T.C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLARI EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNİN TÜMEVARIMSAL MUHAKEME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Gülten EROL

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU

SİVAS-2019

ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNİN TÜMEVARIMSAL MUHAKEME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Gülten EROL

SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Lisansüstü Eğitim, Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı
Matematik Eğitimi Bilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak hazırlanmıştır.

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU

SİVAS
Temmuz-2019

KABUL VE ONAY

Gülten EROL'un hazırlamış olduğu "Ortaöğretim Öğrencilerinin Tümevarımsal Muhakeme Becerilerinin İncelenmesi" başlıklı bu çalışma, 17.06.2019 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından, "Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Dr.Öğr.Üyesi Yasin GÖKBULUT	(Jüri Başkanı)	
Dr.Öğr.Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU	(Danışman)	
Doç.Dr.Fatih KARAKUŞ	(Üye)	

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

…./…./

Doç.Dr.Fatih KARAKUŞ
Enstitü Müdürü

ETİK SÖZÜ

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

..../..../2019

Gülten EROL

ÖZET

EROL Gülten, Ortaöğretim Öğrencilerinin Tümevarımsal Muhakeme Becerilerinin İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Sivas, 2019

Araştırmada ortaöğretim öğrencilerinin tümevarımsal muhakeme becerileri incelenmiştir. Ortaöğretim öğrencilerinin karşılaştıkları problemlerin çözümünde kullandıkları tümevarımsal muhakeme sürecinin aşamaları incelenmiş ve bu aşamaların birbiri ile olan ilişkisi tespit edilmiştir. Tümevarımsal muhakeme süreci özel durumlarla başlar ve bu özel durumların genellenmesine dayanan sonuç çıkarma ve problem çözmeden oluşur. Matematik eğitiminde tümevarımsal muhakeme, sayılar ve şekiller arasındaki ilişkinin bulunması, örüntülerin keşfedilmesi ile bağlantılı bir süreçtir. Araştırmaya katılan 188 ortaöğretim öğrencisine alan yazını taraması sonucu tümevarımsal düşünce gerektiren, örüntü bulma ve ilişkileri genelleme konusunda geliştirilen 3 soruluk yazılı sınav uygulanmıştır. Yazılı sınav gönüllü öğrencilere üç farklı günde toplam üç aşamada uygulanmıştır. Daha sonra seçilen öğrenciler ile yarı-yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Toplanan veriler nitel yöntemler ile analiz edilmiştir. Bu çalışmada, tümevarımsal muhakeme aşamaları Cañadas'ın (2007) oluşturduğu, 7 aşamalı model temel alınarak Navruz'un (2012) uyarladığı gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme, genellemenin testi olmak üzere altı kategoride toplanmıştır. Aşamaların hangi öğrenme alanında nasıl sergilendiği ve varsa aşamalar arası ilişkiler, elde edilen nitel veriler yardımıyla yorumlanmıştır. Bulgular, yordamanın testi ve genellemenin testi aşamalarında başarının çok düşük olduğunu göstermiştir. Ayrıca elde edilen bulgular, şekil verilmeyen sorularda başarının daha düşük olduğunu göstermiştir. Bunun yanı sıra tümevarımsal muhakeme süreci aşamaları arasında güçlü bir ilişkinin varlığını ve öğrencilerin herhangi bir

aşamadaki başarısının bir sonraki aşamadaki başarısını etkilediği tespit edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Muhakeme, Tümevarımsal Muhakeme

ABSTRACT

EROL Gülten, Investigation of Inductive Reasoning Skills of Secondary School Students, Master Thesis, Sivas, 2019

In this study, inductive reasoning skills of secondary school students were investigated. The stages of inductive reasoning process used by secondary school students to solve the problems they encountered were examined and the relationship between these stages was determined. The inductive reasoning process begins with special cases and consists in the conclusion and problem solving based on the generalization of these special cases. In mathematics education, inductive reasoning, finding the relationship between numbers and shapes is a process associated with the discovery of patterns. A total of 6 questions were applied to 188 secondary school students, which required inductive thinking as a result of the literature review. Written exam is applied to three different stages in three different days. Then, semi-structured interviews were conducted with selected students. The collected data were analyzed by qualitative methods. In this study, inductive reasoning stages were collected in six categories: Observation adapted to Navruz (2012) based on a 7-stage model formed by Cañadas (2007), the organization of observations, predictive test, generalization, generalization, and generalization test. How the stages are exhibited in which learning area and if any, the relations between stages are interpreted with the help of the qualitative data obtained. The results showed that the success of the test and generalization testing were very low. In addition, the results showed that the success of the unformed questions was lower. In addition, it has been determined that there is a strong relationship between the stages of inductive reasoning process and the success of students at any stage affects the success of the next stage.

Key Words: Reasoning, Inductive Reasoning

ÖNSÖZ

Bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren ve tezin her aşamasında yardımlarını esirgemeyen saygı değer danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU'na; hayatımın her anında en büyük destekçim olan eşime ve değerli aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM III

BÖLÜM IV

ŞEKİLLER DİZİNİ

TABLOLAR DİZİNİ

GRAFİKLER DİZİNİ

KISALTMALAR DİZİNİ

NCTM	:	National Council of Teachers of Mathematics
TIMMS	:	Trends in International Mathematics and Science Study
		Uluslararası Matematik ve Fen Eğilimleri Araştırması
MEB	:	Milli Eğitim Bakanlığı
TDK	:	Türk Dil Kurumu
PISA	:	Programme for International Student Assessment
EARGED	:	Eğitim Araştırma Geliştirme Dairesi

BÖLÜM I

GİRİŞ

İnsanı diğer canlılardan ayıran en temel özelliği, düşünebilme ve olaylardan anlam çıkarıp koşulları kendi lehine düzenleyebilme yeteneğidir. Düşünmeyi geliştiren en önemli araçlardan biri matematiktir (Tural, 2005). Dolayısıyla matematik insan yaşamını kolaylaştırmakta, karşılaştıkları problemleri çözmek için sahip oldukları bilgi ve deneyim birikimlerinden yararlanmasına yardım etmektedir. Dahası bir problemi çözmek için birikimleri yeterli olmadığında bu düşünme becerisi yardımıyla akıl yürüterek yeni çözümler oluşturulabilmektedir. Umay (2003) ifade ettiği gibi matematik sadece sayıları, işlemleri öğretmekle kalmayarak; her geçen gün karmaşıklaşan yaşam savaşında, düşünme, olaylar arasında bağ kurma, akıl yürütme, tahminde bulunma, problem çözme gibi önemli beceriler kazandırarak insana destek olmaktadır.

Matematiğin temelinde ise muhakeme vardır. Muhakeme Arapça kökenli bir kelimedir. Türk Dil Kurumuna (2018) göre; hukuk alanında 'yargılama', felsefe dilinde 'usa vurma' ve günlük yaşantıda da 'bir sorunu çözmek için çıkar yol arama', 'akıl süzgecinden geçirme' ve 'düşünmek' anlamalarında kullanılmaktadır. Muhakeme, tahminde bulunma, yargılardan, durumlardan ve önermelerden sonuç çıkarma, akla mantığa yakın olup olmadığını inceleme, eldeki bilgilere dayanarak bir karar verme, genelleme yapma gibi farklı anlamlar yüklenerek de kullanılmaktadır. Altıparmak ve Öziş'in (2005) ifade ettiği gibi mantıklı bir sonuca ulaşma sürecidir. Günlük hayat durumlarında muhakeme yapabilmek için de matematiksel gözlemler yapmaya, verilen durumlar arasında ilişkiler kurarak çıkarımlarda bulunmaya hatta bazen de genellemelere ulaşmaya yani tümevarmaya ihtiyaç duyulmaktadır. Tümevarma ya da matematiksel tümevarım özel bir durumun her zaman sağladığını gösterme başka bir ifade ile özel bir durumu her durum için genişletme olarak tanımlanmaktadır. Başka bir ifade ile Lesh (2000) ifade ettiği gibi matematiksel tümevarım belli nesnelerin matematiksel manada gözlenmesi ve bu ilişkilerin genellenmesidir.

Tümevarımsal muhakeme ile matematiksel tümevarım farklı kavramlardır. Cathcart vd. (2003) bu farkı "Tümevarımsal muhakeme, genel anlamda bilinenden hareketle bilinmeyen durum hakkında tahminde bulunma, sonuç çıkarma iken;

matematiksel tümevarım, şekil, grafik, sayı veya görsel-geometrik yapılarla temsil edilen bir örüntüyü matematiksel bir dile dönüştürmedir" olarak açıklamaktadır. Dolayısıyla tümevarımsal muhakeme bir süreç gerektirmektedir. Süreç olduğu için de belli aşamaları içermektedir. Tümevarımsal muhakeme sürecinde hangi aşamaların yer aldığı konusunda yapılan araştırmalar, Pólya (1967); Reid(2002); Cañadas ve Castro'nun (2007), Cañadas ve diğerlerinin (2008, 2009) ifade ettiği gibi özel durumlardan genel durumlara doğru nasıl bir yol izlendiğinin tespitini içermektedir. Bu çalışmada da tümevarımsal muhakeme gözlem yapma, bu gözlemleri ilişkilendirebilme, tahminde bulunma, bulunulan tahminin doğruluğunu kontrol etme, kuralı genelleme ve son olarak da genellemenin kontrolünü yapma işlemlerinin bulunduğu bir süreç olarak ele alınmıştır. Bu aşamalar göz önüne alındığında tümevarımsal muhakemenin problem çözme, örüntü, matematiksel düşünme, genelleme, ispat vb gibi matematik eğitiminde önemli yer tutan kavramlarla yada becerilerle de bağlantılı olduğu görülmektedir.

Burns (2000) ifade ettiği gibi verilen bir örüntüyü tanıma, devam ettirme ve yeni bir örüntü oluşturma gibi beceriler matematiksel ilişkileri görmede, genelleme yapmada, matematiğin düzenini kavramada çok önemli ve geliştirilmesi gerekli yeteneklerdir. Dolasıyla da tümevarımsal muhakeme sayılar ve şekiller arasında bulunan örüntülerin, bağıntıların ve ilişkilerin keşfedilmesi ile ilişkili bir süreç olduğu içinde matematik eğitiminde çalışmaların odağı haline gelmeye başlamıştır. Başta Navruz (2012) çalışması olmak üzere yapılan araştırmalar (Pólya, 1967; Reid, 2002; Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas vd., 2008, Cañadas vd., 2009) tümevarımsal muhakeme sürecinin incelenmesi, açığa çıkarılması gerekliliğini ortaya koymaktadır. Bu bakımdan bu çalışmada ortaöğretim düzeyinde tümevarımsal düşünce süreçleri incelenmekte, tümevarımsal düşüncenin doğası ve işleyişi derinlemesine analiz edilmesi ve sınıf değişkenine göre tümevarımsal düşünce sürecinin açığa çıkarılması amaçlanmaktadır.

1.1.Araştırma Problemi

Gerek yurt içinde gerekse yurt dışında yapılan çalışmalarda buna çalışmalara paralel olarak da öğretim programlarında tümevarımsal muhakemenin önemi sıklıkla vurgulanmaktadır. NCTM'nin (National Council of Teachers of Mathematics) (1989) öğrenci değerlendirme standartlarında matematiksel muhakemenin değerlendirilmesinde öğrencilerden beklenen becerilerden ilki, tümevarıma dayalı muhakemeyi kullanma becerisi olarak belirtilmektedir (Navruz, 2012). MEB Talim Terbiye Kurulu Başkanlığı'nın (2005) hazırlamış olduğu ilköğretim matematik dersi programında da akıl yürütme becerisinin kazanılabilmesi için '*matematiksel durumların analizinde örüntü ve ilişkileri kullanabilme*' ve '*matematikteki örüntü ve ilişkileri analiz edebilme*' şeklinde oluşturulan kazanımlar yer almaktadır. Bu nedenle de tümevarımsal muhakeme öğrencilerde kazandırmayı hedeflediğimiz önemli bir beceri olarak karşımıza çıkmaktadır. Bu bağlamda öğrencilerin tümevarımsal muhakeme becerilerinin incelenmesi ve elde edilecek sonuçlar doğrultusunda bu becerilerin nasıl geliştirilebileceği, programa yansımalarının neler olabileceği bu çalışmanın odak noktasını oluşturmaktadır.

1.1.1. Problem Cümlesi

Bu çalışmanın problem cümlesi "ortaöğretim öğrencilerinin tümevarımsal muhakeme becerileri nasıldır?" şeklindedir. Bu probleme cevap vermek için aşağıda yer verilen alt problemler oluşturulmuştur.

1. Ortaöğretim öğrencilerinin kibrit çöpü sorusunda sergiledikleri tümevarımsal muhakeme aşamalarında davranışlar nelerdir? Sınıflara göre bu davranışlar farklılık göstermekte midir?
2. Ortaöğretim öğrencilerinin ardışık sayı sorusunda sergiledikleri tümevarımsal muhakeme aşamalarında davranışlar nelerdir? Sınıflara göre bu davranışlar farklılık göstermekte midir?
3. Ortaöğretim öğrencilerinin kağıt katlama sorusunda sergiledikleri tümevarımsal muhakeme aşamalarında davranışlar nelerdir? Sınıflara göre bu davranışlar farklılık göstermekte midir?
4. Tümevarımsal muhakeme aşamalarında sergiledikleri davranışlar yöneltilen sorulara göre farklılık göstermekte midir?

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmada ortaöğretim öğrencilerinin problem çözerken tümevarımsal muhakeme aşamalarında hangi davranışları sergilediklerini açığa çıkarmaya çalışmak, nasıl uyguladıklarını belirlemek ve sınıflara göre karşılaştırma yapmak amaçlanmıştır.

1.3. Araştırmanın Önemi

TIMMS (Trends in International Mathematics and Science Study) (2015) araştırmasına katılan ülkelerin 8. sınıf matematik başarı dağılımında TIMMS ölçek orta noktası 500 iken Türkiye 458 ile 24. sırada yer almaktadır. Türkiye 400-475 arası alt düzeyde bulunmaktadır. Bu düzeydeki öğrencilerin başlangıç düzeyindeki bilgileri bildiği tespit edilmiştir. Öğrencilerin tamsayılarda toplama ve çıkarma işlemlerini yapabildiği görülmüştür. Yatay ve dikey çizgiler, basit geometrik şekiller, koordinat bilgisi farkındalığına sahip oldukları görülmüştür. Basit bir grafiği ve tabloyu okuyabildikleri ve tamamlayabildikleri görülmüştür. 1999'dan bu yana başarıda artış mevcuttur. Başarıda artış olmasına rağmen genel olarak bakıldığında başarı sıralamasının düşük olması eldeki araştırmayı önemli kılmaktadır.

Ayrıca literatürde başta Navruz'un (2012) çalışması olmak üzere ilköğretimdeki öğrencilerle yapılmış çalışmalar varken ortaöğretimde bu şekilde bir çalışmanın olmaması da bu çalışmayı önemli kılmaktadır. Ortaöğretimde tümevarımsal muhakeme ile ilgili yapılacak çalışmalara da bir ön kaynak olmaktadır.

1.4. Sınırlılıklar

Bu araştırma çalışmaya katılacan 9,10,11 ve 12. sınıf öğrencileri, araştırmanın yapıldığı 2018-2019 eğitim öğretim yılı ve veri toplama aracında yer alan sorular ile sınırlıdır.

1.5. Varsayımlar

Araştırmaya katılan öğrencilerin veri toplama aracına samimiyetle cevap verdikleri ve veri toplama aracının uygulanması esnasında da katılımcıların dış etkenlerden aynı oranda etkilendikleri varsayılmıştır.

BÖLÜM II

KURAMSAL ÇERÇEVE

Tümevarımsal muhakeme ile ilgili kuramsal çerçeve oluşturulurken muhakeme, matematiksel muhakeme, tümevarım ve tümevarımsal muhakeme olarak alt başlıklar halinde verilmiştir. Elbette tümevarımsal muhakeme süreci genelleme süreci ve örüntü ile yakından ilişkilidir. Bu nedenle bu ilişkiyi vurgulamak açığa çıkarmakta önemlidir. Bir alt bölümde bu ilişki ortaya konulmaya çalışılmıştır. En son olarak da tümevarımsal muhakeme sürecini daha iyi, açıklayabilmek amacı ile çalışmanın odağını oluşturan tümevarımsal muhakeme aşamaları açıklanmıştır.

2.1. Muhakeme

İngilizcesi "Reasoning" olan kelimeye Türkçe yayınlanan çalışmalarda muhakeme (Umay, 2003; Navruz, 2012), genelleme yapma, tahminde bulunma anlamına gelen "akıl yürütme",akla mantığa uygun olup olmadığına bakma anlamındaki "usa vurma"gibi kavramlarla ifade edilmiştir. "Muhakeme" kelimesi bu anlamların tümünü içerdiği için "Reasoning" kelimesinin karşılığı olarak alınmıştır.

Muhakeme Arapça kökenli bir kelimedir. Türk Dil Kurumuna (2018) göre; hukuk alanında 'yargılama', felsefe dilinde 'usa vurma' ve günlük yaşantıda da 'bir sorunu çözmek için çıkar yol arama', 'akıl süzgecinden geçirme' ve 'düşünmek' anlamalarında kullanılmaktadır. Muhakeme kelimesi literatürde tahminde bulunma, yargılardan ve önermelerden sonuç çıkarma, akla mantığa yakın olup olmadığını inceleme, eldeki bilgilere dayanarak bir karar verme, genelleme yapma gibi farklı anlamalarda kullanılmıştır. Muhakeme (akıl yürütme), eldeki bilgilerden yola çıkarak matematiğin kendine özgü araç (sembol, tanım, ilişki, vb.) ve düşünme tekniklerini (tümevarım, tümdengelim, karşılaştırma, genelleme, vb.) kullanarak yeni bilgiler elde etme süreci (MEB, 2013), mantıklı bir sonuca ulaşma süreci (Altıparmak ve Öziş, 2005) olarak tanımlanmaktadır. Bu tanımda muhakemenin bir süreç olduğuna vurgu bulunmaktadır. Bundan farklı olarak da varolan delillerden, gerçeklerden yola çıkarak doğru, mantıklı ve kendi içinde çelişmeyen, usul ve kurallara uygun gerekçeli bir karar verme (Umay, 2013) şeklinde tanımlanmaktadır. Burada ise süreçten ziyade karar verme olarak ele alınmaktadır. Erdem (2011) ise; belli bir amaç için planlı, programlı bir şekilde mantıksal bir çerçeve içinde düşünerek tutarlı kararlar vermek amacıyla yapılan üst düzey düşünme eylemi şeklinde tanımlamaktadır.Toulmin, Rieke ve Janik'e (1984) göre muhakeme bir iddiayı, verilen bir kararı doğrulamak için veya bir fikri desteklemek için kullanılan bir yol olarak ele almış ve muhakemenin yeni fikirler oluşturmadığına değinilmiş ve muhakemenin görevinin ise belli bir durum, konu, olay hakkında en iyi kararı vermek olduğu ifade etmiştir. Bu tanımlar incelendiğinde muhakeme kelimesine farklı farklı anlamlar yüklendiği görülmektedir. Bu anlamlardan yola çıkarak Demir (2017) daha kapsamlı bir tanımı

"*Muhakeme; literatürde birçok araştırmacı tarafından çeşitli anlamalar yüklenerek tanımlanmıştır. Genel olarak; yargılardan ya da önermelerden sonuç çıkarma, eldeki bilgilere dayanarak bir karar verme, akla mantığa yakın olup olmadığını inceleme, genellemeler yapma veya tahminlerde bulunma gibi geniş bir yelpazede ele alınmıştır.*"*(s:2)* olarak tanımlamıştır.

Muhakeme matematik eğitiminde önemli bir yer tutmaktadır. NCTM (2000) "Matematik muhakeme etmedir" ifadesi ile matematik ile muhakeme arasındaki ilişkinin önemi vurgulamıştır. Farklı muhakemelerde bulunmak matematiksel bir ilişkinin ispatlanması aşamasında bilgilerin farklı açılarla inşa edilmesini (Altıparmak ve Öziş; 2005) belli bir durum, konu, bilgi ya da olay hakkında en iyi kararı vermeyi (Toulmin, Rieke ve Janik, 1984) sağlamaktadır. İlgilenilen durumu ya da fikri birçok açıdan ve derinlemesine düşünmenin, yani çok boyutlu düşünebilmenin muhakeme olduğunu savunan Erdem (2015) ayrıca muhakeme için bilginin yapılandırılmasında lokomotif görevini üstlenmekte olduğunu da söylemektedir.

Üst düzey bir düşünme eylemi olan muhakeme yapma karmaşık bir süreçtir. Soyut düşünme, strateji oluşturma ve geliştirme, verileri birbiriyle ilişkilendirme, varsayımda bulunma gibi önemli bileşenleri içermektedir. Ev-Çimen (2008) matematiğin sadece işlemsel becerileri gerektirmediği, üst düzey becerileri yani muhakemeyi de gerektirdiği vurgulanmıştır. Demir (2017) matematiksel sembollerin anlamlandırılmasında muhakemenin katkısı olduğuna, matematiksel tanım ve teoremlerin birbiri ile olan ilişkilerinin açığa çıkarılmasında da katkısı olduğuna değinmiştir. Ayrıca yine muhakemenin mevcut bilgiler ışığında önerme ya da teoremlerin ispatlanmasında önemli katkısı olduğu belirtilmiştir. MEB

(2013) Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7, 8. sınıflar) Öğretim Programında matematiksel kavramların kazandırılmasının yanı sıra, matematiği etkili öğrenmek ve kullanmak için akıl yürütme ya da muhakeme becerisinin geliştirilmesi hedeflenmektedir. Bu öğretim programı, öğrencilerin araştırma ve sorgulama yapabilecekleri, iletişim kurabilecekleri, eleştirel düşünebilecekleri, gerekçelendirme yapabilecekleri, fikirlerini rahatlıkla paylaşabilecekleri ve farklı çözüm yöntemlerini sunabilecekleri sınıf ortamlarının oluşturulmasını tavsiye etmektedir (MEB, 2013). Akıl yürütme becerisinin okul ve okul dışı hayatı kolaylaştırmadaki etkisi de dikkate alındığında matematik öğretim sürecinde bu becerinin geliştirilmesi için ortamlar hazırlanmasının gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda, Ortaokul Matematik Dersi (5, 6, 7, 8. sınıflar) Öğretim Programı'nda öğrencilere akıl yürütme (muhakeme) becerilerinin kazandırılması için dikkate alınması gereken bazı göstergeler

- Çıkarımların doğruluğunu ve geçerliliğini savunma
- Mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma
- Bir matematiksel durumu analiz ederken matematiksel örüntü ve ilişkileri açıklama ve kullanma
- Yuvarlama, uygun sayıları gruplandırma, ilk veya son basamakları kullanma gibi stratejileri veya kendi geliştirdikleri stratejileri kullanarak işlem ve ölçümlerin sonucuna dair tahminlerde bulunma
- Belirli bir referans noktasını dikkate alarak ölçmeye ilişkin tahminde bulunma olarak verilmiştir.

2013 yılından itibaren kademeli olarak uygulamadan kaldırılan İlköğretim Matematik Dersi 6–8. sınıflar Öğretim Programında da öğrencilerin muhakeme becerilerinin gelişimine önem verilmiş ve bunun için öğrencilere

- Öğrenme sürecinde muhakemeyi kullanır.
- Yaşantısında, diğer derslerde ve matematikte muhakeme becerisini kullanır.
- Matematik öğrenirken genellemeler ve çıkarımlar yapar.
- Matematikteki ve matematik dışındaki çıkarımların doğruluğunu savunabilir.
- Yaptığı çıkarımların, duygu ve düşüncelerinin geçerliliğini sorgular.

- Muhakemede bulunmada öz güven duyar.
- Muhakeme ile ilgili olumlu duygu ve düşüncelere sahip olur (MEB, 2009).

becerilerinin kazandırılması hedeflenmiştir.

Frederiksen (1984); Alkove ve McCarty (1992); Henningsen ve Stein(1997); Kosonen (1992); Suzuki (1997); Lannin (2004); Akay, Soybaş ve Argün (2006); Mandacı-Şahin (2007); Erdem (2011); Gürbüz ve Erdem (2014); Erdem ve Gürbüz'ün de (2015) çalışmalarında bahsettikleri gibi matematiksel muhakeme becerisini geliştirmede ve değerlendirmede farklı soru tiplerinin özellikle açık uçlu soruların ağırlıklı olarak kullanılması gerekmektedir. Bu sayede öğretim programının öngördüğü hedefleri gerçekleştirilmesi mümkündür.

2.2. Matematiksel Muhakeme

Selden ve Selden (2003) matematiksel muhakemenin herhangi bir konuda yapılan muhakemelerden çok farklı olmadığını ancak daha üst düzeydeki argümanlara ihtiyaç duyulan bir düşünme biçimi olduğunu vurgulamıştır. Matematikte muhakeme, tahminlere göre bir teoriyi test etme, kanıtlamaya çalışma, modern bilim dünyasının yaptığı ve kanıtlamaya çalıştığı durumlar olarak değerlendirilmektedir (Arsac, 2007; Akt. İncebacak&Ersoy, 2018). Matematiği anlamlandırma ve matematiksel muhakeme yapma matematiği açıklamak ile yakından ilgili olduğunu düşünen Beckmann (2002) ayrıca matematiksel kavramlar açıklandığında açıklayan kişi kendi anlamlandırmasını geliştirmektedir ve sağlamlaştırmaktadır. Matematiksel muhakemenin matematiğin somutlaştırılmasında, anlamlı bir hal almasında ve matematiği açıklamada katkısı inkar edilemez.

Matematiğin sembol ve terimlerinin etkili ve doğru kullanılmasından, varsayımların ve önermelerin ispatlanmasında matematiksel muhakemenin önem arz ettiğini belirtilmektedir (Fitzgerald, 1996; Akt. Demir, 2017). Öğrencinin matematiksel varsayım ve tahminlerde bulunması ve bunların doğruluğunu ispatlayabilmesi büyük ölçüde öğrencinin matematiksel muhakeme yeteneğine bağlıdır (Yavuz-Mumcu, 2011). Erdem (2015) matematiksel muhakemeden, matematik penceresinden bakarak çevrede olup biteni "Neden" ve "Nasıl" diye sorgulayarak anlamlandırmaya yardımcı olan ve bu anlamlandırma sonucunda da doğru kararlar vermeyi sağlayan bireysel bir kültür olarak bahsetmiştir. Yine aynı çalışmada kişinin bilgisi, dünyaya bakış açısı, geçmiş yaşantısı gibi birçok faktöre bağlı olmasından dolayı matematiksel muhakeme için "bireysel bir kültür" denilmektedir.

Matematiksel akıl yürütme becerisinin önemi düşünüldüğünde matematik öğretim sürecinde bu becerinin geliştirilmesi için ortamlar hazırlanmasının gerekliliği ortaya çıkmaktadır (Öz ve Işık, 2017). Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı olan PISA'nın (2006) amacı, öğrencilerde bulunan becerileri gerçek yaşam problem ve durumları ile belirlemeye çalışmaktır (EARGED, 2010, Akt. İncebacak ve Ersoy, 2018).

Featherstone ve diğerlerinin (1995); Ball'ın(1996) da ve İncebacak ve Ersoy'un (2018) değindiği gibi öğrencilerde mevcut olan muhakeme ve akıl yürütme becerilerini ortaya çıkarmak amacıyla gerçek yaşam problemleri kullanılabilir. Böyle problemler öğrencilerin problem çözme stratejilerini kullanmalarını, beyin fırtınası yardımıyla yeni fikirler üretmelerini sağlamaktadır. Bunun yanında düşünmeye teşvik eden sorularla sürekli olasılıkları düşünme sağlanabilir.Problem karşısında öğrencinin hangi stratejiyi seçeceğine karar vermesi önemlidir. PISA (2012 ve 2015) raporlarında Türkiye'nin yapılan sınavlarda başarısızlığı ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin bir problem durumu ile karşı karşıya kaldığında hangi stratejileri neden ve nasıl seçtiği, probleme nasıl yaklaştığı ve problemi anlamlandırırken, çözerken nelere dikkat ettiği önemlidir. Yapılan bu işlemler matematiksel muhakemedir.

Albayrak-Bahtiyari (2010) muhakemeyi tümevarım muhakemesi ve tümdengelim muhakemesi olmak üzere ikiye ayırmıştır. Tümdengelim; bilinen gerçek varsayımlardan bir sonuca ulaşmak iken tümevarım ise tersine, özel olaylardan yola çıkarak genel sonuçlar oluşturulmasıdır. Tümevarım oldukça önemlidir çünkü günlük hayatımızda sıklıkla yer almaktadır.

2.3. Tümevarımsal Muhakeme (Tümevarımsal Düşünme –Tümevarımsal Akıl Yürütme)

Tümevarımsal muhakeme genel olarak verilen şekil veya sayı örüntülerini formüle genelleme süreci olarak tanımlanmaktadır. Bu çalışmada tümevarımsal muhakeme incelenen süreç örüntülerin gözleminden formüle genellemeye kadar yapılan işlemlerin tümü olarak ele alınmıştır.

Tümevarım, özel olaylardan yola çıkarak genel sonuçlar oluşturmaktır. Edwards (1997) tümevarımsal muhakeme sürecini detaylı olarak açıklamıştır. Öğrenciler problem çözerken bir kural, ilişki ya da örüntü bulurlar. Buldukları kural, ilişki ya da örüntülerin başka durumlarda da geçerli olup olmadığını görmek için özel örnekler denerler. Bu şekilde tümevarımsal muhakemeye başlarlar. Varsayımlarının doğruluğunu örnek göstererek kanıtlama düşüncelerinin temelindedir. Örneğin "çift iki sayının toplamı daima çift bir sayıdır" ifadesi ispatlanırken çeşitli sayıları deneyerek kendi doğrulamasını yapabilirler. Tümevarımsal muhakeme sıklıkla kesinlik hissine neden olur. Öğrenciler varsayımlarının doğruluğunu ispatlamak için tümevarımsal düşünmelidirler. Bu son düşünme eylemi ispattan önceki adımdır (Edwards 1997).

2.4. Tümevarımsal Muhakeme ve Matematiksel Tümevarım

Tümevarımsal muhakeme ile matematiksel tümevarım farklı kavramlardır. Tümevarımsal muhakeme, genel anlamda bilinenden hareketle bilinmeyen durum hakkında tahminde bulunma, sonuç çıkarma iken; matematiksel tümevarım; şekil, grafik, sayı veya görsel-geometrik yapılarla temsil edilen bir örüntüyü matematiksel bir dile dönüştürmedir (Cathcart v.d., 2003). Bu kapsamda ele alındığında matematiksel tümevarım örüntünün kuralını matematiksel olarak ifade edebilmektir. Örüntüleri tanıma, devam ettirme ve oluşturma gibi özellikler matematiksel ilişkileri görmede, genelleme yapmada, matematiğin düzenini kavramada çok önemli yeteneklerdir (Burns, 2000). Bu çalışmada da tümevarımsal muhakeme örüntüyü gözlemleme, bu gözlemleri ilişkilendirebilme, tahminde bulunma, bulunulan tahminin doğruluğunu kontrol etme, örüntü kuralını genelleme ve son olarak da genellemenin kontrolünü yapma işlemlerinin bulunduğu bir süreç olarak alınmıştır. Tümevarımla muhakeme için varolan bilgilerden yola çıkılarak bilinmeyen durumlara ilişkin akıl yürütme işlemi olarak bahsedilmiştir (Smith &Kosslyn, 2014, s. 429 Akt. Çolak, 2016).

Matematiksel tümevarım	Tümevarımsal muhakeme
Matematiksel tümevarım örüntünün kuralını matematiksel olarak ifade edebilmektir.	Tümevarımsal muhakeme ise bir problemin çözümünde ilk baştan genellemenin kontrolüne kadar gerçekleşen süreçtir.

2.5. İspat Yöntemi Olarak Tümevarım

Özel bir durumun her zaman sağladığını göstermek için kullanılan ispat yöntemi tümevarım ile ispattır. Diğer bir ifade ile özel bir durumun her durum için sağlayacak şekilde genişletme eylemidir. İspat yöntemi olarak tümevarım tanımı aşağıdaki gibidir.

Doğal sayılar kümesinde p(n) açık önermesi verilsin. Eğer p(1) doğru, p(k) doğru iken p(k+1) açık önermesi de doğru ise p(n) açık önermesi tüm doğal sayılar için doğrudur.p(n) açık önermesinin tüm doğal sayılar için doğru olduğu gösterilirken

i. *p(1) açık önermesinin doğru olduğu kanıtlanır,*
ii. *p(k) açık önermesinin doğru olduğu kabul edilerek p(k+1) açık önermesinin doğru olduğu kanıtlanır* (Kandamar, 2000;s:17).

Örnek: $P(n)$ açık önermesi $P(n): 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ şeklinde verilmiş olsun. Bu takdirde P(n) önermesi her n doğal sayısı için sağlanır.

İspat:

1) $n = 1$ için $P(1) = 1$ olduğundan doğrudur.

2) Bir $n \in N/\{0\}$ için $P(n): 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ doğruolsun.

3) $P(n+1): 1 + 2 + 3 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ önermesinin doğru olduğunu gösterilmeliyiz. $P(n): 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ eşitliğinden yararlanılalım. Bu

eşitliğinin her iki tarafına $(n + 1)$ eklendiğinde ve gerekli matematiksel işlemler yapıldığında $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ eşitliği elde edilir. DolayısıylaP(n) önermesi her n doğal sayısı için sağlanır.

Yapılan bu çalışmada özel durumlar şekil veya cebirsel olarak verilen örüntüleri, genel durumlar ise elde edilen formülleri ifade etmektedir.

2.6. Örüntü ve Tümevarımsal Muhakeme

Örüntü, matematiksel düşüncelerin ve ilişkilerin soyutlanmasında, ilişkilerin genellemesinde, matematiksel akıl yürütme becerilerinin gelişiminde (Papic&Mulligan, 2005,s.609) önemli rol oynamaktadır. Güncel TDK (2019) sözlüğünde "Olay veyanesnelerin düzenli bir biçimde birbirini takip ederek gelişmesi" şeklinde tanımlanmıştır. Örüntü kavramının farklı tanımları bulunmaktadır.

- *Örüntü sayı, kelime ve şekillerle yapılan fark edilebilir düzeydeki güçlü düzenlemelerdir (Birken&Coon, 2008).*
- *Örüntü süreci, işitsel, görsel ve motor düzenliliğin keşfedilmesi ve oluşturulmasını içerir (Charlesworth&Lind, 2010, s. 214).*
- *Örüntü, sayı ve nesneler arasındaki bağlantıları ve geometrik şekilleri barındıran bir tasarımdır (McRae-Childs, 1995).*
- *Örüntü; ses, sembol, geometrik şekil ya da eylemlerin düzenli bir birleşimidir (Souviney, 1994, s. 368).*
- *Örüntü, sayısal ya da uzaysal düzenliliktir (Papic&Mulligan, 2005, s. 609).*
- *Örüntü, birbiriyle ilişkili bulunan sayı, uzay ya da ölçüm değişkenlerinin tahmin edilebilir düzenlilik içermesi durumu (Mulligan&Mitchelmore, 2013)*

olarak tanımlamaktadır. Bu tanımlar incelendiğinde örüntü; sayı, kelime, şekil, ses, nesnelerin bir düzeni, dizisi olarak tanımlanabilir.

Örüntülerin, cebirsel düşünme için temel oluşturduğu birçok araştırmada ifade edilmiştir (Clements, Sarama &Dibiase, 2004, s. 52; Palabıyık & Akkuş-İspir, 2011; Uygur-Kabael&Tanışlı, 2010; Tanışlı, 2008). Cebirsel düşünme ve örüntü arasındaki ilişki cebirsel düşünmenin tanımında yer almaktadır. Cebirsel düşünme; örüntüleri tanıma ve analiz etme, örüntüler arasındaki sayısal ilişkileri gösterebilme ve bu sayısal ilişkileri genelleyebilme yeteneği(Steele, 2005, s.142, Tanışlı'ya (2008) olarak tanımlanmaktadır. Cebirsel düşünme örüntü arama, örüntüyü tanıma ve tanımlama ve örüntüyü genelleme olmak üzere üç aşamadan oluşmaktadır. Bu aşamalar Herbert&Brown'a (1997 ss. 123-124) göre

-**Örüntü arama**, bir problem durumundan bilgiyi ortaya çıkarma;

-**Örüntüyü tanıma ve tanımlama**; bir matematiksel analizi; yani, bilgiyi matematiksel olarak kelime, diyagram, tablo, grafik ve denklemlerle temsil etme;

-**Örüntüyü genelleme** ise, bilinmeyeni bulma, varsayımları test etme ve fonksiyonel bir ilişki tanımlama gibi matematiksel bulguları yorumlanma ve uygulanma şeklindedir.

Muhakeme becerisini geliştirmek için Milli Eğitim Programlarında (MEB, 2005; MEB, 2013) örüntülerden yararlanılması gerektiği bildirilmektedir (Çolak, 2016).

2.7. Tümevarımsal Muhakeme Aşamaları

Tümevarımsal muhakeme aşamaları Cañadas'ın (2007) oluşturduğu, 7 aşamalı model temel alınarak Navruz'un (2012) uyarladığı gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme, genellemenin testi olmak üzere altı kategoride toplanmıştır.

Bu çalışmada kullanılan 6 tümevarımsal muhakeme aşamasından ilki gözlemleme aşamasıdır. ***Gözlemleme aşaması***, problemdeki özel durumlarla ilk deneyimlerin yaşandığı bir başlangıç noktasıdır (Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas vd., 2008). Tablo3, Tablo4 ve Tablo5'de sorulan sorular için gözlemlemenin nasıl olduğu açıklanmaktadır. Soru üzerinde diğer aşamalara dahil olmayacak şekilde yapılan işlemler ve soruyu yeniden ifade etme, soruda verilenleri şekil çizerek yeniden ifade etme ya da verilen sayılar arasındaki artışı belirtme de gözlemleme aşamasında alınmıştır.

İkinci aşama olan ***gözlemlerin organizesi aşaması***, gözlemlenen özel durumların düzenlenmesi ve sistematik bir hale getirilmesi için seçilen stratejileri içermektedir (Allen, 2001; Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas v.d., 2008). Bu çalışmada verilen sayılar arasındaki artışı sistematikleştirme ya da şekil çizimini sistematikleştirme bu aşamada alınmıştır. Gözlemlenen sayısal veriler arasında anlamlı ilişkiler bularak anlaşılır şekilde ifade edebilmektir. Tablo3, Tablo4 ve Tablo5'de sorulan sorular için gözlemlerin organizesi aşamasının nasıl olduğu açıklanmaktadır.

Üçüncü aşama olan ***yordama aşaması***, Cañadas ve Castro'nun (2007) ve Cañadas vd.'nin (2008) yorumladığı "araştırma" ve "örüntüyü tahmin etme" aşamalarını birleştirilerek, Navruz'un (2012) çalışmasında yordama olarak tek aşamada toplanmıştır. Çünkü araştırma ve örüntüyü tahmin etme, örüntünün bir sonraki veya yakın bir terimini tahmin etmek anlamına gelirken (Cañadas vd., 2008) yordama, örüntünün uzaktaki herhangi bir terimi için çıkarımda bulunmak veya örüntünün bütün terimlerine uygulanabilen basit bir formül üretmek anlamına gelmektedir. Bu araştırmada da Navruz'un (2012) çalışması örnek alınmış ve bu iki aşama birleştirilerek 'yordama' aşaması olarak alınmıştır. Bir önceki aşama olan gözlemlerin organizesinde bulunan anlamlı ilişki burada daha pratik ve kısa bir şekilde ifade edilebilmelidir. Gözlemlerin organizesi aşamasında sistematikleştirilen gözlemlemeler bu aşamada pratikleştirilmektedir. Tablo3, Tablo4 ve Tablo5'de sorulan sorular için yordama aşamasının nasıl olduğu açıklanmaktadır.

Dördüncü aşama ***yordamanın testidir***. Bu aşamada genel durumlar hariç sadece yeni özel durumlar için kontroller gerçekleştirilir (Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas vd., 2008). Bu çalışmada da genel durumlar için gerçekleştirilmemektedir. Yeni özel durumlar için gerçekleştirilebildiği gibi var olan özel durumlar için de gerçekleştirilebilmektedir. Bunun sebebi de verilen özel durumlar birden çok olabilmektedir ve hepsi, her zaman yordama için kullanılmayabilir. Dolayısıyla yordamanın testinde de kullanılmasında sakınca olmamaktadır. Yeni özel durumlar için test ederken çizmek ya da tek tek saymak gibi yöntemlerle sonucun kontrol edilmesi gerekmektedir. Var olan özel durumlar için test etmek daha kolaydır.

Beşinci aşama ***genellemedir***. Bu aşama, uygun bir yordamadan özel durumlara bağlı olmayan, genel bir kurala ulaşmak anlamına gelmektedir (Duval, 1990; Akt. Cañadas vd. 2008; Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas vd., 2008). Navruz'un (2012) çalışmasında da cebirsel veya sözel formüller yazma, örüntünün n. adımı hakkında fikir üretme ve örüntünün genel terimine ulaşmaya çalışma şeklinde ele alınmıştır. Bu çalışmada da aynı şekilde alınmıştır. Tablo3, Tablo4 ve Tablo5'de sorulan sorular için genelleme aşamasının nasıl olduğu açıklanmaktadır.

Altıncı ve son aşama ise *genellemenin testidir*. Bu aşama, matematiksel ispatlarla genellemenin doğru olduğuna karşıdaki kişiyi inandırmaktır (Cañadas ve Castro, 2007; Cañadas vd., 2008).Bu çalışmada genellemenin testi aşaması, bulunan formülün soruda verilen değerler için denenerek test edilmesi veya formülden elde edilen herhangi bir sonucun çizme gibi başka bir yöntem kullanarak test edilmesi şeklinde ele alınmıştır.

2.8. İlgili Araştırmalar

Yeşildere ve Türnüklü'nün (2007) çalışması İzmir'de 20 okuldan 8. sınıfı bitirmiş 262 öğrenciye uygulanmıştır. Veri toplama aracı 10 açık uçlu sorudan oluşmuştur. Anket yöntemi kullanılarak toplanan verilerin analizinde nitel ve nicel yöntemler kullanılmıştır. Sonuçta ise ilköğretim 8. sınıftan yeni mezun öğrencilerin problem çözmede, matematiksel bilgilerle ilişkilendirme yapmada, mantıksal akıl yürütmede sorun yaşadıkları görülmüştür. Bu durumun nedenleri ise araştırmacılar tarafından öğrencilerin verilenlerden değil de öznel durumlardan hareket etmeleri, düşüncelerini kanıtlar sunarak veya açıklamalar yaparak ifade edememeleri, verilenler arasında ilişkilendirmeler yaparak problem çözememeleri olarak yorumlanmıştır.

Pilten'in (2008) çalışmasında Ankara merkez ilçede yer alan bir okulun 5. sınıfından toplam 66 öğrenci üzerinde deneysel bir araştırma yapılmıştır. Deney grubundakilere Mevarech ve Kramarski (1997) tarafından geliştirilen, üstbiliş teorilerine dayanan bir öğrenme yaklaşımı olan IMPROVE (Giriş:Introduction, Üstbilişsel Sorgulama: Metacognition ve Questioning, Uygulama: Practising, Gözden geçirme: Reviewing, Uzmanlık: Obtaining Mastery, Doğrulama: Verification, zenginleştirme: Enrichment) stratejisi, 25 ders süresince uygulanmıştır. Öğrenciler 65 problemle belirtilen bir stratejiyi kullanarak araştırma yapmışlardır. Matematiksel muhakeme ölçeği, ön test ve son test şekline yapılmıştır. Sonuç olarak, deney grubundaki öğrencilerle gerçekleştirilen üstbilişe dayalı öğretimin, kontrol grubunda sürdürülen geleneksel öğretime göre uygun muhakemeyi belirleme ve kullanmada, matematiksel bilgileri ve örüntüleri tanıma ve kullanmada, tahmin etmede, çözüme ilişkin mantıklı tartışmalar geliştirmede, genelleme yapmada, rutin olmayan problemleri çözmede ve matematiksel muhakeme becerilerini geliştirmede daha etkili olduğu görülmüştür.

Tanışlı (2008) Eskişehir'de bulunan bir okuldaki 12 tane 5. Sınıf öğrencisine uygulanmıştır. Verilerin toplanmasında 9 örüntü sorusu ve mülakat sorularının birlikte bulunduğu klinik görüşme soruları, kişisel bilgi formu, öğrenci günlükleri ve araştırma günlükleri kullanılmıştır. Veriler nitel araştırma yöntemi ile analiz edilmiştir. Sonuç olarak örüntülerde tekrar biriminin belirlenmesinin örüntünün sonlu bir adıma kadar ilerletilmesinde ve tekrarlanan bir örüntü oluşturulmasında etkili olduğu görülmüştür. Terimlerin bir önceki terimle ilişkilendirildiği ya da örüntüdeki terimlerin yapısına yoğunlaşıldığı elde edilmiştir.Ancak sayı örüntüsü fonksiyon tablosu biçiminde verilmişse, bunlara ek olarak terim ve terim sırası ilişkisinin kurulabildiği tespit edilmiştir. Şekil örüntülerinde de görsel ve cebirsel yaklaşım ortaya çıkmıştır. Kullanılan örüntü çeşitlerinde, sembolik, sözel ve matematiksel cümle ifade biçimleri görülmüştür. Örüntülerde gerçekleştirilen etkinlikler esnasında strateji seçimlerinde öğrenci başarı düzeylerinin etkili olmadığı ancak örüntünün sayı dizisi, fonksiyon tablosu veya şekil ile sunulmasının etkili olduğu gözlemlenmiştir.

Yaman (2010) verilerin toplanması için 12 sorudan oluşan matematiksel örüntü içeren başarı testi kullanılmıştır. Ankara merkezinde yer alan iki okuldan 3., 4., 5., 6. ve 7. sınıf öğrencilerinden oluşan toplam 317 öğrenci üzerinde uygulanmıştır. Sonuç olarak sınıf seviyelerinin matematiksel örüntü performanslarını etkilediği, sınıf seviyesiyle birlikte matematiksel örüntü performanslarının da arttığı görülmüştür. Ayrıca örüntünün sunum biçimlerine göre matematiksel örüntülerle ilgili performansları arasında anlamlı bir ilişki olduğu, öğrencilerin tablo biçimindeki örüntüleri daha kolay karşıladıkları, sonra şekil, sonra sözel problem ve daha sonra da sayı dizisi biçiminde devam etmiştir. Sonuçta tekrarlayan örüntülerde performansın çok iyi olduğu, karesel genişleyen örüntülerle ilgili sorun yaşandığı, doğrusal genişleyen tipteki örüntülerde de ortalama performans elde edilmiştir. Ayrıca öğrenciler örüntülerin kuralını sözel olarak da ifade edebilmişlerdir. Fakat bulunan kuralı sembolik olarak ifade etme görevlerini içeren soru tiplerinde büyük zorluklar yaşadıkları ve az sayıda öğrencinin sembolik ifade sorularını cevaplayabildikleri görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin örüntülerin sunum biçimi, örüntü tipi ve soru tiplerine göre matematiksel örüntü performansları arasında tek tek anlamlı ilişkiler bulunmuştur.

Arslan ve Yıldız'ın (2010) çalışmalarında yaklaşım olarak nitel araştırma kullanılmıştır. Yapılan çalışmanın amacı 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmedeki özelleştirme, genelleme, varsayımda bulunma ve ispatlama aşamalarını ortaya çıkarmaktır. Matematiksel düşünmenin aşamalarına uygun oluşturulan 9 soruluk çalışma yaprakları 24 lise öğrencisine uygulanmıştır. Sonuç olarak matematiksel düşünmenin aşamaları ilerledikçe öğrenci başarısının azaldığı görülmüştür. İspatlamada zorlandıkları, özelleştirmede ise daha iyi oldukları görülmüştür. Genelleme ve varsayımda bulunma aşamalarında cevapların cebirsel ve sözel, ispatlama aşamasında ise aritmetik, geometrik ve cebirsel olarak kodlandıkları görülmüştür.

Özer ve Arıkan'ın (2000) çalışmalarında Miyazaki'den yararlanılmıştır. Lise 2. Sınıf öğrencilerinin matematik derslerinde ispat becerileri ve ispat düzeyleri incelenmiştir. Materyal yardımıyla ispat becerileri incelenmiştir. Araştırmaya 2000-2001 eğitim öğretim yılında toplamda 110 öğrenci katılmıştır. Ayrıca 3 öğrenci ile görüşme yapılmıştır. Sonuçta istenilen düzeyde ya da materyal yardımıyla ispat yapamadıkları tespit edilmiştir.
Arslan (2007) ortaöğretim ikinci kademe öğrencilerinin ispat seviyelerini belirlemeye yönelik açık uçlu 5 soruluk bir veri toplama aracı uygulanmıştır. Bursa'nın merkez ilçesinde seçilen 7 okuldan rastgele 679 öğrenci seçilmiştir. Alan yazındaki ortalama verilere göre düşük bir sonuç elde edilmiştir. Ayrıca kullanılan ispat türlerinin sınıflara göre değiştiğini, 8. sınıf ile 6. ve 7. sınıflarda örnekle doğrulamadan cebirsel ispata yönelimlerde ciddi farklılıklar tespit edilmiştir.

2.8.6. Tümevarımsal Muhakeme İle İlgili Çalışmalar

Tümevarımsal muhakeme becerileriyle ilgili hem ulusal pek fazla çalışmaya rastlanmamıştır.

İmamoğlu'nun (2010) çalışmasının örneklemini Boğaziçi Üniversitesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği, Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği ve Matematik programlarından 93 birinci ve 82 son sınıf öğrencisi oluşturmuştur. Yapılan çalışmada katılımcıların matematiksel ispat konusundaki tutum ve inançları, ispat yaparken kullandıkları yöntem ve akıl yürütmeleri, başkalarının yaptığı ispatları değerlendirmeleri incelenmiştir. İmamoğlu, *Tutum ve İnanç Ölçeği* (TİÖ), *İspat Sınavı* (İS) ve *İspat Değerlendirme Sınavı* (İDS) olmak üzere üç ölçek geliştirmiştir. Faktör analizinde sonuç olarak TİÖ'nin dört alt boyutu ortaya çıkmıştır. Alt boyutlar *altyapı, tutum, öz yeterlik* ve *inanç* olarak isimlendirilmiştir. Sonuç olarak birinci sınıfların daha çok tümevarımsal akıl yürütme kullandıkları söylenmiştir. Son sınıflar da çoğunlukla genellemeyi tercih etmişlerdir. Ayrıca son sınıflar tümdengelimsel yöntemler kullanmaya çalışmışlardır. Son sınıfların ispat yapma ve değerlendirmede bazı zorluklar yaşadıkları görülmüştür.

Cañadas ve Castro (2007), tümevarımsal düşünce analizinde oluşturdukları kategori modellemesi isimli araştırmada mülakatlar yoluyla 12 İspanyol öğrenciye iki matematiksel problemi yönelterek problem çözme süreçlerini incelemişlerdir. Toplanan verileri nitel bir yöntemle bilgisayarda analiz edilmiştir. Pólya (1967) ve Reid'in (2002) aşamalarını kaynak alan araştırmacılar mülakatlarda yeni aşamalar da ekleyerek tümevarımsal düşünce sürecini yedi aşamada toplamışlardır. Ve bu şekilde analizlerini tamamlamışlardır. Sonuçta tümevarımsal düşüncenin uygulama yapılan ilköğretim düzeyinde;örüntüde genel terimin sorulduğu sorularda öğrencilerin verilen adımlara tekrar dönerek, incelemelerde bulunmalarından ötürü doğal bir nitelik taşıdığı düşünülmüştür. Öğrencilerin, oluşturdukları genellemeleri bazı özel durumlar için deneyerek kontrol ettikleri bazılarının genel ifadesinin kontrolünü sağlama ihtiyacı duyduğu görülmüştür. Öğrencilerin genellikle aritmetiksel örüntülerde bir sonraki adımı kolaylıkla bulabildikleri, lineer olmayan artışlar içeren diğer örüntü türlerinde ise sonraki adımı bulma noktasında zorlandıkları görülmüştür. Ayrıca örüntüde genel terim ifade edilirken öğrencilerin cebirsel bir dil kullanabilmelerinin sınıf düzeyiyle ilgili olmadığı tespit edilmiştir.

Navruz (2012) tarafından yapılan çalışmada ilköğretim ikinci kademe öğrencilerinin matematiksel problemlerin çözümünde sergiledikleri tümevarımsal düşünce sürecinin aşamalarını incelemiş ve bu aşamaların aritmetik-geometrik öğrenme alanlarında, alanlar arası geçişte nasıl işletildiğini ve birbiri ile olan ilişkisini tespit edilmiştir. Araştırmaya ilköğretim 8. sınıftan 210 tane öğrenci katılmış ve veriler yazılı olarak toplanmıştır. Uygulanan 10 soruluk veri toplama aracından sonra seçilen 9 öğrenci ile yarı-yapılandırılmış mülakatlar gerçekleştirilmiştir. Verilerin analizinde Cañadas'ın (2007) oluşturduğu 7 aşamalı tümevarımsal düşünce modeli temel alınmıştır. Elde edilen bulgular, öğrencilerin aritmetikten cebire geçişlerinin geometriden cebire geçişlerinden daha kolay olduğunu ancak aritmetiksel soruların geometrik versiyonlarında geometriden cebire geçişlerin daha başarılı bir şekilde yürütüldüğünü göstermiştir. Tümevarımsal düşünce süreci aşamaları arasında güçlü bir ilişki olduğu ve öğrenciler tarafından herhangi bir aşamada gösterilen başarının bir sonraki aşamadaki başarı durumunu etkilediği tespit edilmiştir. Navruz'a (2012) göre ulusal anlamda tümevarımsal düşünce konusunda yapılan araştırmaların ilk boyutunu 'ispat' konusu, ikinci boyutunu akıl yürütme veya muhakeme süreçleri, üçüncü boyutunu ise örüntüler ve konusu oluşturmaktadır.

Matematik, farklı açılardan bakabildikçe veya kavramları birbirine dönüştürüp farklı şekillerde ifade edebildikçe güzelleşir, farklılaşır, uygulanabilir ve anlamlı bir hale gelir. Tümevarımsal muhakeme, özel durumlarla başlayan ve yapılan genellemeleri dayanak gösteren problem çözme ve sonuç çıkarma süreçleridir. Matematik eğitiminde tümevarımsal muhakeme sayılar ve şekiller arasında bulunan örüntülerin, bağıntıların ve ilişkilerin keşfedilmesi ile ilişkili bir süreçtir. Tümevarımsal muhakeme ile ilgili pek fazla çalışma bulunmamaktadır. Yapılan araştırmalar, matematik eğitiminin tümevarımsal düşünce konusunda geldiği noktayı ortaya koymakta ve bu düşünme türünün doğasını, işleyişini ve bilişsel anlamda nasıl bir süreç içerdiğini açığa çıkarmanın onu betimlemekten daha önemli olduğunu göstermektedir. Bu bakımdan eldeki araştırmada, tümevarımsal düşünce süreçleri incelenmekte, tümevarımsal düşüncenin doğası ve işleyişi derinlemesine analiz edilerek matematiksel kavramlar açısından tümevarımsal düşünce sürecinin öğrenci boyutunda nasıl gerçekleştiği konusuna açıklık getirilmesi amaçlanmaktadır.

BÖLÜM III
YÖNTEM

3.1. Araştırma Modeli

Yapılan bu çalışmada da Tümevarımsal muhakeme süreçlerinin araştırıldığı ortamların oluşturulması ve elde edilen verilerin analiz edilmesi amaçlandığından dolayı nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması tercih edilmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Nitel yöntemler metin ve imgesel verilere dayanmaktadır ve veri analizinde özgün adımlara sahiptir (Cresweel, 2013:183). Yıldırım ve Şimşek'in (2013) ifade ettiği gibi insan davranışını araştırmak zordur ve esnek ama bütüncül bir yaklaşım kullanmak gerekmektedir. Bireylerin görüşleri ve deneyimleri önemlidir. Durum çalışması tercih edilmesinin nedeni ise durum çalışmasının tüm durumlar için geçerli olmaması yalnızca belirlenen durum için genellemeler yapılmasına uygun olmasıdır. Bu çalışmada her problem ve her bir sınıf düzeyi bir durum olarak ele alınmıştır. Dolayısıyla üç durum üzerinde sınıflar arası inceleme yapılmıştır. Problemlerin yani durumların birbirinden hangi açılardan farklılık gösterdiğinin anlaşılması, süreç içindeki sergilenen davranışlarının incelenmesi ve analiz edilmesi bakımından durum çalışması yöntemi bu araştırmanın doğası ile uyuşmaktadır. Gerçekten hem problemden probleme hem de çalışmaya katılan öğrenciden öğrenciye tümevarımsal muhakeme süreci farklılık göstermekte ve durum araştırması ile gözlemlenebilen bu çeşitlilik, araştırma problemlerinin yanıtlanabilmesine olanak sağlamaktadır.

3.2. Katılımcılar

Çalışmanın katılımcıları İç Anadolu Bölgesinde bir Anadolu Lisesinin 9, 10, 11 ve 12. sınıf öğrencilerinden oluşmaktadır. Araştırmacının çalıştığı okul olması sebebiyle katılımcılar kolay ulaşılabilir örneklem yöntemi ile seçilmiştir. Çalışmaya katılan her bir öğrenciye bir numara verilmiştir. Veri toplama aracında yer alan 3 soru farklı günlerde uygulandığı için her bir soru için katılım sayısı farklılık göstermektedir. Bu nedenle her bir soru bir durum olarak ele alınmıştır ve ona göre veri analizi yapılmıştır. Bunun bir sonucu olarak da her bir sorudaki öğrenci numarası farklı bir öğrenciyi ifade etmektedir.

Tablo1. Sorulara ve sınıflara göre katılımcı numaraları

Sınıf	**Sorulara göre katılımcı numaraları**		
	1.soru	2.soru	3.soru
9. sınıf	1-37	1-39	1-34
10. sınıf	38-91	40-93	35-86
11. sınıf	92-152	94-152	87-146
12. sınıf	153-188	153-178	147-164
Toplam	188	178	164

Tablo1'den görüldüğü gibi *1. soru* için 1-37 arasındaki öğrenciler 9. sınıftan; 38-91 arasındaki öğrenciler 10. sınıftan; 92-152 arasındaki öğrenciler 11. sınıftan ve 153-188 arasındaki öğrenciler 12. sınıftan olmak üzere toplam 188 öğrenci katılmıştır. *2. soru* için 1-39 arasındaki öğrenciler 9. sınıftan; 40 ile 93 arasındaki öğrenciler 10. sınıftan; 94 ile 152 arasındaki öğrenciler 11. sınıftan ve 153 ile 178 arasındaki öğrenciler 12. sınıftan olmak üzere toplam 178 öğrenci katılmıştır. *3. soru* için 1-34 arasındaki öğrenciler 9. sınıftan; 35 ile 86 arasındaki öğrenciler 10. sınıftan; 87 ile 146 arasındaki öğrenciler 11. sınıftan ve 147 ile 164 arasındaki öğrenciler 12. sınıftan olmak üzere toplam 164 öğrenci katılmıştır.

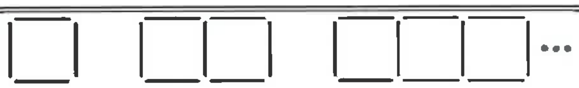
3.3. Veri Toplama Aracı ve Verilerin Toplanması

Veri toplama aracı geliştirilirken öncelikle ilgili literatür taranmıştır. Tümevarımsal düşünce, özel durumlardan yola çıkarak genel durumlara doğru bir akıl yürütme işidir (Neubert & Binko, 1992). Bu çalışmada yakın adıma ilerleme tipindeki sorular özel durumları, uzak adıma ilerlemede kullanılacak olan formülü elde etme soruları da genellemeyi temsil etmektedir. Yöneltilen problemlerde gözlemlenmeaşamasından genellenmesine kadar olan süreç (gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme, genellemenin testi) inceleneceği için uzman görüşleri ile tümevarımsal düşünme süreçlerini ortaya çıkarabileceği düşünülen üç soru seçilmiştir. Daha sonra bir pilot çalışması yapılmıştır. Yapılan pilot çalışmada hem sorular test edilmiş hem de araştırmacının aşamaları yoklamada deneyim kazanması sağlanmıştır. Veri toplama aracında aşağıda yer verilmiş olan kibrit çöpü, ardışık sayı ve kağıt katlama sorularına yer verilmiştir.

Kibrit çöpü sorusu

Aşağıdaki şekil her bir kenarı bir kibrit çöpü uzunluğundaki bitişik karelerden oluşmaktadır.

Şekilde görüldüğü gibi 1 kare için 4 kibrit çöpü, 2 kare için 7 kibrit çöpü, 3 kare için 10 kibrit çöpü gerekmektedir.



a) Yan yana 14 kare yapmak için kaç kibrit çöpü gereklidir?

b) Yukarıdaki çözümü genelleyerek bir formüle ulaşabilir misiniz? Yani yan yana n tane kare yapmak için kaç kibrit çöpü gereklidir?

Ardışık sayı sorusu

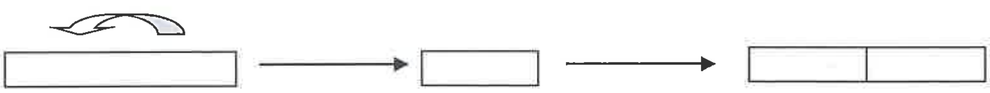
Bazı sayılar bir dizi ardışık pozitif sayının toplamı olarak ifade edilebilir.

Örneğin; 9=2+3+4, 11=5+6, 18=3+4+5+6

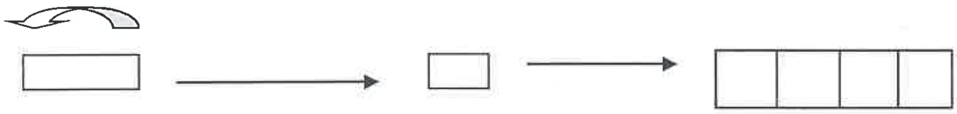
a) Verilen örnekler dışında siz de bir örnek veriniz.

b) Tam olarak hangi sayılar bu özelliğe sahiptir formüle genelleyiniz?

Kağıt katlama sorusu



ince uzun bir kağıt şerit ikiye katlayın | ikiye katlanmış hali | açtıktan sonra oluşan kat izi



ikiye katlanmış hali | tekrar ikiye katlanmış hali | açtıktan sonra oluşan kat izi

Yukarıda modellendiği gibi ince uzun bir kağıt şerit olduğunu düşünün. Uçlarından tutun ve ikiye katlayın. Kağıdı bastırın ki kat izi belirginleşsin. bu işlem sonucunda bir tane kat yeri oluşur. Kağıt üzerinde bir kez daha aynı işlemi tekrarlayın, bu sefer de 3 kat yeri oluşur. a) Bu işlemi toplamda 10 kez yaparsanız kaç kat yeri oluşur?

b) Yukarıdaki çözümü genelleyerek bir formüle ulaşabilir misiniz?

Soruların her biri bir yönü ile diğerinden farklı olacak şekilde seçilmiştir. Kibrit çöpü ve kağıt katlama sorusu görsel ile birlikte verilirken ardışık sayı sorusunda bir görsel bulunmamaktadır. Diğer taraftan kağıt katlama sorusunda öğrenci bir kağıt ile deneme imkanına sahiptir. Kibrit çöpü sorusunda verilen görsel üzerinde adımları çizmek daha rahat iken kağıt katlama sorusunda bu daha zordur. Bunun yanı sıra ardışık sayı sorusunda herhangi bir çizime ihtiyacı yokken farklı sayı adedi ve başlangıç sayısı alarak genellemeye gitmesi gerekmektedir.

Bu sorular ile öğrencilere aşağıdaki yönerge verilmiştir.

Sevgili öğrenciler, size sunduğumuz aşağıdaki sorular bilimsel bir araştırmada kullanılmak üzere değerlendirilecektir. Bizim araştırmamız için soruları doğru çözmenizden ziyade soruları çözerken nasıl düşündüğünüz ve nasıl bir yöntem kullandığınız önemlidir. Bu yüzden soruyu çözerken hangi aşamada ne düşünerek işlem yaptığınızı belirtmeniz faydalı olacaktır.

Bu yönergede öğrencilere çözerken nasıl çözdüklerine ve çözüm sürecine dair veri elde edileceğine dair açıklama yapılmıştır. Bu sayede düşündükleri çözümyöntemini detaylı açıklamaları beklenmiştir.

Veri toplama aracının her sayfasında bir soruya yer verilmiştir. Her kağıttabir soru sorulmasının amacı öğrencilerin sürece odaklanmalarına fırsat tanımaktır. Öğrencilere çözüm için ve yazabilecekleri, çizim yapabilecekleri yeterli alan verilmiştir. Veriler toplanırken zaman kısıtlaması yapılmamıştır. Soruların uzunluğu ve veri toplama sürecini etkilememesi için toplamda 3 sayfa olan veri toplama aracı 3 farklı günde uygulanmış ve sadece gönüllü olan öğrencilere uygulanmıştır. Öğrenciler çözmeleri için zorlanmamıştır. Bu nedenle sorulara katılım sayıları farklılık gösterebilmektedir. Veriler yazılı olarak toplanmıştır.

3.4. Araştırmanın Geçerlilik ve Güvenirliği

Veri toplama aracının geliştirilmesi ve geçerliliğini sağlamak için literatür taramasına, pilot uygulamaya ve uzman görüşlerinin değerlendirilmesine yer verilmiştir. Ayrıca çalışmanın geçerlilik ve güvenirliğini sağlamak için elde edilen verilerden alıntılar yapılmıştır. Örnek kodlama örneklerine yer verilmiştir. Çalışmaya katılan herbir öğrencinin kağıdındaki tümevarımsal muhakeme aşamalarının nasıl kodlandığı detaylı olarak açıklanmıştır. Güvenirlik için ise; takip edilen süreçler açık bir biçimde tanımlamıştır. Ayrıca araştırmanın veri kaynağı olan katılımcı öğrenciler açık bir biçimde tanımlanmıştır. Araştırmanın yöntemi, aşamaları, veri toplama ve analiz yöntemleri ile bulguları yorumlama ve sonuçlara ulaşma konusunda neler yapıldığı detaylı bir şekilde açıklanmıştır.

3.5. Verilerin Analizi

Yazılı olarak toplanan verilerin analizinde içerik analizi yapılmıştır. Veri analizi sürecinde her bir soru için aynı işlem adımları gerçekleştirilmiştir. Öncelikle öğrencilerin verdikleri cevaplar toplandıktan sonra 9, 10, 11 ve 12. sınıflara göre gruplandırılmıştır. Sonra her bir kağıda bir numara verilmiştir. Toplanan veriler tümevarımsal muhakeme aşamalarına (gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme, genellemenin testi) göre incelenmiştir. Verilerin analizi aşağıda detaylı açıklandığı gibi aşama aşama yapılmıştır.

Verilerin analizi yapılırken her soru ayrı ayrı incelenmiştir. Her soru içinde aynı işlem adımları takip edilmiştir. **1. aşamada** ilk sütun öğrenci numarasını diğer sütunlar ise tümevarımsal düşünme aşamalarını gösteren bir tablo oluşturulmuştur. Daha sonra bu tablo yardımı ile çalışmaya katılan her öğrenci için ilgili tümevarımsal muhakeme aşamasında sergilemiş olduğu davranış kodlanarak kaydedilmiştir.

2. aşamada ise 1. aşamada elde edilen tablolardan hareketle tümevarımsal düşünme aşamalarının her birinde sergilenen ve kodlanan işlem adımlarına göre frekans tablosu oluşturulmuştur. Kategoriler belirlenmiştir. Bu sayede ele alınan soruda, hem bir öğrencinin tümevarımsal muhakeme aşamalarında hangi işlemsel aracı sergilediği kayıt edilerek tüm öğrencilerin süreci tek tek özetle ortaya çıkarılmış hem de her bir sorudaki tümevarımsal muhakeme aşamalarında çalışmaya katılan tüm öğrencilerin sergilenen düşünceler ve işlemsel araçlar yüzde ve frekans ile tablo yapılarak açıklanmıştır. Yani elde edilen son tablolar hem yatay olarak öğrenciye göre hem de dikey olarak tüm sınıfa göre yorumlanmıştır.

Bu tablolar bulgular bölümünde Tablo6, Tablo7, Tablo8 olarak verilen tablolardır. Elde edilen bu tablolarda (Tablo6, Tablo7, Tablo8), kategoriler oluşturulurken tümevarımsal düşünmenin her bir aşamasında "başarılı" ve "başarısız" olmak üzere iki kategori oluşturulmuştur. Daha sonraki aşamada ise başarılı ve başarısız olarak kabul edilen işlemsel araçlar gruplandırılmıştır. Yine hangi kategorinin kaç öğrenci tarafından kullanıldığı hesaplanmıştır ve yüzdesi bulunmuştur.

Kibrit sorusu için veri analizi süreci aşağıda ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Bu soru için öğrencilerin verdikleri cevaplar toplandıktan sonra 9, 10, 11 ve 12. sınıflara ayrılmak üzere gruplandırılmıştır. Her bir kağıda bir numara verilmiştir. 1. Aşamada tümevarımsal muhakeme sürecinin aşamalarına göre oluşturulmuş tablo Tablo 2' de verildiği gibi kodlanmıştır. Bu tabloda ilk sütun öğrenci numarasını göstermektedir. Bu numaralar katılımcılar alt başlığı altında verilen Tablo 1'de açıklanmıştır. Diğer sütunlar ise, tümevarımsal muhakeme aşamalarındaki öğrencilerin sergiledikleri ve bulgular kısmında ayrıntılı olarak açıklanan düşünceler veya işlem araçlarına verilen numaralardır.

Öğrencinin kodu	gözlemleme	Gözlemlerin organizesi	yordama	Yordamanın testi	genelleme	Genellemenin testi
1	1.2	2.1	3.1	4.1	5.2	6.1
2	1.2	2.1	3.1	4.1	5.1	6.2
3	1.2	2.1	3.1	4.2	5.1	6.2
4	1.2	2.1	3.1	4.2	5.1	6.1

Tablo2. Kibrit çöpü sorusu için katılımcıların cevaplarının tümevarımsal muhakeme aşamalarındaki kodlamaları.

Tablo2 de verilen tablodan da görüldüğü gibi 1 olarak kodlanan öğrenci 1. Sorunun gözlemleme aşamasında 1.2. olarak kodlanan işlemsel adımı sergilemiştir. Öğrenci kodları bu şekilde tüm öğrenciler taranacak şekilde devam etmiştir. Bu kodlar öğrenciler tarafından verilen cevaplar doğrultusunda oluşturulmuştur. Veri analizi sonucunda her soru için farklı sayılarda kod oluşturulmuştur. Bulgular kısmında da detaylı olarak açıklanmıştır. Örneğin "1.1. Şeklin üstünde sayarak (şekilsel)" olmak üzere "Başarılı" kategorisine ait bir işlemsel araçtır. Tablo 2 yardımıyla bir öğrencinin aşamalardaki başarı durumları ve işlemsel araçları karşılaştırılabilmektedir.

Veri toplama aracında yer alan her bir sorunun veri analizi yapılırken kodlanan işlemsel adımları ayrıntılı olarak ayrı ayrı açıklanmıştır. Veri analizi için uzman görüşü alınarak aşağıda verilen Tablo3, Tablo4 ve Tablo5 oluşturulmuştur.

3.5.1.Kibrit Çöpü Sorusunun Kodlama Örneği

Çalışmada kullanılan kibrit çöpü sorusu aşağıda verilmiştir.

Aşağıdaki şekil her bir kenarı bir kibrit çöpü uzunluğundaki bitişik karelerden oluşmaktadır. Şekilde görüldüğü gibi 1 kare için 4 kibrit çöpü, 2 kare için 7 kibrit çöpü, 3 kare için 10 kibrit çöpü gerekmektedir.

a) Yan yana 14 kare yapmak için kaç kibrit çöpü gereklidir?

b) Yukarıdaki çözümü genelleyerek bir formüle ulaşabilir misiniz? Yani yan yana n tane kare yapmak için kaç kibrit çöpü gereklidir?

Görüldüğü gibi soruda 1., 2. ve 3. özel durumları görsel ile birlikte verilmiştir. Bu soruda öğrencinin bu özel durumlar için gözlem yapması, bir varsayımda bulunması ve genelleme yapması gerekmektedir. Yani sorunun a seçeneğindeyakın bir özel durum olan 14 kare için kullanılan kibrit çöpü sayısını ifade etmesi beklenirken b seçeneğinde ise herhangi bir durum için genelleme yapması, bir ilişkiyi bulması beklenmektedir. Bu soruda ilk özel durumda 1 kare verilmiştir ve 4 kibrit çöpü kullanılmıştır. 2. özel durumda ise ilk karenin yanına 3 kibrit çöpü eklenerek 2 kare elde edilmiş ve 3 kibrit çöpü artmıştır. 3. durumda ise yine 3 kibrit çöpü eklenerek 3 kare elde edilmiştir.

Tablo3. Kibrit çöpü sorusu için tümevarımsal muhakeme aşamalarındaki beklenen adımlar

	GÖZLEMLEME	GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	YORDAMA	GENELLEME
Verilen özel durumlar için	4=1+3	=1+3	=1+1(3)	
	7=4+3	=1+3+3	=1+2(3)	3n+1
	10=7+3	=1+3+3+3	=1+3(3)	4n-(n-1)
Verilmeyen özel durumlar için	13=10+3	=1+3+3+3+3	=1+4(3)	(n-1)3+4
	16=13+3	=1+3+3+3+3+3	=1+5(3)	
			=1+14(3)	

Gözlemleme aşamasında Şekil 2'den görüldüğü gibi öğrencinin bu özel durumları gözlemlemesi beklenmektedir. Bu gözlemlemeyi yaparken öğrenci Tablo 3'deki gibi ritmik artışı baz alarak yapabileceği gibi şekil üzerinde yazarak da yapabilir. Bu aşamada öğrenciler soruda verilen görseldeki gibi ilk 3 durumu alabileceği gibi daha çok durumda alabilir. Bu ise öğrencinin aldığı özel durum sayısını göstermektedir.

Gözlemlerin organizesi aşamasında da Tablo3'de görüldüğü gibi özel durumlar arasında bir ilişki kurması beklenmektedir. Bu ilişkiyi tablo ile gösterebileceği gibi alt alta da yazabilir. Şekil çizmeden yararlanılabileceği gibi tamamen şekilden bağımsız olarak sayılar arasındaki ilişki yardımıyla da yapılabilir. Yazarken işlemleri yapmadan açık açık yazılması gözlemlerin organize edilmesini kolaylaştırmaktadır. Öğrencinin 1. soru için karelerdeki her bir artışın kibrit çöpü sayısında 3 artışa karşılık geldiğini görmesi beklenmektedir.

Yordama aşamasında ise, öğrencinin ilişkiyi görmüş olması ya da yakın bir durum için ifade etmiş olması beklenmektedir. Sonuca ulaşmak yeterli değildir, sonuca bir tahminle ya da varsayımla daha az işlemle ulaşmak beklenmektedir. 1. soru için gözlemlerin organizesinde üçer artış olduğunu bulan öğrenci bu aşamada bir varsayımla işlemleri kısaltarak sonuca ulaşması beklenmektedir. Tablo3'de de görüldüğü gibi 1. soruda 14 kare için kullanılan kibrit çöpü sayısı $1 + 14.3 = 43$ formülüyle yordanmıştır. Bu aşamada henüz harfli ifadeye geçilmemiştir. Genelleme aşamasında da bahsedileceği gibi harfli ifadeye geçildiğinde bu yordama değil genelleme olacaktır.

Yordamanın testi aşamasında ise, öğrencinin bulduğu ilişkiyi özel durumlarda sağlanıp sağlanmadığını görmeye çalışması beklenmektedir. Verilen özel durum ile kontrol edilebildiği gibi verilmeyen bir özel durum bulunup bunun sonucu ile de kontrol edilebilir. Yani Tablo3'deki yordamada 14 yerine verilen özel durumlardan 2 yerleştirilmiş ve yine soruda verilen 7 sayısını verdiği görülmüştür. Bu şekilde yordamanın doğruluğu test edilmiştir. Çizerek de test edilebilir. 14 sayısı için 14 bitişik kare çizilerek kullanılan kibrit çöpü sayısı sayılarak kontrol edilebilir. Ya da verilmeyen başka bir özel durum için çizilerek kontrol edilebilir.

Genelleme aşamasında ise, yordama aşamasında bulunan ilişkiyi ifade edecek harfli değişken içeren doğru bir formül bulmaları beklenmektedir. Tablo3'de verildiği şekilde bu formülü $3n + 1$ olarak bulabilecekleri gibi $4n - (n - 1)$ ya da $(n - 1)3 + 4$ şeklinde de ifade edebilirler.

Genellemenin testi aşamasında da yordamanın testi aşamasındaki gibi kontrol edilmesi beklenmektedir. Yine benzer şekilde verilen özel bir durum ile kontrol edilebilir ya da verilmeyen bir özel durum bulunup bunun sonucu ile de kontrol edilebilir. Tablo3'de verilen özel durumlardan bir, iki ve üç ile test edilebilir. Ayrıca verilmeyen özel durumlar için de test edilebilir. Ancak burada dört kare için kullanılan kibrit çöpü sayısının on üç olduğunu farklı bir yöntemle de elde etmesi beklenmektedir ki test etme işlemi gerçekçi olsun. Bitişik dört kare çizilerek kullanılan kibrit çöpleri sayılabilir.

3.5.2. Ardışık Sayı Sorusunun Kodlama Örneği

Çalışmada kullanılan ardışık sayı sorusu aşağıda verilmiştir.

Bazı sayılar ardışık pozitif sayıların toplamı olarak ifade edilebilir.

Örneğin; 9=2+3+4, 11=5+6, 18=3+4+5+6

a) Verilen örnekler dışında siz de bir örnek veriniz.

b) Tam olarak hangi sayılar bu özelliğe sahiptir formüle genelleyiniz?

Görüldüğü gibi soruda ilk özel durum için ardışık üç sayıdan oluşan bir toplam örneği, ikinci özel durum için ardışık iki sayıdan oluşan bir toplam örneği ve üçüncü özel durum için ardışık dört sayıdan oluşan bir toplam örneği verilmiştir. Öncelikle öğrencinin bu özel durumlar için gözlem yapması ve kullanılan sayılar ile elde edilen toplam arasında bir ilişki bulması daha sonra da bir varsayımda bulunması gerekmektedir. Varsayımda bulunurken toplanan ardışık sayı adedine ve başlangıç sayısına dikkat etmesi gerekmektedir. Daha sonra buradan hareketle sorunun a seçeneğinde bu özel durumlardan en az birine örnek verilmesi beklenmektedir. Sorunun b seçeneğinde ise herhangi bir durum için genelleme yapılması beklenmektedir. Genellenen formülün hem sayı adedini hem de toplanan sayıların en azından ilkini değişken olarak içermesi gerekmektedir. Tablo 3'de gözlemleme, gözlemlerin organizesi ve yordama aşamasının kodlama örnekleri verilmektedir.

Tablo4. Ardışık sayı sorusu için gözlemleme, gözlemlerin organizesi ve yordama aşamaları

GÖZLEMLEME	GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	YORDAMA
$2+3+4=2+(2+1)+(2+2)$ $5+6=5+(5+1)$	$=2+2+2+(1+2)$ $=5+5+(1)$	$=3.2+(1+2)$ $=2.5+(1)$
$3+4+5+6=3+(3+1)+(3+2)+(3+3)$	$=3+3+3+3+(1+2+3)$	$=4.3+(1+2+3)$

Gözlemleme aşamasında öğrencinin verilen özel durumları aşağıdaki gibi gözlemlemesi beklenmektedir. Verilen ilk özel durum olan $9 = 2 + 3 + 4$ toplamı çözümleyerek sayılar arasında bir ilişki araması beklenmektedir. Çözümleme Tablo4'de örneklendirilmiştir. Gözlemleme aşamasında toplanan sayıları çözümleyerek arada ilişki bulunması beklenmektedir. Çözümleme işlemi büyük sayıları verilen küçük sayılar yardımıyla yeniden yazma şeklindedir.

Gözlemlerin organizesi aşamasında ise çözümlenmiş sayıların anlamlı bir şekilde gruplanması beklenmektedir. Burada işlemler uzun uzun yapılmaktadır. Tablo4'de örnek verilmiştir. Gözlemleme aşamasında çözümlenen sayılar anlamlı bir şekilde gruplandırılmıştır.

Yordama aşamasında ise gözlemlerin organizesi aşamasındaki sayıların daha kısa bir şekilde yazılması beklenmektedir. Burada bir çıkarımda bulunma vardır. Gözlemlerin organizesi aşamasındaki $2 + 2 + 2 + (1 + 2)$ açık cebirsel işlem yerine $3.2 + (1 + 2)$ yazılması ya da sözel olarak "üç tane iki ve üçün bir eksiği kadar birden başlayan ardışık sayıların toplamı" şeklinde ifade edilmesi beklenmektedir. Cebirsel ifadesinin örneği ise Tablo4'de mevcuttur. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n.(n+1)}{2}$, ardışık sayıların toplamı formülünü bilen öğrencilerin 3+4+5+6=18 özel durumu için

$$3 + 4 + 5 + 6 = 3 + (3 + 1) + (3 + 2) + (3 + 3) = 3 + 3 + 3 + 3 + (1 + 2 + 3)$$

$$= 4.3 + (1 + 2 + 3)$$

$$= 4.3 + 3.\frac{(3+1)}{2}$$

yazması beklenmektedir.

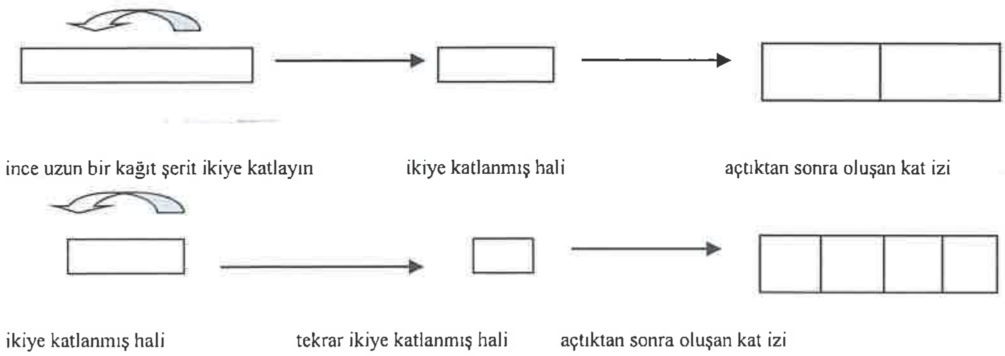
Yordamanın testi aşamasında ise, öğrencinin bulduğu ilişkiyi özel durumlarda sağlanıp sağlanmadığını görmeye çalışması beklenmektedir. Verilen özel durum ile kontrol edilebildiği gibi verilmeyen bir özel durum bulunup bunun sonucu ile de kontrol edilebilir. Tablo4'de verilen özel durumlar için elde ettiği sonucun ilk verilen sonuçla eşit olup olmadığı karşılaştırılabilir. Ya da öğrenci kendisi bir örnek oluşturup yordadığı şekilde de aynı sonucu verip vermediğini karşılaştırabilir. "üç tane iki ve üçün bir eksiği kadar birden başlayan ardışık sayıların toplamı" şeklinde yapılan yordamadanyararlanılırsa 10 dan başlayan dört tane ardışık sayının toplamı için dört tane on ve 1 den başlayarak dördün bir eksiği kadar ardışık sayının toplamı cebirselleştirilirse 4.10+(1+2+3) olur. Hatta $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ formülünden de yararlanarak $4.10 + \frac{3.4}{2}$ şeklinde yazılır. $4.10 + \frac{3.4}{2} = 46$ sonucu elde edilir. Toplanan sayılar açık açık yazılıp toplandığında da $10 + 11 + 12 + 13 = 46$ aynı sonuç bulunur. Bu veya benzer şekillerde yordamanın testinin yapılması beklenmektedir.

<u>Genelleme</u> aşamasında ise, yordama aşamasında bulunan ilişkiyi ifade edecek harfli değişken içeren doğru bir formül bulmaları beklenmektedir. Sözel olarak "Toplanan sayı kadar başlangıç sayısının ve toplanan sayının bir eksiği kadar birden başlayarak ardışık sayıların toplanması" şeklinde bir genellemede bulunulabilir. Toplanan sayı adedine m, başlangıç sayısına da n denirse $m. n + 1 + 2 + ... + (m - 1)$ formülünün elde edilmesi beklenmektedir. Yordama ile genelleme işlemleri birbiri ile iç içedir. Ayırmanın en kolay yolu genellemede her değer için sağlanacağından ötürü harfli değişkenin olmasıdır.

<u>Genellemenin testi</u> aşamasında da yordamanın testi aşamasındaki gibi kontrol edilmesi beklenmektedir. Yine benzer şekilde verilen özel bir durum ile kontrol edilebilir ya da verilmeyen bir özel durum bulunup bunun sonucu ile de kontrol edilebilir. Verilmeyen özel bir durum olduğunda aynı sonucun genelleme dışında bir yöntemle elde edilmesi gerekmektedir.

3.5.3. Katlama Sorusunun Kodlama Örneği

Çalışmada kullanılan katlama sorusu aşağıda verilmiştir.



Yukarıda modellendiği gibi ince uzun bir kağıt şerit olduğunu düşünün. Uçlarından tutun ve ikiye katlayın. Kağıdı bastırın ki kat izi belirginleşsin. Bu işlem sonucunda bir tane kat yeri oluşur. Kağıt üzerinde bir kez daha aynı işlemi tekrarlayın, bu sefer de 3 kat yeri oluşur.

a) Bu işlemi toplamda 10 kez yaparsanız kaç kat yeri oluşur?

b) Yukarıdaki çözümü genelleyerek bir formüle ulaşabilir misiniz?

Görüldüğü gibi soruda 1 için ve 2 için özel durumlar görsel ile birlikte verilmiştir. Öncelikle öğrencinin bu özel durumlar için gözlem yapması ve bir çıkarımda bulunması gerekmektedir. Daha sonra buradan hareketle sorunun a seçeneğinde yakın bir özel durum olan 10 katlama işlemi sonucunda elde edilecek kat izi sayısını ifade etmesi beklenmektedir. Sorunun b seçeneğinde ise herhangi bir durum için genelleme yapması, bir ilişki bulması beklenmektedir.

Tablo5. Kağıt katlama sorusu için gözlemleme, gözlemlerin organizesi ve yordama aşamaları

	GÖZLEMLEME	GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	YORDAMA	GENELLEME
Verilen özel durumlar için	1 kat, iki bölge 1 iz	2^1 bölge , 1 iz	2^1-1	
	2 kat, dört bölge 3 iz	2^2 bölge , 3 iz	2^2-1	
Verilmeyen özel durumlar için	3 kat, sekiz bölge 7 iz	2^3 bölge, 7 iz	2^3-1	2^n-1
	4 kat, on altı bölge 15 iz	2^4 bölge, 15 iz	2^4-1	
			$2^{10}-1$	

Gözlemleme aşamasında öğrencinin verilen özel durumları Tablo 5'deki gibi gözlemlemesi beklenmektedir. Tablo 5'den görüldüğü gibi ilk özel durumda 1 katlama için iki bölge ve bir kat izi, 2 katlamada dört bölge ve üç kat izi bulunmuştur. İz sayısının bir önceki bölge sayısı kadar arttığı söylenebilir. Verilmeyen özel durumlar için de gözlemleme yapılabilir. 3 kez katlama sonucunda 8 bölge ve toplamda 7 kat izi elde edilmektedir. Öğrencilerin istemeleri durumunda kendi elde ettikleri bir kağıt ile katlama yapmaları engellenmemiştir.

Gözlemlerin organizesi aşamasında ise bir önceki aşamada elde edilen sayıların anlamlı bir şekilde ilişkilendirilmesi beklenmektedir. Bu anlamlı ilişkilendirme Tablo 5'deki haliyle olabileceği gibi farklı da olabilir. Öğrencinin bölge sayısını katlama sayısı ile ilişkilendirmesi beklenmektedir. Burada işlemler uzun uzun yapılmaktadır. Gözlemlerin organizesi aşamasında gözlemleme aşamasındaki verilerden anlamlı bütün oluşturulması beklenmektedir. Katlama işleminin isminden de anlaşıldığı gibi her katlama işleminde kat sayısının bir eksiği kadar iz ve bölgenin kendisi kadar yeni bölge oluşmaktadır. Bu da artışın ikinin kuvvetleri şeklinde olacağı fikrini vermektedir.

Yordama aşamasında ise gözlemlerin organizesi aşamasındaki sayıların daha kısa bir şekilde yazılması beklenmektedir. Yordamada ise işlemleri pratikleştirerek kısaltması ve verilmeyen yakın bir adım için çıkarımda bulunması gerekmektedir. Burada bir çıkarımda bulunma vardır. Gözlemlerin organizesinde de bahsedildiği gibiher katlama işleminde kat sayısının bir eksiği kadar iz ve bölgenin kendisi kadar yeni bölge oluşmaktadır. Bu da artışın ikinin kuvvetleri şeklinde olacağı fikrini vermektedir. Buradan hareketle bir katlama için $2^1 - 1$, iki katlama için $2^2 - 1$, üç katlama için $2^3 - 1$ hatta 10 katlama için $2^{10} - 1$ yordamasını yapması beklenmektedir.

Yordamanın testi aşamasında ise, öğrencinin bulduğu ilişkiyi özel durumlarda sağlanıp sağlanmadığını görmeye çalışması beklenmektedir. Verilen özel durum ile kontrol edilebildiği gibi verilmeyen bir özel durum bulunup bunun sonucu ile de kontrol edilebilir. Tablo 5'de verilen özel durumlar için elde ettiği sonucun ilk verilen sonuçla eşit olup olmadığı karşılaştırılabilir. Ya da öğrenci kendisi bir örnek oluşturup yordadığı şekilde de aynı sonucu verip vermediğini karşılaştırabilir. Kağıt katlama sorusu için örnek oluşturmak zordur. Öğrenci katlama işlemini yaparak yordama sonucu ile karşılaştırabilir.

Genelleme aşamasında ise, yordama aşamasında bulunan ilişkiyi ifade edecek harfli değişken içeren doğru bir formül bulmaları beklenmektedir. Genelleme aşamasında ise her durum için sağlayan harfli değişken içeren $2^n - 1$ formülüne ulaşması beklenmektedir.

Genellemenin testi aşamasında da yordamanın testi aşamasındaki gibi kontrol edilmesi beklenmektedir. Benzer şekilde verilen özel bir durum ile kontrol edilebilir ya da verilmeyen bir özel durum bulunup bunun sonucu ile de kontrol edilebilir. Burada da yordamanın testindeki gibi test etme işlemi zordur. Öğrenci katlama işlemini yaparak genelleme sonucu ile karşılaştırabilir. Yordamanın testindeki sayıyı kullanarak aynı şekilde de test edebilir ancak bunu ifade etmesi beklenmektedir.

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUM

4.1. Kibrit Çöpü Sorusundan Elde Edilen Bulgular

Kibrit çöpü sorusu iki aşamalıdır. İlk seçenekte yakın bir duruma ikinci seçenekte ise herhangi bir duruma genelleme yapmaları istenmektedir. Kibrit çöpü sorusu için Tümevarımsal muhakemenin aşamalarına ilişkin bulgular Tablo6'da özetlenmiştir.

Tablo6. Kibrit çöpü sorusuna ait analiz tablosu

TÜMEVARIMSAL MUHAKEME AŞAMALARI	**BAŞARI DURUMU**	**SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR**	**Sınıflara göre frekans, f (yüzde, %)**				
			9.sınıf (37)	10.sınıf (54)	11.sınıf (61)	12.sınıf (36)	Toplam (188)
1.GÖZLEMLEME	Başarılı	**1.1.** Şeklin üstünde sayarak (şekilsel)	15 (%41)	9 (%17)	8 (%13)	4 (%11)	36 (%19)
		1.2. Ritmik artışı baz alarak (cebirsel)	10 (%27)	27 (%50)	30 (%49)	17 (%47)	84 (%45)
		1.3. hem şeklin üstünde sayarak hem de ritmik artışa göre (Şekilsel+ cebirsel)	0 (%0)	2 (%4)	3 (%5)	4 (%11)	9 (%5)
	Başarısız	**1.4** boş	12 (%32)	16 (%30)	20 (%33)	11 (%31)	59 (%31)
2.GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	**Başarılı**	**2.1.** sistematikleştirenler	27 (%73)	46 (%85)	57 (%93)	28 (%78)	158 (%84)
	Başarısız	**2.2.** sistematikleştiremeyenler	10 (%27)	8 (%15)	4 (%7)	8 (%22)	30 (%16)
3.YORDAMA	**Başarılı**	**3.1.** $1 + 14.3$	28 (%76)	50 (%93)	57 (%93)	34 (%94)	169 (%90)
	Başarısız	**3.2.** verilmeyen özel durumu kestirememe	9 (%24)	4 (%7)	4 (%7)	2 (%6)	19 (%10)
4.YORDAMANIN TESTİ	**Başarılı**	**4.1.** kontrol	5 (%14)	2 (%4)	18 (%30)	4 (%11)	29 (%15)
	Başarısız	**4.2.** boş	32 (%86)	52 (%96)	43 (%70)	32 (%89)	159 (%85)
5.GENELLEME	**Başarılı**	**5.1.**$(3n + 1)$ formülüne genelleme	10 (%27)	26 (%48)	52 (%85)	0 (%0)	88 (%47)
		5.2.$(4n) - (n - 1)$ formülüne genelleme	2 (%5)	5 (%9)	2 (%3)	22 (%61)	31 (%16)
		5.3.$(n - 1)3 + 4$ formülüne genelleme	1 (%3)	7 (%13)	0 (%0)	3 (%8)	11 (%6)
	Başarısız	**5.4.** Yanlış formüle genelleme	11 (%30)	8 (%15)	3 (%5)	1 (%3)	23 (%12)
		5.5. Boş	13 (%35)	8 (%15)	4 (%7)	10 (%28)	35 (%19)
6.GENELLEMENİN TESTİ	**Başarılı**	**6.1.** Doğru kontrol	3 (%8)	11 (%20)	18 (%30)	2 (%6)	34 (%18)
	Başarısız	**6.2.** boş	34 (%92)	43 (%80)	43 (%70)	34 (%94)	154 (%82)

**Tablo6'da yüzdeler alınırken yapılan yuvarlamadan ötürü bir aşamadaki toplam durum %101, %100 ve %99 gelebilmektedir. Bu durum yuvarlamadan kaynaklanmaktadır ve göz ardı edilmiştir.*

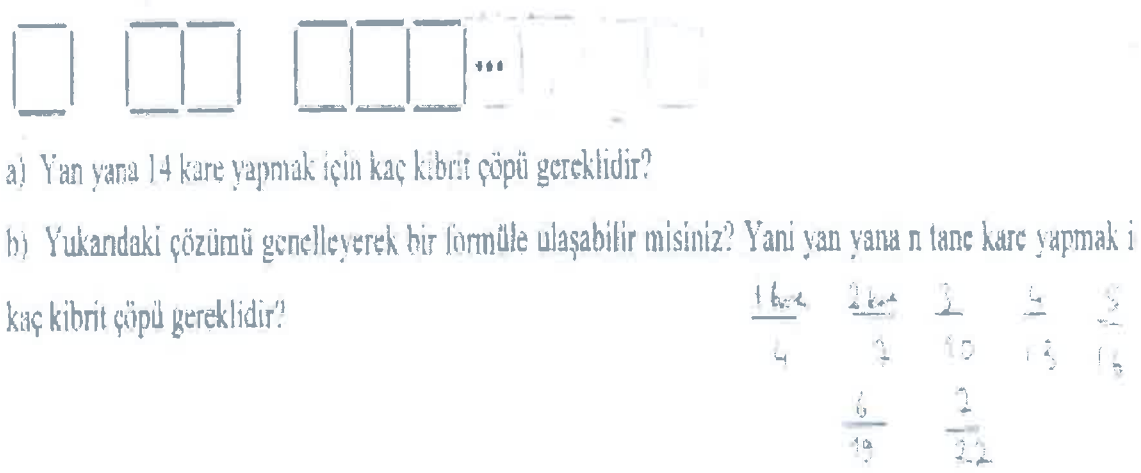
4.1.1. Gözlemleme Aşaması

Tablo 6'dan görüldüğü gibi "Gözlemleme" aşaması başarılı ve başarısız olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. "Başarılı" kategorisi "1.1.Şeklin üstünde sayarak (şekilsel)", "1.2. Ritmik artışı baz alarak (cebirsel)", "1.3. Şeklin üstünde sayarak ve ritmik artışı baz alarak (şekilsel ve cebirsel)" olmak üzere üç alt başlıkta toplanmıştır. "Başarısız" kategorisi de "1.4. boş" olmak üzere tek alt kategoridir.

Tablo 6'dan görüldüğü gibi tümevarımsal muhakemenin gözlemleme aşamasında işlemsel adıma göre; çalışmaya katılan öğrencilerin çoğunluğu yani %45'i "Ritmik artışı baz alarak (cebirsel)" kategorisinde cevap vermişlerdir. 9. Sınıflar en çok şeklin üstüne sayarak cevap verirken 10,11 ve 12. Sınıflar en çok ritmik artışı baz alarak cevap vermişlerdir. Diğer bir ifade ile şekilsel düşünmenin alt sınıflarda daha çok tercih edildiği ve üst sınıflara doğru azaldığı Tablo 6'dan görülmektedir. Soruyu somutlaştırmak için şekil çizdikleri düşünülürse üst sınıfların alt sınıflara göre daha soyut düşünebildiği ve şekle daha az ihtiyaç duydukları söylenebilir. Ayrıca ritmik artışı baz alarak düşünmeyi 9. sınıf öğrencileri en az kullanırken 10. sınıf öğrencileri en yüksek seviyede; 11 ve 12. sınıf öğrencileri ise ortalamanın üstünde tercih etmiştir. En az kullanılan gözlemleme işlemi hem şeklin üstünde sayarak hem de ritmik artışa göre (Şekilsel+ cebirsel) olarak kodlanmıştır ve 9. sınıflar hiç kullanmamışlardır.

Diğer taraftan sınıfa göre ise çalışmaya katılan 9. sınıf öğrencileri en fazla (%41) "Şeklin üstünde sayarak (şekilsel)" kategorisinde cevap vermişlerdir. Fakat çalışmaya katılan 10, 11, ve 12. sınıf öğrencileri en fazla "Ritmik artışı baz alarak (cebirsel)" kategorisinde cevap vermişlerdir. 10. sınıf öğrencilerinde bu oran %50 iken 11. sınıf öğrencilerinde %49, 12. sınıf öğrencilerin de %47'dir. Bu bulgu 9. sınıfta şeklin üstüne sayarak gözlem yaparken daha ilerideki sınıflarda ritmik artışın baz alınarak yapıldığı şeklinde yorumlanabilir.

"*1.1. Şeklin üstünde sayarak (şekilsel)*" kategorisine ait bir örnek Şekil 2'de verilmiştir.

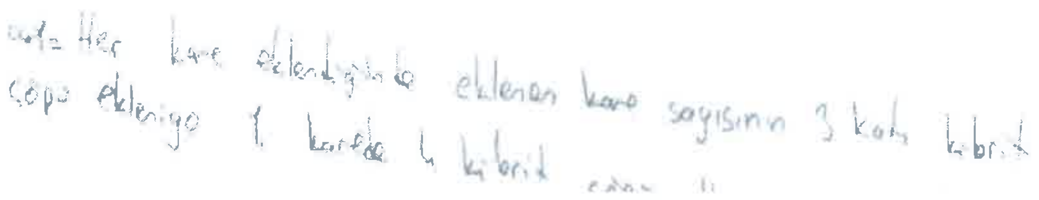


Şekil 2. Şeklin üstünde sayarak (şekilsel) yapılan bir çözüm örneği

Bu kategoride cevap veren öğrenciler, verilen şekildeki karelerdeki kibrit çöplerini saymışlar ve Şekil 2'deki gibi birinci adımda bir karede kullanılan kibrit çöpü sayısının 4, ikinci adımda bulunan iki karede kullanılan kibrit çöpü sayısının 7 ve üçüncü adımda üç karede kullanılan kibrit çöpü sayısının 10 olduğu şeklinde devam etmişlerdir.

Tablo 6'dan görüldüğü gibi 9. sınıflardan 15 (%41) öğrenci, 10. sınıflardan 9 (%17) öğrenci, 11. sınıflardan 8 (%13) öğrenci, 12. sınıflardan 4 (%11) öğrenci ve toplamda da 36 (%19) öğrenci gözlemleme aşamasında bu işlemi yapmıştır. Bu şekilde şekilsel düşünmenin alt sınıflarda daha çok tercih edildiği ve üst sınıflara doğru azaldığı Tablo 6'dan görülmektedir. Soruyu somutlaştırmak için şekil çizdikleri düşünülürse üst sınıfların alt sınıflara göre daha soyut düşünebildiği ve şekle daha az ihtiyaç duydukları söylenebilir.

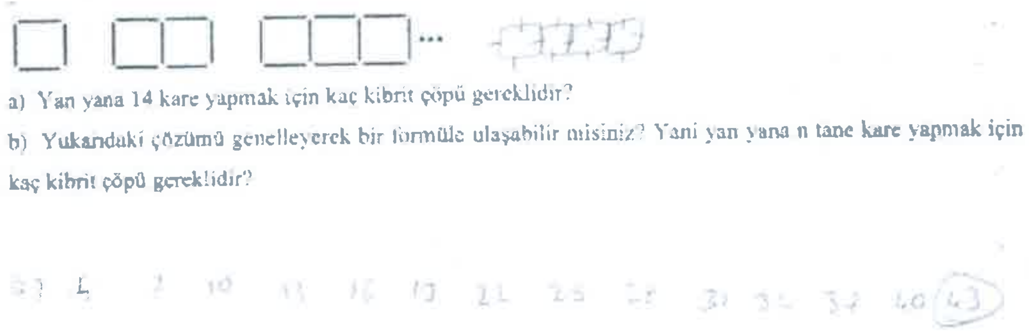
1.2. "Ritmik artışı baz alarak (cebirsel)" kategorisine ait bir örnek Şekil 3'de verilmiştir.



Şekil 3. Ritmik artışı baz alarak (cebirsel) yapılan bir çözüm örneği

Bu kategorideki çözümlerde öğrenciler, özel durumlar arasındaki artışın üçer ritmik olduğuna odaklanmışlardır. Bu cevaplar sözel (şekil 3) veya cebirsel ifade edilmiştir. Tablo 6'dan görüldüğü gibi 9. sınıflardan 10 (%27) öğrenci, 10. sınıflardan 27 (%50) öğrenci, 11. sınıflardan 30 (%49) öğrenci, 12. sınıflardan 17 (%47) öğrenci ve toplamda da 84 (%45) öğrenci gözlemlemeyi bu şekilde yapmıştır. Bu şekilde düşünmeyi 9. sınıf öğrencileri en az kullanırken 10. sınıf öğrencileri en yüksek seviyede; 11 ve 12. sınıf öğrencileri ise ortalamanın üstünde tercih etmiştir.

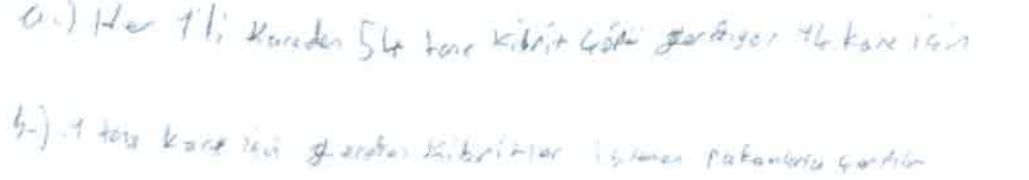
1.3. "Hem şeklin üstünde sayarak hem de ritmik artışa göre (Şekilsel+ cebirsel)" kategorisine ait bir örnek Şekil 4'de verilmiştir.



Şekil 4. Hem şeklin üstünde sayarak hem de ritmik artışa göre (Şekilsel+ cebirsel) yapılan bir çözüm örneği

Bu kategoride cevap veren öğrenciler diğer iki kategoriyi birlikte kullanmışlardır. Hem şekilden hem de artış miktarından faydalanmışlardır. Şekil 4'de görüldüğü gibi bir karede kullanılan 4 kibrit çöpü, iki karede kullanılan 7 kibrit çöpü ve üç karede kullanılan 10 kibrit çöpü olduğunu sayarak bulmuş hatta bir sonraki adımı bulabilmek için şekil çizmişlerdir. 4,7,10,13 olan kibrit çöpleri sayılarındaki üçer ritmik artışı farketmiş ve bu artışa odaklanmışlardır ve bu kullanılarak çözüme devam edilmiştir. Tablo 6'ya göre 9. sınıflardan 0 (%0) öğrenci, 10. sınıflardan 2 (%4) öğrenci, 11. sınıflardan 3 (%5) öğrenci, 12. sınıflardan 4 (%11) öğrenci ve toplamda da 9 (%5) öğrenci gözlemleme aşamasında bu işlemi kullanmıştır. En az kullanılan gözlemleme işlemdir. 9. sınıflar hiç kullanmamışlardır.

*1.4. " boş"*kategorisine ait bir örnek Şekil 5' de verilmiştir.



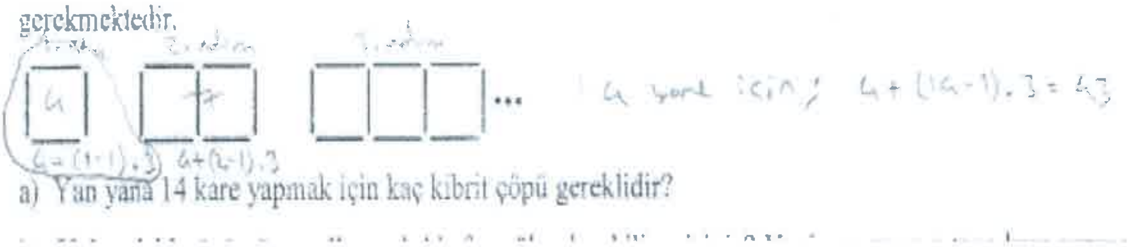
Şekil 5. Boş kategorisindeki bir çözüm örneği

Gözlemleme aşamasında yanlış anlaşılan ve boş bırakılan sorular başarısız sayılmıştır. Öğrenciler soruyu boş bırakabilecekleri gibi soruyu cevaplayıp ilgili aşamayı da boş bırakmış olabilir. Şekil 5'de öğrenci soruya doğru ya da yanlış cevap vermiş ancak gözlemleme aşamasını boş bırakmıştır. Tablo 6'ya göre 9. sınıflardan 12 (%32) öğrenci, 10. sınıflardan 16 (%30) öğrenci, 11. sınıflardan 20 (%33) öğrenci, 12. sınıflardan 11 (%31) öğrenci ve toplamda da 59 (%31) öğrenci boş bırakmıştır. 1 kare için 4 kibrit çöpü kullanılırsa 14 kare için 14.4 = 56 kibrit çöpü kullanılacağını düşünenler olmuştur.1'e 4, 2 ye 7, 3 e 10 ise 14'e kaç olur diye doğru orantıyı deneyenler olmuştur. Bu aşamayı boş bıraktıktan sonra doğru genellemeyi yapanlar da vardır. Bu öğrencilerin gözlemleme aşamasında kalem kullanmadıkları için gözlemlemede nasıl bir yöntem izledikleri bilinememektedir. 9'dan 10'a düşüş 10'dan11'e artış11'den 12'ye yeniden bir düşüş vardır. İlk sırada 11'ler varken son sıra 10. sınıflarındır.

4.1.2. Gözlemlerin Organizesi Aşaması

Gözlemlerin organizesi aşamasında ise çalışmaya katılan öğrencilerin çoğunluğu (%84) sonraki bir adıma ilerletebilmişlerdir. Bunu yapamayan öğrencilerin çoğunluğunun (%27) 9. Sınıfta olduğu görülmektedir. Ayrıca bu oran Tablo 6'ya göre 9. sınıfta en fazla iken 11. sınıfa doğru azalmakta iken 12. sınıfta yeniden arttığı da görülmektedir. Gözlemlerin organizesi aşamasında verilmeyen bir adıma ilerletebilenler başarılı ilerletemeyenler başarısız sayılmaktadır.

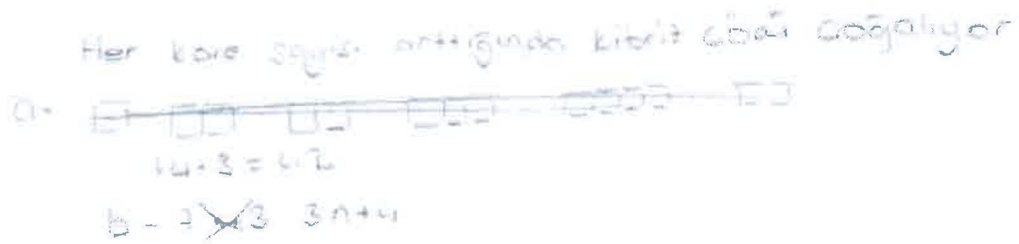
"2.1. sistematikleştirenler" kategorisine ait bir örnek Şekil 6' da verilmiştir.



Şekil 6. sistematikleştirenler için bir çözüm örneği

Gözlemleme aşamasında 1. adım 1 kare 4 kibrit çöpü $4 + (1 - 1).3$ ve 2. adım 2 kare 7 kibrit çöpü $4 + (2 - 1).3$ olarak gözlemlenmiş ve gözlemlerin organizesi aşamasında 14 kare için $4 + (14 - 1).3 = 43$ şeklinde sistematikleştirdikleri görülmektedir. Tablo 6'ya göre 9. sınıflardan 27 (%73) öğrenci, 10. sınıflardan 46 (%85) öğrenci, 11. sınıflardan 57 (%93) öğrenci, 12. sınıflardan 28 (%78) öğrenci ve toplamda da 158 (%84) öğrenci gözlemleme aşamasında bu işlemi kullanmıştır. 9, 10, 11. sınıflarda artış varken 12. sınıflar da düşüş gözlemlenmiştir.

"2.2. sistematikleştiremeyenler" kategorisine ait bir örnek Şekil 7'de verilmiştir.



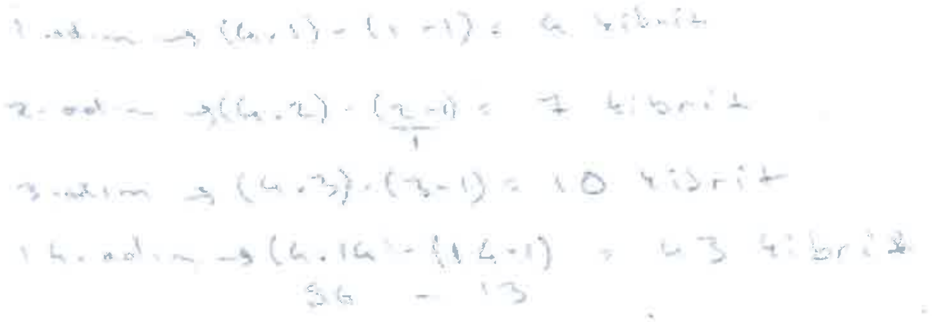
Şekil 7. sistematikleştiremeyenler için bir çözüm örneği

Burada öğrenci gözlemleme aşamasında şekilsel gözlemleme yapmış ancak yaptığı bu çizimden memnun olamayarak üstünü karalamıştır. Herhangi ibr sistematikleştirme gözlemlenememiştir. Tablo 6'ya göre 9. sınıflardan 10 (%27) öğrenci, 10. sınıflardan 8 (%15) öğrenci, 11. sınıflardan 4 (%7) öğrenci, 12. sınıflardan 8 (%22) öğrenci ve toplamda da 30 (%16) öğrenci gözlemlerin organizesi aşamasında sistematikleştirememişlerdir. Üst sınıflara doğru azalma gözlemlenmiş ve 12. sınıflar yine bunu bozmuştur.

4.1.3. Yordama Aşaması

14 kare için kullanılacak kibrit çöpü sayısını 43 bulanlar yordama aşamasında başarılı sayılmışlardır. Burada öğrencilerin sonraki adımı bulabilmeleri hatta biraz uzak adımı kestirebilmeleri beklenmiştir. Yordama aşamasında bazı öğrenciler sözel açıklamada bulunmuşlardır. Üçer artış olduğunu, istenen kare sayısının bir eksiğinin üç ile çarpılması gerektiğini yazmışlardır. Bazı öğrencilerde her kare için dörtle çarpılması gerektiğini sonra da ortak olan çöplerin yani kare sayısının bir eksiğinin çıkarılması gerektiğini görmüşlerdir. Bunları sözel olarak yazarak ifade etmişlerdir.

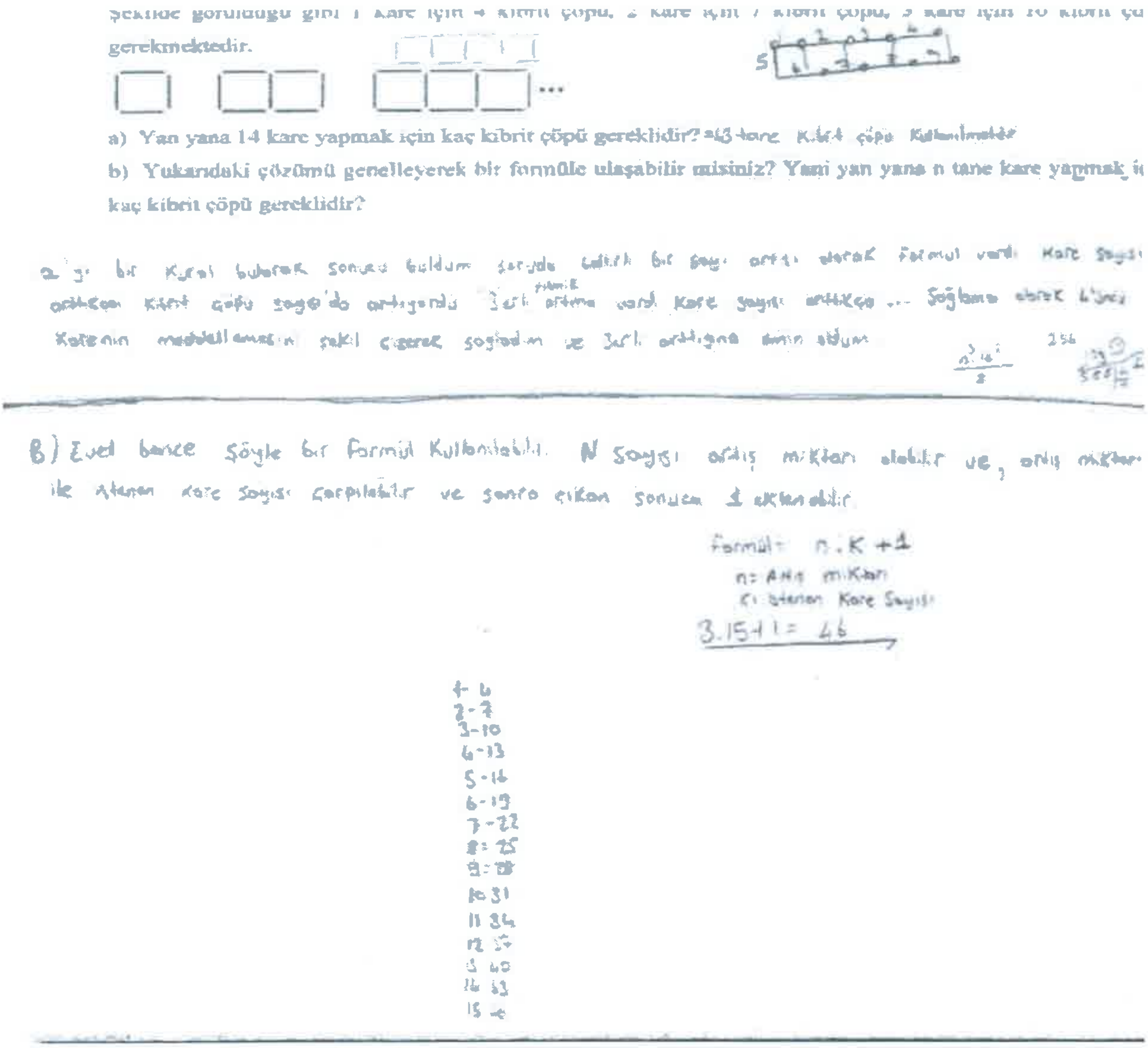
"3.1. 14 kare için gerekli kibrit çöpünü 14 bulma" kategorisine ait bir örnek Şekil 8'de verilmiştir.



Şekil 8. 14 kare için kibrit çöpü sayısını 43 bulabilen başarılı bir çözüm örneği

Şekil 8'de verilen örnekte başarılı bir şekilde yordama yapılmıştır. Soruda verilen 3 adımı başarılı bir şekilde gözlemlemiş ve gözlemlediklerini cebirsel ifade ederek organize etmiş ve verilmeyen bir adım olan 14. adıma yordanmıştır. Bu yordama test edilmemiş hemen genellenmiş ve yine bu genelleme test edilmemiştir. 1. sorunun a şıkkının cevabını 43 bulamayanlar yordama aşamasında başarısız sayılmışlardır. Yordamada da istenen bir adımı kestirebilme vardır. Tablo 6'ya göre 9. sınıflardan 28 (%76) öğrenci, 10. sınıflardan 50 (%93) öğrenci, 11. sınıflardan 57 (%93) öğrenci, 12. sınıflardan 34 (%94) öğrenci ve toplamda da 169 (%90) öğrenci başarılı olmuştur. Üst sınıflara doğru azalmama gözlenmiştir. Ya artmış ya da sabit kalmıştır. 12. sınıflar %94 ile ilk sıradadır. 9. sınıflar ise % 76 ile sondadır.

"3.2. 14 kare için 43 e ulaşamama" kategorisine ait bir örnek Şekil 9' da verilmiştir.



Şekil 9. 14 kare için 43 sayısına ulaşamayan başarısız bir çözüm örneği

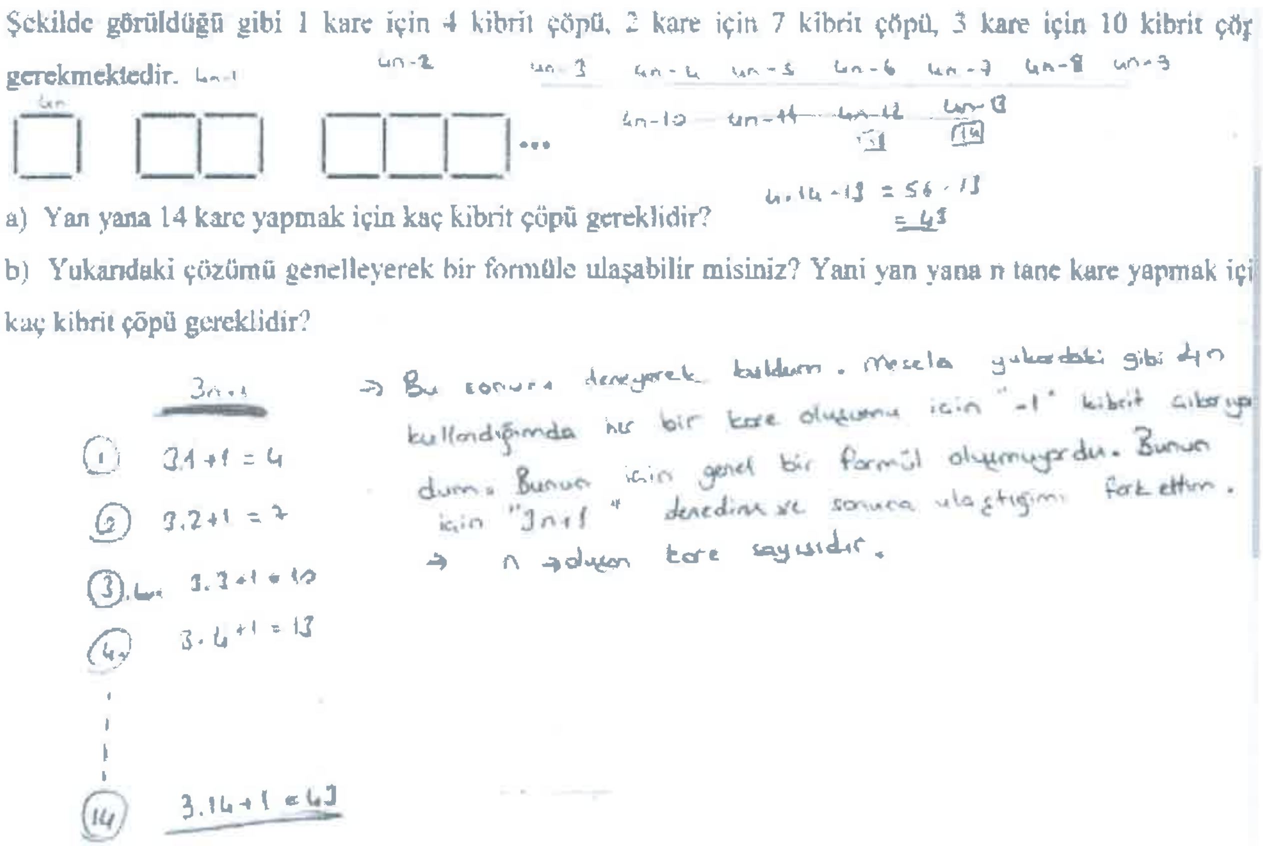
14 kare için gerekli olan 43 kibrit çöpü sayısına ulaşamayan öğrenciler bu aşamada başarısız sayılmışlardır. Burada öğrenci bir sonraki adıma şekil çizerek ulaşmış ama bunu bir kaç adım sonrası için kestirememiştir. Doğru adımları yazmak için hep bir önceki adıma ihtiyaç duymuştur. Tablo 6'ya göre 9. sınıflardan 9 (%24) öğrenci, 10. sınıflardan 4 (%7) öğrenci, 11. sınıflardan 4 (%7) öğrenci, 12. sınıflardan 2 (%6) öğrenci ve toplamda da 19 (%10) öğrenci başarısız olmuştur.

Üst sınıflara doğru artmamış, ya azalmış ya da sabit kalmıştır. En yüksek 9. sınıflarken en düşük 12. sınıflardır. 10 ve 11. sınıflar eşittir.

4.1.4. Yordamanın Testi Aşaması

Yordama aşamasında elde edilen 43 sayısını başka bir yoldan da elde ederek kontrol edenler bu aşamada başarılı sayılmışlardır. Yordama yapmadan formüle genelleyenler de olmuştur. Bunlar yordamanın testini de yapmamışlardır. Genellemenin testini yapmışlardır. Karıştırmamak gerekmektedir.Yordamanın testi "4.1. kontrol" *ve* "4.2. boş" kategorilerinden oluşmaktadır.

"4.1. kontrol" kategorisine ait bir örnek Şekil 10' da verilmiştir.

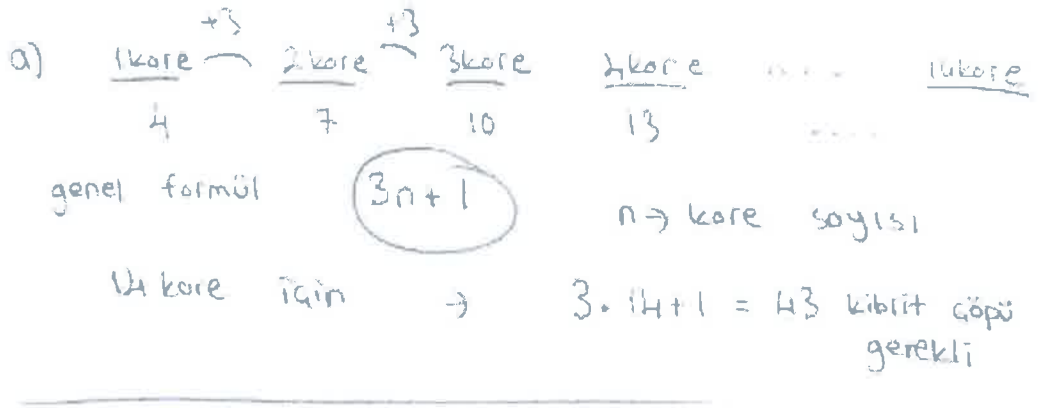


Şekil 10. kontrol kategorisinde başarılı bir çözüm örneği

$4n - (n - 1)$formülüyle yordamış 43'ü bulmuş ve sonra da $3n + 1$ formülüyle yeniden 43 bularak yordamanın testini yapmıştır. Tablo 6'ya göre 9. sınıflardan 5 (%14) öğrenci, 10. sınıflardan 2 (%4) öğrenci, 11. sınıflardan 18 (%30) öğrenci,

12. sınıflardan 4 (%11) öğrenci ve toplamda da 29 (%15) öğrenci bu aşamada başarılı olmuştur. Sınıflar arasında düzensiz seyretmiştir. 9'dan 10'a azalmış 11'e artmış ve 12'ye tekrar azalmıştır. En başarılı sınıf 11'ler iken en az başarılı da 10. sınıflardır.

"4.2. boş" kategorisine ait bir örnek Şekil 11'de verilmiştir.



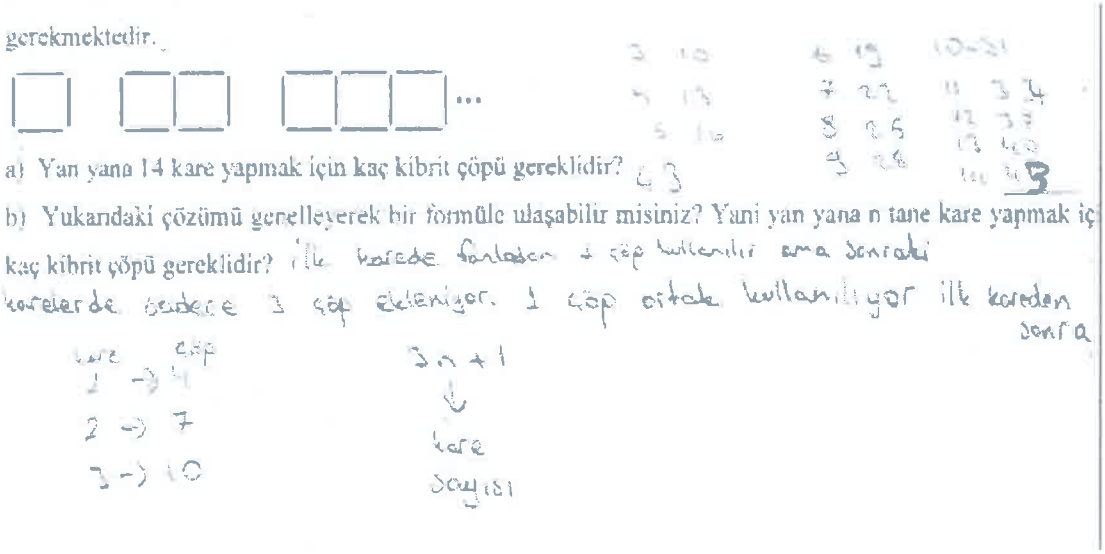
Şekil 11. boş kategorisine ait bir çözüm örneği

Öğrenci burada 4 adımdan sonra 14. adımın nasıl olabileceğini kestirmiş ama bunu test etmemiştir. İşlem hatası yapmış olsa ya da yordamayı yanlış yapmış olsa bunun farkına varılamayacaktır. Öğrenciler soruyu boş bırakabilecekleri gibi soruyu cevaplayıp ilgili aşamayı da boş bırakmış olabilir. Şekil 11'de öğrenci soruya doğru ya da yanlış cevap vermiş ancak yordamanın testi aşamasını boş bırakmıştır. Tablo 6'ya göre 9. sınıflardan 32 (%86) öğrenci, 10. sınıflardan 52 (%96) öğrenci, 11. sınıflardan 43 (%70) öğrenci, 12. sınıflardan 32 (%89) öğrenci ve toplamda da 159 (%85) öğrenci bu aşamada başarısız olmuştur. Sınıflar arasında düzensiz seyretmiştir. En yüksek 10'lar en düşük 11'lerdir. 9'dan10'a artmış 11'e azalmış ve 12'ye tekrar artmıştır.

4.1.5. Genelleme Aşaması

Genelleme aşaması da başarılı ve başarısız olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Başarılılar da doğru formüle "5.1. $3n + 1$ formülüne ekleyerek genelleme", "5.2. $(4n) - (n - 1)$ formülüne çıkararak genelleme", "5.3.$(n - 1)3 + 4$'e genelleme", "5.4. yanlış formüle genelleme" ve "5.5. boş" olmak üzere beş alt başlığa ayrılmaktadır. Her bir aşama örneklendirilerek açıklanmıştır.

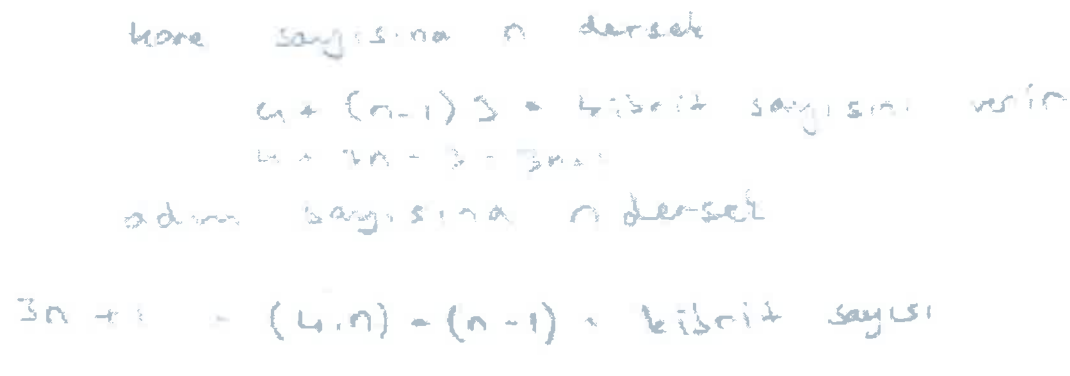
"5.1. (3n + 1) formülüne genelleme" kategorisine ait bir örnek Şekil 12'de verilmiştir.



Şekil 12. ($3n + 1$) formülüne genellemeyi gösteren bir çözüm örneği

"5.1. $3n + 1$ formülüne ekleyerek genelleme" aşamasında kibrit çöplerindeki üçer artışa odaklananlar bu kategoride toplanmıştır. Bu öğrenciler bütüne genişletmişlerdir. Parçadan bütüne varmışlardır ve aradaki ekleme işlemini çarpma yardımıyla kısaltmışlardır. Hatta buradaki öğrenciler kareleri yan yatmış u gibi düşünmüşler son kareden sonra 1 kapak ekleyerek tüm kareleri tamamlamışlardır. Öğrenciler burada sayarken ilk kareyi 4, sonraki her kareyi 3 olarak almışlar ve bu şekilde genellemişlerdir. Tablo 6'ya göre 9. sınıflardan 10 (%27) öğrenci, 10. sınıflardan 26 (%48) öğrenci, 11. sınıflardan 52 (%85) öğrenci, 12. sınıflardan 0 (%0) öğrenci ve toplamda da 88 (%47) öğrenci bu aşamayı kullanmıştır. Sınıflar arasında düzensiz seyretmiştir. En yüksek 11'ler en düşük 12'lerdir. 9'dan 11'e artmış 12'de ani bir düşüşle sıfırlanmıştır.

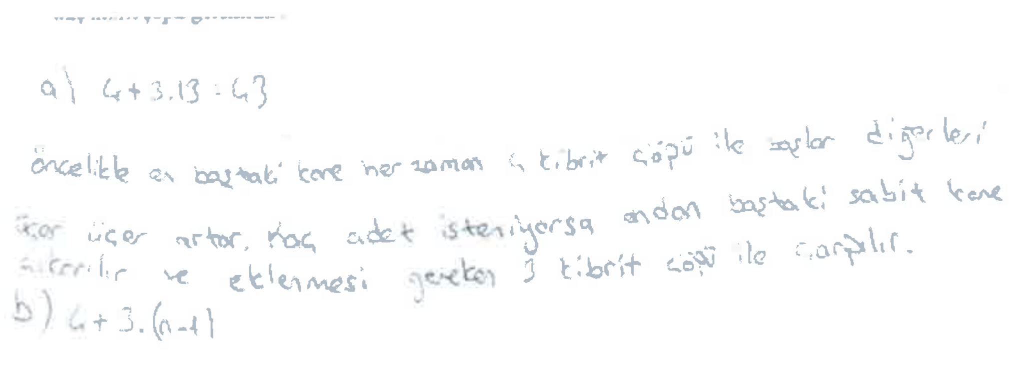
"5.2. (4n) − (n − 1) formülüne genelleme" kategorisine ait bir örnek Şekil 13' de verilmiştir.



Şekil 13.$(4n) - (n-1)$ formülüne genellemeyi gösteren bir çözüm örneği

"5.2. $(4n) - (n-1)$ formülüne çıkararak genelleme" aşamasında ise bütünden eksiltme yapılmıştır. Her kare için dört çöp kullanılmış aradaki ortak çöpleri çıkarılmıştır. Ortak çöp sayısının da kullanılan karenin bir eksiği ile eşit olduğu farkedilmiştir. Tablo 6'ya göre 9. sınıflardan 2 (%5) öğrenci, 10. sınıflardan 5 (%9) öğrenci, 11. sınıflardan 2 (%3) öğrenci, 12. sınıflardan 22 (%61) öğrenci ve toplamda da 31 (%16) öğrenci bu aşamada genelleme yapmışlardır. En yüksek 12'ler en düşük 11'lerdir. 9'dan 11'e kadar azalmış 12'de ani bir şekilde artmıştır.

"5.3. $(n-1)3+4$ formülüne genelleme" kategorisine ait bir örnek Şekil 14'de verilmiştir.



Şekil 14. $(n-1)3+4$ e genellemeyi gösteren bir örnek

5.3. $(n-1)3+4$ e genelleme 5.1. deki genelleme ile aynı gibi görünse de fark vardır. 5.1. de kare sayısı kadar 3'el ekleniyorken burada ilk kare bütün yani 4 çöpten oluşturulmuş sonraki kareler için 3'er çöp eklenmiştir. Burada kullanılan karelerin 1 eksiği kadar 3 eklenmiştir. Tablo 6'ya göre 9. sınıflardan 1 (%3) öğrenci, 10. sınıflardan 7 (%13) öğrenci, 11. sınıflardan 0 (%0) öğrenci, 12.

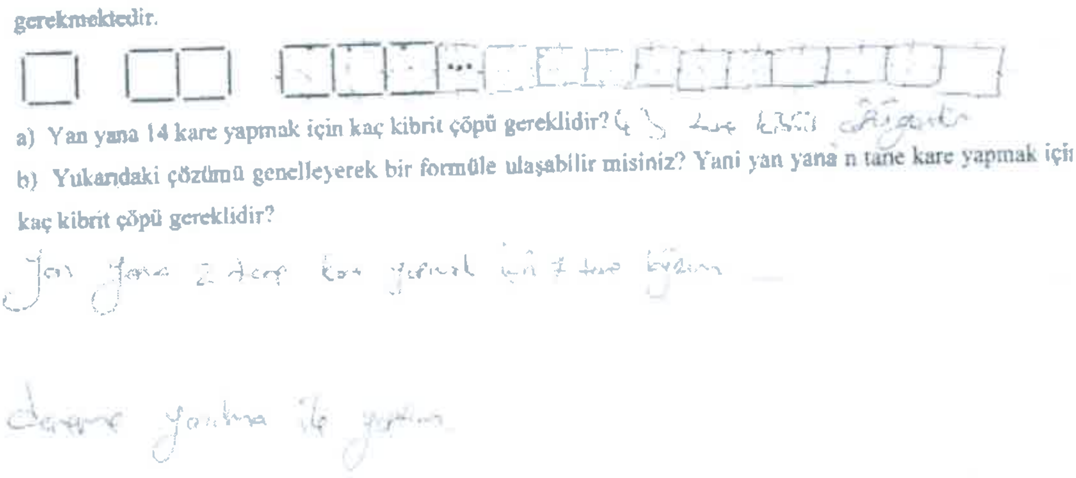
sınıflardan 3 (%8) öğrenci ve toplamda da 11 (%6) öğrenci bu işlemleri yapmıştır. Az tercih edilen bir genelleme olduğu bulgular arasındadır. 9. sınıftan 10. sınıfa artmış 11. sınıfta ani bir düşüşle sıfırlanmış ve 12'de yeniden artmıştır.

"5.4. yanlış formüle genelleme" kategorisine ait bir örnek Şekil 15' de verilmiştir.

Şekil 15. yanlış formüle genellemeyi gösteren bir çözüm örneği

5.4. yanlış formüle genelleme aşamasında yanlış formüle genelleyenler bulunmaktadır. $2n + 2$ ve $2^n + 3$ formüllerine genellenmiştir. Örnekteki öğrenci bu genellemelerin yanlış olduğunu farketmiştir. Tablo 6'ya göre 9. sınıflardan 11 (%30) öğrenci, 10. sınıflardan 8 (%15) öğrenci, 11. sınıflardan 3 (%5) öğrenci, 12. sınıflardan 1 (%3) öğrenci ve toplamda da 23 (%12) öğrenci bu işlemleri yapmıştır. Elde edilen bulgulardan biri üst sınıflara doğru bu aşamanın azaldığıdır. En çok yanlış genelleyenler 9. sınıf öğrencileriyken en az yanlış genelleyenler 12. sınıf öğrencileridir.

"5.5. boş" kategorisine ait bir örnek Şekil 16' da verilmiştir.



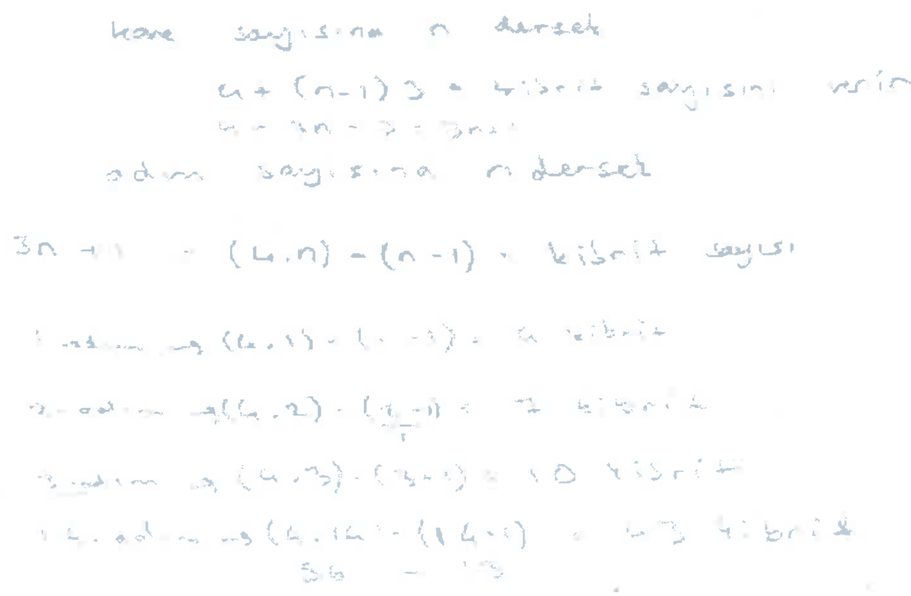
Şekil 16. boş kategorisini gösteren bir çözüm örneği

Genelleme aşamasını boş bırakanlarda bu kategoride toplanmıştır. Öğrenciler soruyu boş bırakabilecekleri gibi soruyu cevaplayıp ilgili aşamayı da boş bırakmış olabilir. Şekil 16'da öğrenci soruya doğru ya da yanlış cevap vermiş ancak genelleme aşamasını boş bırakmıştır. Tablo 6'ya göre 9. sınıflardan 13 (%35) öğrenci, 10. sınıflardan 8 (%15) öğrenci, 11. sınıflardan 4 (%7) öğrenci, 12. sınıflardan 10 (%28) öğrenci ve toplamda da 35 (%19) öğrenci bu işlemleri yapmıştır. Boş bırakanlar da 9,10,11. sınıflarda üst sınıflara doğru azalırken 12. sınıfta ani bir şekilde artmıştır. Bir diğer bulgu da 9. sınıflar en yüksek iken 12. sınıflar en düşüktür.

4.1.6. Genellemenin Testi Aşaması

Genellemenin testi aşaması da başarılı başarısız olmak üzere iki alt başlığa ayrılmıştır. Başarılı olanları doğru kontrol yapanlar başarısızları da boş bırakanlar ve yanlış kontrol yapanlar oluşturmaktadır.

"6.1. doğru kontrol" kategorisine ait bir örnek Şekil 17' de verilmiştir.

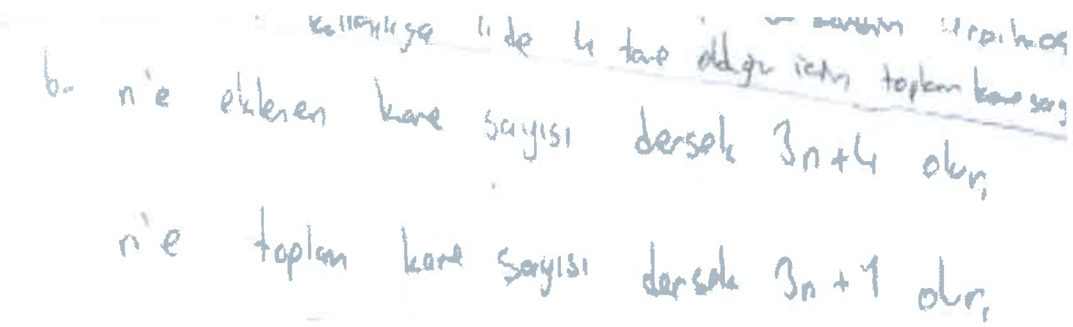


Şekil 17. doğru kontrol kategorisi için başarılı bir çözüm örneği

Bu örnekte de görüldüğü gibi bu aşamada doğru formüle genellenmiş ve verilen tüm değerler için sağlayıp sağlamadığını test edilmiştir. Tablo 6'ya göre 9.

sınıflardan 3 (%8) öğrenci, 10. sınıflardan 11 (%20) öğrenci, 11. sınıflardan 18 (%30) öğrenci, 12. sınıflardan 2 (%6) öğrenci ve toplamda da 34 (%18) öğrenci tarafından bu şekilde test edilmiştir. Yine 9,10,11. sınıflarda üst sınıflara doğru artarken 12. sınıfta düşüş olmuştur. Bu aşamada 11'ler en yüksek başarıyı elde ederken 12'ler de en düşük başarıyı elde etmişlerdir.

"6.2. boş" kategorisine ait bir örnek Şekil 18' de verilmiştir.



Şekil 18. boş kategorisine ait bir çözüm örneği

Test aşamasını boş bırakanlar bu kategoriye alınmışlardır. Genelleme yapılmış işlem orada bırakılmış ve devam edilmemiştir.Öğrenciler soruyu boş bırakabilecekleri gibi soruyu cevaplayıp ilgili aşamayı da boş bırakmış olabilir. Şekil18'de öğrenci soruya doğru ya da yanlış cevap vermiş ancak genellemenin testi aşamasını boş bırakmıştır. Tablo 6'ya göre 9. sınıflardan 34 (%92) öğrenci, 10. sınıflardan 43 (%80) öğrenci, 11. sınıflardan 43 (%70) öğrenci, 12. sınıflardan 34 (%94) öğrenci ve toplamda da 154 (%82) öğrenci genellemenin testinde başarısız olmuştur. 9,10,11. sınıflarda üst sınıflara doğru azalırken 12. sınıflarda bir yükselme görülmüştür.

4.2. Ardışık Sayı Sorusundan Elde Edilen Bulgular

Ardışık sayı sorusu iki aşamalıdır. İlk seçenekte yakın bir duruma ikinci seçenekte ise genel duruma genelleme yapmaları istenmektedir. Ardışık sayı sorusu için Tümevarımsal muhakemenin aşamalarına ilişkin bulgular Tablo 7'de özetlenmiştir.

Tablo7. Ardışık sayı sorusuna ait analiz tablosu

TÜMEVARIMSAL MUHAKEME AŞAMALARI	BAŞARI DURUMU (kategoriler)	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	SINIFLARA GÖRE FREKANS (YÜZDE) (%)				
			9 (39)	10 (54)	11 (59)	12 (26)	Toplam (178)
1.GÖZLEMLEME	**Başarılı**	**1.1.** gözlemleme yapanlar	37 (%95)	50 (%93)	56 (%95)	25 (%96)	168 (%94)
	Başarısız	**1.2.** boş	2 (%5)	4 (%7)	3 (%5)	1 (%4)	10 (%6)
2.GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	**Başarılı**	**2.1.** en fazla ardışık 2 sayının toplamından oluşan örnek bulma	3 (%8)	6 (%11)	9 (%15)	3 (%12)	21 (%12)
		2.2. en fazla ardışık 3 sayının toplamından oluşan örnek bulma	23 (%59)	23 (%43)	23 (%39)	14 (%54)	83 (%47)
		2.3. en fazla ardışık 4 sayının toplamından oluşan örnek bulma	6 (%15)	13 (%24)	19 (%32)	7 (%27)	45 (%25)
		2.4. 4 den daha fazla ardışık sayının toplamından oluşan örnek bulma	5 (%13)	7 (%13)	5 (%8)	2 (%8)	19 (%11)
	Başarısız	**2.5.** doğru örnek oluşturamama	1 (%3)	3 (%6)	1 (%2)	0 (%0)	5 (%3)
		2.6. hiç örnek oluşturamama	1 (%3)	2 (%4)	2 (%3)	0 (%0)	5 (%3)
3.YORDAMA	**Başarılı**	**3.1.** sonsuz tane yazılabileceğini söyleyenler	2 (%5)	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	2 (%1)
		3.2. $n+(n+1)$, $2n+1$ veya sözel ifadesi	0 (%0)	3 (%6)	4 (%7)	0 (%0)	7 (%4)
		3.3. $n+(n+1)+(n+2)$, $3n+3$, $n+(n-1)+(n-2)$ veya sözel ifadesi	1 (%3)	1 (%2)	10 (%17)	6 (%23)	18 (%10)
		3.4. $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)$, $4n+6$, $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+..$veya sözel ifadesi	1 (%3)	3 (%6)	14 (%24)	7 (%27)	25 (%14)
		3.5. birkaç tane doğru örnek yazma	6 (%15)	5 (%9)	7 (%12)	1 (%4)	19 (%11)
		3.6. tek sayılara yordayanlar	2 (%5)	1 (%2)	1 (%2)	0 (%0)	4 (%2)
	Başarısız	**3.7.** her sayının bu şekilde yazılabileceğini söyleyenler, soruyu yanlış anlayanlar	5 (%13)	6 (%11)	6 (%10)	7 (%27)	24 (%13)
		3.8. yanlış yordayanlar	2 (%5)	6 (%11)	6 (%10)	0 (%0)	14 (%8)
		3.9. Boş bırakanlar	20 (%50)	29 (%54)	11 (%19)	5 (%19)	65 (%37)
4.YORDAMANIN TESTİ	**Başarılı**	**4.1.** yordadığı n'li ifadeyi değer vererek kontrol etme	1 (%3)	2 (%4)	14 (%24)	3 (%12)	20 (%11)
	Başarısız	**4.2.** boş (test etmeyenler)	38 (%97)	52 (%96)	45 (%76)	23 (%88)	158 (%89)

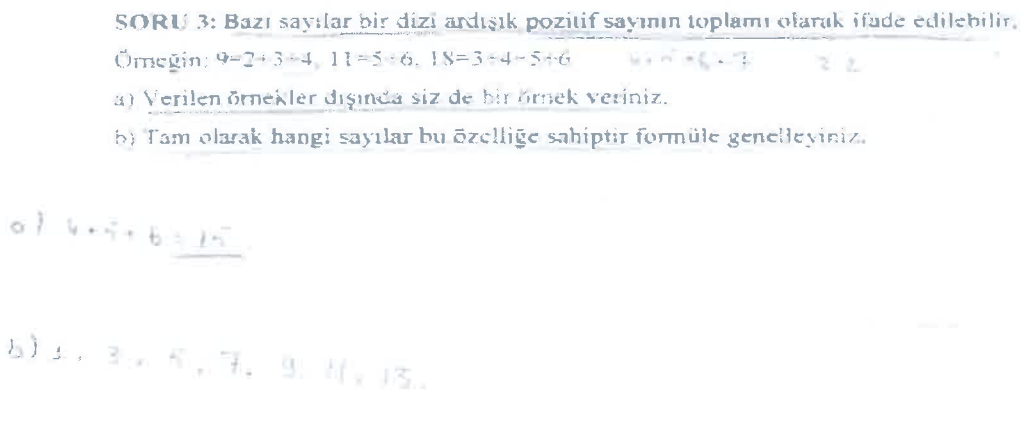
5.GENELLEME	**Başarılı**	**5.1.** her n doğal sayısı ve a ardışık sayı adedi için $a.n+1+2+3+..+(a-1)$	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)
		5.2. her n doğal sayısı için, a ardışık sayı adedi $a.n+\frac{a(a-1)}{2}$	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)
	Başarısız	**5.3.** Yanlış formüle genelleme	0 (%0)	0 (%0)	7 (%12)	1 (%4)	8 (%4)
		5.4. Boş	39 (%100)	54 (%100)	52 (%88)	25 (%96)	170 (%96)
6.GENELLEMENİN TESTİ	**Başarılı**	**6.1.** genellemeyi test edenler	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	0 (%0)	0 (0)
	Başarısız	**6.2.** boş	39 (%100)	54 (%100)	59 (%100)	26 (%100)	178 (%100)

*Tablodaki oranlar hesaplanırken yuvarlandığından ötürü %90 ile %105 arasında değişme gösterebilmektedir. Küçük sayıların yüzdeleri alındığı için yuvarlarken fazla fark oluşabilmektedir.

4.2.1."Gözlemleme" Aşaması

Tablo 7'den görüldüğü gibi "Gözlemleme" aşaması başarılı ve başarısız olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. "Başarılı" kategorisi "1.1. gözlemleme yapanlar", "Başarısız" kategorisi de "1.2. boş" dan oluşmaktadır. Her bir kategori aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

"*1.1. gözlemleme yapanlar*" kategorisine ait bir örnek Şekil 19'da verilmiştir.



Şekil 19. 1.1. gözlemleme yapanlar için bir çözüm örneği

Soruyu boş bırakanlar haricindekiler bu kategoride alınmışlardır. Çünkü onlar bir soru ile ilgili yaşadıkları ilk deneyimi kağıda dökmüşlerdir. 9. sınıflardan 37 (%95) öğrenci, 10. sınıflardan 50 (%93) öğrenci, 11. sınıflardan 56 (%95) öğrenci ve 12.

sınıflardan 25 (%96) öğrenci gözlemleme yapmıştır. Toplamda ise 168 (%94) i bu yöntemi kullanmıştır. Bir diğer bulgu, 12. sınıfların ilk sırada ve 10. sınıfların sonda olmasıdır. 9 ve 11. sınıflar aynı oranda tercih etmişlerdir. Sadece 10. sınıflar ortalamanın altında kalmışlardır.

"*1.2. boş*" kategorisine ait bir örnek Şekil 20'de verilmiştir.

SORU 3: Bazı sayılar bir dizi ardışık pozitif sayının toplamı olarak ifade edilebilir.

Örneğin: 9=2+3+4, 11=5+6, 18=3+4+5+6

a) Verilen örnekler dışında siz de bir örnek veriniz.

b) Tam olarak hangi sayılar bu özelliğe sahiptir formüle genelleyiniz.

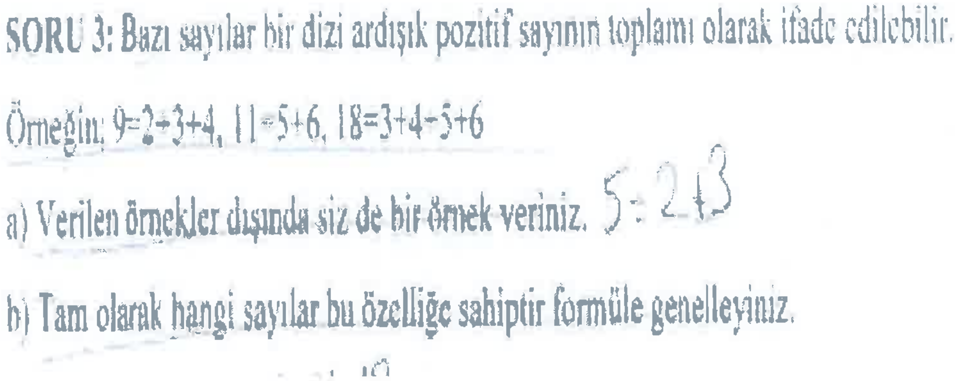
Şekil 20. boş için bir çözüm örneği

Soruyu boş bırakanlar bu kategoriye alınmışlardır. 9. sınıflardan 2 (%5) öğrenci, 10. sınıflardan 4 (%7) öğrenci, 11. sınıflardan 3 (%5) öğrenci ve 12. sınıflardan 1 (%4) öğrenci gözlemleme aşamasını boş bırakmıştır. Toplamda 10 (%6) kişi boş bırakmıştır. Sadece 10. sınıflar ortalamanın üstüne çıkmışlardır.

4.2.2. "Gözlemlerin Organizesi" Aşaması

Tablo 7'den görüldüğü gibi "Gözlemlerin Organizesi" aşaması başarılı ve başarısız olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. "Başarılı" kategorisi "2.1. en fazla ardışık 2 sayının toplamından oluşan örnek bulma", "2.2. en fazla ardışık 3 sayının toplamından oluşan örnek bulma", "2.3. en fazla ardışık 4 sayının toplamından oluşan örnek bulma", "2.4. 4 den daha fazla ardışık sayının toplamından oluşan örnek bulma" ve "Başarısız" kategorisi de "2.5. hiç örnek oluşturamama veya doğru örnek oluşturamama" kategorilerinden oluşmaktadır. Her bir kategori aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

"*2.1. en fazla ardışık 2 sayının toplamından oluşan örnek bulma*" kategorisine ait bir örnek Şekil 21 de verilmiştir.


SORU 3: Bazı sayılar bir dizi ardışık pozitif sayının toplamı olarak ifade edilebilir.

Örneğin; 9=2+3+4, 11=5+6, 18=3+4+5+6

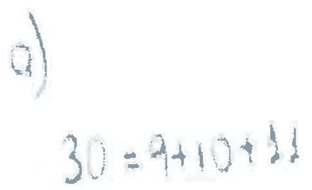
a) Verilen örnekler dışında siz de bir örnek veriniz. 5=2+3

b) Tam olarak hangi sayılar bu özelliğe sahiptir formüle genelleyiniz.

Şekil 21. 2.1.en fazla ardışık 2 sayının toplamından oluşan örnek

Bu aşamada öğrenciden gözlemlerine örnek vermesi istenmiştir. Bu kategoride ise sadece ardışık iki sayıyı toplamayı tercih edenler toplanmıştır. Tüm tek sayılar ardışık iki sayının toplamı olarak yazılabilmekteyken hiçbir çift sayı bu şekilde ardışık iki sayının toplamı olarak yazılamaz. 9. sınıflardan 3 (%8) öğrenci, 10. sınıflardan 6 (%11) öğrenci, 11. sınıflardan 9 (%15) öğrenci ve 12. sınıflardan 3 (%12) öğrenci toplamda da 21 (%12) i en fazla iki ardışık sayı toplanmıştır. Bir diğer bulgu, 11. sınıflar ilk sırada iken 9. sınıflar sondadır. 9'dan11'e artış mevcuttur, 12'ler de ise düşmüştür. 11'ler değerlendirmeye katılmazsa 9'dan 12'ye sürekli bir artış gözlemlenmektedir. Ayrıca bir diğer önemli bulgu da sadece 11. sınıfların ortalamanın üstüne çıkmalarıdır.

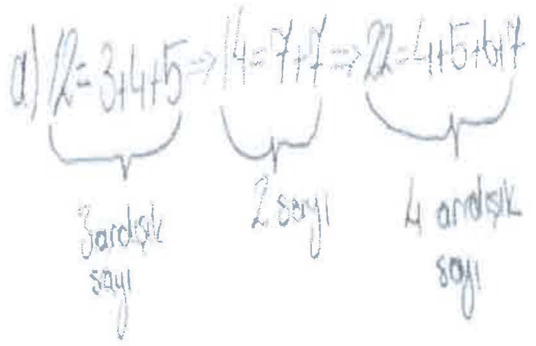
"_2.2. en fazla ardışık 3 sayının toplamından oluşan örnek bulma_ " kategorisine ait bir örnek Şekil 22'de verilmiştir.



Şekil 22. 2.2. en fazla ardışık 3 sayının toplamından oluşan örnek

Bu kategorideki öğrencilerin bazıları 2.1. in çözümünü yaptıktan sonra 3 ardışık sayının toplamını da yazarak bu kategoriye dahil olmuşlardır. Bazıları da sadece herhangi ardışık 3 sayıyı toplayarak bu kategoriye dahil olmuşlardır. Ardışık üç sayının toplamı 3 ün katı olan sayıları verir. 9. sınıflardan 23 (%59) öğrenci, 10. sınıflardan 23 (%43) öğrenci, 11. sınıflardan 23 (%39) öğrenci ve 12. Sınıflardan 14 (%54) öğrenci toplamda da 83 (%47) kişi en fazla üç sayının toplamını yazmışlardır. 9. sınıflar sıralamada en başta iken 11. sınıflar en sonda yer almışlardır. Bir diğer bulgu da 9'dan 11'e azalma olmuş 12'de tekrar artmıştır. 9 ve 12. sınıflar ortalama ve üstünde iken 10 ve 11. sınıflar ortalamanın altında kalmışlardır.

"*2.3. en fazla ardışık 4 sayının toplamından oluşan örnek bulma*" kategorisine ait bir örnek Şekil 23'de verilmiştir.



Şekil 23.2.3. en fazla ardışık 4 sayının toplamından oluşan örnek bulma

2.1. ve 2.2. kategorilerindeki çözüme ek olarak ardışık 4 sayının toplamını da yazanlar bu kategoriye alınmıştır. Bazıları da sadece ardışık 4 sayının toplamını yazmıştır. 9. sınıflardan 6 (%15) öğrenci, 10. sınıflardan 13 (%24) öğrenci, 11. sınıflardan 19 (%32) öğrenci ve 12. sınıflardan 7 (%27) öğrenci toplamda da 45 (%25) i en fazla ardışık dört sayının toplamını yazmıştır. 11. sınıflar ilk sırada yer alırken 9. sınıflar sonda kalmıştır. Bir diğer bulgu ise 9'dan11'e artış mevcut iken 12'de azalmıştır. Buna rağmen 11 ve 12. sınıflar ortalama ve üstünde iken 9 ve 10. sınıflar ortalamanın altında kalmışlardır.

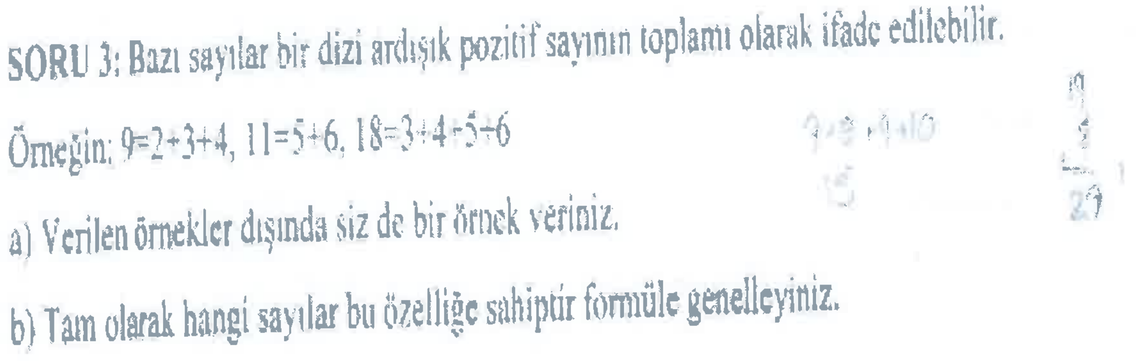
"*2.4. 4'den daha fazla ardışık sayının toplamından oluşan örnek bulma*" kategorisine ait bir örnek Şekil 24'de verilmiştir.

Şekil 24. 2.4.4'den daha fazla ardışık sayının toplamından oluşan örnek bulma

Ardışık 4'den fazla sayı toplayarak istenen örneği bulan öğrenciler bu kategoriye alınmıştır. Yine bu öğrencilerin bir kısmı 2.1., 2.2., 2.3. kategorilerine ait çözümü yapmış ancak fazladan 4 üzerinde ardışık sayı topladıkları için bu kategoriye alınmışlardır, diğer kategorilere dahil edilmemişlerdir. 9. sınıflardan 5 (%13) öğrenci, 10. sınıflardan 7 (%13) öğrenci, 11. sınıflardan 5 (%8) öğrenci ve 12. sınıflardan 2 (%8) öğrenci toplamda da 19 (%11) u dörtten fazla ardışık sayının toplamını oluşturmuştur. 9 ve 10 sınıflar %13 ile ilk sırayı paylaşırken 11 ve 12. sınıflar %8 ile son sırayı paylaşmıştır. 9 ve 10. sınıflar ortalama ve üstünde iken 11 ve 12. sınıflar ortalamanın altında kalmışlardır.

"2.5. doğru örnek oluşturamama" kategorisi işlem hatası gibi sebeplerle doğru örneği oluşturamayanlardan oluşur. Bazı öğrenciler de sayıları ardışık almadıkları için doğru örnekleri oluşturamamıştır. 9. sınıflardan 1 (%3) öğrenci, 10. sınıflardan 3 (%6) öğrenci, 11. sınıflardan 1 (%2) öğrenci ve 12. sınıflardan 0 (%0) öğrenci toplamda da 5 (%3) i doğru örnek oluşturamamıştır.

"2.6. hiç örnek oluşturamama" kategorisine ait bir örnek Şekil 25'de verilmiştir.


SORU 3: Bazı sayılar bir dizi ardışık pozitif sayının toplamı olarak ifade edilebilir.

Örneğin: 9=2+3+4, 11=5+6, 18=3+4+5+6

a) Verilen örnekler dışında siz de bir örnek veriniz.

b) Tam olarak hangi sayılar bu özelliğe sahiptir formüle genelleyiniz.

Şekil 25. 2.6. hiç örnek oluşturamama kategorisine bir örnek

Buradaki öğrenciler istenen örneği oluşturamamışlardır. 9. sınıflardan 1 (%3) öğrenci, 10. sınıflardan 2 (%4) öğrenci, 11. sınıflardan 2 (%3) öğrenci ve 12. sınıflardan 0 (%0) öğrenci toplamda da 5 (%3) kişi örnek oluşturamamıştır. %4 ile 10. sınıflar ilk sıradadır, %0 ile 12. sınıflar da son sıradadır. 9'dan 10'a artış 11'e düşüş ve 12'de daha da düşerek sıfırlanma mevcuttur.

4.2.3. "Yordama" Aşaması

Tablo 7'den görüldüğü gibi "Yordama" aşaması başarılı ve başarısız olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. "Başarılı" kategorisi

"3.1. sonsuz tane yazılabileceğini söyleyenler",

"3.2. $n+(n+1)$, $2n+1$ veya sözel ifadesi",

"3.3. $n+(n+1)+(n+2)$, $3n+3$, $n+(n-1)+(n-2)$ veya sözel ifadesi",

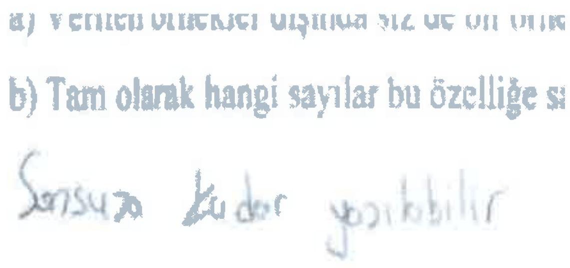
"3.4. $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)$, $4n+6$, $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)+\ldots$ veya sözel ifadesi",

"3.5. birkaç tane doğru örnek yazma",

"3.6. tek sayılara yordayanlar"

olmak üzere altı alt başlıkta toplanmıştır. "Başarısız" kategorisi de "3.7. her sayının bu şekilde yazılabileceğini söyleyenler, soruyu yanlış anlayanlar ", "3.8. yanlış yordayanlar" ve "3.9. boş" dan oluşmaktadır. Her bir kategori aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

"*3.1. sonsuz tane yazılabileceğini söyleyenler*" kategorisine ait bir örnek Şekil 26'da verilmiştir.



Şekil 26.3.1. sonsuz tane yazılabileceğini söyleyenlere bir örnek

Buradaki öğrenciler bu şekilde yazılacak sayıların sonsuz tane olacağını fark etmişler ve bu yüzden ya genellemeye gerek duymamışlar ya da genelleyemeyeceklerini düşünmüşlerdir. 9. sınıflardan 2 (%5) öğrenci, 10. sınıflardan 0 (%0) öğrenci, 11. sınıflardan 0 (%0) öğrenci ve 12. sınıflardan 0 (%0) öğrenci toplamda da 2 (%1) kişi sonsuz tane yazılabileceğini söylemiştir. Sadece 9. sınıflar bu şekilde cevaplamışlardır.

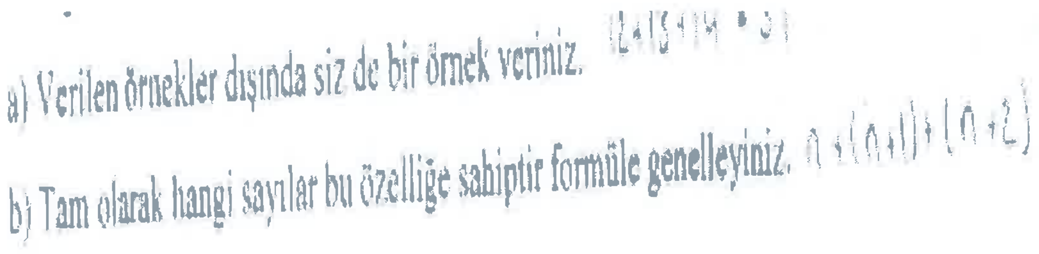
"*3.2. $n + (n + 1)$, $2n + 1$ veya sözel ifadesi*" kategorisine ait bir örnek Şekil 27'de verilmiştir.

Şekil 27. 3.2.$n + (n + 1)$, $2n + 1$ veya sözel ifadesi için bir örnek

Bu çözümü yapabilen öğrenciler ardışık sayıların nasıl yazılacağını bilen öğrencilerdir. Bu öğrencilerden bazıları $n + (n + 1)$ yazarken bazıları buradaki cebirsel işlemi yaparak $2n + 1$ yazmayı tercih etmiştir. Bazıları da bunu sözel olarak ifade etmiştir. yani sayının kendisi ile bir fazlası toplanarak elde edilir. hatta o sayının iki katının bir fazlası bu sayıların toplamıdır demişlerdir. 9. sınıflardan 0 (%0) öğrenci, 10. sınıflardan 3 (%6) öğrenci, 11. sınıflardan 4 (%7) öğrenci ve 12. sınıflardan 0 (%0) öğrenci toplamda da 7 (%4) si bu yöntemle yordama yapmıştır.

9'dan11'e bir artış vardır. 11'den sonra 12'de ani bir şekilde düşerek sıfırlamıştır. Bir diğer bulgu isesadece 10 ve 11. sınıflar ortalamanın üstüne çıkmasıdır.

"*3.3.* $n + (n + 1) + (n + 2)$, $3n + 3$, $n + (n - 1) + (n - 2)$ *veya sözel ifadesi*" kategorisine ait bir örnek Şekil 28'de verilmiştir.

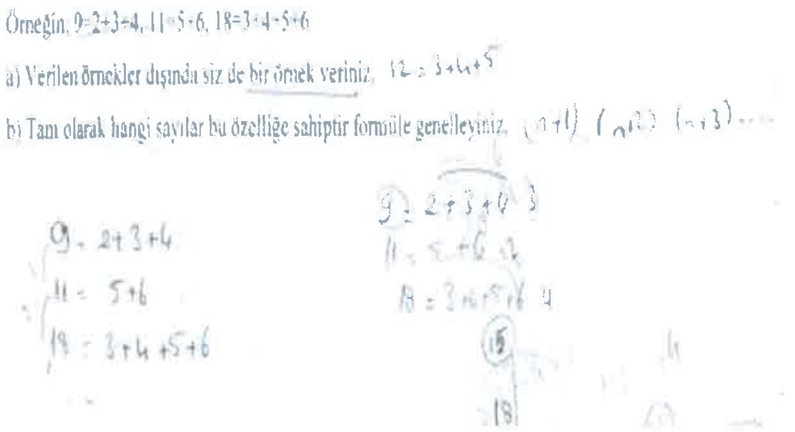

a) Verilen örnekler dışında siz de bir örnek veriniz.

b) Tam olarak hangi sayılar bu özelliğe sahiptir formüle genelleyiniz. $n+(n+1)+(n+2)$

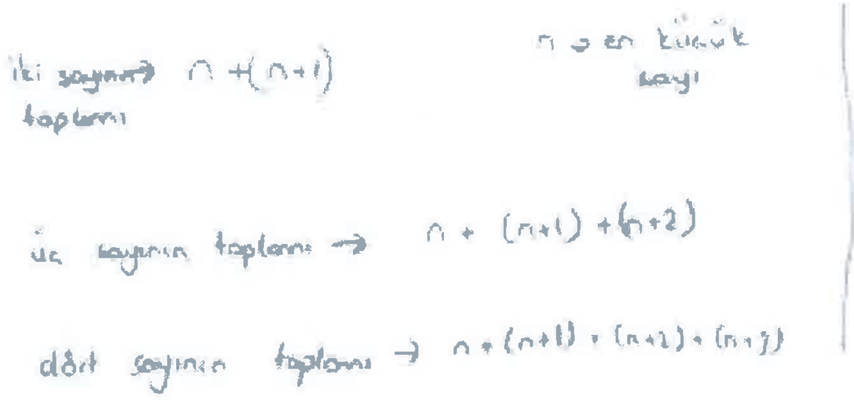
Şekil 28.3.3.$n + (n + 1) + (n + 2)$, $3n + 3$, $n + (n - 1) + (n - 2)$ veya sözel ifadesi

Bazı öğrenciler ardışık 3 sayının toplamını artan olarak $n + (n + 1) + (n + 2)$ şeklinde yazmışlardır. Bazıları cebirsel işlemlerle bunu devam ettirip $3n + 3$ olarak yazmışlardır. bir kaç öğrenci de ardışık 3 sayıyı azalan formda $n + (n - 1) + (n - 2)$ olarak yazmıştır. 9. sınıflardan 1 (%3) öğrenci, 10. sınıflardan 1 (%2) öğrenci, 11. sınıflardan 10 (%17) öğrenci ve 12. sınıflardan 6 (%23) öğrenci toplamda da 18 (%10) i bu yöntemle yordama yapmıştır.12'ler% 23 ile ilk sıradadır, 10. sınıflar ise %2 ile sonda yer almaktadır. 9 ve 10. sınıflar ortalamanın altında kalırken 11 ve 12. sınıflar ortalamanın üstünde kalmışlardır.

"*3.4.* $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3)$, $4n + 6$, $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) + \ldots$ *veya sözel ifadesi*" kategorisine ait bir örnek Şekil 29 ve Şekil 30 da verilmiştir.



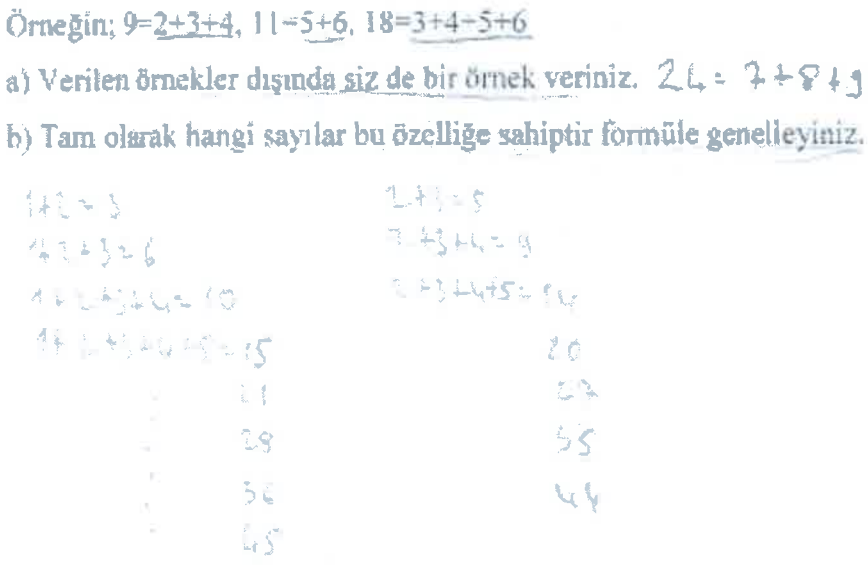
Şekil 29. n+$(n+1)+(n+2)+(n+3)+$... yazılan bir çözüm



Şekil 30. $n+(n+1)+(n+2)+(n+3)$ yazılan bir çözüm

Bu kategori birbirinin benzeri olan birkaç durumu içermektedir. $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3)$ şeklinde ardışık 4 toplamı yazanlar, bu ifadeyi cebirsel işlemlerle devam ettirip $4n + 6$ şeklinde ifade edenler ya da $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3)+$... şeklinde sonsuz sayıda ardışık sayının toplanabileceğini ifade edenler var. Ayrıca bunların herhangi birini sözel olarak ifade edenler de bu kategoride bulunmaktadır. 9. sınıflardan 1 (%3) öğrenci, 10. sınıflardan 3 (%6) öğrenci, 11. sınıflardan 14(%24) öğrenci ve 12. sınıflardan 7 (%27) öğrenci toplamda da 25 (%14) kişi bu yöntemle yordama yapmıştır. 12. sınıflar ilk sırada yer alırken 9. sınıflar son sıradadır. 9'dan 12'ye sürekli bir artış mevcuttur.

"*3.5. birkaç tane doğru örnek yazma*" kategorisine ait bir örnek Şekil 31'de verilmiştir.



Örneğin; 9=2+3+4, 11=5+6, 18=3+4+5+6

a) Verilen örnekler dışında siz de bir örnek veriniz. 24= 7+8+9

b) Tam olarak hangi sayılar bu özelliğe sahiptir formüle genelleyiniz.

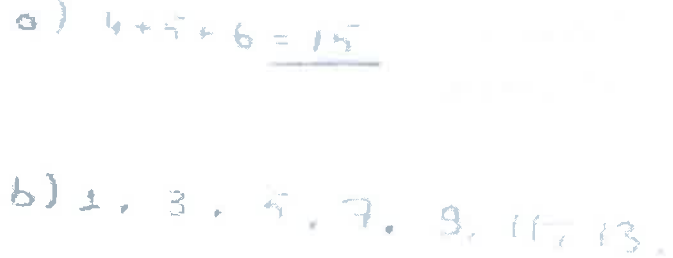
1+2=3
1+2+3=6
1+2+3+4=10
1+2+3+4+5=15
21
28
36
45

2+3=5
2+3+4=9
2+3+4+5=14
20
27
35
44

Şekil 31.3.5. birkaç tane doğru örnek yazma

2. 1., 2.2., 2.3. ve 2.4. de verilen örnekleri daha da çoğaltıp bu şekilde bir küme oluşturmak isteyenlerin oluşturduğu kategoridir. 9. sınıflardan 6 (%15) öğrenci, 10. sınıflardan 5 (%9) öğrenci, 11. sınıflardan 7 (%12) öğrenci ve 12. sınıflardan 1 (%4) öğrenci toplamda da 19 (%11) u bu yöntemle yordama yapmıştır. 9. sınıflar ilk sırada yer alırken 12'ler en sondadır. 9'dan10'a azalmış 11'de biraz artmış ve 12'de tekrar azalmıştır. 9 ve 11. sınıflar ortalamanın üstünde 10 ve 12. sınıflar da ortalamanın altında kalmıştır.

"*3.6. tek sayılara yordayanlar* " kategorisine ait bir örnek Şekil 32'de verilmiştir.

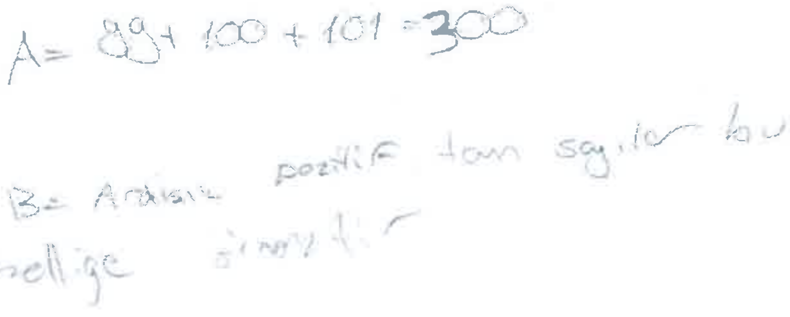


a) 4+5+6=15

b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13.

Şekil 32. 3.6. tek sayılara yordayanlar

3.1.'e benzeyen bir kategori ancak farkı burada öğrenciler sadece tek sayılardan oluşacağını ve her tek sayının bu şekilde yazılacağını düşünmüşlerdir. Her tek sayı ardışık iki sayının toplamı halinde yazılabilmektedir. Çift ile başlayan ardışık tek sayıda sayıların toplamıyla da tek sayılar elde edilebilmektedir. Öğrenciler bunları fark etmiştir ancak çift sayı oluşturamadıklarından burada tek sayılara genellenebileceğini düşünmüşlerdir. 9. sınıflardan 2 (%5) öğrenci, 10. sınıflardan 1 (%2) öğrenci, 11. sınıflardan 1 (%2) öğrenci ve 12. sınıflardan 0 (%0) öğrenci toplamda da 4 (%2) kişi bu kategoride yer almıştır. 9. sınıflar ilk sırada yer alırken 12'ler en sondadır. Bir diğer önemli bulgu da 9'dan 12'ye hiç artmamasıdır, ya azalmış ya sabit kalmıştır. Sadece 12. sınıflar ortalamanın altında kalmışlardır.
"*3.7. her sayının bu şekilde yazılabileceğini söyleyenler, soruyu yanlış anlayanlar* " kategorisine ait bir örnek Şekil 33'de verilmiştir.



Şekil 33. her sayının bu şekilde yazılabileceğini söyleyenler, soruyu yanlış anlayanlara bir örnek bir çözüm

Şekil 33'deki örnekte de görüldüğü gibi öğrenci soruyu yanlış anlamış oluşturulacak sayıya değil oluşturan sayılara odaklanmışlardır. Cevap olarak "ardışık pozitif tam sayılar bu özelliğe sahiptir" derken ya tüm sayılar bu şekilde yazılabilir demişlerdir ya da "ardışık pozitif sayıları toplayarak bu özelliğe sahip sayıları oluşturabiliriz" demek istemişlerdir. 9. sınıflardan 5 (%13) öğrenci, 10. sınıflardan 6 (%11) öğrenci, 11. sınıflardan 6 (%10) öğrenci ve 12. sınıflardan 7 (%27) öğrenci toplamda da 24 (%13) kişi bu yöntemle yordama yapmıştır.12'ler ilk sırada yer alırken 11'ler sonda yer almaktadır. 9'dan 11'e azalırken 12'de ise artmıştır. Sadece 12. sınıflar ortalamanın üstünde kalmışlardır.

"*3.8. yanlış yordayanlar*" kategorisinde ise yordamayı yanlış yapanlar bulunmaktadır. 9. sınıflardan 2 (%5) öğrenci, 10. sınıflardan 6 (%11) öğrenci, 11. sınıflardan 6 (%10) öğrenci ve 12. sınıflardan 0 (%0) öğrenci toplamda da 14 (%8) kişi bu şekilde başarısız olmuştur. 10'lar ilk sırada iken 12'ler sondadır. 9'dan 10'a artmış 11'e azalırken 12'de sıfırlanmıştır.

"*3.9. boş bırakanlar*" kategorisine ait bir örnek Şekil 34'de verilmi

SORU 3: Bazı sayılar bir dizi ardışık pozitif sayının toplamı olarak ifade edilebilir.

Örneğin; 9=2+3+4, 11=5+6, 18=3+4+5+6

a) Verilen örnekler dışında siz de bir örnek veriniz.

b) Tam olarak hangi sayılar bu özelliğe sahiptir formüle genelleyiniz.

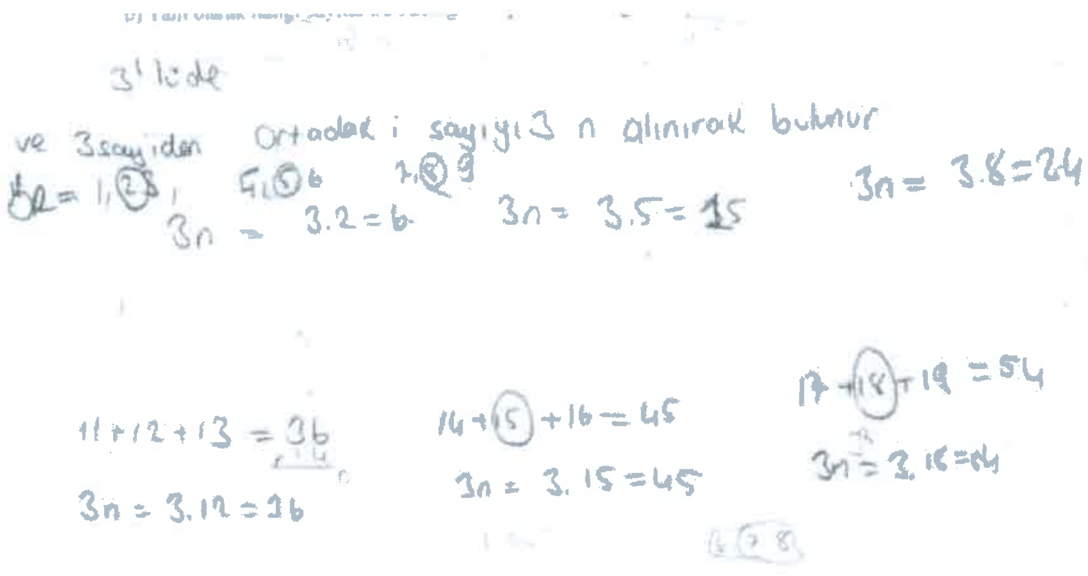
Şekil 34.3.9. Boş bırakanlar için çözüm örneği

Öğrencilerden herhangi bir kestirme yapamayanlar bu kategoride toplanmıştır. Örnekte de görüldüğü gibi öğrenci sadece birkaç örnek vermiş ama herhangi bir kestirme yapamamıştır. 9. sınıflardan 20 (%50) öğrenci, 10. sınıflardan 29 (%54) öğrenci, 11. sınıflardan 11 (%19) öğrenci ve 12. sınıflardan 5 (%19) öğrenci toplamda da 65 (%37) kişi bu şekilde başarısız olmuştur. 10'lar ilk sırada iken 11 ve 12'ler aynı yüzde ile sondadır.

4.2.4. "Yordamanın Testi" Aşaması

Tablo 7'den görüldüğü gibi "Yordamanın testi" aşaması başarılı ve başarısız olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. "Başarılı" kategorisi "4.1.yordadığı n'li ifadeyi değer vererek kontrol etme " ve "Başarısız" kategorisi de "4.2.boş (test etmeyenler)" den oluşmaktadır. Her bir kategori aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

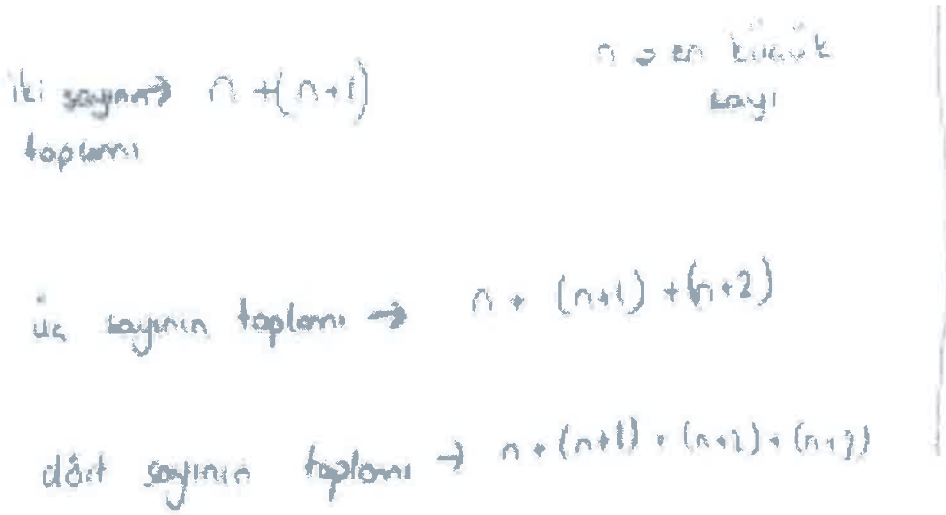
"*4.1. yordadığı n'li ifadeyi değer vererek kontrol etme*" kategorisine ait bir örnek Şekil 35'de verilmiştir.



Şekil 35.4.1. yordadığı n li ifadeyi değer vererek kontrol etme

Yordamanın testi aşamasında yordama yapabilen öğrencilerin bazıları yordadıkları ifadede n yerine değer vererek elde edebilecekleri sayıları görmüşlerdir. Şekil 35'deki örnekte ardışık 3 sayıyı $(n - 1) + n + (n + 1)$ şeklinde yordanmış ve n yerine değerler vererek test edilmiştir. 9. sınıflardan 1 (%3) öğrenci, 10. sınıflardan 2 (%4) öğrenci, 11. sınıflardan 14 (%24) öğrenci ve 12. sınıflardan 3 (%12) öğrenci toplamda da 20 (%11) si yordamayı test etmiştir.11'ler ilk sırada yer alırken 9. sınıflar sondadır. 9'dan 11'e bir artış olmasına rağmen 12'de düşüş vardır. 9 ve 10. sınıflar ortalamanın altında iken 11 ve 12. sınıflar ortalamanın üstüne çıkmıştır.

"*4.2. boş (test etmeyenler)*" kategorisine ait bir örnek Şekil 36'da verilmiştir.



Şekil 36.4.2. boş (test etmeyenler)

Bu kategorideki öğrencilerin bir kısmı yordama yapmış ama test etmemişlerdir. Bir kısmı yordama da yapamamıştır. 9. sınıflardan 38 (%97) öğrenci, 10. sınıflardan 52 (%96) öğrenci, 11. sınıflardan 45 (%76) öğrenci ve 12. sınıflardan 23 (%88) öğrenci toplamda da 158 (%89) i test etmemiştir. 9'lar ilk sırada yer alırken 11. sınıflar sondadır. 9'dan11'e bir düşüş olmasına rağmen 12'de artış vardır. 9, 10 ortalamanın üstünde kalırken, 11 ve 12. sınıflar ortalamanın altında kalmıştır.

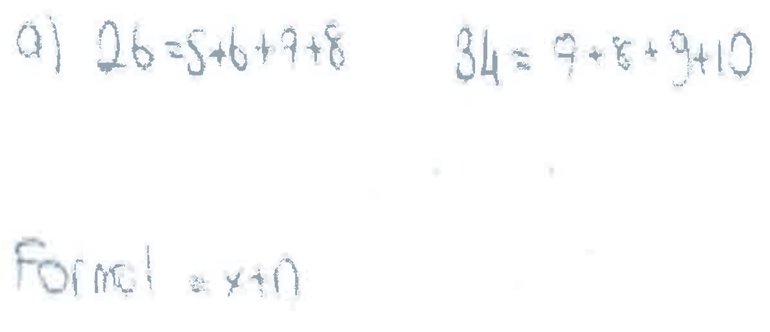
4.2.5. "Genelleme" Aşaması

Tablo 7'den görüldüğü gibi "Genelleme" aşaması başarılı ve başarısız olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. "Başarılı" kategorisi "5.1. $a.\ n + 1 + 2 + 3+...+(a - 1)$ her n doğal sayısı için, a ardışık sayı adedi", "5.2. $a.n + \frac{(a-1)a}{2}$ her n doğal sayısı için, a ardışık sayı adedi" " olmak üzere iki alt başlıktan oluşmaktadır ve "Başarısız" kategorisi de "5.3. Yanlış formüle genelleme" ve "5.4. Boş" olmak üzere iki alt başlıktan oluşmaktadır. Her bir kategori aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır. Bu aşamada başarılı kategorisinde kimse yer alamazken tüm katılımcılar başarısız olmuştur. Bu önemli bir bulgudur. çalışmaya katılan 178 kişinin hepsi de bu aşamada başarısız olmuştur.

"*5.1. $a.n + 1 + 2 + 3+...+(a-1)$ her n doğal sayısı için, a ardışık sayı adedi* " kategorisine ait bir örnek bulunmamaktadır çünkü hiçbir öğrenci bu cevabı verememiştir.

"*5.2.* $a.n + \frac{(a-1)a}{2}$ *her n doğal sayısı için, a ardışık sayı adedi*" kategorisine ait bir örnek bulunmamaktadır çünkü hiçbir öğrenci bu cevabı verememiştir.

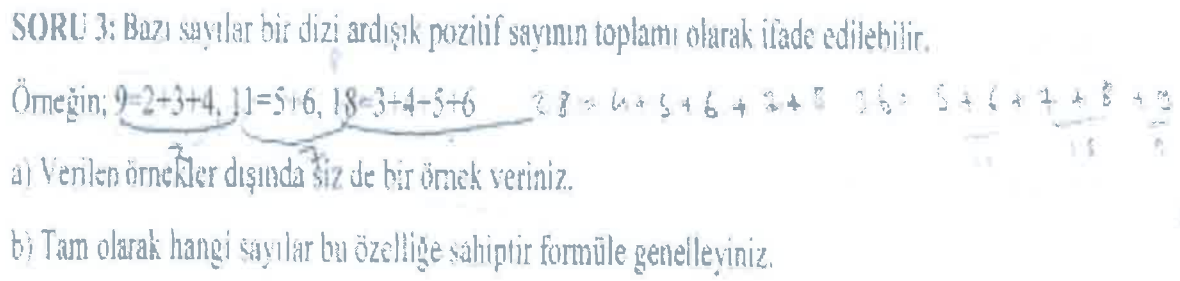
"*5.3. Yanlış formüle genelleme*" kategorisine ait bir örnek Şekil 37'de verilmiştir.



Şekil37.5.3. Yanlış formüle genelleme

Genelleme aşamasında başarılı olan öğrenci bulunmazken başarısız öğrencilerin %4ü de yanlış genellemede bulunmuştur. Öğrencilerin çoğu 3.1., 3.2., 3.3., 3.4., 3.5., 3.6. aşamalarını genelleme olarak düşünmüşlerdir. Ancak o işlemler bu çalışmada yordama olarak alınmıştır çünkü genelleme denebilmesi için hem kaç sayının toplanacağı hem de toplamaya hangi sayıdan başlanacağı değişken olarak kabul edilmelidir. Bu değişkenlere verilen değerlerle istenen sayılar elde edilmelidir. 9. sınıflardan 0 (%0) öğrenci, 10. sınıflardan 0 (%0) öğrenci, 11. sınıflardan 7 (%12) öğrenci ve 12. sınıflardan 1 (%4) öğrenci toplamda da 8 (%4) i bu şekilde genellemiştir. İlk sırada 11 ler bulunurken 9 ve 10 lar son sırayı paylaşmaktadır. Sadece 11 ve 12. sınıflar ortalamanın üstünde kalmışlardır.

"*5.4. Boş*" kategorisine ait bir örnek Şekil 38'de verilmiştir.


SORU 3: Bazı sayılar bir dizi ardışık pozitif sayının toplamı olarak ifade edilebilir.

Örneğin; 9=2+3+4, 11=5+6, 18=3+4+5+6

a) Verilen örnekler dışında siz de bir örnek veriniz.

b) Tam olarak hangi sayılar bu özelliğe sahiptir formüle genelleyiniz.

Şekil 38.5.4.Boş bırakılan bir çözüm örneği

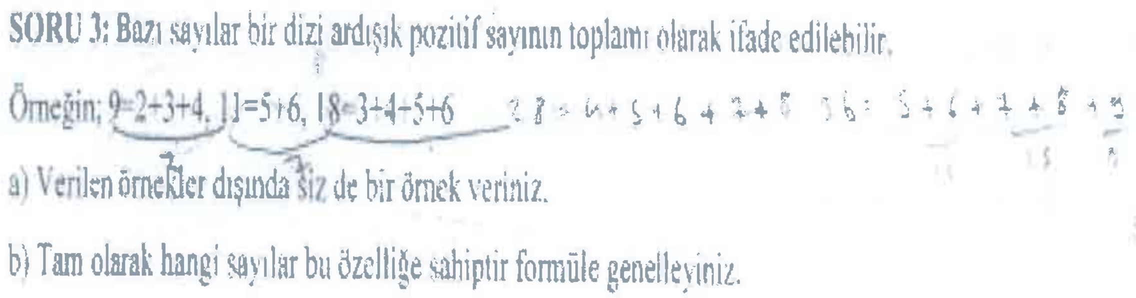
9. sınıflardan 39 (%100) öğrenci, 10. sınıflardan 54 (%100) öğrenci, 11. sınıflardan 52 (%88) öğrenci ve 12. sınıflardan 25 (%96) öğrenci toplamda da 170 (%96) kişi boş bırakmıştır. 9 ve 10. sınıflar ilk sırayı paylaşırken 11'ler sondadır. Boş bırakmayan öğrenciler de yanlış formüle genellemişlerdir. Sadece 11. sınıflar ortalamanın altında kalmışlardır.

4.2.6. "Genellemenin Testi" Aşaması

Tablo 7'den görüldüğü gibi "Genellemenin testi" aşaması başarılı ve başarısız olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. "Başarılı" kategorisi "6.1. genellemeyi test edenler" ve "Başarısız" kategorisi de "6.2. boş" dan oluşmaktadır. Her bir kategori aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

"*6.1. genellemeyi test edenler* " kategorisine ait bir örnek bulunmamaktadır çünkü hiçbir öğrenci genelleme aşamasında başarılı olamamıştır bu yüzden genellemenin testini de yapamamıştır.

"*6.2. boş* " kategorisine ait bir örnek Şekil39'da verilmiştir.


SORU 3: Bazı sayılar bir dizi ardışık pozitif sayının toplamı olarak ifade edilebilir.

Örneğin; 9=2+3+4, 11=5+6, 18=3+4+5+6

a) Verilen örnekler dışında siz de bir örnek veriniz.

b) Tam olarak hangi sayılar bu özelliğe sahiptir formüle genelleyiniz.

Şekil 39.6.2. boş bir çözüm örneği

Tüm sınıflar bu kategoride %100 lük katılım sağlamıştır çünkü herkes genellemenin testini boş bırakmışlardır.

4.3. Kağıt Katlama Sorusundan Elde Edilen Bulgular

Kağıt katlama sorusu iki aşamalıdır. İlk seçenekte yakın bir duruma ikinci seçenekte ise genel duruma genelleme yapmaları istenmektedir. Kağıt katlama sorusu için Tümevarımsal muhakemenin aşamalarına ilişkin bulgular Tablo 8'de özetlenmiştir.

Tablo 8. Kağıt katlama sorusuna ait yazılı sınav analiz tablosu

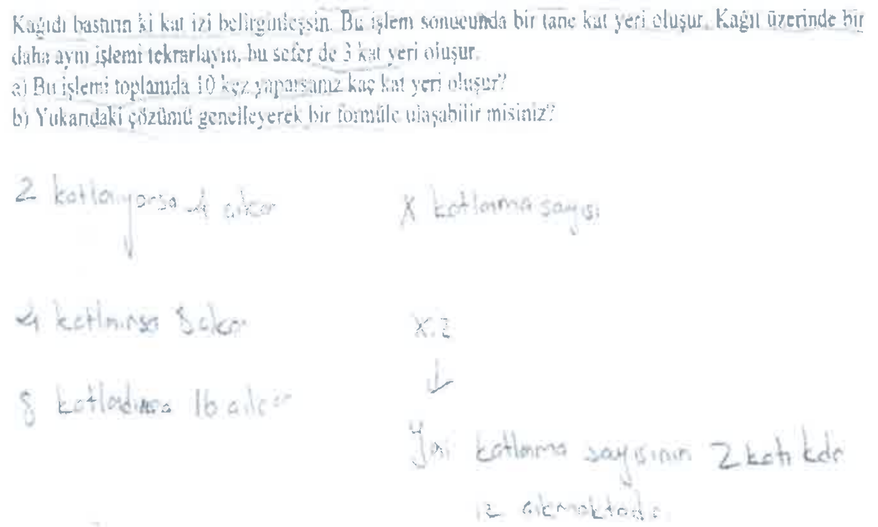
TÜMEVARIMSAL MUHAKEME AŞAMALARI	BAŞARI DURUMU (kategoriler)	SERGİLENEN DÜŞÜNCELER VE KULLANILAN İŞLEMSEL ARAÇLAR	SINIFLARA GÖRE FREKANS (YÜZDE) (%)				
			9 (34)	10 (52)	11 (60)	12 (18)	Toplam (164)
1.GÖZLEMLEME	**Başarılı**	**1.1.** gözlemeleme yapanlar	19 (%56)	49 (%94)	58 (%97)	18 (%100)	144 (%88)
	Başarısız	**1.2.** boş	15 (%44)	3 (%6)	2 (%3)	0 (%0)	20 (%12)
2.GÖZLEMLERİN ORGANİZESİ	**Başarılı**	**2.1.** şekil çizerek	7 (%21)	3 (%6)	15 (%25)	2 (%11)	27 (%16)
		2.2. cebirsel	12 (%35)	38 (%73)	39 (%65)	16 (%89)	105 (%64)
	Başarısız	**2.3.** boş	15 (%44)	11 (%21)	6 (%10)	0 (%0)	32 (%20)
3.YORDAMA	**Başarılı**	**3.1.** çizerek doğru bulanlar	0 (%0)	0 (%0)	1 (%2)	0 (%0)	1 (%1)
		3.2. çizmeden doğru bulanlar	2 (%6)	14 (%27)	32 (%53)	3 (%17)	51 (%31)
	Başarısız	**3.3.** doğru bulamayanlar	18 (%53)	33 (%63)	25 (%42)	15 (%83)	91 (%55)
		3.4. boş	14 (%41)	5 (%10)	2 (%3)	0 (%0)	21 (%13)
4.YORDAMANIN TESTİ	**Başarılı**	**4.1.** yordamayı test edenler	0 (%0)	1 (%2)	13 (%22)	0 (%0)	14 (%9)
	Başarısız	**4.2.** boş (test etmeyenler)	34 (%100)	51 (%98)	47 (%78)	18 (%100)	150 (%91)
5.GENELLEME	**Başarılı**	**5.1.** $2^n - 1$	0 (%0)	7 (%13)	30 (%50)	3 (%17)	40 (%24)
		5.2. sözel	0 (%0)	4 (%8)	0 (%0)	0 (%0)	4 (%2)
	Başarısız	**5.3.** Yanlış formüle genelleme	13 (%38)	22 (%42)	17 (%28)	10 (%56)	62 (%38)
		5.4. Boş	21 (%62)	19 (%37)	13 (%22)	5 (%28)	58 (%35)
6.GENELLEMENİN TESTİ	**Başarılı**	**6.1.** genellemeyi test edenler	0 (%0)	2 (%4)	4 (%7)	0 (%0)	6 (%4)
	Başarısız	**6.2.** boş (test etmeyenler)	34 (%100)	50 (%96)	56 (%93)	18 (%100)	158 (%96)

*yüzdeler hesaplanırken yuvarlama yapıldığı için toplamın %100 gelmediği durumlar olabilmektedir. Bu durum gözardı edilmektedir.

4.3.1."Gözlemleme" Aşaması

Tablo 8'den görüldüğü gibi "Gözlemleme" aşaması başarılı ve başarısız olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. “Başarılı” kategorisi "1.1. gözlemleme yapanlar", "Başarısız" kategorisi de "1.2. boş" dan oluşmaktadır. Her bir kategori aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

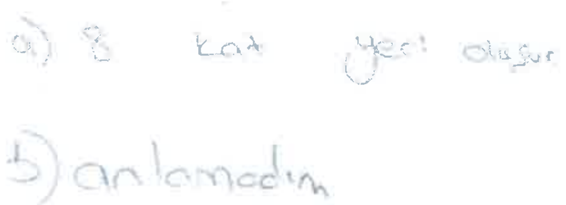
"*__1.1. gözlemleme yapanlar__*" kategorisine ait bir örnek Şekil 40'da verilmiştir.



Şekil 40. 1.1.gözlemleme yapanlar için bir çözüm örneği

Soruyu doğru anlayanlar bu kategoriye alınmışlardır. Soruyu çözebilmek için yapılan herhangi doğru bir işlem ya da doğru bir düşüncenin varlığı sorunun doğru anlaşıldığını göstermektedir. Örnekteki öğrenci katlama sonrası oluşan bölgelerden yola çıkmış. Aşamalar birbiriyle ilişkili olduğundan net bir şekilde ayrılamamaktadır. 1.1. aşamasında başarılı olup diğer aşamalarda başarısız öğrenciler olabilmektedir. Çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %88'i “1.1.” kategorisi altına alınmıştır. Bu büyük bir orandır. 1.1. kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 12. sınıflar %100 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %56 ile 9. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise bu alt kategorideki cevaplar 9'da %56 iken 10. sınıfta yükselerek %94 ve 11. sınıfta biraz daha yükselerek %97 olmuş ve 12. sınıfta daha da yükselerek %100 olmuştur.

"*__1.2. boş__*" kategorisine ait bir örnek Şekil 41'de verilmiştir.



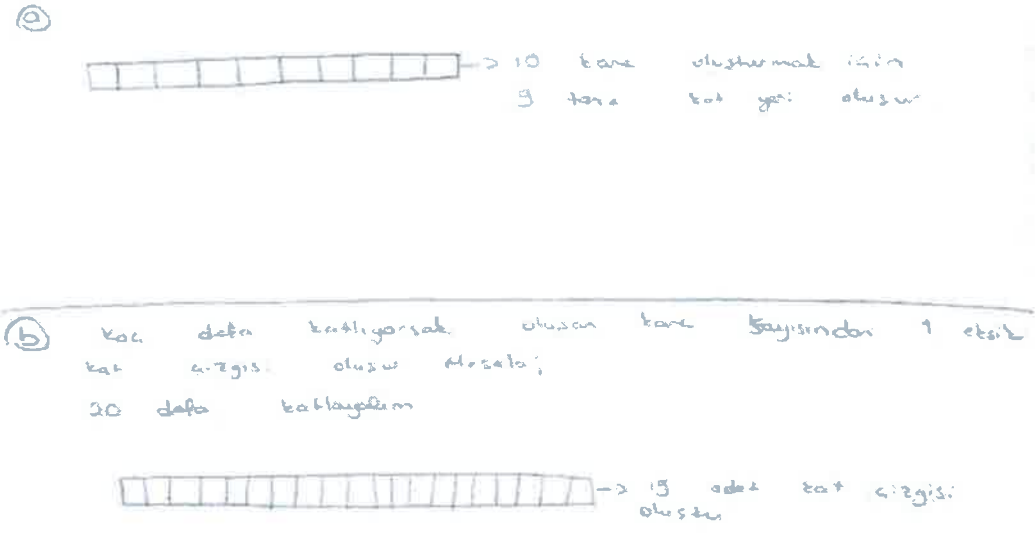
Şekil 41. boş için bir çözüm örneği

Soruyu doğru anlayamayanlar ve boş bırakanlar bu kategoride alınmışlardır. Örnekteki öğrenci 8 kat yeri demiş ama bunun için herhangi bir işlem veya çizim yapmamıştır. Ne gözlemleme aşaması, ne gözlemlerin organizesi aşaması ne de yordama adına doğru bir cevap ya da işlem bulunmayan kağıtların bulunduğu kategoridir. Çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %12'si "1.2." kategorisi altına alınmıştır. 1.2. kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 9. sınıflar %44 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %0 ile 12. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise başarısız kategorisindeki cevaplar 9'da %44 iken 10. sınıfta biraz düşerek %6 ve 11. sınıfta yine biraz daha düşerek %3 olmuş ve 12. sınıfta daha da düşerek %0 olmuştur.

4.3.2. "Gözlemlerin Organizesi" Aşaması

Tablo 8'den görüldüğü gibi "Gözlemlerin Organizesi" aşaması başarılı ve başarısız olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. "Başarılı" kategorisi "2.1. şekil çizerek", "2.2. cebirsel" ve "Başarısız" kategorisi "2.3. boş " alt kategorisinden oluşmaktadır. Her bir kategori aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

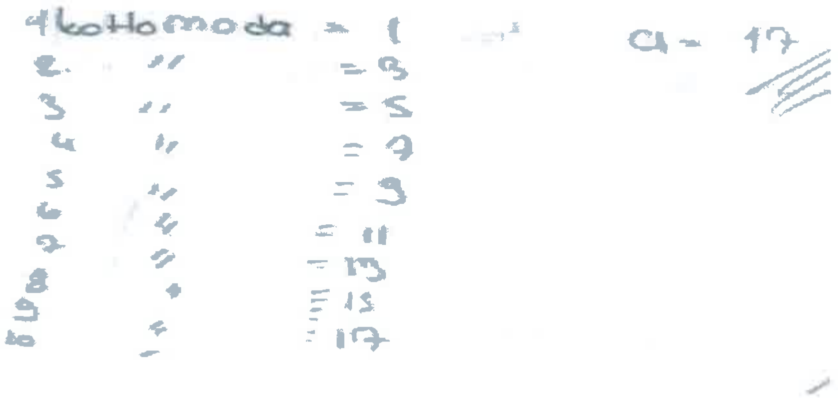
"*2.1. şekil çizerek* " kategorisine ait bir örnek Şekil 42'de verilmiştir.



Şekil 42. 2.1. şekil çizerek temsil eden bir örnek

Çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %16'sı "2.1." kategorisi altına alınmıştır. 2.1. kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 11. Sınıflar %25 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %6 ile 10. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise bu alt kategorideki cevaplar 9'da %21 iken 10. sınıfta düşerek %6 ve 11. sınıfta biraz yükselerek %25 olmuş ve 12. sınıfta düşerek %11 olmuştur.

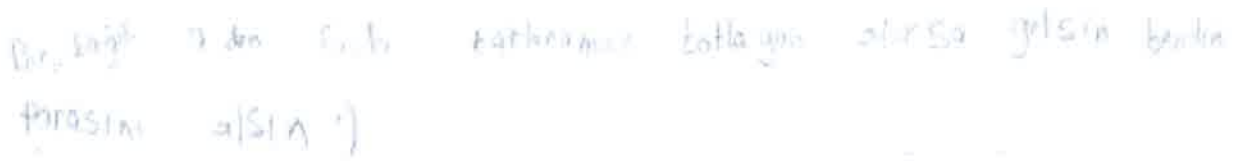
"2.2. cebirsel " kategorisine ait bir örnek Şekil 43'de verilmiştir.



Şekil 43.2.2.cebirseli ifade eden bir örnek

Örnekteki öğrenci 1. katlamasa 1 iz, 2. katlamada 3 iz oluştuğunu sorudan öğrenmiş ve diğer katlama için şekil çizmemiş cebirsel artış olduğunu düşünmüş ve 3. katlamada 5 iz oluşacağını düşünmüştür. Doğru olmasa da başarılı sayılmıştır. Çünkü işleme cebirsel olarak nereden başlayacağını bilmiştir. Burada şekil çizmemek ve görsele değil de sayılar arası artışa odaklanmak esastır. Çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %64'ü "2.2." kategorisi altına alınmıştır.2.2. kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 12. sınıflar %89 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %35 ile 9. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise bu alt kategorideki cevaplar 9'da %35 iken 10. sınıfta yükselerek %73 ve 11. sınıfta düşerek %65 olmuş ve 12. sınıfta yeniden yükselerek %89 olmuştur.

"*2.3. boş* " kategorisine ait bir örnek Şekil 44'de verilmiştir.



Şekil 44. 2.3. boş kategorisine bir örnek

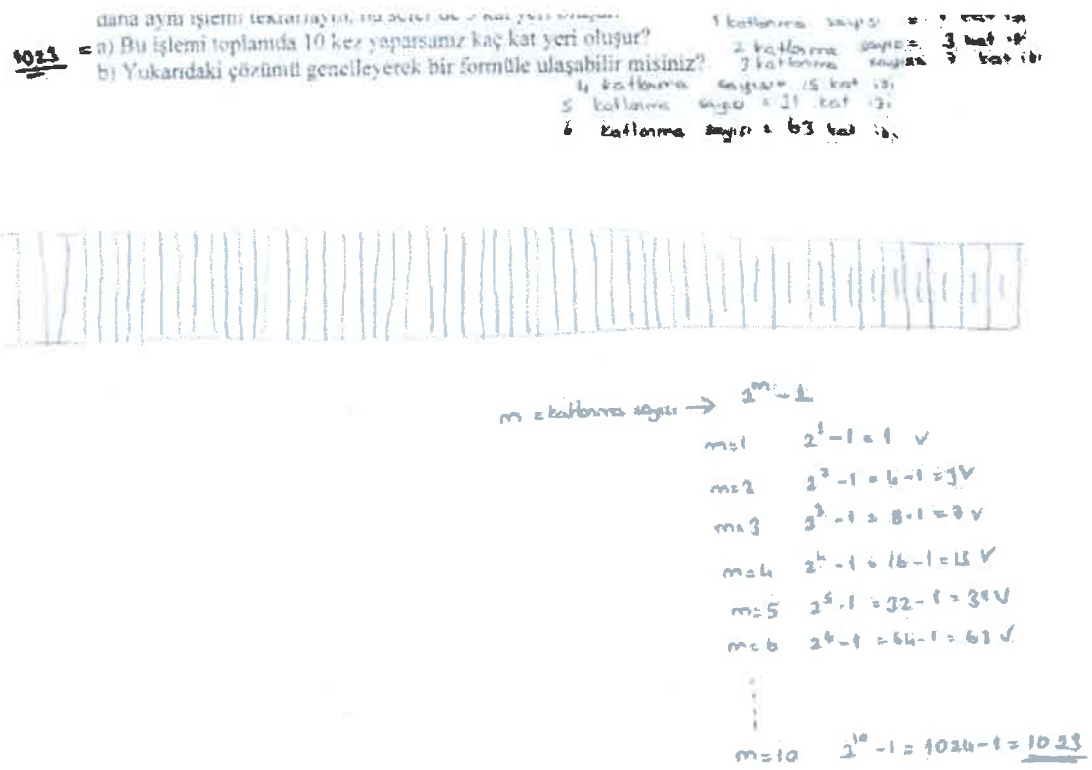
Buradaki öğrenciler istenen örneği oluşturamamışlardır. Bazıları çizerek sonucu bulabileceklerini düşünmüşler ancak doğru çizemedikleri ya da doğru sayamadıkları için başarılı olamamışlardır. Bazıları da soru ile ilgisi olmayan notlar yazmışlardır.Çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %20'si "2.3." kategorisi altına alınmıştır. 2.3. kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 9. sınıflar %44 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %0 ile 12. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise başarısız kategorisindeki cevaplar 9'da %44 iken 10. sınıfta düşerek %21 ve 11. sınıfta biraz daha düşerek %10 olmuş ve 12. sınıfta daha da düşerek %0 olmuştur. 9 ve 12. sınıfların gözlemleme aşamasında başarısızlık oranı ile gözlemlerin organizesi başarısızlık oranı değişmemiştir.

4.3.3. "Yordama" Aşaması

Tablo 8'den görüldüğü gibi "Yordama" aşaması başarılı ve başarısız olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. "Başarılı" kategorisi "3.1. çizerek doğru bulanlar ", "3.2. çizmeden doğru bulanlar " olmak üzere iki alt başlıkta toplanmıştır.

"Başarısız" kategorisi de "3.3. doğru bulamayanlar " ve "3.4.boş " dan oluşmaktadır. Her bir kategori aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

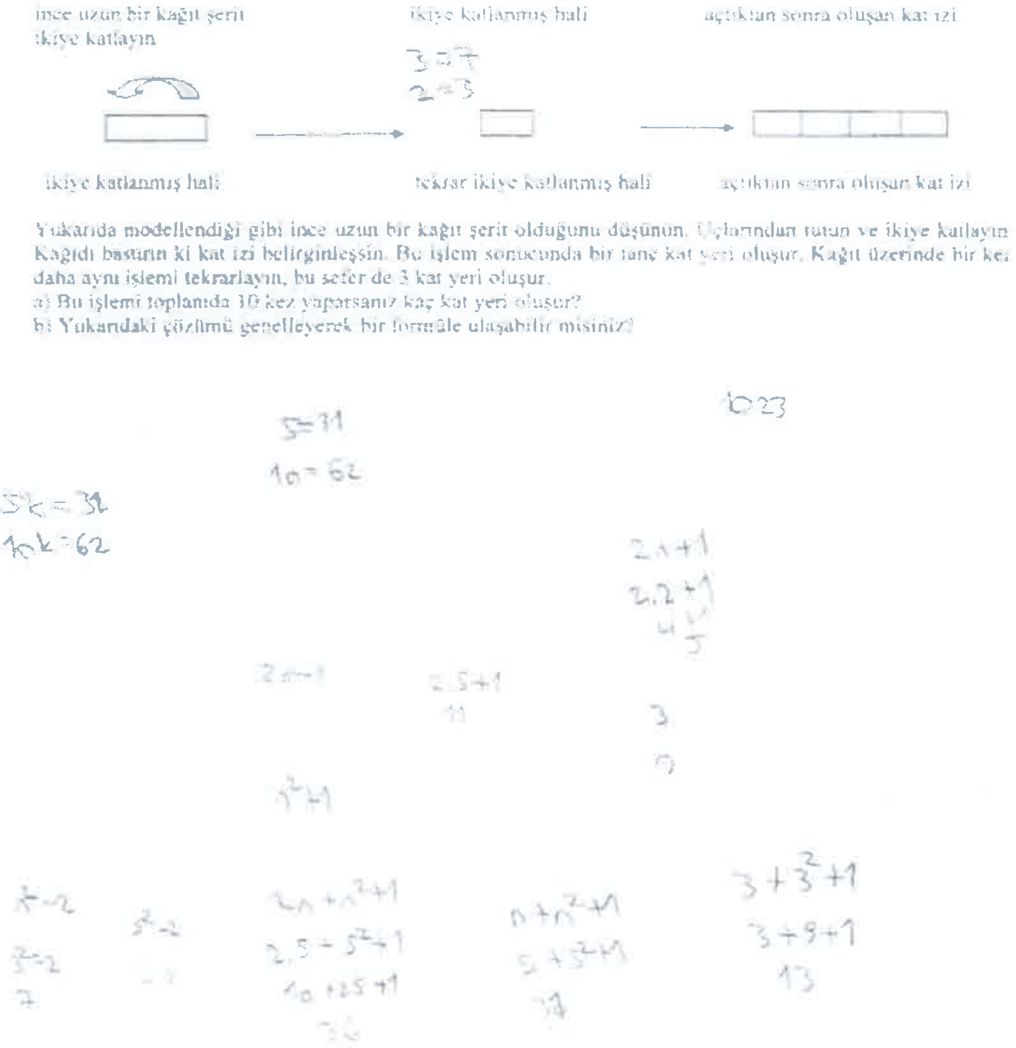
"*3.1. çizerek doğru bulanlar* " kategorisine ait bir örnek Şekil 45'de verilmiştir.



Şekil 45. 3.1. çizerek doğru bulanlara bir örnek

Yakın adıma ilerleme sorularının doğru cevabını çizerek verenler bu kategoride toplanmışlardır. Şekil 45'te de görüldüğü gibi öğrenciler çizmişler doğru saymışlar ve doğru sonuca ulaşmışlardır. Çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %1'i "3.1." kategorisi altına alınmıştır. Bu küçük bir orandır. 3.1. kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 11. sınıftan tek bir öğrencinin bulunduğu görülür.

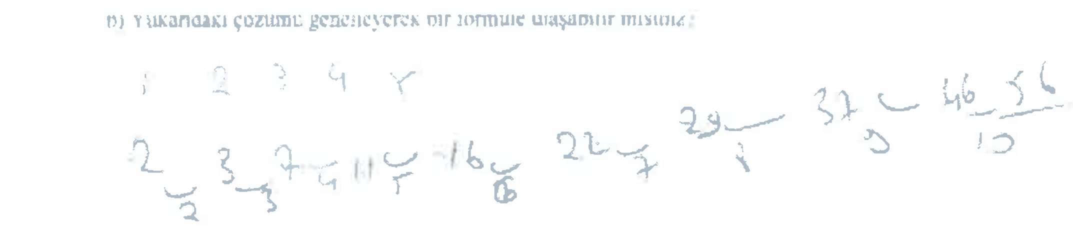
"*3.2. çizmeden doğru bulanlar* " kategorisine ait bir örnek Şekil 46'da verilmiştir.



Şekil 46. 3.2. çizmeden doğru bulanlara bir örnek

Gözlemlerin organizesi aşamasındaki 2.2.'nin devamı gibi görünen bu yordama aşamasının 2.2.'den farkı sorulara doğru cevap verilmesidir. 2.2.'de çizmemek yeterli iken 3.2.'de 1023 sayısının çizmeden bulunması gerekmektedir. Çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %31'i "3.2." kategorisi altına alınmıştır. Bu büyük bir orandır. 3.2. kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 11. sınıflar %53 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %6 ile 9. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise bu alt kategorideki cevaplar 9'da %6 iken 10. sınıfta yükselerek %27 ve 11. sınıfta biraz daha yükselerek %53 olmuş ve 12. sınıfta da düşerek %17olmuştur.

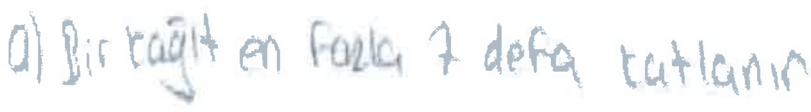
"*3.3. doğru bulamayanlar*" kategorisine ait bir örnek Şekil 47'de verilmiştir.



Şekil 47.3.3.doğru bulamayanlar

Buradaki öğrenciler 1023 cevabını hiçbir şekilde bulamamışlardır. Örnekte verilen öğrenci 2.2.'de alınırken yordama aşamasında 3.3.'e dahil edilmiştir çünkü doğru sonuca ulaşamamıştır. Öğrencilerin %55'i "doğru bulamayanlar" kategorisi altında değerlendirilmiştir. Sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 12. sınıflar %83 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %42 ile 11. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise bu alt kategorideki cevaplar 9'da %53 iken 10. sınıfta yükselerek %63 olmuştur. 11. sınıfta düşerek %42 olmuş ancak 12. sınıfta aksine yükselerek %83 olmuştur.

"**3.4. boş** " kategorisine ait bir örnek Şekil 48' de verilmiştir.



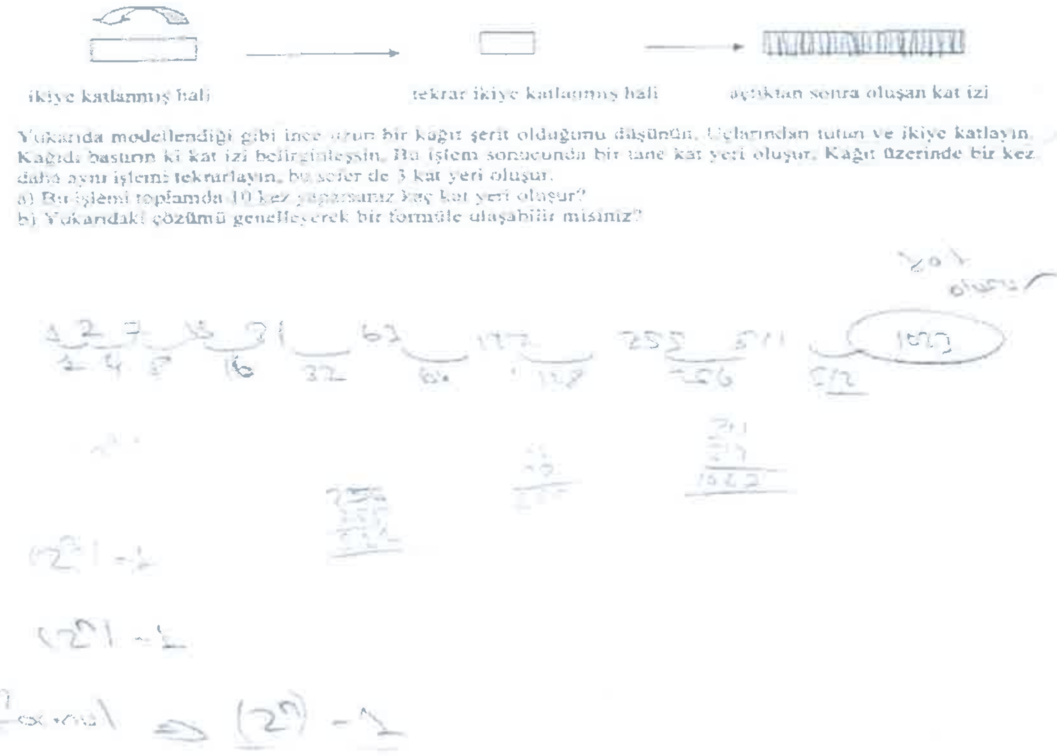
Şekil 48. 3.4.boş kategorisi için örnek bir çözüm

Öğrencilerin bazıları işlem hatası yapmıştır. Yaptıkları hata hem yordamalarına hem genellemelerine engel olduğu için bu aşama başarısız sayılmıştır. Bazıları boş bırakmıştır. Bazıları da yukarıdaki gibi yazmış ve çözmeyi denememiştir bile. *"Boş"* alt kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 9. sınıflar %41 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %0 ile 12. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise bu alt kategorideki cevaplar 9'da %41 iken 10. sınıfta düşerek %10 olmuştur. 11. sınıfta daha da düşerek %2 olmuş 12. sınıfta daha da düşerek %0 olmuştur.

4.3.4. "Yordamanın Testi" Aşaması

Tablo 8'den görüldüğü gibi "Yordamanın testi" aşaması başarılı ve başarısız olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. “Başarılı” kategorisi "4.1. test etme" ve "Başarısız" kategorisi de "4.2.boş (test etmeyenler)" den oluşmaktadır. Her bir kategori aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

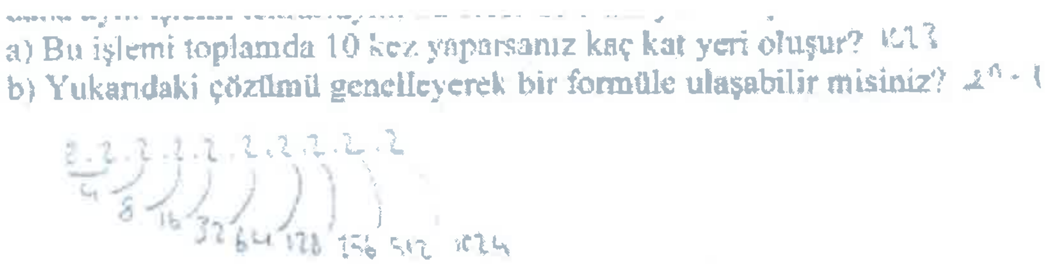
"*4.1. test etme*" kategorisine ait bir örnek Şekil 49'da verilmiştir.



Şekil 49.4.1 test etme

Hem çizerek hem de aradaki artışa yoğunlaşarak aynı sonuçları bulmuş ve test etmiştir. Burada 10 kezi çizmesi beklenmemiştir. Aradaki bir değer için yapmış olması da yeterli görülmüştür. Bu öğrenci $2^n - 1$ formülünü kullanmadan bu testi yapmıştır. Bazı öğrenciler hem yordamayı hem de genellemeyi birlikte test etmiştir. Çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %9’u “4.1.” kategorisi altına alınmıştır. 4.1. kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 11. sınıflar %22 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %0 ile 9 ve 12. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise bu alt kategorideki cevaplar 9'da %0 iken 10. sınıfta yükselerek %2 ve 11. sınıfta biraz daha yükselerek %22 olmuş ve 12. sınıfta düşerek %0 olmuştur.

"*4.2. boş (test etmeyenler)*" kategorisine ait bir örnek Şekil 50'de verilmiştir.



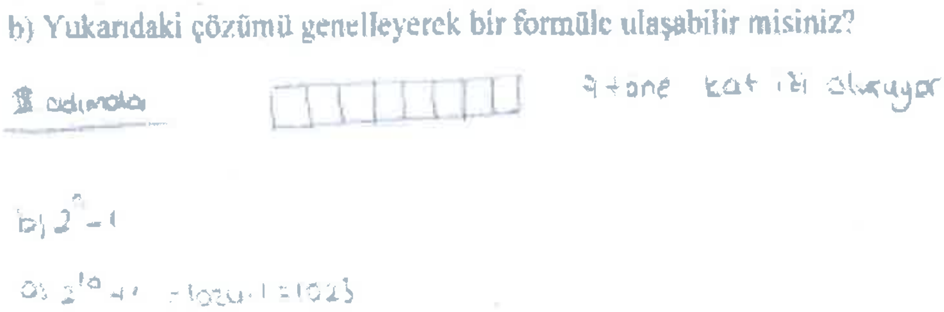
Şekil 50.4.2. boş (test etmeyenler)

Buradaki öğrenciler de ya kendilerine çok güvendiklerinden test etmemiştir ya da test edecek bir yöntem bulamamıştır. Çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %91'i "4.2." kategorisi altına alınmıştır. Bu büyük bir orandır. 4.2. kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 9 ve 12. sınıflar %100 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %78 ile 11. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise başarısız kategorisindeki cevaplar 9'da %100 iken 10. sınıfta biraz düşerek %98 olmuş 11. sınıfta biraz daha düşerek %78 olmuş ve aksine 12. sınıfta yükselerek %100 olmuştur.

4.3.5. "Genelleme" Aşaması

Tablo 8'den görüldüğü gibi "Genelleme" aşaması başarılı ve başarısız olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. "Başarılı" kategorisi "5.1. $2^n - 1$", "5.2. sözel " olmak üzere iki alt başlıktan oluşmaktadır ve "Başarısız" kategorisi de "5.3. Yanlış formüle genelleme" ve "5.5.Boş" olmak üzere iki alt başlıktan oluşmaktadır. Her bir kategori aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

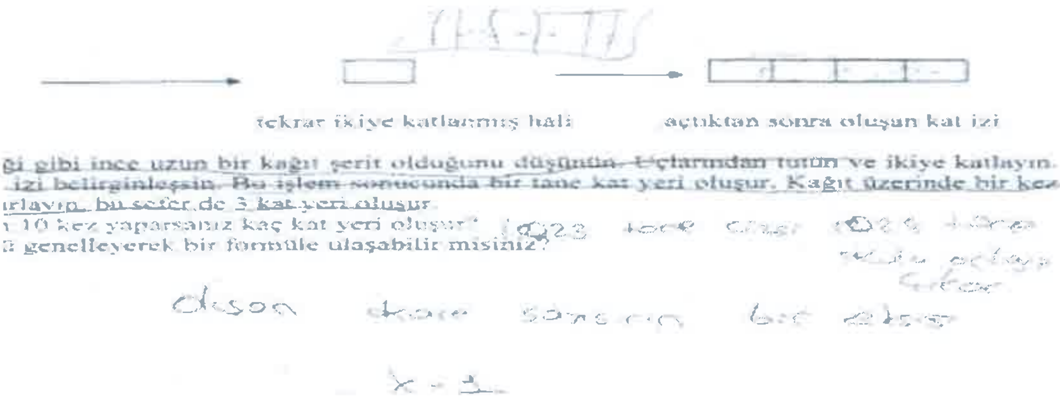
"*5.1.* $2^n - 1$" kategorisine ait bir örnek Şekil 51'de verilmiştir.



Şekil 51.5.1. $2^n - 1$ genellemesine örnek

Çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %24'ü "5.1." kategorisi altına alınmıştır. 5.1. kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 11.sınıflar %50 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %0 ile 9. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise bu alt kategorideki cevaplar 9'da %0 iken 10. sınıfta yükselerek %13 ve 11. sınıfta biraz daha yükselerek %50 olmuş ve 12. sınıfta düşerek %17 olmuştur.

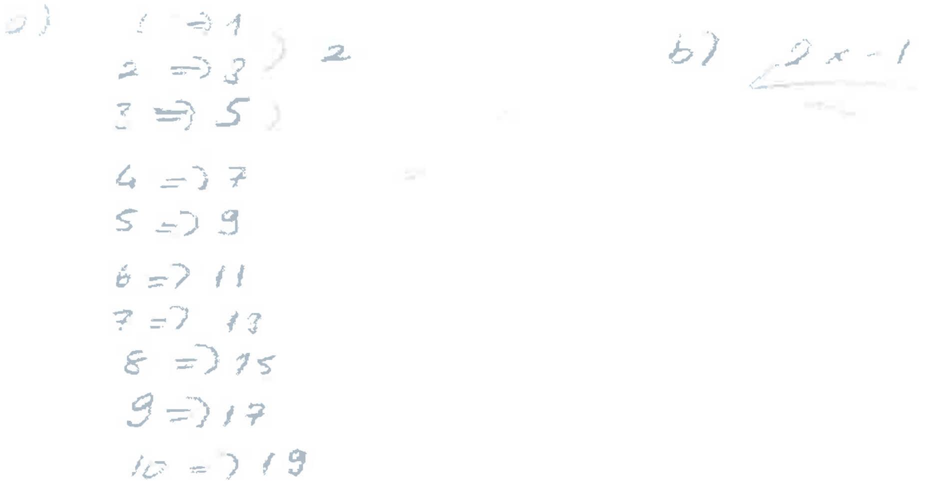
"<u>5.2. sözel</u>" kategorisine ait bir örnek Şekil 52'de verilmiştir.



Şekil 52. 5.2.sözel

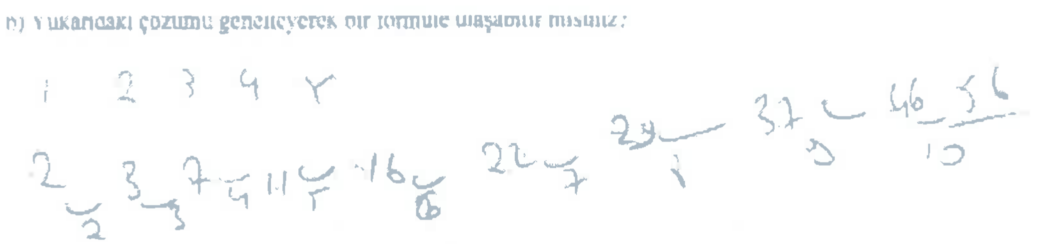
5.1. gibi görünen bu örnekte de görüldüğü gibi formül harfli ifade şeklinde değildir sözel ifade edilmiştir. Çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %2'si "5.2." kategorisi altına alınmıştır. Bu küçük bir orandır. 5.2. kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde sadece 10. sınıflar %8 oranında cevap vermişlerdir. Başka sınıflardan bu kategoriyi kullanan yoktur.

"<u>5.3. Yanlış formüle genelleme</u> " kategorisine ait bir örnek Şekil 53'de verilmiştir.



Şekil 53.5.3. Yanlış formüle genelleme

Başarısız olan öğrencilerden doğru formüle genelleyemeyen, yanlış formüle genelleyenlerin olduğu kategoridir. Cevaplar incelendiğinde çalışmaya katılan öğrencilerin %38'i "Yanlış formüle genelleme" kategorisi altında değerlendirilmiştir. Sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 12. sınıflar %56 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %28 ile 11. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise bu alt kategorideki cevaplar 9'da %38 iken 10. sınıfta artarak %42 olmuştur. 11. sınıfta azalarak %28 olmuş ancak 12. sınıfta tekrar artarak %56 olmuştur.
"*5.4. Boş*" kategorisine ait bir örnek Şekil 54'de verilmiştir.



Şekil 54.5.4.Boş bırakılan bir çözüm örneği

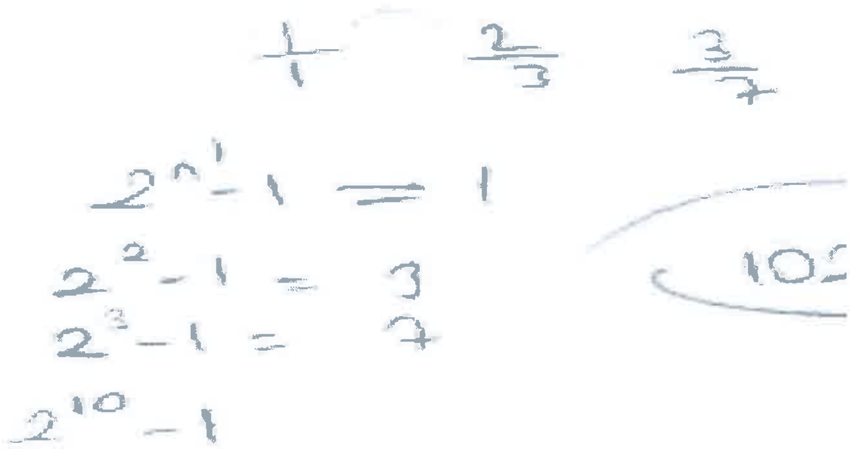
Doğru yordadıkları sonucu bir formüle genelleyemeyip boş bırakanların bulunduğu kategoridir. Cevap verenlerin %35 i "boş" kategorisi altında değerlendirilmiştir. *"Boş"*alt kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 9. sınıflar %62 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %22 ile 11. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise bu alt kategorideki cevaplar 9'da %62 iken 10. sınıfta biraz düşerek

%37 ve 11. sınıfta daha da düşerek %22 olmuş iken 12. sınıfta aksine artarak %28 olmuştur.

4.3.6. "Genellemenin Testi" Aşaması

Tablo 8'den görüldüğü gibi "Genellemenin testi" aşaması başarılı ve başarısız olmak üzere iki alt kategoriye ayrılmıştır. "Başarılı" kategorisi "6.1. genellemeyi test edenler" ve "Başarısız" kategorisi de "6.2. boş" dan oluşmaktadır. Her bir kategori aşağıda detaylı olarak açıklanmıştır.

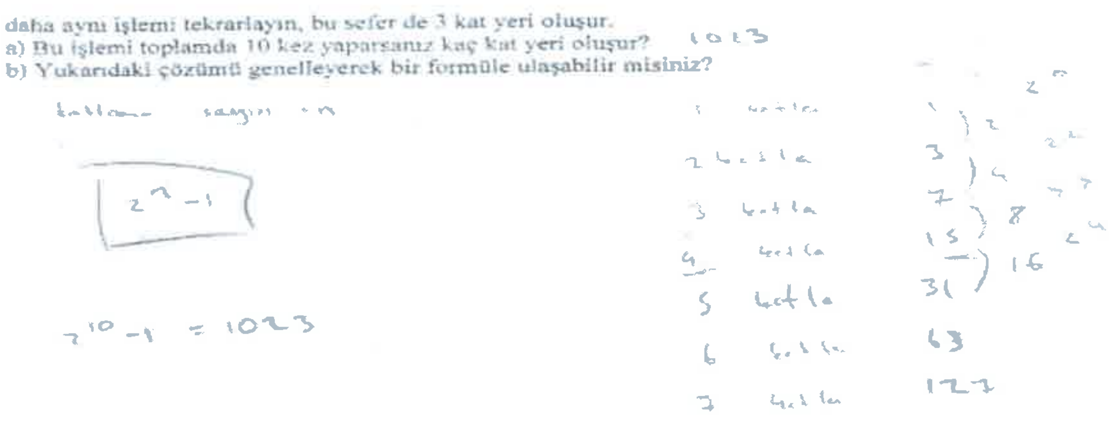
"*6.1. genellemeyi test edenler*" kategorisine ait bir örnek Şekil 55'de verilmiştir.



Şekil 55. 6.1. genellemeyi test edenlere bir çözüm örneği

Yordamanın testinde olduğu gibi burada da test eden öğrenciler çok azdır. Örnekte de görüldüğü gibi formülü soruda verilen değerlerle karşılaştırarak test etmiştir. Çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %4'ü "6.1." kategorisi altına alınmıştır. Bu küçük bir orandır. 6.1. kategorisinde cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 11. sınıflar %7 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %0 ile 9 ve 12. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise bu alt kategorideki cevaplar 9'da %0 iken 10. sınıfta yükselerek %4 ve 11. sınıfta biraz daha yükselerek %7 olmuş ve 12. sınıfta yeniden düşerek %0 olmuştur.

"*6.2. boş*" kategorisine ait bir örnek Şekil 56'da verilmiştir.



Şekil 56.6.2. boş bir çözüm örneği

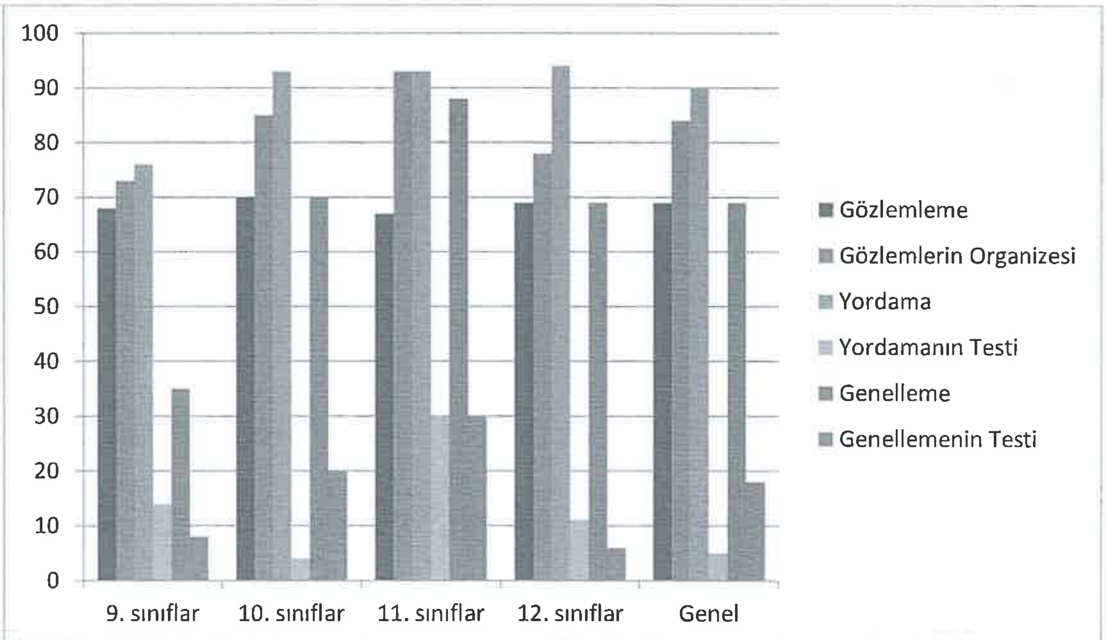
Yordamanın testinde de olduğu gibi burada da öğrenciler ya kendilerine çok güvendiklerinden test etmemiştir ya da test edecek bir yöntem bulamamıştır. Bu örnekte de öğrenci sadece 10 için değerini bulmuş diğerlerine bakmamıştır. Çalışmaya katılan öğrencilerin verdikleri cevaplardan %96'sı "başarısız" kategorisi altına alınmıştır. Bu büyük bir orandır. Başarısız cevap verenler sınıf seviyelerine göre incelendiğinde 9 ve 12. sınıflar %100 ile ilk sıradadır. En düşük oran ise %93 ile 11. sınıftadır. Diğer önemli bir bulgu ise bu alt kategorideki cevaplar 9'da %100 iken 10. sınıfta biraz düşerek %96 ve 11. sınıfta daha da düşerek %93 olmuş iken 12. sınıfta aksine artarak %100 olmuştur.

BÖLÜM V

TARTIŞMA ve SONUÇ

Ortaöğretim öğrencilerinin karşılaştıkları problemlerinin çözümünde tümevarımsal muhakeme aşamalarını nasıl düşündüklerinin hangi işlemsel araçları kullandıklarının incelendiği bu çalışmada tümevarımsal muhakeme aşamaları sırasıyla gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme ve genellemenin testi olarak ele alınmıştır. Ayrıca öğrencilerin bu aşamaları uygulayıp uygulamadıkları, kullanılmayan aşama varsa bunların tespit edilmeye çalışılmıştır. Ek olarak da kullanılan aşamaların soruya göre değişip değişmediği araştırılmıştır. Değişiyorsa sorunun içeriğinden mi yoksa soruluş şeklinden mi kaynaklandığı araştırılmıştır.

Aşağıdaki grafikte Kibrit çöpü sorusu için sınıf sınıf tümevarımsal muhakeme aşamalarının uygulanma yüzdeleri verilmiştir.



Grafik 1. Sınıflara göre tümevarımsal muhakeme aşamalarının uygulanma yüzdeleri (kibrit çöpü sorusu)

Grafik 1 den görüldüğü gibi 9. sınıflarda en çok kullanılan aşama yordama aşamasıdır. En az kullanılan aşama ise genellemenin testi aşamasıdır. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse yordama, gözlemlerin organizesi, gözlemleme, genelleme, yordamanın testi, genellemenin testi şeklindedir.

10. sınıflar için bakıldığında en çok kullanılan aşama yordama aşamasıdır. En az kullanılan aşama ise genellemenin testi aşamasıdır. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse yordama, gözlemlerin organizesi, gözlemleme, genelleme, genellemenin testi, yordamanın testi şeklindedir. Gözlemleme ve genelleme eşit seviyededir.

11. sınıflar için bakıldığında en çok kullanılan aşama gözlemlerin organizesi ve yordama aşamasıdır. Bu iki aşama eşit seviyededir. En az kullanılan aşama ise genellemenin testi ve yordamanın testi aşamalarıdır. Bu iki aşama da eşit seviyededir. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse yordama, gözlemlerin organizesi, genelleme, gözlemleme, genellemenin testi, yordamanın testi şeklindedir.

12. sınıflar için bakıldığında en çok kullanılan aşama yordama aşamasıdır. En az kullanılan aşama ise genellemenin testi aşamasıdır. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse yordama, gözlemlerin organizesi, genelleme, gözlemleme, yordamanın testi, genellemenin testi şeklindedir.

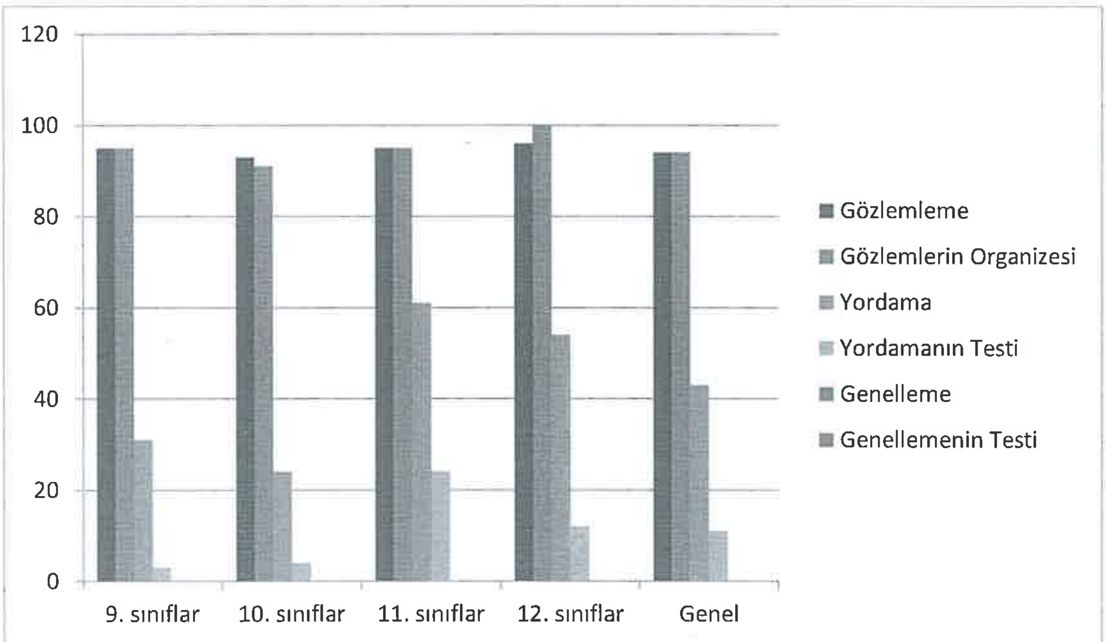
Tüm sınıflar için bakıldığında en çok kullanılan aşama yordama aşamasıdır. En az kullanılan aşama ise yordamanın testi aşamasıdır. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse yordama, gözlemlerin organizesi, genelleme, gözlemleme, genellemenin testi, yordamanın testi şeklindedir.

Grafiğin geneline bakılırsa en çok 12. sınıfların yordaması ve en az 10. sınıflarda yordamanın testi gözlemlenmiştir. Ayrıca grafikten gözlemleme, gözlemlerin organizesi ve yordama aşamaları arasından güçlü bir ilişki vardır. Aynı sırayla bir artış mevcuttur. En büyük fark yordama ve yordamanın testi aşamaları arasındadır.

1. soru için aşamalar sırasıyla uygulanmış denememektedir. Sırasıyla uygulanmış denebilmesi için gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme ve genellemenin testi şeklinde artmayan bir şekil elde edilmiş olmalıydı. Burada ise en yüksek başarı yordama aşamasında ve en düşük başarı yordamanın

testi aşamasındadır. Başarı sırası; yordama, gözlemlerin organizesi, gözlemleme, genelleme, genellemenin testi ve yordamanın testi şeklindedir. Gözlemleme ve genelleme eşit düzeydedir. 1. soru olan kibrit çöpü sorusu için sorunun çözümü sistematik ilerlemektedir. Geometrik sorulan kibrit çöpü sorusunda öğrencilerin sistematik bir yol izlediği ve verilen sayılar arasındaki ilişkiyi belirleyip verilmeyen sayıları doğru buldukları görülmektedir. Bu durum Arslan ve Yıldız'ın (2010) bulgusu ile tam olarak örtüşmektedir.

Aşağıdaki grafikte Ardışık sayı sorusu için sınıf sınıf tümevarımsal muhakeme aşamalarının uygulanma yüzdeleri verilmiştir.



Grafik 2. Sınıflara göre tümevarımsal muhakeme aşamalarının uygulanma yüzdeleri (ardışık sayı sorusu)

Grafik 2 den görüldüğü gibi 9. sınıflarda en çok kullanılan aşama gözlemleme ve gözlemlerin organizesi aşamasıdır. Bu aşamalar eşit seviyede kullanılmıştır. En az kullanılan aşama ise genelleme ve genellemenin testi aşamasıdır. İki aşama da hiç kullanılmsmıştır. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse gözlemleme ve gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme ve genellemenin testi şeklindedir.

10. sınıflarda en çok kullanılan aşama gözlemleme aşamasıdır. En az kullanılan aşama ise genelleme ve genellemenin testi aşamasıdır. İki aşama da hiç kullanılmsmıştır. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme ve genellemenin testi şeklindedir.

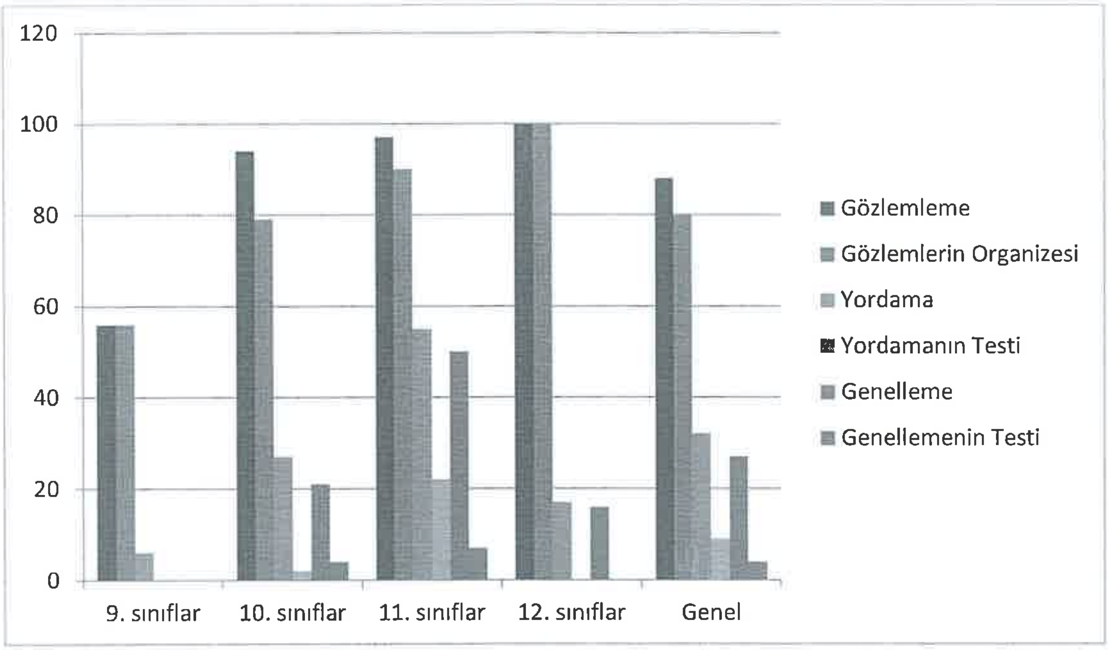
11. sınıflarda en çok kullanılan aşama gözlemleme ve gözlemlerin organizesi aşamasıdır. Bu aşamalar eşit seviyede kullanılmıştır. En az kullanılan aşama ise genelleme ve genellemenin testi aşamasıdır. İki aşama da hiç kullanılmsmıştır. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse gözlemleme ve gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme ve genellemenin testi şeklindedir. 9 ve 11 ler birbiriyle benzerlik göstermektedir.

12. sınıflarda en çok kullanılan aşama gözlemlerin organizesi aşamasıdır. En az kullanılan aşama ise genelleme ve genellemenin testi aşamasıdır. İki aşama da hiç kullanılmamıştır. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse gözlemlerin organizesi, gözlemleme, yordama, yordamanın testi, genelleme ve genellemenin testi şeklindedir.

Tüm sınıflar için bakıldığında 9 ve 11 lerle benzerlik göstermektedir. En çok kullanılan aşama gözlemleme ve gözlemlerin organizesi aşamasıdır. Bu aşamalar eşit seviyede kullanılmıştır. En az kullanılan aşama ise genelleme ve genellemenin testi aşamasıdır. İki aşama da hiç kullanılmsmıştır. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse gözlemleme ve gözlemlerin organizesi, yordama, yordamanın testi, genelleme ve genellemenin testi şeklindedir.

Grafiğin geneline bakılırsa en çok 12. sınıfların gözlemlerin organizesi aşaması ve en az tüm sınıflarda genelleme ve genellemenin testi gözlemlenmiştir. En büyük fark 12. sınıflarda gözlemlerin organizesi ile genelleme ve genellemenin testi aşamaları arasındadır.

Aşağıdaki grafikte Kağıt katlama sorusu için sınıf sınıf tümevarımsal muhakeme aşamalarının uygulanma yüzdeleri verilmiştir.



Grafik 3. Sınıflara göre tümevarımsal muhakeme aşamalarının uygulanma yüzdeleri (kağıt katlama sorusu)

Grafik 3 den görüldüğü gibi 9. sınıflarda en çok kullanılan aşama gözlemleme ve gözlemlerin organizesi aşamasıdır. Bu iki aşama eşit seviyede kullanılmıştır. En az kullanılan aşama ise yordamanın testi, genelleme ve genellemenin testi aşamasıdır. Bu üç aşama hiç kullanılmamıştır. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, genelleme, yordamanın testi, genellemenin testi şeklindedir.

10. sınıflar için bakıldığında en çok kullanılan aşama gözlemleme aşamasıdır. En az kullanılan aşama ise yordamanın testi aşamasıdır. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, genelleme, genellemenin testi, yordamanın testi şeklindedir.

11. sınıflar için bakıldığında en çok kullanılan aşama gözlemleme ve gözlemlerin organizesi aşamasıdır. Bu ikisi eşit seviyede kullanılmıştır. En az kullanılan aşama ise genellemenin testi aşamasıdır. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, genelleme, yordamanın testi, genellemenin testi şeklindedir.

12. sınıflar için bakıldığında en çok kullanılan aşama gözlemleme ve ggözlemlerin organizesi aşamalarıdır. En az kullanılan aşama ise genellemenin testi ve yordamanın testi aşamasıdır. Bu iki aşama hiç kullanılmamıştır. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, genelleme, yordamanın testi ve genellemenin testi şeklindedir.

Tüm sınıflar için bakıldığında en çok kullanılan aşama 12. sınıflarda gözlemleme ve gözlemlerin organizesi aşamalarıdır. Bu aşamalar eşit seviyede ve yüzde yüzdür. En az kullanılan aşama ise genellemenin testi aşamasıdır. Aşamaları çoktan aza doğru sıralamak gerekirse gözlemleme, gözlemlerin organizesi, yordama, genelleme, yordamanın testi, genellemenin testi şeklindedir.

Grafiğin geneline bakılırsa en çok 12. sınıfların gözlemleme ve gözlemlerin organizesi aşamaları kullanılmıştır ve en az 9. sınıflarda yordamanın testi ve genellemenin testidir. Ayrıca grafikten gözlemleme, gözlemlerin organizesi ve yordama aşamaları arasından güçlü bir ilişki vardır. İlk sorunun aksine aynı sırayla bir artmama mevcuttur. En büyük fark gözlemleme, gözlemlerin organizesi ile genelllemenin testi ve yordamanın testi arasındadır.

Bu çalışmada 1. soru olan kibrit çöpü sorusu ve 3. soru olan kağıt katlama sorusu geometrik, 2. soru olan ardışık sayıların toplamı sorusu aritmetik sorudur. Navruz'un (2012) çalışması ile şu bulgu aynıdır ki iki çalışmada da geometrik sorularda yordamanın testi ve genellemenin testi aşamaları en düşük seviyelerdedir. Bu bulgu en önemli bulgulardandır. Diğer soru olan 2. soru aritmetik bir sorudur. Navruz'un (2012) çalışmasında aritmetik sorularda en başarılı aşama genelleme aşaması iken bu çalışmada gözlemleme ve gözlemlerin organizesi aşamalarıdır. Eldeki çalışmada genelleme ve genellemenin testi en başarısız aşamalardır, hatta başarının sıfır olduğu aşamalardır. Navruz'un (2012) çalışmasında da sorulan altı aritmetik sorudan ikisi hariç dördünde gözlemleme ve gözlemlerin organizasyonu aşamaları en başarısız aşamalardır, hatta başarının sıfır olduğu aşamalardır. Yani iki çalışmada en başarılı ve en başarısız aşamalar yer değiştirmiştir.

Navruz'un (2012) çalışmasında geometrik ve aritmetik öğrenme alanlarında tümevarımsal düşünce aşamalarının tamamının sergilendiği tespit edilmiştir. Ancak bu çalışmada sorulan aritmetik olan 2. soruda genelleme ve genellemenin testi hiç sergilenmemiştir. Diğer çalışmada elde edilen bulgu ile bu bulgu çakışmaktadır. Navruz'un (2012) çalışmasında bu sürecin aritmetik öğrenme alanında geometri öğrenme alanına göre daha başarılı bir şekilde işletildiği görülmüştür. Eldeki çalışmada ise aksine geometrik sorularda aritmetik sorulara göre daha yüksek başarı elde edilmiştir.

Bulgularda elde edilen sonuçlara göre soru şekilli ve cebirsel sorulduğunda soruyu daha rahat algıladıkları gözlemlenmiştir. Şekilsiz sorulan sorularda başarının daha düşük olduğu gözlemlenmiştir. Kolay sorularda gerek duymadıkları için yordamanın ve genellemenin testi aşamalarında da başarının düşük olduğu gözlemlenmiştir. Zorlandıkları sorularda da test edecek bir yöntem bulamadıkları için zorlandıkları gözlemlenmiştir. 9. sınıfların genellikle en düşük başarıya sahip oldukları gözlemlenmiştir. Akademik olarak diğer sınıflardan daha az bilgiye sahip olduklarından kaynaklanabileceği düşünülmektedir. Ancak benzer sorular benzer çalışmalarda ilköğretimin ikinci kademesinde uygulandığı için burada 9. sınıflara da uygulanmasında bir mahsur görülmemiştir. 12. sınıfların daha başarılı olması beklenmiştir ama genellikle 12'ler başarı seviyesindeki düzeni bozmuştur. Bunun sebebi yaklaşan sınavın kaygısı olabilir. Başarı sırasında 12'lerin düzeni bozduğu gözlemlenmiştir 11'ler 12'lerden daha çok başarı göstermişlerdir.

BÖLÜM VI

ÖNERİLER

Çalışmanın bulgu ve sonuçları doğrultusunda ileride yapılacak çalışmalara aşağıdaki öneriler sunulabilir.

1. Bu çalışmada durum olarak problemler alınmıştır ve durumlara göre tümevarımsal muhakeme sürecinin aşamaları incelenmiştir. Yapılacak olan çalışmalarda durum olarak her sınıftan bir veya birkaç öğrenci seçilerek detaylı incelemeler yapılabilir.
2. Çalışmada üç farklı soru ile veri toplanmıştır. İleride yapılacak olan çalışmalarda aynı soru tarzından iki farklı soru seçilebilir. Aynı tarzda olan iki soru üzerinde kıyaslama yapılabilir. Ya da daha farklı kriterlerdeki problemlerde eklenerek incelenemeler yapılabilir.
3. Çalışmaya katılan öğrencilere yöneltilen sorular zaman aldığı için her biri ayrı oturumda uygulanmıştır. Bu nedenle oturumlara katılan öğrencilerin sayısında farklılıklar olmuştur. Bu nedenle yapılacak olan çalışmalarda veriler tek oturumda toplanabilir. Bu sayede bir öğrenci temele alınarak soruya göre nasıl düşünme süreçlerinin farklılaştığı incelenebilir.

4. Bu çalışmada veriler yazılı doküman ile her problem için tek oturumda toplanmıştır. Tüm sınıf seviyelerini içine alacak tümevarımsal düşünce aşamalarının gelişimi konusunda uzun süreli araştırmalar yapılabilir. Böylece tümevarımsal düşünce aşamalarının gelişim sürecinin nasıl gerçekleştiği, süreçte hangi aşamaların nasıl sergilendiği ve değişikliğe uğradığı konusunda daha ayrıntılı bilgiler elde edilebilir.

5. Çalışmanın katılımcıları 9, 10, 11 ve 12. Sınıf öğrencileri oluşturmaktadır. İleride yapılacak olan çalışmalar öğretmen ve öğretmen adaylarını da içine alacak şekilde yapılabilir. Bu sayede öğrenci ve öğretmen veya öğretmen adaylarının tümavarımsal düşünme süreçleri karşılaştırılabilir.

6. Son yıllarda Ölçme Değerlendirme ve Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü'nün yayınladığı örnek sorular ve Öğrenci Seçme ve Yerleştirme Merkezi'nin sınavlarda sorduğu sorular incelendiğinde tümevarımsal muhakeme becerisi gerektiren sorularda artış görülmektedir. Bu sebeple her kademedeki öğrencilerin bu becerilerinin gelişmesi gerekmektedir. Çalışmanın bulguları yordamının testi ve genellemenin testi aşamalarının pek fazla yapılmadığını göstermiştir. Gerek sınıf içi uygulamalarda gerekse hazırlanacak öğretim programlarında tümevarımsal muhakeme süreçlerine vurgu yapılması önerilmektedir.

KAYNAKLAR

Akay, H., Soybaş, D., & Argün, Z. (2006). Problem kurma deneyimleri ve matematik öğretiminde açık-uçlu soruların kullanımı. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 14*(1), 129146.

Albayrak-Bahtiyari, Ö. (2010) *8. Sınıf Matematik Öğretiminde İspat ve Muhakeme Kavramlarının ve Önemlerinin Farkındalığı*. Yüksek Lisans Tezi , Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen Ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Anabilim Dalı, Erzurum.

Alkove, L. D. and McCarty, B. J. (1992). Plain talk: Recognizing positivism and constructivism in practice. Action in Teacher Education, 14, 16-22.

Allen, L. G. (2001) "*Teaching Mathematical Induction: An Alternative Approach*". Mathematics Teacher, 94, 500-504.

Altıparmak, K. & Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme. *Ege Eğitim Dergisi*, (6) 1, 25-37.

Arsac, G. (2007). Origin of mathematical proof. In P. Boero (Ed.), Theorems in school: Fromhistory, epistemology and cognition to classroom practice (27–42). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Arslan, Ç. (2007). *İlköğretim öğrencilerinde muhakeme etme ve ispatlama düşüncesinin gelişimi*. Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bursa.

Arslan, S. & Yıldız, C. (2010). 11. sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. *Eğitim ve bilim*, 35(156).

Ball, D. (1996). Teacher learning and the mathematics reforms: What we think we know and what we need to learn. Phi Delta Kappan, 77, 500-508.

Beckmann, S. 2002. Mathematics for elemantary teachers: "Making sense by/explaningwhy". Department of Mathematics. University of Georgia, Georgia, USA

Birken, M., & Coon, A.C. (2008). Discovering patterns in mathematics and poetry. Amsterdam-Newyork: Rodopi.

Burns, M. (2000). About Teaching Mathematics A-K 8 research. California: Math Solutions Publication.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y Caracterización del Razonamiento Inductivo Utilizadopor Estudiantes de Educación Secundaria al Resolver Tareas*

Relacionadascon Sucesiones Lineales y Cuadráticas. [DescriptionandCharacterization of Inductive Reasoning Used by Secondary Students in Solving Tasks Related to Linear Quadratic Sequences]. Universidad de Granada. Doctoralthesis. Granada.

Cañadas, M. C. & Castro, E. (2007). "A Proposal of Categorisation for Analysing Inductive Reasoning". PNA,1 (2), 67-78.

Cañadas, M. C., Castro, E. & Castro, E. (2009). "Using A Model to Describe Students' Inductive Reasoning in Problem Solving". Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7 (1), 261-278.

Cañadas, M. C., J. Deulofeu, L. Figueiras, D. Reidand A. Yevdokimov. (2008). "TheConjecturingProcess: Perspectives in Theoryand Implications in Practice". Journal of Teachingand Learning, 5 (1), 55-72

Cathcart, W. G., V. M. Pothier, T. H. Vanceand N. S. Bezuk. (2003). Learning Mathematics in Elementary and Middle Schools. River, N. J: Merrill/ PrenticeHall

Charlesworth, R. &Lind, K. K. (2010). Math and science for young children. (6thed). Belmont, CA: Wadsworth, Cengage Learning. *s. 214*

Clements, D. H., Sarama, J., & DiBiase, A.-M.,(Eds.). (2004). Engagingyoungchildren in mathematics: Standards for early childhood mathematics education. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates. s. 52;

Demir, E., (2017). *Ortaöğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Muhakeme Hatalarının İspatlama Bağlamında İncelenmesi*, Doktora tezi, KATÜ Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Demir, G.; Vural-Akar, R. (2017). Ortaöğretim Matematik Programının Hedeflediği Matematiksel Yeterlilik ve Becerilerinin Kazandırılma Sürecinin Öğretmen Görüşleri Temelinde İncelenmesi. *Adnan Menderes Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 4.1: 118-139.

Edwards, L., (1997). Exploring the territory before proof: Students' generalizations in a computer micro world for transformation geometry, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 2(1), 187-215.

Erdem, E. (2011). *İlköğretim 7. Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel ve Olasılıksal Muhakeme Becerilerinin İncelenmesi*. Yayımlanmamış yüksek lisans tezi. Adıyaman Üniversitesi, Adıyaman.

Erdem, E., Gürbüz, R. & Duran, H. (2011). Geçmişten Günümüze Gündelik Yaşamda Kullanılan Matematik Üzerine: Teorik Değil Pratik. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi*, 2(3), 232-246.

Erdem, E. (2015). *Zenginleştirilmiş Öğrenme Ortamının Matematiksel Muhakeme ve Tutuma Etkisi*. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum.

Ev-Çimen, E. (2008). *Matematik Öğretiminde, Bireye "Matematiksel Güç" Kazandırmaya Yönelik Ortam Tasarımı ve Buna Uygun Öğretmen Etkinlikleri Geliştirilmesi*. Doktora Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir

Erdem, E.,& Gürbüz, R. (2015). An analysis of seventh-gradestudents' mathematical reasoning. *Çukurova University Faculty of Education Journal*, 45(1), 123-142.

Featherstone, H., Smith, S., Beasley, K., Corbin, D., & Shank, C. (1995). Expandingtheequation: Learning mathematics through teaching in new ways. East Lansing, MI: National Center forResearch on Teacher Learning.

Frederiksen, N. (1984). Implications of cognitive theory for instruction in problem solving. Review of Educational Research, 54, 363-407.

Gök-Çolak, F., (2016). *Örüntü Temelli Matematik Eğitimi Programının 61-72 Aylık Çocukların Akıl Yürütme Becerisine Etkisi*. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Gürbüz, R. & Erdem, E. (2014). Matematiksel ve Olasılıksal Muhakeme Arasındaki İlişkinin İncelenmesi: 7. Sınıf Örneği. *Adıyaman Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Dergisi*, 7(16), 205-230.

Henningsen, M. andStein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: classroom based factors that support and inhibithig h-level mathematical thinking and reasoning. Journal for Research in Mathematics Education, 28(5), 524-549.

İncebacak & Ersoy (2018). Reasoning Skills of Secondary School Students Towards PISA Questions İnönü University Journal of the Faculty of Education Vol 19, No 2, 2018 pp. 269-292

İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi*. Doktora Tezi. Boğaziçi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,İstanbul.

Kandamar, H. (2000) Soyut matematik 1 ,no:15, sayfa 17 ,Adnan Menderes Üniversitesi Yayınları.

Kosonen, P. O. (1992). Effects of teaching statistical laws on reasoning about problems. Thesis submitted in partialfullfilment of the requirements for the degree of doctor of philosophy. Faculty of Education, Simon Fraser University.

Lannin, J. K. (2004). DevelopingMPbyusingexplicitandrecursivereasoning. MathematicsTeacher, 98(4), 216-253.

Mandacı-Şahin, S. (2007). *8. Sınıf Öğrencilerinin Matematik Gücünün Belirlenmesi.*Doktora Tezi. Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). Thinking Mathematically. Second Edition.

Miyazaki, M. (2000). Levels of Proof in Lover Secondary School Mathematics. Educational Studies in Mathematics. 41, 47-68. Kulwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands.

Mulligan, J. T.,&Mitchelmore, M. C. (2013). Earlyawareness of mathematical pattern and structure. In Reconceptualizing early mathematics learning (pp. 29-45). SpringerNetherlands.

Navruz, V. (2012) *İlköğretim ikinci kademe öğrencilerinin matematiksel problemlerin çözümünde sergiledikleri tümevarımsal düşünce süreçlerinin incelenmesi.* Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Kayseri.

NCTM, (1989). Curriculumand Evaluation Standardsfor School Mathematics. Reston: Virginia.

NCTM, (2000). Principles and Standarts for School Mathematics. Reston: VA.

Neubert, G. A. & J. B. Binko. (1992). Inductive Reasoning in the Secondary Classroom. Washington DC: National Education Association.

Özer, Ö. & Arıkan, A. (2000). Lise matematik derslerinde öğrencilerin ispat yapabilme düzeyleri.V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, 2, 1083-10989.

Palabıyık, U.,& Akkuş-İspir, O. (2011). Örüntü temelli cebir öğretiminin öğrencilerin cebirsel düşünme becerileri ve matematiğe karşı tutumlarına etkisi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 30, 111-123.

Papic, M.,& Mulligan, J. T. (2005). *Pre-schoolers' mathematical patterning. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, A. McDonough, R. Pierce, & A. Roche (Eds.), Building connections: Theory, research and practice (Proceedings of the28th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, Melbourne, pp. 609). Sydney: MERGA.*

PISA (2012). Türkiye Üzerine Değerlendirme ve Öneriler. Ankara: Öncü Basımevi

PISA (2015). Araştırması Ulusal Nihai Rapor. (D. Anıl, Y. Ö. Özkan, E. Demir). Ankara: İşkur Matbaacılık.

PISA (2015). Uluslararası Öğrenci Başarılarını Değerlendirme Programı - Örnek Problem Çözme Soruları. (177), Ankara Milli Eğitim Bakanlığı: Ölçme Değerlendirme ve Sınav Hizmetleri Genel Müdürlüğü.

Pilten, P. (2008). *Üstbiliş stratejileri öğretiminin ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin muhakeme yeteneğine etkisi*. Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Pólya, G. (1967). Le Découvertedes Mathématiques. [Thediscovery of mathematics]. Paris: DUNOD.

Pólya, G. (1988). How to SolveIt. New Jersey, NJ: Princeton University Pres.

Reid, D. (2002). "Conjectures and Refutations in Grade 5 Mathematics". Journalfor Research in Mathematics Education, 33(1), 5-29.

Selden, A. and Selden, J. (2003). Validations of proofsconsidered as texts: Can under graduatestell whether an argument proves a theorem? Journal for Research in Mathematics Education, 34(1), 4-36.

Smith, E. E.,&Kosslyn, S. M., (2014). Bilişsel psikoloji.(M. Şahin, Çev.). Adana: Nobel., s. 429

Souviney, R. J. (1994). Learning to teach mathematics. 2nded-New York: Merrill., *s. 368*

Steele, D. (2005). Using writing to access students" schemata knowledge for algebraic thinking. School Science and Mathematics, 103 (3), 142-154.

Suzuki, K. (1997). Cognitive constructsmeasured in word problems: A comparison of students' responses in performance-based tasksand multiple-choice tasks for reasoning. Paperpresented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago

Tanışlı, D. (2008). *İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerinin belirlenmesi*. Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimler Enstitüsü, Eskişehir.

TIMMS 2015 Ulusal Raporu http://timss.meb.gov.tr/wpcontent/uploads/TIMSS_2015_Ulusal_Rapor.pdf/24).

Toulmin, S., Rieke, R. andJanik, A. 1984. An introduction to reasoning (Second Edition). Macmillan Publishing Co., Inc. New York.

Tural, H. (2005). *İlköğretim matematik öğretiminde oyun ve etkinliklerle öğretimin erişi ve tutuma etkisi*.Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Malatya.

Türk Dil Kurumu(TDK), Güncel Türkçe Sözlük, (www.tdk.gov.tr,2019)

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi* 24 : 234-243

Uygur-Kabael, T.,&Tanışlı, D. (2010). Cebirsel düşünme sürecinde örüntüden fonksiyona öğretim. İlköğretim Online, 9(1), 213–228.

Yaman, H. (2010). *İlköğretim öğrencilerinin matematiksel örüntülerdeki ilişkileri algılayışları üzerine bir inceleme*. Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Ankara.

Yavuz-Mumcu, H. (2011). *12. Sınıf Öğrencilerinin Matematiği Kullanma Becerilerinin Yorumlanması* .Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Yeşildere, S. ve Türnüklü, E. B. (2007). Öğrencilerin matematiksel düşünme ve akıl yürütme süreçlerinin incelenmesi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi* Dergisi, 40(1) :181-213

Yıldırım, A., ve Şimşek, H. (2003). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. Ankara: Seçkin Yayıncılık