T.C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN SÖZSÜZ İSPAT BECERİLERİNİN PİSAGOR TEOREMİ BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

Ebru ARSLANTAŞ İLTER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU

SİVAS – 2020

MATEMATİK ÖĞRETMENLERİNİN SÖZSÜZ İSPAT BECERİLERİNİN PİSAGOR TEOREMİ BAĞLAMINDA İNCELENMESİ

Ebru ARSLANTAŞ İLTER

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Eğitim, Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Dr. Öğr. Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU

Sivas
Haziran, 2020

KABUL VE ONAY

Ebru ARSLANTAŞ İLTER'in hazırlamış olduğu "Matematik Öğretmenlerinin Sözsüz İspat Becerilerinin İncelenmesi" başlıklı bu çalışma, 02.06.2020 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından, "Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Dr.Öğr.Üyesi Yasin GÖKBULUT (Jüri Başkanı)

Dr.Öğr.Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU (Danışman)

Doç.Dr.Fatih KARAKUŞ (Üye)

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../..../

Doç.Dr.Fatih KARAKUŞ
Enstitü Müdürü

ETİK SÖZÜ

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

Ebru ARSLANTAŞ İLTER

ÖNSÖZ

Bu araştırmanın her aşamasında bana yardımcı olan olumsuzluklara karşı beni yüreklendiren, bana her konuda rehberlik eden, derin bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım, bana, yardımlarını esirgemeyen, sağladığı pozitif enerji ile zorlukların üstesinden gelebilmemi kolaylaştıran, beni yüreklendiren, saygı ve sevgi duyduğum emeklerimi ödeyemeyeceğim danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU'na teşekkürlerimi sunuyorum.

Tezin çeşitli aşamalarında değerli görüş ve düşüncelerinden faydalandığım, çalışma ile ilgili olarak eksik noktaları görmemde ve bunları gidermemde, bana büyük katkıda bulunan değerli hocalarıma teşekkürlerimi sunuyorum.

Çalışmaya katılan gönüllü olarak emek ve zaman harcayan öğretmen arkadaşlarıma katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Ayrıca çalışmamın her aşamasındaki desteklerinden ve özverisinden dolayı eşim Ramiz İLTER'e ve elbette benim bugünlerde olmamda emeklerini unutmayacağım aileme sonsuz teşekkürler. Son olarak tezimin son aşamalarında varlığı ile bana güç veren kızım Alya Umay İLTER'e binlerce teşekkürler.

Ebru ARSLANTAŞ İLTER

SİVAS – 2020

ÖZET

İLTER ARSLANTAŞ, Ebru. Matematik Öğretmenlerinin Sözsüz İspat Becerilerinin Pisagor Teoremi Bağlamında İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Sivas, 2020.

Bu çalışmada matematik öğretmenlerinin sözsüz ispat yapma becerilerini Pisagor teoremi bağlamında incelemek amaçlanmıştır. Çalışma iki aşamada gerçekleştirilmiştir. İlk aşamada açıklama olmaksızın yalnızca görseller verilmiş ve hangi matematiksel kavramlar ile ilişkilendirdikleri tespit edilmiştir. İkinci aşamada ise görseller ile birlikte hangi matematiksel ifadeye yönelik olduğu açıklamalar verilmiş ve ispat yapma süreçleri incelenmiştir. İlk aşama 20 matematik öğretmeni ile ikinci aşama ise bu öğretmenlerden gönüllü olan 7'si ile yürütülmüştür. Çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması kullanılmıştır. Veriler iki farklı Pisagor teoreminin ispatına yönelik verilen görsel ile toplanmıştır. İlk aşamada elde edilen veriler içerik analiz tekniği ile analiz edilmiştir. Daha sonra ikinci aşamada 7 matematik öğretmenin ispat yapma süreçleri incelenmiş ve ilk aşamadaki cevapları ile karşılaştırmalar yapılmıştır. Elde edilen bulgular Pisagor teoremine yönelik görsellerle karşılaştıklarını ve ispat sürecinde sergiledikleri davranışları açığa çıkarmıştır.

Anahtar Kelimeler: İspat, Görselleştirme, Sözsüz İspatlar, Matematik Öğretmeni

ABSTRACT

İLTER ARSLANTAŞ, Ebru. Examining the Proofs Without Words Skills Mathematics Teachers in the Context of the Pythagorean Theorem, Master Thesis, Sivas, 2020.

In this study, it was aimed to examine the proofs without words skills of mathematics teachers in the context of the Pythagorean theorem. The study was carried out in two stages. In the first stage, only visuals were given without explanation and it was determined which mathematical concepts they associated with. In the second stage, the explanations about the expression along with the visuals are given and the processes of making proof were examined. The first stage was conducted with 20 mathematics teachers and the second stage was conducted with 7 volunteers among those teachers. Case study, one of the qualitative research methods, was used in the study. The data were collected with the visual given for proof of two different Pythagorean theorems. The data obtained in the first stage were analysed by content analysis technique. Then, in the second stage, the proof-making processes of 7 mathematics teachers were examined and comparisons were made with the answers in the first stage. The findings revealed that they encountered visuals for the Pythagorean theorem and their behaviour during the proof process.

Keywords: Proof, Visualization, Proofs Without Words, Mathematics Teacher

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BÖLÜM I

GİRİŞ

BÖLÜM II

KURAMSAL ÇERÇEVE

BÖLÜM III

YÖNTEM

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUM

BÖLÜM V

SONUÇLAR ve TARTIŞMA

TABLOLAR DİZİNİ

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Bu bölümde araştırmanın problem durumu, amacı, önemi, varsayımları, sınırlılıkları ve araştırmadaki tanımlar verilmiştir.

1.1. Problem Durumu

İspat ve ispatın öğretiminin, öğrencilere kazandırdıkları her zaman matematik ve matematik eğitiminde araştırmaların konusu olmuştur. İspat matematiksel düşünmenin bir alt boyutu olduğundan matematik eğitimcileri öğrencilerin ispat becerilerinin geliştirilmesinin matematiksel düşünme becerisini geliştireceğine vurgulamaktadırlar. Bunun yansıması olarak da akıl yürütme, muhakeme yapabilme ve ispat hem Türkiye'de hem de yurt dışında matematik öğretim programlarının geliştirmeyi hedeflediği beceriler arasında yer almaktadır. Gelişen teknoloji ve araştırmalar doğrultusunda Argün, Arıkan, Bulut ve Halıcıoğlu'nun (2014) ifade ettiği gibi *"artık fikirlerin anlaşılması ve keşfedilmesi gereken yeni bir dünyası vardır ve bu dünyaya girmek için matematiksel ispatın kullanılması gerekmektedir."* (s. 234). Bu yaklaşım ise ispata yüklenen önemin daha da artacağının göstergesidir.

İspatın farklı tanımları yapılmaktadır. İspat, bir teoremin anlaşılmasını, öneminin kavranmasını sağlayan sosyal süreç (Dede & Karakuş, 2014, s. 50), bir ifadenin doğruluğu ile ilgili deliller (Rodd, 2000, s. 225), geçerliği önceden ispatlanmış aksiyom ve teoremlere dayandırılmış ifadeler dizisi (Morash, 1987, s. 149), bir dizi geçerli sonuçlar (Hanna & Sidoli, 2007, s.75), tanımlar ve aksiyomlarla fikirlerin açıklık kazandığı final aşaması (Hanna, 1991, s. 55), muhakeme edilmiş delillerin kullanılmasıyla bazı ifadelerin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmek (Almeida, 1996, s. 660), bir dizi mantıksal hükümlerle önermenin doğru ya da yanlış olduğunu gösterme (Konyalıoğlu, 2015, s. 43) şeklinde tanımlanmaktadır. Bu tanımlardan da görüldüğü gibi ispatın farklı yönlerine vurgu yapılmaktadır. Hanna'ya (2000, s. 8) göre ispat bir iddianın doğruluğunu ya da yanlışlığını göstermeyi amaçlamaktan çok neden doğru ya da yanlış olduğunu göstermeyi amaçlamaktadır.

Öğrencilerin bireysel farklılıkları olmasına rağmen genellikle ispatlar öğrencilere değişmez ve kesin formatta sunulmaktadır (Lockhart, 2009, s. 18). Hâlbuki öğrenme ve öğretme sürecinin anlamlı olabilmesi için öğrencilerin ilgi, öğrenme ihtiyacı, hazır bulunuşluk düzeyi, öğrenme stili gibi bireysel farklılıklarının tespit edilmesi ve öğretim yöntem ve teknikleri belirlenirken bu farklılıkların göz önünde bulundurulması gerekmektedir (MEB, 2018). Bu bağlamda düşünüldüğünde öğrencilere kullanabilecekleri alternatif ispat yöntemlerinin sunulması, hem zengin öğrenme ortamları oluşturmuş olacak hem de bir ispatı yapmak için başvurulabilecek alternatif yollar sunulmasıyla öğrenciye farklı bakış açıları kazandırılmış olacaktır. Dede ve Karakuş (2014), öğrencilerin ispat yapma süreçlerini kolaylaştırmak için görsel çizimlerden yararlanılabileceğini ifade etmişlerdir. Bu görüşe paralel olarak da Bell (2011) matematiksel bir kanıtın görselinin oluşturulmasının onun daha iyi anlamlandırılmasını sağlayacağına vurgu yapmaktadır.

Öğrencilerin ispat becerisini geliştirmenin yollarından biri de ***görselleştirme*** yapmaktır. Görselleştirmenin amacı resimler, imajlar ve diyagramlar kullanılarak matematiksel düşünmeyi geliştirmede bireye yardımcı olmaktır (Yılmaz & Argün, 2013, s. 565). Diyagramlar ve diğer görsel sunumlar matematiğin her alanında her daim kullanılmıştır (Hanna & Sidoli, 2007). Görselleştirme; zihinden geometri yapma, şekillerin zihinsel görüntülerini oluşturma ve hayalinde görüntüler üzerinde çalışmayı, şekillerin farklı perspektiften nasıl görüleceğini, içermektedir (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2019). Ayrıca görselleştirme, görsel bilgileri temsil etme, dönüştürme, üretme, iletişim kurma, belgeleme ve yansıtma kabiliyetlerini içermekle beraber, (Hershkowitz, 1990) matematiksel bir fikri iletmek, açıklamak veya ikna etmek için bir araç olup şekil veya diğer görsel sunumları kullanmaktır (Hanna & Sidoli, 2007).

Bardelle (2009) öğrencilerin herhangi bir konu ile karşılaştıklarında kullanabilecekleri tekniklerin, araçların ve teoremlerin farkında olmamalarının sebebinin öğrencilerin öğretim hayatlarında görselleştirmeyle çok az karşılaşmalarına bağlamaktadır. Öğrencilerin görselleştirmeyi kullanabilmeleri ise derslerde görselleştirme etkinlikleriyle karşılaşmaları ve görselleştirmeyi kullanmaya teşvik edilmeleriyle mümkün olmaktadır (Rodd, 2000). Alsina ve Nelsen (2010) matematiksel başarı için görselleştirme yeteneğinin gerekliliğinden bahsetmektedir. O halde öğretmenleri, öğretmen adaylarını hatta öğrencileri görsel etkinliklerle daha fazla karşı karşıya getirmek önemlidir.

Görselleştirmenin matematik eğitimindeki rolü ve öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve hatta öğretmenlerin ispatta zorlandıkları göz önüne alındığında görsel ispat veya sözsüz ispatlara vurgu son yıllarda gittikçe artmaktadır. Aslında son yıllarda bulunmuş bir yenilik (Alsina & Nelsen, 2010; Bell, 2011) olmamasına rağmen özellikle muhakeme, akıl yürütme, problem çözme becerilerine artan ilginin sonucu olarak da son on yılda yapılan çalışmalarda sözsüz ispatlara ilgi de hızla artmaktadır.

Görselleştirme, sözsüz ispatlar, Pisagor teoremi ile ilgili çok fazla çalışma olmadığı görülmektedir. Görselleştirme ve ispatın önemli olduğu vurgusundan hareketle ilk önce matematik öğretmenlerin sözsüz ispat yapma süreçlerinin incelenmesi bu çalışmanın odak noktasını oluşturmaktadır.

Görselleştirmenin her alanda olduğu gibi matematikte de matematiği anlamada, matematik yapmada, matematiğin öğretiminde hatta ispat sürecinde önemli olduğu kabul edilmektedir. Görselleştirmenin matematik eğitimindeki rolü, öğrencilerin hatta öğretmenlerin ispat sürecine yaklaşımları, zorluklar, hepsi göz önüne alındığında sözsüz ispatların (veya görsel ispatların, diyagramların) matematik öğretiminde kullanılmasına yapılan vurgular giderek artmaktadır. Bunun yansıması olarak da özellikle son yıllarda yapılan araştırmalarda, öğretim programlarında, ders kitaplarında genel anlamı ile matematiği öğrenme ve öğretme sürecinde sözsüz ispatlara ilgi hızla artmaktadır.

Sözsüz ispatlar son yıllarda bulunmuş yeni bir yaklaşım değildir (Alsina & Nelsen, 2010; Bell, 2011) tarihsel süreci oldukça eskiye dayanmaktadır. Tümdengelimsel adımların şekil, diyagram ve grafiklere dayandırılmış halidir. Bu ise ispatı anlamanın resimlerin okunmasıyla mümkün olduğu anlamına gelmektedir. Sözsüz ispatlar söz olmayan, sadece diyagramlara dayalı, belki sayılar, harfler, oklar, noktalar ve birbiriyle ilişkili sembolik ifadeler olan ve yapılandırılması okuyucuya bırakılmış olan ispatlar olarak ifade edilmektedir (Bardelle, 2009). Ayrıca sözsüz ispat, özel bir matematiksel ifadenin niçin doğru olduğunu hatta matematiksel bir ifadenin doğruluğunu ispatlarken nasıl ele alınacağını görmemize yardımcı olacak diyagram veya resimler (Alsina & Nelsen, 2010) ve geometrik çizimler, sayısal veya sözel semboller dışında hiçbir kelime içermeyen ispatlardır (Gierdien, 2007). Yani sözsüz ispat, kelimeler olmadan matematiksel bir ifadenin ispatını resimleyen matematiksel çizimlerdir (Bell, 2011). Sözsüz ispatlar ilköğretimden üniversiteye kadar her kademede matematikte önemli roller üstlenmektedir (Alsina & Nelsen, 2010). Sözsüz ispatları anlamak için yapılan tartışmalar, açıklamalar, farklı matematiksel fikirler arasında bağlantılar bulmayı dolayısıyla da kavramayı geliştirmek için fırsatlar sunmaktadır (Gierdien, 2007).

Gerek yurt içinde gerekse yurt dışındaki yapılan araştırmalar incelendiğinde öğrencilerin (Hawro, 2007; Özer & Arıkan, 2002; Uğurel & Moralı, 2010; Bülbül & Urhan, 2016; Şimşek, Şimşek, & Dündar, 2013; Weber, 2001), öğretmen adaylarının (Gökkurt, Soylu & Şahin, 2014; Öçal & Güler, 2010; Jones, 2000; Moralı, Uğurel, Türnüklü & Yeşildere, 2006; Ünveren, 2010) ve hatta öğretmenlerin (Bayazıt, 2017; Knuth, 2002) ispat yapmakta veya ispatı anlamada zorluk yaşadıkları görülmektedir. Bu zorlukların neler olduğuna, nasıl üstesinden gelinebileceğine sınıf içinde ne tür uygulamalar yapılabileceğine yönelik birçok araştırma yapılmasına rağmen halen yapılmaya devam edilmekte, alternatif yollar önerilmekte ve sonuçları sunulmaktadır. Yurt içinde ispat ile ilgili çalışmalar incelendiğinde çalışmaları birkaç başlık altında incelemek mümkündür. İspat yapma süreçleri (Pekşen Sağır, 2013; Barak, 2018; Demiray, 2013; Öztürk, 2016), ispat şemaları, ispat algıları (Çontay, 2017; Tuncer, 2014), argümantasyon ve ispat (Doruk, 2016) anahtar fikirleri yazabilme süreçleri (Yeşilyurt Çetin, 2017), ispatla ilgili kavramsallaştırma, muhakeme, muhakeme hataları, öğrenme güçlükleri (Demir, 2017) ispat yapabilme becerileri (Aylar, 2014) ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgileri (Cihan, 2019) ispatlama becerilerini geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamı veya alternatif ispat yöntemlerinin öğretimi, 5e modelinin, dinamik geometri yazılımına dayalı öğrenme ortamı, sinir ağı modeli, kavrama testlerine dayalı bir ispat öğretimi, çift sütun ispat yöntemi (Polat, 2018; Öztürk, 2016; Küçükbulut, 2019) ispatları görselleştirme durumları (Mancoğlu, 2019) bunlardan yalnızca birkaçıdır. Diğer taraftan bu araştırmalar incelendiğinde, araştırmaların öğrenciler (Polat, 2018; Hawro, 2007; Özer & Arıkan, 2002; Uğurel & Moralı, 2010; Bülbül & Urhan, 2016; Şimşek, Şimşek & Dündar, 2013; Weber, 2001), öğretmen adayları (Öztürk, 2016; Demir, 2017; Çontay, 2017; Cihan, 2019; Demiray, 2013; Gökkurt, Soylu & Şahin, 2014; Öçal & Güler, 2010; Jones, 2000; Moralı, Uğurel, Türnüklü & Yeşildere, 2006; Ünveren, 2010) ve öğretmenler (Bayazıt, 2017; Knuth, 2002) ile yapıldığı görülmektedir. Ulaşılan ilgili literatür incelendiğinde öğretmenlerle yapılan çalışmanın çok az olduğu hatta bu çalışmalar içinde de sözsüz ispat süreçlerinin incelendiği bir çalışmanın olmadığı görülmektedir.

Sözsüz ispatların matematik eğitiminde faydalı olarak görülmesine rağmen çok fazla çalışma bulunmamaktadır. Ulaşılabilen bu çalışmalar (Polat, 2018; Ülker, 2018; Gelişen, 2016) öğrencilerle yapılmıştır, öğretmenlerle yapılan çalışmaya rastlanmamıştır. Sözsüz ispatlarda gelenekselden farklı olarak Gierdien'in (2007) ifade ettiği gibi öğrenciden teorem veya ifadenin doğruluğunu göstermesi yerine ispatı açıklaması istenmektedir. Sözsüz ispatların açıklanması için öğrencilerin önceden görmüş veya öğretim sürecinde karşılaşmış olması gerekmektedir. Buradan hareketle bu çalışmada öğretmenlerin sözsüz ispatları nasıl açıklayacaklarına ve nasıl ispat yapacaklarına odaklanılmış ve ispat yapma sürecini açığa çıkarmak istenmiştir. Diğer taraftan Pisagor teoremi geometrinin hatta matematiğin en önde gelen, en çok ispatı yapılan ve herkes tarafından bilinen teoremlerinden biridir. Bu nedenle bu çalışmada matematik öğretmenlerinin sözsüz ispat becerilerini Pisagor teoremi bağlamında incelemek amaçlanmıştır.

1.2. Problem Cümlesi ve Alt Problemler

Bu çalışmanın problem cümlesi "Matematik öğretmenlerinin Pisagor teoremi bağlamında sözsüz ispat yapma süreçleri nasıldır?" şeklindedir. Alt problemler de aşağıdaki gibidir.

1. Pisagor teoremi ile ilgili sözsüz ispatlardaki görseller (matematiksel ifadesi verilmeden) matematik öğretmenlerine ne ifade etmektedir?
2. Matematik öğretmenlerinin Pisagor teoremi ile ilgili sözsüz ispatlardaki ispat yapma süreçleri nasıldır?

1.3. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı, matematik öğretmenlerinin Pisagor teoremi ile ilgili sözsüz ispatlardaki ispat yapma süreçlerini incelemektir. Sözsüz ispatlar görselleştirme yaklaşımları adı altında anılan yaklaşımlardan biridir. Bu çalışmada "*Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı üçüncü kenarın (yani hipotenüsün) uzunluğunun karesine eşittir*" olarak ifade edilen en çok bilinen, en ünlü fakat ispatı prototip örneklerle sunulan Pisagor teoreminin ispatı incelenmiştir.

1.4. Araştırmanın Önemi

İspatın matematik öğretimindeki önemi, öğrencilerin zorlukları göz önüne alındığında çalışmanın ana odak noktası ispat becerisi olmaktadır. Görselleştirmenin önemi ve literatürdeki vurgular da göz önüne alındığında sözsüz ispatlar, ispat geliştirmenin alternatif ve etkili bir yöntemi olarak karşımıza çıkmaktadır. Özellikle Türkiye'de çok fazla çalışma olmaması hatta öğretmenlerle bir çalışma olmaması bu çalışmanın alana katkılarını önemli hale getirmektedir.

İspatın matematik öğretimindeki önemi, öğrencilerin zorlukları göz önüne alındığında çalışmanın ana odak noktası ispat becerisi olmaktadır. Öğrencilerin bu beceriyi kazanabilmeleri için öğretmenlere büyük sorumluluklar düşmektedir. İspat ve muhakeme becerilerinin öğretimi ve gelişimi öğretmene bağlıdır (Altıparmak ve Öziş, 2005). Öğretmenler öğrenciler için farklı ispat yöntemleri verirlerse öğrenciler matematiği daha iyi anlayacaklar ve yaratıcıklarını attıracaklardır. Öğretmenlerin ispat yapma sürecince kullandıkları yöntemleri, stratejileri, yaklaşımları ve ispat yapma becerileri öğrencilerin ispat becerilerini etkilemektedir. Öğretmenlerin sahip olduğu anlayışlar öğrencilerin ispata yönelik anlamalarını etkilemektedir (Healy & Hoyles, 2000). İspat yaparken sözel olarak ifade edilen düşüncelerin zihinde görüntüleri bulunmaktadır. Kimi düşüncenin sadece bir görüntüsü olabilirken kimi düşüncenin de birden fazla görüntüsü olabilmektedir (Mancoğlu, 2019). Görselleştirme, zihindeki düşüncelerin gözle görünür hale gelmesini sağlamaktadır. Bu nedenle görseller sadece bir teoremin ispatını anlamayı kolaylaştırmakla kalmayıp aynı zamanda ispatın yapılandırılması için yol haritası gösterip teoremin ispatı için ilham vermektedir. Görselleştirmenin önemi ve literatürdeki vurgularda göz önüne alındığında sözsüz ispatlar, ispat geliştirmenin alternatif ve etkili bir yöntemi olarak karşımıza çıkmaktadır. İspat, görselleştirme ve sözsüz ispat ile ilgili olan çalışmalar incelendiğinde öğretmenler ile ilgili çalışmanın neredeyse yok derecede az olduğu görülmektedir. Özellikle Türkiye'de çok fazla çalışma olmaması hatta öğretmenlerle bir çalışma olmaması bu çalışmanın alana katkılarını önemli hale getirmektedir. Bu çalışmanın matematik öğretmenleriyle yürütülmüş olması öğretmenlerin ispat yapma süreçlerinin incelenmesi matematik eğitimi alanında çalışma yapan araştırmacılara alan araştırmasında katkı sağlayacak ve bu anlamda bu eksikliği gidermeye yardımcı olacaktır.

Pisagor teoreminin ispatlarını ele alan araştırma makaleleri (Chambers,1999) ve kitaplar (Maor, 2007) halen yayımlanmaya devam etmektedir. Literatür incelendiğinde matematik öğretmenlerinin Pisagor teoreminin ispatının nasıl öğretilebileceğini özetleyen makaleler (Crawford, 2001) ve Pisagor teoreminin farklı ülkelerde nasıl öğretildiğine ilişkin araştırmalar (Hugener, Pauli, Reusser, Lipowsky, Rakocy & Klieme, 2009) olduğu görülmektedir. Fakat sözsüz ispat becerilerinin incelendiği bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu bağlamda sözsüz ispat ile Pisagor teoreminin ele alınışı bakımından ilgili literatüre katkı sağlayacaktır.

1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırma Ankara ilinde farklı okullarda çalışan matematik öğretmenlerinden ilk aşamada 20, ikinci aşamada ise bu öğretmenlerden gönüllü olan 7'si ile sınırlıdır. Araştırmanın bulguları veri toplama aracında kullanılan iki Pisagor teoremine yönelik sözsüz ispatlar ve araştırmanın bulguları süreç içinde elde edilen verilerle sınırlıdır.

1.6. Varsayımlar

Araştırmaya katılacak olan öğretmenlerin veri toplama aracına samimiyetle cevap verecekleri ve veri toplama aracının uygulanması esnasında da katılımcıların dış etkenlerden aynı oranda etkilenecekleri varsayılmıştır.

1.7. Tanımlar

İspat: Bir iddianın doğruluğunu araştırma, niçin doğru olduğunu açıklama ve genelleme koşullarını kontrol etme aşamalarından oluşan bir süreçtir (Baki, 2008).

Görselleştirme: Bir matematiksel düşüncenin, kavramın veya problemin ister elle ister bilgisayar ortamında çiziminin yapılarak görüntüsünün oluşturulması sürecidir (Brawise & Etchemendy, 1991).

Sözsüz İspat (Proof Without Words): Belirli bir matematiksel ifadenin neden doğru olabileceğini ve bunun doğru olduğunu ispatlamaya nasıl başlanacağını görmesi için okuyucuya yardımcı olan şekil ve diyagramlardır (Alsina & Nelsen, 2010).

BÖLÜM II
KURAMSAL ÇERÇEVE

Bu çalışmada ispat, görselleştirme, görsel-sözsüz ispat ve Pisagor teoremi ile ilgili kuramsal çerçeve sunulmuştur.

2.1. İspatın Tanımı

Argün, vd. (2014, s. 239-240) ispatın günlük dilde kullanılan bazı anlamlarını *"Tanık ve delil göstererek bir şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma, doğrulama veya yanlışlama, delil olarak hizmet eden her şey, gösteri, bir şeyin doğruluğunu kurgulama, bir şeyi test etme veya sınama, bir şeyin doğru olduğunu göstermede kullanılan yeterli delil veya bir şeyin doğruluğuna veya yanlışlığına inandırma"* olarak ifade etmişlerdir. Matematiksel ispatın ne olduğuna dair farklı tanımlar vardır (CadwalladerOlsker, 2011) fakat herkesin kabul ettiği bir tanımı hala yapılamamıştır ve bu konuda tartışmalar devam etmektedir (Dede & Karakuş, 2014). Yıldırım (1996, s. 102) "*Bir yargı, sav ya da sonucun doğruluğunu (ya da yanlışlığını) yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır.*" olarak tanımlarken Almeida (2003) *"Bir sonucu doğrulamak, başkalarını bilgilendirmek ve bu bilgiye ikna etmek, bir sonuç bulmak ve sonuçları tümdengelimsel bir sistemin içine yerleştirmek için kullanılır."* şeklinde ifade etmiştir. Matematiksel ispat, bireyler tarafından ortaya atılmış bir iddianın doğruluk değerini ortaya çıkarabilmek için gerçekleştirilen zihinsel bir aktivitedir (Harel & Sowder, 2007, s. 819).

2.2. İspatın Boyutları

Matematiksel ispatın ne olduğuna yönelik olan bu tanımlar ispatın *formel boyutu* ve *sosyal veya kültürel boyutu* olarak iki grupta toplanabilir (Arsac, 2007). İspatın *formel* boyutu, bazı kesin kurallara dayalı olarak her bir önermenin doğrulanmasıyla istenilen nihai sonuca ulaşmayı ifade etmektedir. Bu bağlamda ispatın formel boyutu ile ilgili bir tanımı " $p_1, p_2, \dots, p_n, q$ önermeler olmak üzere her $1 \leq i \leq n$ için p_i doğru iken q önermesinin doğru olduğunun gösterilmesine $p_1 \wedge, p_2, \dots, \wedge p_n \rightarrow q$ önermesinin ispatı" (Argün vd., 2014, s. 235) şeklinde verilebilir. Bu tanıma göre ispat; bir teoremin hükmünün doğruluğunu göstermek için izlenen mantıksal yolların topluluğudur (Argün vd., 2014). İspatın sosyal veya kültürel boyutunu Dede (2013, s. 17) matematikçiler tarafından ispatın geçerliği için kullanılan süreç, işlem ve yöntemler yönünden nitelendirilebileceğini ifade etmiştir. 1'den n'ye kadar olan pozitif tam sayıların toplamının ispatında tümevarımsal ispat ile Gauss'un yaptığı ispatı göz önüne aldığımızda ilk ispat formel boyutta ele alınabilecek bir ispatken ikinci ispat birinci ispata benzer ifadeler içermekle birlikte önermenin neden doğru olduğunu göstermesi nedeniyle ispatın sosyal veya kültürel boyutunda ele alınabilecek bir ispattır (Ülker, 2018). Bu ispatta teoremin altındaki kavramların anlaşılması durumu, teoremin kabulü noktasında, Dede ve Karakuş'a (2014) göre birinci ispattan daha fazla rol oynamaktadır.

Hersh'e (1993) göre iki farklı anlama sahiptir. Bunlar ispatın ortak bir uygulamaya yönelik matematiksel anlamı yani *işleyen* anlamı, nitelikli matematikçileri ikna eden delillerdir. Yukarıdaki teorem için yapılan ikinci ispat, ispatın işleyen anlamına bir örnek olabilir ve ispatın işleyen anlamı, ispatın sosyal veya kültürel boyutu içinde ele alınabilir. Matematiğin felsefesi ve matematiksel mantık üzerinde uzlaşmayla ilgili olan ikinci anlamı, yani *mantık* anlamı, cebir kurallarına göre mantıksal kurallara dayalı cümlelerin dönüşümlerinin dizisidir (Hersh, 1993). 1'den n'ye kadar olan sayılar örneğindeki ispatlardan birincisi ispatın mantık anlamına bir örnek olabilir ve ispatın mantık anlamı ispatın formel boyutu içinde ele alınabilir (Dede, 2013).

Hanna (1990) *açıklayan ispatlar ve ispat eden ispatlar* olmak üzere iki ispattan bahsetmektedir. Bir teoremin neden doğru olduğunu gösterip olaydan türetilen gerekçelerin bir kümesini sunan ispatlar *açıklayan ispatlar* iken teoremin sadece doğru olduğunu gösterip yalnızca delile dayalı gerekçeler sunan ispatlar ise *ispat eden ispatlardır*. 1'den n'ye kadar olan sayılar örneğindeki ispatlardan ikincisi ispat açıklayan ispata örnek olarak gösterilebilir ve açıklayan ispatlar, ispatın sosyal veya kültürel boyutu içinde ele alınabilir. Birinci ispat ise ispat eden ispata örnek olarak gösterilebilir ve ispat eden ispatlar, ispatın formel boyutu içinde ele alınabilir (Dede, 2013).

Dede ve Karakuş (2014) matematiksel ispatların yapılış amacına göre *1) Sezgisel (heuristic) ispat, 2) Açıklayıcı ispat, 3) Keşfedici ispat ve 4) Görsel ispat* olarak dört başlık altında toplamış ve açıklamıştır. Sezgisel ispat, sezgilere ve tahminlere dayanarak yapılan ispattır. Bazı matematikçilere göre sezgisel ispat öğrencilerin zihin yapısıyla oldukça uyumludur ve doğrulama sürecinde formel ispattan daha kullanışlıdır. Açıklayıcı ispatlar daha ikna edicidir ve matematikçiler tarafından daha çabuk kabul edilir. Keşfedici İspat, Hanna'ya (2000) göre; örneğin Sketchpad ve Cabri Geometri öğrencilerin yüksek doğruluk derecesinde geometrik çizimler yapmasına olanak vererek önermeleri anlamalarını sağlamaktadır ve öğrenciler bu programlar yardımıyla varsayımları uygun özelliklerde oluşturdukları çizimlerle test etme olanağı bulmakta hatta bu denemeler sayesinde yeni özellikler keşfetmektedirler. Buradaki keşfin, ispatın yerini almaması gerekir. Keşif ve ispat birlikte kullanılabilir ve birbirlerinin tamamlayıcısı olabilirler. Çoğu matematik eğitimcisi öğrencilerin varsayım yapmada ve varsayımları test etmede kullanılan keşfi öğrenmesi gerektiğini ancak bunun bir ispat oluşturmadığını düşünmektedir. Görsel İspatlarda grafik ve görsel temsiller ispatı açıklayıcı tamamlayıcı rol üstlenmektedirler. Dede ve Karakuş (2014) tarafından verilen bu çerçeve doğrultusunda sözsüz ispatlar hem açıklayıcı hem de görsel ispat olarak ele alınmaktadır. Doyle, Kutler, Miller ve Schueller (2014) görsel ispatların kelimeler ve açıklayıcı olmayan cümleler içerebileceğini ifade etmişlerdir. Bu tanıma göre de her sözsüz ispatın görsel ispat olarak nitelendirilemeyeceğini, ancak pratikte yayımlanmış bütün sözsüz ispatların görsel ispatlar olarak kabul edildiğini belirtmişlerdir.

Diğer taraftan ispat fonksiyonları ile ilgili çalışmalar incelendiğinde *ispatın fonksiyonlarının* farklı başlıklar altında toplandığı görülmektedir. Örneğin de Villiers (1990) ispat fonksiyonlarını, doğrulama (*verification/conviction*), açıklama (*explanation*), sistematikleştirme (*systematisation*), keşfetme (*discovery*), iletişim (*communication*) olarak belirtmişken, Bell (1976) ispat fonksiyonlarını doğrulama (*verification/ justification*), açıklama (*illumination*) ve sistematikleştirme (*systematisation*) olarak belirtmiştir. Hanna (2000) ise ispat fonksiyonlarına yukarıda verilenlere ek olarak "deneysel teorinin kuruluşu, varsayım dizisinin veya bir tanımın açıklanması ve bilinen bir gerçeğin yeni bir çerçeveyle birleştirilmesi ve bu gerçeğin farklı bir perspektiften görülmesi" fonksiyonlarını ilave etmiştir. Doğrulama (*verification/conviction/justification*), bir önermenin doğruluğunu gösterme ile ilgili olan bu fonksiyon en çok bilinen ispat fonksiyonlarındandır. Açıklama, önermenin niçin doğru olduğuna ilişkin bir öngörü sunmaktadır. Bu fonksiyon ispatın geçerliğini etkilememekle fakat estetik açıdan ispatı etkilemektedir. İyi bir ispat bir önermenin niçin doğru olduğuna dair ön görü sunabilmelidir (Bell, 1976). Sistematikleştirme, aksiyomların, temel kavram ve teoremlerin ve bunlardan elde edilen sonuçların tümdengelimsel sistem içerisinde organizasyonu olarak tanımlanan bu fonksiyon karakteristik olarak en matematiksel olan fonksiyon olarak düşünülmektedir (Bell, 1976). Keşfetme (*discovery),* yeni sonuçların keşfi olarak tanımlanmaktadır. İletişim (*communication*), matematiksel sonuçların, matematikçiler arasında, öğrenciler arasında ya da öğretmen ve öğrenci arasında paylaşılması ispatın iletişim fonksiyonu sayesinde olmaktadır.

2.3. Görselleştirme

Bir resim bin kelimeden iyidir (Casselman, 2000), görmek inanmaktır (Mudaly, 2013) yaygın olarak kullanılmaktadır ve bir şeylerin doğruluğuna inanabilmek ve doğruluğunu kabul edebilmek için onun açık ve görülebilir olması gerektiğini ifade edilmektedir. Görselleştirme, matematikte her daim kullanılmıştır (Hanna & Sidoli, 2007), matematikte anlamanın temeli (Duval, 1999), soyut kavramlara somutluk kazandırmasıdır (Flores, 2000), matematiksel bir fikri iletmek, açıklamak ve keşif için iyi bir araçtır (Giaquinto, 2007; Hanna & Sidoli, 2007). Görsel argümanların yeni sonuçların keşfi hatta daha fazla formel ispat yapmak için yardımcı olduğu yaygın olarak kabul edilmektedir (Bardelle, 2009).

İspat ile görselleştirmeyi birleştirmek öğrencilerin ispatla ilgili sorunlarını aşmalarına ve ispatı daha iyi anlamalarına sebep olabilir (Uğurel, Moralı, Karahan, & Boz Yaman, 2016). Teoremler genellikle formel biçimde ispatlanmaktadır. Hâlbuki diyagramlar üzerinde geometrik işlemler yapılarak insanların farklı bir ispat yolunu kullanmaları sağlanabilmektedir. Diyagramların bilgiyi depolama, algısal çıkarımları destekleme gibi avantajları mevcuttur ve diyagramların bulunduğu ispatlar, ispatın anlaşılmasını kolaylaştıracak sezgisel görüş sağlamaktadırlar. Ayrıca cebirsel ispatlara nazaran bu tip ispatlar daha kolay anlaşılmaktadır (Jamnik, Bundy & Green, 1997). Sonuç olarak Yenilmez ve Şan'ın (2008) ifade ettiği gibi görselleştirme, karmaşık ve soyut olan matematik konularının daha iyi anlaşılmasına olanak sağlar aynı zamanda resimlerin, şekillerin, örneklerin gözlenmesi, karmaşık işlemlerin sezgisel olarak anlaşılması, soyut ilişkiler kurma gibi zihinsel işlemleri harekete geçirir. Bundan dolayı resimler ve şekiller, anlama sürecine yardım eden araçlardır.

2.4. Sözsüz İspatlar

Sıkıcı bir ispat, bir teoremin gerçeği neredeyse bir bakışta görülebilecek kadar basit ve güzel bir geometrik analog ile desteklenebilir.
Martin Gardner

Görsel ispat (*visual proof*), sözsüz ispat (*proof without words*), diyagramatik ispat (*diagrammatic proof*), resimli-resimlerle ispat kavramları bazı araştırmacılara tarafından aynı şeyi ifade etmek için kullanılırken bazı araştırmacılar farklı yönlerine vurgu yapılmaktadır. Bardelle (2009), görsel ispat ve diyagramatik ispat ifadelerini kullanmıştır.

2.4.1. Sözsüz İspat Tanımı

Bazı araştırmacılar sözsüz ispatların ***çizim, şekiller, diyagramlar*** olduğuna vurgu yapmışlardır. Maanen (2006) sözsüz ispatı düşünmeyi teşvik eden bir dizi çizimdir şeklinde tanımlarken Bell (2011) ise sözsüz ispat matematiksel bir ifadenin ispatını sözcüklerle formel bir argüman olmadan gösteren matematiksel bir çizim olarak ifade etmiştir. Benzer şekilde Bell'e (2011) göre; kelime ve resmi bir argüman olmadan matematiksel bir ifadenin ispatını resimleyen matematiksel bir çizimdir. Alsina ve Nelsen (2010) ise matematiksel bir ifadenin niçin doğru olduğunu ve hatta doğruluğunu ispatlarken nasıl ele alınacağını görmemize yardımcı olacak diyagram veya resimler olarak tanımlamışlardır.

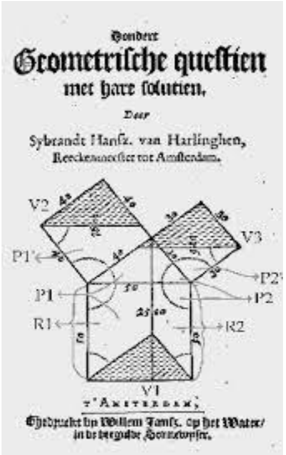
Bazı araştırmacılar bir ***araç*** olarak kullanılabileceğine vurgu yapmışlardır. Sigler Segal ve Stupel (2016) ispatlanması gereken, Alsina ve Nelsen (2010) matematiksel düşünceyi ilerletmek ve uyarmak için Doyle vd. (2014) matematiksel düşünceyi ilerletmek ve uyarmak için önemli bir araçtır şeklinde tanımlamışlardır. Bazı araştırmacılar ***ispat yönüne*** vurgu yapmışlardır. Bardelle (2009), söz olmayan, sadece diyagramlara dayalı, sayılar, harfler, oklar, noktalar ve birbiriyle ilişkili sembolik ifadeler içeren, yapılandırılması okuyucuya bırakılmış ispatlar olarak tanımlamıştır. Sigler *vd.* (2016) sözsüz ispatları, ispatlanması gereken iddiayı ve birkaç veya tek bir çizimi içeren ispatlar olarak tanımlamışlar ve sözsüz ispatları, sözlü gerekçelendirmenin olmadığı matematiksel ifadelerin yer aldığı ispatlar olarak belirtmişlerdir. Sözsüz bir ispat; matematiksel bir fikri, eşitliği veya teoremi göstermek için görsel sunumların kullanıldığı bir ispattır (Gierdien, 2007).

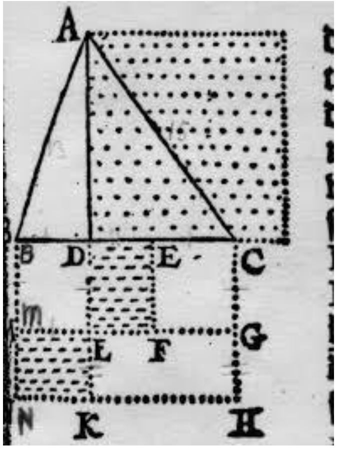
Bazı araştırmacılar ise ***yapısal yönüne*** vurgu yapmışlardır. Sözsüz ispatların bazılarında gözlemcilerin bu süreçte yönlendirilmesi için bir veya iki denklem görünebilir. Vurgu açıkça matematiksel düşünceyi teşvik etmek için gözlemciye görsel ipuçları sağlamaktır (Nelsen, 1993, s. VI). Ayrıca sözsüz ispatların tam olarak anlaşılması için kimi zaman birtakım açıklamalara ihtiyaç duyulmaktadır (Miller, 2012). Sözsüz ispatlar; geometrik çizimler, sayısal veya sözel semboller dışında hiçbir kelime içermemektedirler. Ancak bu ispatlar okuyucuyu yönlendirmek amacıyla görsel ipucu sağlayan birkaç denklem, ok veya gölgelendirmeler barındırabilmektedir (Gierdien, 2007).

2.4.2. Sözsüz İspatların Tarihsel Süreci

Martin Gardner 1973'de *Scientific American (Bilimsel Amerikalı)* dergisindeki *Matematiksel Oyunlar* köşesinde "bak-gör" diyagramları olarak isimlendirdiği sözsüz ispatı, genellikle sıkıcı bir ispatın geometrik modellerle desteklendiğinde daha basit ve ilgi uyandırmasıyla teoremin doğruluğunun neredeyse ilk görüşte anlaşılabileceğini belirtmiştir (Nelsen, 1993). Sözsüz ispatlar, Amerika Matematik Derneği tarafından yayımlanan iki derginin düzenli konularındandır. Sözsüz ispatlar ile ilgili bir makale, ilk olarak 1975'te *Mathematics Magazine (Matematik Dergisi)* de *Rufus Isaacs* tarafından yayımlanmıştır. Bir sonraki yılda sözsüz ispatlar yayımlanmaya devam etmiştir. Derginin okuyucuları tarafından sözsüz ispatlara yapılan olumlu yorumlar sayesinde birkaç yıl boyunca bu dergide sözsüz ispatlara yer verilmiştir. 1987 yılından itibaren Matematik Dergisi'nin (*The College Mathematics Journal*) her sayısında düzenli olarak sözsüz ispatlara yer verilmiştir.

Eski bir metot olan sözsüz ispatlar çok uzun yıllardır bilinmektedir. Maanen (2006) sözsüz ispatlarla ilgili ilk kaynağın 1612 'de yayımlandığı tahmin edilen Hollandalı tanınmamış bir yazar olan Sybrandt Hansz Cardinael'in geometri kitabıdır. Maanen (2006), Cardinael'in ispatlarında görseller kullanmasının yanı sıra matematiksel bir ifadeyle açıklama yapmadığı ve Pisagor Teoremi'nin ispatıyla örneklendirdiğini, ayrıca aritmetikte de sözsüz ispatları kullandığını belirtmiştir.





Şekil 1. Sybrandt Hansz Cardinael'in kitabından örnek (Maanen, 2006)

Bell (2011), yaklaşık olarak M.Ö 300 'de "*Arithmetic Classic Of Gnomon and Circular Path of Heaven*" isimli en eski Çin ders kitaplarından birinde bulunan Pisagor teoremi çizimlerinin bir ispatına örnek vermektedir. Sözsüz ispatlar 10. yüzyılda da Arap medeniyeti ve Rönesans İtalya'sında görülmüştür. Sözsüz ispatın öncülerinden olan Nelsen eski dönemlerdeki sözsüz ispatlardan başlayarak çeşitli sözsüz ispatları toparlamış 1993'te *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking* (Nelsen, 1993) , 2000'de bu kitabının devamı olan *Proofs Without Words II: More Exercises in Visual Thinking* (Nelsen, 2000), Claudia Alsina ile birlikte yazmış oldukları *Mat Made Visual* (2006) ve When Less Is More – Visualizing Basic Inequalities (2009), 2015'te *Proofs Without Words III: Further Exercises in Visual Thinking* (Nelsen,2015) kitaplarını yayımlamıştır. Bugün ise sözsüz ispatlar, yayımlanan birçok makalelerde düzenli olarak görülmektedir.

2.4.3. Sözsüz İspatların İspat Olup Olmamasına Yönelik Tartışma

Matematiksel ispatın ne olduğuna dair tartışmalar uzun süredir devam etmekte (Dede & Karakuş, 2014; Miller, 2012) ve ilgili literatürde matematiksel ispatın ne olduğuna dair farklı tanımlar yapıldığı için (CadwalladerOlsker, 2011) sözsüz ispatın, bir ispat olup olmadığı konusunun açıklığa kavuşması pek olanaklı görünmemektedir. Euclid'in *"Elements"* kitabında yer verdiği ve şekillerden yola çıkılarak ispatı yapılmış olan *"Bütün üçgenler ikizkenardır"* (Wallace & West, 2004, s. 42) teoreminde matematiksel yanılgı söz konusudur. Bu ispattaki hata, yürütülen mantıktan çok şekle dayanarak yapılan kabullerde yatmaktadır. Şekillere, görsellere veya diyagramlara göre yapılan kabuller ispatta hataya sebep olmuştur (Demircioğlu

& Polat, 2016). Bu ispat yukarıda bahsedilen özel durumlardan yola çıkılarak okuyucuyu matematiksel yanılgılara götürebilecek çıkarımlara bir örnek olabilir.

Sözsüz ispatlar formel ispatların yerine düşünülemeyeceği, bazen çok açık olmadığı, ifade edilmesinin açıklanmasının zor olması, teoremin neden doğru olduğunu gösterse de teoremin formel ispatına göre matematiksel olguları daha az sunması, ispatı inceleyen kişinin bazı kavramlara hâkim olması gerektiği bunlardan bazılarıdır. Bu çerçeveden bakınca görsel bir ispatla uğraşmak sözlü metin veya sembolik ifadeler arasında sürekli etkileşimi dikkate almayı gerektirebileceğinden öğrenciler için zorlayıcı olabilir (Bardelle, 2009).

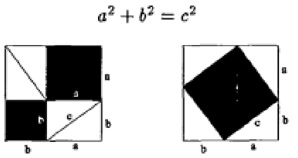
"Sözsüz ispatlar gerçekten bir ispat mıdır?" sorusunun cevabı yanıtsız kalmakla birlikte etkili bir öğretim aracıdır. Formel ispatı da desteklemektedir. *Mathematics Magazine (Matematik Dergisi)* dergisi eş editörü Prof. Lynn Arthur Steen'in dergide sözsüz ispatlar yayımlanmaya başlandığındaki düşünceleri aşağıda özetlenmiştir:

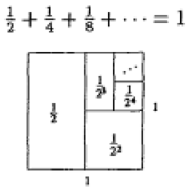
> *Çoğu insan için sözsüz ispatlar görülmeye başladığından beri ispatın basamakları görsel hafıza ile doğrusal hafızadan daha kalıcıdır. Ayrıca gerçek matematiksel temsiller iyi bir diyagram üzerine gömülü çeşitli ilişkilerle tanımlanmayı, farkına varılmayı ve sözelleştirilmeyi bekliyor. Böylece sözsüz ispatlar, öğrencilerin matematiği öğrenmesine ve hatırlamasına yardımcı olma konusunda sözlerden oluşan ancak yanlış hatırlanan ispatlardan daha uygundur* (Miller, 2012, s. 23).

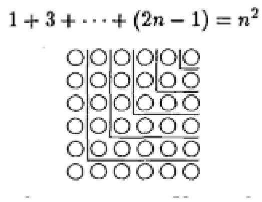
2.4.4. Sözsüz İspat Çeşitleri

Jamnik *vd.* (1997) ispat çeşitleri ile ilgili bir taksonomi ortaya koymuşlardır. *Diyagramatik ispatlar; şematik olmayan ispatlar, şematik olan ispatlar ve tümevarımsal ispatlar* olarak sınıflandırılmaktadır. *Şematik olmayan ispatlar* (Şekil 2a), genel durumu ispatlamak için tümevarıma ihtiyaç duyulmayan, diyagramda yapılan basit geometrik manipülasyonlarla durumun ispatlanabildiği ispatlardır. *Şematik ispatlar* (Şekil 2b), somut durumların her birinde teoremi ispatlamak için tümevarımsal adımlara gerek olmazken; somut olarak çizilemeyen n. boyutun durumu için tümevarıma gereksinim duyulan ispatlardır. *Tümevarımsal ispatlar*

(Şekil 2c), diyagramın her bir somut durumunun ispatlanması için tümevarımsal adıma gereksinim duyulan ispatlardır.

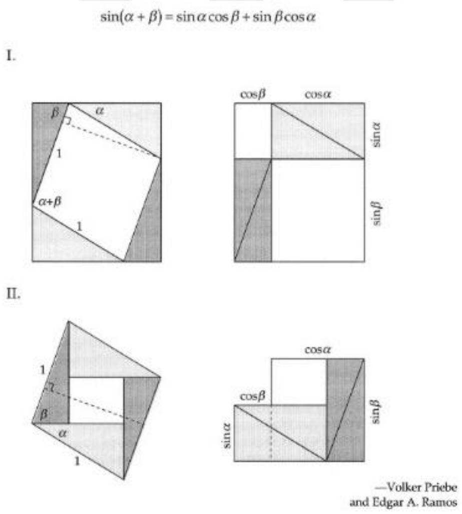
a) 

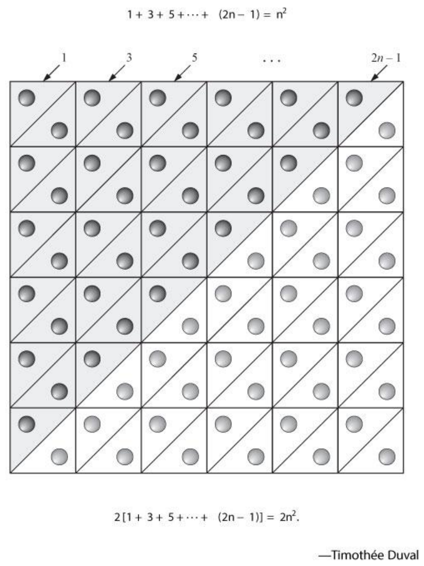
b) 

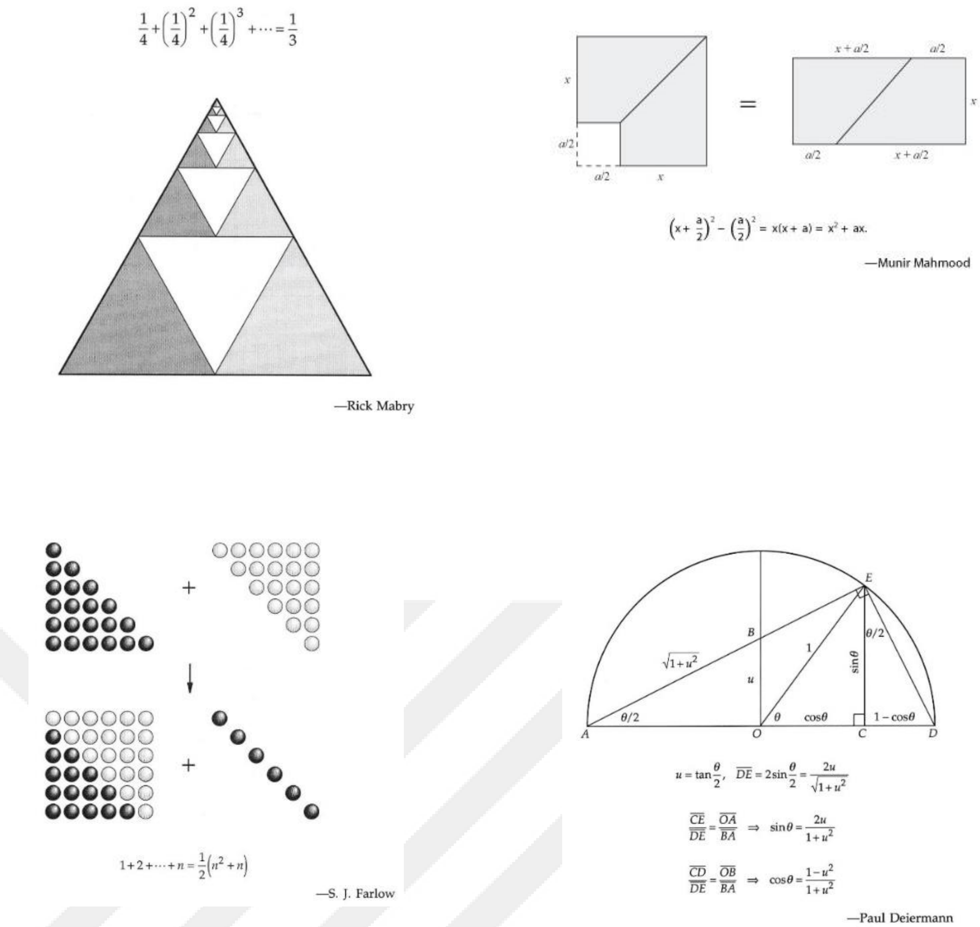
c) 

Şekil 2. Şematik olmayan ispat, Şematik ispat, Tümevarımsal ispat

Nelsen kitaplarında Geometri & Cebir, Trigonometri, Analiz& Analitik Geometri, Eşitsizlikler, Tam Sayıların Toplamı, Diziler, Seriler, Lineer Cebir ve diğer konular şeklinde vermiştir. Nelsen tarafından kitaplarında yer verilmiş sözsüz ispat örneklerinden birkaçı Şekil 3'de verilmiştir.





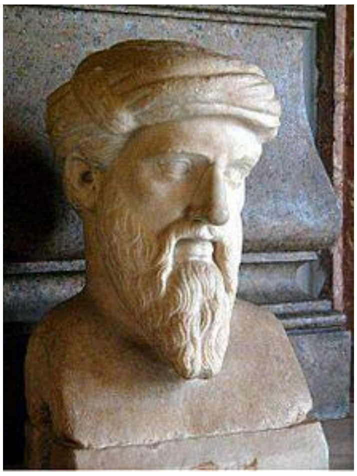


Şekil 3. Sözsüz ispat örnekleri (Nelsen, 2000; Nelsen, 2015)

2.5. Pisagor Teoremi

Johannes Kepler (1571-1630) ‘’geometrinin iki büyük hazinesi vardır. Bunlardan birisi Pisagor teoremi, diğeri ise bir çizginin altın oranda bölünmesidir. Birincisini bir ölçek altınla kıyaslayabilir, ikincisine de değerli bir mücevherdir diyebiliriz.’’

Topkaya’nın (2013) ifade ettiği gibi hayatı ile ilgili fazla bilgi bulunmayan hatta doğum ve ölüm yılı kesin olarak bilinmeyen Pisagor’un milattan önce 596 veya 582 yılında bugünkü adıyla bilinen Sisam Adasında doğduğu tahmin edilmektedir. Sisam Adasında okuduğu daha sonraları Mısır ve Babil’e giderek oralarda bilgisini ilerlettiği daha sonra ülkesine geri dönerek dersler verdiği ifade edilmektedir.

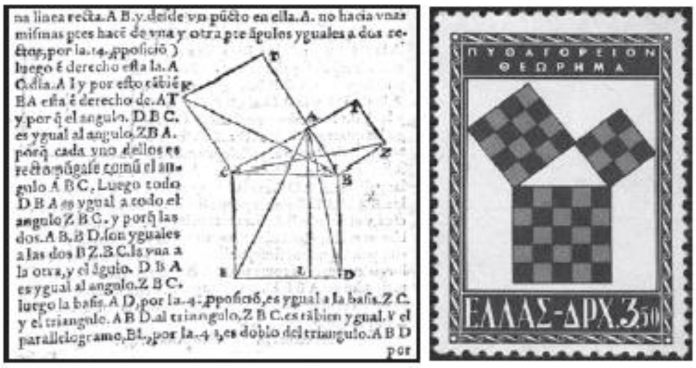


Şekil 4. Pisagor

Pisagor bir Yunan filozof ve matematikçisidir. Ülkesinde hüküm süren politik baskılardan kaçarak, İtalya'nın güneyindeki Kroton şehrine gelmiş ve ünlü okulunu burada açarak şöhrete kavuşmuştur. Pisagor milattan önce 6. yüzyılda, dünyanın güneş etrafında hareket ettiğini ileri sürdüğü zaman oldukça sert bir hareketle karşılanmıştır. O tarihlerde yine kâğıt olmadığı için bu buluşların nasıl elde edildiği yine bu devirlerdeki bilgilerinin hangisinin Pisagor'a ait olduğu kesin olarak bilinmemektedir. Geometride, aksiyomlar ve postülatlar her şeyden önce gelmelidir. Sonuçlar bu aksiyom ve postülatlardan yararlanılarak elde edilmelidir düşüncesini bulan ve ilk uygulayan Pisagor'dur. Matematiğe aksiyomatik düşünceyi ve ispat fikrini getiren yine Pisagor'dur. Çarpma cetvelinin bulunuşu ve geometriye uygulanması, yine Pisagor tarafından yapıldığı söylenir. En önemli buluşlarından biriside doğadaki her şeyin matematiksel olarak açıklanması yorumlanması düşüncesidir. Yaşayış ve inanışı, ilimle açıklama ve yorumlamayı o getirmiştir (Sparks, 2008; Topkaya, 2013).

Pisagor teoremi hem en büyük buluşlardan biri hem de matematikteki en önemli (Flores, 1993), en iyi bilinen (Alsina & Nelsen, 2011) teoremlerden birisidir. Pisagor teoremi, Öklid'in Elementlerinin I Kitabında (MÖ 300 dolaylarında) Önerme 47'de "*Dik açılı üçgenlerde, dik açının karşısındaki kenar üzerindeki kare, dik açı içeren kenarlardaki karelerin alanları toplamına eşittir*" şeklinde verilmiştir (Alsina & Nelsen, 2011).

Belki de matematikteki en tanınmış imajları, genellikle gelinin sandalyesi (*bride's chair)*, tavus kuşu kuyruğu (*the peacock's tail*), yel değirmeni (the windmill) ve Fransiskan'ın baca şapkası (*the Franciscan’s cowl*) olarak bilinen bir simge olan Pisagor teoremine sıklıkla eşlik eden figürdür. (Alsina & Nelsen, 2011) Şekil 5’te gelinin sandalyesini, 1576'da Sevilla'da yayımlanan *“Elemanlar”*ın İspanyolca çevirisi olan *“Los Seis Libros Primeros de la Geometria de Euclides”*



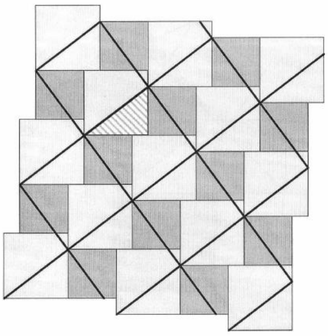
kitabında ve 1955'ten kalma bir Yunan posta pulu üzerinde verilmiştir.

Şekil 5. Pisagor teoreminin ispatı (Alsina & Nelsen, 2011)

2.5.1. Pisagor Teoreminin Farklı İspatları

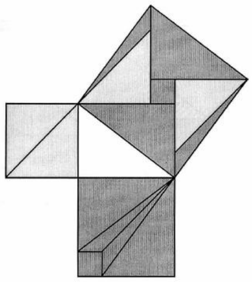
Önemine paralel olarak da matematik tarihi boyunca, hiçbir teorem Pisagor teoremi kadar ilginç, ilgi çekici olmamıştır ve bu kadar çok farklı biçimde ispatlanmamıştır (Loomis, 1968). Başka bir ifade ile Saikia (2015) ifade ettiği gibi en fazla ispatlanmış matematiksel sonuçtur. İspatlar çeşitlidir, bazıları geometrik, bazıları cebirseldir ve hatta bazılarında bu sonucu kanıtlamak için fizik ve diferansiyel hesap prensiplerini kullanılmaktadır. Loomis (1968) şu anda bilinen Pisagor teoreminin kanıtlarını toplamış ve kanıtları cebirsel, geometrik, kuaterniyonik ve dinamik ispatlar olmak üzere dört bölüme ayırarak tek bir kitapta yayımlamıştır. Loomis'in kitabından kırk yıl sonra Sparks (2008) Pisagor teoreminin bilinen bazı kanıtlarını toplayarak benzer bir proje yürütmüştür. Nelsen (2000; 2015) Pisagor teoreminin farklı sözsüz ispatlarını Şekil 6’daki gibi vermiştir.

The Pythagorean Theorem VII



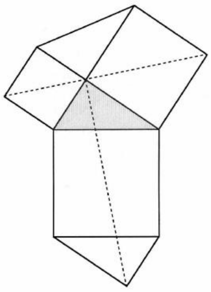
—Annairizi of Arabia (circa A.D. 900)

The Pythagorean Theorem VIII



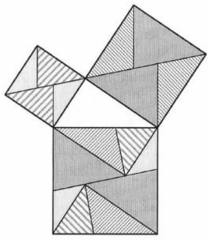
—Liu Hui (3rd century A.D.)

The Pythagorean Theorem IX



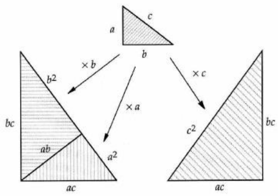
—Leonardo da Vinci (1452-1519)

The Pythagorean Theorem X



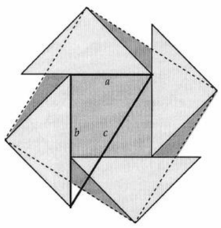
—J. E. Böttcher

The Pythagorean Theorem XI



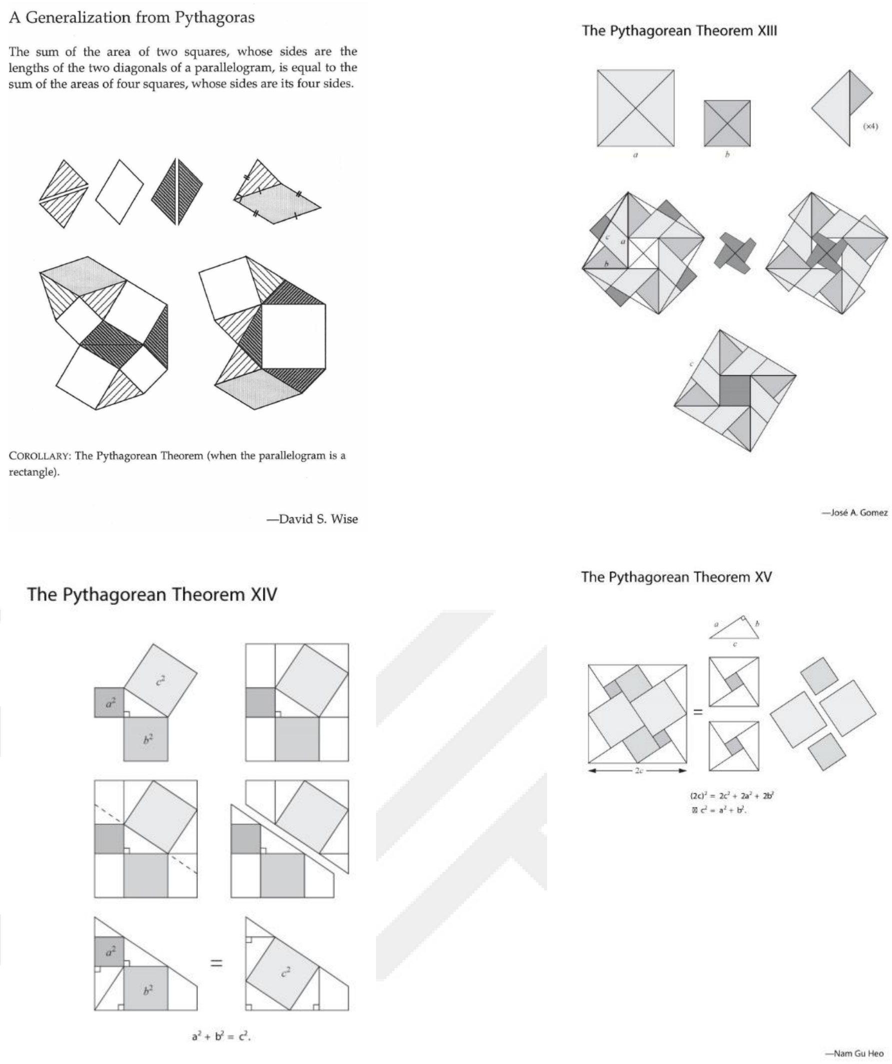
—Frank Burk

The Pythagorean Theorem XII



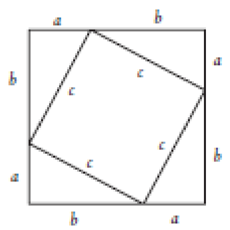
$$a^2 + b^2 = c^2$$

—Poo-sung Park



Şekil 6. Pisagor teoreminin sözsüz ispatları

Şekil 6'dan görüldüğü gibi bu ispatlar görsel olarak birbirlerinden farklıdır. Giaquinto (2007) geometrik ve cebirsel düşünme ile ilgili tartışmasına örnek olarak Pisagor teoreminin ispatını göstermiş ve bu tartışmanın Şekil 7 ile başladığını ifade etmiştir.

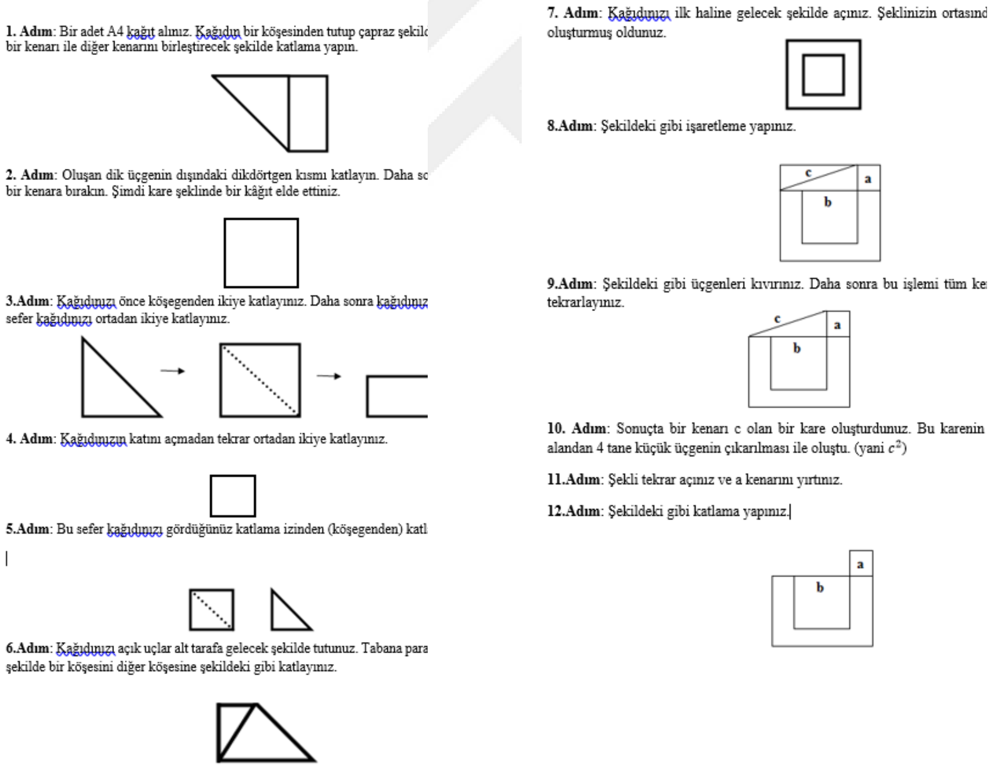


Şekil 7. Pisagor teroeminin ispatı

Giaquinto'ya (2007) göre büyük karenin alanının hem $(a+b)^2$ hem de $2ab+c^2$ olduğunu görmenin kolay olduğunu ve bu nedenle de $(a+b)^2 = 2ab+c^2$ denklemine "geometrik olarak" ulaşılabileceğini daha sonra cebirsel olarak ilerlenerek $a^2+2ab+b^2 = 2ab+c^2$ olduğundan $a^2+b^2=c^2$ elde edilebileceğini, sonra tekrar görsele bakılıp son bir "geometrik" adım atılarak "dik açılı bir üçgenin hipotenüsünün karesi diğer iki tarafının karelerinin toplamına eşit." olduğu ifade edileceğini belirtmiştir.

2.5.1.1. Origami ile Pisagor Teoreminin İspatı

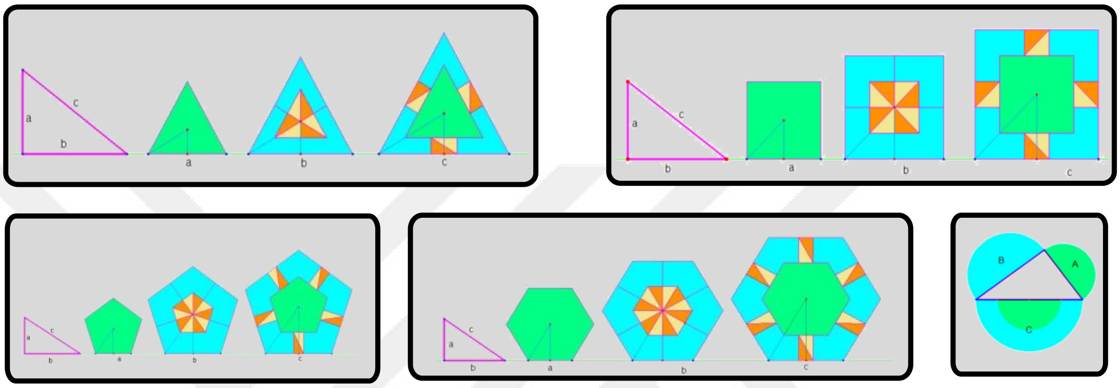
Gelişen (2016) tarafından yapılan çalışmada Pisagor teoreminin origami yardımı ile nasıl elde edilebileceğinin adımları aşağıdaki gibi verilmiştir.



Şekil 8. Origami ile Pisagor teoreminin ispatı (Gelişen, 2016, s. 149, 150)

2.5.1.2. Cabri II Plus Programı ile Pisagor İspatları

Aslaner ve İlhan (2018) tarafından Cabri II Plus programında dik üçgenin inşası yapıldıktan sonra dik üçgenin kenarları üzerine çizilecek diğer düzgün çokgenler için Pisagor teoremi ifade ve ispat edilmeye çalışılmıştır. Bu ispatlar sırasıyla Eşkenar üçgenler için Pisagor teoremi, Kare için Pisagor teoremi, Düzgün Beşgenler için Pisagor teoremi, Düzgün Altıgenler için Pisagor teoremi ve Çember İçin Pisagor Bağıntısı (Şekil 9) şeklinde verilmiştir.



Şekil 9. Sırasıyla eşkenar üçgen, kare, düzgün beşgen, düzgün altıgen, çember için Pisagor teoremi

Benzer şekilde Štrausová ve Hašek (2012) görsel ispatları dinamik bilgisayar yazılımlarını kullanarak yer vermiştir. Çalışmalarında yer alan sözsüz ispatların öğrenciler için daha çok ilgi çekici ve kabul edilebilir olduğunu belirtmişlerdir. Sözsüz ispatların sınıflarda kullanımıyla, öğrencilerin öğrenme sürecinde aktif olacaklarını, aktif ilişkilendirme yapabileceklerini, tartışma yeteneklerinin gelişeceğini ve edindikleri bilgileri uygulama yeteneği kazanabileceklerini ifade etmişlerdir. Çalışmada ispatın keşfetme (*discovery*), inanma (*conviction*) ve doğrulama (*verification*) fonksiyonunu karşılayan dinamik sözsüz ispat örnekleri verilmiş ve kitaplarda yer alan cebirsel ispatlar, dinamik olan ve dinamik olmayan sözsüz ispatlar karşılaştırılarak iyi bir ispat öğretimi için ispat çeşitliliğinden faydalanılması tavsiye edilmiştir.

2.6. Öğretim Programında Pisagor Teoremi

Geometri öğretiminin matematik öğretimi gibi birikimli olması, tarihinin araştırılması hatta öğrenenlere önemli görülen bilim insanları hakkında bilgi verilmesini gerektirmektedir. Nitekim Millî Eğitim Bakanlığı (MEB) 2005 yılında yapmış olduğu değişikliklerle ilköğretim ve lise öğretim programlarında ünlü bilim adamları hakkında kısa bilgilere yer verilmiş ve bu bilim adamlarının teoremleri öğretilirken kişilerle ilgili önemli bilgilere ve ispatlara değinmenin önemine vurgu yapmıştır (Aslaner& İlhan, 2018). 2013 yılı itibariyle, Millî Eğitim Bakanlığı (MEB, 2013) dokuzuncu sınıf matematik müfredatına Pisagor teoremi kanıtının eklenmesini zorunlu kılmıştır (Güner, 2018). 2018 yılında yayımlanan matematik dersi öğretim programında (1-8. Sınıflar) Pisagor teoremi ile ilgili 8. Sınıfta bir kazanım bulunmaktadır.

M.8.3.1.5. Pisagor bağıntısını oluşturur, ilgili problemleri çözer.

a) *Pisagor bağıntısının gerçek hayat uygulamalarına yönelik çalışmalara yer verilir.*
b) *Koordinat düzlemi üzerinde verilen iki nokta arasındaki uzaklığı Pisagor bağıntısını kullanarak bulma çalışmalarına yer verilir. İki nokta arasındaki uzaklık formülü verilmez.*
c) *Kenar uzunlukları verilen bir üçgenin dik üçgen olup olmadığına Pisagor bağıntısını kullanarak karar vermeye yönelik çalışmalar yapılır.*

2018 yılında yayımlanan ortaöğretim matematik dersi öğretim programında (9-12. Sınıflar) Pisagor teoremi ile ilgili 9. ve 11. Sınıfta bir kazanım bulunmaktadır.

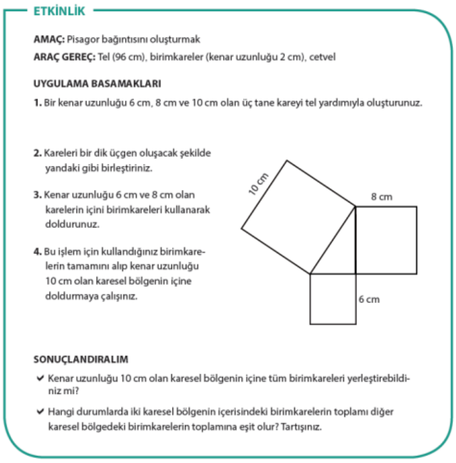
9.4.4.1. Dik üçgende Pisagor teoremini elde ederek problemler çözer.

a) *Teorem elde edilirken model çeşitliliğine yer verilir.*
b) *Gerçek hayat problemlerine yer verilir.*
c) *Pythagoras'ın çalışmalarına yer verilir.*

11.1.2.2. Kosinüs teoremiyle ilgili problemler çözer.

a) *Kosinüs teoremi, Pisagor teoreminden yararlanılarak elde edilir.*
b) *Gerçek hayat problemlerine yer verilir.*

Öğretim programlarındaki kazanımlar doğrultusunda ders kitaplarında Pisagor teoreminin etkinlik örneklerine Şekil10, 11, 12 ve 13'de yer verilmiştir.



ETKİNLİK

AMAÇ: Pisagor bağıntısını oluşturmak

ARAÇ GEREÇ: Tel (96 cm), birimkareler (kenar uzunluğu 2 cm), cetvel

UYGULAMA BASAMAKLARI

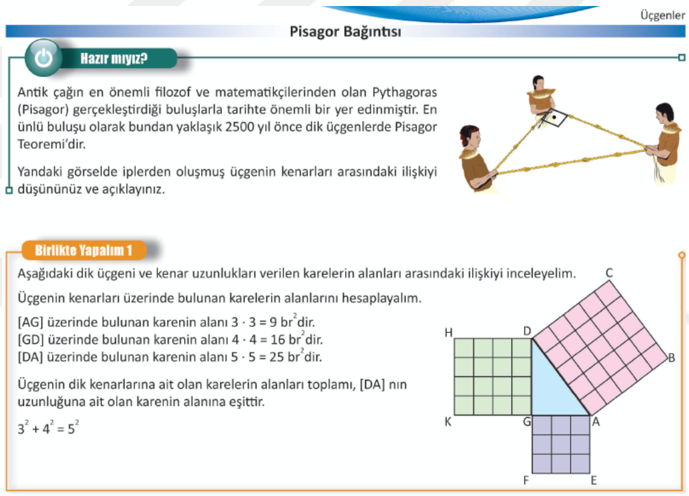
1. Bir kenar uzunluğu 6 cm, 8 cm ve 10 cm olan üç tane kareyi tel yardımıyla oluşturunuz.
2. Kareleri bir dik üçgen oluşacak şekilde yandaki gibi birleştiriniz.
3. Kenar uzunluğu 6 cm ve 8 cm olan karelerin içini birimkareleri kullanarak doldurunuz.
4. Bu işlem için kullandığınız birimkarelerin tamamını alıp kenar uzunluğu 10 cm olan karesel bölgenin içine doldurmaya çalışınız.

SONUÇLANDIRALIM

✔ Kenar uzunluğu 10 cm olan karesel bölgenin içine tüm birimkareleri yerleştirebildiniz mi?

✔ Hangi durumlarda iki karesel bölgenin içerisindeki birimkarelerin toplamı diğer karesel bölgedeki birimkarelerin toplamına eşit olur? Tartışınız.

Şekil 10. 8. Sınıf matematik kitabında etkinlik örneği (Çetin, Aksakal, Ertürk, Şay & Tığlı, 2019, s. 217).



Üçgenler

Pisagor Bağıntısı

Hazır mıyız?

Antik çağın en önemli filozof ve matematikçilerinden olan Pythagoras (Pisagor) gerçekleştirdiği buluşlarla tarihte önemli bir yer edinmiştir. En ünlü buluşu olarak bundan yaklaşık 2500 yıl önce dik üçgenlerde Pisagor Teoremi'dir.

Yandaki görselde iplerden oluşmuş üçgenin kenarları arasındaki ilişkiyi düşününüz ve açıklayınız.

Birlikte Yapalım 1

Aşağıdaki dik üçgeni ve kenar uzunlukları verilen karelerin alanları arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

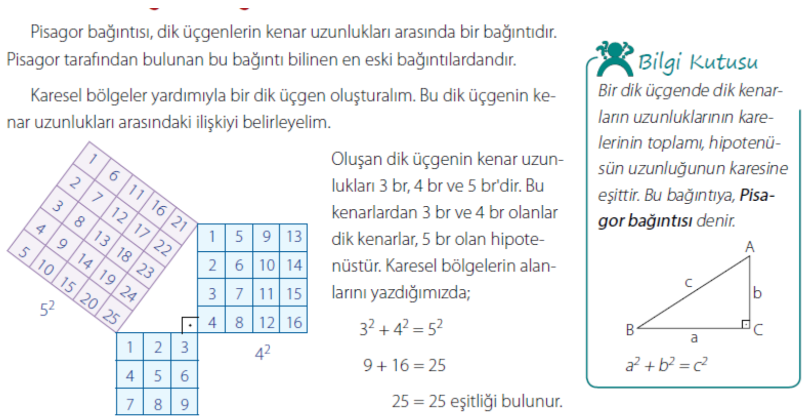
Üçgenin kenarları üzerinde bulunan karelerin alanlarını hesaplayalım.

[AG] üzerinde bulunan karenin alanı 3 · 3 = 9 br²dir.
[GD] üzerinde bulunan karenin alanı 4 · 4 = 16 br²dir.
[DA] üzerinde bulunan karenin alanı 5 · 5 = 25 br²dir.

Üçgenin dik kenarlarına ait olan karelerin alanları toplamı, [DA] nın uzunluğuna ait olan karenin alanına eşittir.

$3^2 + 4^2 = 5^2$

Şekil 11. 8. Sınıf matematik kitabında etkinlik örneği (Böge & Akıllı, 2019, s. 165)



Pisagor bağıntısı, dik üçgenlerin kenar uzunlukları arasında bir bağıntıdır. Pisagor tarafından bulunan bu bağıntı bilinen en eski bağıntılardandır.

Karesel bölgeler yardımıyla bir dik üçgen oluşturalım. Bu dik üçgenin kenar uzunlukları arasındaki ilişkiyi belirleyelim.

Oluşan dik üçgenin kenar uzunlukları 3 br, 4 br ve 5 br'dir. Bu kenarlardan 3 br ve 4 br olanlar dik kenarlar, 5 br olan hipotenüstür. Karesel bölgelerin alanlarını yazdığımızda;

$3^2 + 4^2 = 5^2$

$9 + 16 = 25$

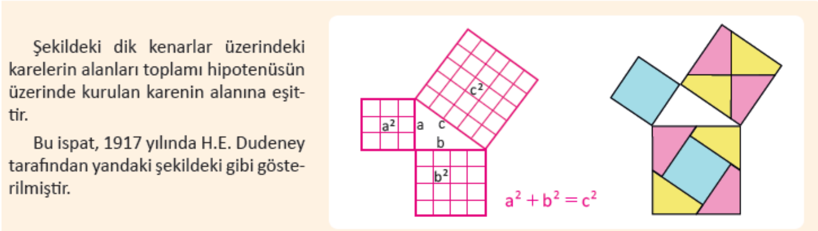
$25 = 25$ eşitliği bulunur.

Bilgi Kutusu

Bir dik üçgende dik kenarların uzunluklarının karelerinin toplamı, hipotenüsün uzunluğunun karesine eşittir. Bu bağıntıya, ***Pisagor bağıntısı*** *denir.*

$a^2 + b^2 = c^2$

Şekil 12. 8. Sınıf matematik kitabında etkinlik örneği (Serfiçeli & Atmaz, 2019, s. 231)



Şekil 13. 9. Sınıf matematik kitabında etkinlik örneği (Uçak, Emir, Uçkun Kelek, Kutlu & Kahraman, 2019, s. 313)

Verilen etkinlikler incelendiğinde aynı görsel ile birlikte etkinlikler verildiği görülmektedir.

2.7. İlgili Çalışmalar

Bu kısımda ilgili çalışmalar iki alt başlık altında ele alınmıştır. Bunlardan ilki sözsüz ispat, ikincisi Pisagor teoremi ile ilgili yapılan çalışmalar şeklindedir. Her iki alt başlık verilirken yurt içi ve yurt dışında yapılan çalışmalar şeklinde verilmiştir.

2.7.1. Sözsüz İspatlarla İlgili Yapılan Çalışmalar

Çok fazla sözsüz ispat örneği bulunmasına rağmen sözsüz ispatların öğretimi, ispatlama becerisine yönelik etkileri ve matematik öğretiminde yeri ile ilgili çok fazla çalışma olmadığı görülmektedir. Özellikle yurt içinde sözsüz ispatla ilgili çalışma sayısı oldukça azdır.

2.7.1.1. Yurt İçinde Yapılan Çalışmalar

Mancoğlu (2019) tarafından yapılan araştırmanın amacı matematiksel teoremlerin ispatlarının görselleştirilme durumlarını incelemektir. Bunun için, katılımcıların matematiksel teoremlerin ispatlarını inceleyebilecekleri uygun ortamlar içinde görselleştirme durumları ve nasıl resimler kullandıkları araştırılmıştır. Nitel olan bu çalışma 2017- 2018 öğretim yılında bir devlet üniversitesinin ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde ikinci ve üçüncü sınıfında öğrenim gören dört matematik öğretmeni adayı ile yürütülmüştür. Araştırmada kullanılan matematiksel teoremler soyut matematik ve analiz dersi içeriklerinden seçilmiştir. Veri toplama aracı olarak yarı yapılandırılmış görüşme ve doküman incelemesi teknikleri kullanılmıştır. Görüşmelerde matematiksel teoremlerin ayrı olarak yer aldığı çalışma kâğıtları kullanılmıştır. Katılımcılardan çalışma kâğıtlarındaki teoremlerin ispatlarını görselleştirdikleri süre içinde sesli düşünmeleri istenmiş ve görüşmeler esnasında video ve ses kaydı alınmıştır. Veriler gömülü teorinin veri çözümleme teknikleri kullanılarak analiz edilmiştir. Veri analizleri sonucunda katılımcıların ispatlarda kullandığı resimlerin, çoğunlukla teoremin içeriğindeki kavramların zihinlerinde oluşturduğu resimleri betimleyen görüntüler olduğu, net bir resim çizemeyen katılımcının ispatlardan emin olmadıkları görülmüştür. Katılımcıların, verilen teoreme göre görselleştirme sürecinin başlama durumunda farklılık olduğu, oluşturulan resimlerin büyük çoğunluğun matematiksel resimler olduğu fakat birbirinden farklı ispat resimleri oluşturdukları görülmüştür. Ayrıca kimi adayların teoremin bütününü temel alarak ispatı görselleştirdiği kimi öğrencilerin de teorem içerisinde yer alan kavramlardan yola çıkarak ispatı görselleştirdikleri ve ispata göre strateji belirledikleri elde edilmiştir.

Lise öğrencilerinin sözsüz ispat yapabilme süreçlerini incelemek, sözsüz ispatların matematiksel ispat becerileri üzerine etkisini belirlemek ve sözsüz ispatlarla ilgili görüşlerini ortaya çıkarmak amacı ile Polat (2018) tarafından yapılan çalışmada 9. sınıfta öğrenimlerine devam eden 25 öğrenci ile yürütülen çalışmada karma araştırma yöntemleri kullanılmıştır. Veriler uygulama öncesi öğrencilerin ispat becerilerini belirleyebilmek için araştırmacı tarafından hazırlanmış ispat beceri testi ve uygulama sonrası ispat beceri testi, dört öğrenci ile yapılan sözsüz ispat etkinlikleri ile toplanmıştır. Nicel veriler t-testi ile nitel veriler ise içerik analiz tekniği ile analiz edilmiştir. Araştırmanın sonunda sözsüz ispatların, öğrenciye formüllerin nereden geldiğini anlama, formüllerin doğruluğuna ilişkin ikna olma, etkinliklerden keyif alma, matematiğin diğer kavramlarıyla ilişki kurma, daha önce öğrenmiş oldukları kuralları kullanma ve matematiksel kavramları anlama gibi imkânlar sağladığı görülmüştür. Elde edilen bulgular sözsüz ispatların ispat becerisi üzerinde olumlu etkisi olduğunu ve sözsüz ispatların sınıfta uygulanabilirliği açısından gerek öğretmen gerekse öğrenciler olumlu görüş bildirdiklerini göstermiştir.

Ülker (2018) tarafından sözsüz ispatların formel ispata geçişi kolaylaştıracak ve söz konusu didaktik boşluğu dolduracak bir araç olarak nasıl kullanılabileceğini incelemek amacıyla yapılan çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyi kullanılmıştır. Çalışmada 7. sınıf seviyesine uygun seçilen sözsüz ispatlar ve teorinin sunduğu etkinlik tasarımı yaklaşımında birer sözel problem durumu şeklinde öğretimleri planlanmıştır. Altı hafta süren uygulamaya 30 öğrenci katılmıştır. Her etkinliğe bir hafta yani yaklaşık iki ders saati ayrılmış ve uygulama toplamda altı hafta sürmüştür. Veriler teorinin belirlediği aşamalara göre hem tüm sınıfın çalışmasını hem de odak grubun çalışmasını yansıtacak şekilde analiz edilmiştir. Araştırmanın sonucu öğrencilerin ispatla ilişkili pek çok matematiksel süreci yaşadığını, alanlar arası ilişkilendirmeler gerçekleştirdiklerini ve yaşadıkları süreçlerde bir ilerleme kaydettiklerini göstermektedir.

9. sınıf matematik öğretim programındaki üçgenler konusunun öğretiminde origami ve sözsüz ispatlar yöntemlerinin kullanılması ile ilgili bir öğretim deneyinin gerçekleştirmek amacıyla Gelişen (2016) tarafından yapılan çalışmaya 31 öğrenci katılmıştır. Nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyi modeli seçilmiştir. Geliştirilen çalışma yaprakları kullanılarak öğrencilere ilk olarak problem çözme testi uygulanmış, test sonuçlarına göre istekli öğrencilerle daha sonra mülakatlar yapılmıştır. Çalışma sonunda elde edilen bulgular oluşturulan problemler ve alt problemler ışığında değerlendirilmiştir. Mülakatlardan elde edilen bilgiler doğrultusunda, öğrencilerin origami ve sözsüz ispatlar yöntemlerini zevkli ve öğretici buldukları ortaya çıkmıştır.

Şadan (2017) tarafından yapılan çalışmanın amacı, Fen Lisesi öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçlerini analiz etmek ve görsel ispatın matematik öğrenme sürecinde kullanımına yönelik örnek bir uygulama sunmaktır. Bir Fen Lisesi'nin 11. sınıfında öğrenim gören 6 öğrenci ile yürütülen çalışmada bir nitel araştırma yöntemi olan öğretim deneyi kullanılmıştır. Araştırma süreci, üç aşamada yürütülmüştür. İlk aşamada, öğretim bölümünün daha verimli planlanması için, öğrencilerin görsel ispata dair algıları (örneklerini anlayıp açıklayabilme) incelenmiştir. İkinci aşamada, görsel ispata dair sınıf tartışmalarından ve çeşitli görsel ispat etkinliklerinden oluşan iki öğretim bölümü gerçekleştirilmiş süreç sonunda öğrenciler verilen matematiksel ifadelere yönelik görsel ispatlar geliştirmişler ve geliştirdikleri görsel ispatlara yönelik klinik görüşmeler yapılmıştır. Üçüncü aşamada ise öğretim süreci değerlendirilerek, öğrencilerin görsel ispata ve sürece dair görüşleri alınmıştır. Verilerin analizi, geriye dönük *(retrospective)* ve ileriye dönük *(prospective)* analiz olmak üzere iki şekilde yapılmıştır. Yapılan her uygulama sonrası ileriye dönük analizler yapılmış, bir sonraki uygulamaya bu analizler doğrultusunda devam etmiştir. Öğrencilerin geliştirdikleri görsel ispatlar ve bu süreci deneyimleme şekilleri ortaya konmaya çalışılmıştır. Görsel ispat geliştirme sürecinde yaptıkları hatalar ve karşılaştıkları zorluklar belirlenmiştir. Yapılan klinik görüşmelerde bu hatalar ve zorluklar giderilmeye çalışılmıştır. Süreç sonunda öğrenciler, görsel ispat geliştirme sürecini yararlı bulduklarını ve süreçten keyif aldıkları belirtmişler, görsel ispatların matematik sınıflarında kullanılması gerektiğini ifade etmişlerdir.

Güler ve Ekmekçi (2016) öğretmen adaylarına çeşitli sözsüz ispatların örneklerini verdikleri ve verilen sözsüz ispatların doğruluğuna ilişkin sorular sordukları çalışmalarında, verilen tek sayıların toplamı ile ilgili sözsüz ispatın doğru olduğunu düşünen öğretmen adayları, ardışık tek sayılar ile birim kareler arasındaki ilişkiyi kurabilmiş ve oluşan geometrik şeklin alanının bu toplamın kuralı olduğunu belirterek cevaplarını gerekçelendirebilmişlerdir. Ancak bir öğretmen adayı bu sözsüz ispatın yanlış olduğunu düşünmüş ve gerekçe olarak da verilen şeklin sadece şekildeki sayıların toplamını örneklediğini vurgulamıştır.

Fen lisesinde okuyan üç öğrenci ile yapmış oldukları nitel çalışmada Uğurel vd. (2016) öğrencilerle sözsüz ispatlarla ilgili deneyim yaşattıktan belli bir süre sonra öğrencilerden kendi sözsüz ispatlarını oluşturmalarını istemişler ve bu doğrultuda "temel modifikasyon, ileri modifikasyon ve tümevarımsal temel çizim" olmak üzere üç ardışık kategori açığa çıkarmışlardır. Bu kategorilerin sözsüz ispat analizlerinde kullanılabileceğini belirtmişlerdir. Ayrıca öğrenciler sözsüz ispatları "eğlenceli, zevkli, pratik, entelektüel, orijinal, şık" bulduklarını ifade ederek sözsüz ispatlarla ilgili olumlu görüş bildirmişlerdir. Geometri ve matematiği birlikte kullandıkları fark eden öğrenciler problem çözme, yaratıcılık ve görselleştirme becerilerinin geliştiğini ve sözsüz ispatların geniş uygulama alanlarına sahip olduğunu gördüklerini belirtmişlerdir.

Ortaöğretim matematik öğretmenliği 5. Sınıfta okuyan öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma sürecinde yaşadıkları zorlukları ortaya çıkarmak amacıyla Demircioğlu ve Polat (2016) tarafından yapılan durum çalışmasında öğretmen adaylarına açık uçlu sorular yöneltilerek bu süreçte yaşadıkları zorlukları ortaya çıkarmak için görüşleri alınmıştır. Öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma sürecinde en fazla zorlandıkları yerlerin verilen şekilleri anlayamama, açıklama olmaması, sözsüz ispat ile cebirsel ispat arasında ilişki kuramama, alan bilgisi eksikliği, kaynak sıkıntısı olduğu belirtmiştir. Ayrıca sözsüz ispatların, zorlayıcı fakat öğrencilerin uzamsal görselleştirme ve uzamsal muhakeme becerini geliştirilebildiği sonucuna varılmıştır.

Sözsüz ispat ile ilgili deneyim yaşamış olan ortaöğretim matematik öğretmenliği son sınıfta okuyan öğretmen adaylarıyla yaptıkları çalışmada Demircioğlu ve Polat (2015), öğretmen adaylarından sözsüz ispatın etkili olduğu ve olmadığı yerlere ilişkin görüşlerini almışlardır. Öğretmen adayları, sözsüz ispatlarla bilgilerin kalıcı olduğunu, matematiksel formül/ifadelerin daha iyi kavrandığını, konular arası ilişki kurulduğunu, yeni bilgiler öğrendiklerini; sözsüz ispatların ifadeleri somutlaştırdığını, merak duygusu uyandırdığını, güven kazandırdığını, zevkli olduğunu, verimli olduğunu ve ileride sözsüz ispatları öğretim yöntemi olarak da kullanabileceklerini ifade etmişlerdir.

Uğurel, Moralı & Karahan (2011) matematikte yetenekli olan ortaöğretim öğrencilerinin sözsüz ispatlarla bir deneyim yaşamaların sağlamışlardır. Süreç sonrasında ürettikleri sözsüz ispat örneklerini tartışmışlardır. Araştırmaya katılan öğrencilerin, ispat yapmak için farklı bakış açıları gösterdikleri, özgün sözsüz ispatlar geliştirmede, yaptıkları ispatları görsel olarak sunmada başarılı oldukları gözlenmiştir.

Tekin ve Konyalıoğlu (2010) çalışmalarında toplam ve fark formüllerinin görsel ispat ve cebirsel ispatları sırasıyla vererek görsel ispatlarla ispat sürecinde yapılan çizimlerin formüllerin anlamlandırılmasına, formüllerin özünü anlamaya ve kalıcı öğrenmeye katkı sağlayacağına değinmiştir. Ayrıca çalışmada formüllerdeki ilişkilerin cebirsel ispatlarla yeterince görülemeyeceği ifade edilmiştir.

2.7.1.2. Yurt Dışında Yapılan Çalışmalar

Yassin (2013) diziler ve seriler ünitesinde sözsüz ispatları kullanmanın öğrenci başarısına etkisini incelemiş ve 89 öğrenciyi iki gruba ayırarak deneysel bir çalışma yürütmüştür. Çalışmanın neticesinde, sözsüz ispatlar kullanılarak dersin işlendiği grubun başarısı ile diğer grubun başarısı arasında anlamlı bir fark çıktığını belirtmiştir.

Karrass (2012) öğretmen yetiştirme programının son yılında olan gönüllü 12 öğretmen adayına lise müfredatında yer alan belli teoremlerin görsel ispatın vermiş ve görsellerdeki teoremleri ispatlamaları ve akıl yürüterek teoremleri açıklamalarını istenmiştir. Daha sonra bu sonuçları Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine göre analiz etmiştir. Yapılan analizlere göre sözsüz ispat bulma sürecinin "görsel ispatın ne olduğunu fark etme, ispat planı tasarlama ve bir çözüm geliştirme" olmak üzere üç aşamadan oluştuğunu ortaya çıkarmıştır. Bu çalışmayla matematik öğretmeni adaylarının geometri bilgisi ve görsel akıl yürütme arasındaki ilişkiyi açıklanmaya çalışılmıştır.

Bell (2011) sınıfında sözsüz ispatlara yer vermiş, öğrencilere web sitelerinde mevcut olan interaktif ya da interaktif olmayan sözsüz ispatları kullanarak tartışma ortamı oluşturmuş ve öğrencilerin yaptıklarını analiz etmiştir. Çalışmada formel ispatın sözsüz ispatla beraber gösterildiği zaman öğrencinin ispat yeteneğinin gelişmesiyle beraber matematiksel bir problemi nasıl daha iyi muhakeme edebileceğini öğrendiği belirtilmiştir. Öğrencilerin sözsüz ispatları tartışmasını sağlayarak, matematiksel ifadelerin nasıl ispatlandığı hakkında kendi fikirlerini geliştirmelerine fırsatlar sunmuştur. Böylelikle de öğrencilerin ispat sürecini anlamaya çalışmıştır. Sözsüz ispatların öğrencinin ispat yapma yeteneğini geliştirdiğini ve matematiksel bir problemi nasıl daha iyi muhakeme edeceğini öğrettiğini belirtmiştir. Öğrenciden bir şeklin açıklanmasının istenmesi, öğrencinin özel parçaları kullanmasını gerektirdiğinden muhakeme yeteneğini de geliştireceğini belirtmiştir. Bir matematiksel ifadenin sözsüz ispatının öğrenciye verilmesinin öğrencinin ispat yapma yeteneğini geliştirmekle kalmayıp aynı zamanda öğrencinin bir matematiksel ifadenin görsel oluşturmasını sağlamanın öğrencinin akıl yürütme yeteneğine olumlu yönde katkı sağladığını ifade etmiştir.

Alsina ve Nelsen (2010) tarafından yapılan çalışmada sözsüz ispatların ne olduğunu açıklamışlar ve çeşitli sözsüz ispatlara yer vermişlerdir. Çalışmada tümevarım yöntemiyle ispatlanabilecek ancak görsel ispatla daha açıklayıcı olduğu düşünülen ve iki sayma prensibi olan Fubini ve Cantor prensibine göre sözsüz ispat örnekleri kullanılmıştır.

Bayer (2009) sözsüz ispatların üstün yönlerini üçgensel sayıların, Fibonacci sayılarının kullanıldığı teoremlerin ve Pisagor teoreminin sözsüz ispatlarını vererek göstermeye çalışmıştır. Görsel ispatların geleneksel ispatlardan daha basit olduğunu ve kesin bir sonucun neden doğru olduğunu açıklamaya yardımcı olduğunu belirtmiştir. Tümevarım ile yapılan bir ispatta formülün hatırlanması gerekmekte fakat sözsüz ispatlarda bu gerekliliğin olmamasından dolayı geleneksel ispatlara göre üstün olarak görüldüğünü belirtmiştir.

Bardelle (2009) ikinci ve üçüncü sınıfta öğrenimlerine devam eden matematik öğrencilerine, sözsüz ispat ve formel ispatları sunarak, her iki ispatta öğrencilerin yaşamış oldukları süreci karşılaştırmıştır. Araştırmada Pisagor teoremi ve geometrik serilerle ilgili sözsüz ispat öğrencilere sunulmuştur. Pisagor teoremi görsellikle daha ilgili ve aşina oldukları bir ispat olduğu için Pisagor teoreminin sözsüz ispatında öğrenciler fazla zorlanmamıştır. Araştırmanın sonucunda da öğrenciler bu tür ispatları zor bulduklarını ifade etmişlerdir. Özellikle anlamlı adımlar dizisinden oluşan bir ispatı durgun bir obje olarak çizmek öğrencilere zor gelmiştir.

Gierdien (2007) çalışmasında derslerde kullanılabilecek sözsüz ispatlara yer vermiştir. Bu çalışmada özellikle sözsüz ispatların ispatları açıklayıcı ispata çevirmesinden ve böylelikle de bilgi transferinin gerçekleşeceğinden söz edilmiştir. Ayrıca bu çalışmada sözsüz ispatlarla, örneğin 1'den n'e kadar tam sayıların toplamının formülündeki n'in nereden geldiği ile ilgili öğrencinin merakını gidermesi ve "görünmeyeni görmesinin" önemli olduğu vurgulanmıştır.

Jamnik vd. (1997) ise bu duruma karşılık diyagramatik muhakeme ve tümdengelim (Diagramatic Reasoning and Deduction) diye isimlendirdikleri DIAMOND sistemiyle bilgisayarlar tarafından yapılan bir genelleştirme mekanizması bulmaya çalışmışlardır. Sistem otomatik olarak tüm n'ler için genel ispatı örneklerden genelleyebilmektedir.

2.8. Pisagor Teoremi ile İlgili Araştırmalar

Pisagor teoreminin ispatlarını ve/veya genellemelerinin konu alındığı araştırma makaleleri ve kitaplar halen yayımlanmaya devam etmektedir. Literatür incelendiğinde matematik öğretmenlerinin Pisagor teoreminin ispatına nasıl öğretebileceğini özetleyen makaleler, Pisagor teoreminin farklı ülkelerde nasıl öğretildiğine ilişkin araştırmalar (Crawford, 2001; Hugener, vd., 2009) olduğu görülmektedir.

8. Sınıf öğrencilerinin Pisagor bağıntısı ile ilgili görsel, sembolik ve cebirsel (sözel) temsilleri bulunduran matematiksel problemleri çözme becerilerini ortaya koymak amacı ile Yıldız (2019) tarafından yapılan çalışma ilişkisel tarama modeli kullanılarak 2017- 2018 eğitim- öğretim yılında farklı hizmet bölgelerinden bulunan üç farklı devlet okulunun 8. sınıflarında öğrenim gören 102 öğrenci ile yürütülmüştür. Veriler Pisagor bağıntısı ile ilgili hazırlanan 5 görsel, 5 sembolik ve 5 gerçek yaşam durumları (cebirsel-sözel) olmak üzere toplam 15 sorudan oluşan açık uçlu başarı testi ve yarı yapılandırılmış mülakat soruları ile toplanmıştır. Araştırmaya katılan öğrencilere her gösterim biçimi için 20 dakika verilerek problemleri çözmeleri istenmiştir. Uygulama esnasında öğrencilere herhangi bir müdahalede bulunulmamıştır. Uygulamadan sonra ise öğrencilerle bireysel görüşmeler yapılarak problemleri nasıl çözdükleri, çözerken yaşadıkları zorluklar ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Bireysel görüşme 20 öğrenciyle gerçekleştirilmiştir. Ayrıca verilen testlerde yarı yapılandırılmış mülakat yapılmıştır. Veriler betimsel analiz tekniği kullanılarak analiz edilmiştir. Araştırmanın bulguları, öğrencilerin sözel ve sembolik temsillere kıyasla görsel temsillerde daha başarılı olduklarını, bir temsilden diğerine geçişlerde büyük problemler yaşadıklarını, aynı verilerin farklı temsilleri arasındaki ilişkiyi görmekte zorlandıklarını, derste sıkça karşılaştıkları temsil türlerini kullanma eğiliminde olduklarını ve düşündüklerini yazılı olarak ifade etmekte zorlandıklarını göstermiştir.

Güner (2018) pedagojik formasyon sertifika programına katılan matematik bölümü mezunlarının, Pisagor teoremi ile ilgili hazırladıkları ders planlarını incelemiştir. Nitel araştırma yöntemlerinden doküman analizi kullanılarak kullanılmış ve veriler iki veri toplama aracı ile toplanmıştır. Birincisi, katılımcıların hazırladıkları ders planları, ikincisi ise katılımcıların ders planlarını teslim ettikleri ders saatinde cevaplandırdıkları bir anket formudur. Araştırmada kullanılan veriler 2014 – 2015 akademik yılının bahar döneminin on ikinci haftasında pedagojik formasyon sertifika programına kayıtlı matematik bölümü mezunlarının kayıtlı olduğu özel öğretim yöntemleri dersinde toplanmıştır. Katılımcılardan 18’inin (%42) hazırladıkları ders planlarında Pisagor teoreminin bir ispatını verdikleri görülmüştür.

Katılımcıların verdikleri ispatlar incelendiğinde üç farklı ispat türünün kullanıldığı tespit edilmiştir. Bunlar (i) görsel ispat, (ii) alan bilgisinin kullanıldığı cebirsel ispat ve (iii) üçgenlerin benzerliğinin kullanıldığı ispat türleri olarak adlandırılmıştır. İki katılımcı görsel ispat, dokuz katılımcı alan bilgisinin kullanıldığı cebirsel ispat ve yedi katılımcı da üçgenlerde benzerliği kullanarak Pisagor teoremini ispatlamayı seçmiştir. Kırk üç katılımcıdan 25'i (%58) ise hazırladıkları ders planlarında Pisagor teoreminin bir ispatına yer vermemişlerdir. Bu katılımcıların, ders planlarının toplanmasından sonra cevaplandırdıkları anket formuna yazdıkları incelendiğinde; ispatı vermek yerine daha fazla örnek çözmeye önem verenler ve ispatın öğrenciler için zor olduğunu düşündüğü için ispata yer vermeyenler olarak iki gruba ayrılabileceği görülmüştür.

Aslaner ve İlhan (2018) Cabri II Plus programı yardımıyla Pisagor teoremini daha önce dinamik geometri yazılımları kullanılmadan yapılan parçalanmalar (Birkhoff & Beatley, 2000; Frederickson, 2002) yöntemiyle yapılan ispatlarından farklı bir şekilde yeni bir parçalanma tekniği geliştirerek ispatlamıştır. Ek olarak bir düzgün dörtgen olan kare için eşkenar üçgen ve düzgün beşgen gibi düzgün çokgenler için de oluşturulan yeni ispat yönteminin doğru olduğu göstermişlerdir. Geometri öğretiminin temel ilkelerinden olan ölçünün korunumu (alanın korunumu) ilkesi, yani "düzlemde verilen bir geometrik şekil belirli özelliklere göre daha küçük parçalara ayrılıp bu parçaların birleştirilmesi ile aynı alana sahip farklı geometrik şekiller oluşturulabilir" ilkesine dayanarak doğrudan ispat yöntemi kullanılmıştır. Bu teorem ile ilgili uygulamalardaki çizimler Cabri II Plus geometri programı ile gerçekleştirilmiştir.

Pisagor bağıntısının öğretimini hedefleyen adidaktik bir ortamın sınıf içi yaşantı süreçlerinin evreler bazında incelenmesi amacıyla Güneş ve Tapan Broutin (2017) tarafından yapılan çalışmada Didaktik Durumlar Teorisi tanıtılmış ve teoride önemli yer tutan adidaktik öğrenme ortamı ana hatlarıyla açıklanmıştır. Ayrıca 8.Sınıf 'Geometri' öğrenme alanı içerisinde olan "Pythagoras (Pisagor) bağıntısını oluşturur" kazanımının öğretimi ele alınmış ve Pisagor bağıntısının öğretimini için hazırlanan bir adidaktik bir ortamın sınıf içi yaşantı süreçlerinin evreler bazında incelenmiştir. Bu kapsamda, sekizinci sınıf öğrencilerinin, didaktik durumlar teorisinin temel bileşeni olan adidaktik ortamların evrelerine göre Pisagor bağıntısını yapılandırma süreçleri nasıl gerçekleşmektedir? sorusuna yanıt aranmıştır. Uygulama sürecinde öğrencilere Pisagor Bağıntısı buldurulmayı amaçlayan bir adidaktik ortam tasarlanıp uygulanmıştır. Çalışmada her öğrenciye 0,5 cm'lik kareli kâğıtlar dağıtılarak yeterli sayıda cetvel bulundurulmasına dikkat edilmiştir. Her öğrencinin kendi kâğıdına istediği kenar uzunluklarına sahip dik üçgenler çizmeleri gerektiği belirtilmiştir. Ortamda öncelikle öğrencilerden herhangi dik kenar uzunluklarına sahip bir dik üçgen çizmeleri istenmiştir. Bu aşamadan sonra dik üçgenin her kenarı üzerine kareler çizilerek, oluşan bu üç karenin her birinin alanları arasında bir bağıntı bulunması beklenmektedir. Bulunan alanların arasındaki ilişki sayesinde öğrencilerin dik kenarların üzerine oluşturulan karelerinin alanlarının toplamının hipotenüsün üzerine oluşturulan karenin alanına eşit olduğunu bulmalarını sağlayacağı düşünülmüştür. Böylece Pisagor bağıntısına ulaşılmış olacaklardır. Çalışma yaklaşık 25 dakika sürmüştür. Durum çalışması ile yürütülen çalışmada sınıf içi gözlem yapılmış ve ders video ile kayıt altına alınmıştır. Çalışma amaçlı örneklemeye dayalı ölçüt örneklemeye göre seçilen bir ortaokulun 8. sınıf öğrencileri ile (27 öğrenci) 2015 – 2016 eğitim-öğretim yılı güz döneminde gerçekleştirilmiştir. Verilerin analizinde betimsel analiz yöntemi kullanılmıştır. Araştırmanın sonucunda, öğrencilerin adidaktik durumların evrelerinden geçerek Pisagor bağıntısını oluşturabildikleri görülmüştür.

Matematik öğretiminde matematik tarihinin öneminden yola çıkılarak Baki ve Bütüner (2013) tarafından yapılan çalışmada ilköğretim 6, 7 ve 8. sınıf matematik ders kitaplarında matematik tarihine hangi yollarla ve niçin yer verildiği incelenmiş ve Pisagor teoreminin öğretimine yönelik bir modül hazırlanmıştır. İlköğretim sekizinci sınıf kitaplarında Pisagor teoremi konusu içerisinde, tarihsel içerik olarak sadece Pisagor'un hayatı ile ilgili kısa bir bilgiye ve Pisagor'un resmine yer verildiğini ifade etmişilerdir. Pisagor teoremi ile Pisagor'dan yıllar önce Eski Mısırda ve Mezopotamya'da uğraşıldığı bilinmektedir. Matematik tarihinin aydınlatma ve modül yaklaşımlarına dayalı kullanımları için hazırlanan modüllerden ilkinde Ek 1'de verilen modül, farklı toplumlar tarafından Pisagor teoreminin ispatının farklı şekillerde yapıldığını, Pisagor teoremi ile ilgili çeşitli problemlerin farklı yollarla çözüldüğünü, matematiğin çok kültürlü yapısını, insan emeğinin bir ürünü olduğunu, farklı çözüm yollarının olabileceğini ortaya koyması açısından matematik tarihinin amaç olarak kullanımına hizmet etmektedir. Ayrıca öğrencilerin

Hsuan-Thu Diyagramını, kareli kâğıtlardan oluşturarak Pisagor bağıntısının kuralını keşfetmeleri, Eski Mısırda yapıldığı gibi, düğümlenmiş bir ip üzerinde Pisagor bağıntısını göstermeleri, öğrencilerin tutum ve başarılarını olumlu yönde etkileyebilir. Bu durum ise matematik tarihinin araç olarak kullanımını yansıtmaktadır.

Topkaya (2013) yapılan çalışmada matematikte ispat tekniklerinin üzerinde çalışılmıştır. İspat teknikleri doğrudan ispat, ters durum ispatı, olmayana ergi (çelişki) yöntemiyle ispat, tümevarım yöntemiyle ispat olmak üzere dört ana başlık altında anlatılmıştır. Bu ispat teknikleri kullanılarak bazı ispatlar verilmiştir. Sonra ispat teknikleri yardımıyla bazı özel sayıların (Euler sayısı, Pi sayısı, Altın oran) irrasyonel oldukları ispat edilmiştir. İspat tekniklerinin yardımıyla Fibonacci sayısının nereden çıktığı, elde edilişi ve Binet formülünün tümevarım yöntemiyle ispatı verilmiştir. Sonra Altın oran ve Pascal üçgeninin Fibonacci sayısı ile ilişkisi verilmiştir. Son olarak ispat tekniklerini kullanmadan, geometri yardımıyla Pisagor teoreminin ispatına ulaşılmıştır. Pisagor teoreminin ispatı, çeşitli geometrik şekiller üzerinde gösterilerek verilmiştir. Bu çalışmada 19 farklı ispatı verilmiştir.

Flores (1993) tarafından yapılan çalışmada Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine göre Pisagor teoreminin ispatları verilmiştir. Amaçları ise Pisagor teoremi için bazı hazırlayıcı faaliyetleri işaret etmek (seviye 0), Pisagor teoreminin Öklid tarafından verilen ispatının üç farklı versiyonunu (Van Hiele seviye 1,2 ve 3), Öklid geometrisi bağlamında teoremin bazı genellemelerini verme (seviye 3) ve son olarak diğer geometrik sistemlerde Pisagor ilişkilerden bahsetmek (seviye 4) olarak ifade etmiştir.

BÖLÜM III
YÖNTEM

3.1. Araştırma Modeli

Araştırmada nitel araştırma yöntemi kullanılmıştır. Nitel yöntemler metin ve imgesel verilere dayanır ve veri analizinde özgün adımlara sahiptir. İnsan davranışı ancak esnek ve bütüncül bir yaklaşımla araştırılabilir ve bu yaklaşımda araştırmaya katılan bireylerin görüşleri ve deneyimleri büyük önem taşımaktadır (Yıldırım & Şimşek, 2013, s. 41). Bu nedenle bu çalışmada bireylerin görüşlerine ve deneyimlerine başvurulduğundan dolayı nitel araştırma yöntemi tercih edilmiştir. Araştırma deseni durum çalışmasıdır.

3.2. Çalışma Grubu

Çalışma iki aşamada yürütülmüştür. Bu nedenle de iki çalışma grubu bulunmaktadır. İlk aşamadaki çalışma grubu kolay ulaşılabilir örnekleme yöntemi ile gönüllü olan 20 matematik öğretmeninden oluşmaktadır. Daha sonra bu matematik öğretmenlerinden gönüllü olan 7 matematik öğretmeni ile ikinci aşama gerçekleştirilmiştir.

Çalışmaya katılan tüm öğretmenlere Ö1, Ö2, …, Ö20 şeklinde kodlama yapılmıştır. Ö1, Ö2, …, Ö7 kodlu öğretmenler hem birinci hem de ikinci aşamaya katılan öğretmenlerdir. Bu öğretmenlerle ilgili demografik bilgiler Tablo 1'de özetlenmiştir. Tablo 1'den de görüldüğü gibi çalışmaya katılan 20 öğretmenin 5'i Eğitim Fakültesi, 15'i Fen Fakültesi mezunudur. MEB'e bağlı okullarda çalışan bu öğretmenlerin görev süreleri 5 ile 30 yıl arasındadır. Çalışmaya katılan 20 öğretmenden 18'i lise kademesinde öğretmenlik yaparken ikisi ortaokul kademesinde öğretmenlik yapmaktadır. Bu iki matematik öğretmende ikinci aşamaya katılmışlardır.

Tablo 1. Çalışmaya katılan öğretmenlerin demografik bilgileri

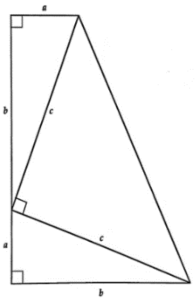
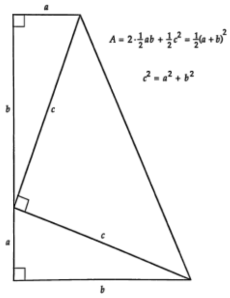
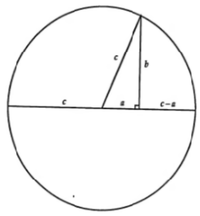
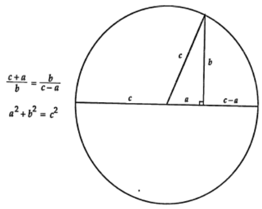
Aşama	Kod	Üniversite	Fakülte	Yıl	Kademe
1 ve 2.	Ö1	Ankara Üniversitesi	Fen	10	Lise
	Ö2	Ankara Üniversitesi	Fen	9	Lise
	Ö3	İstanbul Üniversitesi	Fen	7	Lise
	Ö4	Eskişehir Osmangazi Üniversitesi	Fen Edebiyat	14	5 yıl ortaokul 9 yıl lise
	Ö5	Anadolu Üniversitesi	Fen Edebiyat	21	Lise
	Ö6	Gazi üniversitesi	Eğitim	5	Ortaokul
	Ö7	Gazi üniversitesi	Eğitim	23	Lise
Yalnız 1.	Ö8	Anakara Üniversitesi	Fen	20	Lise
	Ö9	Ankara üniversitesi	Fen	24	Lise
	Ö10	19 Mayıs Üniversitesi	Fen	30	Lise
	Ö11	Gazi Üniversitesi	Eğitim	24	Lise
	Ö12	Gazi Üniversitesi	Fen Edebiyat	18	Lise
	Ö13	ODTÜ	Fen	24	Lise
	Ö14	Gazi Üniversitesi	Eğitim	9	Lise
	Ö15	Gazi Üniversitesi	Eğitim	20	Lise
	Ö16	Gazi Üniversitesi	Fen Edebiyat	26	Lise
	Ö17	Gazi Üniversitesi	Fen Edebiyat	24	Lise
	Ö18	Ankara Üniversitesi	Fen	9	Lise
	Ö19	Ankara Üniversitesi	Fen	15	Lise
	Ö20	İnönü Üniversitesi	Fen	22	Lise

3.3. Veri Toplama Araçlarında Kullanılan Sözsüz İspatlar

Veriler iki aşamada toplanmıştır. Her ikisinde de aynı 10 sözsüz ispatlar yer almaktadır. 10 sözsüz ispat örneği seçilirken uzman görüşleri alınmıştır. Bu sözsüz ispatlardan iki tanesi çalışmanın bulgularını oluşturan Garfield ve Hardy tarafından yapılan Pisagor teoreminin ispatıdır. 10 tane sorulmasının amacı ise eğer iki soru sorulursa ikisinin de Pisagor teoremi ile ilgili olabileceğine yönelik düşünmelerinin önüne geçmektir.

Birinci veri toplama aracında (Ek 1) sözsüz ispatta yer alan görsel verilirken ikinci veri toplama aracında (Ek 2) görsel ile birlikte hangi kurala ya da genellemeye yönelik olduğu matematiksel ifade de verilmiştir. Birinci formda görselin ne çağrıştırdığı ortaya çıkarılmak istenirken ikinci formda görsel ile kural arasındaki ilişkiyi nasıl kuracaklarını incelemek hedeflenmiştir. Birinci ve ikinci uygulamada veri toplama aracında Pisagor teoremi ile ilgili yöneltilen sözsüz ispatlar Tablo 2’de verilmiştir.

Tablo 2. Birinci ve ikinci aşamada kullanılan veri toplama araçlarındaki sorular

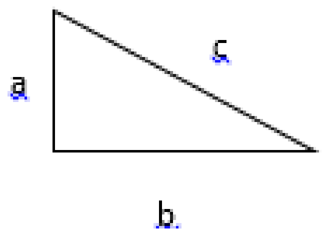
	1. Aşamada sorulan görsel	**2. Aşamada sorulan görsel**
Pisagor teoremi		 (Nelsen,1993: s.7)
		 (Nelsen,1993: s.8)

Tablo 2'den görüldüğü gibi birincisi yamuk ve özellikleri, ikincisi çember ve özellikleri kullanılarak yapılan ispatlardır.

3.3.1. Garfield Tarafında Yapılan Pisagor Teoreminin Sözsüz İspatı

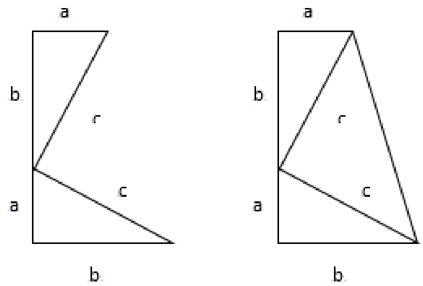
Veri toplama aracındaki bu sözsüz ispat 1876 da J.A. Garfield tarafından yapılmış ve Nelsen'ın (1993; s.6, 7) kitabında da yer verilmiş olan Pisagor teoremine yönelik sözsüz ispattır. Bu ispatta yamuğun alanı ile verilen üç tane dik üçgenin alanları arasında ilişki kurulması beklenmektedir. Birçok farklı şekilde ispat yapılabilmektedir. Bu ispatlardan bir tanesi aşağıda verilmiştir.

İspat: Dik kenarlarının uzunlukları a ve b, hipotenüsünün uzunluğu c olan bir dik üçgen göz önüne alalım.



Şekil 14. Kenar uzunlukları a, b ve c olan bir dik üçgen

Bu üçgene eş olan bir üçgen çizelim ve bu iki üçgeni birleştirip yamuk elde edelim.

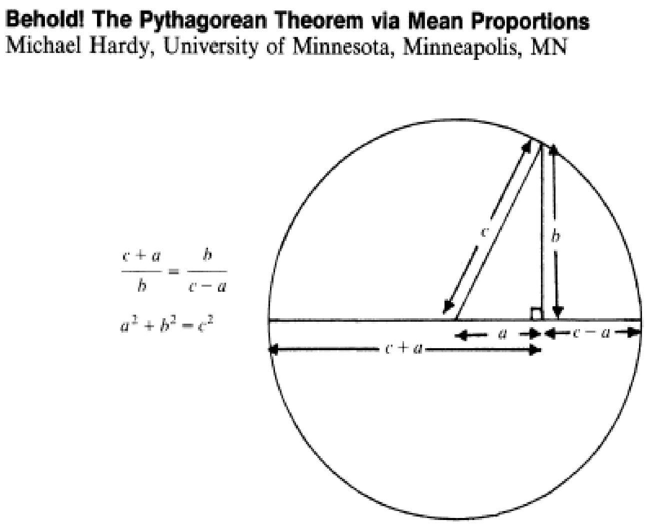


Şekil 15. Pisagor teoreminin sözsüz ispatının adımları

Şekildeki üç tane üçgenin alanının toplamı yamuğun alanına eşit olacaktır. O halde $\frac{(a+b)^2}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2}(a \cdot b) + \frac{1}{2}c^2$ yazılabilir. Buradan $a^2 + b^2 = c^2$ elde edilir.

3.3.2. Hardy Tarafından Yapılan Pisagor Teoreminin Sözsüz İspatı

Bu ispat 1988 yılına Mike Hardy tarafından "*Mathematical Intelligencer*" adlı dergide basılmıştır. Basıldığı hali ile Şekil 16'da gösterilmiştir.



Şekil 16. Pisagor teoreminin Hardy tarafından yapılan sözsüz ispatı

3.4. Veri Toplama Araçları ve Verilerin Toplanması

Birinci aşamada kullanılan veri toplama aracı 10 görsel ile birlikte hangi kurala yönelik oldukları yani matematiksel ifade verilmemiştir. Bu şekilde çalışamaya katılan öğretmenlerin verilen görsel ile ne algıladıkları, neleri ilişkilendirdikleri ölçülmeye çalışılmıştır. İlk aşamada kullanılan veri toplama aracında her bir sözsüz ispat ile birlikte iki tane de soru yöneltilmiştir. Bu sorulardan birincisi "*1-Böyle bir resmi daha önce gördünüz mü? Cevabınız evet ise nerede olduğunu yazınız Hayır (...)/ Evet (...) Nerede ...*" ve ikincisi de *"Resmin ne ifade ettiğini açıklayınız*" şeklindedir. Bu sorulardan birincisinin amacı görsel ile daha önce karşılaşıp karşılaşmadıklarını belirlemek diğerinin ise görsel ile ilgili ne düşündüklerini, hangi kavramları ya da kuralları çağrıştırdığını tespit etmektir. Bu aşamada veriler yazılı olarak toplanmıştır. Öğretmenlerden önceden randevu alınmıştır. Belirlenen gün ve saatte katılımcıya veri toplama aracı verilmiş ve süreç boyunca hiçbir müdahale yapılmamıştır. Katılımcı öğretmen veri toplama aracını teslim ettikten sonra oturum sonlandırılmıştır. Veriler bireysel toplanmıştır.

İkinci aşamada ise veriler birinci aşamaya katılan öğretmenlerden gönüllü olanlar ile yarı yapılandırılmış görüşme yapılarak toplanmıştır. Bunun için öğretmenlerden önceden randevu alınmıştır. Veri kaybına neden olmamak için sürecin kamera ile kayıt altına alınacağı ifade edilmiş ve hiçbir öğretmen bundan dolayı tedirginlik yaşamamıştır. Süreç boyunca düşündükleri her şeyi sesli olarak ifade etmeleri istenmiştir. Bu sayede sözsüz ispat yapma süreçleri incelenmeye çalışılmıştır. Görüşmelerde öğretmenlere yöneltilen sözsüz ispatlarda görseller ile birlikte neyin ispatına yönelik olduğu yani matematiksel ifadelerde verilmiştir. Bu sayede görsel ile verilen matematiksel ifade arasında ilişkiyi nasıl kurdukları incelenmeye çalışılmıştır.

3.5. Verilerin Analizi

Birinci aşamada 20 matematik öğretmeninden yazılı toplanan veriler öncelikle bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Daha sonra benzerliklerine göre gruplandırılarak içerik analizi yapılmıştır. Her bir sözsüz ispata yönelik kod ve temalar elde edilmiştir. Birinci aşamada elde edilen kod ve temalar alanında uzman iki matematik eğitimcisi tarafından incelenmiş ve öneriler doğrultusunda son haline getirilmiştir. İkinci aşamada ise görüşmelerden elde edilen veriler bilgisayar ortamına aktarılmış sonra yazılı doküman haline dönüştürülmüştür.

3.6. Geçerlik ve Güvenirlik

Nitel araştırmalarda geçerlik, belirli süreçler aracılığı ile araştırmacının, bulguların doğruluğunu kontrol etme ve denetlemeyi ifade ederken, güvenirlik ise farklı çalışma ve projelerin araştırmacıları tarafından, çalışmayı yapan araştırmacı ile bakış biçimlerindeki tutarlılığını ifade etmektir (Gibbs, 2007). Nitel araştırmada geçerlik ve güvenirlik kavramları; inandırıcılık (iç geçerlik), aktarılabilirlik (dış geçerlik), tutarlık (iç güvenirlik) ve teyit edilebilirlik (dış güvenirlik) kavramları ile ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). İnandırıcılık (iç geçerlik), araştırmacının, katılımcının duygu ve düşüncelerini, süreç içerisindeki hissettiklerini, yaptıkları etkinlikleri doğru bir şekilde açıklaması ve yansıtmasıdır (Lodici, Spaulding ve Voegtle, 2006). Bu bağlamda araştırmacı veri toplama sürecinde bulunmuş elde ettiği tüm verileri ve tüm gözlemlerini aktarmıştır. Uygulama sonrası veri toplama sürecini, analiz sürecini detaylıca sunmuştur.

Nitel araştırmalarda, inandırıcılığı arttıran önemli bir kriter uzman incelemesidir (Merriam, 2012; Neuman, 2007). Bu çalışmada araştırmanın öneri aşamasından veri analizine ve rapor edilmesine kadar tüm süreçlerde bir danışman gözetiminde yürütülmüştür. Bulgular alanda uzman kişilere sunulmuş görüşler doğrultusunda düzenlemeler yapılmıştır. Çalışmada bulgular birinci aşamada yazılı olarak ve ikinci aşamada birebir görüşme kaydı, teslim edilen veri toplama aracı gibi farklı kaynaklardan elde edilen verilerle sunulmuştur.

Tutarlılık; araştırmanın veri toplama, analiz yapma, yorumlama gibi tüm süreçlerde yapılan denetlemelerin açık bir biçimde ifade edilmesidir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu araştırmada araştırmacı, araştırmanın yöntemi, aşamaları, veri toplama ve analiz yöntemleri ile bulguları yorumlama ve sonuçlara ulaşma konusunda neler yapıldığını ayrıntılı bir şekilde açıklamıştır.

Teyit edilebilirlik; araştırmada elde edilen verilerin sürekli olarak teyit edilmesi ve araştırmacının nesnel bir yaklaşımla önyargıdan uzak verileri aktarmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2005; Miles ve Huberman, 1994). Bu araştırmada da verilerin analizinde ve yorumlanmasında nesnel yaklaşılmaya çalışılmış, gözlem, görüşme ve dokümanlar yoluyla elde edilen veriler, doğrudan alıntılarla açıklanmıştır. Elde edilen bulgular teyit edilerek, sonuçlar değerlendirilmiştir.

Aktarılabilirlik; diğer araştırmacılar tarafından çalışılan araştırmanın sonuçları, araştırma alanı ve diğer alanlar arasındaki benzerlik derecesidir (Lodici, Spaulding ve Voegtle, 2006). Guba ve Lincoln (1982) aktarılabilirliğin doğrulanması için ayrıntılı betimlemenin olması gerektiğini belirtmiştir. Ayrıntılı betimleme, çalışmanın içeriği hakkında yeterli bilginin verilmesi, ham verinin yorum katmadan doğrudan alıntılarla ve verinin doğasına mümkün olduğu ölçüde sadık kalınarak okuyucuya aktarılmasıdır. Bu durumda okuyucu, ayrıntılı betimleme ile çalışmanın uygulandığı ortamı, uygulama anını zihninde canlandırabilir ve kendi ortamına ilişkin olası sonuçlar alır. Ve çalışmanın farklı bir ortamda yapılıp yapılamayacağına karar verebilir. Burada çalışmanın sonuçları ve hipotezleri sonraki çalışmalarda benzer bir duruma aktarılabilir. Araştırmanın aktarılabilirliğini arttırmak için gözlem, görüşme ve dokümanlar yoluyla elde edilen veriler, doğrudan alıntılarla ve kanıtlarla desteklenerek detaylı bir biçimde betimlenmiştir.

BÖLÜM IV
BULGULAR VE YORUM

4.1. Garfield Tarafından Yapılan Pisagor Teoreminin İspatından Elde Edilen Bulgular ve Yorumlar

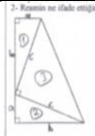
Çalışmaya katılan öğretmenlerin Garfield tarafından yapılan Pisagor teoreminin ispatındaki görsel ile daha önceden karşılaşıp karşılaşmadıklarına ve karşılaştılarsa nerede olduğuna yönelik sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular Tablo 3’ te verilmiştir.

Tablo 3. Öğretmenlerin Garfield tarafından yapılan Pisagor teoreminin ispatındaki görseli nerede gördüklerine ilişkin yanıtlarından elde edilen bulgular

Görseli görme	**Nerede görüldüğü**		**f**	**∑f**
Evet	Kitap	Üniversite hazırlık soru bankası (Ö1)	14	19
		Ders kitapları (Ö19)		
		Soru bankası (Ö4)		
		Matematik test kitapları (Ö6)		
		Test kitapları (Ö7, Ö8)		
		Kitaplarda (Ö9, Ö12, Ö17, Ö10)		
		Geometri test kitabı ve ders kitabı (Ö2, Ö5)		
		Konu anlatımı ve sorularda (Ö15)		
		Orta öğretim ders kitapları (Ö16)		
	Ders	Matematik derslerinde (Ö20)	2	
		Derslerde (Ö11)		
	Öğrenim sırasında	İlkokul (Ö3)	2	
		Ortaokul, lise üniversite (Ö13)		
	Diğer	Üçgenlerde (Ö18)	1	
Hayır		Ö14	1	1

Tablo 3’den görüldüğü gibi çalışmaya katılan 20 matematik öğretmeninden 19’u verilen görseli kitaplarda (üniversite hazırlık soru bankası, geometri test kitabı, ders kitabı, matematik test kitapları), ilkokulda veya derslerde gördüklerini ifade etmişlerdir. Yalnızca Ö14 görseli daha önceden görmediğini ifade etmiştir. Tablo 3’den görüldüğü gibi ikinci aşamaya katılan 7 matematik öğretmeni de (Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7) görseli daha önce gördüklerini ifade etmişlerdir. Görselin ne ifade ettiğine yönelik verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular Tablo 4’de özetlenmiştir. 20 katılımcının tüm cevapları tabloda gösterilmiştir.

Tablo 4. Öğretmenlerin Garfield tarafından yapılan Pisagor teoreminin ispatındaki görseli açıklamalarından elde edilen bulgular

Tema	**Kod**	**Örnek cevap**	**f**	**∑f**
Boş	Cevap yok	(Ö20)	1	1
Pisagor	Dik yamuk içerisindeki dik üçgenlerde pisagor bağıntısı	Dik yamuk kenarındaki dik üçgenlerde pisagor bağıntısı. (Ö1)	1	8
	Şekli açıklama, Üçgenlerin alanı toplamı yamuğun alanına eşit olduğundan Pisagora ulaşılır.	Bir yamuk 2 tane eş dik üçgen, 1 tane ikizkenar dik üçgene bölünmüştür. 3 üçgenin alanları toplamı yamuğun alanına eşit olduğundan pisagor teoremine ulaşılır. (Ö6)	1	
	Üçgenlerde eşlik benzerlik Üçgenlerde pisagor	* Üçgenlerde eşlik ve benzerlik ile ve D " Pisagor bağıntısı ile Hipotenüs uzunluğunu hesaplama (Ö2) Üçgenlerde Eşlik-Benzerlik Konusu - Ders ki Üçgenlerde Pisagor Bağıntısı ile ilgili soru tiplerinde kullanılmış bir resim. (Ö5)	2	
	Dik üçgende pisagor, kenar uzunlukları hipotenüs	ığini açıklayınız Dik üçgende pisagor bağıntısı, kenar uzunlukları, hi Dik yamuk (Ö10)	1	
	Şekle odaklanma Benzerlik Hipotenüs eşit ise bu üçgenler eşittir. İkizkernar üçgen olduğunu ifade etme	2- Resmin ne ifade ettiğini açıklayınız  Dik yamuk, Dik üçgen, Benzerlik, 1 ve 2 nolu üçgenlerde hipotenüsler eşitse bu üçgenler eşittir ve dolayısıyla 3 nolu üçgen ikizkenar üçgen olur. (Ö12)	1	
	Yamuğun alanı üçgenlerin alanı toplamına eşit	Yamuk alanı üçgenlerin alanları toplamına eşittir. (Ö7)	1	

	Eş üçgenler yardımıyla kenar uzunluğunu bulma Parça parça üçgenlerin alanlarından yamuğun alanını elde etme Kenarlar arasındaki uzunluk ilişkisi	Bu resmi daha önce soru bankalarında gördüm. Eş üçgenler yardımıyla kenar uzunluğu bulma veya parça parça üçgenlerin alanlarından yamuğun alanını etme ile ilgili sorular oluşturulabilir. Ayrıca şekil kareye tamamlanarak kenarlar arasında uzunluk ilişkisi kurulabilir. (Ö4)	1	
Şekle odaklanma	Dik yamuk Dik üçgen Eş üçgenler	Bir geometrik şekil. dik yamuk dik yamuk içerisinde bir dik üçgen (Ö9) Eş üçgenler, dik üçgen (Ö13)	2	5
	Dik yamuk	Dik Yamuk (Ö17) Dik Yamuk şekli. (Ö3) Dik yamuk (Ö18)	3	
Benzerlik	Benzerlik	Benzerlik (Ö8)	1	4
	Benzerlik Dik yamuk Dik üçgen	Dik yamuk Dik üçgen Benzerlik (Ö11)	2	
	Benzerlik dik yamuk dik üçgen eş üçgen	Dik yamuk, dik üçgen, benzerlik, eş üçgen (Ö15)		
	Benzerlik yamuk yamukta alan	Yamuk konusunda → Benzerlik, yamukta alan vs. (Ö14)	1	
Bağıntı	Dik üçgenle ilgili bağıntılar	Dik üçgen ile ilgili bağıntılar (Ö16) Dik üçgen ile ilgili bağıntılar (Ö19)	2	2

Tablo 4'ten görüldüğü gibi 1 matematik öğretmeni (Ö20) hiçbir cevap vermezken yalnızca 6 matematik öğretmeni Pisagor teoremi ile ilgili olduğunu ifade etmiştir. Bu 6 öğretmenden yalnızca biri "*Üçgenlerin alanlarının toplamı yamuğun alanına eşit olduğundan Pisagora ulaşılır.*" şeklinde açıklama yapmıştır. Diğer öğretmenler yalnızca Pisagor teoremi yazmış fakat nasıl elde edileceği ile ilgili herhangi bir açıklama yapmamışlardır. Bunun yanı sıra bu 6 öğretmen Pisagor teoremine ek olarak da üçgenlerde eşlik benzerlik, şekli açıklama ifadelerini de yazmışlardır. 2 öğretmen ise (Ö4 ve Ö7) alanlardan yola çıkarak Pisagor tereominin nasıl elde edilebileceğini açıklamış ama Pisagor teoremi şeklinde ifade etmemişlerdir. Burada yamuğun alanını üçgenlerin alanları toplamına eşitlendiğinde Pisagor teoremini elde edebileceği düşünüldüğü için bu iki öğretmenin cevabı da Pisagor teoremi kategorisi altına alınmıştır.

5 matematik öğretmeni, yalnızca görselde verilen geometrik şekillere odaklanmışlardır. Bu öğretmenlerden 3'ü sadece dik yamuk derken ,2'si dik yamukla birlikte dik üçgen ve eş üçgenleri de ifade etmiştir. 4 öğretmen ise benzerlik şeklinde ifade etmiştir. Bu öğretmenlerden 1'i yalnızca benzerlik yazarken 2'si benzerliğe ek olarak dik yamuk, dik üçgen, eş üçgen şeklinde ifade etmişken biri ise benzerliğe ek olarak yamuk ve yamukta alan şeklinde ifade etmiştir. 2 öğretmen ise dik üçgenle ilgili bağıntılar şeklinde ifade etmiştir. Özellikle bu iki öğretmen ile farklı zaman ve mekanda veri toplanmasına rağmen aynı kelimeleri ifade etmiş olmaları dikkat çekmektedir.

Diğer önemli bir bulgu ise Tablo 3 ve Tablo 4 birlikte incelendiğinde çalışmaya katılan 20 matematik öğretmeninden 19'u görseli daha önce gördüklerini ifade etmelerine rağmen yalnızca 8 öğretmen (Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö10, Ö12) Pisagor teoremi ile ilişkili olabileceğini ifade etmiş olmasına karşılık yalnızca 3 öğretmen (Ö4, Ö6, Ö7) bu ilişkinin nasıl olduğunu açıklamışlardır.

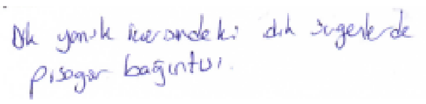
4.1.1. Görüşmelerden Elde Edilen Bulgular

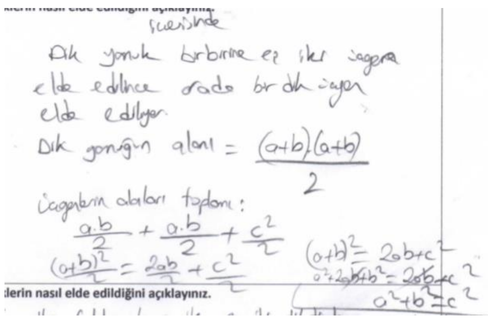
4.1.1.1. Ö1'den Elde Edilen Bulgular

Süreç başladığında Ö1 ilk önce *"Görselden faydalanarak verilen eşitliklerin nasıl elde edildiğini açıklayınız"* şeklinde soruyu okumuştur. Daha sonra soruda verilen görsele baktıktan sonra *"evet burada bir dik yamuk var, dik yamuk içerisinde iki tane eş üçgenler (Şekil 17) çizilmiş, tabi bu eş üçgenleri çizince burada arada da bir tane ikizkenar dik üçgen oluşmuş"* şeklinde verilen görseldekileri yorumlamıştır.

Şekil 17. Ö1'in görseli yorumlaması

Daha sonra veri toplama aracında verilen açıklamaları *"Şimdi bu eşitliğe bakarsak* a *eşittir* 2 *çarpı 1 bölü* 2 ab *artı* 1 *bölü iki c kare, o da eşittir bir bölü iki a artı b'nin karesi oradan da c kare eşittir, a kare artı b kare eşitliği elde edilmiş"* şeklinde sesli okumuştur. Daha sonra tekrar görsele bakarak *"şimdi burada dikkat edersek bu üçgenler birbirine eş üçgenlerdir. Buradaki dik yamuğun alanını verecek formülü düşünürsek buradaki dik yamuğun alanı alt taban artı üst taban çarpı yükseklik bölü 2 olduğundan dik yamuğun alanı* $a + b$ *çarpı* $a + b$ *bölü 2 yani* $(a + b\,)$*'nin karesi bölü 2 dir."* diyerek yamuğun alanını ayrılan üçgenlerin alanlarının toplamına eşitleyip Pisagor teoreminin ispatını tamamlamıştır. Görüldüğü gibi Ö1 önce görseli incelemiş öncelikle kenar uzunlukları a ve b olan dik üçgenlere sonra bu dik üçgenler arasında oluşan kenar uzunluğu c olan ikizkenar üçgene dikkat etmiş sonra bütüne bakarak yamuğun alanına odaklanmıştır. En son bu üçgenlerin alanlarının toplamını yamuğun alanına eşitlemiştir. Ö1'in birinci aşamada verdiği cevap Şekil 18a'da ikinci aşamadaki görüşmede kâğıdına yazdıkları Şekil 18b'de verilmiştir.

a) 

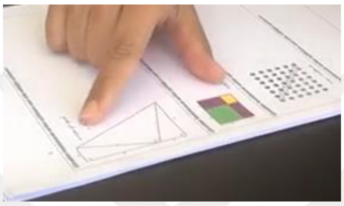
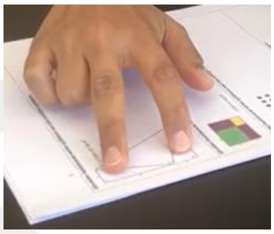
b) 

Şekil 18. Ö1'in birinci ve ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları

Şekil 18b'dan görüldüğü gibi Ö1 sesli ifade ettiklerini aynen kâğıdına aktarmıştır. Şekil 18a'de verilen birinci aşama incelendiğinde *"Dik yamuk içerisindeki dik üçgenlerde pisagor bağıntısı"* ifadesi dikkate alınırsa Ö1'in sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden de Pisagor teoremi ile ilişkilendirebildiği söylenebilir.

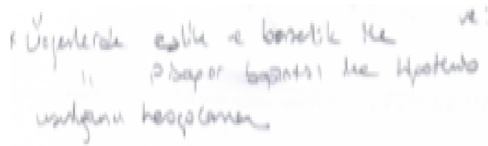
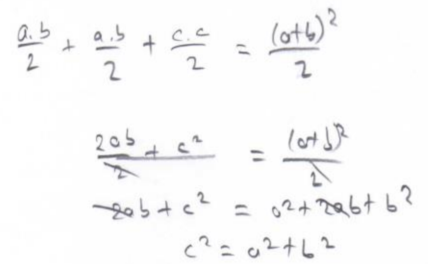
4.1.1.2. Ö2'den Elde Edilen Bulgular

Ö2 soruya baktıktan sonra *"bu soruda dik yamuk ile ilgili bir alan hesaplama var"* demiştir. Şekil 19a'daki gibi öncelikle verilen açıklamaya odaklanmıştır. Daha sonra *"dik yamuk üç tane dik üçgene parçalayarak ıı alanları toplamı şeklinde almış ki şunlar zaten eş üçgenler (Şekil 19b) artı diğer üçgen alanları toplamını bulmuş"* şeklinde açıkladıktan sonra ispatı yapmaya başlamıştır.

a)  b) 

Şekil 19. Ö2'nin görseli açıklaması

"Üçgenlerin alanlarını hesaplayalım $\frac{a.b}{2}$ *şu üçgen şu üçgen artı* $\frac{a.b}{2}$ *artı… artı* $\frac{c.c}{2}$ *… yamuğun alanı da* $\left(\frac{a+b}{2}\right)$ *…*$\left(\frac{a+b}{2}\right)$ *…Üçgenlerin alanları toplamı yamuğun alanına eşittir. Buradan eşitliklerden Pisagor bağıntısına gitmiş"* şeklinde ifade ederek kâğıda üçgenlerin alanlarını yazmış, üçgenin alanlarının toplamını yamuğun alanına eşitlemiş (Şekil 20b) ve Pisagor teoremini elde etmiştir. Ö2'nin birinci aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 20a'da ikinci aşamada yazdıkları Şekil 20b'de verilmiştir.

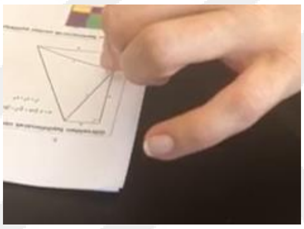
a)  b) 

Şekil 20. Ö2'in birinci ve ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları

Ö2'nin birinci aşamada verdiği yanıt ile ikinci aşamada verdiği yanıt karşılaştırıldığında, ilk aşamada *"üçgenlerde eşlik, benzerlik ve Pisagor bağıntısı ile* *hipotenüs hesaplama"* (Şekil 20a) şeklinde ifade ederken, ikinci aşamada görselden faydalanarak Pisagor teoremini elde etmiştir. Ö2 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden tam olarak Pisagor teoremiyle ilişkilendirememiştir fakat Pisagor teoremini kullanarak hipotenüs hesaplanacağını ifade etmiştir.

4.1.1.3. Ö3'ten Elde Edilen Bulgular

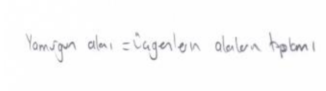
Soruya baktıktan sonra *"görselden yararlanarak nasıl elde ediyoruz"* şeklinde soruda ne beklendiğini ifade etmiştir. Daha sonra *"üçgenlerin alanları toplamı aynı zamanda yamuğun alanı toplamına eşit olacağı için…. birbirine eşitlediğimizde buradan Pisagor bağıntısını elde ediliyor"* demiştir. Şekil 21'de görüldüğü gibi öncelikle soruyu okuduktan sonra görsele odaklanarak görsel üzerinde ispatın nasıl yapılabileceğini açıklamıştır.



Şekil 21. Ö3'ün görseli açıklaması

Araştırmacı kâğıda da yazar mısınız şeklinde yönlendirme yaptıktan sonra sözlü ifade ettiklerini kâğıda Şekil 22b'deki gibi aktarmıştır. Ö3'ün birinci aşamada yazdıkları Şekil 22a'da ikinci aşamada yazdıkları Şekil 22b'de verilmiştir.

a) 

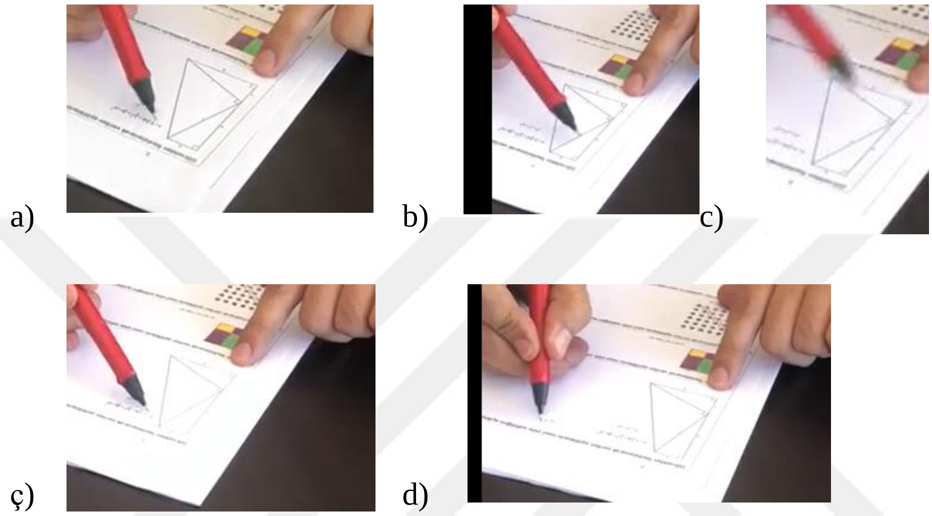
b) 

Şekil 22. Ö3'ün birinci ve ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları

Ö3'ün birinci aşamada verdiği yanıt ile ikinci aşamada verdiği yanıt karşılaştırıldığında, ilk aşamada *"dik yamuk şekli"* şeklinde ifade ederken ikinci aşamada kâğıdına Pisagor teoremini *"yamuğun alanı=üçgenlerin alanları toplamı"* şeklinde yazarak elde edilebileceğini ifade etmiştir. Fakat cebirsel olarak göstermemiştir. Ö3 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden Pisagor teoremi ile ilişkilendirememiş olarak yorumlanmıştır.

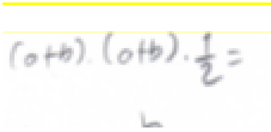
4.1.1.4. Ö4’ten Elde Edilen Bulgular

Ö4 soruya bakar bakmaz Şekil 24a’da gösterildiği gibi görsel ile birlikte verilmiş olan eşitliğe odaklanmıştır. *“Birinci soruda alan kısmı şimdi burada”* dedikten hemen sonra eşitlikten yola çıkarak verilen görsel ile ilişki kuramaya başlamıştır. Şekil 24b’de gösterildiği gibi eşitlikte verilen ifadeleri görsel üzerinde açıklamıştır.



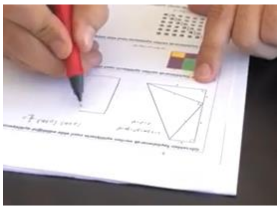
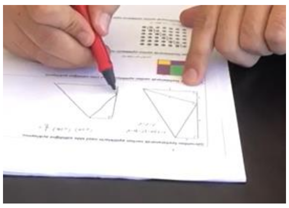
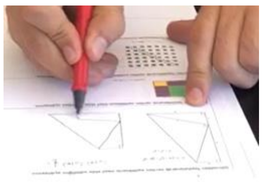
Şekil 23. Ö4’ün görsel ile kural arasındaki ilişki kurma süreci

Daha sonra *“burada parça parça alanların hesabı (Şekil 23b) …* $2.\frac{1}{2}ab$*… yani şuradaki üçgenin (Şekil 23b)* $a \cdot b$*’nin yarısı, buradaki üçgen (Şekil 23c)* $a.b$*’nin yarısı şurası* (Şekil 23ç’deki gibi eşitliği göstererek) *iki tane eş üçgenin alanı”* diyerek soruda görselin yanında verilen eşitlik ifadesindeki ilk ifadenin görselde neresi olabileceğini göstermiştir. Daha sonra *“artı bir de içerideki dik üçgen alanı toplanmış … şu eşitlik..* (açıklamadaki en son kısmı göstererek) *bu eşitlikte de yamuğun alanına eşitlenebilir. Burada mesela şuradaki* $a + b$*’nin parantez karesi dediğimiz* (Kuralda verilen ifadeyi bir adım ileri götürüyor Şekil 23d.) $a + b$ *alt taban çarpı üst taban çarpı yükseklik.* $a + b$ *bölü yani çarpı* $\frac{1}{2}$ *dedik. Bu ikisinin eşitliğini yazdığımız zaman…”* demiş fakat bu aşamadan sonra kendi yazmamış ve soruda verilen kısım üzerinden açıklama yapmıştır. *“Zaten ifade* c^2 *eşittir* a^2 *artı* b^2*şeklinde gelir.”* şeklinde ispatı yapmıştır. Bu aşamada kâğıdına yazdığı Şekil 24’teki gibidir.



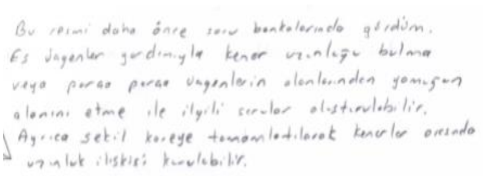
Şekil 24. Ö4'ün kâğıdına yazdıkları

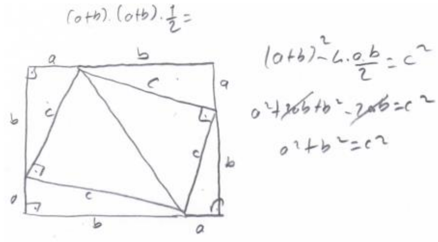
Bu aşamadan sonra süreci sonlandırmamış ve *"onun haricinde başka bu soruda daha çok hani eşlik benzerlik konusunda çok fazla karşılaştım mesela şekil tamamlama kısmında da bu tarz sorular vardı ben şöyle temsili şu şekilde bir çizim yapayım. (Şekil25a) Şimdi genelde eşlik benzerlikte kare ile ilgili çok fazla soru yazıyorlar. Şimdi şuradan şöyle aldım. (Şekil25b) şuradan şöyle. (Şekil25c) İki tane üçgenimiz eş. Aynı şekli katlayıp şu tarafa koydum. Hani şu a şu b şu a kadarsa"* diyerek kareye tamamlamış ve *"Şu şekilde bir dikdörtgen elde ettim. Aynı şekilde şu üçgenlerin eşlerini de buraya çizdiğimde şurası a kadar, şurası b kadar şu içerde bir kare oluştuğunu gördüm, şunlar c. Bundan sonra eşitliği elde edebilir miyiz? Şimdi tüm alan dediğimiz karenin bir kenarı $(a + b)$'nin karesinden şu küçük parçalar eş zaten 4 tane $a \cdot b$ bölü 2 üçgenin alanı içinde bir kare oluştu."* demiştir. *"Tüm alandan $(a+b)^2$ den üçgenlerin alanlarını yani $4 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$'yi çıkardığımda içindeki karenin alanına yani c^2 ye eşit olacak yani yine aynı eşitliği bulmuş oldum."* demiştir.

a)  b)  c) 

Şekil 25. Ö4'ün çizmiş olduğu şekiller

Ö4'ün birinci aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 26a'da ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 26b'de verilmiştir.

a) 

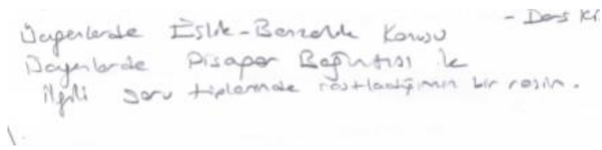
b) 

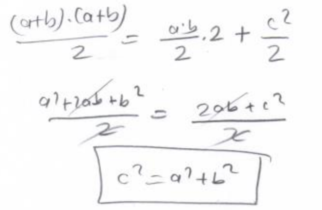
Şekil 26. Ö4'ün birinci ve ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları

Ö4'ün birinci aşamada verdiği yanıt ile ikinci aşamada verdiği yanıt karşılaştırıldığında birinci aşamada *"Eş üçgenler yardımıyla kenar uzunluğu bulma veya parça parça üçgenlerin alanlarından yamuğun alanını elde etme, ayrıca şekil kareye tamamlanarak kenarlar arasında uzunluk ilişkisi kurulabilir"* şeklinde ifade ederken ikinci aşamada görselden faydalanarak Pisagor teoreminin nasıl elde edileceğini iki farklı şekilde açıklamıştır. Ö4 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden görseli tam olarak Pisagor teoremiyle ilişkilendirememiştir.

4.1.1.5. Ö5'ten Elde Edilen Bulgular

Ö5 soruyu okuduktan sonra *"bu soruda yamuk ve yamuğun içerisinde ikizkenar dik üçgen… ikizkenar dik üçgenden yararlanarak açıların eşliğinden yararlanarak iki tane eş üçgen verilmiş. Eşitliğe göre yamuğun alanı, iki tane eş üçgen ve ikizkenar dik üçgenin alanları toplamı yamuğun alanına eşitliğinden yararlandığımız zaman Pisagor bağıntısını elde edeceğiz. Ben hemen yapıyorum alt taban ile üst tabanın toplamı ile yüksekliğin çarpımı bize yamuğun alanını veriyor. Eş üçgenlerin alanlarını yazıyorum* $\frac{a.b}{2}$*'den 2 tane artı* $\frac{c^2}{2}$ *, bu eşitliği düzenlediğimde* $a^2 + 2ab + b^2$ *bölü 2, 2'ler aynen dursun* $2ab + c^2$ *bölü 2, 2'leri götürdüğümüz zaman* $c^2 = a^2 + b^2$ *Pisagor bağıntısını elde etmiş oluyoruz."* diyerek üçgenlerin alanları toplamını yamuğun alanına eşitleyerek gerekli işlemleri yapmıştır. Ö5'in birinci aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 27a'da, ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 27b'de verilmiştir.

a) 

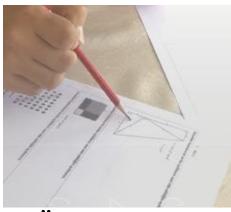
b) 

Şekil 27. Ö5'in birinci ve ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları

Ö5'in birinci aşamada verdiği yanıt ile ikinci aşamada verdiği yanıt karşılaştırıldığında, birinci aşamada *"Üçgenlerde eşlik – benzerlik konusu, üçgenlerde Pisagor bağıntısı ile ilgili soru tipleri"* şeklinde ifade ederken ikinci aşamada görselden faydalanarak Pisagor teoremini elde etmiştir. Ö5 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden görseli Pisagor teoremiyle ilişkilendirebilmiştir.

4.1.1.6. Ö6'dan Elde Edilen Bulgular

Ö6 soruyla karşılaştıktan sonra *"Şimdi ilk soruda görselden faydalanarak verilen eşitlikleri nasıl elde ettiğimizi açıklayacağız. Burada bizim bir tane yamuğumuz var. Bu yamuk iki eş dik üçgen ve bir tane de ikizkenar dik üçgene ayrılmış* (Şekil 28). *Biz burada üç üçgenin alanını hesaplayarak Pisagor teoremine ulaşacağız. Burada birinci üçgenimin alanı taban çarpı yükseklik bölü ikiden* $\frac{a.b}{2}$ *, diğeri de aynı şekilde* $\frac{a.b}{2}$*'den artı ikizkenar dik üçgende de* $\frac{c.c}{2}$ *'den eşitliğimizi sağlayalım neye yamuğun alanına, yamuğun alan formülümüz neydi üst taban artı alt taban çarpı yüksekliğim yine* $a+b$ *bölü 2. Burada* $ab'nin\ karesi\ artı\ c\ kare$ bölü $2\ eşittir$ *düzeltiyorum şurayı* $2\,ab$ *olacak burası, burada da* $a^2+2ab+b^2$ *bölü 2 sonucunu elde ettik. Bunları götürdük, karşılıklı* $2ab$*'leri götürdük* $c^2=a^2+b^2$ *den yani Pisagor teoremine ulaşmış oluyoruz."* dedikten sonra süreci sonlandırmıştır.



Şekil 28. Ö6'nın görseli açıklaması

Ö6'nın birinci aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 29a'da ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 29b'de verilmiştir.

a)

Bir yamuk 2 tane eş dik üçgen, 1 tane ikizkenar dik üçgene bölünmüştür.
3 üçgenin alanları toplamı yamuğun alanına eşit olduğundan pisagor teoremine ulaşılır.

b)

$$\frac{a.b}{2}+\frac{a.b}{2}+\frac{c.c}{2}=\frac{(a+b)(a+b)}{2}$$

$$\frac{\cancel{2ab}+c^2}{\cancel{2}}=\frac{a^2+\cancel{2ab}+b^2}{\cancel{2}}$$

$$c^2=a^2+b^2$$

Şekil 29. Ö6’nın birinci ve ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları

Ö6’nın birinci aşamada verdiği yanıt ile ikinci aşamada verdiği yanıt karşılaştırıldığında, birinci aşamada *“Eş üçgenler yardımıyla kenar uzunluğu bulma veya parça parça üçgenlerin alanlarından yamuğun alanını elde etme, ayrıca şekil kareye tamamlanarak kenarlar arasında uzunluk ilişkisi kurulabilir.”* şeklinde ifade ederken ikinci aşamada görselden faydalanarak Pisagor teoremini elde etmiştir. Ö6 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden görseli tam olarak Pisagor teoremiyle ilişkilendiremediği söylenebilir.

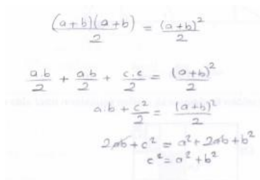
4.1.1.7. Ö7’den Elde Edilen Bulgular

Ö7 görsele odaklandıktan sonra *“Yamuğun alanından üçgenlerin alanları toplamı* (Şekil 30) *ile yamuğun alanını eşleştirerek Pisagor bağıntısına ulaştım.”* demiştir.

Şekil 30. Ö7’nin görseli açıklaması

İfade ettiklerini Şekil 31b’deki gibi kâğıdına yazmıştır.

a) 

b) 

Şekil 31. Ö7’nin birinci ve ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları

Ö6’nın birinci aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 31a’da ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 31b’de verilmiştir. Birinci ve ikinci aşamada verdiği yanıt karşılaştırıldığında, ilk aşamada *“Yamuk alanı üçgenlerin alanları toplamına eşittir.”* şeklinde ifade ederken ikinci aşamada görselden faydalanarak Pisagor teoremini elde etmiştir. Ö7 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden görseli tam olarak Pisagor teoremiyle ilişkilendirebildiği söylenebilir.

4.2. Hardy Tarafından Yapılan Pisagor Teoreminin İspatından Elde Edilen Bulgular ve Yorumlar

Çalışmaya katılan öğretmenlerin bu görselle daha önceden karşılaşıp karşılaşmadıklarına ve karşılaştılarsa da nerede olduğuna yönelik sorulara verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5. Öğretmenlerin Hardy tarafından yapılan Pisagor teoreminin ispatındaki görseli nerede gördüklerine ilişkin elde edilen bulgular

Kod	Kategori	Örnek cevaplar	f_1	f_2	f_3
Evet	Kitap	Matematik kitabında (Ö2, Ö3)	2	9	12
		Geometri kitaplarında (Ö5)	1		
		Kitapta (Ö10, Ö17)	2		
		Kitaplarda (Ö11, Ö12)	2		
		Ders kitabı (Ö8, Ö19)	2		
	Ders	Matematik dersinde (Ö20)	1	1	
	Geometri	Çember ve özellikleri (Ö15)	1	2	
		Geometride (Ö18)	1		
Hayır		Ö1, Ö4, Ö6, Ö7, Ö9, Ö13, Ö14, Ö16	8	8	8

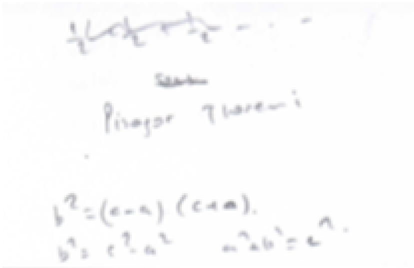
Tablo 5'ten görüldüğü gibi çalışmaya katılan 20 matematik öğretmeninden 12'si (Ö2, Ö3, Ö5, Ö8, Ö10, Ö11, Ö12, Ö15, Ö17, Ö18, Ö19, Ö20) verilen görseli kitaplarda (matematik, geometri, ders kitabı gibi), matematik derslerinde veya geometride gördüklerini ifade etmişlerdir. Diğer taraftan Tablo 3'ten görüldüğü gibi 8 matematik öğretmeni (Ö1, Ö4, Ö6, Ö7, Ö9, Ö13, Ö14, Ö16) ise daha önce görmediklerini ifade etmiştir. Resmin (görselin) ne ifade ettiğine yönelik verdikleri cevaplardan elde edilen bulgular Tablo 6'da özetlenmiştir.

Tablo 6. Öğretmenlerin Hardy tarafından yapılan Pisagor teoreminin ispatındaki görseli açıklamalarından elde edilen bulgular

Kod	Kategori	Örnek cevap	f	∑f
Cevap yok	Tam olarak ifade edemiyorum	Tam olarak ifade edemiyorum Ö1	1	2
	Cevap yok	Ö20	1	
Çember	Çemberin	• Çemberin özellikleri Ö2	1	10

	özellikleri	Çember özellikleri konusunda Yarıçap uzunluğunun bulunması Ö5	1	
		Çember özelliklerinin kullanılması Ö15	1	
	Çemberde teğet yarıçap, kiriş	Çemberde yarıçap, teğet kiriş, çap uygulamaları. Ö3	1	
		Birim çember ve çemberde çap yarıçap. Ö13	1	
	Çemberin analitik incelenmesi	Çemberin Analitik İncelenmesi Ö11	1	
	Çemberde uzunluk	Çemberde uzunluk Ö12	1	
		Çemberde uzunluk Ö17	1	
		Çember kullanarak uzunluk hesaplama Ö19	1	
		Çemberde uzunluk Ö18	1	
		Çember ve Daire ile ilgili olabilir. Daire diliminin alanı ile ilgili olabilir. Diferansiyel Geometri ile ilgili olabilir. Ö16		1
Çember-dik üçgen	Çember, dik üçgen, açı	Çember, dik üçgen, açı Ö10	1	2
	Çember, dik üçgen	Çember ve dik üçgen kullanılarak farklı uzunlukların hesaplanması. Ö9	1	
Pisagor	Pisagor	Çemberden ve benzerlikten pisagora ulaşmak Ö7	1	5
		pisagor Ö8	1	
		[illegible] dik kesen birisinin, kesişim noktalarından çarpımları birbirine eşittir. Bu da pisagor teoremine dayanıyor. $a^2+b^2=c^2$ $(a+c)\cdot(c-a)=b^2$ Ö6	1	
		Çember üzerindeki üçgenin kesesinden çap hipotenüs olacak şekilde üçgen çizildiğinde bu üçgenin dik üçgen olduğu ve verilen küçük dik üçgenle benzerlik yapılarak c, a, b arasında bağıntı bulunabilir. Ö4	1	

1



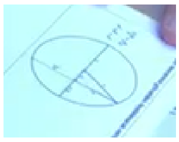
Ö14

Tablo 6’dan görüldüğü gibi <u>2 matematik öğretmeni</u> (Ö1, Ö20) cevap yok kategorisinde değerlendirilmiştir. Bunlardan biri tam olarak ifade edemiyorum yanıtı vermiştir. <u>10 matematik öğretmeni ise</u> çember ile ilgili olabileceğini ifade etmişlerdir. Tablo 4’ten görüldüğü gibi bu öğretmenlerin cevapları incelendiğinde çemberin özellikleri (Ö2, Ö5, Ö15), çemberde teğet, yarıçap, kiriş (Ö3, Ö13), çemberin analitik incelenmesi (Ö11), çemberde uzunluk (Ö12, Ö17, Ö18, Ö19) şeklinde ifade ettikleri görülmektedir. Bir öğretmen ise (Ö16) daire diliminin alanı veya diferansiyel geometri ile ilgili olabileceğini ifade etmiştir. İki öğretmen (Ö10, Ö9) ise çember ve dik üçgen ile ilgili olduğunu ifade etmiştir. Yalnızca 5 öğretmen (Ö7, Ö8, Ö6, Ö4, Ö14) Pisagor teoremi ile ilgili olduğunu ifade etmiştir. Ö8 sadece Pisagor yazmış nasıl elde edilebileceğine dair hiçbir açıklama yapmamıştır. Diğer önemli bir bulgu ise çalışmaya katılan 20 matematik öğretmeninden 12’si görseli daha önce gördüklerini ifade etmelerine rağmen yalnızca 5 öğretmen (Ö4, Ö6, Ö7, Ö8, Ö14) Pisagor teoremi ile ilişkili olabileceğini ifade etmiştir. Bu öğretmenlerden Ö1, Ö4, Ö6, Ö7, Ö9, Ö13, Ö14, Ö16 daha önce görmediğini ifade eden öğretmenlerdir.

4.2.1. Görüşmelerden Elde Edilen Bulgular

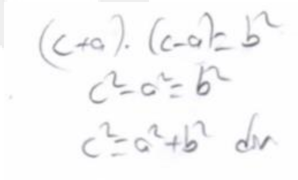
4.2.1.1. Ö1’in İspatından Elde Edilen Bulgular

Ö1 yöneltilen soru ile karşılaştıktan sonra ilk önce *“buradaki örnekte Pisagor teoremini görselden faydalanarak elde etmemiz istenmiş”* şeklinde soruyu okumuş, daha sonra verilen eşitliği inceleyerek *“buradaki örnekte Pisagor bağıntısını görselden faydalanarak* $\frac{c+a}{b}$ *,* $\frac{b}{c-a}$*’ ya eşit … eşitliğinden faydalanarak* $a^2 + b^2 = c^2$ *eşitliğini elde etmemiz istenmiş”* demiştir. Daha sonra görsele odaklanmıştır. *“Burada dikkat edersek bir çember var. Şu nokta da (Şekil 32a) çemberin merkezi. Burada yarıçapı* c *birim olan bir çember var, burada dikkat* *edersek şurada yarıçapı c birim bir kenarı a diğer kenarı b birim olan bir dik üçgen elde edilmiş. Buraya a dediğimizde şu uzunluk $c - a$ olur. Çünkü yarıçapı c'idi.”*

a)  b)  c) 

Şekil 32. Ö1'in ikinci görsel ispatı açıklaması

“Burada dikkat edersek şu uzunluğu devam ettirdiğimiz zaman (Şekil 32b) şu aynı zamanda çemberin özelliğinden merkezden kirişe çizilen dikmenin iki eş parçaya ayırdığını biliyoruz. Şu uzunluk da b olur.” diyerek Şekil 32c'de verildiği gibi yeni çizdiği çizginin b uzunlukta olduğunu ifade etmiştir. Daha sonra *“ burada kuvvet uygularsak çember içerisinde kuvvet uygularsak $(c + a) \cdot (c - a)$nın b^2 ye eşit olduğunu buluruz. Yani $c^2 - a^2$ eşittir b^2 dir. Yani $c^2 = a^2 + b^2$dir.”* diyerek Şekil 33b'deki gibi söylediklerini kâğıda yazmıştır. Bu şekilde Pisagor teoreminin görsel ile ispatını yapmıştır. Ö1'in bu aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 33b'de birinci aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 33a'da verilmiştir.

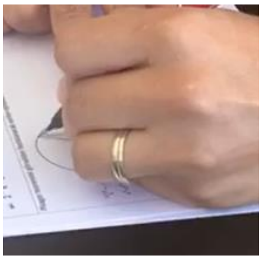
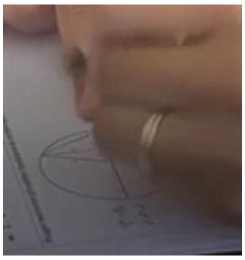
a)  b) 

Şekil 33. Ö1'in birinci ve ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları

Şekil 33b'de birinci aşamada verdiği yanıt ile Şekil 33a'daki ikinci aşamada verdiği yanıt karşılaştırıldığında, birinci aşamada tam olarak ifade edemeyeceğini yazarken ikinci aşamada ispatı yaptığı görülmektedir.

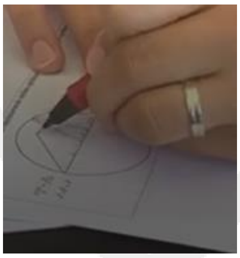
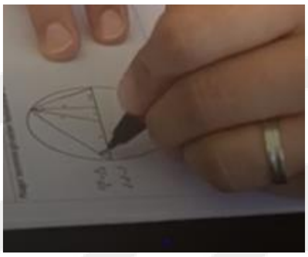
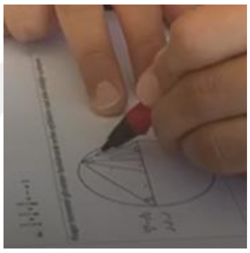
4.2.1.2. Ö2'nin İspatından Elde Edilen Bulgular

Soruyu baktıktan sonra *“Bu soruda çember yardımı ile Pisagor'u elde etmeye çalışmış. Ben yine üçgene bölmek istiyorum”* diyerek sırasıyla Şekil 34a, 34b ve 34c'deki adımları takip etmiştir.

a)  b)  c) 

Şekil 34. Ö2'nin takip ettiği adımlar

Daha sonra Şekil 35a'daki gibi çizim yapmıştır ve *"merkez açı ….çevre açıyı kullanarak çapı gördüğü için* 90°*…benzerlikten gidiyorum … şu açı ile şu açı"* diyerek Şekil 35b ve Şekil 35c de gösterdiği açıların eş olduğunu ifade etmiştir.

a)  b)  c) 

Şekil 35. Ö2'nin gösterdiği eş açılar

Daha sonra *"Şu açı ile şu açı eşit"* diyerek Şekil 36a ve 36b'deki açıların ölçülerinin eşit olduğunu ifade etmiştir.

a)  b) 

Şekil 36. Ö2'nin gösterdiği eş açılar

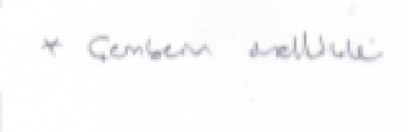
Daha sonra *"dolayısıyla benzerlikten giderek… şöyle söyleyebilirim… şimdi bu* c*…* $c-a$ *ise şurası da* c*… zaten burası üçgeni eşit parçalara bölen kenarortay… şuradan bakıyorum (Şekil 37a)….*$c+a$ *bunun karşısında….bunun karşısında* b*…… şurdan bakıyorum (Şekil 37b)* b*…bunu karşısında* $c-a$*… işler dışlardan yine* b^2*nin* c^2-a^2, a^2+b^2 *nin de* c^2*ye eşit olduğunu benzer üçgenlerden çemberin çapını gören çevre açıyla buluyoruz "* diyerek $\frac{c+a}{b}=\frac{b}{c-a}$ eşitliğinden hareketle $b^2=c^2-a^2$ sonrasında da $a^2+b^2=c^2$ yazmıştır. Bundan sonra *"*$a^2+b^2=c^2$

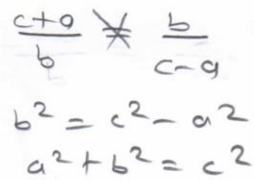
olduğunu benzer üçgenlerden çemberin çapını gören çevre açıyla buluyoruz." demiştir.

a)  b) 

Şekil 37. Ö2'nin açıklaması

Ö2'nin birinci aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 38a'da, ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 38b'de verilmiştir.

a) 

b) 

Şekil 38. Ö2'nin birinci ve ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları

Ö2'nin birinci aşamada verdiği yanıt ile ikinci aşamada verdiği yanıt karşılaştırıldığında, birinci aşamada *"çemberin özellikleri"* şeklinde ifade ederken ikinci aşamada görselden faydalanarak Pisagor teoremini elde etmiştir. Ö2 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlikler verilmeden Pisagor teoremi ile ilişkilendiremediği söylenebilir.

4.2.1.3. Ö3'ün İspatından Elde Edilen Bulgular

Görseli inceledikten sonra *"Şimdi şeklimizde şurası merkez… yarıçapı c birim olan çember var. Biz buradan bu çemberi…. merkezi gören çevre açı çizdiğimizde (Şekil 39a, 39b)* $90°$. *Şuraya α, şuraya β diyorum. Burası da* 90^o *(Şekil 39c) üçgenin iç açıları toplamı* $180°$ *olduğu için $\alpha + \beta$ …90^o dir, o yüzden bura β ise şura α burası* 90^o *ise α burası ne olur β o yüzden şu üçgen ile şu üçgen benzer üçgenler çıkıyor. Harflendirirsem A, B, C, D harflerini verdik ABC üçgeni benzerdir, A açım β olduğu için DAC üçgeni, AB burada zaten uzunluklar yok şuradan bakalım. AC'nin uzunluğunun DC'ye uzunluğu eşittir BC'nin uzunluğunun AC'ye uzunluğu olacak. AC'nin uzunluğu b, DC'nin uzunluğu $c - a$, BC'nin uzunluğu*

$c + a$, AC'nin uzunluğu b'dir. Buradan içler dışlar çarpımı yaparsak b^2 ..iki kare farkı var burada. $c^2 - a^2$ olur. c^2 yalnız bırakırsak da $c^2 = a^2 - b^2$ yani Pisagor teoremini elde etmiş oluruz."

Şekil 39. Ö3'ün benzerlik kurarken yaptığı adımlar

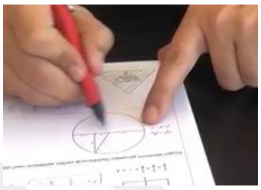
İfade ettiklerini Şekil 40b'deki gibi kâğıdına yazmıştır. Soru ile karşılamasında ispatı yapana kadar olan tüm süreç 1 dk. 36 sn. sürmüştür. Ö3'ün birinci aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 40a'da, ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları Şekil 40b'de verilmiştir.

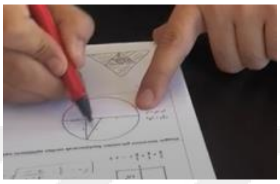
Şekil 40. Ö3'ün birinci ve ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları

Ö3'ün birinci aşamada verdiği yanıt ile ikinci aşamada verdiği yanıt karşılaştırıldığında, birinci aşamada *"çemberde yarıçap, teğet, kiriş, çap uygulamaları"* şeklinde ifade ederken ikinci aşamada görselden faydalanarak Pisagor teoremini elde etmiştir. Ö3 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlikler verilmeden görseli Pisagor teoremiyle ilişkilendiremediği söylenebilir.

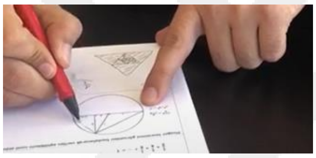
4.2.1.4. Ö4'ün İspatından Elde Edilen Bulgular

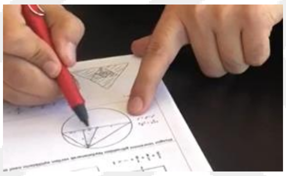
Ö4 soruyu inceledikten sonra *"Çember kısmında verilen ifadenin eşitliğini incelersek kenarları arasında oranlar var. Bunları yazabilmek için şurada bir tane dik üçgenimiz var. Bir dik üçgende kendimiz elde etmemiz lazım. Şimdi burada şurasının çap olduğunu, şurası c (Şekil 41a) c kadar (Şekil 41b) şurasının da c kadar olduğunu biliyorum demek ki burası çap. Çapı gören çevre açıyı çizdim (Şekil 41c ve 41ç) buranında* 90 *olduğunu tepesine yazdım. Şu anda bir tane* 90°*lik dik üçgenim, şurada bir tane* 90°*lik dik üçgenim var. Aynı şekilde şurada da* 90°*lik bir dik üçgenim var. Şimdi benzerliği yazarsak. Hangi üçgenlerin benzerliğini* *yazacağımızı şu şekilde ben tarayayım öncelikle şu küçük üçgenle (Şekil 41d) şuradaki (Şekil 41e) üçgenin benzerliğini yazıyorum. Şimdi şuradaki açıya* α *dersem (Şekil 41f)* α*'nın karşısındaki* b*'nin şuradaki (Şekil 41g) boş kalan yani* 90^o *nin haricindeki şurada boş kalan açının karşısındaki* $c+a$ *ya oranı, aynı şekilde şu kısma bakarsak burada da* $c-a$ *şurdaki açı* $c-a$ *nın şurdaki açının karşısı* b*'ye oranı ifadesi eşitliği verecektir. Zaten burada içler dışlar yaptığımızda* $b^2 = (c-a)\cdot(c+a)$ b^2 *eşittir iki kare farkından* $c^2 - a^2$ *eşitliğine gelecek* a^2 *bu tarafa atarsak* $a^2 + b^2, c^2$ *ye eşittir, Tamam."*

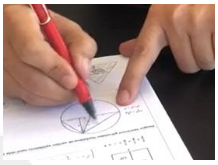
a) 

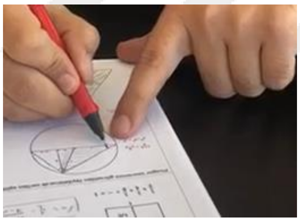
b) 

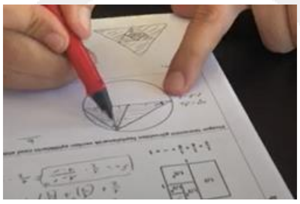
c) 

ç) 

d) 

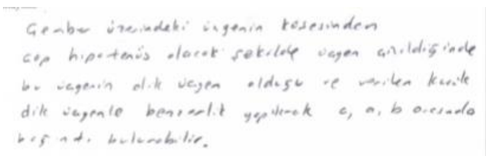
e) 

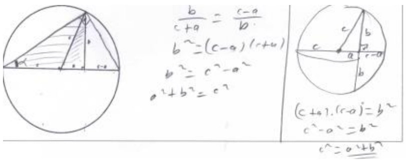
f) 

g) 

Şekil 41. Ö4'ün ispat süreci

Ö4 ifade ettiklerini Şekil 42 b'deki gibi kâğıdına yazmıştır.

a) 

b) 

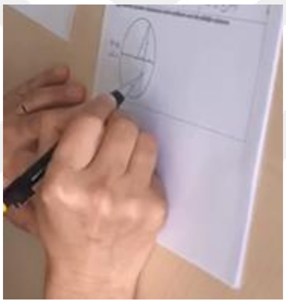
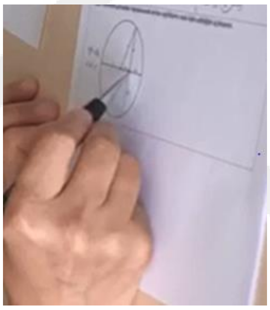
Şekil 42. Ö4'ün birinci ve ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları

Ö4'ün ilk aşamada verdiği yanıt (Şekil 42a) ile ikinci aşamada verdiği yanıt karşılaştırıldığında, ilk aşamada *"çember üzerindeki üçgenin köşesinden çap hipotenüs olacak şekilde üçgen çizildiğinde bu üçgenin dik üçgen olduğu ve verilen küçük dik üçgenle benzerlik yapılarak c, a, b arasında bağıntı bulunabilir"* şeklinde ifade ederken ikinci aşamada görselden faydalanarak Pisagor teoremini elde etmiştir.

Ö4 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlikler verilmeden, görseli Pisagor teoremi ile ilişkilendirememiştir.

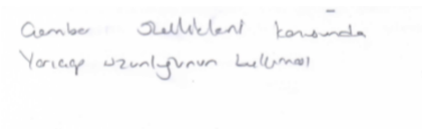
4.2.1.5. Ö5'in İspatından Elde Edilen Bulgular

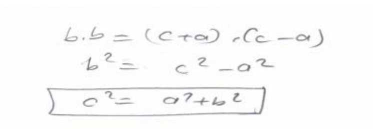
Ö5 soru ile karşılaştıktan sonra *"burada da Pisagor teoremini görselden faydalanarak nasıl elde edildiğini söylemiş ben burada ııı yarıçapı c olan bir çember ve merkezden kirişe indirilen dikme iki eşit parçaya böler ıı teoreminden yararlanarak buranın eşitliği de b olacaktır* (Şekil 43a) *ben şu noktaya* (Şekil 43*b) göre iç kuvvet uyguladığım zaman b çarpı b eşittir, c artı a çarpı c-a (yani b.b=(c+a)·(c-a)) eşitliğini elde ederim ki buradan da b^2 iki kare farkından c^2-a^2 ve bizden de istenen c^2 nin a^2+ b^2 eşitliğine ulaşmamızdır. Pisagor bağıntısı bu şekilde elde ediliyor. Aynı zamanda eşlik de kurulabilir. Benzerlikte kurulabilir ama benim aklıma gelen ilk ifade iç kuvvetten yararlanarak ispatlamak oldu. "*

a)  b) 

Şekil 43. Ö5'in ispat süreci

Ö5 ifade ettiklerini Şekil 44b'deki gibi kâğıdına yazmıştır.

a) 

b) 

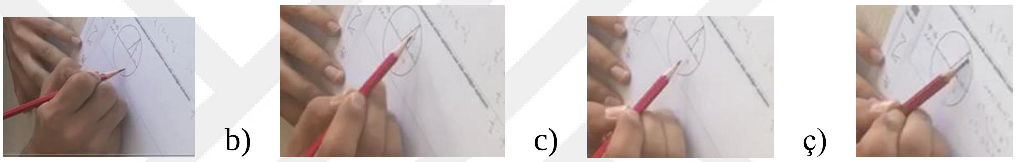
Şekil 44. Ö5'in birinci ve ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları

Ö5'in birinci aşamada verdiği yanıt (Şekil 44a) ile ikinci aşamada verdiği yanıt karşılaştırıldığında, birinci aşamada "çember özellikleri konusunda yarıçap uzunluğu bulma "şeklinde ifade ederken ikinci aşamada görselden faydalanarak Pisagor teoremini elde etmiştir. Ö5 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden görseli olarak Pisagor teoremiyle ilişkilendirememiştir.

4.2.1.6. Ö6'nın İspatından Elde Edilen Bulgular

Görsele baktıktan sonra *"Şimdi ben bu soruda çapın kestiği kiriş dik olursa eğer bu iki eş parçaya ayrılır demektir."* dedikten sonra Şekil 45a'daki gibi kirişi uzatmıştır. Daha sonra *"Burası (Şekil 45b'de gösterildiği uzunluk) b uzunluğunda ise burası da (Şekil 45c'de gösterildiği uzunluk) b uzunluğundadır. Uzunluklardan biri b ise diğeri de b uzunluğundadır demektir. Şimdi bizim kuvvetler çarpımımız vardı $a + c$ ile $c - a$'nın çarpımı, b ile b'nin çarpımına eşit olmak zorunda devam edelim bunu açtığım zaman burada zaten iki kare farkı vardı. Buda nedir $c^2 - a^2$ ye ulaşmış oluyorum. b ile b'nin çarpımı da b^2ye eşit oluyor. a^2 karşıya gönderecek olursam c^2 eşittir $-a^2$ karşı tarafa $+a^2$ olarak geçer bu da bize şu üçgendeki* (Şekil 45ç'de gösterdiği gibi) *Pisagor teoremine ulaştırır"* demiştir.

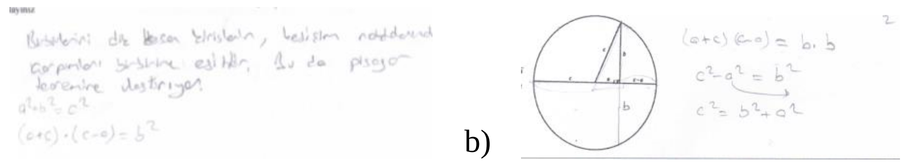
a) b) c) ç)



Şekil 45. Ö6'nın ispat süreci

Ö6 ifade ettiklerini Şekil 46b'deki gibi kâğıdına yazmıştır.

a) b)

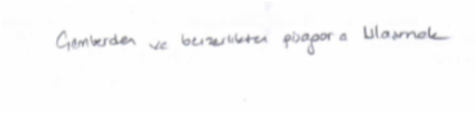


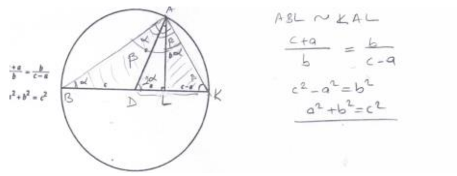
Şekil 46. Ö6'nın birinci ve ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları

Ö6'nın birinci aşamada verdiği yanıt (Şekil 46a) ile ikinci aşamada verdiği yanıt karşılaştırıldığında, birinci aşamada *"Birbirini dik kesen kirişlerin, kesişim noktasından çarpımları birbirine eşittir. Bu da Pisagor teoremine ulaştırıyor."* şeklinde ifade etmiş, ikinci aşamada görselden faydalanarak Pisagor teoremini elde etmiştir. Ö6 sadece görselden yola çıkarak yani eşitlik verilmeden de görseli Pisagor teoremiyle ilişkilendirebilmiştir.

4.2.1.7. Ö7'nin İspatından Elde Edilen Bulgular

Görsele bakıp biraz düşündükten sonra *"Pisagor teoremini bulmaya çalıştım. Burada çemberden faydalandım ve benzerlikten yararlanarak Pisagor teoremine* *ulaşmaya çalıştım ve ulaştım”* demiştir. İfade ettiklerini Şekil 47b’deki gibi kâğıdına yazmıştır.

a) 

b) 

Şekil 47. Ö7’nin birinci ve ikinci aşamada kâğıdına yazdıkları

Ö7’nin birinci aşamada verdiği yanıt ile ikinci aşamada verdiği yanıt karşılaştırıldığında, birinci aşamada *“Çember ve benzerlikten Pisagor’a ulaşmak” şeklinde* ifade ederken ikinci aşamada görselden faydalanarak Pisagor teoremini elde etmiştir. Ö7 sadece görselden de yola çıkarak yani eşitlik verilmeden görseli Pisagor teoremiyle ilişkilendirebilmiştir.

BÖLÜM V
SONUÇLAR ve TARTIŞMA

5.1. Birinci Alt probleme yönelik sonuçlar ve tartışma

Çalışmaya katılan 20 matematik öğretmeninden 19'u Pisagor teoreminin Garfield tarafından yapılmış olan ispatındaki görseli kitaplarda (üniversite hazırlık soru bankası, geometri test kitabı, ders kitabı, matematik test kitapları), ilkokulda veya derslerde gördüklerini ifade etmişlerdir. Yalnızca Ö14 daha önce görmediğini ifade etmiştir. İkinci aşamaya katılan 7 matematik öğretmeni de (Ö1, Ö2, Ö3, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7) görseli daha önceden gördüklerini ifade etmişlerdir. Fakat Hardy tarafından yapılan ispattaki görseli ise çalışmaya katılan 20 matematik öğretmeninden yalnızca on ikisi (Ö2, Ö3, Ö5, Ö8, Ö10, Ö11, Ö12, Ö15, Ö17, Ö18, Ö19, Ö20) kitaplarda (matematik, geometri, ders kitabı gibi), matematik derslerinde veya geometride gördüklerini ifade etmişlerdir. Diğer 8 matematik öğretmeni ise (Ö1, Ö4, Ö6, Ö7, Ö9, Ö13, Ö14, Ö16) ise daha önce görmediklerini ifade etmiştir. İkinci aşamadaki görüşmelere katılan tüm öğretmenler Garfield tarafından yapılan ispattaki görseli önceden gördüklerini ifade etmişken Hardy tarafından yapılan ispattaki görseli ise Ö1, Ö4, Ö6, Ö7 daha önce görmediklerini ve Ö2, Ö3, Ö5 daha önce gördüklerini ifade ettiği görülmektedir. Her iki görsel birlikte değerlendirildiğinde Ö14 her iki görseli daha önceden görmediğini ifade eden tek öğretmendir. Ö14 eğitim fakültesinden mezun 9 yıllık lise matematik öğretmenidir. Pisagor teoremi ile ilişkilendiremese bile geometri derslerinde de en azından bir şekilde karşılaşmış olduğu sorular, örnekler ile benzerlik kurması beklenmiştir.

Garfield tarafından yapılan Pisagor teoreminin ispatındaki görselin ne ifade ettiğine yönelik birinci aşamada bir matematik öğretmeni (Ö20) hiçbir cevap vermezken 8 öğretmenin (Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö6 Ö7, Ö10, Ö12) cevabı "*Pisagor teoremi"* kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu öğretmenlerden yalnızca 6 matematik öğretmeni Pisagor teoremi ile ilgili olduğunu ifade etmiştir. 2 öğretmen ise (Ö4, Ö7) alanlardan yola çıkarak Pisagor teoremini açıklamış ama Pisagor teoremi diye ifade etmemiştir. Bu öğretmenlerin cevabı da Pisagor teoremi kategorisi altına alınmıştır. Bu 6 öğretmenden yalnızca biri (Ö6) "*Üçgenlerin alanı toplamı yamuğun alanına eşit olduğundan Pisagor'a ulaşılır*" şeklinde ifade etmiş ve görselden yararlanarak nasıl elde edilebileceğine yönelik açıklama yapmıştır. Yani Ö6 hem Pisagor teoremi olduğunu ifade etmiş hem de görsel ile nasıl elde edilebileceğini açıklamıştır. Diğer öğretmenler (Ö1, Ö2, Ö5, Ö10, Ö12) yalnızca Pisagor teoremi yazmış fakat nasıl elde edilebileceği ile ilgili herhangi bir açıklama yapmamışlardır. Bunun yanı sıra bu 6 öğretmen Pisagor teoremine ek olarak da üçgenlerde eşlik benzerlik, şekli açıklama ifadelerini yazmışlardır. Sonuç olarak 8 öğretmen Pisagor teoremi olduğunu ifade ederken yalnızca 3 öğretmen nasıl bulunacağı ile ilgili açıklama yapmıştır. Geriye kalan on bir matematik öğretmeni ise ya görselde verilen geometrik şekillere odaklanmışlar ya da eşlik-benzerlik demişlerdir. Gerçekten 5 matematik öğretmeni (Ö3, Ö9, Ö13, Ö17, Ö18) yalnızca görselde verilen geometrik şekillere odaklanmışlardır. Bu öğretmenlerden üçü (Ö3, Ö17, Ö18) sadece dik yamuk derken 2'si (Ö9, Ö13) dik yamukla birlikte dik üçgen ve eş üçgenleride ifade etmişlerdir. 4 öğretmen (Ö8, Ö11, Ö14, Ö15) ise "benzerlik" şeklinde ifade etmişlerdir. Bu öğretmenlerden biri yalnızca benzerlik yazarken ikisi benzerliğe ek olarak dik yamuk dik üçgen eş üçgen şeklinde ifade etmişken bir tanesi ise benzerliğe ek olarak yamuk-yamukta alan şeklinde ifade etmiştir. 2 öğretmen (Ö16, Ö19) ise dik üçgenle ilgili bağıntılar şeklinde ifade etmiştir. Özellikle bu iki öğretmen ile farklı zaman ve mekanda veri toplanmasına rağmen aynı kelimeleri ifade etmiş olmaları dikkat çekmektedir. 1 öğretmen (Ö4) ise yamuğun alanına ek olarak eş üçgenler yardımıyla kenar uzunluğunu bulma ve kenarlar arasındaki uzunluk ilişkisini ifade ettiği görülmektedir. Özetlemek gerekirse çalışmaya katılan 20 matematik öğretmeninden 19 tanesi görseli daha önce gördüklerini ifade etmelerine rağmen yalnızca 8 öğretmen (Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7, Ö10, Ö12,) Pisagor teoremi ile ilişkili olabileceğini ifade etmiş bu öğretmenlerden de yalnızca 3'ü (Ö4, Ö6, Ö7) bu ilişkinin nasıl olduğunu açıklamıştır. Yalnızca bir öğretmen (Ö6) hem Pisagor teoremi olduğunu ifade etmiş hem nasıl bulunacağını ifade etmiştir. İki öğretmen (Ö4 ve Ö7) Pisagor teoremi dememesine rağmen alanları eşitlemekten bahsederken 5 öğretmen (Ö1, Ö2, Ö5, Ö10, Ö12) nasıl bulunacağını açıklamadan sadece Pisagor teoremi demiştir. Diğer taraftan Pisagor teoremi olduğu ifade eden 8 öğretmenden 6'sı (Ö1, Ö2, Ö4, Ö5, Ö6, Ö7) ikinci aşamaya katılan öğretmenlerdir. Pisagor teoremi olduğunu ifade etmeyen Ö3 ise sadece "*Dik yamuk şekli*" şeklinde ifade etmiş yani sadece görseli açıklamıştır.

Hardy tarafından yapılan Pisagor teoreminin ispatındaki görselin ne ifade ettiğine yönelik birinci aşamada verdikleri cevaplardan 5 öğretmenin cevabı (Ö7, Ö8, Ö6, Ö4, Ö14) Pisagor kategorisinde değerlendirilmiştir. Bu 5 öğretmenden 3'ü (Ö4, Ö6, Ö7) ikinci aşamaya katılan öğretmenlerdir. İkinci aşamaya katılan diğer öğretmenler ise tam olarak ifade edemiyorum (Ö1), çemberin özellikleri, çemberde teğet yarıçap, kiriş (Ö2, Ö,5, Ö3) şeklinde ifade etmişlerdir. Güner ve Topan (2016) ilköğretim matematik öğretmeni adaylarıyla yapmış olduğu çalışmada Pisagor teoreminin ispatı gibi aşina oldukları ispatlarda, diğer ispatlara nazaran daha fazla geçerli ispat yazabildikleri görülmüştür. Bu durum öğretmen adaylarının ispata dair yaşamış oldukları deneyimler ile ispat becerileri arasında doğru orantı olduğu şeklinde yorumlanmıştır. Gierdien (2007) sözsüz ispatlarda bulunan şekiller ve diyagramalar teoreme nasıl başlayacağımıza ve teoremin niçin doğru olduğunu anlamamıza yardımcıdırlar. İkinci aşamaya katılan, birinci aşamada Pisagor teoremi ile ilişkilendiremeyen öğretmenler de görsel ile eşitlik birlikte verildiğinde görseli Pisagor teoremiyle ilişkilendirerek Pisagor teoreminin ispatını yapabildikleri görülmüştür. Öğrencilere farklı ispat yöntemleri öğretebilmek için öğretmenlerin farklı ispat yöntemleri hakkında bilgi sahibi olmaları gerektiği söylenebilir (Polat 2018, s.150)

5.2. İkinci alt probleme yönelik sonuçlar ve tartışma

Sözsüz ispatı yapma sürecinde katılımcılar soruyu okuma, soruyu açıklama, plan yapma, görseldeki geometrik şekilleri inceleme, görselde verilen ilişkileri açıklama, verilen matematiksel ifadeleri görsel üzerinde gösterme, kavramsal bilgi ifade etme, kavramsal bilgiyi görsele uyarlama, ispatı yapma, değerlendirme yapma gibi aşamaları izlemişlerdir. Bu aşamalar Boero (1999), Heinze ve Reiss (2004) aşamalarına benzemektedir. Görseldeki geometrik şekilleri inceleme ve verilen matematiksel ifadeleri inceleme sonra matematiksel ifade ile görsel arasında ilişki kurma aşamasının tüm ispat sürecini yönlendirdiği görülmektedir. Dolasıyla Doruk'un (2016) ifade ettiği gibi ispata başlamadan önce başarılı bir argümantasyon süreci geçirme ispat yapma sürecinde önemlidir. Sözsüz ispat sürecinde ön öğrenmeler olarak kavramsal bilginin de önemli bir boyut olduğu ifade edilebilir. Bu bulgu Karras (2012) geometrik bilgi düzeyi iyi olan öğretmen adaylarının sözsüz ispatları daha iyi çözebildiği önceden öğrenilmiş bilgiyi kullanmayı gerektirdiği görüşünü desteklemektir. İspatı yapma aşaması var olan bilgilerin transferi, işlem yapabilme becerisi gibi birçok değişkeni içinde bulundurmaktadır. Bu aşamada ispat yapmada başarısız olma ile ilgili çalışmaların (Bardelle, 2009; Moore, 1994; Reiss *vd*., 2002) bulgularını desteklemektedir.

Diğer taraftan öğrencilere ispat ve muhakeme becerisinin öğretimi ve gelişimi öğretmenlere bağlıdır. Eğer öğretmenler öğrenciler için geniş bir öğrenme yelpazesi sunarlar ve değişik ispat yöntemlerini verirlerse öğrenciler matematiği ve matematiksel düşünceyi daha iyi anlayıp yaratıcılıklarını artıracaklardır (Altıparmak ve Öziş, 2005). Chambers (1999) Pisagor teoremini "en iyi" öğretme yöntemi için öğretmenlere farklı seçenekler sunmak, alternatif yaklaşımlar üzerinde düşünmeye teşvik etmek ve öğretmenleri Pisagor teoremini öğretme bağlamında ispat konusunu düşünmeye zorlamak olduğunu ifade etmiştir. Nitekim öğretmenler eğer pisagor teoreminin uzunluk ile mi alan ile mi verilmesi konusunda derin anlayış sahibi olabilirlerse hem nasıl ispatlanacağı hem de nasıl doğrulanacağı konusunda rehberlik edebileceklerdir. Üstbilişsel olarak da kendi ispat süreçlerinin farkında olurlarsa öğrencilerin zorluklarının üstesinden nasıl gelebilecekleri konusunda anlayışa sahip olabileceklerdir. Sözsüz ispatlarda, ispat yapan neyin önemli olup olmadığını, ilişkileri neye göre sıralaması gerektiğini saptamak durumundadır (Borwein ve Jörgenson, 2002). Dolayısıyla bu ispatların derslerde kullanılması, öğrenciye ispat becerisinin yanında muhakeme yapabilme, sonuca ulaşabilmesi için değerlendirme ve matematiksel bilgiyi kullanabilme olanağı sağlayacağı düşünülmektedir.

5.3. Öneriler

İleride yapılacak olan çalışmalara yönelik aşağıdaki öneriler sunulabilir.

1. Bu çalışmada yalnızca Pisagor teoremi ile ilgili sözsüz ispat yapma süreci incelenmiştir. Farklı sözsüz ispatlar ile de benzer çalışmalar yapılabilir.
2. Bu çalışmada yalnızca öğretmenlerin sözsüz ispat yapma süreçleri incelenmiştir. Bu çalışmanın sonuçları öğretmen adaylarının ve öğrencilerin sözsüz ispat yapma süreçleri karşılaştırılabilir benzerlik ve farklılıkları belirlenebilir.

3. Bu çalışmada öğretmenlerden herhangi bir sözsüz ispat oluşturmaları beklenmemiştir. Öğretmen, öğretmen adayları ve öğrencilerin kendilerinin oluşturabileceği sözsüz ispatlar ile ilgili çalışmalar yapılabilir.
4. Matematik derslerinde öğretmenlerin sözsüz ispatlar yöntemlerini etkili kullanmalarını sağlamak için öğretmenlere sözsüz ispatlar ve yöntemleriyle ilgili çeşitli hizmet içi eğitimler verilebilir. Bu sayede öğretmenlerin sözsüz ispatlarla ilgili yeterli bilgiye sahip olmaları sağlanabilir.
5. Matematik öğretim programlarındaki kazanımlar ve açıklamaları detaylandırılabilir ve bunun yansımasından biri olan ders kitaplarında daha fazla ve farklı etkinliklere yer verilebilir.

KAYNAKÇA

Almeida, D. (1996). Variation in proof standarts: Implication for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 27*(5), 659-665. doi:10.1080/0020739960270504.

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: can the genesis of mathematical knowledge teach us anything? *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 34*(4), 479-488. doi:10.1080/0020739031000108574

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2006). *Math made visual: Creating images for understanding mathematics.* United States of America: Mathematical Association of America. doi:10.5948/UPO9781614441007

Alsina, C., & Nelsen, R. (2009). *When Less Is More: Visualizing Basic Inequalities.* Mathematical Association of America .

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2010). An invitation to proofs without words. *European Journal of Pure and Applied Mathematics, 3*(1), 118-127. http://www.labjor.unicamp.br/comciencia/files/matematica/ar_roger/ar_roger .pdf adresinden alındı

Alsina, C., & Nelsen, R. B. (2011). Icons of Mathematics: An Exploration of Twenty Key Images. Washington, DC: Mathematical Association of America

Altıparmak, K., & Öziş, T. (2005). Matematiksel ispat ve matematiksel muhakemenin gelişimi üzerine bir inceleme, Ege Eğitim Dergisi, 6(1), 25–3. http://dergipark.gov.tr adresinden edinilmiştir.

Argün, Z., Arıkan, A., Bulut, S., & Halıcıoğlu, S. (2014). *Temel Matematik Kavramların Künyesi.* Ankara: Gazi Kitapevi.

Arsac, G. (2007). Origin of mathematical proof: History and epistemology. In P. Boero (Ed.), (pp. 27-42). Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice. Sense Publishers. Rotterdam, The Netherlands.

Aslaner, R. &İlhan, A (2018). Kare İçin İfade Edilen Pisagor Bağıntısının Diğer Düzgün Çokgenlere ve Daireye Uygulanması. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi*, 45, 55-67

Aylar, E. (2014). *7. sınıf öğrencilerinin ispata yönelik algı ve ispat yapabilme becerilerinin irdelenmesi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, İlköğretim Bilim Dalı, Ankara.

Baki, A. (2008). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi.* Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

Baki, A. & Bütüner, S. (2013). *Cebirin Tarihsel Gelişimi*. Turkish Journal of Computer and Mathematics Education (TURCOMAT), 2 (3), Retrieved from https://dergipark.org.tr/tr/pub/turkbilmat/issue/21565/231446

Bardelle, C. (2009). Visual Proofs: An Experiment. V. Durand-Guerrier et a (Dü.), *Annual meeting CERME6* içinde (s. 251-260). Lyon: INRP. http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg2-08-bardelle.pdf adresinden alınmıştır

Bayazıt, İ. (2017). İspat'ın önemi ve ispat konusundaki öğretmen yeterliklerinin incelenmesi. *International Periodical for the Languages, Literature and History of Turkish or Turkic, 12*(14), s. 19-40. doi:10.7827/TurkishStudies.11589

Bayer, R. (2009). *Proof By Picture.* University of California, Berkeley. http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.353.5627&rep=rep1&type=pdf adresinden alınmıştır

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*, 23-40.

Bell, C. J. (2011). Proof without words: A visual application of reasoning. *Mathematics Teachers, 104*(9), 690-695. http://is234mathforum.webs.com adresinden alınmıştır

Birkhoff, J. D., & Beatley, R. (2000). Basic geometry. Chelsea: AMS Publication,

Böge, H., & Akıllı, R. (2019). *Ortaokul ve İmam Hatip Matematik 8 Ders Kitabı* (2nci b.). (M. Peker, Dü.) Devlet Kitapları.

Brawsie, J., & Etchemendy, J. (1991). Visual information and valid reasoning. W. Zimmermann, & S. Cunningham (Dü) içinde, *Visualization in teaching and learning mathematics* (s. 9-24). NW Washington, DC: Mathematical Association of America.

Bülbül, A., & Urhan, S. (2016, Hune 269). Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt süreçleri Arasındaki İlişkiler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 10*(1), 0-0. doi:10.17522/nefefmed.00387

Cadwallader Olsker, T. (2011). What Do We Mean by Mathematical Proof? *Journal of Humanistic Mathematics, 1*(1), 33-60. doi:10.5642/jhummath.201101.04

Casselman, B. (2000, November). *Pictures and proofs.* Notices of the AMS, 47(10), 1257-1266.

Chambers, P. (1999). Teaching Pythagoras' theorem. Still hazy after all these years. *Mathematics in School*, 28(4), 22-24.

Cihan,F. (2019). *Matematik öğretmen adaylarının ispatla ilgili alan ve pedagojik alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir ders tasarımı*. Yayımlanmamış Doktora Tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, İstanbul.

Crawford, D. (2001). Pythagoras' theorem – more than just a square rule. *Mathematics in School,* 30(1), 14-17.

Çetin, Ö., Aksakal, U., Ertürk, Ü., Şay, G., & Tığlı, İ. (2019). *Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokul Matematik 8 Ders Kitabı* (1inci b.). (Ö. Çetin, Dü.) Devlet Kitapları.

Çontay, E. G. (2017). *Ortaokul matematik öğretmeni adaylarının ispat şemaları.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Pamukkale Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Denizli.

De Lemos, J. (1995). *Reader reflections: The Pythagorean theorem.* Mathematics Teacher, 88(1), 79-80.

De Villiers, M. (1990, November). *The Role and Function of Proof in Mathematics.* Pythagoras, 24, 17-24.

Dede. (2013). Matematikte ispat: önemi, çeşitleri ve tarihsel gelişimi. İ. Zembat, M. F. Özmantar, E. Bingölbali, H. Şandır, & A. Delice (Dü) içinde, *Tanımları ve Tarihsel Gelişimleriyle Matematiksel Kavramlar* (s. 17). Ankara: Pagem Akademi.

Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 4*(2), 47-71.

Demir, E. (2017). *Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının muhakeme hatalarının ispatlama bağlamında incelenmesi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Trabzon.

Demiray, E. (2013). *An investigation of pre-service middle school mathematics teachers' achievement levels in mathematical proof and the reasons of their wrong interpretations.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İlköğretim Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Ankara.

Demircioğlu, H., & Polat, K. (2015). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının "sözsüz ispat" yöntemine yönelik görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies, 41*, 233-254. doi:10.9761/JASSS3171

Demircioğlu, H., & Polat, K. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının “sözsüz ispatlar” ile yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *International Journal of Turkish Education Sciences, 4*(7), 82-99.

Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı, Erzurum.

Doyle, T., Kutler, L., Miller, R., & Schueller, A. (2014). Proofs Without Words and Beyond. *Mathematical Association of America*. doi:10.4169/convergence20140801

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. F. Hitt, & M. Santos (Dü.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* içinde *1*, s. 3-26. Mexico: ERİC. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf adresinden alındı

Ferguson, K. (2008). Pythagoras. His lives and the legacy of a rational universe. New York: Walker Publishing Company.

Flores, A. (1993). Pythagoras Meets Van Hiele. School Science and Mathematics. 93(3)

Flores, A. (2000). Geometric representations in the transition from arithmetic to algebra. F. Hitt (Dü.), *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education; Reprensentation and Mathematics Visualization* içinde, (s. 9-29).

Frederickson, G. N. (2002). Hinged dissections: Swinging & twisting. Britain: Cambridge University Press.

Gelişen, A. (2016). *9. Sınıfta üçgenlerin öğretiminde origami ve sözsüz ispatların kullanılması ile ilgili bir öğretim deneyi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Sivas.

Giaquinto, M. (2007). *Visual Thinking in Mathematics, an epistemological study.* Oxford University Press. doi:10.1093/acprof:oso/9780199285945.001.0001

Gierdien, F. M. (2007). From “Proofs without words” to “Proofs that explain” in secondary mathematics. *Pythagoras, 65,* 53-62. doi:10.4102/pythagoras.v0i65.92

Givental, A. (2006). The Pythagorean theorem: What is it about? The American Mathematical Monthly, 113(3), 261-265.

Gökkurt, B., Soylu, Y., & Şahin, Ö. (2014, December). Analysis of the mathematical proof skills of students of science education. *Educational Research Quarterly, 38*(2), 3-22.

Güler, G., & Ekmekçi, S. (2016). Matematik Öğretmeni Adaylarının İspat Değerlendirme Becerilerinin İncelenmesi: Ardışık Tek Sayıların Toplamı Örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi, 11*(1), 59-83.

Güner, N. (2018). Pisagor Teoremini Nasıl Öğretirsiniz: Ders Planlarının Analizi. *Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Fakültesi Dergisi*. 51(1), 119-141. DOI:10.30964/auebfd.405041

Güner, P., & Topan, B. (2016, Aralık). Prospective Elementary Mathematics Teachers' Abilities of Using Geometric Proofs in Teaching of Triangle. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED), 10*(2), 210-242.

Güneş, K, & Tapan Broutin, M. (2017). 8. Sınıf Öğrencilerine Pisagor Bağıntısının Adidaktik Bir Ortamda Öğretimi. *Academy Journal of Educational Sciences,* 1 (1), 11-22. DOI: 10.31805/acjes.340364

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof, *Interchange* 21(1), 6–13.

Hanna, G. (1991). Research on mathematical proof. (D. Tall, Dü.) *Advanced mathematical thinking*, 54-61.

Hanna, G. (2000). Proof, Explanation and Exploration: An Overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5-23. doi:10.1023/A:1012737223465

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007, January 24). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM Mathematics Education, 39*(1-2), 73-78. doi:10.1007/s11858-006-0005-0

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. K. L. Frank (Dü.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (s. 805-842). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hawro, J. (2007). University students' difficulties with formal proving and attempts to overcome them. *CERME-5*, (s. 2290-2299). http://www.erme.tu-dortmund.de/~erme/CERME5b/WG14.pdf#page=72 adresinden alınmıştır

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 389-399. doi:10.1007/BF01273372

Hershkowitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. (P. Nesher, & J. Kilpatrick, Dü) *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 70-95. doi:10.1017/CBO9781139013499.006

Hodgkin, L. (2005). A history of mathematics. From Mesopotamia to modernity. Oxford: Oxford University Press.

Huang, R., & Leung, F. K. S. (2002). How Pythagoras' theorem is taught in Czech Republic, Hong Kong and Shanghai: A case study. ZDM Mathematics Education, 34(6), 268-277.

Hugener, I., Pauli, C., Reusser, K., Lipowsky, F., Rakocy, K., & Klieme, E. (2009, February). Teaching patterns and learning quality in Swiss and German mathematics lessons. *Learning and Instruction, 19*(1), 66-78. doi:10.1016/j.learninstruc.2008.02.001

Jamnik, M., Bundy A. & Green, I.(1997). Automation of diagrammatic reasoning. *15th International Joint Conference on Artificial Intelligence, 1*, s. 528-533. San Mateo, CA. https://www.cl.cam.ac.uk/~mj201/publications/pub873.drii-ijcai1997.pdf adresinden alındı

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology , 31*(1), 53-60. doi:10.1080/002073900287381

Joost-Gaugier, C. L. (2009). Pythagoras and renaissance Europe: Finding heaven. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Kahn, C. H. (2001). Pythagoras and the Pythagoreans: A brief history. Indianapolis, IN: Hackett Publishing Company.

Kaplan, R., and Kaplan, E. (2011). Hidden harmonies: The lives and times of the Pythagorean theorem. New York: Bloombury Press.

Karrass, M. (2012). *Diagrammatic Reasoning Skills of Pre-Service Mathematics Teachers.*Unpublished Doctoral Thesis , Columbia University, Graduate School of Arts and Sciences. doi:10.7916/D8PK0P5M

Katz, V. J. (1998). A history of mathematics: An introduction. New York: Addison-Wesley.

Knuth, E. J. (2002, November). Secondary School Mathematics Teachers' Conceptions of Proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379-405. http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT7050/articles/Knuth(2002).pdf adresinden alındı.

Konyalıoğlu, A. C. (2015). *Matematik alan Eğitimi Test Kitabı Konu Özeti ve Çözümlü.* Erzurum: Ertual Akademi.

Küçükbulut, C. (2019). *Öğrencilerin ispat yapabilme becerilerinin gelişimine 5e modelinin etkisi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Kastamonu Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İlköğretim Anabilim Dalı, Kastamonu.

Lipowsky, F., Rakoczy, K., Pauli, C., Drollinger-Vetter, B., Klieme, E., and Reusser, K. (2009). Quality of geometry instruction and its short-term impact on students’ understanding of the Pythagorean theorem. Learning and Instruction, 19, 527-537. doi: 10.1016/j.learninstruc. 2008.11.001

Lockhart, P. (2009). *A Mathematician’s Lament.* https://www.maa.org/external_archive/devlin/LockhartsLament.pdf adresinden alınmıştır.

Loomis, E. S. (1968) The Pythagorean Proposition: Its Demonstrations Analyzed and Classified and Bibliography of Sources for Data of the Four Kinds of 'Proofs', 2nd edn. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics

Maanen, J. V. (2006). Diagrams and mathematical reasoning: Some points, lines and figures. Journal of British Society for the History of Mathematics, 21(2), 97-101.

Mancoğlu, E. (2019). *Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirme durumlarının incelenmesi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Ana Bilim Dalı, Ankara.

Martinez, A. A. (2012). The cult of Pythagoras: Math and myths. Pittsburgh, PA: University of Pittsburgh Press.

Maor, E. (2007). The Pythagorean theorem. A 4,000 year history. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Miller, R. L. (2012). *On Proofs Without Words.* https://www.whitman.edu/documents/Academics/Mathematics/Miller.pdf adresinden alındı

Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2013). *İlköğretim Matematik Dersi (6, 7 ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı.* Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2013). *Ortaöğretim Matematik Dersi (9, 10, 11 ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı.* Ankara: MEB.

Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı. (2018). *Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10,11 Ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı.* Ankara: MEB.

Moralı S, Uğurel I., Türnüklü E. & Yeşildere S. (2006, Mart). Matematik Öğretmen Adaylarının İspat Yapmaya Yönelik Görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 14*(1), 147-160.

Morash, R. P. (1987). *Bridge to abstract mathematics: Mathematical proof and structures.* New York: Random House, Inc.

Mudaly, V. (2013, July 01). Is proving a visual act? *Mevlana International Journal of Education, 3* (Special Issue: Dynamic and Interactive Mathematics Learning Environments), 36-44. doi:10.13054/mije.si.2013.04

Nelsen, R. B. (1993). *Proofs without words: Exercises in visual thinking.* The Mathematical Association of America.

Nelsen, R. B. (2000). *Proofs without words ıı: More exercises in visual thinking.* Mathematical Association of America.

Nelsen, R. B. (2015). *Proofs Without Words III: Further Exercies in Visual Thinking.* Mathematical Association of America.

Öçal, M. F., & Güler, G. (2010). Pre-service mathematics teachers' views about proof by using concept maps. *Procedia - Social and Behavioral Sciences, 9*, 318-323. doi:10.1016/j.sbspro.2010.12.157

Özer, Ö., & Arıkan, A. (2002). Lise Matematik Derslerinde Öğrencilerin İspat Yapabilme Düzeyleri. *5. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Konferansı.* Ankara: Ortadoğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi.

Öztürk, T. (2016). *Matematik Öğretmeni Adaylarının İspatlama Becerilerini Geliştirmeye Yönelik Tasarlanan Öğrenme Ortamının Değerlendirilmesi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Trabzon.

Pickover, C. A. (2009). The math book. From Pythagoras to the 57th dimension, 250 milestones in the history of mathematics. New York: Sterling.

Pekşen Sağır, P. (2013). *Matematik öğretmen adaylarının ispat yapma süreçlerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Marmara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı, Ortaöğretim Matematik Öğretimi Bilim Dalı, İstanbul.

Polat, K. (2018). *Alternatif bir ispat yöntemi olarak sözsüz ispatlar: Lise öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Erzurum.

Rodd, M. M. (2000). On Mathematical Warrants: Proof Does Not Always Warrant, and a Warrant May Be Other Than a Proof. *Mathematical Thinking and Learning, 2*(3), 221-244. doi:10.1207/S15327833MTL0203_4

Saikia, M. P. (2015). The Pythagoras theorem. Asia Pac. Math. Newsl. 5(2), 5–8.

Serfiçeli, Z., & Atmaz, D. (2019). *Ortaokul ve İmam Hatip Ortaokulu Matematik 8. Sınıf Ders Kitabı.* Ankara: Kök-e Yayıncılık.

Sigler, A., Segal, R., & Stupel, M. (2016). The standard proof, the elegant proof, and the proof without words of tasks in geometry, and their dynamic investigation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(8), 1226-1243. doi:10.1080/0020739X.2016.1164347

Sparks, J.C. (2008). *The Pythagorean Theorem*. Published by Author House 1663 Liberty Drive, Suite 200 Bloomington, İndiana 47403

Stein, M. K., Smith, M. S. (1998). *Mathematics tasks as a framework for reflection: From research to practice.* Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4), 268-275.

Strathern, P. (1997). *Pythagoras and his theorem*. London: Arrow Books.

Štrausová, I., & Hašek, R. (2013). "Dynamic visual proofs" using DGS. *Electronic Journal of Mathematics & Technology, 7*(2), 130-142.

Şadan, N. (2017). *Fen lisesi öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçlerinin incelenmesi üzerine bir öğretim deneyi çalışması.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı.

Şimşek, E., Şimşek, A., & Dündar, S. (2013, Kasım). Lise 12. Sınıf Öğrencilerinin Geometrik İspat Süreçlerinin İncelenmesi. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 2*(4), 43-47.

Tekin, B., & Konyalıoğlu, A. C. (2010). Trigonometrik Fonksiyonların Toplam ve Fark Formüllerinin Ortaöğretim Düzeyinde Görselleştirilmesi. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, Cilt 5, 1*(2), s. 24-37.

Topkaya, H. (2013). *Matematiksel Mantık, İspat Teknikleri, Fibonacci Sayısı, Pisagor Teoremi İspatı.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.

Tuncer, G. (2014). *Matematik bölümü öğrencilerinin ispat algıları*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

Uçak, A., Emir, E., Uçkun Kelek, F., Kutlu, G., & Kahraman, S. (2019). *Ortaöğretim Fen Lisesi Matematik 9 Ders Kitabı* (1inci b.). (E. Ulualan, Dü.) Devlet Kitapları.

Uğurel, I., & Moralı, S. (2010). Bir Ortaöğretim Matematik Dersindeki İspat Yapma Etkinliğine Yönelik Sınıfiçi Tartışma Sürecine Öğrenci Söylemleri Çerçevesinde Yakından Bakış. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi, 28,* 135-154.

Uğurel, I., Moralı, S., & Karahan, Ö. (2011). Matematikte Yetenekli Olan Ortaöğretim Öğrencilerin Sözsüz İspat Oluşturma Yaklaşımları. *I. Uluslararası Eğitim Programları ve Öğretim Kongresi.* (5-8 Ekim) Eskişehir: Anadolu Üniversitesi.

Uğurel, I., Moralı, S., Karahan, Ö., & Boz Yaman, B. (2016). Mathematically gifted high school students' approaches to developing visual proofs (vp) and preliminary ideas about VP. *International Journal of Science and Mathematics Education, 4*(3), 174-197. doi:10.18404/ijemst.61686

Ülker, E. (2018, Ocak). *Ortaokul ispata giriş: Gerçekçi matematik eğitimi çerçevesinde sözsüz ispatların kullanımı*. Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Eskişehir.

Ünveren, E. N. (2010). *İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispata yönelik tutumlarının matematiksel modelleme sürecinde incelenmesi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi, Balıkesir.

Veljan, D. (2000). The 2,500-year-old Pythagorean theorem. Mathematics Magazine, 73(4), 259-272.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2019). *İlkokul ve Ortaokul Matematiği Gelişimsel Yaklaşımla Öğretim* (7th b.). (S. Durmuş, Dü.) Nobel Akademik Yayıncılık.

Wallace, E. C., & West, S. F. (2004). *Roads to Geometry* (3rd b.). Pearson.

Weber, K. (2001, Ocotber). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101-119. doi:10.1023/A:1015535614355

Yang, Y. (2009). How a Chinese teacher improved classroom teaching in Teaching Research Group: a case study on Pythagoras theorem teaching in Shanghai. ZDM Mathematics Education, 41, 279-296. doi: 10.1007/s11858-009-0171-y

Yassin, E. A. (2013). *The effect of using the proof without words method on the results and the transfer of learning among the scientific the first grade secondary students in Nablus.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, An-Najah National University, Educational Sciences in Methods of Tachine Mathematics, Faculty of Graduate Studies, Nablus. https://scholar.najah.edu/sites/default/files/Eman%20Yassin.pdf adresinden alınmıştır.

Yenilmez, K., & Şan, İ. (2008). Dokuzuncu Sınıf Öğrencilerinin Özdeşliklerin Görsel Modellerini Tanıma Düzeyleri. *e-Journal of New World Sciences Academy, 3*(3), 409-418.

Yeşilyurt Çetin, A. (2017). *Matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispatta önceden belirlenen anahtar fikirleri yazabilme süreçleri.* Yayımlanmamış Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı, Matematik Eğitimi Dalı, Erzurum.

Yıldırım, C. (1996). Matematiksel Düşünme (2. Baskı). İstanbul: Remzi Kitabevi.

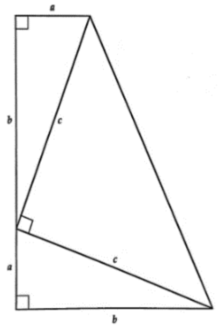
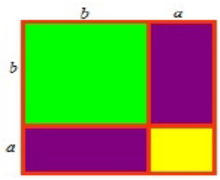
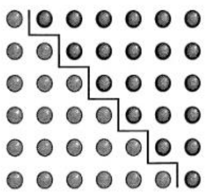
Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2013). *Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri* (Genişletilmiş 9. Baskı b.). Ankara: Seçkin Yayınevi.

Yıldız, S. (2019). *8. sınıf öğrencilerinin Pisagor bağıntısı ile ilgili görsel, sembolik ve cebirsel sözel temsillerin bulunduğu matematiksel problemleri çözme becerilerinin incelenmesi.* Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Bayburt Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, Bayburt.

Yılmaz, R. & Argün, Z. (2013). Matematiksel Genelleme Sürecinde Görselleştirme ve Önemi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergi [Hacettepe University Journal of Education], 28*(2), 564-576.

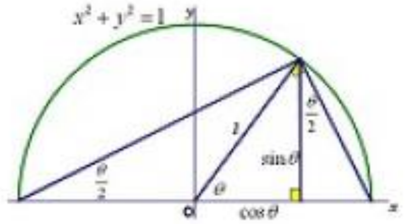
EKLER

Ek 1. Birinci aşamada kullanılan veri toplama aracı

1-Böyle bir resmi daha önce gördünüz mü? Cevabınız evet ise Nerede olduğunu yazınız Hayır (…...)/ Evet (…..) Nerede ………….. 2- Resmin ne ifade ettiğini açıklayınız 
1-Böyle bir resmi daha önce gördünüz mü? Cevabınız evet ise Nerede olduğunu yazınız Hayır (…...)/ Evet (…..) Nerede ………….. 2- Resmin ne ifade ettiğini açıklayınız 
1-Böyle bir resmi daha önce gördünüz mü? Cevabınız evet ise Nerede olduğunu yazınız Hayır (…...)/ Evet (…..) Nerede ………….. 2- Resmin ne ifade ettiğini açıklayınız 

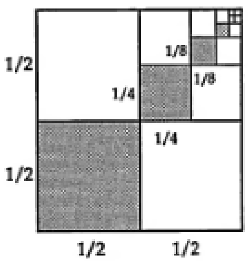
1-Böyle bir resmi daha önce gördünüz mü? Cevabınız evet ise Nerede olduğunu yazınız Hayır (…...)/ Evet (…..) Nerede …………..

2- Resmin ne ifade ettiğini açıklayınız

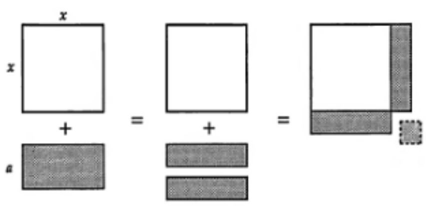


1-Böyle bir resmi daha önce gördünüz mü? Cevabınız evet ise Nerede olduğunu yazınız Hayır (…...)/ Evet (…..) Nerede …………..

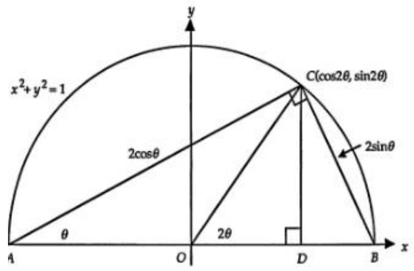
2- Resmin ne ifade ettiğini açıklayınız



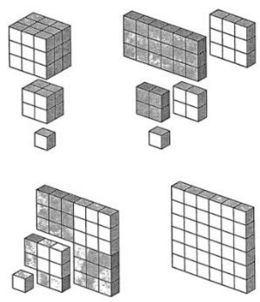
1-Böyle bir resmi daha önce gördünüz mü? Cevabınız evet ise Nerede olduğunu yazınız Hayır (…...)/ Evet (…..) Nerede …………..2- Resmin ne ifade ettiğini açıklayınız



1-Böyle bir resmi daha önce gördünüz mü? Cevabınız evet ise Nerede olduğunu yazınız Hayır (…...)/ Evet (…..) Nerede …………..2- Resmin ne ifade ettiğini açıklayınız

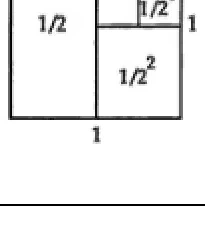


1-Böyle bir resmi daha önce gördünüz mü? Cevabınız evet ise Nerede olduğunu yazınız Hayır (…...)/ Evet (…..) Nerede …………..2- Resmin ne ifade ettiğini açıklayınız



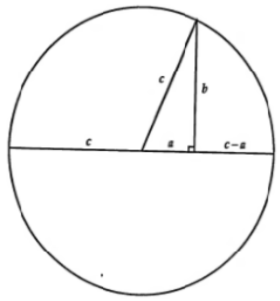
1-Böyle bir resmi daha önce gördünüz mü? Cevabınız evet ise Nerede olduğunu yazınız Hayır (…...)/ Evet (…..) Nerede …………..)

2- Resmin ne ifade ettiğini açıklayınız

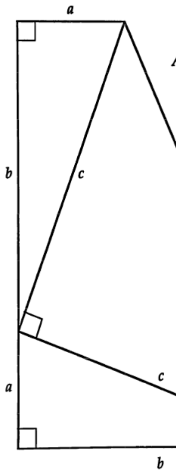
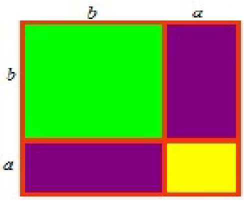
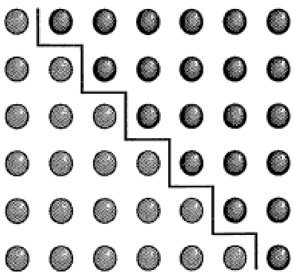


1-Böyle bir resmi daha önce gördünüz mü? Cevabınız evet ise Nerede olduğunu yazınız Hayır (…...)/ Evet (…..) Nerede …………..

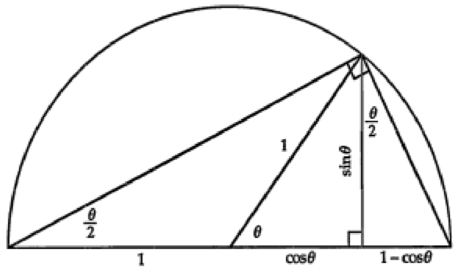
2- Resmin ne ifade ettiğini açıklayınız



Ek 2. İkinci aşamada kullanılan veri toplama aracı

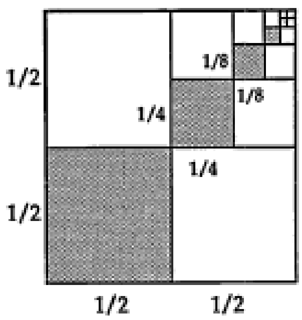
Görselden faydalanarak verilen eşitliklerin nasıl elde edildiğini açıklayınız.  $A = 2 \cdot \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 = \frac{1}{2}(a+b)^2$ $c^2 = a^2 + b^2$
Görselden faydalanarak verilen eşitliklerin nasıl elde edildiğini açıklayınız.  $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
Görselden faydalanarak verilen eşitliklerin nasıl elde edildiğini açıklayınız.  $1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

Görselden faydalanarak verilen eşitliklerin nasıl elde edildiğini açıklayınız.



$$\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$$

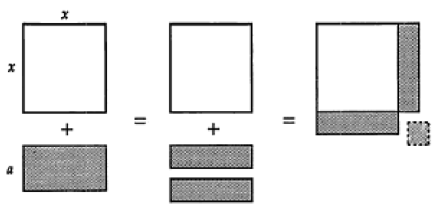
Görselden faydalanarak verilen eşitliklerin nasıl elde edildiğini açıklayınız.



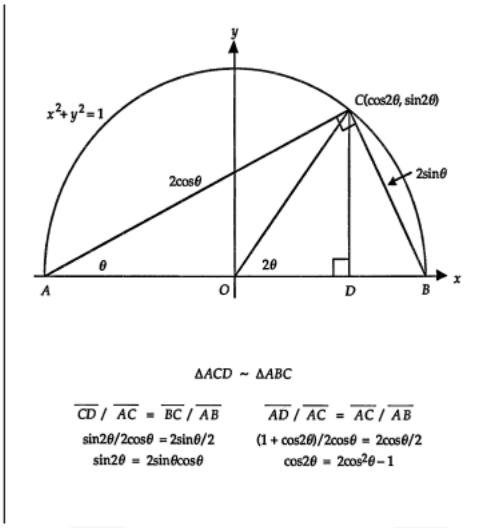
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots = \frac{1}{3}$$

Görselden faydalanarak verilen eşitliklerin nasıl elde edildiğini açıklayınız.

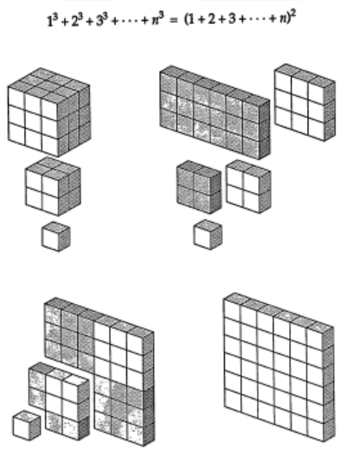
$$x^2 + ax = (x + a/2)^2 - (a/2)^2$$



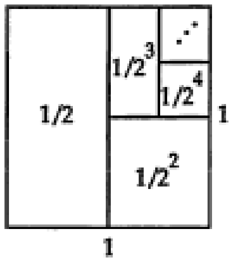
Görselden faydalanarak verilen eşitliklerin nasıl elde edildiğini açıklayınız.



Görselden faydalanarak verilen eşitliklerin nasıl elde edildiğini açıklayınız.



Görselden faydalanarak verilen eşitliklerin nasıl elde edildiğini açıklayınız.



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1$$

Görselden faydalanarak verilen eşitliklerin nasıl elde edildiğini açıklayınız.

$$\frac{c+a}{b}=\frac{b}{c-a}$$

$$a^2+b^2=c^2$$