\subset O$ gerçekleniyorsa μ-genelleştirilmiş kapalı küme (kısaca μg-kapalı) denir. μ-genelleştirilmiş kapalı bir kümenin bütünleyenine μ-genelleştirilmiş açık küme (kısaca μg-açık) denir. Bir $A\subset X$ kümesini kapsayan bütün μg-kapalı kümelerin kesişimine A kümesinin μg-kapanışı denir ve $cl_{\mu g}(A)$ ile gösterilir. $A\subset X$ kümesinin bütün μg-açık altkümelerinin birleşimine A kümesinin μg-içi denir ve $int_{\mu g}(A)$ ile gösterilir. μg-kapalı kümelerin kesişimi μg-kapalı olmayabilir (Example 2.4., [29]). $A\subset X$ kümesinin μg-kapanışı μg-kapalı olmak zorunda değildir, ancak $A\subset X$ μg-kapalı ise $A=cl_{\mu g}(A)$ gerçeklenir.

3.1. Zayıf (μ,λ)-SürekliFonksiyonlar

Tanım 3.1.1. (X,μ) ve (Y,λ) genelleştirilmiş topolojik uzaylar ise, $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonuna,

(a) her $G\in\lambda$ için $f^{-1}(G)\in\mu$ gerçekleniyorsa (μ,λ)-sürekli fonksiyon,[6]

(b) her $x\in X$ ve $f(x)$ i içeren her $V\in\nu$ için $f(U)\subset c_\lambda(V)$ olacak şekilde x i içeren bir $U\in\mu$ varsa zayıf (μ,λ)-sürekli fonksiyon, [39]

(c) her $x\in X$ ve $f(x)$ i içeren her $V\in\lambda$ için $f(c_\mu(U))\subset V$ olacak şekilde x i içeren bir $U\in\mu$ varsa kuvvetli (μ,λ)-sürekli fonksiyon [19] denir.

Önerme 3.1.2. (X,μ) ve (Y,λ) genelleştirilmiş topolojik uzayları ve $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonu verilsin. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) f (μ,λ)-süreklidir.

(b) her $x\in X$ ve $f(x)$ i içeren her $V\in\lambda$ için $f(U)\subset V$ olacak şekilde x i içeren bir $U\in\mu$ vardır.

(c) her $A\subset X$ için $f(c_\mu(A))\subset c_\lambda(f(A))$ olur.

(d) her $B\subset Y$ için $c_\mu(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(c_\lambda(B))$ olur.

Kanıt.

(a)⇒(b): $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonu (μ,λ)-sürekli olsun ve $x\in X$ alınsın. $f(x)\in V$ ve $V\in\lambda$ ise, (a) şıkkından, $f^{-1}(V)\in\mu$ olur. O halde, $x\in U\subset f^{-1}(V)$, yani $f(U)\subset V$ olacak şekilde bir $U\in\mu$ vardır.

(b)⇒ (a): $x\in X$ ve $f(x)\in V$ olacak şekilde bir $V\in\lambda$ alınsın. (b) şıkkından, $f(U)\subset V$ olacak şekilde x i içeren bir $U\in\mu$ vardır. O halde, $U\subset f^{-1}(V)$, yani $f^{-1}(V)\in\mu$ bulunur.

(a) ⇒ (c): Her $A\subset X$ için $f(A)\subset c_\lambda(f(A))$, $A\subset f^{-1}(c_\lambda(f(A)))$ ve (a) şıkkından, $f^{-1}(c_\lambda(f(A)))$ μ-kapalı olduğundan, $c_\mu(A)\subset c_\lambda(f^{-1}(c_\lambda(f(A))))= f^{-1}(c_\lambda(f(A)))$ ve böylece $f(c_\mu(A))\subset c_\lambda(f(A))$ eldeedilir.

(c) ⇒(d): Her $B\subset Y$ için $A=f^{-1}(B)$ yazılırsa, $f(A)=f(f^{-1}(B))\subset B$ ve (c) şıkkından, $f(c_\mu(f^{-1}(B))\subset c_\lambda(f(f^{-1}(B))\subset c_\lambda(B)$ ve dolayısıyla $c_\mu(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(c_\lambda(B))$ elde edilir.

(d) ⇒(a): $V\in\lambda$ olsun. O halde, $Y\backslash V$ λ-kapalı ve (d) şıkkından, $c_\mu(X\backslash f^{-1}(V))=$

$c_\mu(f^{-1}(Y\setminus V)) \subset f^{-1}(c_\lambda(Y\setminus V))= f^{-1}(Y\setminus V)$ bulunur. Buradan, $X\setminus f^{-1}(V)$ μ-kapalı, yani $f^{-1}(V) \in \mu$ elde edilir. □

Tanım 3.1.3. (X,μ) ve (Y,λ) genelleştirilmiş topolojik uzaylar ise, $f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ fonksiyonuna,

(a) her $F\subset X$ μ-kapalı kümesi için $f(F)\subset Y$ λ-kapalı ise, (μ,λ)-kapalı fonksiyon,

(b) her $F\subset X$ μ-kapalı kümesi için $c_\lambda(f(i_\mu(F)))\subset f(F)$ gerçekleniyorsa zayıf (μ,λ)-kapalı fonksiyon denir.

Önerme 3.1.4. [29] (X,μ) ve (Y,λ) genelleştirilmiş topolojik uzayları ve $f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ zayıf (μ,λ)-kapalı fonksiyonu verilsin. (X,μ) güçlü GTS ise, $f(X)$ λ-kapalıdır.

Kanıt.

$f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ zayıf (μ,λ)-kapalı fonksiyon ve (X,μ) güçlü GTS olsun. O halde, $X\in\mu_{clp}$ ve böylece, $c_\lambda(f(X))=c_\lambda(f(i_\mu(X)))\subset f(X)$ bulunur. □

Önerme 3.1.5. [37] (X,μ) genelleştirlmiş topolojik uzay ve (Y,λ) ekstremal bağlantısız genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. $f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(a) f zayıf (μ,λ)-süreklidir.

(b) her $x\in X$ ve $f(x)$ i içeren her λ-kapaçık V kümesi için, x i içeren ve $f(U)\subset V$ gerçekleyen bir $U\in\mu$ vardır.

(c) her λ-kapaçık $V\subset Y$ kümesi için $f^{-1}(V)$ μ-kapaçıktır.

(d) her $V\in\lambda$ için $f^{-1}(V)\subset i_\mu(f^{-1}(c_\lambda(V))$ dir.

(e) her λ-kapalı $B\subset Y$ için $c_\mu(f^{-1}(i_\mu(B)))\subset f^{-1}(B)$ dir.

(f) her $V\in\lambda$ için $c_\mu(f^{-1}(V))\subset f^{-1}(c_\lambda(V))$ dir.

Kanıt.

(a) ⇒ (b): $x\in X$ ve $V\subset Y$, $f(x)$ i içeren λ-kapaçık bir küme olsun. O halde, $f(U)\subset c_\lambda(V)=V$ olacak şekilde x i içeren bir $U\in\mu$ vardır.

(b) ⇒ (c): $V\subset Y$ $f(x)$ i içeren bir λ-kapaçık küme ve $x\in f^{-1}(V)$ olsun. O halde, x i içeren bir $U\in\mu$ için $f(U)\subset V$ ve böylece $x\in U\subset f^{-1}(V)$, yani $f^{-1}(V)\in\mu$ bulunur. $Y\setminus V$ λ-kapaçık olduğundan, benzer şekilde $f^{-1}(Y\setminus V)\in\mu$ ve sonuçta $f^{-1}(V)\in\mu_{clp}$ bulunur.

(c) ⇒ (d): $V\in\lambda$ alınsın. O halde, $V\subset c_\lambda(V)$ ve $c_\lambda(V)\subset Y$ λ-kapaçıktır. (c) şıkkından, $f^{-1}(V)\subset f^{-1}(c_\lambda(V))$ ve $f^{-1}(c_\lambda(V))\in\mu$ elde edilir. Sonuç olarak, $f^{-1}(V)\subset i_\mu(f^{-1}(c_\lambda(V))$ gerçeklenir.

(d) ⇒ (e): $B\subset Y$ ν-kapalı kümesi alınsın. (d) şıkkından, $f^{-1}(Y\setminus B)\subset i_\mu(f^{-1}(c_\nu(Y\setminus B)))=$ $i_\mu(f^{-1}(Y\setminus i_\lambda(B)))=X\setminus c_\mu(f^{-1}(i_\lambda(B)))$ bulunur. O halde, $c_\mu(f^{-1}(i_\mu(B)))\subset f^{-1}(B)$ elde edilir.

(e) ⇒ (f): $V\in\lambda$ alınsın. O halde, $c_\lambda(V)\subset Y$ λ-kapaçıktır ve (e) şıkkından, $c_\mu(f^{-1}(V))\subset f^{-1}(c_\lambda(V))$ bulunur.

(f) ⇒ (a): $x\in X$ ve $V\subset Y$, $f(x)$ i içeren λ-açık küme olsun. O halde, $c_\lambda(V)$ λ-kapaçıktır ve $f(x)\notin Y\setminus c_\lambda(V)=c_\lambda(Y\setminus c_\lambda(V))$ olur. Buradan, $x\notin c_\mu(f^{-1}(c_\lambda(V))$ elde edilir ve böylece, x i içeren bir $U\in\mu$ için $U\cap f^{-1}(Y\setminus c_\lambda(V))= \emptyset$ bulunur. Sonuç olarak, $f(U)\cap(Y\setminus c_\lambda(V))= \emptyset$ ve dolayısıyla $f(U)\subset c_\lambda(V)$ elde edilir. □

Teorem 3.1.6. [37] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzay ve (Y,λ) ekstremal bağlantısız genelleştirilmiş topolojik uzay olsun. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(a) f zayıf (μ,λ)-süreklidir.

(b) her $x\in X$ ve $f(x)$ i içeren her λ-kapaçık V kümesi için, x i içeren ve $f(c_\mu(U))\subset V$ gerçekleyen bir $U\in\mu$ vardır.

(c) her $V\in\lambda_{clp}$ için $f^{-1}(V)\in\theta(\mu)_{clp}$ dir.

(d) her $V\in\lambda$ için $f^{-1}(V)\subset i_{\theta(\mu)}(f^{-1}(c_\lambda(V)))$ dir.

(e) her $V\in\lambda$ için $c_{\theta(\mu)}(f^{-1}(V))\subset f^{-1}(c_\lambda(V))$ dir.

Kanıt.

(a) ⇒ (b): $x\in X$ ve $V\subset Y$ f(x) i içeren ν-kapaçık küme olsun. f zayıf (μ,λ)-sürekli olduğundan, $f^{-1}(V)$ μ-kapaçıktır. $U= f^{-1}(V)$ yazılırsa, $f(U)=f(c_\mu(U))\subset V$ elde edilir.

(b) ⇒ (c): $V\subset Y$ λ-kapaçık küme ve $x\in f^{-1}(V)$ olsun. O halde, $x\in U$ ve $f(c_\mu(U))\subset V$ olacak şekilde bir $U\in\mu$ vardır. Buradan, $x\in U\subset c_\mu(U)\subset f^{-1}(V)$ ve $f^{-1}(V)$ $\theta(\mu)$-açıktır. $Y\setminus V$ λ-kapaçık olduğundan, benzer şekilde, $f^{-1}(Y\setminus V)$ $\theta(\mu)$-açıktır.

(c) ⇒ (d): $V\in\lambda$ ise, $c_\lambda(V)$ λ-kapaçık ve $V\subset c_\lambda(V)$ dir. O halde, $f^{-1}(V)\subset f^{-1}(c_\lambda(V))$ ve $f^{-1}(c_\lambda(V))$ $\theta(\mu)$-açıktır. Sonuç olarak, $f^{-1}(V)\subset i_{\theta(\mu)}(f^{-1}(c_\lambda(V)))$ bulunur.

(d) ⇒ (e): $V\in\lambda$ alınsın. O halde, $c_\lambda(V)$ ve $Y\setminus c_\lambda(V)$ λ-kapaçıktır. (d) şıkkından, $f^{-1}(Y\setminus c_\lambda(V))\subset i_{\theta(\mu)}(f^{-1}(Y\setminus c_\lambda(V)))$ ve böylece $X\setminus f^{-1}(c_\lambda(V))\subset i_{\theta(\mu)}(X\setminus f^{-1}(c_\lambda(V)))= X\setminus c_{\theta(\mu)}(f^{-1}(c_\lambda(V)))$ elde edilir.

(e) ⇒ (a): $x\in X$ ve $V\subset Y$ f(x) i içeren λ-açık küme olsun. O halde, $c_\lambda(V)$ λ-kapaçık ve $f(x)\notin Y\setminus c_\lambda(V)=c_\lambda(Y\setminus c_\lambda(V))$ olur. (e) şıkkından, $x\notin c_{\theta(\mu)}(f^{-1}(Y\setminus c_\lambda(V)))$ elde edilir. $\gamma_{\theta(\mu)}(f^{-1}(Y\setminus c_\lambda(V)))\subset c_{\theta(\mu)}(f^{-1}(Y\setminus c_\lambda(V)))$ olduğundan, $x\notin\gamma_{\theta(\mu)}(f^{-1}(Y\setminus c_\lambda(V)))$ bulunur. O halde, x i içeren ve $c_\mu(U)\cap f^{-1}(Y\setminus c_\lambda(V))=\emptyset$ gerçekleyen bir $U\in\mu$ vardır. Böylece, $f(c_\mu(U))\subset c_\lambda(V)$ elde edilir. O halde, $f(U)\subset f(c_\mu(U))\subset c_\lambda(V)$ ve dolayısıyla f zayıf (μ,λ)-süreklidir. □

Teorem 3.1.7. [37] (X,μ) ekstremal bağlantısız genelleştirilmiş topolojik uzay ve (Y,λ) genelleştirlmiş topolojik uzay olsun. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdakiler denktir:

(a) f güçlü (μ,λ)-süreklidir.

(b) her $x\in X$ ve f(x) i içeren her $V\in\lambda$ kümesi için, x i içeren ve $f(U)\subset V$ gerçekleyen bir U μ-kapaçık kümesi vardır.

(c) her $V\in\lambda$ için $f^{-1}(V)$ $\theta(\mu)$-kapalıdır.

(d) her $F\subset Y$ λ-kapalı kümesi için $f^{-1}(F)$ $\theta(\mu)$-kapalıdır.

(e) her $A\subset X$ için $f(c_{\theta(\mu)}(A))\subset c_\lambda(f(A))$ dır.

(f) her $B\subset Y$ için $c_{\theta(\mu)}(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(c_\lambda(B))$ dir.

Kanıt.

(a) $\Rightarrow$ (b):$x\in X$ ve $V\subset Y$ $f(x)$ i içeren λ -açık bir küme olsun. O halde, x i içeren ve $f(c_\mu(W))\subset V$ gerçekleyen bir $W\in\mu$ vardır. $U=c_\mu(W)$ μ-kapaçık olduğundan $f(U)\subset V$ elde edilir.

(b) $\Rightarrow$ (c): $V\subset Y$ λ-açık bir küme ve $x\in f^{-1}(V)$ olsun. O halde, x i içeren ve $f(U)=f(c_\mu(U))\subset V$ gerçekleyen bir U μ-kapaçık kümesi vardır. O halde, $x\in U=c_\mu(U)\subset f^{-1}(V)$ ve $f^{-1}(V)\theta(\mu)$-kapalıdır.

(c) $\Rightarrow$ (d): $F\subset Y$ λ-kapalı ise, $f^{-1}(Y\backslash F)$ $\theta(\mu)$-açık ve böylece $f^{-1}(F)$ $\theta(\mu)$-kapalıdır.

(d) $\Rightarrow$ (e): $A\subset X$ olsun. $c_\lambda(f(A))\subset Y$ ν-kapalı olduğundan, $f^{-1}(c_\lambda(f(A)))$ $\theta(\mu)$-kapalı ve böylece, $c_{\theta(\mu)}(A)\subset c_{\theta(\mu)}(f^{-1}(f(A)))\subset c_{\theta(\mu)}(f^{-1}(c_\lambda(f(A))))=f^{-1}(c_\lambda(f(A)))$ bulunur. Dolayısıyla, $f(c_{\theta(\mu)}(A))\subset c_\lambda(f(A))$ elde edilir.

(e) $\Rightarrow$ (f): $B\subset Y$ olsun. (e) şıkkından, $f(c_{\theta(\mu)}(f^{-1}(B)))\subset c_\lambda(f(f^{-1}(B)))\subset c_\lambda(B)$ elde edilir. O halde, $c_{\theta(\mu)}(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(c_\lambda(B))$ bulunur.

(f) $\Rightarrow$ (a): $x\in X$ ve $V\subset Y$ $f(x)$ i içeren λ-açık bir küme olsun. $Y\backslash V$ λ-kapalı olduğundan, $c_{\theta(\mu)}(f^{-1}(Y\backslash V))\subset f^{-1}(c_\lambda(Y\backslash V))=f^{-1}(Y\backslash V)$ olur. Buradan, $f^{-1}(Y\backslash V)$ $\theta(\mu)$-kapalı ve böylece $f^{-1}(V)$ x i içeren $\theta(\mu)$-açık bir kümedir. O halde, x i içeren ve $c_\mu(U)\subset f^{-1}(V)$ gerçekleyen bir $U\in\mu$ vardır. Dolayısıyla, $f(c_\mu(U))\subset V$ ve f güçlü (μ,λ)-süreklidir. □

3.2. $(\mu g,\lambda)$-Sürekli ve $(\mu g,\lambda g)$-Irresolute Fonksiyonlar

Tanım 3.2.1. [36] Bir $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonuna, her $F\subset Y$ λ-kapalı kümesi için $f^{-1}(F)\subset X$ μg-kapalı oluyorsa, $(\mu g,\lambda)$-sürekli fonksiyon denir.

Not 3.2.2. $\mu=SO(X)$ alınırsa, [3] de incelenen sg-kapalı küme ve sg-sürekli fonksiyon ile μg-kapalı küme ve $(\mu g,\lambda)$-sürekli fonksiyon kavramları örtüşür.

Not 3.2.3. (X,μ),(Y,λ) iki GTS olsun. (μ,λ)-sürekli bir $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonu, $(\mu g,\lambda)$-süreklidir.

Örnek 3.2.4. $X=\{a,b,c,d\}$,$\mu=\{\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},X\}$,$Y=\{x,y\}$,$\lambda=\{\emptyset,\{y\},Y\}$ alınsın. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonu $f(a)=f(b)=f(d)=x$, $f(c)=y$ şeklinde alınsın. $\{x\}$ λ-kapalı ve f-1 $(\{x\})=\{a,b,d\}=A$ kümesi μg-kapalıdır. Ancak A kümesi μ-kapalı değildir.

Not 3.2.5. (X,μ) uzayı μ-$T_{1/2}$-uzayı ise, her $(\mu g,\lambda)$-sürekli fonksiyon $(\mu g,\lambda)$-süreklidir.

Teorem 3.2.6. [36] (X,μ),(Y,λ) iki GTS ve $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ üzerine fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(a) f $(\mu g,\lambda)$-süreklidir,

(b) Her $U\in\lambda$ için, $f^{-1}(U)$ μg-açıktır.

Kanıt.

(a) $\Rightarrow$ (b): $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ $(\mu g,\lambda)$-sürekli ve $U\in\lambda$ olsun. O halde, $Y\backslash U$ λ-kapalıdır. (a) şıkkından, $f^{-1}(Y\backslash U)=X\backslash f^{-1}(U)$ μg-kapalıdır.

(b) $\Rightarrow$ (a): $F\backslash Y$ λ-kapalı kümesi alınsın. O halde, $Y\backslash F$ λ-açıktır. (b) şıkkından, $f^{-1}(Y\backslash F)$ μg-açık ve $f^{-1}(F)$ μg-kapalıdır. □

Teorem 3.2.7. [36] (X,μ),(Y,λ) iki GTS olsun. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ $(\mu g,\lambda)$-sürekli ise,

$f(cl_{\mu g}(f(A))\,))\subset c_\lambda(f(A))$ gerçeklenir.

Kanıt.

$f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ $(\mu g,\lambda)$-sürekli olsun ve $A\subset X$ alınsın.

$$A\subset f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}(c_\lambda(f(A)))$$

ve $c_\lambda(f(A))$ λ-kapalı olduğundan, $f^{-1}(c_\lambda(f(A)))$ μg-kapalıdır. O halde,

$$cl_{\mu g}(A)\subset f^{-1}(c_\lambda(f(A)))$$

ve

$$f(cl_{\mu g}(A))\subset f(f^{-1}(c_\lambda(f(A))))\subset c_\lambda(f(A))$$

gerçeklenir. □

Teorem 3.2.8. [36] $(X,\mu),(Y,\lambda)$ iki GTS olsun. $f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ fonksiyonu için, aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(a) Her $x\in X$ ve $f(x)$ i içeren her $V\in\lambda$ için, x i içeren ve $f(U)\subset V$ gerçekleyen bir U μg-açık kümesi vardır,

(b) Her $A\subset X$ için, $f(cl_{\mu g}(A))\subset c_\lambda(f(A))$ gerçeklenir,

(c) Her $B\subset Y$ için, $cl_{\mu g}(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(c_\lambda(B))$ gerçeklenir.

Kanıt.

(a) ⇒ (b): $y\in f(cl_{\mu g}(A))$ ve $y\in V\subset Y$ λ-açık kümesi alınsın. (a) şıkkından, $f(x)=y$, $x\in U$, $x\in cl_{\mu g}(A)$, $f(U)\subset V$ olacak şekilde bir $x\in X$ ve bir $U\in\mu$ vardır. $x\in cl_{\mu g}(A)$ olduğundan, $U\cap A\neq \emptyset$ ve buradan $f(A)\cap V\neq \emptyset$ elde edilir. O halde, $y=f(x)\in c_\lambda(f(A))$ bulunur.

(b) ⇒ (a): $x\in X$ ve $V\subset Y$, $f(x)$ i içeren λ-açık bir küme olsun. $A=f^{-1}(Y\setminus V)$ alınırsa, $x\notin A$ olur. (b) şıkkından, $f(cl_{\mu g}(A))\subset c_\lambda(f(A))\subset Y\subset V$ ve $cl_{\mu g}(A)=A$ elde edilir. $x\notin A=cl_{\mu g}(A)$ olduğundan, $x\in U$, $U\cap A=\emptyset$, $f(U)\subset V$ olacak şekilde bir $U\subset X$ μg-açık kümesi vardır.

(b) ⇒ (c): $A=f^{-1}(B)$, $B\subset Y$ alınsın. (b) şıkkından, $f(cl_{\mu g}(f^{-1}(B)))\subset c_\lambda(f(f^{-1}(B)))$, ve böylece $cl_{\mu g}(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(c_\lambda(f(f^{-1}(B))))\subset f^{-1}(c_\lambda(B))$ bulunur.

(c) ⇒ (b): $B=f(A)$, $A\subset X$ alınsın. (c) şıkkından, $cl_{\mu g}(f^{-1}(f(A)))\subset f^{-1}(c_\lambda(f(A)))$ ve $f(cl_{\mu g}(A))\subset c_\lambda(f(A))$ bulunur. □

3.3 $(\mu g,\lambda)$-Sürekli Fonksiyonlar ve $(\mu g,\lambda g)$-İrresolute Fonksiyonlar Arasındaki İlişki

Tanım 3.3.1. [36] $(X,\mu),(Y,\lambda)$ iki GTS olsun. $f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ fonksiyonuna, her $F\subset Y$ λg-kapalı kümesi için $f^{-1}(F)\subset X$ μg-kapalı oluyorsa $(\mu g,\lambda g)$-irresolute fonksiyon denir.

Teorem 3.3.2. [36] $(X,\mu),(Y,\lambda)$ iki GTS olsun. $f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ üzerine fonksiyonunun $(\mu g,\lambda g)$-irresolute fonksiyon olması için gyk her $A\subset Y$ λg-açık kümesi için $f^{-1}(A)\subset X$ kümesinin μg-açık olmasıdır.

Kanıt.

$f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ fonksiyonu $(\mu g,\lambda g)$-irresolute olsun ve $A\subset Y$ λg-açık kümesi alınsın. O halde, $Y\setminus A$ λg-kapalı ve böylece, $f^{-1}(Y\setminus A)=X\setminus f^{-1}(A)$ μg-kapalıdır.

Tersine, her $A\subset Y$ λg-açık kümesi için $f^{-1}(A)\subset X$ kümesinin μg-açık olsun ve $F\subset Y$ λg-kapalı kümesi alınsın. O halde, $f^{-1}(Y\setminus F)=X\setminus f^{-1}(F)$ μg-açıktır. □

Teorem 3.3.3. [36] (X,μ),(Y,λ) iki GTS olsun. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ $(\mu g,\lambda g)$-irresolute fonksiyonu $(\mu g,\lambda)$-süreklidir. Ancak, tersi her zaman doğru olmaz.

Kanıt.

$A\subset Y$ λ-kapalı kümesi alınsın. A, λg-kapalıdır. O halde, $f^{-1}(A)$ μg-kapalı ve f, $(\mu g,\lambda)$-süreklidir. □

Örnek 3.3.4. $X=Y=\{a,b,c\}$, $\mu=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\},X\}$, $\lambda=\{\emptyset,\{b\},Y\}$ olsun. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonu, $f(a)=f(c)=a$ ve $f(b)=c$ şeklinde tanımlansın. f fonksiyonu $(\mu g,\lambda)$-süreklidir. Ancak, $\{c\}\subset Y$ λg-kapalı kümesi için $f^{-1}(\{c\})=\{b\}\subset X$ μg-kapalı olmadığından, f $(\mu g,\lambda g)$-irresolute değildir. □

Teorem 3.3.5. [36] (X,μ),(Y,λ) ve (Z,ν) GTSleri alınsın. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonu $(\mu g,\lambda g)$-irresolute ve $g:(Y,\lambda)\rightarrow(Z,\nu)$ fonksiyonu $(\lambda g,\nu g)$-irresolute ise, $g\circ f:(X,\mu)\rightarrow(Z,\nu)$ fonksiyonu $(\mu g,\nu g)$-irresolute fonksiyondur.

Kanıt.

$A\subset Z$ νg-açık kümesi alınsın. O halde, $g^{-1}(A)\subset Y$ λg-açıktır ve böylece

$f^{-1}(g^{-1}(A))=(g\circ f)^{-1}(A)\subset X$ μg-açık olduğundan f, $(\mu g,\nu g)$-irresolute fonksiyondur. □

Teorem 3.3.6. [36] (X,μ),(Y,λ) ve (Z,ν) GTSleri alınsın. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonu $(\mu g,\lambda g)$-irresolute ve $g:(Y,\lambda)\rightarrow(Z,\nu)$ fonksiyonu $(\lambda g,\nu)$-sürekli ise, $g\circ f:(X,\mu)\rightarrow(Z,\nu)$ fonksiyonu $(\mu g,\nu)$-süreklidir.

Kanıt.

$A\subset Z$ νg-açık kümesi alınsın. O halde, $g^{-1}(A)\subset Y$ λg-açıktır ve böylece $f^{-1}(g^{-1}(A))=$ $(g\circ f)^{-1}(A)\subset X$ μ-açık olduğundan f, $(\mu g,\nu)$-süreklidir. □

Teorem 3.3.7. [36] (X,μ),(Y,λ) iki GTS olsun. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonu $(\mu g,\lambda g)$-irresolute ise, her $A\subset X$ kümesi için $f(cl_{\mu g}(A))\subset c_\lambda(f(A))$ gerçeklenir.

Kanıt.

$A\subset X$ kümesi alınsın. $c_\lambda(f(A))\subset Y$ λg-kapalıdır. Buradan, $f^{-1}(c_\lambda(f(A)))\subset X$ μg-açık ve böylece

$$A\subset f^{-1}(f(A))\subset f^{-1}(c_\lambda(f(A)))$$

elde edilir. O halde,

$$cl_{\mu g}(A)\subset f^{-1}(c_\lambda(f(A)))$$

ve sonuçta

$$f(cl_{\mu g}(A))\subset f(f^{-1}(c_\lambda(f(A))))\subset c_\lambda(f(A))$$

bulunur. □

3.4.Contra (μ,λ)-Sürekli ve Contra $(\mu g,\lambda)$-Sürekli Fonksiyonlar

Tanım 3.4.1. (X,μ) ve (Y,λ) iki GTS olsun. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonu;

(i) her $V\subset Y$ λ-açık alt kümesi için $f^{-1}(V)\subset X$ μ-kapalı ise contra (μ, λ)-sürekli fonksiyon [33],

(ii) her $V\subset Y$ λ-açık alt kümesi için $f^{-1}(V)\subset X$ μg-kapalı ise contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli

fonksiyon [38],

olarak adlandırılır.

Not 3.4.2. [38] Eğer $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonu contra (μ, λ)-sürekli veya contra $(\mu g,\lambda)$-sürekli ise, $\emptyset\in \lambda$ ve $f^{-1}(\emptyset)= \emptyset$ μg-kapalı ve μ-kapalı olduğundan, (X,μ) uzayı güçlü GTSdir. Contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli fonksiyon kavramı Contra sg-sürekli fonksiyon [34] kavramının bir genelleştirmesidir.

Tanım 3.4.3. [38] Bir (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına,

(i) (X,μ) uzayının her μ-açık alt kümesi μ-kapalı ise yerel μ-indiscrete uzay,
(ii) (X,μ) uzayı, iki ayrık μg-açık alt kümesinin birleşimi olarak yazılabiliyorsa, μg-bağlantılı uzay,
(iii) (X,μ) uzayının her elemanı, μr-kapalı kümelerin kesişimi olarak ifade edilebiliyorsa, zayıf μ-Hausdorff uzayı,
(iv) Her $x\neq y\in X$ çifti için, $x\in A$, $y\in B$ ve $A\cap B= \emptyset$ olacak şekilde A,B μ-kapaçık kümeleri bulunabiliyorsa, ultra μ-Hausdorff uzayı adını alır.

Tanım 3.4.4. [33] A, (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayında bir küme olsun. $\cap\{U\in \mu : A\subset U\}$ kümesine, A kümesinin μ-çekirdeği denir ve μ-ker(A) şeklinde gösterilir.

Lemma 3.4.5.[32] (X,μ) bir GTS ve $A,B\subseteq X$ olsun. Aşağıdaki özellikler gerçeklenir:
(i) μ-ker$(A)\supset A$ ve eğer $A\in\mu$ ise $A=\mu$-ker(A) dır.
(ii) Eğer $A\subset B$ bu durumda μ-ker$(A)\subset\mu$-ker(B) gerçeklenir.
(iii) $x\in\mu$-ker(A) için gyk x noktasını içeren her μ-kapalı F kümesi için $A\cap F\neq\emptyset$ olmasıdır.

Kanıt.

(i) $U_A =\{O:A\subset O\in\mu\}$, A kümesini içeren μ-açık kümelerin ailesi olsun. Bu durumda
μ-ker$(A)=\bigcap U_A\supset A$ geçerlidir. Eğer $A\in\mu$ ise $A\in U_A$ ve $\bigcap U_A\subset A$, $A=\bigcap U_A=\mu$-ker(A) elde edilir.

(ii) $A\subseteq B$ olmak üzere $U_A=\{U:A\subseteq U\in\mu\}$ ve $U_B=\{U:B\subseteq U\in\mu\}$ ailelerini göz önüne alalım. Bu durumda $U\in U_B$ için $A\subseteq B\subseteq U\in U_B$ için geçerlidir, yani $U\in U_A$ ve $U_B\subseteq U_A$ ve bu da$[(U_A\setminus U_B)\cup U_B]=U_A$ verir, bu durumda da

$$\begin{aligned}\mu\text{-ker}(A)&=\bigcap U_A\\&= (\bigcap(U_A\setminus U_B))\bigcap(\bigcap U_B)\\&\subset \bigcap U_B\\&= \mu\text{-ker}(B).\end{aligned}$$

geçerlidir.

(iii) $x\in\mu$-ker(A) olsun ve x noktasını içeren bir μ-kapalı F kümesi için $A\cap F=\emptyset$ farzedelim. Bu durumda $A\subset X\setminus F\in\mu$ ve $x\notin X\setminus F$ dir, fakat bu

$$x\in\mu\text{-ker}(A)\subset\mu\text{-ker}(X\setminus F)=X\setminus F$$

çelişkisini verir.

Tersine x noktasını içeren bir μ-kapalı F kümesi için $A\cap F\neq\emptyset$ fakat $x\notin\mu$-ker(A) olsun. Bu durumda μ-açık V kümesi $A\subset V$ ve $x\notin V$ olacak şekilde vardır. Fakat bu $(X\setminus V)\cap A\subset(X\setminus A)\cap A=\emptyset$ yani $(X\setminus V)\cap A=\emptyset$ verir ki bu da hipotez ile çelişir. □

Not 3.4.5. Bir (X, μ) genelleştirilmiş topolojik uzayında, her contra (μ, λ)-sürekli fonksiyon, contra $(\mu g, \lambda)$-süreklidir, ancak tersi her zaman geçerli değildir.

Örnek 3.4.6. $X=Y=\{1,2,3\}$, $\mu=\{\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, X\}$, $\lambda=\{\emptyset, \{1\}, Y\}$ olsun. $f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ fonksiyonu $f(1)=1$, $f(2)=3$, $f(3)=1$ şeklinde tanımlansın. f contra $(\mu g, \lambda)$-süreklidir, ancak contra (μ, λ)-sürekli değildir.

Teorem 3.4.7. [38] (X,μ), (Y,λ) iki GTS ve $f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) f, contra $(\mu g,\lambda)$-süreklidir,
(ii) (Y,λ) uzayında her λ-kapalı kümenin ters görüntüsü μg-açıktır.

Kanıt.

(*i*)⇒ (*ii*): G, (Y,λ) uzayında λ-kapalı bir küme olsun. $Y\setminus G$ λ-açık ve (*i*) den $f^{-1}(Y\setminus G)=X\setminus f^{-1}(G)$ μg-kapalıdır. O halde $f^{-1}(G)$ μg-açıktır.

(*ii*)⇒ (*i*): $U\in\lambda$ olsun. $Y\setminus U$ λ-kapalı ve (*ii*)den $f^{-1}(Y\setminus U)=X\setminus f^{-1}(U)$ μg-açık dolayısıyla $f^{-1}(U)$ μg-kapalıdır, yani contra $(\mu g, \lambda)$-süreklidir. □

Teorem 3.4.8. [38] $GC(\mu)$ keyfi kesişim altında kapalı ise $f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:

(i) f, contra $(\mu g,\lambda)$-süreklidir,
(ii) (Y,λ) uzayındaki her λ-kapalı kümenin ters görüntüsü μg-açıktır,
(iii) Her $x\in X$ ve $f(x)$ i içeren her $B\subset Y$ λ-kapalı alt kümesi için, $x\in A$ ve $f(A)\subset B$ olacak şekilde bir $A\subset X$ μg-açık kümesi vardır,
(iv) Her $A\subset X$ için $f(cl_{\mu g}(A))\subset \lambda\text{-}ker(f(A))$ olur,
(v) Her $B\subset Y$ için $cl_{\mu g}(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(\lambda\text{-}ker(B))$ olur.

Kanıt.

(*i*)⇒ (*iii*): $x\in X$ ve $f(x)\in B$, B λ-kapalı olsun. (*i*)den, $f^{-1}(Y\setminus B)=X\setminus f^{-1}(B)$ μg-kapalı ve $f^{-1}(B)$ μg-açıktır. $A= f^{-1}(B)$ yazılsın. Buradan, $x\in A$ ve $f(A)\subset B$ bulunur.

(*iii*)⇒ (*ii*): $x\in f^{-1}(B)$ ve B λ-kapalı olsun. $f(x)\in B$ olduğundan, (*iii*)den $x\in A$ ve $f(A)\subset B$ olacak şekilde μg-açık bir A kümesi vardır. Buradan, $x\in A\subset f^{-1}(B)$ bulunur. O halde, $f^{-1}(B)$ μg-açıktır.

(*ii*)⇒ (*i*): Teorem 3.4.7. den elde edilir.

(*ii*)⇒ (*iv*): $A\subset X$ ve $y\notin \lambda\text{-}ker(f(A))$ olsun. Lemma 3.4.5 den F λ–kapalı kümesi, $y\in F$ ve $f(A)\cap F=\emptyset$ olacak şekilde vardır. Buradan, $A\cap f^{-1}(F)=\emptyset$ ve $cl_{\mu g}(A)\cap f^{-1}(F)=\emptyset$ bulunur. O halde, $f(cl_{\mu g}(A))\cap F=\emptyset$ ve $y\notin f(cl_{\mu g}(A))$ elde edilir. $f(cl_{\mu g}(A))\subset \lambda\text{-}ker(f(A))$ dır.

(*iv*)⇒ (*v*): $B\subset Y$ olsun. (*iv*)den, $f(cl_{\mu g}(f^{-1}(B)))\subset \lambda\text{-}ker(f(f^{-1}(B)))\subset \lambda\text{-}ker(B)$ ve buradan $cl_{\mu g}(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(f(cl_{\mu g}(f^{-1}(B))))\subset f^{-1}(\lambda\text{-}ker(B))$ elde edilir. Bu ise $cl_{\mu g}(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(\lambda\text{-}ker(B))$ verir.

(*v*)⇒ (*i*):$B\in\lambda$ olsun. (*v*)den, $cl_{\mu g}(f^{-1}(B))\subset f^{-1}(\lambda\text{-}ker(B))= f^{-1}(B)$ ve $cl_{\mu g}(f^{-1}(B))= f^{-1}(B)$ bulunur. $GC(\mu)$ keyfi kesişim altında kapalı olduğundan $f^{-1}(B)$, (X,μ) de μg-kapalıdır. □

Tanım 3.4.9. [38] Bir $f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ fonksiyonu için, $\{(x,f(x) : x\in X\}\subset XxY$ kümesi f nin grafiği olarak adlandırılır ve G(f) şeklinde gösterilir.

(X,μ) ve (Y,λ) iki genelleştirilmiş topolıjik uzay olsun. μ ve λ nın XxY üzerinde belirlediği genelleştirilmiş çarpım uzayını υ ile göstereceğiz [12].

Teorem 3.4.10. [38] $f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ bir fonksiyon ve her $x\in X$ için $g:(X,\mu)\to(XxY,\upsilon)$, $g(x)=(x,f(x))$ şeklinde tanımlanmış f nin grafik fonksiyonu olsun. g contra $(\mu g, \upsilon)$-sürekli ise f contra $(\mu g, \lambda)$-süreklidir.

Kanıt.

$U\in \lambda$ olsun. Not 3.4.2 den (X,μ) güçlü GTS olduğundan $X\times U\in \upsilon$ dir, yani XxY üzerindeki genelleştirilmiş çarpım uzayında υ-açıktır. Buradan, $f^{-1}(U)=g^{-1}(XxU)$ μg-kapalıdır. O halde, ise f contra $(\mu g, \lambda)$-süreklidir. □

Tanım 3.4.11. [38] (X,μ) ve (Y, λ) iki GT, υ bunların XxY üzerinde belirlediği genelleştirilmiş çarpım uzayı olsun. Her $(x,y)\in XxY\setminus G(f)$ için, $x\in U$ gerçekleyen bir U μg-açık kümesi ve $y\in V$ gerçekleyen bir V λ-kapalı kümesi $(UxV) \cap G(f)= \emptyset$ olacak şekilde varsa, G(f) grafiğine contra υg-kapalıdır, denir.

Önerme 3.4.12. [38] Bir $f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ fonksiyonun grafiği G(f) için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- *(i)* G(f) contra υg-kapalıdır,
- *(ii)* Her $(x,y)\in XxY\setminus G(f)$ için, $x\in U$ gerçekleyen bir U μg-açık kümesi ve $y\in V$ gerçekleyen bir V λ-kapalı kümesi $f(U) \cap V= \emptyset$ olacak şekilde vardır.

Kanıt.

(*i*)⇒ (*ii*): $(x,y)\in XxY\setminus G(f)$ olsun. (*i*)den, $x\in U$ gerçekleyen bir U μg-açık kümesi ve $y\in V$ gerçekleyen bir V λ-kapalı kümesi $(UxV)\cap G(f)= \emptyset$ olacak şekilde vardır. $(x,y)\notin G(f)$, $x\in U$ ve $y\in V$ olduğundan $f(x)\neq y$ ve dolayısıyla $f(U)\cap V= \emptyset$ bulunur.

(*ii*)⇒ (*i*): $(x,y)\in XxY\setminus G(f)$ olsun. (*ii*)den, $x\in U$ gerçekleyen bir U μg-açık kümesi ve $y\in V$ gerçekleyen bir V λ-kapalı kümesi $f(U)\cap V= \emptyset$ olacak şekilde vardır. Buradan, $(x,y)\in(UxV)\subset XxY\setminus G(f)$ elde edilir. □

Teorem 3.4.13. [38] $f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli ve (Y, λ) λ-Urysohn ise G(f) contra υg-kapalıdır.

Kanıt.

$(x,y)\in XxY\setminus G(f)$ olsun. $f(x) \neq y$ dir. (Y, λ) λ-Urysohn olduğundan, $f(x)\in B$, $y\in C$ ve

$c_\lambda(B)\cap c_\lambda(C) = \emptyset$ olacak şekilde $B,C\in \lambda$ vardır. f contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli olduğundan, $x\in A$ ve $f(A)\subset c_\lambda(B)$ olacak şekilde bir A μg-açık kümesi vardır. Buradan, $f(A)\cap c_\lambda(C) = \emptyset$ ve G(f) XxY de contra υg-kapalıdır. □

Teorem 3.4.14. [38] $\{(X_i, \mu_i) : i\in I\}$ güçlü genelleştirilmiş topolojik uzayların bir ailesi olsun. $f:(X,\mu)\to(\Pi X_i, \upsilon)$ contra $(\mu g, \upsilon)$-sürekli ise, her bir $i\in I$ için $p_i:(\Pi X_i, \upsilon)\to(X_i, \mu_i)$ izdüşüm fonksiyonunu göstermek üzere, $p_i\circ f:(X,\mu)\to(X_i, \mu_i)$ contra $(\mu g, \mu_i)$-süreklidir.

Kanıt.

Sabit bir $i\in I$ alınsın. $U_i\subset X_i$ μ_i-açık kümesi alınsın. Her bir (X_i, μ_i) genelleştirilmiş topolojik uzay olduğundan p_i, ler [12, Proposition 2.7] den (υ, μ_i)-sürekli olduğundan,

$p_i^{-1}(U_i)$ kümesi $(\Pi X_i, \upsilon)$ de υ-açıktır. f contra $(\mu g, \upsilon)$-sürekli olduğundan,

$f^{-1}(p_i^{-1}(U_i))=(p_i\circ f)^{-1}(U_i)$ $\mu_i g$-kapalıdır. Buradan, $p_i\circ f$ contra $(\mu g, \mu_i)$-süreklidir. □

Sonuç 3.4.15. $f:(X,\mu)\to(Y,\lambda)$ bir fonksiyon ve (X,μ) μg-$T_{1/2}$ uzayı olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) f contra $(\mu g, \lambda)$-süreklidir,
(ii) f contra (μ, λ)-süreklidir.

Tanım 3.4.16. [38] Bir (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına, her μg-açık alt küme μ-kapalı ise, yerel μg-indiscrete uzay denir.

Teorem 3.4.17. [38] $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ contra $(\mu g,\lambda)$-sürekli, (X,μ) yerel μg-indiscrete uzay ise f contra (μ,λ)-süreklidir.

Teorem 3.4.18. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli, (X,μ) μg- $T_{1/2}$ uzayı ise f contra (μ, λ)-süreklidir.

Teorem 3.4.19. [38] (X,μ), (Y,λ) iki GTS, $GO(\mu)$ keyfi birleşim altında kapalı olsun. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli ve (Y,λ) λ-regüler ise f $(\mu g, \lambda)$-süreklidir.

Kanıt.

$x\in X$ ve $f(x)\in V$ de λ-açık bir küme olsun. (Y,λ) λ-regüler olduğundan, $f(x)\in G$ ve $cl_\lambda(G)\subset V$ olacak şekilde bir G λ-açık kümesi vardır. f contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli olduğundan, $x\in U$ ve $f(U)\subset cl_\lambda(G)$ olacak şekilde bir $U\in GO(\mu)$ vardır. O halde, $f(U)\subset cl_\lambda(G)\subset V$ ve böylece f $(\mu g, \lambda)$-süreklidir. □

Teorem 3.4.20. μg-bağlantılı bir uzayın, contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli, üzerine bir fonksiyon altındaki görüntüsü λ-bağlantılıdır.

Kanıt.

$f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli üzerine fonksiyon ve (X,μ) μg-bağlantılı uzay olsun. (Y,λ) λ-bağlantısız uzay ve A,B kümeleri (Y,λ) uzayının bir ayrımı olsun. O halde A,B kümeleri λ-açık, $Y=A\cup B$ ve $A\cap B=\emptyset$ olur. f contra $(\mu g,\lambda)$-sürekli ve üzerine olduğundan, $X=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$ ve $f^{-1}(A)$, $f^{-1}(B)$ boştan farklı, ayrık, μg-kapalı kümelerdir. Ayrıca, $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)=\emptyset$ dir, böylece $f^{-1}(A)$ ve $f^{-1}(B)$ μg-açıktır. Bu sonuç, (X,μ) uzayının μg-bağlantılı oluşuyla çelişir. (Y,λ) λ-bağlantılıdır. □

Teorem 3.4.21. [38] (X,μ) μg-bağlantılı uzay olsun. X uzayından, en az iki elemanlı (Y,λ) λ-discrete uzayına tanımlı her contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli fonksiyon sabittir.

Kanıt.

$f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli fonksiyon, (X,μ) μg-bağlantılı uzay olsun. O halde, (X,μ) uzayı $\{f^{-1}(y) : y\in Y\}$ μg-kapaçık kümeleri ile örtülür. Varsayımdan her $y\in Y$ için $f^{-1}(y)=\emptyset$ veya $f^{-1}(y)=X$ dir. Eğer her $y\in Y$ için $f^{-1}(y)=\emptyset$ ise, f bir fonksiyon olamaz. O halde, en az bir $y\in Y$ için $f^{-1}(y)\neq\emptyset$ ve böylece $f^{-1}(y)=X$ yani f sabittir. □

Teorem 3.4.22. [38] f, (X,μ) μg-bağlantılı uzayından (Y,λ) GT üzerine contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli fonksiyon ise, (Y,λ) λ-discrete uzay olamaz.

Kanıt.

(Y,λ) λ-discrete uzay olsun ve $A\subset Y$ λ-kapaçık kümesi alınsın. $f^{-1}(A)$ μg-kapaçıktır. Bu sonuç, (X,μ) uzayının μg-bağlantılı oluşu ile çelişir. □

Tanım 3.4.23. [38] (X,μ) genelleştirilmiş topolojik uzayına, her $A,B\subset X$ ayrık μ-kapalı küme çifti için, $A\subset U$ ve $B\subset V$ olacak şekilde U,V ayrık μg-açık kümeleri bulunabiliyorsa, μg-normal uzay denir.

Teorem 3.4.24. [38] $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ contra $(\mu g,\lambda)$-sürekli, (μ,λ)-kapalı, birebir ve (Y,λ) λ-normal ise, (X,μ) μg-normaldir.

Kanıt.

F_1,F_2 ayrık μ-kapalı kümeler olsun. f (μ, λ)-kapalı olduğundan $f(F_1)$, $f(F_2)$ ayrık λ-kapalı kümelerdir. (Y,λ) λ-normal olduğundan, $f(F_1)$, $f(F_2)$ ayrık λ-açık V_1,V_2 kümeleri ile ayrılabilir. Buradan, $F_i\subset f^{-1}(V_i)$ ve $f^{-1}(V_i)$ (i=1,2) μg-açıktır ve $f^{-1}(V_1)\cap f^{-1}(V_2)=\emptyset$ dir. O halde, (X,μ) μg-normaldir. □

Teorem 3.4.25. [38] $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli ve (X,μ) μ-$T_{1/2}$ uzayı ise, f contra (μ, λ)-süreklidir.

Not 3.4.26. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli ve $g:(Y,\lambda)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra $(\lambda g, \upsilon)$-sürekli olsun, $g\circ f$ contra $(\mu g, \upsilon)$-sürekli olmayabilir. $X=Y=Z=\{1,2,3\}$, $\mu=\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, X\}$, $\lambda=\{\emptyset, \{3\}, \{2,3\},Y\}$ ve $\upsilon=\{\emptyset, \{1,2\}, Z\}$ olsun. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ birim fonksiyonu contra $(\mu g, \lambda)$-sürekli ve $g:(Y,\lambda)\rightarrow(Z,\upsilon)$ birim fonksiyonu contra $(\lambda g, \upsilon)$-süreklidir, ancak bileşke fonksiyonu $g\circ f:(X,\mu)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra $(\mu g, \upsilon)$-sürekli değildir.

Teorem 3.4.27. [38] (X,μ), (Z,υ) iki GTS ve (Y,λ) λ-$T_{1/2}$ uzayı olsun. $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ (μ, λ)-irresolute fonksiyon ve $g:(Y,\lambda)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra $(\lambda g, \upsilon)$-sürekli fonksiyon ise,

$g\circ f:(X,\mu)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra $(\mu g, \upsilon)$-süreklidir.

Kanıt.

F, υ-açık bir küme olsun. g, contra $(\lambda g, \upsilon)$-sürekli olduğundan $g^{-1}(F)$ λg-kapalıdır. (Y,λ) λ-$T_{1/2}$ uzayı olduğundan, $g^{-1}(F)$ λ-kapalıdır. f, (μ, λ)-irresolute fonksiyon olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(F))=(g\circ f)^{-1}(F)$ μ-kapalıdır. (X,μ) de her μ-kapalı küme μg-kapalı olduğundan $g\circ f:(X,\mu)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra $(\mu g, \upsilon)$-süreklidir. □

Teorem 3.4.28. [38] $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ $(\mu g, \lambda g)$-irresolute fonksiyon ve $g:(Y,\lambda)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra $(\lambda g, \upsilon)$-sürekli fonksiyon ise, $g\circ f:(X,\mu)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra $(\mu g,\upsilon)$-süreklidir.

Kanıt.

F, υ-açık bir küme olsun. g, contra $(\lambda g,\upsilon)$-sürekli olduğundan $g^{-1}(F)$ λg-kapalıdır. f, $(\mu g, \lambda g)$-irresolute fonksiyon olduğundan, $f^{-1}(g^{-1}(F))=(g\circ f)^{-1}(F)$ μg-kapalıdır. □

Sonuç 3.4.29. [38] $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ $(\mu g, \lambda)$-irresolute fonksiyon ve $g:(Y,\lambda)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra $(\lambda g, \upsilon)$-sürekli fonksiyon ise, $g\circ f:(X,\mu)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra $(\mu g, \upsilon)$-süreklidir.

Tanım 3.4.30. [38] Bir $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ fonksiyonuna, her λg-açık alt kümenin ön görüntüsü μg-açık oluyorsa, ön-$(\mu g, \lambda g)$-açık fonksiyon denir.

Teorem 3.4.31. [38] $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ üzerine, $(\mu g, \lambda g)$-irresolute, ön-$(\mu g, \lambda g)$-açık fonksiyon ve $g:(Y,\lambda)\rightarrow(Z,\upsilon)$ keyfi bir fonksiyon olsun. $g\circ f:(X,\mu)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra $(\mu g, \upsilon)$-sürekli olması için gyk g fonksiyonunun contra $(\lambda g, \upsilon)$-sürekli olmasıdır.

Kanıt.

$g:(Y,\lambda)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra $(\lambda g, \upsilon)$-sürekli fonksiyon ve F, υ-açık bir küme olsun. g, contra $(\lambda g, \upsilon)$-sürekli olduğundan $g^{-1}(F)$ λg-kapalıdır. f, $(\mu g,\lambda g)$-irresolute olduğundan $f^{-1}(g^{-1}(F))=(g\circ f)^{-1}(F)$ μg-kapalıdır.

Tersine, $g\circ f:(X,\mu)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra $(\mu g, \upsilon)$-sürekli fonksiyon ve F, υ-kapalı bir küme olsun. $(g\circ f)^{-1}(F)$ μg-açıktır. f, ön-(μg, λg)-açık ve üzerine olduğundan,

$f(f^{-1}(g^{-1}(F)))= g^{-1}(F)$ λg-açık ve $g : (Y,\lambda)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra (λg, υ)-süreklidir. □

Teorem 3.4.32. [38] $f:(X,\mu)\rightarrow(Y,\lambda)$ üzerine, (μg, λg)-irresolute, (Y,λ) yerel λg-indiscrete uzay ve $g:(Y,\lambda)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra (λg, υ)-sürekli fonksiyon ise, $g \circ f :(X,\mu)\rightarrow(Z,\upsilon)$ contra (μg, υ)-süreklidir.

Kanıt.

F, υ-kapalı bir küme olsun. g, contra (λg, υ)-sürekli olduğundan, $g^{-1}(F)$ λg-açıktır. (Y,λ) yerel λg-indiscrete uzay olduğundan, $g^{-1}(F)$ λg-kapalıdır. f, (μg, λg)-irresolute olduğundan, $f^{-1}(g^{-1}(F))=(g\circ f)^{-1}(F)$ μg-kapalıdır. □

4. SONUÇLAR

Bu çalışma sonunda; μg-regüler, μg –normal ve μg-bağlantılı uzayların yeni özelliklerini inceledik. (μ,λ)-sürekli ve contra (μ,λ)-sürekli fonksiyonlardan yararlanarak, (μg,λ)-sürekli, (μg,λg)-irresolute ve contra (μg,λ)-sürekli fonksiyonları tanımladık. Bu genelleştirilmiş süreklilik çeşitlerinin özelliklerini inceledik ve bazı sonuçlar elde ettik.

K A Y N A K L A R / R E F E R E N C E S

[1] D. Andrijevic, Semi-preopen sets, Mat. Vesnik., 38 (1986), 24—32)

[2] D. Andrijevic, On b-open sets, Mat. Vesnik., 48 (1996), 59--64.)

[3] C. Miguel Caldas, Semi-generalized continuous maps in topological spaces, Port. Math, Vol. 52 Fasc. 4 - 1995.

[4] Á. Császár, δ- and θ-modifications of generalized topologies, Acta Math. Hungar., 120 (2008), 275--279.

[5] Á. Császár and E. Makai, Further remarks on δ- and θ-modifications, 123 (3) (2009), 223-228.

[6] Á. Császár, Generalized topology, generalized continuity, Acta Math. Hungar., 96 (2002), 351-357.

[7] Á. Császár, Further remarks on the formula for γ-interior, Acta Math. Hungar., 113 (2006), 325-332.

[8] Á. Császár, Generalized open sets in generalized topologies, Acta Math. Hungar., 106 (2005), 53-66.

[9] Á. Császár, Normal generalized topologies, Acta Math. Hungar., 115 (2007), 309-313.

[10] Á. Császár, γ-connected sets, Acta Math. Hungar., 101 (2003), 273-279.

[11] A. Csaszar, Extremally Disconnected Generalized Topologies, Annal. Univ. Sci. Budapest., 47 (2004), 91-96.

[12] Á. Császár, Product of generalized topologies, Acta Math Hung (2009) 123: 127. doi:10.1007/s10474-008-8074-x

[13] E. Ekici, Generalized submaximal spaces, Acta Math. Hungar., 132 (2011), 244-252.

[14] N. Levine, Generalized closed sets in topology, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 19 (1970), 89-96.

[16] N. Levine, Semi-open sets and semi-continuity in topological spaces, Amer. Math. Monthly, 70 (1963), 36-41

[17] Mashhour, M.E. Abd El-Monsef and S.N. El-Deep, On precontinuous and weak precontinuous mappings, Proc. Math. Phys. Soc. Egypt., 53(1982), 47--53.

[18] Monsef : M.E. Abd El-Monsef, S.N. El-Deeb and R.A. Mahmoud, β-open sets and β-continuous mappings. Bull. Fac. Sci. Assiut. Univ., 12 (1983), 77—

[19] W.K. Min, A note on θ(g,g′)-continuity in generalized topological spaces, Acta Math. Hungar., 125 (2009), No. 4, 387-393.

20[20] W.K. Min, Some results on generalized topological spaces and generalized systems, Acta Math. Hungar., 108 (2005), 171-181.

[21] O. Njåstad, On some classes of nearly open sets, Pacific J. Math., 15 (1965), 961--970.

[22] V. Renukadevi, Remarks on generalized hyperconnectedness, Acta Math. Hungar., 136 (3) (2012), 157-164.

[23] M.S. Sarsak, Weak separation axioms in generalized topological spaces, Acta Math. Hungar., 131 (1-2) (2011), 110-121.

[24] M.S. Sarsak, Weakly μ-compact spaces, Demonstratio Mathematica, Vol XLV, No 4, 2012.

[25] M.S.Sarsak, New seperation axioms in generalized topological spaces, Acta Math. Hungar, 132 (2011), 244-252.

[26] M.S. Sarsak, On μ-compact spaces, Questions and answers in general topology, 31 (2013), 49-57.

[27] R.D. Sarma, On extremally disconnected generalized topologies, Acta Math. Hungar., 134 (4) (2012), 583-588.
[28] B. Roy, A note on weakly (μ,λ)-closed functions, Mathematica Bohemica, 138 (2013), No.4, 397-405.
[29] B. Roy, On a type of generalized open sets, Applied General Topology, Volume 12, No.2, 2011, 163-173.
[30] B. Roy, On generalized R_0 and R_1 spaces, Acta Math Hung (2010) 127: 291. doi:10.1007/s10474-009-9135-5
[31] B. Roy, R. Sen, On a class of sets between μ-closed sets and μg-closed sets, J. Taibah Univ. Sci., http://dx.doi.org/10.1016/j.jtusci.2015.08.008
[32] Jayanthi, D., Contra continuity on generalized topological spaces, Acta Math Hung (2012) 137: 263. doi:10.1007/s10474-012-0211-x
[33] A. Al-Omari, & T. Noiri, A unified theory of contra-(μ, λ)-continuous functions in generalized topological spaces Acta Math Hung (2012) 135: 31.doi:10.1007/s10474-011-0143-x
[34] O. Ravi, M. Lellis Thivagar and R. Latha, Properties of Contra sg-Continuous Maps, General Mathematics Notes, 2011, 4(1):70-84
[35] B. Roy, On generalized R_0 and R_1 spaces, Acta Math Hung (2010) 127: 291. doi:10.1007/s10474-009-9135-5
[36] U. ¸Sengül, S.N. Dündar, On Some New Classes of Generalized Continuousfunctions, Int. J. Contemp. Math. Sciences, Vol. 11, 2016, no. 10, 471 - 478,doi.org/10.12988/ijcms.2016.6955
[37] U. Şengül,T. Noiri, S.N. Dündar, More On Extremally Disconnected GTSs , preprint
[38] U. Şengül, S.N. Dündar, Properties of Contra μg-continuous Functions, preprint
[39] W.K. Min, Weak Continuity on Generaized Topological Spaces, Acta Math. Hungar, 124 (2009), No. 1-2, 73-81

ÖZGEÇMİŞ

22 Eylül 1988 tarihinde İstanbul'da doğdu. İlköğretim ve liseyi İstanbul'da tamamladıktan sonra, 2009 yılında Marmara Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne kaydoldu. Bu bölümden 2013 yılında mezun olduktan sonra Marmara Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.

Yabancı dili İngilizce olup, başlangıç seviyesinde Arapça ve Fransızca bilmektedir.