MARMARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİNİN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

HAZIRLAYAN

SEVİL KIVRAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN

PROF. DR. NEŞE DERNEK

İSTANBUL, 2017

MARMARA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİNİN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

HAZIRLAYAN

SEVİL KIVRAK

(0521114005)

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

UYGULAMALI MATEMATİK PROGRAMI

DANIŞMAN

PROF. DR. NEŞE DERNEK

İSTANBUL, 2017

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca desteğini her alanda hissettiğim, bana gösterdiği emek ve sabrı her zaman hatırlayacağım ve müteşekkir kalacağım tez danışmanım sayın hocam Prof. Dr. Neşe Dernek ile bilgi ve tecrübesiyle her zaman yanımda olan sayın hocam Prof. Dr. Ahmet Dernek'e teşekkürü bir borç bilirim. Yine manevi desteği ile yanımda olan eşim ve aileme de teşekkürlerimi sunarım.

Sevil Kıvrak

Nisan-2017

İÇİNDEKİLER

Şekil Listesi:

Sembol Listesi

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathcal{L}$	:Laplace İntegral Dönüşümü
$\mathcal{L}_2$	: L_2 İntegral Dönüşümü
$\mathcal{L}_n$	: L_n İntegral Dönüşümü
$\mathcal{S}$	: Stieltjest İntegral Dönüşümü
$\mathcal{P}$	: Widder Potansiyel integral Dönüşümü
$\mathrm{Re}(\ )$	: Bir Karmaşık Sayının Reel Kısmı
$f(x) * g(x)$	: f(x) ve g(x) fonksiyonlarının Konvolüsyonu
$f^n(x)$	: f(x) Fonksiyonunun n. Dereceden Türevi
$O(\ )$	: Bir fonksiyonun Üstel Mertebeli Olduğunu Gösteren İfade
$Erf(\ )$	: Hata Fonksiyonu
$Erfc(\ )$	:Tamamlayıcı Hata Fonksiyonu
$\Gamma(\ )$	:G Gamma Fonksiyonu
$H(\ )$	: Hermite Fonksiyonu
$\frac{df}{dx}$	: f Fonksiyonunun x değişkenine göre türevi
$\frac{\partial f}{\partial x}$	: Birden Fazla Değişkene Sahip f Fonksiyonunun Sadece x Değişkenine Göre Türevi
δ_x	: Delta Türev Operatörü

İNTEGRAL DÖNÜŞÜMLERİNİN BAŞLANGIÇ VE SINIR DEĞER PROBLEMLERİNE UYGULANMASI

Fizik, mühendislik ve uygulamalı matematik alanlarında en çok karşımıza çıkan denklem türleri adi ve kısmi türevli denklemlerdir. Bu denklemlerin birçok çözüm yöntemi mevcuttur. Bunların içerisinde en yaygını elbette Laplace dönüşümünün kullanımıdır. Fakat bazı durumlarda Laplace dönüşümünün kullanımı çözüm sürecini uzatmakta, uzun ve karmaşık cebirsel işlemler gerektirmekte ve hatta bazen çözüme Laplace dönüşümü ile ulaşılamamaktadır. Genelleştirilmiş Laplace dönüşümünün kullanımı uygun katsayılı adi ve başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümünü kolaylaştırmakta ve yine çözülemeyen bazı denklemlerin çözümü bu yöntem ile bulunabilmektedir.

Bu tezde de genelleştirilmiş Laplace dönüşümü ile bu tür denklemlerin çözümüne yer verilmiştir. Bunun yanı sıra bu tür denklemlerden hangilerinin genelleştirilmiş Laplace dönüşümü ile çözüme ulaşabileceğini çözüme başlamadan da kestirebilmek adına kullanılabilecek denklemlerde genelleştirmeler yapılmıştır. Bulunan sonuçlar ışığında hazırlanan iki makale 4. ve 5. IECMSA uluslararası matematik konferansında sunulmuştur. Yine hazırlanan makalelerden bir tanesi uluslararası akademik bir dergi olan "Konuralp Journal of Mathematics" dergisinde yayınlanmıştır.

Sevil Kıvrak

Nisan-2017

ABSTRACT

Ordinary and partial differential equations are the most commonly used equation types that are used in Physics, Engineering and applied mathematics. For these equations, there are several solution techniques available in the literature. One of the most popular solution alternatives is the usage of integral transforms, especially Laplace transform. However, in some situations using Laplace transform would cause a solution process with long algebraic calculations and also it would make it impossible to find the solution. In these kind of ordinary differential equations and/or initial and boundary value problems with appropriate factors using generalized Integral transforms would make the solution process easier and shorter. By using generalized Laplace transform L_n, it is even possible to find solutions of O.D.E and initial and boundary value problems that could not be found by using the ordinary Laplace transform.

In this thesis, the usage of generalized Laplace transform within these kinds of situations that are explained above is discussed. At the same time, since it is very important and time saving to be able to understand what kind of initial and boundary value problems and O.D.E.s can be solved by using this technique, various generalizations of these equations and problems will also be discussed. The two articles that have been prepared in the light of these findings were presented at the 4^{th} and 5^{th} International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications and also one of the papers was published at an international mathematics journal, Konuralp Journal of Mathematics.

Sevil Kıvrak

April-2017

1 BÖLÜM : GİRİŞ

1.1 Tarihsel Gelişim

Kısmi türevli denklemlerin çözümünde sıklıkla başvurulan yöntemlerden biri integral dönüşümlerin kullanılmasıdır. Aslında, integral dönüşümlerin operasyonel matematikte önemli metodlardan biri olacağının ilk sinyali uygulamalı matematik, matematiksel fizik ve mühendislik alanlarında artan çalışmalar olmuştur. Fen ve mühendislik alanlarında hem teori hem de uygulama sağlayan matematiksel yöntemlere artan talep, integral dönüşümlerin yararını ve bu alana duyulan ihtiyacı açıkça ortaya sermiştir. İntegral dönüşümlerin bir çok matematiksel ve fiziksel uygulamasını bir kenara bırakırsak, integral dönüşüm konusu hala bilimsel çalışmalarda ve araştırmalarda da en büyük ilgi alanlarından birini oluşturmaktadır.

İntegral dönüşümün önemi, lineer diferansiyel ve integral denklemleri için başlangıç değer ve başlangıç - sınır değer problemlerin çözümünde güçlü operasyonel yöntemler sağlanamasından geçmektedir. Özellikle kısmi türevli denklemin tanım kümesindeki çözümü oldukça zaman alıcı ve uğraştırıcı ise integral dönüşüm denklemi, matematiksel işlemlerinin çok daha kolay olduğu bir forma taşıma ve orada çözme imkanı sağlar. Bu yol ile, dönüştürülmüş formda çözüm bulunduktan sonra ters integral dönüşüm yöntemi kullanılarak orjinal kısmi türevli denklemin çözümü bulunmuş olur. Yani, integral dönüşüm kullanılarak çözülen bir kısmi diferansiyel denklemdeki çözüm süreci, dönüştür - çöz - ters dönüştür olarak özetlenebilir. Bu yöntem çoğu çözümünde zorlanılan veya oldukça zaman alıcı biçimde çözümüne ulaşılabilen kısmi ve adi diferansiyel denklemlerin çözümünde sağladığı kolaylık sebebiyle oldukça sık biçimde kullanılır. Kısmi ve adi diferansiyel denklemlerin Bilgisayar, Fen, Uygulamalı matematik ve Mühendislik gibi alanlarda ne denli sık karşımıza çıktığı ve İntegral dönüşümlerin bu denklemlerin çözümüne katkısı düşünülürse, integral dönüşümün önemi daha sağlıklı biçimde görülmüş olur. İntegral dönüşümün tanımını verdikten sonra biraz da integral dönüşümün bilim dünyasındaki yolculuğuna yer vereceğiz.

Tanım 1.1 *İntegral Dönüşüm*

$f(x)$ fonksiyonun integral dönüşümü $\mathcal{F}(p)$;

$$\mathcal{F}(p) = \int_a^b K(p,x)f(x)dx$$

olarak tanımlanır. Burada K fonksiyonu p ve x'e bağlı kuralları belirlenmiş bir fonksiyondur. $K(p,x)$ fonksiyonuna dönüşümün çekirdeği ismi verilir.

Herhangi bir problemde böyle bir dönüşün kullanımının avantajlı olabilmesi için $\mathcal{F}(p)$ nin belirlenme ve manipülasyonunun $f(x)$ e göre daha kolay olması gerekmektedir. Bu kullanımın daha saydam bir hale gelmesini sağlamak adına oldukça ünlü başka bir matematiksel uygulama ile karşılaştırma yöntemi ile devam edilebilir. Örneğin uygun aritmatik operasyonlarda $\log x$ in kullanımının x in kullanımına göre daha avantajlı olması gibi. Çarpım yaparken $\log x$ in kullanılmasının kolaylık sağlamayacağı gibi bu yöntemin kullanımı elbette ki her problem için uygun olmayacaktır. Fakat bazı durumlarda, özellikle çözüme ulaşmanın oldukça zorlu veya imkansız göründüğü durumlarda bu yöntemin kullanımı ile çözüme oldukça basit bir biçimde ulaşılabilir. Aynı benzetme ile devam edersek verilen bir sayının 186. kökünü bulmaya çalışırken log kullanımın sağladığı yarar gibi düşünülebilir.

Her zaman tek değişkene bağlı fonksiyonlar ile çalışılmayacağı açıktır. Bu tarz fonksiyonlarda da integral dönüşüm benzer biçimde ele edilebilir. $p = (p_1, p_2, p_3, ..., p_m)$ ve $x = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ $S \in \mathbb{R}^m$ olmak üzere, çok değişkenli bir $f(p, x)$ fonksiyonunun integral dönüşümü;

$$\mathcal{F}(p, x) = \int_S K(p, x) f(x) dx$$

olarak tanımlanır.

İntegral dönüşüm tanımının bu halini almasında bir çok ünlü matematikçinin çalışması mevcuttur. İntegral dönüşümün tarihsel gelişim süreci şu şekildedir. İntegral dönüşüm konsepti ünlü İşviçreli matematikçi Leonhard Euler tarafından ikinci dereceden türevli denklem problemleri bağlamında bulunmuştur (1707 - 1783). O günden bugüne de aynı tarz problemlerin çözümünde güçlü bir yol olarak görülmektedir. Her ne kadar bu denklemleri çözmek için kullanılan bir çok integral dönüşüm türü bulunsa da, bunların içlerinde en ünlüleri Fourier ve Laplace dönüşümleridir. P.S. Laplace (1749 - 1827) integral dönüşümü ilk defa olasılık teorisi üzerine yaptığı çalışmada ve Joseph Fourier (1768-1830) ise 1822'de yayınlanan *La Theorie Analtytique de la Chaleur* isimli tezinde kullanmıştır. Hatta, Laplace'ın ünlü *La Theorie Analytique Probabilities* isimli kitabı, literatürde en eski ve en sık başvurulan Laplace dönüşümü sonuçlarına sahip kaynaktır. Bu kaynak, lineer diferansiyel denklemlerin ve integral denklemlerinin çözümüne ulaşılmasında yol gösterici bir kaynak olmuştur. Fourier'in tezi ise Fourier serisi, Fourier integrali ve uygulamalarının matematik literatürüne geçmesini sağlamıştır.

İlk kez integral dönüşümde sembol kullanımı fikrini başlatan G. W. Leibnez (1646-1716) olmuştur. Fakat bu fikrin operasyonel matematikte kullanılmasını ve yaygınlaşmasını sağlayanlar J. L. Lagrange (1736-1813) ve Laplace ikilisidir. Her ne kadar Laplace ve Fourier dönüşümleri 19. yüzyılda bulunmuş olsalar da, bu dönüşüm yöntemlerinin duyulmasını ve elektirik devrelerinde adi diferansiyel denklemleri çözüm yöntemi olarak kullanan Oliver Heaviside'dır (1850-1925).

Genelleştirilmiş integral dönüşüm disiplinine geçmeden önce bilinen integral dönüşümlerden bahsetmek doğru olacaktır. En bilinen Fourier, Laplace ve Mellin dönüşümünün yanı sıra bunlardan farklı dönüşümler de sıralanabilir. Hartley, Weierstrass, Hankel, Abel Hilbert, Poisson ve N dönüşümleri, gibi.

Genelleştirilmiş integral dönüşümleri ise, iki matematiksel disiplinin birleşiminden oluşmaktadır, integral dönüşümler ve genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisi. İlk disiplinin tarihsel gelişimine yukarıda yer vermiştik. Yaklaşık olarak 150 yıllık bir matematiksel gelişim süreci bulunmaktadır. İkinci disiplinin ise 1944 yılında Laurent Schwartz ile başlamıştır. Daha bilinir hale gelmesi Schwartz'ın 1950 ve 1951 yılında iki kitap olarak yayınlanan *Theorie des Distributions* isimli çalışması ile olmuştur.

Önemli bir gelişme, genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisinin Fourier dönüşümü üzerine genişlemesi ile olmuştur. Bu genişleme kısmi diferansiyel denklemler teorisi için oldukça önemli bir araç halini almıştır. Genelleştirilmiş Fourier dönüşümü alanı yaklaşık olarak 15 senedir üzerinde çalışılan oldukça aktif bir alandır. 1952 yılında Schwartz, Laplace dönüşümü ile de genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisini birleştirmiştir.

Yukarıda adı geçen her integral dönüşümün üzerine etki edeceği genelleştirilmiş fonksiyon türü sınırlandırılabildiği sürece genelleştirilmiş hallerini bulmak mümkündür. Burada asıl zor olan bulunan integral dönüşümün ya tekliğini ya da ters dönüşümünü bulabilmektir. Fakat genelleştirilmiş integral dönüşümün etkili analitik bir araç haline gelebilmesi için bunlardan en az birinin bulunmuş olması gerekmektedir.

Bu tezin yazılma amacı, genelleştirilmiş Laplace dönüşümü ile ilgili çalışmalara katkı sağlamaktır. Özellikle Laplace dönüşümü integral dönüşümlerin başından bu yana adi ve kısmi türevli denklemlerin çözümünde en çok kullanılan dönüşüm yöntemlerinden biridir. Fakat bu yöntemin de ise yaramadığı veya uygulansa bile istenilen derecede kolaylık sağlayamadığı denklemlerin de genelleştirilmiş integral dönüşümleri ile çözülmesi mümkündür. Bunun için yukarıda bahsettiğimiz gibi genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisinin de yardımını alarak yeni bir genelleştirilmiş integral dönüşüm ve tersi tanımlanmıştır. Bu integral dönüşüme üçüncü kısımda yer verilecektir. Öncelikle üçüncü kısımdaki çalışmaların netleşmesi için gerekli tanım, özellik, örnek ve teoremlere yer verilecektir. Bunun ardından ise genelleştirilmiş Laplace ile ters genelleştirilmiş Laplace dönüşümü ve bu dönüşümlerden faydalanılarak oluşturulmuş teorem ve lemmalar ile bunların kullanım alanlarının netleştirilmesi adına yeterli sayıda uygulamaya yer verilecektir.

2 Bölüm: Temel Kavram ve Tanımlar

Bu bölümde Laplace dönüşümüne, özelliklerine ve değişik soru tarzlarının çözümünde uygulamalarına yer vererek başlayacağız. Bu aynı zamanda diğer dönüşüm türlerinin uygulamaları için de yol gösterici olacaktır. Uygulamalar kısmında öncelikle adi diferansiyel denklemlere sonrasında ise kısmi türevli denklemlere yer vereceğiz.

2.1 Tanım ve İlgili Teoremler:

Tanım 2.1 *(Heaviside Fonksiyonu)Heaviside fonksiyonu basamak fonksiyonlarının özel bir örneğidir ve süreksiz bir fonksiyondur.Fonksiyonun değeri negatif argümanlar için 0 ve pozitif argümanlar için ise 1 dir.Heaviside fonksiyonu h ile gösterilebilir. Heaviside fonksiyonu ve Laplace dönüşümü şu şekilde tanımlanır:*

$$h(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \overline{h}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}dt \\ &= 1/p. \end{aligned} \tag{2}$$

$Re(s) > 0.$

Örnek 2.1 $H_1(a) - 2H_4(a) + 3H_6(a)$ *Heaviside fonksiyonunu çizelim.*

Çözüm 1 *Tanımdan,*

$$H_1(a) = \begin{cases} 0 & a < 1 \\ 1 & a > 1 \end{cases} \tag{3}$$

$$-2H_4(a) = \begin{cases} 0 & a < 4 \\ -2 & a > 4 \end{cases} \tag{4}$$

ve son olarak,

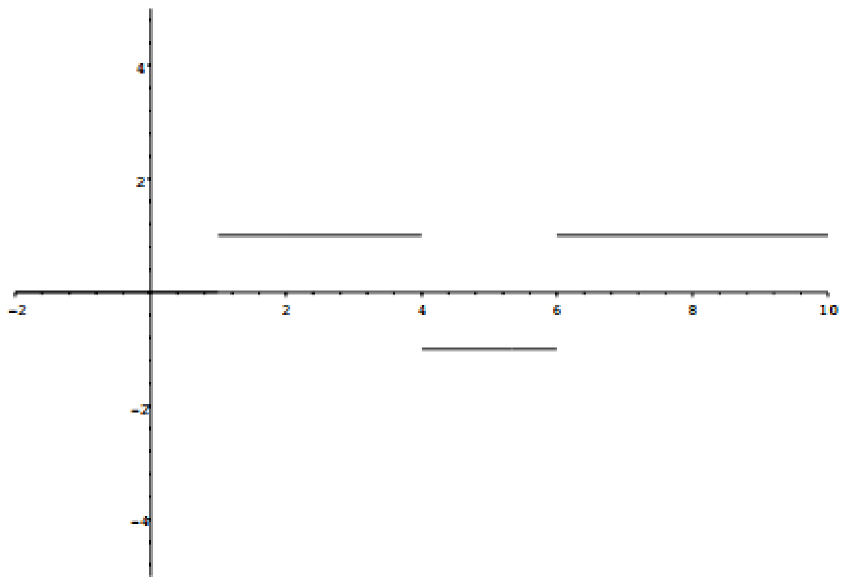
$$3H_6(a) = \begin{cases} 0 & a < 6 \\ 3 & a > 6 \end{cases} \tag{5}$$

eşitliklerini elde ederiz. $(0,1)$ *aralığında* $H_1(a), H_4(a)$ *ve* $H_6(a)$ *sıfırlanır dolayısıyla* $a \in (0,1)$ *durumunda* $H_1(a) - 2H_4(a) + 3H_6(a) = 0$. $(1,4)$ *aralığında ise sıfırlanmayan tek fonksiyon* $H_1(a)$ *fonksiyonu olduğu için* $a \in (1,4)$ *durumunda* $H_1(a) - 2H_4(a) + 3H_6(a) = 1$ *olur.* $(4,6)$ *aralığında ise* $H_1(A) = 1$ *ve* $-2H_4(a) = -2$ *ve* $H_6(a) = 0$ *olduğu için,* $a \in (4,6)$ *durumunda* $H_1(a) - 2H_4(a) + 3H_6(a) = -1$ *dir. Son olarak* $(6,\infty)$ *aralığında ise* $H_1(a) = 1$ *ve* $-2H_4(a) = -2$

ve$3H_6(a) = 3$,*dolayısıyla* $a \in (6, \infty)$ *durumunda* $H_1(a) - 2H_4(a) + 3H_6(a) = 6$ *olur. Bu durumda aşağıdaki parçalı fonksiyona ulaşmış oluruz.*

$$H_1(a) - 2H_4(a) + 3H_6(a) = \begin{cases} 0 & a < 1 \\ 1 & 1 < a < 4 \\ -1 & 4 < a < 6 \\ 2 & d.y. \end{cases} \tag{6}$$

Bu durumda fonksiyon grafiği aşağıdaki gibi olur.

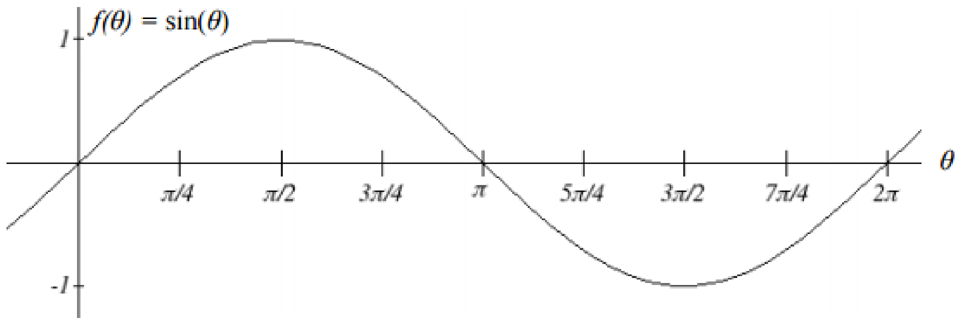


Şekil 2.1: Heaviside Fonksiyonu

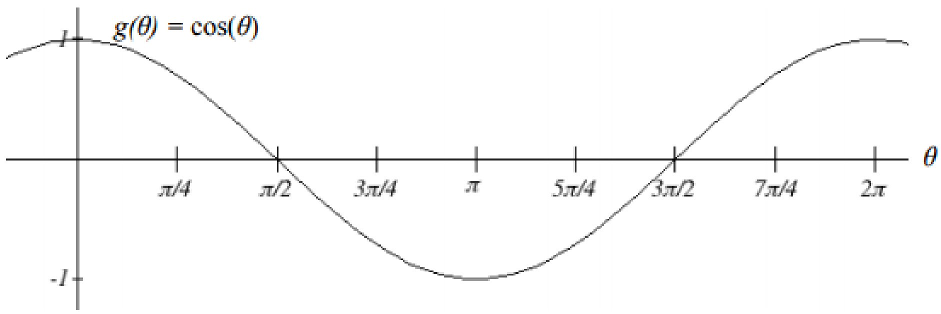
Tanım 2.2 *(Periyodik Fonksiyon)Matematikte periyodik fonksiyon belirli periyotlarla değerlerini tekrar eden fonksiyona verilen isimdir.Burada periyodik fonksiyonu p ile sembolize edersek,* ω *gerçel ve* $Re(s) > 0$ *olmak üzere periyodik fonksiyon ve Laplace dönüşümü şu şekilde ifade edilebilir,*

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{i\omega t} && (7) \\ \overline{p}(x) &= \int_0^\infty e^{i\omega t} e^{-st} dt && (8) \\ &= 1/(p - i\omega). && (9) \end{aligned}$$

Örnek 2.2 *Aşağıda periyodik sinüs ve kosinüs fonksiyon grafikleri bulunmaktadır:*



Şekil 2.2: Sinüs Fonksiyonu



Şekil 2.3: Kosinüs Fonksiyonu

Tanım 2.3 (***Bessel Fonksiyonu***) *Bessel fonksiyonları* [10] *de verilen Bessel diferansiyel denkleminin kanonik formdaki çözümleridir.*

$$x^2\frac{d^2f}{dx^2}+x\frac{df}{dx}+(x^2-a^2)f=0 \tag{10}$$

Bessel denkleminin çözümü $J_\alpha(x)$ ile sembolize edilir. Bu çözümler,

$$J_a(x)=\left(\frac{t}{2}\right)^\alpha\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+\alpha+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m} \tag{11}$$

eşiliği ile verilir. Burada $Re(\alpha)\geq 0$ dır ve J_a, birinci türden α dereceden Bessel fonksiyonu ismini alır.

Yar.Teorem 2.1

$$J_n(-a)=J_{-n}(a)=(-1)^nJ_n(a) \tag{12}$$

eşitliğinin doğruluğunu gösterelim.

İspat. İlk eşitliğin doğruluğunu göstermek için üreten fonksiyonda $a\to -a, z\to z^{-1}$ değişken dönüşümleri yapılır. Fonksiyon değişmeyeceği için,

$$\sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty}J_n(-a)z^{-n}=\sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty}J_n(a)z^{n}=\sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty}J_{-n}(a)z^{-n} \tag{13}$$

elde edilir. Burada katsayılar karşılaştırılarak sonuç elde edilir. İkinci eşitlik de $z \to z^{-1}$ dönüşümü yapılarak benzer bir süreç sonunda elde edilebilir. ■

Yar.Teorem 2.2 *$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,*

$$
\begin{aligned}
2J_n^{'}(a) &= J_{n-1}(a) - J_{n+1}(a), && (14)\\
\frac{2n}{a}J_n(a) &= J_{n+1}(a) + J_{n-1}(a), && (15)\\
\frac{d}{da}(a^n J_n(a)) &= a^n J_{n-1}(a). && (16)
\end{aligned}
$$

İspat. Birinci eşitlik $J_n(a)$ Bessel fonksiyonunun üretken fonksiyonunun türetilmesi ile ispatlanabilir.

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a)z^n &= \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) e^{\frac{a}{2}(z-\frac{1}{z})}\\
&= \frac{1}{2}z \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a)z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a)z^n\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}(J_{n-1}(a) - J_{n+1}(a))z^n. && (17)
\end{aligned}
$$

Katsayılar karşılaştırılarak çözüme ulaşılabilir.İkinci ifade z değişkenine göre türev uygulanması ile elde edilir. Her iki eşitliğe de $a^n/2$ uygulanması ile üçüncü eşitlik oluşur. ■

Bu iki lemma kullanılarak bazı integraller Bessel fonksiyonu aracılığı ile tanımlanabilir.

Tanım 2.4 (*Hermite Polinomu*) *Hermite polinomları* [18] *de verilen Hermite diferansiyel denkleminin çözümleridir.*

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - 2x\frac{df}{dx} + 2mf = 0. \qquad m = 0, 1, 2, ... \qquad (18)$$

Hermite denkleminin çözümü $H_m(x)$, m. dereceden Hermite polinomu olarak isimlendirilir.

$$
\begin{aligned}
H_{2k}(x) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i (2k)!}{i!(2k-2i)!}(2x)^{2k-2i}. \qquad k = 0, 1, 2, ... && (19)\\
H_{2k+1}(x) &= \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i (2k+1)!}{i!(2k-2i+1)!}(2x)^{2k-2i+1}. \qquad k = 0, 1, 2, ... && (20)
\end{aligned}
$$

Hermite polinomu x değişkeninin bazı değerleri için şu eşitlikleri gerçekler.

$$
\begin{aligned}
H_{2k}(0) &= (-1)^k \frac{(2k)!}{k!}. \qquad k = 0, 1, 2, ... && (21)\\
H_{2k+1}(0) &= 0. \qquad k = 0, 1, 2, ... && (22)
\end{aligned}
$$

Tanım 2.5 *(Laplace Dönüşümü) Laplace dönüşümü*

$$\bar{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt, \qquad Re(s) > 0 \qquad (23)$$

bağıntısı ile tanımlanır. Burada e^{-st} dönüşümün çekirdeği ve s dönüşüm değişkenidir. $f(t)$ orjinal fonksiyon ve $\overline{f}(s)$ ise orjinal fonksiyonun görüntüsü veya Laplace dönüşümü olarak isimlendirilir. Bazı durumlarda $f(t)$ fonksiyonu için $\overline{f}(s)$ fonksiyonunun ters Laplace Dönüşümü terminolojisi de kullanılabilir.

Başlangıç seviyesinde s reel sayı olarak seçilse de daha ciddi matematiksel çalışmalarda karmaşık sayı olarak düşünülmelidir.$s > s_0$ için integral yakınsak ise (veya $Re(s) > s_0$ yarı düzleminde, s karmaşık sayı olarak düşünülürse) $\overline{f}(s)$ tanımlıdır ve dönüşüm vardır denilir.

Burada bir fonksiyon kümesini (orjinal fonksiyonların kümesi) başka bir fonksiyon kümesine taşıyoruz (görüntü fonksiyonlarının kümesi)..

Tanım 2.6 *(Ters Laplace Dönüşümü) Ters Laplace Dönüşümü*

$$f(t) = \mathcal{L}\left\{\overline{f}(s)\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st}\overline{f}(s)ds, \qquad c > 0, \tag{24}$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Laplace dönüşümünün özellik ve örneklerine yer vermeden önce, dönüşümün varlık teoremine yer vereceğiz. Bu teorem için üstel mertebeli fonksiyonların ne olduğuna bakmalıyız.

Tanım 2.7 *(Üstel mertebeli fonksiyon) α, $0 \leq t \leq \infty$ aralığında pozitif olmak üzere,*

$$|f(t)| \leq ke^{\alpha t}$$

koşulunu sağlayan f(t) fonksiyonlarına α ıncı dereceden üstel mertebeli fonksiyon ismi verilir. üstel mertebeli fonksiyonlar Landou sembolü ile şu şekilde gösterilir;

$$t \to \infty \quad iken \quad f(t) = O(e^{at}), \tag{25}$$

veya alternatif bir gösterim biçimi de şu şekildedir;

$$\lim_{t\to\infty} e^{-bt}\,|f(t)| \leq K \lim_{t\to\infty} e^{-(b-a)t} = 0, \qquad b > a \tag{26}$$

Bu tarz bir $f(t)$ fonksiyonuna kısaca $t \to \infty$ iken üstel mertebeli fonksiyon ismi verilir. Bu fonksiyon t sınırsız büyürken $Ke^{\alpha t}$ değerinden daha hızlı biçimde büyümez.

Teorem 2.1 *Bir $f(t)$ fonksiyonu her sınırlı $(0,T)$ aralığında sürekli veya parçalı sürekli ve $e^{\alpha t}$ inci dereceden üstel mertebeli ise, her s değeri için $Re(s) > \alpha$ olmak üzere $f(t)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü vardır.*

İspat. Laplace dönüşümünün ve üstel mertebeli fonksiyonların tanımlarından faydalanırsak;

$$\begin{aligned} \left|\overline{f}(s)\right| &= \left|\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt\right| \le \int_0^\infty e^{-st} \left|f(t)\right| dt \\ &\le K\int_0^\infty e^{-t(s-a)}dt = \frac{K}{s-a}, \qquad (\text{her } s > \alpha \text{ için}) \end{aligned} \tag{27}$$

eşitsizliği integralin varlığını ortaya koyar. ■

Laplace dönüşümü tanımlanırken bir fonksiyon kümesini başka bir fonksiyon kümesine taşıdığımızdan bahsetmiştir. Burada elbette sadece fonksiyonlar değil aynı zamanda operatörler de fonksiyonlarla beraber dönüşüme uğrar. Bu sebeple, Laplace dönüşümü ile ilgili örneklere yer vermeden önce dönüşümün özelliklerini sıralayalım.

2.2 Laplace Dönüşümünün Özellikleri:

1. **Özellik:** Laplace dönüşümü lineer bir dönüşümdür. Yani, α ve β sabit ve integraller var olmak üzere,

   $$\mathcal{L}\left\{\alpha f(t) + \beta g(t)\right\} = \alpha\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} + \beta\mathcal{L}\left\{g(t)\right\} \tag{28}$$

   gerçeklenir. Benzer biçimde $\mathcal{L}^{-1}$da aynı özelliğe sahiptir.

   Bu özellik basit biçimde integrallerin temel özelliğinin yeniden ifade edilmesidir. Toplamların terim terime toplanabilir ve böylece büyük problemi küçük parçalara ayırmış oluruz.

2. **Özellik:***(Heaviside'ın birinci öteleme teoremi)* α reel bir sabit ve $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \overline{f}(s)$ olmak üzere

   $$\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}f(t)\right\} = \overline{f}(s+\alpha) \tag{29}$$

   (2a) bağıntısı doğrudur.

İspat. Tanımdan yola çıkarsak;

$$\mathcal{L}\left\{e^{-\alpha t}f(t)\right\} = \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t} f(t)dt = \overline{f}(s+\alpha) \tag{30}$$

eşitliğine rahatlıkla ulaşılır. ■

3. **Özellik:***(İkinci öteleme teoremi)* $H(t-a)$ Heaviside birim basamak fonksiyonu, $L\left\{f(t)\right\} = \overline{f}(s)$ ve $s > a$ olmak üzere;

   $$\mathcal{L}\left\{f(t-a)H(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}, \tag{31}$$

olmasına ikinci öteleme özelliği ismi verilir. Veya bu özellik, aşağıdaki gibi de gösterilebilir.

$$\mathcal{L}\left\{f(t)H(t-a)\right\} = e^{-as}\mathcal{L}\left\{f(t+a)\right\}. \tag{32}$$

İspat. Heaviside fonksiyonu ve Laplace dönüşümün tanımından;

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f(t-a)H(t-a)\right\} &= \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)H(t-a)dt, \\ &= \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)dt.\end{aligned} \tag{33}$$

elde edilir. Burada $t-a=\varsigma$ dönüşümü yapılırsa,

$$e^{-as}\int_0^\infty e^{-st}f(\varsigma)d\varsigma = e^{-as}\overline{f}(s). \tag{34}$$

elde edilir. ■

4. **Özellik:** *(Genişletme Özelliği)*

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\} = \frac{1}{|a|}\overline{f}(\frac{s}{a}).s > a \tag{35}$$

İspat. $a>0$ için

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}f(at)dt,$$

$at=\xi$ ise $dt=\frac{1}{a}\xi$ ve $t=\frac{\xi}{a}$ değişken değişimleri uygulanırsa,

$$\begin{aligned} &= \int_0^\infty e^{-s\frac{\xi}{a}}f(\xi)\frac{d\xi}{a}, \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{\xi s}{a}}f(\xi)d\xi, \\ &= \frac{1}{a}L(f(\frac{s}{a}).\end{aligned}$$

$a<0$ için de benzer işlemler yapılarak,

$$\mathcal{L}\left\{f(at)\right\} = -\frac{1}{a}\mathcal{L}\left\{f(\frac{s}{a})\right\}. \tag{36}$$

bulunur. ■

5. **Özellik:** *(Türevin Laplace Dönüşümü)* $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} = \overline{f}(s)$ olmak üzere, fonksiyonun türevlerinin Laplace dönüşümü ile ilgili bağıntılar şu şekilde sıralanabilir,

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} = s\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - f(0) = s\overline{f}(s) - f(0), \tag{37}$$

$$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} - sf(0) - f'(0) = s^2\overline{f}(s) - sf(0) - f'(0). \tag{38}$$

Daha genel bir ifade ile,

$$\mathcal{L}\left\{f^{m}(t)\right\}=s^{m}L\left\{f(t)\right\}-s^{m-1}f(0)-s^{m-2}f'(0)-...-sf^{(m-2)}(0)-f^{(m-1)}(0) \qquad (39)$$

olarak belirtilebilir. Burada $f^{(r)}(0)$değeri $f^{(r)}(t)$ nin $r=0,1,2,...,(n-1)$ olmak üzere $t=0$ daki değeridir.

İspat. Laplace dönüşümünün tanımından,

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}f'(t)dt,$$

elde edilir. Bu eşitlikte t değeri sınırsız büyürken $f(t)e^{-st}\rightarrow 0$ ön koşulu ile kısmi integrasyon uygulandığında,

$$\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}=s\overline{f}(s)-f(0),$$

elde edilir. İkinci türev için de benzer biçimde, $t\rightarrow\infty$ iken $e^{-st}f'(t)\rightarrow 0$ önkoşulları ile,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} &= s\mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}-f'(0),\\ &= s^2\overline{f}(s)-sf(0)-f'(0),\end{aligned}$$

bağıntısına ulaşılır. İndüksiyon metodu ile önce $n-1$ inci türevi için doğruluğu kabul edilir ve bir türev alma işlemi daha uygulanırsa, (39) bağıntısına ulaşılabilir. ■

6. **Özellik:** (Düzgün Yakınsaklık): t sınırsız büyürken $f(t)=O(e^{at})$ ise,

$$\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt \qquad (40)$$

Laplace integrali $a_1>a$ ve $s>a_1$ iken s ye göre düzgün yakınsaktır.

İspat. $|e^{-st}f(t)|\leq Me^{-t(s-a)}\leq Me^{-t(a_1-a)}$ eşitsizliği her $s\geq a_1$ için doğru ve $\int_0^\infty e^{-t(a_1-a)}dt$ integrali Weistrass testi ile her $a_1>a$ var olduğundan, (2.14) Laplace integrali $a_1>a$ iken her $s>a_1$ için düzgün yakınsaktır. ■

7. **Özellik :** (Laplace Dönüşümünün Türevi): $\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=\overline{f}(s)$ ise, $n=0,1,2,3,...$ için

$$\mathcal{L}\left\{t^n f(t)\right\}=(-1)^n\frac{d^n}{ds^n}\overline{f}(s) \qquad (41)$$

olur.

İspat. Laplace dönüşümünün tanımı ve türevin Laplace dönüşümü özelliği kullanılarak (40) bağıntısına ulaşılır. ■

8. **Özellik:** (Laplace Dönüşümünün İntegrali)**:** $\mathcal{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s)$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_0^\infty \overline{f}(s)ds \tag{42}$$

dır.

İspat. (40) deki düzgün yakınsaklık özelliği göz önünde bulundurulduğunda, $\overline{f}(s)$ $(s{,}\infty)$ aralığında s ye göre integre edilirse,

$$\begin{aligned}\int_s^\infty \overline{f}(s)ds &= \int_s^\infty ds \int_0^\infty e^{-ut}f(t)dt \\ &= \int_0^\infty f(t)dt \int_s^\infty e^{-ut}ds \\ &= \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}e^{-ut}dt \\ &= \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}\end{aligned} \tag{43}$$

elde edilir. ■

9. **Özellik:** (İntegralin Laplace Dönüşümü): $\mathcal{L}\{f(t)\} = \overline{f}(s)$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^\infty f(\varphi)d\varphi\right\} = \frac{\overline{f}(s)}{s} \tag{44}$$

bağıntısı doğrudur.

İspat. $\rho > 0$

$$m(t) = \int_0^t f(\varphi)d\varphi$$

olarak alınırsa $m(0) = 0$ ve $m^{'}(t) = f(t)$ olur. Buradan

$$\overline{f}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = L\{m'(t\}) = s\overline{m}(s) = s\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^t f(\varphi)d\varphi\right\}.$$

elde edilir. Eşitlik s ile sadeleştirilirse (44) bağıntısı elde edilmiş olur. ■

10. **Asimtotik Özellikler:** (Watson Lemması)Laplace dönüşümünü büyük s değerleri için düşündüğümüzde, en önemli integrasyon aralığının $0 < t < 1/s$ olduğunu varsayabiliriz. Böylece aşağıdaki tahminde bulunabiliriz.

$$\begin{aligned}\overline{f}(s) &\simeq f(0)\int_0^\infty e^{st}dt \\ &= f(0)/p, \qquad |p| \gg 1.\end{aligned} \tag{45}$$

Bu tarz fonksiyonların özellikleri ve dönüşümleri direkt olarak birbirine bağlayan bir bilgi ne kadar yararlı olsa da çoğu durumda yeterli değildir Bu sebeple bundan daha keskin bir bilgiye ihtiyaç vardır. Watson Lemmasını kanıtlayabilmek için öncelikle asimtotik özelliklerden bahsedeceğiz.

Tanım 2.8 *$x \to x_0$ için aşağıdaki bağıntıyı sağlayan $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarına asimptotik fonksiyonlar denir.*

$$\lim_{x \to x_0} \{f(x)/g(x)\} = 1,$$

ve

$$f(x) \sim g(x)$$

olarak sembolize edilir.Burada x karmaşık bir değişkendir bu sebeple x in x_0 a nasıl yaklaşacağı konusunda sınırlamalar getirmemiz gerekir. Örneğin,

$$1 + e^{-z} \sim 1,$$

için $z \to \infty$ ve $|arg(z|)<\pi/2$.Şimdi baştaki koşulumuzu şu şekilde değiştirirsek,

$$\lim_{x \to x_0} \{f(x)/g(x)\} = 0,$$

tekrar şu eşitlik yazılabilir,

$$f(x) = o(g(x)), \tag{46}$$

ve eğer, x, x_0 a yaklaşırken $|f(x)/g(x)|$ değeri sınırlı değilse,

$$f(x) = O(g(x)).$$

elde edilir.

Tanım 2.9 *(Asimptotik açılım):$g_{\nu+1}(x) = o(g_\nu(x))$ eşitliği sağlanıyorsa,*

$$f(x) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} g_\upsilon(x), \qquad x \to x_0 \tag{47}$$

açılımına, asimtotik açılım denir.

Bu açılımın anlamı şudur;

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{n} g_\upsilon(x) + O(g_{n+1}(x)),$$

bağıntısında, $x \to x_0$ iken serideki sınırlı sayıdaki terim $f(x)$ fonksiyonu için $g_{n+1}(x)$ inci mertebeden bir yaklaşık değer oluşturur.

Tanım 2.10 *(Watson Lemması)f fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahip reel u değişkenine bağlı karmaşık değerli bir fonksiyon olsun.*

(1)f fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığında sınırsızdır.

(2)$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ...$ *olmak üzere*

$$f(u) \backsim \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^{\lambda_n - 1}, \tag{48}$$

(3)son olarak da $c > 0$ *gibi bir sabit için,*

$$f(u) = O(e^{cu}), \qquad u \to \infty, \tag{49}$$

dur.Buradan $0 < \delta < \pi/2$ *olacak şekilde* $|z| \to \infty$ *ve* $|\arg(z)| \leq \frac{\pi}{2} - \delta < \frac{\pi}{2}$ *için,*

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zu} f(u) du \backsim \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\Gamma(\lambda_n)}{z^{\lambda_n}}. \tag{50}$$

dir.

2.3 Laplace Dönüşümü Uygulamaları

Örnek 2.3 *: $\rho > 0$ için $f(x) = 1$ ise $f(x)$ in Laplace dönüşümünü bulalım.*

$$\overline{f}(s) = \mathcal{L}\{1\} = \int_0^{\infty} e^{-sx} dx = \frac{1}{s}. \tag{51}$$

Örnek 2.4 : *m sabit bir değer olmak üzere, $f(x) = e^{mx}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım. Laplace dönüşümünün tanımında verilen fonksiyon yerine yazılırsa,*

$$\mathcal{L}\{e^{mx}\} = \overline{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-(s-m)} dx = \frac{1}{s-m}. \tag{52}$$

Örnek 2.5 : *m gerçel bir sabit olmak üzere, $f(x) = sinmx$ ise, $f(x)$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü;*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\sin mx\} &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \sin mx dx, \\ &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \left(\frac{e^{imx} - e^{-imx}}{2i} \right) dx, \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^{\infty} \left[e^{-x(s-im)} - e^{-x(s+im)} \right] dx, \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{s-im} - \frac{1}{s+im} \right], \\ &= \frac{m}{s^2+m^2} \end{aligned} \tag{53}$$

biçiminde elde edilir. Benzer biçimde $\cos mx$ *in Laplace dönüşümü de aşağıdaki gibi elde edilebilir.*

$$\mathcal{L}\{\cos mx\} = \frac{s}{s^2+m^2} \tag{54}$$

Örnek 2.6 : *Hiperbolik fonksiyonların Laplace dönüşümleri de yine Laplace dönüşümünün tanımından faydalanılarak, Örnek 2.3'e benzer biçimde elde edilebilir. Örneğin,* $f(x) = \sinh mx$ *ise;*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\sinh mx\} &= \int_0^\infty e^{-sx} \sinh mx dx, \\
&= \int_0^\infty e^{-sx} \left(\frac{e^{mx} - e^{-mx}}{2} \right) dx, \\
&= \frac{m}{s^2 - m^2}. \qquad \textbf{\textit{(2.22)}}
\end{aligned}$$

Benzer biçimde $\cosh mx$ *in Laplace dönüşümü de,*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\cosh mx\} &= \int_0^\infty e^{-sx} \cosh mx dx, \\
&= \frac{s}{s^2 - m^2}. \qquad (55)
\end{aligned}$$

dır.

Örnek 2.7 : *m pozitif bir gerçel sayı olmak üzere,* $f(x) = x^m$ *fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.*

Çözüm: Çözüme tüme varım metodu ile ulaşacağız. Örnek 2.6 da $f(x) = 1$ in çözümünü

$$\overline{f}(s) = \frac{1}{s^2},$$

olarak bulmuştuk.$f(x) = x^2$ fonksiyonunun Laplace dönüşümünu bulmak için,

$$\mathcal{L}\left\{x^2\right\} = \int_0^\infty x^2 e^{-sx} dx,$$

eşitliğinde $u = x$ değişimi yapılırsa,

$$\mathcal{L}\left\{x^2\right\} = \frac{2}{s^3},$$

elde edilir. Bu şekilde, n kere değişken değişimi yapılırsa,

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \int_0^\infty x^n e^{-sx} dx = \frac{n!}{s^{n+1}}. \qquad (56)$$

eşitliğine ulaşılır.

Örnek 2.8 *: 2. daki örneği göz önünde bulundurarak,* $m > -1$ *koşulunu sağlayan bir gerçel sayı olmak üzere* $f(x) = x^m$ *fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım. Bunun için tekrar Laplace dönüşümünün tanımından faydalanacağız.*

$$\mathcal{L}\{x^m\} = \int_0^\infty x^m e^{-sx} dx,$$

Yukarıdaki eşitlikte $sx = t$ değişimi yapılırsa,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{x^m\} &= \frac{1}{s^{m+1}}\int_0^\infty t^m e^{-t}dt \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} \end{aligned} \tag{57}$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 2.9 : $f(x) = erf\left\{\frac{m}{2\sqrt{x}}\right\}$ *hata fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım. Bunun için Laplace dönüşümünü ve hata fonksiyonundan faydalanacağız.*

$$\mathcal{L}\left\{erf\left(\frac{m}{2\sqrt{x}}\right)\right\} = \int_0^\infty e^{-sx}\left[\frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^{2/2\sqrt{x}} e^{-t^2}dt\right]dx.$$

Yukarıdaki eşitlikte $t = \frac{m}{2\sqrt{x}}$ veya $x = \frac{m^2}{4t^2}$ olarak alınır ve integrasyon sırası değiştirilirse,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{erf\left(\frac{m}{2\sqrt{x}}\right)\right\} &= \frac{2}{\sqrt{x}}\int_0^\infty e^{-t^2}dt\int_0^{m^2/4t^2} e^{-sx}dx, \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\frac{1}{s}\left\{1-\exp\left(-\frac{m^2 s}{4t^2}\right)\right\}dt, \\ &= \frac{1}{s}.\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_0^\infty e^{-t^2}dt - \int_0^\infty \exp\left\{-\left(t^2+\frac{sm^2}{4t^2}\right)\right\}dt\right],\end{aligned}$$

Burada, $\int_0^\infty \exp\left\{-\left(t^2+\frac{sm^2}{4t^2}\right)\right\}dt$ *integralinin değeri,*

$$\int_0^\infty \exp\left\{-\left(t^2+\frac{sm^2}{4t^2}\right)\right\}dt = \frac{1}{2}\left[\begin{array}{c}\int_0^\infty\left(1-\frac{m^2}{t^2}\right)\exp\left[-\left(t+\frac{m}{t}\right)^2+2m\right] \\ +\int_0^\infty\left(1+\frac{m}{t^2}\right)\exp\left[-\left(t-\frac{m}{t}\right)^2-2m\right]\end{array}\right]dt,$$

olarak bulunur. $u = \left(t \pm \frac{m}{t}\right), du = \left(1 \pm \frac{m}{t^2}\right)dt$ *değişimi yapılırsa ve* $m = \frac{m\sqrt{s}}{2}$ *için,*

$$= \frac{1}{2}e^{-2m}\int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2m}$$

integral değerinin 0 *olduğu görülürse,*

$$L\left\{erf\left(\frac{m}{2\sqrt{x}}\right)\right\} = \frac{1}{s}.\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-m\sqrt{s}}\right] = \frac{1}{s}\left[1-e^{-m\sqrt{s}}\right] \tag{58}$$

olarak bulunur. Buradan tamamlayıcı hata fonksiyonun da Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\left\{erfc\left(\frac{m}{2\sqrt{x}}\right)\right\} = \frac{1}{s}e^{-m\sqrt{s}} \tag{59}$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.10 : *Heaviside'ın birinci öteleme teoremine örnek olarak, Laplace dönüşümünün tanımı ile 2.8. ve 2.9. örneklerden faydalanarak doğrudan şu sonuçlara ulaşılabilir:*

$$\mathcal{L}\left\{x^n e^{-mx}\right\} = \frac{n!}{(s+m)^{n+1}}, \tag{60}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{-mx}\sin ax\right\} = \frac{a}{(s+m)^2+a^2}, \tag{61}$$

$$\mathcal{L}\left\{e^{-mx}\cos ax\right\} = \frac{s+m}{(s+m)^2+a^2}. \tag{62}$$

Örnek 2.11 :*Heaviside'ın birinci öteleme teoremini kullanarak*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ -1 & 1 < x < 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

fonksiyonunun Laplace dönüşümünü bulalım.

Çözüm: Fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulmak için öncelikle fonksiyon şu şekilde tekrar düzenlenir.

$$f(x) = 1 - 2H(x-1) + H(x-2). \tag{63}$$

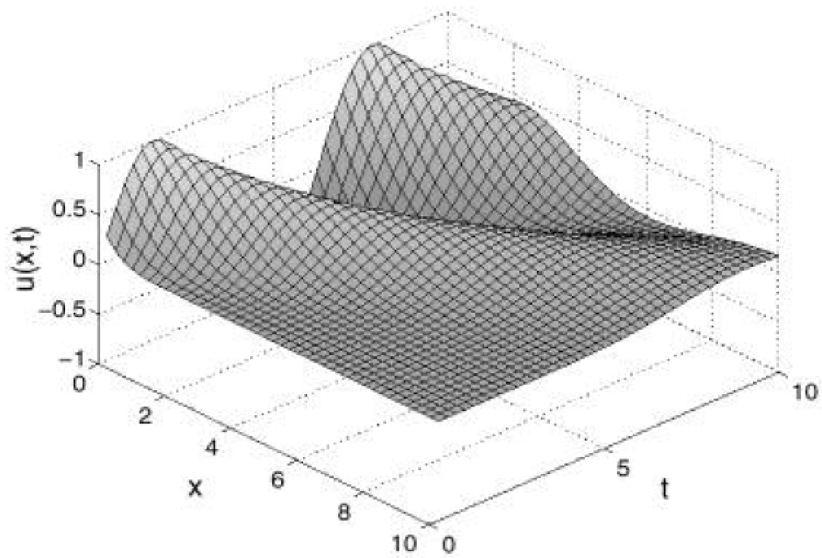
Buradan Laplace dönüşümü,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(x)\} &= \mathcal{L}\{1\} - 2\mathcal{L}\{H(x-1)\} + \mathcal{L}\{H(x-2)\}, \\ &= \frac{1}{s} - 2\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s}. \end{aligned} \tag{64}$$

2.3.1 Dalga Denklemi Çözümü:

Örnek 2.12 *Sınır koşulları $f(0,t) = sin(t)$ ve $lim_{x\to\infty}|f(x,t)| < \infty$ ve başlangıç koşulları $f(x,0) = 0$ ve $f_t(x,0) = f_{xx}(x,0)$ olmak üzere, aşağıdaki kısmi türevli denklemi çözünüz.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2}, 0 < x < \infty, 0 < t \tag{65}$$



Şekil 2.4 : [6, sf 391]

Birinci Adım: Eşitliğe Laplace dönüşümü uygulandığında, F(0,s)=$\frac{1}{s^2+1}$*ve* $lim_{x\to\infty}|F(x,s)| < \infty$ sınır koşulu ile aşağıdaki sınır değer problemi oluşur.

$$\frac{d^2F(x,s)}{dx^2} - \frac{s^2}{s+1}F(x,s) = 0, \tag{66}$$

İkinci Adım: Buradan yukarıdaki sınır değer probleminin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$F(x,s) = \frac{1}{s^2+1}\exp\left(-\frac{sx}{\sqrt{1+s}}\right). \tag{67}$$

Üçüncü Adım: Bu çözüm $s = \pm i$ noktalarında tekil kutup noktalarına ve $s = -1$ noktasında da dallanma noktasına sahiptir. Dördüncü Adım: s düzleminin negatif reel ekseni üzerindeki kesim noktalarını tanımlayarak çözümü kutup noktalarındaki rezidüler ile dallanma noktalarındaki integralın toplamı olarak yazılabilir.

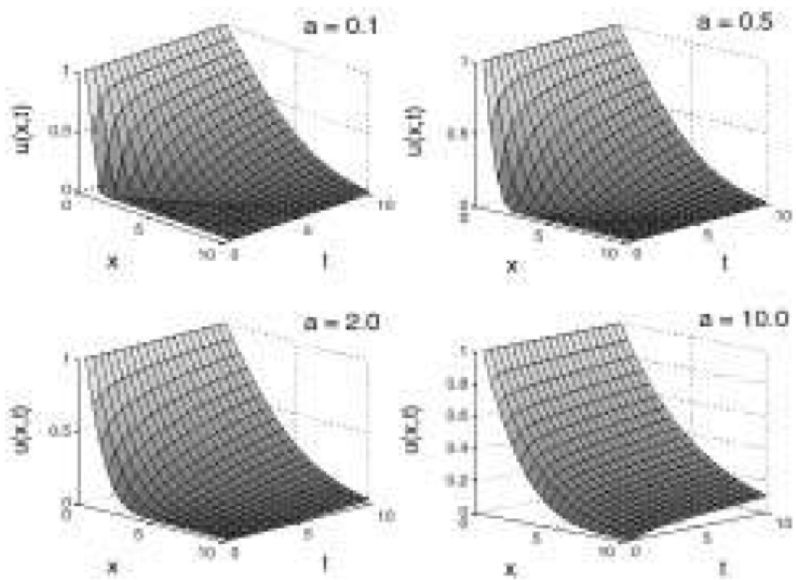
$$\begin{aligned} f(x,t) &= \exp\left[-x\sin(\pi/8)/\sqrt[4]{2}\right]\sin\left[t - x\cos(\pi/8)/\sqrt[4]{2}\right] \\ &\quad -\frac{e^{-t}}{\pi}\int_0^\infty \frac{\exp(-t\eta)}{\eta^2+2\eta+2}\sin\left[\frac{(1+\eta)x}{\sqrt{\eta}}\right]d\eta. \end{aligned} \tag{68}$$

Bu sonuç bize çözümün iki parçadan oluştuğunu gösterir. Birinci terim durağanlık durumundaki çözümü verirken ikinci kısımdaki integral ise üstel bir hızla kaybolan geçici dalgaların çözümünü verir.Ne yazık ki buradaki çözüm integranddaki sin teriminin hareketinden dolayı numerik olarak çok az değere sahiptir.

Örnek 2.13 *Sınır koşulları* $f(0,t) = 1$ *ve* $lim_{x\to\infty}|f(x,t)| < \infty$ *ve başlangıç koşulları* $f(x,0) = 0$

ve $f_t(x,0) = af_{xx}(x,0)$ *olmak üzere, aşağıdaki kısmi türevli denklemi çözünüz.*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + a\frac{\partial^3 f}{\partial t \partial x^2}, 0 < x < \infty, 0 < a, t \tag{69}$$



Şekil 2.5 : [6, sf 392]

Birinci Adım: Eşitliğe Laplace dönüşümü uygulandığında,

$$F(0,s) = \frac{1}{s} \; ve \; lim_{x\to\infty} |F(x,s)| < \infty$$

sınır koşulu ile aşağıdaki sınır değer problemi oluşur.

$$(1+as)\frac{d^2F(x,s)}{dx^2} - s(1+s)F(x,s) = 0, \tag{70}$$

İkinci Adım: Buradan yukarıdaki sınır değer probleminin çözümü aşağıdaki gibi bulunur.

$$F(x,s) = \frac{1}{s}\exp\left[-x\sqrt{\frac{s(1+s)}{1+as}}\right]. \tag{71}$$

Üçüncü Adım: Bu çözüm $s = 0$ da tekil kutup noktasına ve $s = 0, s = -1$ ve $s = -1/a$ noktalarında da dallanma noktalarına sahiptir.Dördüncü Adım: s düzleminin negatif reel ekseni üzerindeki kesim noktalarını tanımlayarak $s = 0$ küçük yarı-çemberi dışında s-ekseni üzerindeki sanal eksen boyunca Bromwich kontürü bozularak,

$$M = \left(\frac{1+\eta^2}{1+a^2\eta^2}\right)^{1/4} \text{ ve } 2\theta = \arctan(\eta) - \arctan(a\eta). \tag{72}$$

olmak üzere çözüme ulaşılır:

$$
\begin{aligned}
f(x,t) \quad = \quad & \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp\left\{-x\sqrt{\frac{\eta}{2}M\left[\cos(\theta) - \sin(\theta)\right]}\right\}\frac{d\eta}{\eta} \\
& \times \sin\left\{t\eta - x\sqrt{\frac{\eta}{2}}M\left[\cos(\theta) + \sin(\theta)\right]\right\}. \qquad (73)
\end{aligned}
$$

2.3.2 Isı Denklemi Çözümü

Örnek 2.14 *Aşağıdaki kısmi türevli denklemler iki katmanlı Dünya'da ısı akışını göstermektedir..*

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2}, 0 \leq x \leq h, o < t, \tag{74}$$

ve

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2}, h \leq x, 0 < t \tag{75}$$

Burada a_i katmanların yayılma gücünü, u_i sıcaklığı ve x ise aşağı doğru yüzey uzaklığını sembolize etmektedir.Dünyanın yüzeyinde $f_1(0,t)$=$T_0 \sin(wt)$ günlük döngüsü ve k_i iki katman arasındaki termal iletkenlik katsayısı olmak üzere,

$$f_1(h,t) = f_2(h,t) \text{ ve } k_1 \frac{\partial f_1(h,t)}{\partial x} = k_2 \frac{\partial f_2(h,i)}{\partial x}, \tag{76}$$

olur. Ayrıca $lim_{x\to\infty} |f_2(x,t)| < \infty$ ve başlangıç koşullarının da $f_1(x,0) = f_2(x,0) = 0$ ifadelerinin sağlanması gerekir. Baştaki denklemlerimize Laplace dönüşümü uygulanır ise,

$$\frac{d^2 F_i(x,s)}{dx^2} - \frac{s}{a_i} F_i(x,s) = 0, i = 1, 2, .. \tag{77}$$

ve aşağıdaki sınır koşulları elde edilir:

$$F_1(0,s) = \frac{T_0 w}{s^2 + w^2}, \qquad F_1(h,s) = F_2(h,s) \tag{78}$$

ve

$$k_1 \frac{dF_1(h,s)}{dx} = k_2 \frac{dF_2(h,s)}{dx}, \qquad \lim_{z\to\infty} |F_2(x,s)| < \infty. \tag{79}$$

Buradan dönüşmüş denklemin çözümü,

$$\begin{aligned} F_1(x,s) &= \frac{T_0 w}{s^2+w^2} \exp(x\sqrt{s/a_1}) - \frac{T_0 w}{s^2+w^2} \frac{\exp(x\sqrt{s/a_1})}{1+\beta\exp(-2h\sqrt{s/a_1}))} \\ &\quad + \frac{T_0 w}{s^2+w^2} \frac{\exp(-x\sqrt{s/a_1})}{1+\beta\exp(-2h\sqrt{s/a_1}))} \end{aligned} \tag{80}$$

ve

$$F_2(x,s) = \frac{T_0 w(1+\beta)}{s^2+w^2} \frac{\exp\left[h(\sqrt{s/a_2} - \sqrt{s/a_1}) - x\sqrt{s/a_2}\right]}{1+\beta\exp(-2h\sqrt{s/a_1}))}, \tag{81}$$

olarak elde edilir. Burada $\beta = (k_1\sqrt{a_2} - k_2\sqrt{a_1})/(k_1\sqrt{a_2} + k_2\sqrt{a_1})$ dir. $F_1(x,s)$ ve $F_2(x,s)$ fonksiyonlarını elde ederken $\left[1+\beta\exp(-2h\sqrt{s/a_1}))\right]^{-1}$ ifadesinin $\left|\beta e^{-2h\sqrt{s/a_1}}\right|$ geometrik seri açılımı olan $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \beta^n e^{-2nh\sqrt{s/a_1}}$ olarak alınmıştır. Bu eşitliklerin paydalarını açarak şu şe-kilde *yazabiliriz,*

$$\begin{aligned} F_1(x,s) &= \frac{T_0 w}{s^2+w^2}\exp(x\sqrt{s/a_1}) \\ &-\frac{T_0 w}{s^2+w^2}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\beta^n\exp\left[-(2nh-x)\sqrt{s/a_1}\right] \\ &+\frac{T_0 w}{s^2+w^2}\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\beta^n\exp\left[-(2nh+x)\sqrt{s/a_1}\right] \end{aligned} \tag{82}$$

ve

$$F_2(x,s) = \frac{T_0 w(1+\beta)}{s^2+w^2}\times\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\beta^n\exp\left\{-\left[(2n+1)h+(x-h)\sqrt{a_1/a_2}\right]\sqrt{s/a_1}\right\}. \tag{83}$$

Bromwich integralini kullanarak,

$$U(x,s) = \frac{w}{s^2+w^2}\exp(x\sqrt{s/\kappa}) \tag{84}$$

denkliğinin aşağıdaki fonksiyonunun tersi olduğu gösterilebilir.

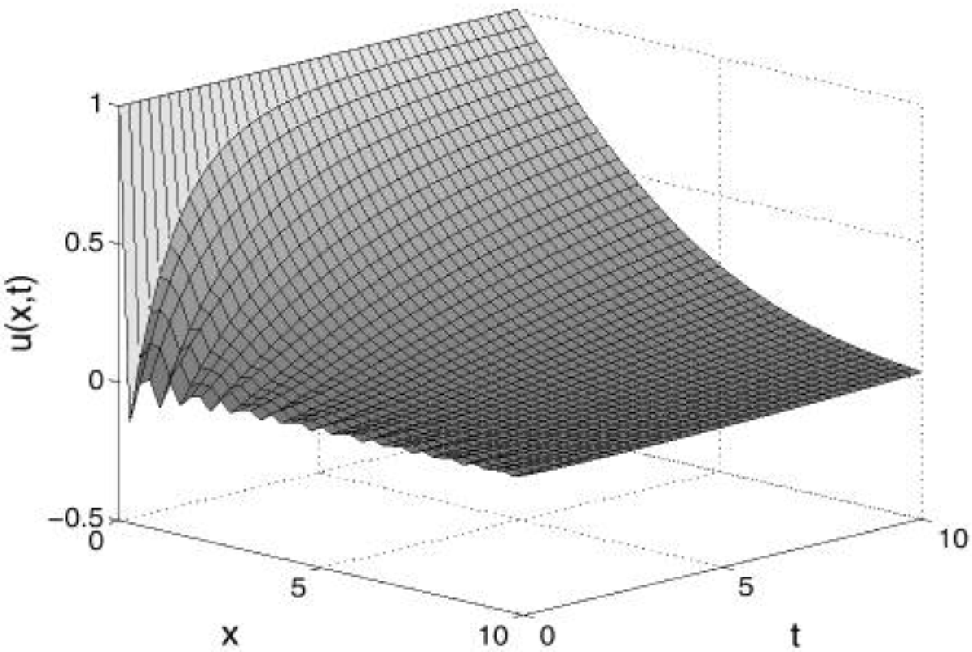
$$\begin{aligned} u(x,t) &= \exp(x\sqrt{w/2\kappa})\sin(wt+x\sqrt{w/2\kappa}) \\ &+\frac{2\kappa}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{w}{w^2+\kappa^2\eta^4}\exp(-\kappa t\eta^2)\sin(x\eta)\eta d\eta. \end{aligned} \tag{85}$$

$F_1(x,s)$ ve $F_2(x,s)$ fonksiyonlarının her ikisinin de $u(x,s)$ türünden yazılabileceği açıktır. Bu denklemleri terim terim integre edersek, son çözüm aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} f_1(x,t) &= T_0 u(x,t) - T_0\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\beta^n u(x-2nh,t) \\ &+T_0\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\beta^n u(-x-2nh,t), \end{aligned} \tag{86}$$

ve

$$f_2(x,t) = (1+\beta)T_0\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\beta^n u\left[(h-x)\sqrt{a_1/a_2}-(2n+1)h,t\right].$$



Şekil 2.6 : Çatlak kayalardan sızan sıvının akımı [6, sf 398]

Örnek 2.15 *Isı denkleminin son örneği olarak, aşağıdaki kısmi türevli denklemi çözeceğiz.*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[(1+a^2)\frac{\partial f}{\partial t}\right], \qquad 0 < a < \infty, 0 < t \tag{87}$$

Denklemin sınır koşulları $lim_{a\to\infty}|f(a,t)| < \infty$ *ve* $f(a,t) = 0$ *ile başlangıç koşulu f(a,t)=0 dır.*

Çözüm:Denklemin her iki yanına da Laplace dönüşümü uygulandığında, aşağıdaki denklem elde edilir.

$$F(a,s) = \int_0^\infty f(a,t)e^{-st}dt, \tag{88}$$

Burada sınır koşulları kullanıldığında ise aşağıdaki sınır değer problemi elde edilmiş olur.

$$\frac{d}{da}\left[(1+a^2)\frac{dF(a,s)}{da}\right] - sF(a,s) = -1, \qquad 0 < a < \infty, \tag{89}$$

Bu denklem için yeni sınır koşulları ise $lim_{a\to\infty}\left|F^{'}(a,t)\right| < \infty$ ve $F(0,s) = 0$dur. Bu denklemin özel çözümünü yaptığımızda $1/s$ çözümünü elde ederiz. $s = m(m+1)$ olarak denkleme yerleştirildiğinde eşitliğin sol tarafı Legendre denklemine dönüşür. Peşi sıra homojen çözüm,

$$F(a,s) = AP_m(ai) + BQ_m(ai), \tag{90}$$

olarak bulunur. Burada $m = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+s}$,$P_m(.)$ ve $Q_m(.)$ fonksiyonları ise sırası ile m. dereceden birinci ve ikinci tür Legendre fonksiyonlarıdır. $Qm(z) \to 0$ iken $|z|$ değeri sınırsız büyüdükçe $P_m(z)$

kuvvet serisi sınırsız olduğundan, çözümden $P_m(z)$ değerini çıkarırız ve çözüm,

$$F(a,s) = \frac{1}{s} - \frac{Q_m(ai)}{sQ_m(0+i)}. \tag{91}$$

olur. Burada $0+i$ değeri $Q_m(.)$ fonksiyonu çok değişkenli bir fonksiyon olduğu ve x-eksenini $-\infty$ ve 1 arasında reel ekseni kesen bir dallanma ile kesmemiz gerektiği için $Q_m(.)$ fonksiyonunun argümanı olarak yazdık. Sonuç olarak, $0+i$ sanal eksende dallanma kesim noktasının hemen üzerinde bir noktayı sembolize eder.Bromwich integralinden $F(a,s)$ fonksiyonunun tersi şu şekilde bulunur.

$$f(a,t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left[\frac{1}{z} - \frac{Q_m(ai)}{zQ_m(0+i)}\right]e^{zt}dz. \tag{92}$$

Buradaki doğru integralini karmaşık z düzleminin sol tarafında ve $z=-\infty$ ve $z=-\frac{1}{4}$ negatif reel eksenindeki dallanma noktasını dışarıda bırakacak şekilde sonsuz bir yarı daire biçiminde kapatabiliriz. Aynı zamanda $z=0$ noktası da bir kutup noktasıdır. Bu sebeple, öncelikle $z=0$ noktasındaki rezidüyü hesaplamalıyız. Burada $Q_0(z) = \tanh(z) = \frac{1}{2}\log\left[(z+1)/(z-1)\right]$ olduğu için, rezidü,

$$Rez\left\{\left[\frac{1}{z} - \frac{Q_m(ai)}{zQ_m(0+i)}\right]e^{tz};0\right\} = \left[1 - \frac{Q_0(ai)}{Q_0(0+i)}\right] = 1 + \frac{2}{\pi}\arctan(a), \tag{93}$$

olur. Diğer taraftan, dallanma noktası boyunca $z+\frac{1}{4} = \eta^2 e^{\pm\pi i}$ olduğundan dallanma noktasının yukarı kısmı Γ_1 olsun. Bu durumda Γ_1 boyunca,

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_1}\left[\frac{1}{z} - \frac{Q_m(ai)}{zQ_m(0+i)}\right]e^{tz}dz \\ = \quad & -2e^{-t/4}\int_0^\infty \frac{Q_{-\frac{1}{2}+\eta i}(ai)}{(\frac{1}{4}+\eta^2)Q_{-\frac{1}{2}+\eta i}(0+i)}e^{-t\eta^2}\eta d\eta,\end{aligned} \tag{94}$$

olur. Dallanma noktasının alt kısmı Γ_2 ile gösterilirse„

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_2}\left[\frac{1}{z} - \frac{Q_m(ai)}{zQ_m(0+i)}\right]e^{tz}dz \\ = \quad & -2e^{-t/4}\int_0^\infty \frac{Q_{-\frac{1}{2}-\eta i}(ai)}{(\frac{1}{4}-\eta^2)Q_{-\frac{1}{2}-\eta i}(0+i)}e^{-t\eta^2}\eta d\eta.\end{aligned} \tag{95}$$

dir.Dallanma noktasının alt ve üst kısımlarını bir araya getirilirse, dallanma noktası Γ için aşağıdaki denkleme ulaşılmış olur.

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma}\left[\frac{1}{z} - \frac{Q_m(ai)}{zQ_m(0+i)}\right]e^{tz}dz \\ = \quad & 2e^{-t/4}\left[\frac{Q_{-\frac{1}{2}-\eta i}(ai)}{Q_{-\frac{1}{2}-\eta i}(0+i)} - \frac{Q_{-\frac{1}{2}+\eta i}(ai)}{Q_{-\frac{1}{2}+\eta i}(0+i)}\right]\times e^{-\eta^2 t}\frac{\eta}{\frac{1}{4}+\eta^2}d\eta.\end{aligned} \tag{96}$$

Burada şu eşikliklerden yararlanacağız.

$$\begin{aligned}
Q_m(z) - Q_{-m-1}(z) &= \pi \cot(m\pi) P_m(z), && (97)\\
\frac{2}{\pi}\sin(m\pi) Q_m(z) &= P_m(z) e^{-m\pi i n} - P_m(-z), \qquad Im(z) > 0, && (98)\\
Q_m(0+i) &= Q_m(0) - \pi i P_m(0)/2, && (99)\\
P_m(0) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(\frac{\pi m}{2}) \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m/2)}{\Gamma(1+m/2)}, && (100)\\
Q_m(0) &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \sin(\frac{\pi m}{2}) \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+m/2)}{\Gamma(1+m/2)}, && (101)
\end{aligned}$$

Burada $\Gamma(.)$ fonksiyonu gama fonksiyonudur. 2. denklemden 5. denkleme kadar olan kısmı birleştirdiğimizde,

$$iQ_{\eta i-\frac{1}{2}}(0+i) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{1}{4}+\eta i/2)}{2\Gamma(\frac{3}{4}+\eta i/2)} e^{\pi i/4} e^{\pi i/2}.$$

$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin(\pi z)$ olduğu için,

$$iQ_{\eta i-\frac{1}{2}}(0+i) = \frac{1}{2\pi i} iQ_{\eta i-\frac{1}{2}}(0+i) = (\frac{1}{4}+\eta i/2) iQ_{\eta i-\frac{1}{2}}(0+i) = (\frac{1}{4}-\eta i/2) s \cos\left(\frac{n\pi i}{2}+\frac{\pi}{4}\right) e^{\pi i/4} e^{\eta\pi/2}. \tag{102}$$

bulunur. Sıralı şekilde verilen denklemlerden ilk ikisini kullanarak„

$$\begin{aligned}
&\frac{Q_{-\frac{1}{2}-\eta i}(ai)}{Q_{-\frac{1}{2}-\eta i}(0+i)} - \frac{Q_{-\frac{1}{2}+\eta i}(ai)}{Q_{-\frac{1}{2}+\eta i}(0+i)}\\
&= \pi i \tanh(\eta\pi) \frac{P_{\eta i-\frac{1}{2}} Q_{\eta i-\frac{1}{2}}(ai) - Q_{\eta i-\frac{1}{2}}(0+i) P_{\eta i-\frac{1}{2}}(ai)}{Q_{\eta i-\frac{1}{2}}(0+i) Q_{-\eta i-\frac{1}{2}}(0+i)}\\
&= -\frac{2\pi\sqrt{\pi}\tanh(\eta\pi)\left[P_{\eta i-\frac{1}{2}}(ai) - P_{\eta i-\frac{1}{2}}(-ai)\right]}{\Gamma(\frac{1}{4}+\eta i/2)\Gamma(\frac{1}{4}-\eta i/2)\cosh(\eta\pi)}. \qquad (103)
\end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Sonuç olarak çözüm toplam $2\pi i$ ile bölündükten sonra rezidü ve dallanma noktası integrali farkına eşittir veya,

$$\begin{aligned}
f(a,t) &= 1 + \frac{2}{\pi}\arctan(a)\\
&\quad -4\sqrt{\pi} e^{-t/4} \int_0^\infty \frac{\eta \tanh(\eta\pi)}{\cosh(\eta\pi)\Gamma(\frac{1}{4}+\eta i/2)\Gamma(\frac{1}{4}-\eta i/2)(\frac{1}{4}+\eta^2)}\\
&\quad \times e^{-\eta^2 t} \frac{P_{\eta i-\frac{1}{2}}(ai) - P_{\eta i-\frac{1}{2}}(-ai)}{2i} d\eta. \qquad (104)
\end{aligned}$$

dır.

2.4 L_2 Dönüşümü

Tanım 2.11 *δ-türev olarak isimlendirdiğimiz δ_t diferansiyel operatörü*

$$\delta_t = \frac{1}{t}\frac{d}{dt} \tag{105}$$

olarak tanımlanır. $\delta-$ türev operatörünün herhangi bir kuvvetinin değeri klasik algebraik işlemler ile bulunabilir.

Örneğin;

$$\delta_t^2 = \delta_t . \delta_t = \frac{1}{t^2}\frac{d^2}{dt^2} - \frac{1}{t^3}\frac{d}{dt}. \tag{106}$$

$\delta-$türev operatörünün herhangi bir pozitif kuvveti aynı işlemlerin art arda uygulanması ile bulunabilir.

Tanım 2.12 *Laplace türü dönüşümlerden olan $\mathcal{L}_2$ dönüşümü Yürekli ve Sadek tarafından şu şekilde tanımlanmıştır.*

$$\mathcal{L}_2\left\{f(t);s\right\} = \int_0^\infty t\exp(-s^2t^2)f(t)dt. \tag{107}$$

Bu integralin sağ tarafında yapılacak bir değişken değişimi ile

$$\mathcal{L}_2\left\{f(t);s\right\} = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-xt^2}f(\sqrt{t})dt \tag{108}$$

elde edilebilir. Klasik Laplace dönüşümü ve $\mathcal{L}_2$ dönüşümü arasındaki ilişki şu şekildedir.

$$\mathcal{L}_2\left\{f(t);s\right\} = \frac{1}{2}L\left\{f(t^{1/2};s^2\right\}. \tag{109}$$

Aghili, Ansari ve Sedgi $\mathcal{L}_2$ dönüşümünün tersini $\mathcal{L}_2\left\{f(t);\sqrt{s}\right\}$ dönüşümü $Re(t) \leq c$ sol yarım düzleminde sınırlı sayıda singüler noktaya sahip olmak üzere,

$$\mathcal{L}_2\left\{\mathcal{L}_2\left\{f(t);s\right\}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2\mathcal{L}_2\left\{f(t);\sqrt{s}\right\}\exp(st^2)dt \tag{110}$$

olarak tanımlamışlardır.

2.4.1 $\mathcal{L}_2$ Dönüşümünün Özellikleri:

1. İlk olarak bir fonksiyonun $\delta-$türevinin $\mathcal{L}_2$ dönüşümü ile fonksiyonun kendisinin $\mathcal{L}_2$ dönüşümü arasındaki ilişkiyi veren bir eşitlik bularak başlayacağız.

t değeri pozitif iken fonksiyonumuz parçalı sürekli ve ilk türevi olan bir sürekli fonksiyon olarak varsayılsın ve fonksiyon ile birinci türevi değeri sınırsız büyürken $exp(a^2t^2)$üstel dereceden olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2\left\{\delta_t f(t);s\right\} &= \int_0^\infty \exp(-t^2s^2)f'(t)dt, \\ &= 2s_2^2\mathcal{L}\left\{f(t);s\right\} - f(0^+) \end{aligned} \tag{111}$$

tanımlardan yararlaranarak kolaylıkla elde edilebilir. Benzer biçimde, $t \geq 0$ aralığında fonksiyon ve birinci türevi ikinci türeve sahip sürekli fonksiyonlar ve t değeri sınırsız büyürken fonksiyonların tümü $exp(a^2t^2)$ üstel mertebeli olmak üzere,

$$\mathcal{L}_2\left\{\delta_t^2 f(t);s\right\} = 2s_2^2\mathcal{L}\left\{\delta_t f(t);s\right\} - (\delta_t f)(0^+) \tag{112}$$

olarak bulunur. (2.38) ve (2.39) kullanılarak

$$\mathcal{L}_2\left\{\delta_t^2 f(t);s\right\} = 4s_2^4\mathcal{L}\left\{f(t);s\right\} - 2s^2 f(0^+) - (\delta_t f)(0^+) \tag{113}$$

eşitliği elde edilir. Buradan indüksiyon yöntemi ile aşağıdaki teorem elde edilebilir.

Teorem 2.2 $f, f\prime, f", ..., f^{(n-1)}$, *$t \geq 0$ aralığında $f^{(n)}$ parçalı sürekli türevine sahip sürekli fonksiyonlar ve bütün fonksiyonlar $exp(c^2t^2)$ üstel mertebeli ise,*

$$\mathcal{L}_2\left\{\delta_t^n f(t);s\right\} = 2^n s_2^{2n}\mathcal{L}\left\{f(t);s\right\} - 2^{n-1}s^{2(n-1)}f(0^+) - 2^{n-2}s^{2(n-2)}(\delta_t f)(0^+) - ... - (\delta_t^{n-1}f)(0^+) \tag{114}$$

eşitliği elde edilir. $(n$ *değerleri pozitif doğal sayılar,* a *sabit ve* $t \to \infty)$

2. Bessel denklemini çözerken $t^2 f(t)$ olarak ifade edilen bir fonksiyon dönüşümü hesaplamamız gerekir. Biz bunu genelleştireceğiz ve $t^{2n}f(t)$ dönüşümünü hesaplamak için bir teorem elde edeceğiz. $f(t), t \geq 0$ aralığınında parçalı sürekli ve t değeri sınıfsız büyürken $exp(a^2t^2)$ üstel dereceli olursa $Re(s) >$a yarı düzleminde analitik bir fonksiyon olur. Bu yüzden $f(t)$ fonksiyonunun $\mathcal{L}_2$ dönüşümü her dereceden türeve sahip ve her türev dönüşümün türetilmesi ile elde edilebilirdir. s değişkenine göre $\delta-$türev uygulanırsa;

$$\delta_s\mathcal{L}_2\left\{f(t);s\right\} = \int_0^\infty t\exp(-s^2t^2)\left[-2t^2 f(t)\right]dt \tag{115}$$

eşitliğine ulaşılır. Dönüşümün tanımını kullanarak,

$$\mathcal{L}_2\left\{t^2 f(t)\right\} = -\frac{1}{2}\delta_s\mathcal{L}_2\left\{f(t);s\right\} \tag{116}$$

denkliği bulunur. s değişkenine göre $\delta-$türev uygulamaya devam edilince,

$$\delta_s^m\mathcal{L}_2\left\{f(t);s\right\} = \int_0^\infty t\exp(-s^2t^2)\left[\left(-2t^2\right)^m f(t)\right]dt \tag{117}$$

sonucu elde edilir. Burada m sayma sayılarıdır. Bu denkliklerin sonucu olarak şu teoreme ulaşılır.

Teorem 2.3 : *$t \geq 0$ aralığında f parçalı sürekli bir fonksiyon ve t sınırsız büyürken $exp(a^2t^2)$ üstel mertebeli ise*

$$\mathcal{L}_2\left\{t^{2m}f(t);s\right\} = \frac{(-1)^m}{2^m}\delta_s^m\mathcal{L}_2\left\{f(t);s\right\}. \quad m = (1,2,3,...) \tag{118}$$

olur.

2.4.2 Bessel Diferansiyel Denkleminin $\mathcal{L}_2$ Dönüşümü ile Çözümü:

(2.) daki Bessel diferansiyel denkleminde $f(x) = t^{-a}z(x)$ eşitliğindeki f bağımlı değişkenini z ile değiştirirsek,

$$x\frac{d^2z}{dx^2} - (2a-1)\frac{dz}{dx} + xz(x) = 0 \tag{119}$$

halini alır. Gerekli sadeleştirme işlemleri yapılıp denklem $\delta-$türev uygulanabilecek hale getirilip $L_2 dönüsümü$ dönüşümü uygulandıktan sonra,

$$\mathcal{L}_2\left\{x^2\delta_x^2 z(x); s\right\} - 2(a-1)\mathcal{L}_2\left\{\delta_x z(x); s\right\} + \mathcal{L}_2\left\{z(x); s\right\} = 0 \tag{120}$$

bulunur. Burada (2.45) deki teoremde $m = 1$ alınırsa şu eşitlik elde edilir:

$$-\frac{1}{2}\delta_s\mathcal{L}_2\left\{\delta_x^2 z(x); s\right\} - 2(a-1)\mathcal{L}_2\left\{\delta_x z(x); s\right\} + \mathcal{L}_2\left\{z(x); s\right\} = 0. \tag{121}$$

$m = 1$ ve $m = 2$ için (2.41) deki teorem uygulanır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$2s^3\mathcal{L}_2^{'}\left\{z(x); s\right\} + \left[4s^2(a+1) - 1\right]\mathcal{L}_2\left\{z(x); s\right\} = 2az(0+),$$

$az(0+) = 0$ varsayılırsa yani,

$$z(0+) = \begin{cases} rastgele & a = 0 \\ 0 & a \neq 0 \end{cases}$$

olarak alınırsa,

$$\mathcal{L}_2\left\{z(x); s\right\} = Cs^{-2(a+!)}\exp(-1/4s^2) \tag{122}$$

elde edilir. Yukarıdaki fonksiyonun Taylor açılımı kullanılırsa,

$$\mathcal{L}_2\left\{z(x); s\right\} = C\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!2^{2m}s^{2(m+a+1)}} \tag{123}$$

eşitliğine ulaşılır.

$$\mathcal{L}_2\left\{x^{2(m+a)}; s\right\} = \frac{\Gamma(m+a+1)}{2s^{2(n+a+1)}}$$

değeri kullanılırak ve $C = 2^{-a-1}$ olarak şeçilerek,

$$z(x) = x^a\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+a+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+a} \tag{124}$$

eşitliği elde edilir.Bu değer $y(x) = x^{-a}z(x)$ eşitliğinde yerine koyularak a. dereceden Bessel fonksiyonu elde edilmiş olur.

2.4.3 Hermite Diferansiyel Denkleminin $\mathcal{L}_2$ Dönüşümü ile Çözümü:

(2.) deki Hermite Diferansiyel denkleminde gerekli sadeleştirmeler yapılarak $\delta - türev$ kullanımı için gerekli katsayılar elde edildikten ve $\mathcal{L}_2$ dönüşümü uygulandıktan sonra,

$$\mathcal{L}_2\left\{x^2\delta_x^2 f(x);s\right\} + \mathcal{L}_2\left\{\delta_x f(x);s\right\} - 2\mathcal{L}_2\left\{x^2\delta_x f(x)\right\} + 2mL_2\left\{f(x);s\right\} = 0, \tag{125}$$

elde edilir. (2.45)deki teoremde $m = 1$ olarak alınır ve uygulanırsa,

$$-\frac{1}{2}\delta_s\mathcal{L}_2\left\{\delta_x^2 f(x);s\right\} + \delta_s\mathcal{L}_2\left\{\delta_x f(x);s\right\} + \mathcal{L}_2\left\{\delta_x f(x);s\right\} + 2m\mathcal{L}_2\left\{f(x);s\right\} = 0, \tag{126}$$

bulunur. Teorem (2.41) de $m = 1$ ve $m = 2$ olarak alınır ve gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki birinci dereceden denklem elde edilir.

$$\mathcal{L}_2\left\{f(x);s\right\} + \frac{3s^2 2 + m}{s^3 - s}\mathcal{L}_2\left\{f(x);s\right\} = \frac{\mathcal{L}_2\left\{f(x);0\right\}}{2(s^3 - s)}, \tag{127}$$

$\mathcal{L}_2\left\{f(x);s\right\} = F(s)$ olarak alınsın. (2.128) birinci dereceden denklemi çözülürse,

$$\begin{aligned} F_m(s) &= \frac{F(0)}{2}s^{-m-2}(s^2-1)^{(m-1)/2} \\ &\quad \times \int s^{m+1}(s^2-1)^{-(m+1)/2}ds + Cs^{-m-2}(s^2-1)^{(m-1)/2} \end{aligned} \tag{128}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada $m = 0, 1, 2, ...$ ve C rastgele bir sabittir. Buradan itibaren m değerinin tek ve çift pozitif tam sayı olduğu iki durumu ele almamız gerekir.

İlk durumda $m = 2k + 1$ olarak alınsın. Özel durumlardan $F_{2k+1}(0) = 0$ varsayılabilir. Bu durumda

$$F_{2k+1} = \mathcal{L}_2\left\{f(x);s\right\} = C_k s^{-2k-3}(-1)^k(1-s^2)^k \tag{129}$$

elde edilir. Binom açılım kullanılır ve ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$F_{2k+1}(x) = C_k(-1)^k\sum_{i=0}\binom{k}{i}(-1)^i L_2^{-1}\left\{s^{2i-2k-3};x\right\} \tag{130}$$

elde edilir. Sağ taraftaki ters Laplace dönüşümünde Laplace dönüşümünün tanımı kullanılır ve çıkan eşitlikte Gamma katlı formülü kullanılırsa;

$$2^{2(k-i)+1}\Gamma(k-i+\frac{3}{2})\Gamma(k-i+1) = \sqrt{\pi}\Gamma\left\{2(k-i+1)\right\} \tag{131}$$

eşitliğine ulaşılır. $t = k - i + 1$ alınır ve yukarıdaki eşitlikte yerine yazılırsa,

$$F_{2k+1} = C_k\frac{(-1)^k 2k!}{\sqrt{\pi}}\sum_{i=0}^{k}\frac{(-1)^i}{i!(2t-1)!}(2k)^{2t-1} \tag{132}$$

olarak bulunur. Burada genelliği bozmadan

$$C_k = \frac{(-1)^k(2k+1)!}{2k!}$$

alınırsa,

$$F_{2k+1}(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i(2k+1)!}{i!(2k-2i+1)!}(2x)^{2k-2i+1} \tag{133}$$

olarak bulunur. Bu Hermite polinomudur.

İkinci olarak, $k = 0, 1, 2, ...$ olmak üzere $m = 2k$ olarak alınır. Yine özel durum ele alınırsa, $F_{2k}(0) = (-1)^k(2k)!/k!$ varsayılabilir. Şimdi $C = 0$ seçildiğinde çözüm;

$$F_{2k}(s) = \frac{(-1)(2k)!}{2k!}s^{-2k-2}(s^2-1)^{\frac{2k-2}{2}} \int s^{2k+1}(s^2-1)^{-k-1/2}ds \tag{134}$$

halini alır. Eşitliğin sağ kısmındaki integralin değeri $y = s^2 - 1$ dönüşümü yapılarak hesaplanır ve sonrasında binom formülden de faydalanıldığında şu eşitliği elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} \int s^{2k+1}(s^2-1)^{-k-1/2}ds &= \frac{1}{2}\int y^{-1/2}\left\{\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}y^{i-k}\right\}dy \\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{y^{i-k-\frac{1}{2}}}{2i-2k+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{(s^2-1)^{i-k+\frac{1}{2}}}{2i-2k+1} \end{aligned} \tag{135}$$

sonucuna ulaşılır. Eşitlik [136] da yerine koyulur ve Binom teoremi uygulanırsa,

$$F_{2k}(s) = \frac{(-1)^k(2k)!}{2k!}\left(\frac{1}{s^2} + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{2^i k(k-1)(k-2)...(k-i+1)}{1\times 3\times ...\times(2i-1)}s^{-2i-2}\right) \tag{136}$$

denklemine ulaşılır. Burada ters L_2-dönüsümü uygulanırken

$$\begin{aligned} L_2\{1;s\} &= \frac{1}{2}L\{1;s^2\} = \frac{1}{2s^2} \\ L_2\{x^{2i};s\} &= \frac{1}{2}L\{x^2;s^2\} = \frac{\Gamma(i+1)}{2s^{2i+2}} = \frac{1}{2}i!s^{-2i-2} \end{aligned} \tag{137}$$

bağıntıları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} F_{2k}(x) &= \frac{(-1)^k(2k)!}{k!}\left(1 + \sum_{i=0}^{k}(-1)^i\frac{2^i k(k-1)(k-2)...(k-i+1)}{i!\,[1\times 3\times ...\times(2i-1)]}x^i\right) \\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^{k+i}\frac{(2k)!}{(k-i)!(2i)!}(2x)^{2k-2i} \end{aligned} \tag{138}$$

elde edilir. Toplamın aynılığını göstermek adına $i = k - i$olarak seçilirse

$$\begin{aligned} F_{2k}(x) &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^{2k-i}\frac{(2k)!}{i!(2k-2i)!}(2x)^{2k-2i} \\ &= \sum_{i=0}^{k}(-1)^{i}\frac{(2k)!}{i!(2k-2i)!}(2x)^{2k-2i} \end{aligned} \tag{139}$$

bulunur. Bu da çift sayılar için belirtilen Hermite polinomudur.

2.5 $\mathcal{L}_2$-dönüşümü İçin Uygulamalar ve Ters Dönüşüm Tekniği

Teorem 2.4 $F(\sqrt{s}), s = 0$ *bir dallanma noktası olmadığı varsayılarak,* $Res = c$ *dikey çizgisinin sol yanında kalan sonlu sayıda kutup noktası dışında analitik bir fonksiyon olsun.* $Res \leq c$ *sol düzlemi boyunca* s *sınırsız büyürken* $F(\sqrt{s}) \to 0$ *ise;*

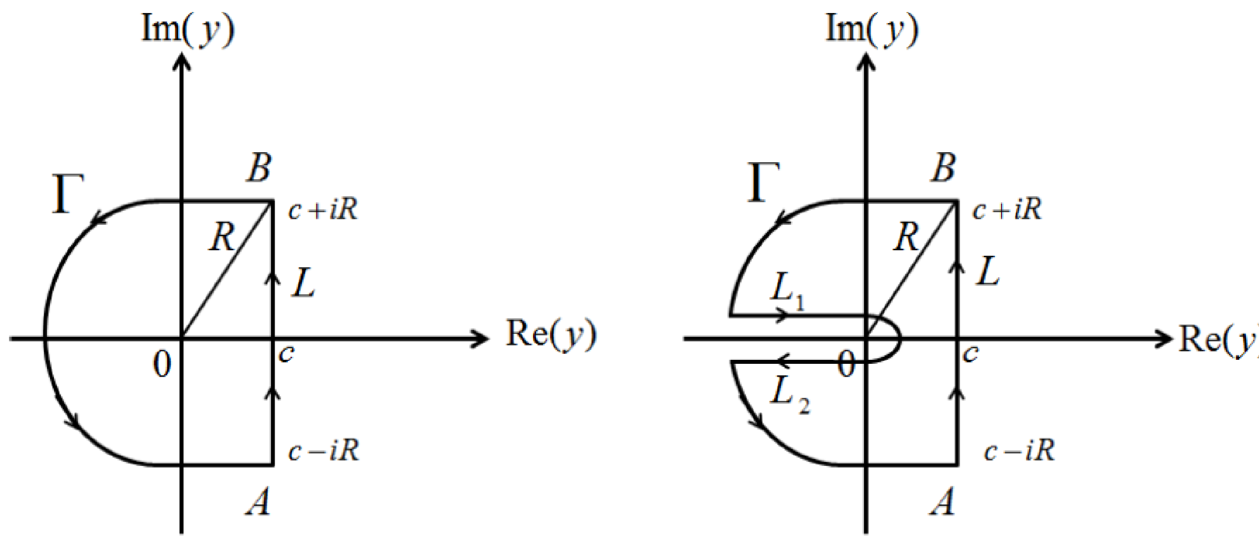
$$\mathcal{L}_2\left\{f(x); s\right\} = \int_0^{\infty} x \exp(-s^2 x^2) f(x) dx = F(s) \tag{140}$$

olarak alınsın. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{-1}\left\{F(s)\right\} &= f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2F(\sqrt{s}) e^{sx^2} dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} Res\left\{2F(\sqrt{s})\right\} e^{sx^2}; s = s_k \end{aligned} \tag{141}$$

elde edilir.

İspat. İlk olarak, $\mathcal{L}_2\left\{F(s)\right\}$ in değeri ters $\mathcal{L}_2$ dönüşümünün tanımından faydalanarak bulmak gerekir ki bu kolay bir uygulamadır. Sonrasında, ikinci eşitlik için integrasyon eğrisi olarak kapalı yarım-çember alınır ve rezidü teoreminden ile $F(\sqrt{s})$ nin sınırlılığından faydalanılır. Elbette ki $s = 0$ noktasında bir dallanma olmadığı varsayılmış olmasaydı burada anahtar deliği konturu kullanılacaktı.



Şekil 2.7 : İntegrasyon Konturu

Burada kompleks ters dönüşüm teoremini kullanılarak elde edilir. $F(\sqrt{s})$ nin $Res \leq c$ yarı düzleminin solunda sonlu sayıda kutup noktasında sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda, Γ_1,

$c - iR$ den $c + iR$ ye doğrusal doğru parçası ve Γ_2 , Γ_1 in solunda yatan $|s-c| = R$ doğrusal, kapalı yarı çemberi olmak üzere, $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ integrasyon kontürü elde edilmiş olur. $F(\sqrt{s})$ fonksiyonunun tüm integrasyon noktalarını içerebilmesi için R yarı-çapının yeterince büyük olarak seçilmesi gerekmektedir. Rezidü teoreminden;

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} 2F(\sqrt{s})e^{sx^2}dx &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} 2F(\sqrt{s})e^{sx^2}dx - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} 2F(\sqrt{s})e^{sx^2}dx \\
&= \sum_{k=1}^{m}\left[Res\left\{2F(\sqrt{s})e^{sx^2}; s = s_k\right\}\right] \\
&\quad -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} 2F(\sqrt{s})e^{sx^2}dx
\end{aligned} \tag{142}$$

$s_1, s_2, s_3, ..., s_m$ kapalı Γ kontürü içindeki $F(\sqrt{s})$ nin bütün singüler noktaları olsun. Eşitiliğin her iki yanına $R \to +\infty$ için limit uygulanırsa, Jordan lemmasından ikinci integralin değeri 0 olur. $F(\sqrt{s})$, $s = 0$ noktasında bir dallanmaya sahipse, $\varepsilon < |s| < R$, $Re(s) < c$ olmak üzere $D, c\text{-}(-\infty, 0]$ düzleminde oluşacaktır. Yine rezidü teoremini kullanırsak;

$$\int\limits_{\partial D} e^{sx^2}F(\sqrt{s})ds = 0$$

elde edilir ve ∂D etrafındaki integral $[c - iR, c + iR]$ doğrusu parçası boyunca 6 integralin toplamına eşit olur. Bunlar Γ_R dairesel kontürün üst kısmı, dallanma noktası kesiğin üst kenarı, orijin merkezli ε yarıçaplı küçük çember çevresi, kesiğin alt kenarı ve Γ_R dairesel kontürünün alt kısmıdır. Eğer sonsuz sayıda singüler nokta olsaydı C merkezli, $R_m = \pi^2 m^2$, $m \in N$ yarıçaplı, C_m yarı çemberleri alırdı. ■

2.5.1 $\mathcal{L}_2$-Dönüsümü Uygulamaları

Örnek 2.16

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2\left\{\frac{\sin u^2}{u^2}\right\} &= \int_0^\infty u\exp(-s^2u^2)\frac{\sin u^2}{u^2}du \\
&= \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{s^2}.
\end{aligned} \tag{143}$$

Örnek 2.17

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2\left\{H(u-m); s\right\} &= \int_0^\infty u\exp(-s^2u^2)H(u-m)du, \\
&= \int_a^\infty u\exp(-s^2u^2)du \\
&= -\frac{1}{2s^2}\exp(-s^2u^2)\ \Big]_a^\infty \\
&= \frac{1}{2s^2}\exp(-s^2a^2).
\end{aligned} \tag{144}$$

Örnek 2.18

$$\mathcal{L}_2\left\{u^m;s\right\}=\int_0^\infty u^{m+1}\exp(-s^2u^2)du,$$

sağ taraftaki integral değişken değişimi ile hesaplanabilir. Burada $s^2u^2=t$ *olarak alınırsa;*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2\left\{u^m;s\right\} &= \int_0^\infty (\frac{\sqrt{t}}{s})e^{-t}\frac{dt}{2s\sqrt{t}}\\ &= \frac{1}{2s^{m+2}}\int_0^\infty t^{\frac{m}{2}}e^{-t}dt, \end{aligned} \tag{145}$$

[146]*eşitliğinde Gamma fonksiyonu bağıntısı kullanılırsa, şu eşitlik elde edilir.*

$$\mathcal{L}_2\left\{u^m\right\}=\frac{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}{2s^{m+2}}. \tag{146}$$

Örnek 2.19 *Aşağıdaki eşitliği gösterelim.*

$$\mathcal{L}_2\left\{e^{-mu};s\right\}=\frac{1}{2s^2}-\frac{m\sqrt{\pi}}{4s^3}-\exp(\frac{m^2}{4s^2})Erfc(\frac{m}{2s}). \tag{147}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2\left\{e^{-mu};s\right\} &= \int_0^\infty u\exp(-s^2u^2-mu)du=\int_0^\infty u\exp(-s^2(u^2+\frac{mu}{s^2}))du,\\ &= \exp(\frac{m^2}{4s^2})\int_0^\infty u\exp(-s^2(u+\frac{m}{2s^2})^2)du,\end{aligned}$$

Sağ taraftaki integralde $s(u+\frac{m}{2s^2})=t$ *olarak alınırsa;*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_2\left\{e^{-mu};s\right\} &= \exp(\frac{m^2}{4s^2})\int_{\frac{m}{2s}}^\infty(\frac{t}{s}-\frac{m}{2s})\exp(-t^2)\frac{dt}{s},\\ &= \exp(\frac{m^2}{4s^2})\left\{\int_{\frac{m}{2s}}^\infty\frac{t}{s^2}\exp(-t^2)dt-\frac{m}{2s^3}\int_{\frac{m}{2s}}^\infty\exp(-t^2)dt\right\},\\ &= \exp(\frac{m^2}{4s^2})\frac{1}{2s^2}\exp(-\frac{m}{4s^2})-\frac{m\sqrt{\pi}}{4s^3}Erfc(\frac{m}{2s}),\\ &= \frac{1}{2s^2}-\frac{m\sqrt{\pi}}{4s^3}\exp(\frac{m^2}{4s^2})Erfc(\frac{m}{2s}).\end{aligned}$$

Örnek 2.20 $\mathcal{L}_2-$*dönüsümü için karmaşık ters dönüşüm formülünü kullanarak, aşağıdaki eşitliği gösterelim.*

$$\mathcal{L}_2^{-1}\left\{\frac{1}{2s^2}\exp(-\frac{1}{4s^2})\right\}=J_0(u). \tag{148}$$

$F(s)=\frac{1}{2s^2}\exp(-\frac{1}{4s^2})$ *olarak alınırsa,*

$$2F(\sqrt{s})=\frac{1}{2s}\exp(-\frac{1}{4s})$$

bulunur. $s=0$ *noktası singüler noktadır. Burada* $s=0$ *noktası dallanma noktası değildir. Karmaşık ters dönüşüm formülünü kullandıktan sonra orjinal fonksiyonu şu şekilde bulabiliriz:*

$$f(x)=Res\left\{\frac{1}{s}\exp(-\frac{1}{4s})\exp(-su^2),s=0\ noktasında\right\}=a_{-1}$$

Burada a_{-1} , $2F(\sqrt{s})\exp(su^2)$ nin Laurent açılımında $\frac{1}{s}$ in katsayısıdır. Buradan şu eşitliği elde ederiz;

$$2F(\sqrt{s})\exp(su^2)=\frac{1}{s}\left[1+su^2+\frac{(su^2)^2}{2!}+...\right]\left[1-\frac{1}{4s}+\frac{1}{(4s)^2 2!}-\frac{1}{(4s)^3 3!}+...\right].$$

Buradaki açılımı da kullanarak yukarıdaki eşitliği elde etmiş oluruz.

$$\begin{aligned} f(u) &= a_{-1}=\left[1-\frac{u^2}{4^1 1!}+\frac{u^4}{4^2(2!)^2}-\frac{u^6}{4^3(3!)^2}+...\right], \\ &= 1-\frac{u^2}{2^2}+\frac{u^4}{2^2 4^2}-\frac{u^6}{2^2 4^2 6^2}+..., \\ &= J_o(u). \end{aligned}$$

Örnek 2.21 *$\mathcal{L}_2-$dönüsümünü kullanarak aşağıdaki non-homojen dalga denklemini çözelim.*

$$u\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-u^3\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial f}{\partial u}=xu^2. \qquad (x,u>0) \tag{149}$$

$$f(x,0)=0, \quad f(0,u)=1, \qquad f_x(x,0)=0$$

u^3 ile tüm eşitliği böler ve $\delta-$ türev tanımından faydalanırsak, yukarıda eşitliği şu şekilde ifade edebiliriz.

$$\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}-\frac{1}{u^3}\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{x}{u}.$$

$$\delta_u^2 f(x,u)=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{x}{u},$$

$\mathcal{L}_2$-dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathcal{L}_2\left\{\delta_u^2 f(x,u);s\right\}=\mathcal{L}_2\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+\frac{x}{u};s\right\}$$

elde edilir. Teorem 2.4 $n=2$ için uygulanır ve gerekli işlemler takip edilirse aşağıdaki ikinci dereceden denkleme ulaşmış oluruz.

$$F_x^{''}(x,s)-4s^4F(x,s)=\frac{\sqrt{\pi}}{2s}x.$$

Burada $F(x,s)=\mathcal{L}_2\left\{f(x,u);s\right\}$. Yukarıdaki ikinci dereceden adi türevli denklem çözülür, Lemma uygulanır ve $f(0,u)=1$ olarak alınırsa,

$$c_1=0, \qquad c_2=\frac{1}{2s^2}$$

olarak bulunur. Eşitlikte yerine koyulduklarında,

$$F(x,s)=\frac{1}{2s^2}e^{-2s^2x}-\frac{\sqrt{\pi}}{8s^5}x,$$

olur. Ters dönüşüm uygulanarak,

$$f(x,u) = H(u - 2\sqrt{x}) - \frac{xu^3}{3}. \tag{150}$$

sonucuna ulaşılır.

2.5.2 Kısmi Türevli Denklemlerin Çözümünde $\mathcal{L}_2$ Dönüşümünün Kullanımı

Aşağıdaki kısmi türevli denklemi ele alalım.$u\,(0^+, t) = 1, u_t(0^+, t) = 0$ olmak üzere

$$t^3 u_{tx} + 2xu = 0,$$

Türev operatörü cinsinden yazmak için denklem düzenlenirse;

$$t^3 \frac{1}{x} \frac{d}{dx} u_t + 2u = 0$$

elde edilir. $\mathcal{L}_2$ dönüşümü eşitliğin her iki tarafına da uygulandığında,

$$2s^2 t^3 \overline{u}_t - u(0^+, t) = -2\overline{u}.$$

bulunur. Burada $\overline{u} = \overline{u}(s,t) = \mathcal{L}_2\left\{u(x,t); s\right\}$ dir.Buradan,

$$\overline{u}_t = -\frac{1}{s^2 t^3}\overline{u} + \frac{u(0^+, t)}{2s^2 t^3}.$$

olur. Başlangıç koşulundan dolayı ikinci terim 0'a eşit olur. Bu birinci dereceden kısmi türevli denklemin bir çözümü;

$$\overline{u}(s,t) = \frac{1}{2s^2} e^{\frac{t^{-2}s^{-2}}{2}}$$

dur. Buradan $\overline{u}(s,t)$ fonksiyonunun seri açılımı yazıldığında,

$$\overline{u}(s,t) = \frac{1}{2s^2} \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t^{-2}s^{-2}}{2}\right)^n}{n!} = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}^n}{2s^{2n+2} t^{2n} n!}$$

elde edilir. Teorem 2.2 kullanılarak $u(x,t) = \mathcal{L}_2^{-1}\left\{\overline{u}(s,t), x\right\}$ olarak hesaplanabilir. Ters dönüşüm yapıldığından istenilen fonksiyon bulunmuş olur:

$$u(x,t) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}^n x^{2n}}{t^{2n}(n!)^2}.$$

Yukarıdaki ilk örnek de göz önünde bulundurularak aşağıdaki formdaki kısmi türevli denklemlerin L_2 dönüşümü kullanılarak çözülebileceği söylenebilir.

$$f(x)u + f(x)\frac{1}{t}u_t + g(x)\frac{1}{x}u_{tx} = 0 \tag{151}$$

Eşitliğin her iki yanına da $\mathcal{L}_2$ dönüşümü uygulandığında ve gerekli hesaplamalar yapıldığında aşağıdaki homojen denklem elde edilir.

$$f(x)\overline{u} + f(x)2s^2\overline{u} + g(x)2s^2\overline{u}_x = 0$$

Tekrar düzenlendiğinde;

$$\frac{\overline{u}_x}{\overline{u}} = -\frac{(1+2s^2)}{2s^2}.M(x)$$

elde edilir. $M(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ve $M(0) = 0$ dur. $\mathcal{L}(s), s$ değişkenine dağlı sabit bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\overline{u}$ için bulunabilecek bir çözüm şu şekilde olur.

$$\begin{aligned}
\overline{u}(s,x) &= e^{\frac{-(1+2s^2)}{2s^2}\cdot\int_0^x M(w)dw}.L(s) \\
&= e^{\int_0^x M(w)dw}.e^{\frac{-\int_0^x M(w)dw}{2s^2}}.L(s)
\end{aligned}$$

$\int_0^x M(w)dw$ integralinin seri açılımı $M(x)$ olarak yazılır ve $\mathcal{L}(s) = \frac{1}{-s^2}$ olarak alınırsa, aşağıdaki eşitlik bulunmuş olur.

$$\begin{aligned}
\overline{u} &= \frac{1}{-s^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-M(x)^n}{n!(2s^2)^n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M(x)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M(x)^n}{n!(2^n s^{n+2})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M(x)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M(x)^n}{n!2^{(n-1)}(2s^{n+2})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M(x)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Teorem 2.2 kullanılır ve eşitliğin her iki tarafına $\mathcal{L}_2^{-1}$ dönüşümü uygulanırsa;

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{M(x)^n x^{2n}}{n!2^{n-1}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{M(x)^n}{2n!}$$

İkinci olarak benzer teknik kullanılarak $u(0^+,t) = u_t(0^+,t) = 0$ olmak üzere aşağıdaki türdeki kısmi türevli denklemler de çözülebilir.

$$f(x)u + f(x)\frac{1}{t}u_t + g(x)u_x + g(x)u_{tx} = 0$$

Eşitlin her iki yanına da $\mathcal{L}_2$ dönüşümü uygulanırsa,

$$\overline{u}(1+2s^2)f(x) + \overline{u}_x(1+2s^2)g(x) = 0$$

olur. Burada $\frac{\overline{u}_x}{\overline{u}} = J(x)$ olarak alınır ve $J(x) = -\frac{g(x)}{f(x)}$ olarak seçilirse $\overline{u}$ için aşağıdaki çözüme ulaşılır.

$$\overline{u}(s,x) = e^{\int_0^x J(w)dw}.L(s)$$

olarak bulunur. Burada $\mathcal{L}(s), s$ değişkenine bağlı rastgele bir fonksiyondur. Bu ifadenin seri açılımını yazar ve $\mathcal{L}(s) = \frac{1}{2s^2}$ olarak alınırsa;

$$\overline{u} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\int_0^x J(w)dw)^n}{n!2s^2}$$

eşitliği bulunur. Toplama ters $\mathcal{L}_2$ dönüşümü uygulanırsa, $u(t,x)$ için aşağıdaki sonuca ulaşılmış olur:

$$u(t,x) = x^0 e^{\int_0^x j(w)dw}. \tag{152}$$

Tanım 2.13 *($\mathcal{L}_2$ Dönüşümü için Konvolüsyon)İki fonksiyon arasında tanımlı (*) ikili işleminine f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu denir ve şöyle tanımlanır;*

$$(f * g)(t) = \int_0^t x f(\sqrt{t^2 - x^2}) g(x) dx. \tag{153}$$

Konvolüsyon operasyonunun birleşme ve değişme özelliği vardır. Daha da önemli olarak, göstereceğimiz bağıntılar için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$\mathcal{L}_2 \{f * g; s\} = \mathcal{L}_2(f).L_2(g) \tag{154}$$

ve

$$\mathcal{L}_2 \{f_1 * f_2 * ... * f_n; s\} = \mathcal{L}_2(f_1).L_2(f_2)...L(f_n). \tag{155}$$

Buradan da, eşitliğin her iki yanına da ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{\overline{f_1}.\overline{f_2}....\overline{f_n}\right\} = f_1 * f_2 * ... * f_n \tag{156}$$

eşitliği elde edilir.

2.6 Parseval-Goldstein Tipi Dönüşümler ve Özellikleri

Tanım 2.14 *Widder* [13] *Potansiyel dönüşümü aşağıdaki bağıntıya sahiptir.*

$$\mathcal{P} \{g(z); t\} = \int_0^\infty \frac{z\, g(z)}{z^2 + t^2}\, dz. \tag{157}$$

Bu dönüşümde üstel değişken değişimi yapıldığında, Hirshman ve Widder tarafından incelenmiş bir genel sınıfa ait bir çekirdeğe sahip bir konvolüsyon dönüşümü elde edilmiş olur.

Tanım 2.15 *Stieltjes Dönüşümü:*

$$\mathcal{S} \{g(z); t\} = \int_0^\infty \frac{g(z)}{z + t}\, dz. \tag{158}$$

bağıntısı ile tanımlanır.

Widder potansiyel dönüşümü ile Stieltjes dönüşümü ([12] *ve* [13]) arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

$$\mathcal{P} \{g(z); t\} = \frac{1}{2}\, \mathcal{S} \left\{g(z^{1/2}); t^2\right\}. \tag{159}$$

Buradan sonra [5] makalesinde tanımlanan bir dizi yeni integral dönüşümünü tanımlanacaktır. Öncelikle $\mathcal{P}_4$-dönüşümü;

$$\mathcal{P}_4\{g(z);t\} = \int_0^\infty \frac{z^3\, g(z)}{z^4+t^4}\, dz, \tag{160}$$

bağıntısı ile tanımlanır. $\mathcal{P}_4$-dönüşümünün Stieljes dönüşümü ile olan ilişkisi ise şu şekildedir;

$$\mathcal{P}_4\{g(z);t\} = \frac{1}{4}\,\mathcal{S}\left\{g(z^{1/4});t^4\right\},$$

$\mathcal{P}_4$-dönüşümünün Widder dönüşümü ile olan ilişkisi aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{P}_4\{g(z);t\} = \frac{1}{2}\,\mathcal{P}\left\{g(z^{1/2});t^2\right\}. \tag{161}$$

$\mathcal{F}_{S,2}$-dönüşümü aşağıdaki integral ile tanımlanmıştır.

$$\mathcal{F}_{S,2}\{g(z);t\} = \int_0^\infty z\,\sin(z^2\,t^2)\, g(z)\, dz, \tag{162}$$

Bu dönüşüm Fourier-sinüs dönüşümü ile

$$\mathcal{F}_{S,2}\{g(z);t\} = \frac{1}{2}\,\mathcal{F}_S\left\{g(z^{1/2});t^2\right\},$$

bağıntısından dolayı şu bağıntıya sahiptir.

$$\mathcal{F}_S\{g(z);t\} = \int_0^\infty \sin(z\,t)\, g(z)\, dz,$$

Benzer biçimde $\mathcal{F}_{C,2}$ -dönüşümü de aşağıdaki gibi bir tanıma,

$$\mathcal{F}_{C,2}\{g(z);t\} = \int_0^\infty z\,\cos(z^2\,t^2)\, g(z)\, dz, \tag{163}$$

sahiptir ve Fourier-kosinüs dönüşümü ile aşağıdaki bağıntı dolayısı ile

$$\mathcal{F}_{C,2}\{g(z);t\} = \frac{1}{2}\,\mathcal{F}_C\left\{g(z^{1/2});t^2\right\}, \tag{164}$$

şu şekilde bir bağıntıya sahiptir.

$$\mathcal{F}_C\{g(z);t\} = \int_0^\infty \cos(z\,t)\, g(z)\, dz, \tag{165}$$

$\mathcal{H}_{v,2}$-dönüşümün tanımı şu şekildedir,

$$\mathcal{H}_{\nu,2}\{f(z);t\} = \int_0^\infty (z^2\,t)\, J_\nu(z^2\,t^2)\, g(z)\, dz, \tag{166}$$

$\mathcal{H}_v$ dönüşümü ise aşağıdaki gibi tanımlanır,

$$\mathcal{H}_\nu\{g(z);t\} = \int_0^\infty (z.t)^{1/2}\, J_\nu(z^2\,t^2)\, g(z)\, dz, \tag{167}$$

Bu eşitliğin doğruluğu,

$$\mathcal{H}_{\nu,2}\{g(z);t\} = \frac{1}{2}\,\mathcal{H}_{\nu}\left\{g(z^{1/2});t^2\right\}. \tag{168}$$

bağıntısı ile gösterilebilir.

$\mathcal{K}_{V,2}$-dönüşümü,

$$\mathcal{K}_{\nu,2}\{g(z);t\} = \int_0^\infty (z^2\,t)\,K_\nu(z^2\,t^2)\,f(z)\,dz, \tag{169}$$

olarak tanımlanır. Bu dönüşümün $\mathcal{K}_V$-dönüşümü ile olan ilişkisi

$$\mathcal{K}_{\nu,2}\{g(z);t\} = \frac{1}{2}\,\mathcal{K}_{\nu}\left\{g(z^{1/2});t^2\right\}. \tag{170}$$

bağıntısını sağlar. Burada

$$\mathcal{K}_{\nu}\{g(z);t\} = \int_0^\infty (z\,t)^{1/2}\,K_\nu(z^2\,t^2)\,g(z)\,dz, \tag{171}$$

ile tanımlanır.

Yar.Teorem 2.3 *Yukarıda tanımlanan dönüşümler aşağıdaki bağıntılara sahiptir.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2\left[\mathcal{F}_{S,2}\{g(z);v\};t\right] &= \frac{1}{2}\,\mathcal{P}_4\{g(z);t\}, & (172)\\
\mathcal{F}_{S,2}\left[\mathcal{L}_2\{g(z);v\};t\right] &= \frac{t^2}{2}\,\mathcal{P}_4\left\{\frac{g(z)}{z^2};t\right\}, & (173)\\
\mathcal{L}_2\left[\mathcal{F}_{C,2}\{g(z);v\};t\right] &= \frac{t^2}{2}\,\mathcal{P}_4\left\{\frac{f(z)}{z^2};t\right\}, & (174)\\
\mathcal{F}_{C,2}\left[\mathcal{L}_2\{g(z);v\};t\right] &= \frac{1}{2}\,\mathcal{P}_4\{g(z);t\}, & (175)\\
\mathcal{F}_{S,2}\left[\mathcal{L}_2\{g(z);v\};t\right] &= \mathcal{L}_2\left[\mathcal{F}_{C,2}\{g(z);v\};t\right]. & (176)
\end{aligned}$$

İspat. Sadece ilk ifadenin ispatını yapmak diğerleri de benzer bir süreç ile ispatlandığı için yeterli olacaktır. İlk ifadenin tanımı için $\mathcal{L}_2$-dönüşümü ile $\mathcal{F}_{S,2}$-dönüşümün tanımlarından faydalanacağız.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2\left[\mathcal{F}_{S,2}\{g(z);v\};t\right] &= \int_0^\infty v\,\exp(-v^2\,t^2)\\
&\quad\times\left[\int_0^\infty z\,\sin(v^2\,z^2)\,f(z)\,dz\right]dv. \qquad (177)
\end{aligned}$$

bağıntısına ulaşılır. İntegrasyon sırası, içindeki integrallerin mutlak yakınsak oluşundan dolayı değiştirebilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2\left[\mathcal{F}_{S,2}\{g(z);v\};t\right] &=\\
&= \int_0^\infty z\,g(z)\left[\int_0^\infty v\exp(-v^2\,t^2)\,\sin(v^2\,z^2)\,dv\right]dz,
\end{aligned}$$

dir. Sağ taraftaki içteki integral hesaplanırsa,

$$\mathcal{L}_2\left[\mathcal{F}_{S,2}\left\{g(z);v\right\};t\right] = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{z^3\,g(z)}{z^4+t^4}\,dz \tag{178}$$

elde edilir. ■

Örnek 2.22

$$\Re(s) > -1, \quad |\arg b| < \pi/4, \quad ve \quad \omega = \exp(\frac{i\pi}{4}).$$

olmak üzere

$$\mathcal{P}_4\left\{z^v\,J_v(bz);t\right\} = \frac{1}{2}\,t^v\,\left[\omega^v\,K_v(b\,\omega\,t) + \bar{\omega}^v\,K_v(b\,\bar{\omega}\,t)\right] \tag{179}$$

eşitliğinin ve

$$\mathcal{P}_4\left\{z^{v-2}\,J_v(bz);t\right\} = \frac{i}{2}\,t^{v-2}\,\left[\omega^v\,K_v(b\,\omega\,t) - \bar{\omega}^v\,K_v(b\,\bar{\omega}\,t)\right] \tag{180}$$

bağıntısının doğruluğunu göstereceğiz

Çözüm 2 *Öncelikle*

$$g(z) = z^v\,J_v(bz)$$

olarak kabul edilir ve yardımcı teoremdeki bağıntı (176) ile [8, sf.185, (30)] kullanılırsa ,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_4\left\{z^v\,J_v(bz);t\right\} &= \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\left\{z^{v/2}\,J_v(bz^{1/2});s^2\right\}\\ &= \frac{1}{2}(\frac{a}{2})^v\,s^{-2v-2}\,\exp(-b^2/4s^2),\end{aligned} \tag{181}$$

elde edilir. Burada $\mathcal{F}_{C,2}$-dönüşümü uygulandığında,

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_{C,2}\left[\mathcal{L}_2\left\{z^v\,J_v(bz);s\right\};t\right]\\ =\ &\frac{1}{2}(\frac{b}{2})^v\,\mathcal{F}_{C,2}\left\{s^{-2v-2}\,\exp(-b^2/4s^2);t\right\}\\ =\ &\frac{1}{4}(\frac{b}{2})^v\,\mathcal{F}_C\left\{s^{-v-1}\,\exp(-b^2/4s);t^2\right\}\end{aligned} \tag{182}$$

bulunur. Aşağıdaki bağıntı kullanılarak, (180) nolu bağıntıyı ispatlamış oluruz.

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}_C\left\{s^{-v-1}\,\exp(-b^2/4s);t^2\right\}\\ =\ &(\frac{2}{b})^v\,t^v\,\left[\omega^v\,K_v(b\,\omega\,t) + \bar{\omega}^\nu\,K_\nu(b\,\bar{\omega}\,t)\right]\\ \omega\ =\ &\exp(i\pi/4).\end{aligned} \tag{183}$$

Bağıntı (181) de benzer biçimde ispatlanır.

Teorem 2.5 *Aşağıdaki Parseval-Goldstein tipi bağıntılar doğrudur.*

$$\int_0^\infty y\,\mathcal{L}_2\left\{g(z);t\right\}\,\mathcal{F}_{S,2}\left\{f(u);t\right\}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty zg(z)\,\mathcal{P}_4\left\{f(u);z\right\}\,dz, \tag{184}$$

$$\int_0^\infty y\,\mathcal{L}_2\left\{g(z);t\right\}\mathcal{F}_{S,2}\left\{f(u);t\right\}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty u^3\,f(u)\,\mathcal{P}_4\left\{\frac{g(z)}{z^2};u\right\}\,du, \tag{185}$$

$$\int_0^\infty y\,\mathcal{L}_2\left\{g(z);t\right\}\,\mathcal{F}_{C,2}\left\{f(u);t\right\}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty u\,f(u)\,\mathcal{P}_4\left\{g(z);u\right\}\,du, \tag{186}$$

$$\int_0^\infty y\,\mathcal{L}_2\left\{g(z);t\right\}\,\mathcal{F}_{C,2}\left\{f(u);t\right\}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty z^3\,g(z)\,\mathcal{P}_4\left\{\frac{f(u)}{u^2};z\right\}\,dz, \tag{187}$$

ve

$$\int_0^\infty x\,f(x)\,\mathcal{P}_4\left\{g(u);x\right\}\,dx = \int_0^\infty u^3\,g(u)\,\mathcal{P}_4\left\{\frac{f(x)}{x^2};u\right\}du. \tag{188}$$

İspat. İlk bağıntının doğruluğunu göstereceğiz. Diğer bağıntıların doğruluğu da benzer biçimde ispat edilir.$\mathcal{F}_{S,2}$-dönüşümün tanımından,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t\,\mathcal{L}_2\left\{g(z);t\right\}\,\mathcal{F}_{S,2}\left\{f(u);t\right\}\,dt &= \\ &= \int_0^\infty t\,\mathcal{F}_{S,2}\left\{f(u);t\right\}\left[\int_0^\infty z\,\exp(-z^2\,t^2)\,f(z)\,dz\right]dt,\end{aligned}$$

dir. İntegrasyon sırası değiştirilir ve $\mathcal{L}_2$-dönüşümünden bir kez daha faydalanılırsa,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t\,\mathcal{L}_2\left\{g(z);t\right\}\,\mathcal{F}_{S,2}\left\{f(u);t\right\}\,dt &= \\ &= \int_0^\infty z\,g(z)\left[\int_0^\infty t\,\exp(-z^2\,t^2)\,\mathcal{F}_{S,2}\left\{f(u);t\right\}\,dt\right]dz \\ &= \int_0^\infty z\,g(z)\,\mathcal{L}_2\left[\mathcal{F}_{S,2}\left\{f(u);t;z\right\}\right]\,dz. \qquad (189)\end{aligned}$$

bulunur. ■

Sonuç 2.1 *Aşağıdaki bağıntılar $\mathcal{L}_2$-dönüşümü, $\mathcal{P}_4$-dönüşümü ve $\mathcal{F}_{S,2}$-dönüşümü için doğrudur.*

$$\mathcal{F}_{C,2}\left[\mathcal{P}_4\left\{f(u);z\right\};t\right] = \frac{\pi}{4}\,\mathcal{L}_2\left\{f(u);t\right\}, \tag{190}$$

ve

$$\mathcal{P}_4 \left[\mathcal{F}_{S,2} \left\{f(u);t\right\};y\right] = \frac{\pi}{4}\,\mathcal{L}_2 \left\{f(u);y\right\}. \tag{191}$$

İspat. Öncelikle,

$$g(z) = \cos(y^2\, z^2)$$

olarak kabul edilsin.$\mathcal{L}_2$- dönüşümü ve Laplace dönüşümü arasındaki bağıntı kullanıldığında,

$$\mathcal{L}_2 \left\{\cos(y^2\, z^2);t\right\} = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\left\{\cos(y^2\, z);t^2\right\} = \frac{1}{2}\,\frac{t^2}{t^4+y^4}. \tag{192}$$

elde edilir.Buradan,

$$\mathcal{P}_4 \left\{z^{-2}\,\cos(y^2\, z^2);u\right\} = \frac{\pi}{4}\,u^{-2}\,\exp(-y^2\,u^2).$$

elde edilir. 2. sonuçtaki bağıntı 195 in doğruluğu da benzer biçimde yardımcı teorem bağıntı (176) ve sonuç 2.1 bağıntı (192) yardımı ile gösterilebilir. ■

Sonuç 2.2 *Aşağıdaki ters dönüşüm bağıntıları $\mathcal{F}_{S,2}$ ve $\mathcal{F}_{C,2}$ dönüşümleri için doğrudur.*

$$\mathcal{F}_{C,2} \left[\mathcal{F}_{C,2} \left\{f(u);t\right\};y\right] = \frac{\pi}{8}\,f(y), \tag{193}$$

ve

$$\mathcal{F}_{S,2} \left[\mathcal{F}_{S,2} \left\{f(u);t\right\};y\right] = \frac{\pi}{8}\,f(y). \tag{194}$$

İspat.

$$g(z) = \mathcal{F}_{S,2} \left\{f(u);z\right\}.$$

olarak alınırsa,yardımcı teoremimizin ilk bağıntısından

$$\mathcal{L}_2 \left[\mathcal{F}_{S,2} \left[\mathcal{F}_{S,2} \left\{f(u);z\right\};t\right];y\right] = \frac{1}{2}\,\mathcal{P}_4 \left[\mathcal{F}_{S,2} \left\{f(u;z\right\};y\right].$$

elde edilir. Bunu teoremimizdeki ikinci bağıntıda yerine koyduğumuzda da ilk ifadenin doğruluğu direkt olarak gösterilmiş olur.Yine ikinci ifade de benzer biçimde yardımcı teoremdeki bağıntılar kullanılarak gösterilebilir. ■

Sonuç 2.3 *Aşağıdaki bağıntılar $\mathcal{F}_{S,2}$-dönüşümü,$\mathcal{F}_{C,2}$-dönüşümü, $\mathcal{P}_4$ ve $\mathcal{L}_2$-dönüşümü için doğrudur.*

$$\mathcal{P}_4 \left[\mathcal{F}\left\{_{S,2} f(u);t\right\};y\right] = \mathcal{F}_{C,2} \left[\mathcal{P}_4 \left[f(u);z\right];y\right], \tag{195}$$

$$\mathcal{P}_4 \left[u^2\,\mathcal{P}_4 \left\{\frac{g(z)}{z^2};u\right\};y\right] = \frac{\pi}{2}\mathcal{L}_2 \left[\mathcal{L}_2 \left\{g(z);t\right\};y\right], \tag{196}$$

ve

$$\mathcal{P}_4 \left[\frac{1}{t^2}\,\mathcal{F}_{S,2} \left\{f(u);t\right\};y\right] = \frac{1}{y^2}\mathcal{F}_{S,2} \left[\mathcal{P}_4 \left\{f(u);z\right\};y\right]. \tag{197}$$

İspat.

$$g(z) = \sin(y^2\, z^2)$$

olarak kabul edilirse, bağıntıların doğruluğu sonuç bağıntılarından kolaylıkla elde edilir. $\mathcal{L}_2$ dönüşümü ile Laplace dönüşümü arasındaki bağıntı kullanılarak,

$$\mathcal{L}_2\left\{\sin(y^2\, z^2); t\right\} = \frac{1}{2}\,\mathcal{L}\left\{\sin(y^2\, z); t^2\right\} = \frac{1}{2}\,\frac{y^2}{y^4+t^4}.$$

elde edilir.

Benzer biçimde ikinci bağıntının doğruluğunu göstermek için de,

$$f(u) = \frac{u^2}{u^4+y^4}$$

alınır ve $\mathcal{F}_{S,2} ve \mathcal{F}_S$ arasındaki bağıntı kullanıldığında bağıntının doğruluğu ispatlanmış olur. ■

2.7 $\mathcal{L}_n$-Dönüşümü

Şimdi üçüncü bölüm boyunca asıl kullanacağımız integral dönüşümü ve özelliklerini $\mathcal{L}_2$ dönüşümüne benzer bir mantık sırası izleyerek tanıtmaya başlayacağız. Öncelikle $\mathcal{L}_n$ dönüşümünün tanımı ele alarak başlayalım.

Tanım 2.16 *Genelleştirilmiş Laplace dönüşümü $\mathcal{L}_n$ $n = 2^k$, $k \in N$ olmak üzere*

$$\mathcal{L}_n\left\{f(x); s\right\} = \int_0^{\infty} x^{n-1}\exp(-x^n s^n) f(x)dx. \tag{198}$$

olarak tanımlanır.

Genelleştirilmiş Laplace dönüşümü ve klasik Laplace dönüşümü arasındaki ilişki şu şekildedir;

$$\mathcal{L}_n\left\{f(x); s\right\} = \frac{1}{n}\mathcal{L}\left\{f(x^{\frac{1}{n}}; s^n\right\}. \tag{199}$$

Tanım 2.17 *$\delta - türev$ olarak isimlendirdiğimiz $\overline{\delta}$ diferansiyel operatörü*

$$\overline{\delta} = \frac{1}{t^{n-1}}\frac{d}{dt}, \qquad n = 2^k, k \in \mathbb{N} \tag{200}$$

olarak tanımlanır. $\delta - türev$ operatörünün herhangi bir kuvvetinin değeri klasik cebirsel işlemler ile bulunabilir.

Örneğin;

$$\overline{\delta}^2 = \overline{\delta}.\overline{\delta} = \frac{1}{t^{n-1}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t^{n-1}}\frac{d}{dt}\right) = \frac{1}{t^{2n-2}}\frac{d^2}{dt^2} - \frac{n-1}{t^{2n-1}}\frac{d}{dt}. \tag{201}$$

$\delta - türev$ operatörünün herhangi bir pozitif kuvveti aynı işlemlerin art arda uygulanması ile bulunabilir.

2.7.1 L_n Dönüşümün Özellikleri

Teorem 2.6 *$f, f^{'}, f^{''}, ..., f^{k-1}$ fonksiyonlarının hepsi $[0, \infty)$ aralığında $f^{(k)}$ parçalı sürekli türevine sahip, sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer tüm fonksiyonlar $x \to \infty$ iken herhangi bir a sabiti için $exp(a^n x^n)$ üstel mertebeli ise,*

$$\mathcal{L}_n \left\{ \overline{\delta}_x^k f(x); s \right\} = (ns^n)^k L_n \{f(x); s\} - (ns^n)^{k-1} f(0^+) - (ns^n)^{k-2} \overline{\delta}_x f(0^+) - \cdots - ns^n \overline{\delta}_x^{k-2} f(0^+) - \overline{\delta}_x - 1 f(0^+) \tag{202}$$

eşitliği elde edilir. Burada k değeri 1 ve 1 den büyük tam sayılardır.

İspat. $\mathcal{L}_n$ dönüşümü, $\overline{\delta} - türev$ operatörünün tanımları ve kısmi integrasyon kullanılarak;

$$\mathcal{L}_n \left\{ \overline{\delta}_x f(x); s \right\} = \int_0^\infty \exp(-s^n x^n) f^{'}(x) dx,$$

elde edilir. İntegralin sağ kısmının değeri bulunursa;

$$\int_0^\infty \exp(-s^n x^n) f^{'}(x) dx = \lim_{b \to \infty} f(x) \exp(-s^n x^n) \big|_0^b + ns^n \int_0^\infty x^{n-1} \exp(-s^n x^n) f(x) dx \tag{203}$$

bulunur. Burada f $exp(a^n x^n)$ üstel mertebeli olduğu için,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \exp(-s^n x^n) = 0,$$

dır ve sonuç olarak,

$$\mathcal{L}_n \left\{ \overline{\delta}_x f(x); s \right\} = ns^n L_n \{f(x); s\} - f(0^+)$$

olur. Eğer f ve $f^{'}$fonksiyonları $f^{''}$ parçalı sürekli türevine sahip ve sürekli fonksiyonlar ise, ve üç fonksiyon da $exp(a^n x^n)$ üstel mertebeli ise;

$$\mathcal{L}_n \left\{ \overline{\delta}_x^2 f(x); s \right\} = n^2 s^{2n} L_n \{f(x); s\} - ns^n f(0^+) - \overline{\delta}_x f(0^+) \tag{204}$$

sonucuna ulaşılır. Tüme varım metodu ile ispata devam edildiğinde istenilen ifadeye ulaşılmış olur.

■

Teorem 2.7 *f fonksiyonu $[0, \infty)$ aralığında parçalı sürekli ve $exp(a^n x^n)$ üstel mertebeli ise,*

$$\mathcal{L}_n \left\{ x^{kn} f(x); s \right\} = \frac{(-1)^k}{(n)^k} \overline{\delta}_s^k \mathcal{L}_n \{f(x); s\} \tag{205}$$

eşitliği elde edilir. k değerleri 1 ve 1 den büyük tam sayılardır.

İspat. $\mathcal{L}_n$ dönüşümü $Res > a$ yarı düzleminde analitiktir. Dolayısıyla, $\mathcal{L}_n \{f(x); s\}$ her dereceden türeve sahiptir. s değişkenine göre $\overline{\delta} - türev$ uygulanılırsa;

$$\begin{aligned} \overline{\delta}_s \mathcal{L}_n \{f(x); s\} &= \frac{1}{s^{n-1}} \frac{d}{ds} \int_0^\infty x^{n-1} \exp(-s^n x^n) f(x) dx \\ &= \frac{1}{s^{n-1}} \int_0^\infty x^{n-1} (-x^n n s^{n-1} \exp(-s^n x^n)) f(x) dx \\ &= -n \mathcal{L}_n \{x^n f(x); s\} \end{aligned} \tag{206}$$

elde edilir. $\overline{\delta}-türev$ uygulanmaya devam edilirse;

$$\overline{\delta}_s^k \mathcal{L}_n \{f(x);s\} = \int_0^\infty x^{n-1}\overline{\delta}_s^k \exp(-s^n x^n) f(x)dx, \qquad k\in \boldsymbol{N}$$

sonucuna indirgenebilir. İntegralin sağ tarafı hesaplandığında teoremin ispatı tamamlanmış olur.

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{n-1}\overline{\delta}_s^k \exp(-s^n x^n) f(x)dx &= \int_0^\infty x^{n-1}\overline{\delta}_s^{k-1}\left[(-n)x^n \exp(-s^n x^n)\right] f(x)dx, \\
&= \int_0^\infty x^{n-1}\overline{\delta}_s^{k-2}\left[(-n)^2 x^{2n} \exp(-s^n x^n)\right] f(x)dx, \\
&\quad ... \\
&= \int_0^\infty x^{n-1}\left[(-n)^k x^{kn} \exp(-s^n x^n)\right] f(x)dx \\
&= (-n)^k \mathcal{L}_n\left\{x^{kn} f(x);s\right\}. \qquad (207)
\end{aligned}$$

■

Teorem 2.8 *$\mathcal{L}_n\left\{f(x);s^{1/n}\right\}, n=2^k, k=0,1,2,...,$ $Re(s)=a$ dikey çizgisinin sol yanında yatan sınırlı sayıdaki s singüler noktaları hariç analitik bir fonksiyon olsun. $s=0$ ın bir dallanma noktası olmadığını varsayalım ve $\lim_{s\to\infty}\mathcal{L}_n\left\{f(x);s^{1/n}\right\}$ $Re(s)\le a$ sol düzleminde tanımlı olsun. Buna göre, aşağıdaki özdeşlik m singüler nokta için doğrudur.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n^{-1}\left\{\mathcal{L}_n\{f(x);s\}\right\} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} n\mathcal{L}_n\left\{f(x);s^{1/n}\right\}\exp(sx^n)ds \\
&= \sum_{k=1}^{m}\left[Res\left\{n\mathcal{L}_n\left\{f(x);s^{1/n}\right\}\exp(sx^n)\right\};s=s_k\right] \qquad (208)
\end{aligned}$$

İspat. İntegrasyon kontürü olarak dikey ve kapalı bir yarı-daire alınır. $\mathcal{L}_n\left\{f(x);s^{1/n}\right\}$ fonksiyonunun sınırlılığını ve Rezidü teoremi kullanılarak yukarıdaki özdeşliğin doğruluğu gösterebilebir. $s=0$ noktasının dallanma noktası olduğu durumdalarda, integrasyon kontürünü anahtar deliği olarak seçilmelidir. Öncelikle, $\mathcal{L}_n\left\{f(x);s^{1/n}\right\}$ fonksiyonunun $Re(s)\le a$ sol yarı düzleminde sonlu sayıda singüler noktaya sahip olduğunu varsayalım. $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$ kontürü $a-iR$ den $a+iR$ ye tanımlı kapalı dikey doğru parçası olan Γ_1 ve $|s-a|=R$ aralığında tanımlı olan Γ_2 dikey yarı dairesel kontürünü içersin. Γ_2, Γ_1 in sol yanında yer alsın ve R yarıçapı Γ nın $\mathcal{L}_n\left\{f(x);s^{1/n}\right\}$ fonksiyonunun tüm singüler noktalarını içerebilmesini sağlayacak kadar büyük seçilsin. Böylece, Rezidü teoremini de kullanarak;

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} n\mathcal{L}_n\left\{f(x);s^{1/n}\right\}\exp(sx^n)ds \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} n\mathcal{L}_n\left\{f(x);s^{1/n}\right\}\exp(sx^n)ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} n\mathcal{L}_n\left\{f(x);s^{1/n}\right\}\exp(sx^n)ds \qquad (209) \\
&= \sum_{k=1}^{m}\left[Res\left\{n\mathcal{L}_n\left\{f(x);s^{1/n}\right\}\exp(sx^n)\right\};s=s_k\right] - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} n\mathcal{L}_n\left\{f(x);s^{1/n}\right\}\exp(sx^n)ds \qquad (210)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada $s_1, s_2, ..., s_m$ noktaları, $\mathcal{L}_n\left\{f(x); s^{1/n}\right\}$ fonksiyonunun tüm singüler noktalarıdır. Yukarıdaki ilişkide eşitliğin her iki yanında da limit uygulandığında Jordan lemmasından dolayı ikinci integralin değeri sıfır olur. $\mathcal{L}_n\left\{f(x); s^{1/n}\right\}$ fonksiyonunun $s = 0$ noktasında bir dallanma noktası olmasına karşın yine de yukarıdaki özdeşlik kullanılabilir. ■

Eğer singüler noktaların sayısı sınırsız olsaydı, Γ_m yarı-dailerini a noktası merkezli ve $R = \pi^2 m^2, m \in N$ yarı çaplı olarak seçmek gerekirdi.

2.7.2 $\mathcal{L}_n$ Dönüşümü Uygulamaları

Örnek 2.23

$$\mathcal{L}_n\{1; s\} = \int_0^\infty x^{n-1} esp(-s^n x^n) dx = \frac{1}{ns^n}. \tag{211}$$

Örnek 2.24 *Aşağıdaki özdeşliğin doğruluğunu gösterelim.*

$$\mathcal{L}_n\left\{t^k; s\right\} = \frac{1}{ns^{n+k}} \Gamma(\frac{k}{n} + 1). \qquad (k, n \in N, \qquad k > -n) \tag{212}$$

İspat. $\mathcal{L}_n$ dönüşümünün tanımından faydalanırsak;

$$\mathcal{L}_n\left\{t^k; s\right\} = \int_0^\infty t^{k+n-1} esp(-s^n t^n) dt, \quad k \in N,$$

dır. Sağ taraftaki integralin değeri değişken değişimi yöntemi ile hesaplanabilir, $t^n s^n \to u$. Gama fonksiyonunun genelleştirilmiş Laplace dönüşümü ile olan ilişkisi kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılabilir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n\left\{t^k; s\right\} &= \frac{1}{ns^{n+k}} \int_0^\infty u^{\frac{k}{n}+1-1} \exp(-u) du \\ &= \frac{1}{ns^{n+k}} \Gamma(\frac{k}{n} + 1). \end{aligned} \tag{213}$$

■

Örnek 2.25

$$\mathcal{L}_n\{\cos(at^n); s\} = \frac{s^n}{n(t^{2n} + a^2)}. \tag{214}$$

eşitliğini gösterelim.

İspat. $\mathcal{L}_n$ dönüşümünün tanımından ve *cos* fonksiyonunun Taylor açılımı kullanarak,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n\{\cos(at^n); s\} &= \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \frac{a^{2m}}{(2m)!} L_n\left\{t^{2mn}; s\right\}, \\ &= \frac{1}{ns^n} \sum_{m=0}^\infty (-1)^m \frac{a^{2m}}{t^{s2mn}}, \\ &= \frac{s^n}{n(s^{2n} + a^2)}. \end{aligned} \tag{215}$$

eşitliği;

$$L_n\left\{t^{2mn};s\right\}=\frac{2m+1}{ns^{n+2mn}} \tag{216}$$

bağıntısını kullanarak elde edilebilir. ■

Örnek 2.26

$$\mathcal{L}_n\left\{\sin(at^n;s)\right\}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{a^{2m+1}}{(2m+1)!}\mathcal{L}_n\left\{t^{(2m+1)n};s\right\},$$

eşitliğine, yukarıdaki örnektekine benzer şekilde, $\mathcal{L}_n$ dönüşümünün tanımı ve sin fonksiyonunun Taylor açılımı kullanılarak ulaşılabilir. Sonrasında genelleştirilmiş Laplace Dönüşümü $\mathcal{L}_n$ ve Gama fonksiyonu arasındaki aşağıdaki bağıntı kullanılarak,

$$\mathcal{L}_n\left\{t^{(2m+1)n};s\right\}=\frac{\Gamma(2m+2)}{ns^{2m+2n}}, \tag{217}$$

şu sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n\left\{\sin(at^n;s)\right\} &= \frac{a}{ns^{2n}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-a^2)^m}{s^{2mn}}\\ &= \frac{a}{n(s^{2n}+a^2)}.\end{aligned} \tag{218}$$

Örnek 2.27 $0<Re(a)<Re(y)$ *eşitsizliğini sağlayacak biçimde,*

$$\mathcal{L}_n\left\{\exp(-a^nt^n);s\right\}=\frac{1}{n(s^n+a^n)} \tag{219}$$

bağıntısının varlığını gösterelim.

İspat. $\mathcal{L}_n$ dönüşümünün tanımı kullanılır ve üstel fonksiyonun Taylor açılımından faydalanılırsa;

$$\mathcal{L}_n\left\{\exp(-a^nt^n);s\right\}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{a^{mn}}{m!}\mathcal{L}_n\left\{t^{mn};s\right\},$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan aşağıdaki dönüşüm kullanılırsa,

$$\mathcal{L}_n\left\{t^{mn};s\right\}=\frac{\Gamma(m+1)}{nt^{n+mn}}, \tag{220}$$

istenilen ilişki gösterilmiş olur.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n\left\{\exp(-a^nt^n);s\right\} &= \frac{1}{nt^n}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{a^{mn}}{s^{mn}}\\ &= \frac{1}{n(s^n+a^n)}.\end{aligned}$$

■

Örnek 2.28 *J_0 birinci tür sıfırıncı dereceden Bessel fonksiyonu için aşağıdaki eşitliği gösterelim.*

$$\mathcal{L}_n\left\{J_0(2a^{n/2}t^{n/2});s\right\} = \frac{1}{ns^n}\exp(-\frac{a^n}{s^n}). \tag{221}$$

İspat. $J_o(t)$ fonksiyonunun

$$J_0(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{(m!)^2}\left(\frac{t}{2}\right)^{2m}, \tag{222}$$

Taylor açılımı kullanılarak

$$\mathcal{L}_n\left\{J_0(2a^{n/2}t^{n/2});s\right\} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m a^{mn}}{(m!)^2\Gamma(m+1)}\mathcal{L}_n\left\{t^{mn};s\right\},$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafındaki t^{mn} in L_n dönüşümün değerini önceki örneklerde bulmuştuk, değer yerine koyulduğunda;

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n\left\{J_0(2a^{n/2}t^{n/2});s\right\} &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m a^{mn}\Gamma(m+1)}{(m!)^2\Gamma(m+1)ns^{n+mn}},\\ &= \frac{1}{ns^n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\frac{a^n}{s^n})^m}{m!}\\ &= \frac{1}{ns^n}\exp(-\frac{a^n}{s^n}).\end{aligned}$$

bulunur. ■

Örnek 2.29 *$Re(a) > 0, Re(v) > -1$ olmak üzere, aşağıdaki ilişkinin doğruluğu gösterilebilir.*

$$\mathcal{L}_n\left\{t^{\frac{nv}{2}}J_v(2a^{n/2}t^{n/2});s\right\} = \frac{1}{n}a^{\frac{nv}{2}}s^{-n(v+1)}\exp(-\frac{a^n}{s^n}). \tag{223}$$

İspat. $J_v(t)$, v. dereceden birinci tür Bessel fonksiyonunun Taylor açılımı;

$$J_v(t) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{m!\Gamma(m+v+1)}(\frac{t}{2})^{2m+v}.$$

eşitliğidir. Yerine yazılırsa;

$$L_n\left\{t^{\frac{nv}{2}}J_v(2a^{n/2}t^{n/2});s\right\} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m a^{nm+\frac{nv}{2}}}{m!\Gamma(m+v+1)}L_n\left\{t^{mn+nv};s\right\}. \tag{224}$$

olur. $\mathcal{L}_n\left\{t^{mn+nv};s\right\}$ dönüşümünün değeri hesaplanırsa;

$$\mathcal{L}_n\left\{t^{mn+nv};s\right\} = \frac{\Gamma(m+v+1}{ns^{n+mn+nv}}. \tag{225}$$

dir. (225) ve (226) ilk ilişkide yerine koyularak istenilen eşitlik gösterilmiş olur.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n\left\{t^{\frac{nv}{2}}J_v(2a^{n/2}t^{n/2});s\right\} &= \frac{a^{\frac{nv}{2}}}{ns^{nv+n}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-\frac{a^n}{s^n})^m}{m!}\\ &= \frac{1}{n}a^{\frac{nv}{2}}s^{-n(v+1)}\exp(-\frac{a^n}{s^n}).\end{aligned}$$

■

Örnek 2.30 *$Re(a) > 0$, olmak üzere $erfc(\frac{1}{2}a^{n/2}t^{-n/2})$ tamamlayıcı hata fonksiyonunun genelleştirilmiş Laplace dönüşümünü hesaplayalım.*

İspat. Tamamlayıcı hata fonksiyonunun tanımından faydalanarak,

$$erfc(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} \exp(-u^2)du, \tag{226}$$

eşitliğini ilk ilişkide yerine koyarsak;

$$\mathcal{L}_n \left\{ erfc(\frac{1}{2}a^{n/2}t^{-n/2}); s \right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^{\infty} t^{n-1} \exp(-s^n t^n) \int_{\frac{a^{n/2}}{2t^{n/2}}}^{\infty} \exp(-u^2)dudx,$$

elde edilir. Burada integrasyon sırası değiştirilir ve $\frac{d}{dx}\left[\exp(-s^n t^n)\right] = -ns^n t^{n-1}\exp(-s^n t^n)$ bağıntısı kullanılırsa,

$$\mathcal{L}_n \left\{ erfc(\frac{1}{2}a^{n/2}t^{-n/2}); s \right\} = \frac{2}{\sqrt{\pi}ns^n} \int_0^{\infty} \exp(-u^2)\exp(-\frac{s^n a^n}{4u^2})du. \tag{227}$$

eşitliğine ulaşılmış olur. (228) bağıntısında $u = \frac{a^{n/2}}{2t^{n/2}}$ olarak alınıp, değişken dönüşümü yapıldığında ;

$$\mathcal{L}_n \left\{ erfc(\frac{1}{2}a^{n/2}t^{-n/2}); s \right\} = \frac{a^{n/2}}{2\sqrt{\pi}s^n} \mathcal{L}_n \left\{ t^{-\frac{3n}{2}} \exp(-\frac{a^n}{4t^n}); s \right\},$$

ilişkisi bulunur. Burada Taylor açılımı kullanılır, eşitliğin sağ kısmındaki genelleştirilmiş Laplace dönüşümünün değeri bulunur ve Euler'in aşağıdaki yansıma formülü kullanılırsa;

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}, \tag{228}$$

şu ilişki bulunur:

$$\frac{a^{n/2}}{2n\sqrt{\pi}s^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a^{mn}}{m!4^m} \frac{\Gamma(-m-\frac{3}{2}+1)}{s^{-mn-\frac{n}{2}}} = \frac{a^{\frac{n}{2}\pi}}{2n\sqrt{\pi}s^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m+1} a^{mn} s^{mn+\frac{n}{2}}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1+\frac{1}{2})4^m},$$

Gamma katlı formulü kullanıldığında;

$$\frac{a^{\frac{n}{2}\pi}}{2n\sqrt{\pi}s^n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2m+1} a^{mn} s^{mn+\frac{n}{2}}}{\Gamma(m+1)\Gamma(m+1+\frac{1}{2})4^m} = \frac{1}{n}s^{-n}\exp(-a^{\frac{n}{2}}s^{\frac{n}{2}}). \tag{229}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 2.31 *$-Re(a) < s, Re(s) > 0$ eşitsizliklerini sağlayacak biçimde aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu gösterelim.*

$$\mathcal{L}_n \left\{ erf(a^{\frac{n}{2}}t^{\frac{n}{2}}); s \right\} = \frac{a^{\frac{n}{2}}}{n} s^{-n}(s^n + a^n)^{-\frac{1}{2}}. \tag{230}$$

İspat. Hata fonksiyonunun ve $\mathcal{L}_n$ dönüşümünün tanımı kullanılarak eşitlik şu şekilde düzenlenebilir;

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_n\left\{erf(a^{\frac{n}{2}}t^{\frac{n}{2}});s\right\} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty t^{n-1}\exp(-s^n t^n)\int_0^{a^{\frac{n}{2}}t^{\frac{n}{2}}}\exp(-u^2)dudx, \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \exp(-u^2)\int_{u^{\frac{n}{2}}/a}^\infty t^{n-1}\exp(s^n t^n)dxdu \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}ns^n}\int_0^\infty \exp(-u^2(1+\frac{s^n}{a^n}))du. \qquad (231)
\end{aligned}$$

(232) bağıntısında $u\sqrt{1+\frac{s^n}{a^n} ==} = t$ dönüşümü yapılırsa,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}ns^n}\int_0^\infty \exp(-u^2(1+\frac{s^n}{a^n}))du = \frac{a^{\frac{n}{2}}}{n}s^{-n}(s^n+a^n)^{-\frac{1}{2}}.$$

sonucuna ulaşılır. ■

Örnek 2.32 *$Re(a)>0$ olmak üzere;*

$$\mathcal{L}_n\left\{\exp(-at^{2n});s\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{a}}\exp(\frac{s^{2n}}{4a})erfc(\frac{s^{2n}}{2\sqrt{a}})$$

eşitliğini ispatlayalım.

İspat. $\mathcal{L}_n$ dönüşümünün tanımından faydalanırsak;

$$\begin{aligned}
L_n\left\{\exp(-at^{2n});s\right\} &= \int_0^\infty t^{n-1}\exp(-s^n t^n - at^{2n})dt \\
&= \int_0^\infty t^{n-1}\left[\exp(-a(t^n+\frac{s^n}{2a})^2+\frac{s^{2n}}{4a}\right]dt,
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\sqrt{a}(t^n+\frac{s^n}{2a}) = u$ dönüşümü yapılırsa,

$$\mathcal{L}_n\left\{\exp(-at^{2n});s\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{a}}\exp(\frac{s^{2n}}{4a})erfc(\frac{s^{2n}}{2\sqrt{a}}). \qquad (232)$$

sonucu gösterilmiş olur. ■

Adi Türevli Denklemlerin Çözümünde $\mathcal{L}_n$ Dönüşümünün Uygulaması:

$$tf^{''} - (2v+n-3)f^{'} + t^{n-1}f = 0, \quad n=2k, \quad k\in\mathbb{N}, \quad v>n, \quad v=2^m+1, \quad m\in\mathbb{N} \qquad (233)$$

Adi türevli denklemini ele alalım. Öncelikle denklemde $\overline{\delta}-$türev kullanılabilecek şekilde katsayıları düzenlersek, denklemimiz şu hale dönüşür;

$$t^n\left(\frac{1}{t^{2n-2}}f^{''} - \frac{n-1}{t^{2n-1}}f^{'}\right) + \frac{n-1}{t^{n-1}}f^{'} - \frac{2v+n-3}{t^{n-1}}f^{'} + f = 0$$

$\overline{\delta}-$türev kullanılır ve sonrasında eşitliğin her iki yanına da $\mathcal{L}_n$ dönüşümü uygulanır ve $k=1, k=2$ için Teorem [2.7] kullanılırsa;

$$\mathcal{L}_n\left\{t^n\overline{\delta}_t^2 f(t); s\right\} - 2(v-1)\mathcal{L}_n\left\{\overline{\delta}_t f(t); s\right\} + \mathcal{L}_n\left\{f(t); s\right\} = 0,$$

$$-\frac{1}{n}\frac{1}{f^{n-1}}\frac{d}{dy}(n^2 f^{2n}\overline{f(s)} - ns^n f(0^+) - \overline{\delta}_t f(0^+)) - 2(v-1)(ns^n\overline{f(s)} - f(0^+)) + \overline{f(s)} = 0. \quad (234)$$

elde edilir. Burada $\overline{f(s)} = \mathcal{L}_n\left\{f(t); s\right\}$ dir. $f(0^+) = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda aşağıdaki birinci dereceden denklemi elde etmiş oluruz;

$$\overline{f'(s)} + (2(n+v-1)\frac{1}{s} - \frac{1}{ns^{n+1}})\overline{f(s)} = 0. \quad (235)$$

Birinci dereceden denklem çözülür ve genelleştirilmiş Laplace dönüşümünün tersinin uygulanması ile,

$$f(t) = C\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{t^{mn+n+2v-2}}{m!\Gamma(m+\frac{n+2v-2}{n}+1)n^{2m-1}}. \quad (236)$$

fonksiyonuna ulaşılır. Buradan,

$$\mathcal{L}_n\left\{t^k; s\right\} = \frac{\Gamma(\frac{k}{n}+1)}{ns^{n+k}}, \qquad (k = mn+n+2v-2) \quad (237)$$

$$\mathcal{L}_n^{-1}\left\{\frac{1}{s^{mn+n+2v-2+n}}\right\} = \frac{nt^{mn+n+2v-2}}{\Gamma(m+1+\frac{2v-2}{n}+1)} \quad (238)$$

ilişkileri kullanılarak ve $a = \frac{2v+n-2}{n}, C = n^{-\frac{2v-2}{n}-2}$ seçilerek adi türevli denklemin çözümüne ulaşılmış olur:

$$f(t) = t^{\frac{na}{2}} J_a(\frac{2}{n}t^{n/2}), \qquad a \in Z. \quad (239)$$

■

3 Bölüm: Bulgular

Bu bölümde yukarıda verilen açıklama ve teoremlerin de yardımı ile çözülmüş olan örnekler ve elde edilen yeni teoremlere yer verilecektir. Uygulamalı matematik ve diğer uygulamalı bilim dalları için en önemli çalışmalardan bir tanesi de teoremlerin hangi tür problemlere çözüm sunabileceğidir. Burada amacımız yukarıda bulunan teoremleri de kullanarak, mühendislik, uygulamalı bilimleri, fen ve matematik dallarında önemli yere sahip olan adi ve kısmi türevli denklemlere genelleştirilmiş Laplace dönüşümü L_n i kullanarak çözüm bulmaktır. Klasik Laplace dönüşümü kullanılarak da bu tür problemlere elbette çözüm bulunmaktadır. Genelleştirilmiş Laplace dönüşümü L_n kullanımını bize bazı tür problemlerde zaman ve işlem kolaylığı sağlamaktadır. Bazı durumlarda ise Laplace dönüşümü kullanarak çözümünü elde edemediğimiz problemlerin çözümüne genelleştirilmiş Laplace dönüşümü ile ulaşabilmekteyiz.

3. bölümde temel olarak adi ve kısmi türevli denklem çözümüne yer vereceğimiz için öncelikle yukarıda yer alan ve sıklıkla kullanacağımız teoremlere ispatları olmadan yer vereceğiz. Sonrasında yeni türettiğimiz teoremlere ve ispatlarına yer vereceğiz. Bu teoremleri kullanarak elde ettiğimiz adi ve kısmi türevli denklem çözümleri ile de çalışmamızı tamamlayacağız.

Teorem 3.1 *$f, f', f'', ..., f^{k-1}$ fonksiyonlarının hepsi $[0,\infty)$ aralığında $f^{(k)}$ parçalı sürekli türevine sahip, sürekli fonksiyonlar olsun. Eğer tüm fonksiyonlar $x \to \infty$ iken herhangi bir a sabiti için $exp(a^n x^n)$ üstel mertebeli ise,*

$$\mathcal{L}_n\left\{\overline{\delta}_x^k f(x); s\right\} = (ns^n)^k L_n\{f(x);s\} - (ns^n)^{k-1} f(0^+) - (ns^n)^{k-2}\overline{\delta}_x f(0^+) - \cdots - ns^n \overline{\delta}_x^{k-2} f(0^+) - \overline{\delta}_x - 1 f(0^+) \tag{240}$$

eşitliği elde edilir. Burada k değeri 1 ve 1 den büyük tam sayılardır.

Teorem 3.2 *f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığında parçalı sürekli ve $exp(a^n x^n)$ üstel mertebeli ise,*

$$\mathcal{L}_n\left\{x^{kn} f(x); s\right\} = \frac{(-1)^k}{(n)^k}\overline{\delta}_s^k L_n\{f(x);s\} \tag{241}$$

eşitliği elde edilir. k değerleri 1 ve 1 den büyük tam sayılardır.

Teorem 3.3 *$\mathcal{L}_n\left\{f(x); s^{1/n}\right\}, n = 2^k, k = 0,1,2,...,$ $Re(s) = a$ dikey çizgisinin sol yanında yatan sınırlı sayıdaki s singüler noktaları hariç analitik bir fonksiyon olsun. $s = 0$ ın bir dallanma noktası olmadığını varsayalım ve $\lim_{s\to\infty} L_n\left\{f(x); s^{1/n}\right\}$ $Res \leq a$ sol düzleminde varsayılsın. Buna göre, aşağıdaki özdeşlik m singüler nokta için doğrudur.*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n^{-1}\{\mathcal{L}_n\{f(x);s\}\} &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} n\mathcal{L}_n\left\{f(x); s^{1/n}\right\}\exp(sx^n)ds \\ &= \sum_{k=1}^{m}\left[Res\left\{n\mathcal{L}_n\left\{f(x); s^{1/n}\right\}\exp(sx^n)\right\}; s = s_k\right]\end{aligned} \tag{242}$$

Teorem 3.4 (*Genelleştirilmiş Efros Teoremi*) *$\Phi(s)$ ve $q(s)$ analitik fonksiyonlar, $\mathcal{L}_n\{f(x);s\} = F(s)$ ve $\mathcal{L}_n\{\phi(t,\tau);s\} = \Phi(s)\tau^{n-1}e^{-\tau^n q^n(s)}$ olmak üzere,*

$$\mathcal{L}_n\left\{\int_0^\infty f(\tau)\phi(x,\tau)d\tau; s\right\} = F(q(s))\Phi(s). \tag{243}$$

dir.

İspat. $\mathcal{L}_n$-dönüşümünün tanımından faydalanırsak,

$$\begin{aligned} I &= \mathcal{L}_n\left\{\int_0^\infty f(\tau)\left(\int_0^\infty \tau^{n-1}e^{-s^nx^n}\phi(x,\tau)\right)d\tau; s\right\} \\ &= \int_0^\infty x^{n-1}s^{-s^nt^n}\left\{\int_0^\infty f(\tau)\phi(x,\tau)d\tau\right\}dx \end{aligned}$$

elde edilir. İntegral sırası değiştirildiğinde istenilen bağıntıya ulaşmış oluruz.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty f(\tau)\left(\int_0^\infty x^{n-1}e^{-s^nt^n}\phi(x,\tau)dx\right)d\tau \\ &= \int_0^\infty f(\tau)L_n\left\{\phi(x,\tau); s\right\}d\tau \\ &= \Phi(s)\int_0^\infty \tau^{n-1}e^{-\tau^nq^n(s)}f(\tau)d\tau \\ &= \Phi(s)F(q(s)). \end{aligned} \tag{244}$$

Teorem 3.5 $\Phi(s)$ *ve* $q(s)$ *analitik fonksiyonları ve* $\mathcal{L}_{2n}\left\{f(x); s\right\} = F(s)$ *ve* $\mathcal{L}_{2n}\left\{\phi(t,\tau); s\right\} = \Phi(s)\tau^{2n-1}e^{-\tau^{2n}q^{2n}(s)}$ *ise, aşağıdaki eşitlik doğrudur:*

$$\mathcal{L}_{2n}\left\{\int_0^\infty f(\tau)\phi(x,\tau)d\tau; s\right\} = F(q(s))\Phi(s). \tag{245}$$

İspat. İspat Teorem 3.4 e benzer biçimde yapılır. ■

Teorem 3.6 *$f(t)$ ve $g(t)$ tanımlı, Laplace dönüşümüne sahip değişken katsayılı fonksiyonlar olsun. $u = u(x,t)$ ise aşağıdaki biçimdeki tüm kısmi türevli denklemler,*

$$f(t)u + f(t)\frac{1}{x^{n-1}}u_x = -g(t)\frac{1}{x^{n-1}}u_{xt}, \tag{246}$$

$$f(t)u + f(t)\frac{1}{x^{n-1}}u_x + g(t)u_t = -g(t)\frac{1}{x^{n-1}}u_{xt} \tag{247}$$

$u(0^+,t) = u_t(0^+,t) = 0$ olmak üzere genelleştirilmiş Laplace dönüşümü $\mathcal{L}_n$ kullanılarak çözülebilir.

İspat. İspata ilk bağıntının doğrulanması ile başlayalım.Öncelikle eşitliği düzenleyerek aşağıdaki forma getirelim.

$$f(t)u + f(t)\frac{1}{x^{n-1}}u_x + g(t)\frac{1}{x^{n-1}}u_{xt} = 0 \tag{248}$$

Burada eşitliğin her iki yanına da genenlleştirilmiş Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$f(t)\bar{u} + f(t)ns^n\bar{u} + g(t)ns^n\bar{u}_t = 0. \tag{249}$$

elde edilir.$\mu(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$ ve $\upsilon[0] = 0$ alınır ve gerekli hesaplanamalar yapılırsa;

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_t}{u} &= -\frac{1+ns^n}{ns^n}\mu_t \\ \bar{u} &= e^{\int_0^t \mu(w)dw}e^{-\frac{1}{ns^n}\int_0^t \mu(w)dw}L(s). \end{aligned} \tag{250}$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan;

$$\lim_{x\to 0^+} u(x,t) = \lim_{s\to\infty} ns^n \overline{u}(s,t) = 0 \tag{251}$$

olarak bulunabilir. Genelliği bozmadan $\mathcal{L}(s) = -\frac{1}{s^n}$ olarak seçilebilir. Sonrasında $\int_0^t \mu(w)dw$ in -tegrali $\mu(t)$ olarak ifade edilirse;

$$\begin{aligned} \overline{u}(s,t) &= -\frac{1}{s^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-\mu(t)^k}{k!\; n^k s^{nk}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu(t)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu(t)^k}{k!\cdot n^{k-1}}\left(\frac{k!}{ns^{n(k+1)}}\right)\cdot \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu(t)^k}{k!}. \end{aligned} \tag{252}$$

eşitliğine ulaşılır.(253) ve (254) bağıntıları kullanılır ve ters $L_n -$ dönüşümü uygulanırsa aşağıdaki değere ulaşmış oluruz.

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu(t)^k x^{nk}}{(k!)^2 n^{k-1}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu(t)^k}{k!}.$$

Eşitlik (248) benzer biçimde bulunabilir. Öncelikle, eşitliğimizi yeniden düzenlersek aşağıdaki homojen denklemi elde ederiz.

$$f(t)u + f(t)\frac{1}{x^{n-1}}u_x + i(t)u_t + g(t)\frac{1}{x^{n-1}}u_{xt} = 0. \tag{253}$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki yanına da genelleştirilmiş Laplace dönüşümü uygulandığında;

$$f(t)\overline{u} + f(t)ns^n\overline{u} + g(t)\overline{u_t} + g(t)ns^n\overline{u_t} = 0. \tag{254}$$

elde edilir. bu eşitliği yeniden düzenleyerek şu homojen denkleme ulaşırız;

$$\overline{u}(1+ns^n)f(t) + \overline{u_t}(1+ns^n)g(t) = 0 \tag{255}$$

$\dfrac{\overline{u_t}}{\overline{u}} = -\dfrac{g(t)}{f(t)} = J(t)$ olarak alınırsa ve yukarıdaki denklem yeniden düzenlenirse;

$$\overline{u}(s,t) = s^{\int_0^t J(w)dw}.L(s) \tag{256}$$

formunu alır. Burada genelliği bozmadan aşağıdaki eşitlik baz olarak alınarak $\mathcal{L}(s) = -\dfrac{1}{ns^n}$ olarak seçilebilir.

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = \lim_{x\to\infty} ns^n\overline{u}(s,t) = 0. \tag{257}$$

$\mathcal{L}(s) = -\dfrac{1}{ns^n}$, kullanılırsa,

$$\overline{u}(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[\int_0^t J(w)dw\right]}{k!ns^n} \tag{258}$$

elde edilir. Denklemin her iki yanına da genelleştirilmiş ters Laplace dönüşümü uygulandığında istenilen sonuca ulaşılmış olur,

$$u(x,t) = x^{n-2}e^{\int_0^t J(w)dw}. \tag{259}$$

■

Teorem 3.7 *$f(t)$ tanımlı Laplace dönüşümüne sahip, değişken katsayılı bir fonksiyon ve $z = z(x,t)$, olmak üzere aşağıdaki forma sahip tüm kısmi türevli denklemler;*

$$az^{''} - f(t)z^{'} + x^{n-1}z = 0 \tag{260}$$

$z(0^+,t) = z_t(0^+,t) = 0$, olmak üzere $\mathcal{L}_n$ genelleştirilmiş Laplace dönüşümü kullanılarak çözülebilir.

İspat. (260) eşitliği x^{n-1} ile bölünerek tekrar düzenlenirse, şu sonucu elde ederiz:

$$\frac{1}{x^{n-2}}z^{''} - \frac{f(t)}{x^{n-1}}z^{'} + z = 0. \tag{261}$$

Yukarıdaki eşitliğe $\frac{n-1}{x^{n-1}}z^{'}$ eklenir ve çıkarılırsa;

$$\frac{1}{x^{n-2}}z^{''} - \frac{n-1}{x^{n-1}}z^{'} + \frac{n-1}{x^{n-1}}z^{'} - \frac{f(t)}{x^{n-1}}z^{'} + z = 0, \tag{262}$$

$$x^n\left(\frac{1}{x^{2n-2}}z^{''} - \frac{n-1}{x^{2n-2}}z^{'}\right) + \frac{n-1}{x^{n-1}}z^{'} - \frac{f(t)}{x^{n-1}}z^{'} + z = 0. \tag{263}$$

eşitliğine ulaşılır. $\overline{\delta_x}$ türev operatörünün tanımı ve (263) eşitliği de kullanılarak,

$$x^n\overline{\delta_x}^2 z(x) + (n-1) + f(t))\overline{\delta_x}z(x) + z(x) = 0. \tag{264}$$

bulunur. $\mathcal{L}_n$ dönüşümü eşitliğin her iki yanına da uygulandığında;

$$L_n\left\{x^n\overline{\delta_x}^2 z(x); y\right\} - (n-1) + f(t))L_n\left\{\overline{\delta_x}z(x); y\right\} + L_n\left\{z(x); y\right\} = 0. \tag{265}$$

olur. Teorem 3.1 uygulanır ve yukarıdaki eşitlik tekrar düzenlenirse;

$$-\frac{1}{n}\overline{\delta_y}L_n\left\{\overline{\delta_x}^2 z(x); y\right\} - (n-1+f(t))L_n\left\{\overline{\delta_x}z(x); y\right\} + L_n\left\{z(x); y\right\} = 0, \tag{266}$$

dır. (267) bağıntısından yararlanıldığında,

$$-\frac{1}{n}\frac{d}{dy}\left\{n^2y^{2n}z(y) - ny^n z(0^+)\right\} - (n-1+f(t))\left\{ny^n\overline{z(y)} - z(0^+)\right\} + \overline{z(y)} = 0. \tag{267}$$

halini alır. $\overline{z(y)} = \mathcal{L}_n\left\{z(x); y\right\}$ ve $z(0^+) = 0$ olduğuna göre;

$$\overline{z^{/}(y)} + \left[(n-1) + f(t)\frac{1}{y} + \frac{1}{ny^{n+1}}\right]\overline{z(y)} = 0.$$

birinci dereceden kısmi türevli denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse;

$$\overline{z(y)} = C\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!n^{2m}y^{mn+n-1+f(t)}}. \tag{268}$$

sonucuna ulaşılır. Burada eşitliğin her iki yanına da ters $\mathcal{L}_n-$dönüşümü uygulanır ve aşağıdaki eşitlik kullanılırsa;

$$\mathcal{L}_n\left\{x^k\right\} = \frac{\Gamma(\frac{k}{n}+1)}{ny^{n+k}}, \quad Re(k) > -n, \tag{269}$$

elde edilir. Buradan;

$$z(x) = C\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m \frac{x^{mn-1+f(t)}}{x^{2m-1}m!\Gamma\left(m+\frac{f(t)-1}{k}+1\right)}. \tag{270}$$

sonucuna ulaşılmış olur. ■

Buradaki teoremlerden de faydalanarak aşağıda çözdüğümüz adi ve kısmi diferansiyel denklemlere yer vereceğiz. Öncelikle çözümlerde sıklıklar başvuracağımız bir referans olduğu için x^{kn} nin $\mathcal{L}_n$ dönüşümünü bularak başlayalım.

Örnek 3.1 *Aşağıdaki eşitliğin doğruluğunu gösterelim.*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n\left\{x^{kn};s\right\} &= \int_0^\infty x^{nk+k-1}\exp(-x^n s^n)f(x)dx \\ &= \frac{k!}{n}s^{-n(k+1)}.\end{aligned} \tag{271}$$

Çözüm 3 *$f(x) = x^{kn}$ olarak seçilir ve $s^n x^n = u^n$ değişken dönüşümü yapılırsa, yukarıdaki eşitlik gösterebilir.*

Örnek 3.2 *x ve t değerleri 0'dan büyük iken $u = u(x,t)$ ve $u(0^+,t) = \lim\limits_{x\to\infty} u(x,t)$ olmak üzere, aşağıdaki kısmi türevli denklemi için verilen problemi ele alalım,*

$$t^{n+1}u_{tx} + nx^{n-1}u = 0 \tag{272}$$

$u(0^+,t) = 0,\ u_t(0^+,t) = \lim\limits_{x\to o^+} u(x,t)$

Çözüm 4 *Yukarıdaki kısmi türevli denklemi $\overline{\delta}_x$ türev operatörü cinsinden yazabilmek için denklem yeniden düzenlenir ve $\overline{\delta}_x$ türev operatörünün tanımından da faydalanılırsa,*

$$t^{n+1}\frac{1}{x^{n-1}}\frac{d}{dx}u_t + nu = 0 \tag{273}$$

$$t^{n+1}\overline{\delta_x}u_t = -nu \tag{274}$$

elde edilir. $\mathcal{L}_n$ -dönüşümü eşitliğin iki yanına uygulanır ve Teorem 3.2 kullanılır;

$$\mathcal{L}_n\left\{t^{n+1}\overline{\delta_x}u_t\right\} = -nL_n$$

bulunur. Teorem 3.1 kullanılırsa;

$$ns^n t^{n+1}\mathcal{L}_n\left\{u_t;y\right\} - u_t(o^+,t) = -n\mathcal{L}_n\left\{u;y\right\}. \tag{275}$$

elde edilir.$\mathcal{L}_n\left\{u_t;y\right\} = \overline{u_t}$ ve $\mathcal{L}_n\left\{u;y\right\} = \overline{u}$ olarak alınır;

$$ns^n t^{n+1}\overline{u_t} - u(0^+,t) = -nu, \tag{276}$$

ve

$$\overline{u_t}(s,t) = -\frac{1}{s^n t^{n+1}}\overline{u} + \frac{u_t(0^+,t)}{ns^n t^{n+1}} \tag{277}$$

olur. Başlangıç koşulundan dolayı,ikinci denklemin sağ tarafı sıfıra eşit olur.$C = \frac{1}{ns^n}$ *olmak üzere,*

$$\lim_{x\to 0^+} u(x,t) = \lim_{s\to\infty} ns^n \overline{u}(s,t) - \lim_{s\to\infty} ns^n C e^{\frac{1}{ns^n t^n}} = 1, \tag{278}$$

bağıntılarından yararlanılıp aşağıdaki adi türevli denklem çözülürse;

$$\overline{u}(s,t) = e^{\frac{s^{-n}t^{-n}}{n}+c_1} = C.e^{\frac{s^{-n}t^{-n}}{n}}. \tag{279}$$

$\overline{u}$ *değeri,*

$$\overline{u}(s,t) = \frac{1}{ns^n} e^{\frac{1}{ns^n t^n}}, \tag{280}$$

olarak bulunur. $\overline{u}$ *seri açılımı yazıldığında;*

$$\begin{aligned} \overline{u}(s,t) &= \frac{1}{ns^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{ns^n t^n}\right)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{n}\right)^k}{ns^{nk+n}t^{nk}}. \end{aligned} \tag{281}$$

dır.$\mathcal{L}_n^{-1}$ *ters Laplace dönüşümü eşitliğin her iki yanına uygulandığında;*

$$u(x,t) = \sum_{k=o}^{\infty}\frac{\frac{1}{n^k}x^{nk}}{t^{nk}(k!)^2}.$$

çözümüne ulaşılır.

Örnek 3.3 *Aşağıdaki kısmi türevli denklemi çözelim.*

$$u_{xy} + \frac{1}{4}y^{n-1}u = 0 \tag{282}$$

Çözüm 5 *Denklemi* y^{n-1} *ile böldüğümüzde,*

$$\frac{1}{y^{n-1}}u_{xy} + \frac{1}{4}u = 0. \tag{283}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklem $\overline{\delta_y}$ *türev operatörü türünden yazıldığında,*

$$\overline{\delta_y}u_x + \frac{1}{4}u = 0.$$

homojen denklemine ulaşılır. Eşitliğin her iki yanına da $\mathcal{L}_n-$*dönüşümü uygulanır ve teorem 3.2 kullanılırsa,şu sonuç elde edilir.*

$$\mathcal{L}_n\left\{\overline{\delta_y}u_x; s\right\} + \frac{1}{4}\overline{u} = 0. \tag{284}$$

aşağıdaki bağıntı kullanıldığında;

$$ns^n u_x + \frac{1}{4}\overline{u} = 0,$$

olur.

$$\lim_{x\to 0} u(x,y) = \lim_{s\to\infty} ns^n \overline{u}(s,y) = \lim_{s\to 0} ns^n Ae^{-\frac{1}{2ns^n}x} = 1, A = \frac{1}{ns^n},$$

Buradan yukarıdaki eşitlik de kullanıldığında,

$$\frac{\overline{u_x}}{\overline{u}} = -\frac{1}{4ns^n}, \tag{285}$$

$$\overline{u}(s,t) = Ae^{-\frac{1}{2ns^n}x} \tag{286}$$

olur. $\frac{\overline{u_x}}{\overline{u}} = -\frac{1}{4ns^n}$ *eşitliğinin çözümü*

$$\overline{u}(x,s) = \frac{1}{ns^n}e^{-\frac{x}{4ns^n}} \tag{287}$$

dir. Öte yandan $\mathcal{L}_n$ *ve* $\mathcal{L}$ *dönüşümleri arasındaki ilişki kullanılır ve gerekli işlemler yapılırsa;*

$$\mathcal{L}_n\left\{I_0(ay^{n/2}); s\right\} = \frac{1}{n}\mathcal{L}\left\{I_0(ay^{\frac{1}{2}}; s^n)\right\} = \frac{1}{ns^n}e^{-\frac{a^2}{4ns^n}} \tag{288}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\overline{u}(x,s) = \frac{1}{ns^n}e^{-\frac{a^2}{4s^n}} = \frac{1}{ns^n}e^{-\frac{x}{4ns^n}}, a = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}} \tag{289}$$

olur. Ters Laplace dönüşümü uygulanırsa;

$$u(x,y) = I_0\left(\sqrt{\frac{xy^n}{n}}\right) \tag{290}$$

çözümüne ulaşmış oluruz.

Örnek 3.4 *Aşağıdaki adi diferansiyel denklemi* $v \in \mathbb{N}$ *ve* $z(0^+) = 0$ *olmak üzere çözelim.*

$$z^{''} - \left(\frac{v(v-2)+n+2}{x}\right)z^{'} + x^{n-2}z = 0. \tag{291}$$

Çözüm 6 *Eşitliği* x^{n-2} *ile bölüp,* $\frac{n-1}{x^{n-1}}z^{'}$ *değeri eklenip çıkarılırsa,*

$$x^n\left(\frac{1}{x^{2n-2}}z^{''} - \frac{n-1}{x^{2n-1}}z^{'}\right) + \frac{n-1}{x^{n-1}}z^{'} - \frac{v(v-2)+n+2}{x^{n-1}}z^{'} + z = 0. \tag{292}$$

olur.$\overline{\delta}_x$ *türev operatörü kullanılırsa, yukarıdaki eşitlikten*

$$x^n\overline{\delta}_x^2 z(x) - \frac{v^2-2v+1}{x^{n-1}}\overline{\delta}_x z(x) + z(x) = 0. \tag{293}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanına da $\mathcal{L}_n-$*dönüşümü uygulandığında,*

$$\mathcal{L}_n\left\{x^n\overline{\delta}_x^2 z; y\right\} - (v-1)^2\mathcal{L}_n\left\{\overline{\delta}_x z; y\right\} + \mathcal{L}_n\left\{z(x); y\right\} = 0.$$

bulunur. Teorem 3.1 kullanıldığında

$$-\frac{1}{n}\overline{\delta}_x\mathcal{L}_n\left\{\overline{\delta}_x^2 z;y\right\}-(v-1)^2\mathcal{L}_n\left\{\overline{\delta_x}z;y\right\}+\mathcal{L}_n\left\{z(x);y\right\}=0,$$

sonucuna ulaşılır.

$$\begin{aligned}&-\tfrac{1}{n}\tfrac{1}{y^{n-1}}\tfrac{d}{dy}\left(n^2y^{2n}\overline{z(y)}-ny^nz(0^+)-\overline{\delta}_xz(0^+)\right)-\\&-(v-1)^2(ny^n\overline{z(y)}-z(0^+))+\overline{z(y)}=0.\end{aligned}\tag{294}$$

Başlangıç koşulu $z(0^+)=0$ kullanıldığında, aşağıdaki birinci dereceden adi türevli denklem elde edilir:

$$\overline{z(y)}'+\left\{(2n+(v-1)^2\frac{1}{y}-\frac{1}{ny^{n+1}}\right\}\overline{z(y)}=0.\tag{295}$$

Birinci mertebeden adi türevli denklem çözüldüğünde;

$$\overline{z(y)}=C\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{1}{m!n^{2m}y^{mn+2n+(v-1)^2}}.\tag{296}$$

sonucu bulunur.Eşitliğin iki yanında ters $\mathcal{L}_n-$dönüşümü uygulanırsa;

$$z(x)=C\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{x^{mn+n+(v-1)^2}}{m!\Gamma(m+\frac{n+2v-2}{n}+1)n^{2m-1}}.\tag{297}$$

bulunur. Aşağıdaki bağıntı kullanılarak,

$$\mathcal{L}_n\left\{x^k;y\right\}=\frac{\Gamma(\frac{k}{n}+1)}{ny^{n+k}},\tag{298}$$

ve $k=mn+n+(v-1)^2$ alınarak,

$$\mathcal{L}_n^{-1}\left\{\frac{1}{y^{mn+n+(v-1)^2+n}};x\right\}=\frac{nx^{mn+n+(v-1)^2}}{\Gamma(m+1+\frac{(v-1)^2}{n}+1)},\tag{299}$$

elde edilir. Burada $\alpha=\frac{(v-1)^2+n}{n}$, $C=n^{-\frac{(v-1)^2}{n}-2}$ alınırsa $>n$ $(v,n\in\mathbb{N})$ eşitsizliği ile $\alpha\in\mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki sonucu elde ederiz:

$$z(x)=x^{\frac{n\alpha}{2}}J_0\left(\frac{2}{n}x^{n/2}\right)\tag{300}$$

Burada J_α α. mertebeden Bessel fonksiyonudur.

■

4 Bölüm: Sonuçlar

3. bölümde bulunan sonuçlar ışığında hazırlanan iki makale 4. ve 5. IECMSA uluslararası matematik konferansında sunulmuştur. Yine hazırlanan makalelerden bir tanesi uluslararası akademik bir dergi olan "Konuralp Journal of Mathematics" dergisinde yayınlanmıştır. Yayınlanan bu makale de referanslar arasında bulunmaktadır.

4.1 Adi ve Kısmi Türevli Denklemlerin Çözümünde $\mathcal{L}_n$ integral dönüşümün Kullanımına İlişkin Teoremler

1. ($\mathcal{L}_n$ İntegral Dönüşümü için Genelleştirilmiş Efros Teoremi) $\Phi(s)$ ve $q(s)$ analitik fonksiyonlar, $\mathcal{L}_n\left\{f(x);s\right\} = F(s)$ ve $\mathcal{L}_n\left\{\phi(t,\tau);s\right\} = \Phi(s)\tau^{n-1}e^{-\tau^n q^n(s)}$olmak üzere,

$$\mathcal{L}_n\left\{\int_0^\infty f(\tau)\phi(x,\tau)d\tau; s\right\} = F(q(s))\Phi(s).$$

olduğu ispat edildi.

2. ($\mathcal{L}_{2n}$ İntegral Dönüşümü için Efros Teoremi)$\Phi(s)$ ve $q(s)$ analitik fonksiyonları ve $\mathcal{L}_{2n}\left\{f(x);s\right\} = F(s)$ ve $\mathcal{L}_{2n}\left\{\phi(t,\tau);s\right\} = \Phi(s)\tau^{2n-1}e^{-\tau^{2n}q^{2n}(s)}$ ise, aşağıdaki eşitliğin,

$$\mathcal{L}_{2n}\left\{\int_0^\infty f(\tau)\phi(x,\tau)d\tau; s\right\} = F(q(s))\Phi(s).$$

doğruluğu gösterildi.

3. $f(t)$ ve $g(t)$ tanımlı, Laplace dönüşümüne sahip değişken katsayılı fonksiyonlar olsun. $u = u(x,t)$ ise aşağıdaki biçimdeki tüm kısmi türevli denklemler,

$$f(t)u + f(t)\frac{1}{x^{n-1}}u_x = -g(t)\frac{1}{x^{n-1}}u_{xt}, \tag{301}$$

$$f(t)u + f(t)\frac{1}{x^{n-1}}u_x + g(t)u_t = -g(t)\frac{1}{x^{n-1}}u_{xt} \tag{302}$$

$u(0^+,t) = u_t(0^+,t) = 0$ olmak üzere genelleştirilmiş Laplace dönüşümü $\mathcal{L}_n$ kullanılarak çözülebileceği ispat edildi.

4. $f(t)$ tanımlı Laplace dönüşümüne sahip, değişken katsayılı bir fonksiyon ve $z = z(x,t)$, olmak üzere aşağıdaki forma sahip tüm kısmi türevli denklemler;

$$az^{''} - f(t)z^{'} + x^{n-1}z = 0 \tag{303}$$

$z(0^+,t) = z_t(0^+,t) = 0$, olmak üzere $\mathcal{L}_n$ genelleştirilmiş Laplace dönüşümü kullanılarak çözülebileceği bulundu.

4.2 Adi ve Kısmi Türevli Denklemlerin Çözümünde Genelleştirilmiş Laplace Dönüşümünün Kullanımı

1.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n\left\{x^{kn};s\right\} &= \int_0^\infty x^{nk+k-1}\exp(-x^n s^n)f(x)dx \\ &= \frac{k!}{n}s^{-n(k+1)}.\end{aligned} \tag{304}$$

eşitliğinin doğruluğu gösterildi.

2. x ve t değerleri 0'dan büyük ve $u = u(x,t)$ ile $u(0^+,t) = \lim_{x\to\infty} u(x,t)$ olarak alınsın. $u(0^+,t) = 0$, $u_t(0^+,t) = \lim_{x\to o^+} u(x,t)$ olmak üzere,

$$t^{n+1}u_{tx} + nx^{n-1}u = 0$$

kısmi türevli denklemi çözüldü.

3.

$$u_{xy} + \frac{1}{4}y^{n-1}u = 0$$

kısmi türevli denkleminin çözümüne ulaşıldı.

4.

$$z^{''} - \left(\frac{v(v-2)+n+2}{x}\right)z^{'} + x^{n-2}z = 0.$$

adi türevli denkleminin çözümü

$$z(x) = x^{\frac{n\alpha}{2}} J_0\left(\frac{2}{n}x^{n/2}\right)$$

olarak bulundu. J_α α. mertebeden Bessel fonksiyonudur

References:

[1] Aghili, A., Ansari, A., Sedghi A., An inversion technique for the Ln-transform with applications, Int. J. Contemp. Math. Sciences, 2.28, 1387-1394, 2007.

[2] Aghili, A., Ansari, A., A new approach to solving SIEs and system of PFDEs using the $L_2 - transform$, Differential Equations and Control Processes, N3, 1817-2172, 2010.

[3] Dernek, N., Aylıkçı, F., Identities for the $L_n - transform$, The $L_{2n} - transform$ and the $P_{2n} - transform$ and their applications, Journal of Inequality and Special Functions,5.4, 1-16, 2014.

[4] Dernek, N., Aylıkçı, F., Laplace ve L_2 dönüşümleriyle kısmi türevli denklemlerin çözümleri, Marmara University, Master Thesis, 2014.

[5] Dernek, N., Srivastava, H.M, Yürekli, O.,Parseval-Goldstein Type Identities Involving the $F_{c,2}$-transform and the P_4 -transform and Their Applications, Applied Mathematics and Computation, 202;327-337, 2008.

[6] Duffy, D., G., Transform Methos for Solving Partial Differential Equation, Chapman&Hall/CRC, 2004.

[7] Dernek, N., Aylıkçı, F., Kıvrak, S., An alternative technique for solving ordinary differential equations, Konuralp Journal of Mathematics, Volme 4 No 1 pp 68-72, 2016.

[8] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F.G., Tables of integral transforms Vol. 1, New York,NY,USA, McGraw-Hill, 1954.

[9] Erdelyi, A., Magnus, W., Oberhettinger, F., Tricomi, F.G., Tables of integral transforms Vol. 2, New York,NY,USA, McGraw-Hill, 1954.

[10] Gaugler, T., Applications of the L_n- tranform to partial differential equations,arşiv:1202.2402v2, 2012.

[11] Srivastava H.M.,and Yurekli O. , A theorem on a Stieltjes-type integral transform and its applications, Complex Variables Theory Appl. 28, pp159–168, 1995.

[12]Srivastava, R., Some inversion formulas for the Widder potential transform. Integral Transform. Spec. Funct. 3 , pp 235–242,1995.

[13]Widder, D., V., A transform related to the Poisson integral for a half-plane, Duke Math. J. 33, pp 355–362, 1966.

[14] Yürekli, O.,Wilson, S., A new method of solving Bessel's diferential equation using the $L_2 - transform$, Applied Mathematics and Computation, 130.2, pp 587-591, 2002.

Sevil Kıvrak, 1988 yılında Denizli'de doğdu. 2002 yılında Suna Uzal İlköğretim Okulu, 2006 yılında Burdur Anadolu Öğretmen Lisesi ve 2014 yılında Boğaziçi Üniversitesi Lise Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun oldu. 2014 yılında Marmara Üniversitesi Uygulamalı Matematik bölümünde yüksek lisans programına kabul edildi. Bu yıllarda aynı zamanda Sevinç dershanelerinde matematik öğretmenliği görevini yürüttü. 2015 yılından bu yana da Eyüboğlu Kolejinde matematik öğretmenliği yapmaktadır.