T.C.

SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ

EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK VE FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ ANA BİLİM DALI

MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

12. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN SÖZSÜZ İSPAT BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

ŞAHİN ÜSTÜNGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dr. Öğr. Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU

SİVAS-2020

12. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN SÖZSÜZ İSPAT BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Şahin ÜSTÜNGÜN

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Eğitim, Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır.

Tez Danışmanı
Dr. Öğr. Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU

SİVAS
Haziran-2020

KABUL VE ONAY

Şahin ÜSTÜNGÜN'ün hazırlamış olduğu "12. Sınıf Öğrencilerinin Sözsüz İspat Becerilerinin İncelenmesi" başlıklı bu çalışma, 02.06.2020 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından, "Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı"nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Dr.Öğr.Üyesi Yasin GÖKBULUT (Jüri Başkanı)

Dr.Öğr.Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU (Danışman)

Doç.Dr. Fatih KARAKUŞ (Üye)

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../..../

Doç.Dr. Fatih KARAKUŞ
Enstitü Müdürü

ETİK SÖZÜ

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

Şahin ÜSTÜNGÜN

SİVAS – 2020

ÖZET

Üstüngün, Şahin, 12.Sınıf Öğrencilerinin Sözsüz İspat Becerilerinin İncelenmesi Yüksek Lisans Tezi, Matematik ve Fen Bilimleri Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Sivas, 2020

Bu çalışmanın amacı 12. Sınıf öğrencilerinin sözsüz ispat becerilerini incelemektir. Araştırma 2019-2020 eğitim öğretim yılında Sivas merkezindeki bir özel okulda 12.sınıfa devam eden 67 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Veriler 7 sorudan oluşan veri toplama aracı ile yazılı olarak toplanmıştır. Toplanan veriler incelenmiş sınıflara ayrılarak kod ve kategoriler oluşturulmuştur. Çalışma sonunda elde edilen bulgular oluşturulan problemler ve alt problemler çerçevesinde değerlendirilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Sözsüz ispatlar, matematik eğitimi, sözsüz ispat becerisi

ABSTRACT

Üstüngün Şahin, Investigation of Nonverbal Proof Skills of 12th Grade Students Master's Thesis, Mathematics and Science Education Mathematics Education Science,Sivas 2020,

The aim of this study is to examine the non-verbal proof skills of 12th grade students, to reveal what the students understand in the given images. The research was carried out with 67 students attending 12th grade in a private school in the center of Sivas in the 2019-2020 academic year. The data were collected in writing with a data collection tool consisting of 7 questions. The collected data were divided into classes examined with appropriate reasons and categories, and codes and categories were created. Findings obtained at the end of the study were evaluated within the frame of created problems and sub-problems.

KEYWORDS: Nonverbal proofs, secondary education mathematics education, nonverbal proof skills

TEŞEKKÜR

Bu araştırman her aşamasında bana yardımcı olan, olumsuzluklara karşı beni yüreklendiren, rehberlik eden, engin bilgi ve tecrübesinden yararlandığım ve öğrencisi olduğum için kendimi şanslı saydığım hocam ve tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU ‘na teşekkürlerimi sunarım.

Tez jürimde olmayı kabul edip görüş ve önerileriyle tezime önemli katkıda bulunan değerli hocalarıma teşekkürlerimi sunarım.

Her zaman olduğu gibi bu zor süreçte de beni yalnız bırakmayan ve bana hep destek olan, hayat arkadaşım ve sevgili eşim Buğra ÜSTÜNGÜN ‘e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

BÖLÜM IV

BULGULAR VE YORUM

BÖLÜM V

TARTIŞMA VE SONUÇ

TABLO LİSTESİ

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa

BÖLÜM 1
GİRİŞ

Bu bölümde problem, alt problemler, araştırmanın amacı, araştırmanın önemi, araştırmanın sınırlılıkları, varsayımlara yer verilmiştir.

1.1.Problem durumu

İspat matematiğin önemli bir parçasıdır, bir düşünme sistematiğidir. Hanna (2000a) ifade ettiği gibi matematiksel anlayışın geliştirilmesi için öğrencilere ispatın fonksiyonları, önemini ve sınırlamalarını göstererek tartıştırılmalıdır. Bunu yapabilmek için de ispat yapmanın etkili yollarını bulmak gerekmektedir. İspat öğretiminde alternatif yöntemlerden birisi de görselleştirme yapmak yani sözsüz ispatları veya görsel ispatları kullanmaktır.

Görselleştirme günlük hayatta sıklıkla kullanılan bir beceridir. Görselleştirme yaparken temel amaç vermek istediğimiz bilginin özet, anlaşılır ve akılda kalıcı olmasını sağlamaktır. Görselleştirmenin matematiği anlamada da önemli bir yardımcı araç olduğu kabul edilmektedir. Görselleştirmenin matematik eğitimindeki rolü, öğrencilerin ispat yaparken yaşadıkları zorluklar göz önüne alındığında görsel ispatların yani sözsüz ispatların matematik öğretiminde kullanılmasına yapılan vurgular da artmaktadır.

Sözsüz ispatlar son yıllarda ortaya çıkmamıştır (Alsina & Nelsen, 2010; Bell, 2011). Ancak özellikle matematik ve matematik eğitimi araştırmalarında sözsüz ispatlara ilgi gün geçtikçe artmaktadır. Sözsüz ispatlar tümdengelimsel adımların şekil, diyagram ve grafiklere dayandırılmış halidir. Bu ise ispatı anlamanın resimlerin anlaşılması ile mümkün olduğu anlamına gelmektedir. Sözsüz ispatlar kelimeler olmadan, diyagramlar, sayılar, harfler, oklar, noktalar ve birbiriyle ilişkili sembolik ifadeler olan ve yapılandırılması okuyucuya bırakılmış olan ispatlar olarak ifade edilmektedir (Bardelle, 2009). Daha geniş bir anlamda sözsüz ispat, özel bir matematiksel ifadenin-kuralının niçin doğru olduğunu hatta matematiksel bir ifadenin doğruluğunu ispatlarken daha iyi anlamamıza yardımcı olan diyagram veya resimler ve geometrik çizimler, sayısal veya sözel semboller yani hiçbir kelime içermeyen görsel ispatlardır (Gierdien, 2007; Alsina &Nelsen, 2010; Bell, 2011).

Sözsüz ispatlar matematikte ilköğretimden üniversiteye kadar her kademede önemli roller üstlenmektedir (Alsina & Nelsen, 2010). Sözsüz ispatlar farklı matematiksel fikirler arasında bağlantılar bulmayı dolayısıyla da kavramayı geliştirmek için fırsatlar sunmaktadır (Gierdien, 2007). Bu nedenle de öğrencilerin sözsüz ispatlarla tanıştırılmasıyla öğrenci ispatın kendisini unutsa bile görsel olarak ispatı hatırlamasına imkan verilmiş olmaktadır.

Son yıllarda matematik eğitiminde genelleme, ispat, görselleştirme, görsel ispatlar, akıl yürütme, gerekçelendirme ve muhakeme gibi becerilerin kazandırılması ön plana çıkmaktadır. Akkan, Öztürk ve Akkan (2017) ifade ettiği gibi bu becerileri öğrencilere kazandırabilmek için öğrencilerin araştırma ve sorgulama yapabilecekleri, iletişim kurabilecekleri, eleştirel düşünebilecekleri, gerekçelendirme yapabilecekleri, fikirlerini rahatlıkla paylaşabilecekleri ve farklı çözüm stratejileri sunabilecekleri sınıf ortamları oluşturulmaktadır (Balacheff, 1988; Bell, 1976; Harel & Sowder, 1998; Akkan, Öztürk & Akkan, 2017). Sözsüz ispatlar akıl yürütme, görselleştirme, muhakeme etme, ispatlama ispatları açıklama, doğrulama gibi birçok beceri içermektedir. Demircioğlu ve Polat (2015) sözsüz ispat ile ilgili deneyim yaşamış olan matematik öğretmen adaylarıyla yaptıkları çalışmada sözsüz ispatın etkili olduğu ve olmadığı yerlere ilişkin görüşlerini almışlardır. Öğretmen adayları, sözsüz ispatlarla bilgilerin kalıcı olduğunu, matematiksel formül/ifadelerin daha iyi kavrandığını, konular arası ilişki kurulduğunu, yeni bilgiler öğrendiklerini; sözsüz ispatların ifadeleri somutlaştırdığını, merak duygusu uyandırdığını, güven kazandırdığını, zevkli olduğunu, verimli olduğunu ve ileride sözsüz ispatları öğretim yöntemi olarak da kullanabileceklerini ifade etmişlerdir. Sözsüz ispatların matematik eğitiminde kullanılabilecek eski bir yöntem olduğu göz önünde alındığında bu çalışma da 12.sınıf öğrencilerinin sözsüz ispat becerilerinin araştırılması amaçlanmıştır.

1.2. Problem cümlesi ve alt problemler

Bu çalışmanın problem cümlesi “ortaöğretim öğrencilerinin sözsüz ispat yapabilme becerileri nasıldır? ” şeklindedir. Alt problemlerde aşağıdaki gibidir.

1. 12. sınıf öğrencilerinin sözsüz ispat becerileri nasıldır?
2. 12. sınıf öğrencilerinin sözsüz ispat yaparken sundukları gerekçeler nelerdir?

1.3. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın amacı; 12. Sınıf öğrencilerinin sözsüz ispat yapabilme becerilerini ve ispat yaparken sundukları gerekçeleri incelemektir. İspat yapma matematikte öğrencilere kazandırmak istenilen en önemli becerilerden birisidir. Buna paralel olarak ispat yaparken öne sürülen gerekçeler de önemlidir. Nitekim gerekçelerin bütünü ispat sürecini, ispat yöntemini, düşünme biçimini ortaya koymaktadır. Bu nedenle sözsüz ispat yapma süreci kadar öne sürülen gerekçelerde önemlidir.

1.4. Araştırmanın Önemi

İspatın matematik öğretimindeki matematiksel düşünmedeki önemi buna paralel olarak da öğrencilerin zorlukları göz önüne alındığında çalışmanın ana odak noktası ispat becerisi olmaktadır. Yapılan çalışmalar öğrencilerin, öğretmen adaylarının ve öğretmenlerin ispat yapmakta, ispatı anlamada zorluk yaşadıklarını (Hawro, 2007; Özer & Arıkan, 2002; Uğurel & Moralı, 2010; Bülbül & Urhan, 2016; Şimşek, Şimşek, & Dündar, 2013; Weber, 2001; Gökkurt, Soylu & Şahin, 2014) göstermektedir. Görselleştirmenin önemi ve literatürdeki vurgular göz önüne alındığında sözsüz ispatlar, ispat geliştirmenin alternatif ve etkili bir yöntemi olarak karşımıza çıkmaktadır. Özellikle Türkiye‘de sözsüz ispatlar ile ilgili çok fazla çalışma olmaması bu çalışmanın alana katkılarını önemli hale getirmektedir.

1.5. Araştırmanın Sınırlılıkları

Bu araştırma çalışmaya katılan 12. Sınıfta öğrenimlerine devam eden 67 öğrenci ve veri toplama aracında kullanılmış olan sorular ile sınırlıdır.

1.6. Varsayımlar

Araştırmaya katılacak olan ortaöğretim öğrencilerinin veri toplama aracına samimiyetle cevap verdikleri ve veri toplama aracının uygulanması esnasında da katılımcıların dış etkenlerden aynı oranda etkilendikleri varsayılmıştır.

1.7. Tanımlar

Matematiksel İspat (Formal boyut): İspat, daha önceden her birinin geçerliği ispatlanmış aksiyom ve teoremlere dayandırılmış ifadeler dizisidir (Morash, 1987)

Matematiksel İspat (İnformal boyut): Muhakeme edilmiş delillerin kullanılmasıyla bazı ifadelerin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmektir başka bir deyişle iyi düşünülmüş savları kullanarak ifadenin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmektir (Almeida, 1996).

Sözsüz İspat (Proof Without Words): Söz olmayan, sadece diyagramlara dayalı, sayılar, harfler, oklar, noktalar ve birbiriyle ilişkili sembolik ifadeler içeren, yapılandırılması okuyucuya bırakılmış ispatlar (Bardelle, 2009).

BÖLÜM II
KAVRAMSAL ÇERÇEVE

2.1.İspat

İnsanlar hep bir merak içinde, bir şeyleri araştırıp yeni keşifler ortaya koyma eğilimindedir. Günlük hayatta bir olayın nasıl oluştuğunu araştırmak, ortaya koyduğu varsayımlar doğrultusunda kendisini ve çevresindekileri ikna etme çabasındır. Bunun sonucu olarak da ispatlama becerisine gereksinim duymaktadırlar.

İspat daima matematiğin ve matematik eğitiminin merkezinde yer almıştır. Öğrencilerde ispat becerilerinin geliştirilmesi matematik eğitimcileri tarafından her zaman dile getirilmiştir. Bunun yansıması olarak da akıl yürütme, muhakeme yapabilme ve ispat hem Türkiye'de hem de yurt dışında matematik öğretim programlarının geliştirmeyi hedeflediği beceriler arasında yer almaktadır (Milli Eğitim Bakanlığı [MEB], 2013; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). Her yerde olduğu gibi matematikte de verilen bir ifadenin doğruluğu araştırılır, sorgulanır ve kanıtlanmaya çalışılır. Matematiğin ezberlenmesi yerine öğrenilmesi, matematiksel anlamanın gerçekleşmesi için de ispat büyük önem taşımaktadır. Öğrencilerin matematiği sevmesi, anlamaya başlaması akıl yürütmeler yani ispat sayesinde olabilmektedir.

İspatın birkaç tanımı aşağıda verilmiştir.

- ❖ Bir dizi geçerli sonuçlar (Hanna &Sidoli, 2007, s. 75)
- ❖ Bir ifadenin doğruluğu ile ilgili deliller (Rodd, 2000, s. 225)
- ❖ Geçerliği önceden ispatlanmış aksiyom ve teoremlere dayandırılmış ifadeler dizisi (Morash, 1987, s. 149)
- ❖ Tanımlar ve aksiyomlarla fikirlerin açıklık kazandığı final aşaması (Hanna, 1991, s. 55)
- ❖ Muhakeme edilmiş delillerin kullanılmasıyla bazı ifadelerin doğruluğu hakkında birilerini ikna etmek (Almeida, 1996, s. 660)
- ❖ Bir dizi mantıksal hükümlerle önermenin doğru ya da yanlış olduğunu gösterme (Konyalıoğlu, 2015, s. 43)

- ❖ Bir sonucu doğrulamak, iletişim kurmak ve diğerlerini bu sonuca ikna etmek, bir sonuç keşfetmek ve sonuçları dedüktif bir sistem içine yerleştirmek için kullanılır (Almeida, 2003).
- ❖ Bir kişinin iddiasını doğrulamasını, kendisini ve başkalarını ikna etmeyi sağlayan mantıksal argüman (Stylianou, Chea & Blanton, 2006)
- ❖ Özel bir argümantasyon aktivitesi (Mejia-Ramos & Inglis; 2009)

Bu tanımlar incelendiğinde ispatın iki yönüne vurgu yapıldığı görülmektedir. Birincisi sonuç, argüman, delil, ifadeler dizisi, çıkarım olarak ifade edilen süreç sonunda elde edilen bir üründür. İkinci yönü ise ikna etmek, doğru ya da yanlış olduğunu gösterme, gerçek yönünü ortaya çıkarma, kabul ettirme çabası şeklinde vurgu yapılan bir süreç, eylem olması yönüdür. Hersh (1993) matematikçilerin bir varsayımın doğru olup olmadığından daha çok onun niçin doğru olduğu ile ilgilendiklerini ifade etmiştir. Dolayısıyla ezberden öteye matematiği anlamak içinde niçinlerini sorgulamak ve sorgulatmak önem kazanmaktadır. Sınıfta ispat rolünü sistematik bir şekilde ortaya koymaya çalışırken, ispatın matematiksel uygulamada gerçekleştirdiği tüm fonksiyonlarını dikkate almak yararlıdır. Sınıftaki ispatların hepsini bir şekilde yansıtması beklenir. Ancak bu işlevlerin hepsi aynı derecede matematik öğrenmeyle ilgili değildir, bu yüzden elbette öğretimde aynı ağırlık verilmemelidir (De Villiers, 1990; Hanna, 2000b). İspat ve ispat fonksiyonları-işlevleri aşağıdaki gibi verilmektedir.

- • doğrulama (bir ifadenin gerçeğiyle ilgili)
- • açıklama (neden doğru olduğuna dair fikir verir)
- • sistematizasyon (çeşitli sonuçların tümdengelim sistemi, ana kavramlar ve teoremler halinde düzenlenmesi)
- • keşif (yeni sonuçların keşfi veya icadı)
- • iletişim (matematiksel bilginin aktarılması)
- • ampirik bir teorinin oluşturulması
- • bir tanımın anlamının veya bir varsayımın sonuçlarının araştırılması
- • iyi bilinen bir gerçeğin yeni bir çerçeveye dahil edilmesi ve böylece yeni bir perspektiften görüntülenmesi (Bell, 1976; De Villiers, 1990; Hanna & Jahnke, 1996, Hanna, 2000a).

Dede ve Karakuş (2014) matematiksel ispatları yapılış amacına göre sezgisel (heuristic) ispat, açıklayıcı ispat, keşfedici ispat ve görsel ispat olarak dört başlık altında toplamış ve açıklamıştır. Fakat ispat genel anlamı ile ikna çalışması olarak görülmesine rağmen öğrencilere kazandırmak istediğimiz bir beceri olması nedeniyle öğrencilerin bireysel farklılıkları göz önüne alınması gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Her öğrencinin farklı bir düşünme yapısına sahip olduğu düşüldüğünde her öğrencinin ihtiyacı ve yeteneklerine göre bir öğretim ortamı sunmak bu nedenle de hem görsel hem sözel ispatlama sürecini içeren sözsüz ispatların kullanımının önemi artmaktadır.

İspat tanımları incelendiğinde bir başka yönünün gerekçelendirme-doğrulama olduğu görülmektedir. Doğrulama veya gerekçelendirme ispatlama sürecinde önemli bir kavramdır. Birkaç tanımı aşağıda verilmiştir.

- ❖ Bir ifadenin neden doğru olduğunu açıklayan ikna edici bir argüman olarak tanımlamışlardır (Lo, Grant & Flowers, 2008)
- ❖ Doğrulama ise matematiksel bilginin oluşumunda, gelişiminde ve iletilmesinde gerekli olan temel kavramlardan biridir. Aynı zamanda matematik yapma ve anlamanın en temel faktörüdür (Hanna, 2000a)
- ❖ Doğrulama, kabulleri ve matematiksel muhakeme türlerini kullanarak bir iddianın doğruluğunu (ya da reddini) gösteren bir argüman olarak açıklanabilir (Staples, Bartlo, & Thanheiser, 2012, s. 448).
- ❖ Kanıtlamada bir kişinin (ya da topluluğun) bir iddianın doğruluğu hakkındaki kuşkuları gidermek için işlettiği bir süreç olarak ifade edilebilir (Harel & Sowder, 2007, s. 808; Tanışlı, Yavuzsoy Köse & Camci, 2017).

Doğrulamanın, doğruluğu gösterme ve neden doğru olduğunu açıklama şeklinde iki temel rolü vardır (Hanna, 2000a; Tanışlı, Yavuzsoy Köse & Camci, 2017). Doruk (2016) öğrencilerin kullandığı gerekçeli ifadelerin tümü argüman olarak değerlendirilmiştir. Gerekçeli ifadeler, bir kimsenin kendini ve başkasını ikna etmek adına yaptığı doğrulamanın neden doğru olduğuna dair cümleleridir. Öğrencilerin gerekçeli ifadelerinde genellikle "çünkü", "-den dolayı", "yüzünden" gibi kelimeler yer almaktadır.

2.2. Görselleştirme ve sözsüz ispat

Öğrencilerin ispat becerisini geliştirmenin yolarından birisi de görselleştirmek yani resim şekil diyagram gibi görsel unsurlar ile desteklemektir. "*Bir resim bin kelimeden iyidir*" atasözü pek çok kültürde yaygın olarak söylenmektedir (Casselman, 2000). Hadamard matematiksel düşüncenin görsel olduğunu kelimelerin ise araya girdiğini ifade etmiştir

(Borwein & Jörgenson, 2002). Görselleştirme matematikte anlamanın temeli (Duval, 1999), matematiksel bir fikri iletmek, açıklamak ve keşif için (Giaquinto, 2007; Hanna &Sidoli, 2007) matematik eğitimi için değerli (Borwein &Jörgenson, 2002; Miller, 2012) bir araçtır. Görsel ifadelerin matematiğin anlaşılmasında yeri büyüktür. Dahası resimler veya diyagramlar bir teoremin veya matematiksel bir ifadenin görsel ispatı olarak kullanılabilirler (Strausova &Hasek, 2012). Görselleştirme, görsel bilgileri temsil etme, dönüştürme, üretme, iletişim kurma, belgeleme ve yansıtma kabiliyetlerini içermektedir (Hershkowitz, 1990, s. 75). Matematik başarısı için öğrenenin görselleştirme becerisinin iyi olması gerekmektedir (Alsina & Nelsen, 2010). Bardelle (2009) ise öğrencilerin herhangi bir konu ile karşılaştıklarında kullanabilecekleri tekniklerin, araçların ve teoremlerin farkında olmamalarının sebebini öğrencilerin görselleştirmeyle çok az çalışmasına bağlamaktadır. Öğrencilerin görselleştirmeyi kullanabilmeleri ise derslerde görselleştirme etkinlikleriyle karşılaşmaları ve görselleştirmeyi kullanmaya teşvik edilmeleriyle mümkündür (Rodd, 2000).

Matematiksel ispatın ne olduğuna dair tartışmalar uzun süredir devam ettiği (Dede ve Karakuş, 2014) ve matematiksel ispatın ne olduğuna dair farklı tanımlar (CadwalladerOlsker, 2011) vardır. Her şeyden önce ispat olup olmadığı ile ilgili tartışmalarda sürmektedir. Sözsüz ispatların ispat olup olmadığı ile ilgili Hanna ve Sidoli (2007) son yirmi yılda görsel temsillerin geleneksel ispatın yerine geçecek şekilde ciddi olarak düşünülmeye başlanıldığını ama hala çok fazla tartışma olduğunu ifade etmektedirler. Bu tartışmaların iki ucu olduğunu ve bir uçta, görsel temsillerin, genel olarak matematiksel anlayışın kolaylaştırıcıları olarak ispat için faydalı eklerden daha fazla olmayacağını diğer uçta ise bazı görsel temsillerin kendi başlarına ispat oluşturabileceğini ve başka geleneksel ispatları gereksiz kıldığını iddia edenler olduğunu ifade etmişlerdir. Matematik ve matematik öğretiminde görsel temsillerin kullanılmasını öneren araştırmacılar, yanıltıcı diyagramların bolca bulunduğunu fark etmişlerdir. Brown (1999) hataya yol açabilecek iyi bilinen diyagram örneklerinden bazılarını sunmuştur. Ancak bu gerçek tek başına görselleştirmenin araştırma ve öğretme vaadi olmadığına inanmak için bir neden vermemektedir (Hanna, 2007). Borwein ve Jörgenson (1997) yeterli olmasa bile görsel ispatların güvenirlik, tutarlılık ve tekrarlanabilirlik şartlarının gerekli olduğunu ifade etmiştir.

- Güvenirlik (*Reliability*), İspat güvenilirdir ve sonuçlar her bir incelemede değişmemelidir,
- Tutarlılık (*Consistency*): İspatın sonuçları bilinen diğer gerçeklerle, inançlarla ve ispatlarla tutarlı olmalıdır.

- Tekrarlanabilirlik (*Repeatability*): İspatı başkaları da doğrulamalı veya gösterilebilmelidir.

Sözsüz ispatın birkaç tanımı aşağıda verilmiştir.

- Matematiksel ifadelerin niçin doğru olduğunu açıklarken herhangi bir kelime kullanmaksızın şekillerle, diyagramlarla yapılan ve görselleştirmeye dayalı ispattır (Demircioğlu & Polat, 2015).
- Belli bir matematiksel ifadenin neden doğru olabileceğini ve bunun ispatına nasıl başlayacağını anlaması için okuyucuya yardımcı olan şekil ve diyagramlar Alsina & Nelsen, 2010)
- Kelimeler olmadan matematiksel bir ifadenin ispatını resimleyen matematiksel çizimlerdir (Bell, 2011)
- Özel bir matematiksel ifadenin niçin doğru olduğunu hatta matematiksel bir ifadenin doğruluğunu ispatlarken nasıl ele alınacağını görmemize yardımcı olacak diyagram veya resimler (Alsina & Nelsen, 2010)
- Geometrik çizimler, sayısal veya sözel semboller dışında hiçbir kelime içermeyen ispatlardır (Gierdien, 2007).

Hanna'ya (2000a) göre, en iyi ispatlar aynı zamanda ispatlanan teoremin anlamının anlaşılmasına yardımcı olanlardır. Bu ispatlar teoremin sadece doğru olduğunu değil aynı zamanda neden doğru olduğunu gösterir. Bunun sonucunda ispatlar daha ikna edicidir ve başka keşiflere yol açabilir. Sözsüz ispatlar matematiğin pek çok alanında; geometrik teoremlerin ispatında, sayılar teorisinde, trigonometride, genel matematik eşitsizliklerinde, matematik tarihinde kullanılmaktadır (Alsina &Nelsen, 2010; Bell, 2011). Problem çözmede, matematiksel ispatlarda görsel yöntemler okullarda nadir olarak kullanılmaktadır (Thornton, 2001). Mevcut matematik öğretim programına göre öğrencilere kazandırılması istenen matematiksel süreç becerilerinden matematiksel akıl yürütme ile pek çok davranışın yanında "Matematiksel bir önermeyi ispatlama sürecinde en uygun ispat yöntemini seçme" becerisi de kazandırılması istenen beceriler arasındadır (MEB, 2013). Nitekim MEB (2013) öğretim programında da matematiksel akıl yürütme ve ispat başlığı altında öğrencilerin;

- Matematikte ve günlük yaşantısında mantığa dayalı genellemeler ve çıkarımlarda bulunma
- Matematikteki ve matematik dışındaki çıkarımlarının, duygu ve düşüncelerinin doğruluğunu/geçerliliğini savunma
- Düşüncelerini açıklarken matematiksel modeller, kurallar ve ilişkileri kullanma

- Bir (matematiksel) durumu analiz ederken matematiksel ilişkileri kullanma
- Matematikteki ilişkileri açıklama
- Farklı stratejiler kullanarak kestirimlerde bulunma ve bunu mantıksal gerekçelerle savunma
- Genel ilişkileri özel durumlara uygulayabilme
- Modelleri, önermeleri, özellikleri ve ilişkileri kullanarak yaptığı matematiksel çıkarımı açıklayabilme
- Matematiksel doğrulama sürecinde tümevarımı ve tümdengelimi etkin olarak kullanabilme
- Matematiksel bir önermeyi ispatlama sürecinde en uygun ispat yöntemini seçme davranışlarının geliştirilmesi hedeflenmektedir.

Tekin ve Konyalıoğlu (2010) toplam ve fark formüllerinin görsel şekillerle ispat edilmesi ve bunların diğer araştırmacılara tanıtılması amacıyla yaptıkları çalışmalarında ele aldıkları görsel ispatlar "*Math Made Visual*" (Alsina & Nelsen, 2006) yararlanılmıştır. Çalışmada görsel şekillere dayalı ispat sürecinde yapılan çizimlerin, öğrencilerin formüllerde yer alan açıları, kenarları vb. görmesini ve anlamlı olarak formülleri öğrenmesini sağlayabileceğini, cebirsel olarak yapılan ispat süreci de mantıksal-matematiksel düşünmeye katkı sağlayabileceğini ve bizleri formüllere götüreceğini ifade etmişlerdir. Öğrencilerin, formüllerin özünü oluşturan açı, kenar, sinüs, kosinüs vb. ilişkilerini cebirsel ispatta yeterince göremediklerini görsel şekillere dayalı ispatların formüllerin nasıl oluştuğu ve nereden geldiği konusunda öğrencilere bilgi verirken, ezberden kaçınarak kalıcı öğrenmelerine yardımcı olacağına vurgu yapmışlardır.

Matematik öğretiminde ezberlemenin önüne geçmek için *"neyin nereden geldiğini"* gözler önüne seren görselleştirme çalışmalarına daha fazla yer verilmelidir. Öğrenciler cebirsel ispat sürecinde matematiksel kuralları yanlış kullanıp yanlış sonuçlara varabilmektedirler. Çünkü ispatın dayandığı görsel şekli, kavramlar arası ilişkileri görememektedirler (Arcavi, 2003).

2.3. İlgili çalışmalar

Mancoğlu (2019) matematiksel teoremlerin ispatlarının görselleştirilme durumlarını incelemek için 2017- 2018 öğretim yılında bir devlet üniversitesinin ortaöğretim matematik öğretmenliği bölümünde ikinci ve üçüncü sınıfında öğrenim gören dört matematik öğretmeni adayı ile nitel bir çalışma yapmıştır. Veri toplama aracı olarak yarı yapılandırılmış görüşme ve doküman incelemesi kullanılmıştır. Görüşmelerde matematiksel teoremlerin ayrı olarak yer aldığı çalışma kâğıtları kullanılmıştır. Katılımcılardan çalışma kâğıtlarındaki teoremlerin ispatlarını görselleştirdikleri süre içinde sesli düşünmeleri istenmiş ve görüşmeler esnasında video ve ses kaydı alınmıştır. Veriler gömülü teorinin veri çözümleme teknikleri kullanılarak analiz edilmiştir. Veri analizleri sonucunda katılımcıların ispatlarda kullandığı resimlerin, çoğunlukla teoremin içeriğindeki kavramların zihinlerinde oluşturduğu resimleri betimleyen görüntüler olduğu, net bir resim çizemeyen katılımcının ispatlardan emin olmadıkları görülmüştür. Katılımcıların, verilen teoreme göre görselleştirme sürecinin başlama durumunda farklılık olduğu, oluşturulan resimlerin büyük çoğunluğun matematiksel resimler olduğu fakat birbirinden farklı ispat resimleri oluşturdukları görülmüştür. Ayrıca kimi adayların teoremin bütününü temel alarak ispatı görselleştirdiği kimi öğrencilerin de teorem içerisinde yer alan kavramlardan yola çıkarak ispatı görselleştirdikleri ve ispata göre strateji belirledikleri elde edilmiştir.

Sözsüz ispatların formel ispata geçişi kolaylaştıracak ve söz konusu didaktik boşluğu dolduracak bir araç olarak nasıl kullanılabileceğini incelemek amacıyla Ülker (2018) tarafından yapılan çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyi kullanılmıştır. Çalışmada 7. sınıf seviyesine uygun seçilen sözsüz ispatlar ve teorinin sunduğu etkinlik tasarımı yaklaşımında birer sözel problem durumu şeklinde öğretimleri planlanmıştır. Altı hafta süren uygulamaya 30 öğrenci katılmıştır. Her etkinliğe bir hafta yani yaklaşık iki ders saati ayrılmış ve uygulama toplamda altı hafta sürmüştür. Veriler teorinin belirlediği aşamalara göre hem tüm sınıfın çalışmasını hem de odak grubun çalışmasını yansıtacak şekilde analiz edilmiştir. Araştırmanın sonucu öğrencilerin ispatla ilişkili pek çok matematiksel süreci yaşadığını, alanlar arası ilişkilendirmeler gerçekleştirdiklerini ve yaşadıkları süreçlerde bir ilerleme kaydettiklerini göstermektedir.

Polat (2018) tarafından yapılan çalışmada lise öğrencilerinin sözsüz ispat yapabilme süreçlerini incelemek amaçlanmıştır. 9. sınıfta öğrenimlerine devam eden 25 öğrenci ile yürütülen çalışmada karma araştırma yöntemleri kullanılmıştır. Veriler uygulama öncesi öğrencilerin ispat becerilerini belirleyebilmek için araştırmacı tarafından hazırlanmış ispat beceri testi ve uygulama sonrası ispat beceri testi, dört öğrenci ile yapılan sözsüz ispat etkinlikleri ile toplanmıştır. Nicel veriler t-testi ile nitel veriler ise içerik analiz tekniği ile analiz edilmiştir. Araştırmanın sonunda sözsüz ispatların, öğrenciye formüllerin nereden geldiğini anlama, formüllerin doğruluğuna ilişkin ikna olma, etkinliklerden keyif alma, matematiğin diğer kavramlarıyla ilişki kurma, daha önce öğrenmiş oldukları kuralları kullanma ve matematiksel kavramları anlama gibi imkânlar sağladığı görülmüştür. Elde edilen bulgular sözsüz ispatların ispat becerisi üzerinde olumlu etkisi olduğunu ve sözsüz ispatların sınıfta uygulanabilirliği açısından gerek öğretmen gerekse öğrenciler olumlu görüş bildirdiklerini göstermiştir.

Gelişen (2016) tarafından yapılan çalışmaya 9. sınıf matematik öğretim programındaki üçgenler konusunun öğretiminde origami ve sözsüz ispatlar yöntemlerinin kullanılması ile ilgili bir öğretim deneyinin gerçekleştirmek amacıyla 31 öğrenci katılmıştır. Nitel araştırma yöntemlerinden öğretim deneyi modeli seçilmiştir. Geliştirilen çalışma yaprakları kullanılarak öğrencilere ilk olarak problem çözme testi uygulanmış, test sonuçlarına göre istekli öğrencilerle daha sonra mülakatlar yapılmıştır. Çalışma sonunda elde edilen bulgular oluşturulan problemler ve alt problemler ışığında değerlendirilmiştir. Mülakatlardan elde edilen bilgiler doğrultusunda, öğrencilerin origami ve sözsüz ispatlar yöntemlerini zevkli ve öğretici buldukları ortaya çıkmıştır.

Fen Lisesi öğrencilerinin görsel ispat geliştirme sürecinde yaptıkları hataların ve karşılaştıkları zorlukların belirlenmesi amacıyla Şadan ve Uğurel (2018a) tarafından yapılan nitel bir araştırma yöntemi olan ‘öğretim deneyi’ ile yapılmıştır. Çalışmanın örneklemini amaçlı örnekleme yöntemlerinden homojen örneklem stratejisine göre belirlenen bir Fen Lisesi’nin 11. sınıfında öğrenim gören 6 öğrenci oluşturmaktadır. Çalışmanın verileri Fen Lisesi öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçlerini incelemeyi amaçlayan kapsamlı bir çalışmanın bir bölümünü içermektedir. Görsel ispat geliştirme sürecinde yapılan hatalar ve karşılaşılan zorluklar öğrencilerin geliştirdikleri görsel ispatlar üzerinde yapılan analizler ve ardından bu ispatlara yönelik yapılan klinik görüşmeler doğrultusunda belirlenmiştir. Çalışma kapsamında iki öğretim bölümü gerçekleştirilmiştir. Birinci öğretim bölümü sürecinde belirlenen hata ve zorluklar görsel ispatların anlaşılırlığı ve görsel ispat geliştirme süreci olarak iki ana temaya ayrılmış bu temalar altında alt temalar belirlenmiştir. Belirlenen hatalardan bazılarının yapılan klinik görüşmeler sırasında öğrenciler tarafından giderilebildiği görülmüştür. İkinci öğretim bölümünde öğrencilerin, birinci öğretim bölümünde yaptıkları hataların büyük çoğunluğunu yapmadıkları görülmüştür. Bu öğretim bölümünde verilen ifadelerin farklı konularda olmasıyla birlikte farklı hatalar ve zorlukların ortaya çıktığı görülmüştür.

Şadan ve Uğurel (2018b) tarafından yapılan çalışmada Fen Lisesi'nde öğrenim gören bir öğrencinin görsel ispat geliştirme sürecinin detaylı olarak incelenmesi amaçlanmıştır. Çalışmanın verileri Fen Lisesi öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçlerinin incelenmesini içeren bir araştırmanın bir kısım bulgularını içermektedir. Ana çalışmada bir Fen Lisesi'nin 11. sınıfında öğrenim gören 6 öğrencinin çeşitli konularda ve yapılarda görsel ispat örneklerini inceledikleri ve kendilerinin görsel ispat geliştirdikleri iki aşamalı bir öğretim deneyi tasarlanmıştır. Her iki öğretim bölümünün sonunda öğrencilere 4 tane matematiksel ifade verilmiş bunlardan istedikleri herhangi ikisine yönelik görsel ispat geliştirmeleri istenmiştir. Tüm sürecin daha ayrıntılı bir şekilde yansıtılabilmesi için bir öğrencinin görsel ispat geliştirme sürecinin mercek altına alınmasının uygun olacağı düşünülmüştür. Bu nedenle verilen ifadelerin içerisinden en fazla sayıda görsel ispat geliştiren/geliştirmeye çalışan öğrencinin görsel ispat geliştirme süreci ele alınarak bu çalışmanın kapsamı oluşturulmuştur. Belirlenen öğrenci verilen 8 ifade içerisinden 7 tanesi için görsel ispat geliştirmiştir. Klinik mülakatlar ve video kamera kayıtlarından yararlanarak öğrencinin görsel ispat geliştirirken geçirdiği düşünme süreci; üzerinde çalışacağı ifadeye karar verme, görsel ispatının son halini oluşturmadan önce denediği çizimler ve bu çizimleri yaparken neler düşündüğü ayrıntılı bir şekilde ortaya konmaya çalışılmıştır.

Şadan (2017) tarafından yapılan çalışmada Fen Lisesi öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçlerini analiz etmek ve görsel ispatın matematik öğrenme sürecinde kullanımına yönelik örnek bir uygulama sunmak amaçlanmıştır. Bir Fen Lisesi'nin 11. sınıfında öğrenim gören 6 öğrenci ile yürütülen çalışmada bir nitel araştırma yöntemi olan Öğretim Deneyi kullanılmıştır. Araştırma süreci, üç aşamada yürütülmüştür. İlk aşamada, öğretim bölümünün daha verimli planlanması için, öğrencilerin görsel ispata dair algıları (örneklerini anlayıp açıklayabilme), ikinci aşamada, görsel ispata dair sınıf tartışmalarından ve çeşitli görsel ispat etkinliklerinden oluşan iki öğretim bölümü gerçekleştirilmiş süreç sonunda öğrenciler verilen matematiksel ifadelere yönelik görsel ispatlar geliştirmişler ve geliştirdikleri görsel ispatlara yönelik klinik görüşmeler yapılmış ve üçüncü aşamada ise öğretim sürecini değerlendirilerek, öğrencilerin görsel ispata ve sürece dair görüşleri alınmıştır. Verilerin analizi, geriye dönük (retrospective) ve ileriye dönük (prospective) analiz olmak üzere iki şekilde yapılmıştır. Yapılan her uygulama sonrası ileriye dönük analizler yapılmış, bir sonraki uygulamaya bu analizler doğrultusunda devam etmiştir. Öğrencilerin geliştirdikleri görsel ispatlar ve bu süreci deneyimleme şekilleri ortaya konmaya çalışılmıştır. Görsel ispat geliştirme sürecinde yaptıkları hatalar ve karşılaştıkları zorluklar belirlenmiştir. Yapılan klinik görüşmelerde bu hatalar ve zorluklar giderilmeye çalışılmıştır. Süreç sonunda öğrenciler, görsel ispat geliştirme sürecini yararlı bulduklarını ve süreçten keyif aldıkları belirtmişler, görsel ispatların matematik sınıflarında kullanılması gerektiğini ifade etmişlerdir.

Güler ve Ekmekçi (2016) öğretmen adaylarına çeşitli sözsüz ispatları örnekleri verdikleri ve verilen sözsüz ispatların doğruluğuna ilişkin sorular sordukları çalışmalarında, verilen tek sayıların toplamı ile ilgili sözsüz ispatın doğru olduğunu düşünen öğretmen adayları, ardışık tek sayılar ile birim kareler arasındaki ilişkiyi kurabilmiş ve oluşan geometrik şeklin alanının bu toplamın kuralı olduğunu belirterek cevaplarını gerekçelendirebilmişlerdir. Ancak bir öğretmen adayı bu sözsüz ispatın yanlış olduğunu düşünmüş ve gerekçe olarak da verilen şeklin sadece şekildeki sayıların toplamını örneklediğini vurgulamıştır.

Ugurel, Morali, Karahan ve Boz (2016) Fen lisesinde okuyan üç öğrenci ile yapmış oldukları nitel çalışmada öğrencilerle sözsüz ispatlarla ilgili deneyim yaşattıktan belli bir süre sonra öğrencilerden kendi sözsüz ispatlarını oluşturmalarını istemişler ve bu doğrultuda "temel modifikasyon, ileri modifikasyon ve tümevarımsal temel çizim" olmak üzere üç ardışık kategori açığa çıkarmışlardır. Bu kategorilerin sözsüz ispat analizlerinde kullanılabileceğini belirtmişlerdir. Ayrıca öğrenciler sözsüz ispatları "eğlenceli, zevkli, pratik, entelektüel, orijinal, şık" bulduklarını ifade ederek sözsüz ispatlarla ilgili olumlu görüş bildirmişlerdir. Geometri ve matematiği birlikte kullandıkları fark eden öğrenciler problem çözme, yaratıcılık ve görselleştirme becerilerinin geliştiğini ve sözsüz ispatların geniş uygulama alanlarına sahip olduğunu gördüklerini belirtmişlerdir.

Demircioğlu ve Polat (2016) tarafından Ortaöğretim matematik öğretmenliği 5. Sınıfta okuyan öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma sürecinde yaşadıkları zorlukları ortaya çıkarmak amacıyla yapılan durum çalışmasında öğretmen adaylarına açık uçlu sorular yöneltilerek bu süreçte yaşadıkları zorlukları ortaya çıkarmak için görüşleri alınmıştır. Öğretmen adaylarının sözsüz ispat yapma sürecinde en fazla zorlandıkları yerlerin verilen şekilleri anlayamama, açıklama olmaması, sözsüz ispat ile cebirsel ispat arasında ilişki kuramama, alan bilgisi eksikliği, kaynak sıkıntısı olduğu belirtmiştir. Ayrıca sözsüz ispatların, zorlayıcı fakat öğrencilerin uzamsal görselleştirme ve uzamsal muhakeme becerini geliştirilebildiği sonucuna varılmıştır.

Demircioğlu ve Polat (2015), matematik öğretmeni adaylarının sözsüz ispat yöntemi ile ilgili görüşlerini incelemişlerdir. Çalışma bir durum çalışması olup bir devlet üniversitesinde toplam 57 öğretmen adayı ile yürütülmüştür. "Alan Eğitiminde Araştırma Projesi" dersi kapsamında öğretmen adayları ile sözsüz ispatlar işlenmiş ve süreç sonunda sözsüz ispatların etkililiği ile ilgili görüşleri alınmıştır. Elde edilen bulgular öğretmen adaylarının sözsüz ispatlarla ile bilgilerin kalıcı olduğunu, somutlaştırdığını, matematiksel formül/ifadelerin daha iyi kavrandığını, konular arası ilişki kurduğunu, verimli olduğunu, yeni bilgiler öğrendiklerini ve öğretim yöntemi olarak da kullanabileceklerini ifade ettikleri göstermiştir.

Yassin (2013) diziler ve seriler ünitesinde sözsüz ispatları kullanmanın öğrenci başarısına etkisini incelemiş ve 89 öğrenciyi iki gruba ayırarak deneysel bir çalışma yürütmüştür. Çalışmanın neticesinde, sözsüz ispatlar kullanılarak dersin işlendiği grubun başarısı ile diğer grubun başarısı arasında anlamlı bir fark çıktığını belirtmiştir.

Uğurel, Moralı ve Karahan (2011) matematikte yetenekli olan ortaöğretim öğrencilerinin sözsüz ispatlarla bir deneyim yaşamaların sağlamışlardır. Süreç sonrasında ürettikleri sözsüz ispat örneklerini tartışmışlardır. Araştırmaya katılan öğrencilerin, ispat yapmak için farklı bakış açıları göster, özgün sözsüz ispatlar geliştirmede, yaptıkları ispatları görsel olarak sunmada başarılı oldukları gözlenmiştir.

Karras (2012) öğretmen yetiştirme programının son yılında olan gönüllü 12 öğretmen adayına lise müfredatında yer alan belli teoremlerin görsel ispatı vermiş ve görsellerdeki teoremleri ispatlamaları ve akıl yürüterek teoremleri açıklamalarını istenmiştir. Daha sonra bu sonuçları Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine göre analiz etmiştir. Yapılan analizlere göre sözsüz ispat bulma sürecinin "görsel ispatın ne olduğunu fark etme, ispat planı tasarlama ve bir çözüm geliştirme" olmak üzere üç aşamadan oluştuğunu ortaya çıkarmıştır. Bu çalışmayla matematik öğretmeni adaylarının geometri bilgisi ve görsel akıl yürütme arasındaki ilişkiyi açıklanmaya çalışılmıştır.

Bell (2011) sınıfında sözsüz ispatlara yer vermiş, öğrencilere web sitelerinde mevcut olan interaktif ya da interaktif olmayan sözsüz ispatları kullanarak tartışma ortamı oluşturmuş ve öğrencilerin yaptıklarını analiz etmiştir. Çalışmada formal ispatın sözsüz ispatla beraber gösterildiği zaman öğrencinin ispat yeteneğinin gelişmesiyle beraber matematiksel bir problemi nasıl daha iyi muhakeme edeceğini öğrendiği belirtilmiştir. Öğrencilerin sözsüz ispatları tartışmasını sağlayarak, matematiksel ifadelerin nasıl ispatlandığı hakkında kendi fikirlerini geliştirmelerine fırsatlar sunmuştur. Böylelikle de öğrencilerin ispat sürecini anlamaya çalışmıştır. Sözsüz ispatların öğrencinin ispat yazma yeteneğini geliştirdiğini ve matematiksel bir problemi nasıl daha iyi muhakeme edeceğini öğrettiğini belirtmiştir. Öğrenciden bir şeklin açıklanmasının istenmesi, öğrencinin özel parçaları kullanmasını gerektirdiğinden muhakeme yeteneğini de geliştireceğini belirtmiştir. Bir matematiksel ifadenin sözsüz ispatının öğrenciye verilmesinin öğrencinin ispat yapma yeteneğini geliştirmek kalmayıp aynı zamanda öğrencinin bir matematiksel ifadenin görsel oluşturmasını sağlamanın öğrencinin akıl yürütme yeteneğini olumlu yönde katkı sağladığını ifade etmiştir.

Alsina ve Nelsen (2010) tarafından yapılan çalışmada sözsüz ispatların ne olduğuna açıklamışlar ve çeşitli sözsüz ispatlara yer vermişlerdir. Çalışmada tümevarım yöntemiyle ispatlanabilecek ancak görsel ispatla daha açıklayıcı olduğu düşünülen ve iki sayma prensibi olan Fubini ve Cantor prensibine göre sözsüz ispat örnekleri kullanılmıştır.

Tekin ve Konyalıoğlu (2010) çalışmalarında toplam ve fark formüllerinin görsel ispat ve cebirsel ispatları sırasıyla vererek görsel ispatlarla ispat sürecinde yapılan çizimlerin formüllerin anlamlandırılmasına, formüllerin özünü anlamaya ve kalıcı öğrenmeye katkı sağlayacağına değinmiştir. Ayrıca çalışmada formüllerdeki ilişkilerin cebirsel ispatlarla yeterince görülemeyeceği ifade edilmiştir.

Yılmaz, Argün ve Keskin (2009) öğrencilerin genelleme keşfetmek ve genelleme formülleri yaratmak için düşünme süreçlerinde görselleştirmeyi nasıl kullandıkları araştırılmıştır. Bu süreci görmek için üç tanesi doğrusal olmayan noktadan kaç tane doğru geçer sorusu ile toplanmıştır. Problem öğrencilere sunulurken önce 2, sonra 3 sonra 4 nokta şeklinde verilmiştir. Çalışmanın katılımcıları Türkiye'nin devlet üniversitesinin eğitim fakültelerinden birinde ortaöğretim matematik öğretmenleri oluşturmaktadır. Görselleştirmenin genellemeleri keşfetmek için önemli bir süreç olduğunu ifade etmiştir.

Bayer (2009) sözsüz ispatların üstün yönlerini üçgensel sayıların, Fibonacci sayılarının kullanıldığı teoremlerin ve Pisagor teoreminin sözsüz ispatlarını vererek göstermeye çalışmıştır. Görsel ispatların geleneksel ispatlardan daha basit olduğunu ve kesin bir sonucun neden doğru olduğunu açıklamaya yardımcı olduğunu belirtmiştir. Tümevarım ile yapılan bir ispatta formülün hatırlanması gerekmekte fakat sözsüz ispatlarda bu gerekliliğin olmamasından dolayı geleneksel ispatlara göre üstün olarak görüldüğünü belirtmiştir.

Bardelle (2009) ikinci ve üçüncü sınıf ta öğrenimlerine devam eden matematik öğrencilerine, sözsüz ispat ve formal ispatları sunarak, her iki ispatta öğrencilerin yaşamış oldukları süreci karşılaştırmıştır. Araştırmada Pisagor teoremi ve geometrik serilerle ilgili sözsüz ispat öğrencilere sunulmuştur. Pisagor teoremi görsellikle daha ilgili ve aşina oldukları bir ispat olduğu için Pisagor teoreminin sözsüz ispatında öğrenciler fazla zorlanmamıştır. Araştırmanın sonucunda da öğrenciler bu tür ispatları zor bulduklarını ifade etmişlerdir. Özellikle anlamlı adımlar dizisinden oluşan bir ispatı durgun bir obje olarak çizmek öğrencilere zor gelmiştir.

Gierdien (2007) çalışmasında derslerde kullanılabilecek sözsüz ispatlara yer vermiştir. Bu çalışmada özellikle sözsüz ispatların ispatları açıklayıcı ispata çevirmesinden ve böylelikle de bilgi transferinin gerçekleşeceğinden söz edilmiştir. Ayrıca bu çalışmada sözsüz ispatlarla, örneğin 1’den n’e kadar tam sayıların toplamının formülündeki n’in nereden geldiği ile ilgili öğrencinin merakını gidermesi ve “görünmeyeni görmesinin” önemli olduğu vurgulanmıştır.

BÖLÜM III
YÖNTEM

3.1. Araştırma Modeli

Araştırmada nitel araştırma yöntemi uygulanmıştır. Nitel yöntemler metin ve imgesel verilere dayanır ve veri analizinde özgün adımlara sahiptir (Cresweel, 2013, s.183). İnsan davranışı ancak esnek ve bütüncül bir yaklaşımla araştırılabilir ve bu yaklaşımda araştırmaya katılan bireylerin görüşleri ve deneyimleri büyük önem taşımaktadır (Yıldırım & Şimşek, 2013, s.41). Bu çalışmada bireylerin görüşlerine ve deneyimlerine başvurulacağından dolayı nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışma deseni kullanılmıştır.

3.2. Çalışma grubu

Bu çalışma bir özel okulda ortaöğretim kurumunda 12. sınıfta öğrenimlerine devam eden 67 öğrenci ile yürütülmüştür. 12. sınıf öğrencilerinin seçilmesinin nedeni yaşamış oldukları deneyimler, almış oldukları derslerdir. Çalışmaya katılan öğrencilerin kız ve erkek dağılımı Tablo 1'de verilmiştir.

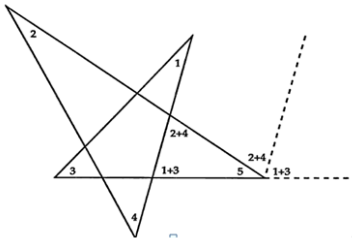
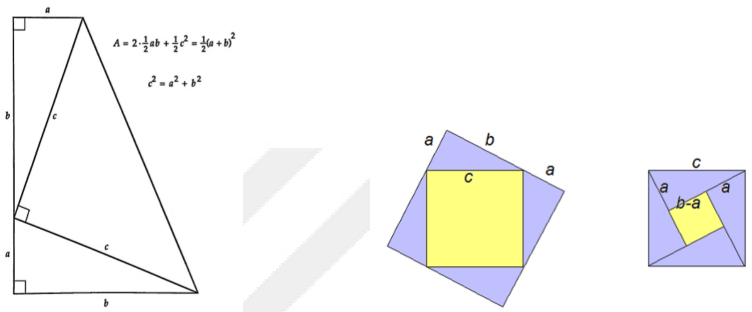
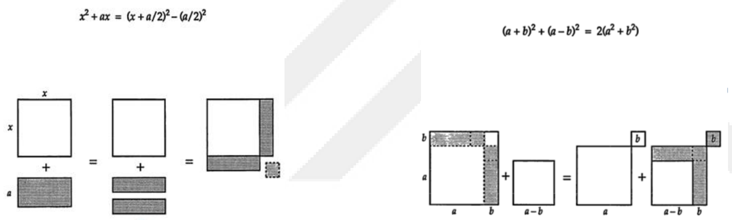
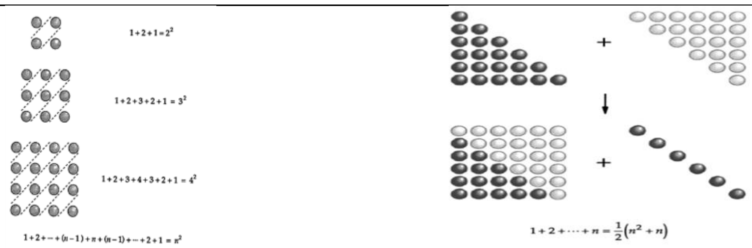
Tablo 1 Çalışmanın katılımcıları

Cinsiyet	f	%
Kız	36	%53,73
Erkek	31	%46,26

3.3.1. Veri toplama aracı

Veri toplama aracı 1 tane yıldızın iç açılarının toplamı, 2 tane Pisagor teoremi, 2 tane özdeşlik, 2 tane sayıların toplamı olmak üzere 7 tane sözsüz ispattan oluşmaktadır. Yıldızın iç açıları toplamı, üçgenin iç açıları ölçüleri toplamına benzer olduğu için, Pisagor teoremi, en iyi bilinen, birçok farklı sözsüz ispatı bulunan fakat prototip örnekler ile ifade edilen bir teorem olduğu için ve özdeşlikler genellikle modelleme ile sunulduğu için seçilmiştir. Bu sözsüz ispatlar Tablo 2' de verilmiştir.

Tablo 2. Veri toplama aracında yer alan sözsüz ispatlar

Yıldız	
Pisagor teoremi	
Özdeşlikler	
Sayıların toplamı	

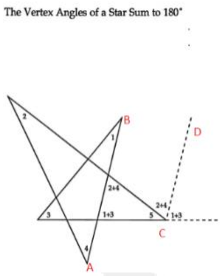
3.3.2.Verilerin Toplanması

Veriler 2019-2020 eğitim- öğretim yılı güz döneminde toplanmıştır**.** Veri toplama aracı ile 12.sınıfta okuyan 67 öğrenciye uygulanmıştır. Bu çalışma öğrencilerin kendi sınıfında yazılı toplanmıştır, hiçbir baskı ve yönlendirme altında kalmadan uygulanmıştır. Veriler toplanırken öğrencilerin başında bir gözetmen olarak öğretmenleri bulunmakta, yaklaşık 2 ders saati süresince cevaplamaları için fırsat verilmiştir.

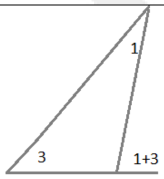
3.3.3.Verilerin analizi

Toplanan veriler öncelikle bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Daha sonra benzerliklerine göre gruplandırılmış, kod ve temalar oluşturularak içerik analizi yapılmıştır. Verilerin analizi yapılırken öncelikle veri toplama aracındaki her bir sözsüz ispatın adımları çıkarılmıştır. Bir sözsüz ispatın ispat adımları aşağıdaki gibidir.

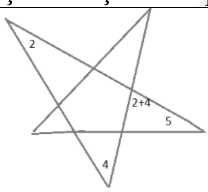
Şekil 1 İspat adımları



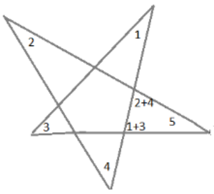
Beş köşeli yıldızın köşe açısı toplamı



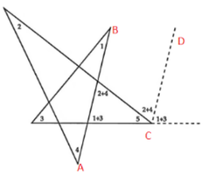
Bir üçgende bir dış açının ölçüsü kendisine komşu olmayan iki iç açının ölçüleri toplamına eşittir.



Benzer şekilde 2 ve 4 ile gösterilen açıların ölçüleri toplamı bir dış açının ölçüsüne eşit olur.



Bir üçgenin iç açıları ölçüleri toplamı 180^0 olduğundan (2+4)+(1+3)+5 açılarının toplam ölçüsü 180^0 olur.



Burada AB doğrusu kesik çizgilerle gösterilen CD doğrusuna paralel olduğundan şekildeki gibi ifade edilir. Ayrıca C doğrusal olduğundan (2+4)+(1+3)+5 toplam ölçüsü 180^0 olduğu çıkar.

Sonuç olarak bir beş köşeli yıldızın köşe açısı toplamı 180^0 dir.

BÖLÜM IV
BULGULAR VE YORUM

4.1. Yıldızın İç Açıları Toplamından Elde Edilen Bulgular ve Yorum

12. Sınıf öğrencilerinin yıldızın iç açılarının toplamına yönelik vermiş oldukları cevaplar Tablo 3'de ispat yaparken hangi gerekçeleri verdikleri ise Tablo 4'de özetlenmiştir. Tablo 3 oluşturulurken ispat verilip verilmemesine göre, daha sonra görseli kullanıp kullanılmadıklarına ve kullandıkları gerekçelere göre inceleme yapılmıştır.

Tablo 3

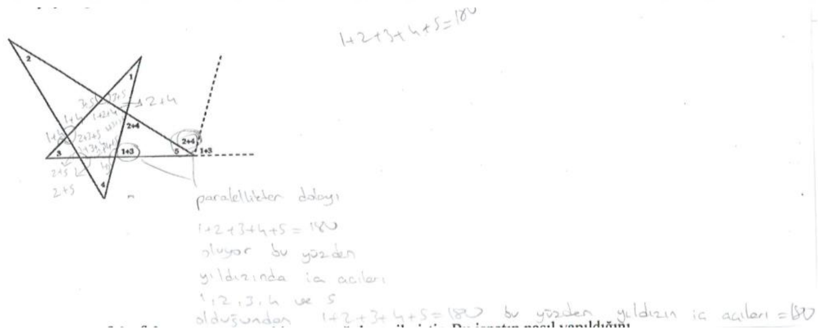
Yıldızın iç açıları toplamı sözsüz ispatından elde edilen bulgular

İspat	**Görsel ile açıklama**	**Gerekçelendirme Kategorisi**	**f**	**%**	
Cevap yok			8	11,9	8
Var	Var	Paralellik	1	1,5	17
		İki iç açı bir dış açı,	5	7,5	
		Üçgenin iç açıları toplamı	2	3	
		Doğru açı, Üçgenin iç açıları toplamı	1	1,5	
		Paralellik, İki iç bir dış	3	4,5	
		Z kuralı, Yöndeş açılar, İki iç açı bir dış açı	2	3	
	Yok	İki iç açı bir dış açı	1	1,5	
		Z kuralı, Yöndeş açılar, İki iç açı bir dış açı, Üçgenin iç açıları	2	3	
Yok	Var	İki iç açı bir dış açı	3	4,5	42
	Yok	Paralellik, İki iç bir dış	6	9	
		Z kuralı	1	1,5	
		Üçgenin iç açıları toplamı, iki iç açı bir dış açı	2	3	
		Üçgenin iç açıları toplamı	2	3	
		Üçgenin iç açıları toplamı, iki iç açı bir dış açı	20	29,8	
		Z kuralı, İki iç açı bir dış açı	1	1,5	
		Yöndeş açı, İç ters açı, dış açı, İki iç açı bir dış açı	1	1,5	
		Paralel, doğru açı	2	3	
		Yıldızın özelliğinden, İki iç bir dış	1	1,5	
		İspat edeceği varsayımı kabul	3	4,5	

Tablo 3' den görüldüğü gibi çalışmaya katılan 67 öğrenciden 17 sinin (%25,4) ispat yaparken 42'si (%62,7) ispat yapmamıştır. 8'i ise (%11,9) soruyu hiç yanıtlamamıştır. İspatı yapan bu 17 öğrenciden 14'ü, verilen görsel üzerinde işaretlemeler yaparken 3 öğrenci hiçbir işaretleme yapmamıştır. İspat yapmayan 42 öğrenciden yalnızca 3'ü verilen görsel üzerinde işaretlemeler yaparken 39'u hiçbir işaretleme yapmamıştır. Yani çalışmaya katılan tüm öğrencilerden 39+3= 42 öğrenci (%62,7) verilen görsel üzerinde hiçbir işaretleme yapmamıştır.

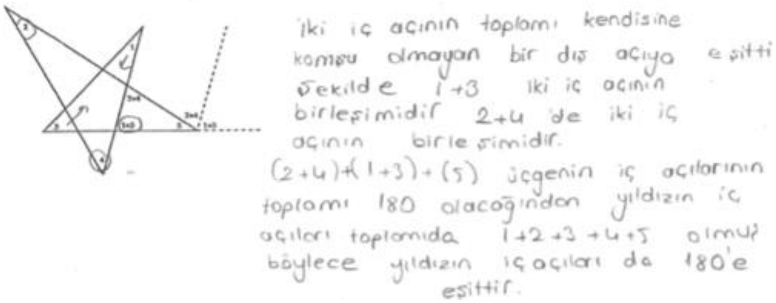
Burada paralellik olarak verilen gerekçede 9.sınıf matematik ders kitabında yer verilen "*iki doğru paralel ise aynı yöne bakan yöndeş açıların ölçüleri birbirine eşittir*" kullanmaktır. İki iç açı bir dış açı şeklinde verilen gerekçe ise. 9.Sınıf matematik ders kitabında yer verilen "*bir üçgende iki tane iç açının toplamı kendisine komşu olmayan bir dış açıya eşittir*" (s.205) kuralı gereğidir. "*Üçgenin iç açıları toplamı 180 derecedir"* (s204) bilgisi de kullanılmıştır kuralı olarak bilinen kural aslında paralel iki doğruyu kesen bir başka doğru ile oluşturulan iç ters açıdan (s200) söz edilmektedir.

Diğer taraftan Tablo 3'den görüldüğü gibi ispatı yapan ve görselde çizim yapan 17 öğrenciden birisi gerekçelendirme olarak "paralellik", 5 öğrenci "iki iç açı bir dış açı", 2 öğrenci "üçgenin iç açıları toplamı" , 1 öğrenci "doğru açı" ve "üçgenin iç açıları toplamı", 3 'ü "paralellik" ve "iki iç bir dış açı", 2'si "paralellik", "yöndeş açı" ve "z kuralı" ifade etmişlerdir. Sadece "paralellik" gerekçe gösteren öğrencilerden birisinin cevabı Şekil 2 de verilmiştir.



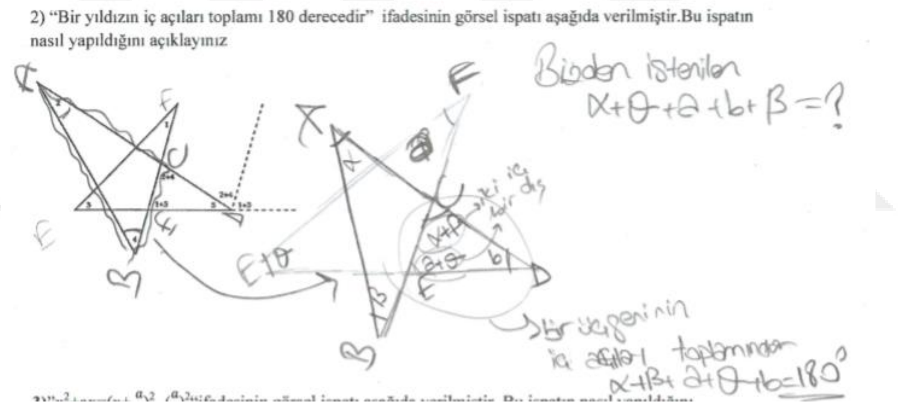
Şekil 2. İspatı yapan görselde açıklamaya çalışan ve gerekçe olarak "paralellik" gösteren öğrencinin cevap kağıdı

Şekil 2'den görüldüğü gibi bu öğrenci "*Paralellikten dolayı 1+2+3+4+5=180 aynı zamanda yıldızın iç açıları da 1,2,3,4,5 dir bu nedenle de yıldızın iç açıları toplamı* 180^0 *dir*" şeklinde ispatlamıştır. İspatı yapan ve görsel üzerinde açıklamalar yapan 5 öğrenci "iki iç açı bir dış açı" gerekçe göstermişlerdir. Bu öğrencilerden bir tanesinin cevabı Şekil 3 de verilmiştir.



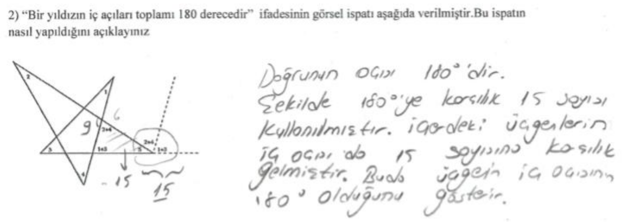
Şekil 3 İspatı yapan görselde açıklamaya çalışan ve gerekçe olarak *“iki iç açı bir dış açı”* gösteren öğrencinin cevap kağıdı

Şekil 3’den görüldüğü gibi bu kategoride öğrenciler “*İki iç açının toplamı kendine komşu olmayan dış açıya eşittir. 1+3 iki iç açının toplamı, 2+4 iki iç açının toplamı bu nedenle de (2+4)+(1+3)+5=180*” şeklinde açıklamışlardır. İspatı yapan ve görsel üzerinde açıklama yapan 2 öğrenciden bir öğrencinin cevabı Şekil 4 te verilmiştir.



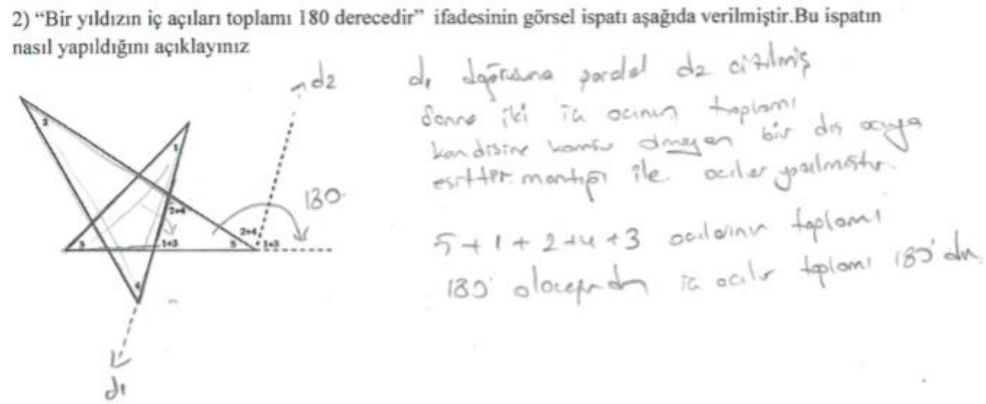
Şekil 4 ispatı yapan görselde açıklamaya çalışan ve gerekçe olarak ‘‘üçgenin iç açıları toplamı ’’ gösteren öğrencinin cevap kağıdı.

Şekil 4 ten görüldüğü gibi öğrenciler ‘‘*iki iç bir dış açı kullanıp α+β ve a+θ eşitini bulup daha sonra üçgende kalan açıya b açısı yazıp α+β+ a+θ=180*’’ şeklinde açıklamışlardır. İspatı yapan ve görsel üzerinde açıklama yapan bir öğrencinin cevabı şekil 5 te verilmiştir.



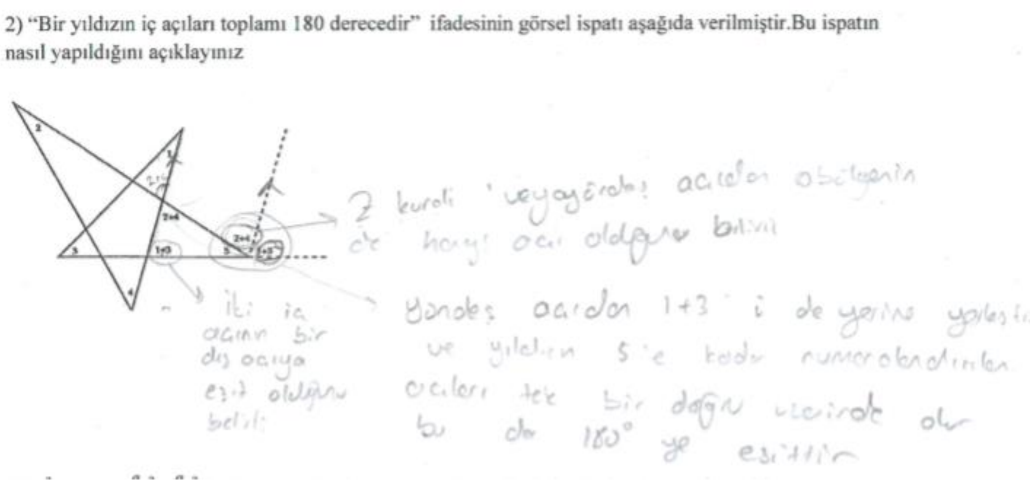
Şekil 5 İspatı yapan görselde açıklamaya çalışan ve gerekçe olarak ‘’ Doğru açı, Üçgenin iç açıları toplamı’’ gösteren öğrencinin cevap kağıdı.

Şekil 5 ten de görüldüğü gibi *öğrenci’ ’doğrunun açısı 180 dir. şekilde 180 dereceye karşılık gelen sayı 15 sayısı kullanılmış içerdeki üçgenlerin açıları da 15 sayısına karşılık gelmiştir. Bu da üçgenin iç açılarının 180 olduğunu gösterir.*’’ Şeklinde açıklamıştır. Burada öğrenci 1 2 3 4 5 ile gösterilen yerleri sayı olarak da toplandığını düşünmüştür. Ancak bunu yaparken aslında işaretli yerlerin nerden geldikleri ve toplamlarının ne olduğunu ifade ederek açıklamaya çalışmıştır. İspatı yapan ve görsel üzerinde açıklama yapan 3 öğrenciden bir tane öğrencinin cevabı şekil 6 te verilmiştir.



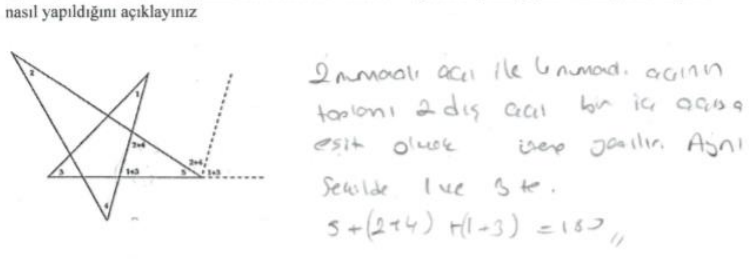
Şekil 6 İspatı görselde açıklamaya çalışan ve gerekçe olarak ‘’ Paralellik, İki iç bir dış ‘’ gösteren öğrencinin cevap kağıdı.

Şekil 6 da öğrenci ‘*’d_1 doğrusuna paralel d_2 çizilmiş sonra iki iç açının toplamı bir dış açıya eşittir mantığıyla açıları yazmıştır. 5+1+2+4+3 açıların toplamı 180 olacağından iç açılar toplamı 180 dir.*’’ Şeklinde açıklama yapmış ve burada hem iki iç açının kendisine komşu olmayan bir dış açıya eşittir kuralı ve üçgenin iç açıları toplamının 180 olduğunu görerek işlemlerini yapmıştır. İspatı yapan ve görsel üzerinde açıklama yapan 2 öğrenciden bir tane öğrencinin cevabı şekil 7 de verilmiştir.



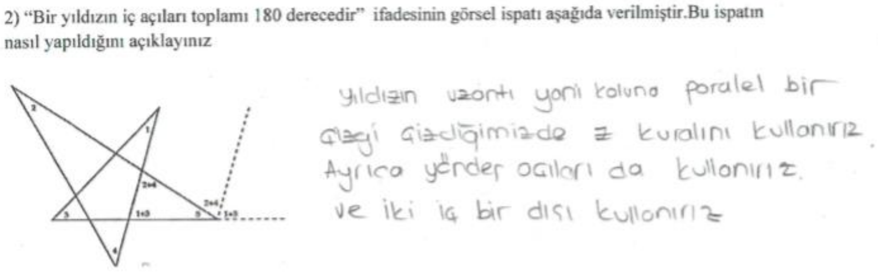
Şekil 7 İspatı görselde açıklamaya çalışan ve gerekçe olarak'' Z kuralı, Yöndeş açılar, İki iç açı bir dış açı' 'gösteren öğrencinin cevap kağıdı.

Şekil 7 de öğrenci '' *z kuralı veya yöndeş açılar o bölgenin hangi açı olduğunu belirlemiş yöndeş açıdan 1+3 de yerine yazarak yıldızın 5 e kadar numaralandırarak açıların tek bir doğru üzerinde buda 180 eşittir.*'' şeklinde açıların nereleri belirttiği ve z kuralı ile hangi açının bulunduğu en son olarak da hepsi doğrusal olduğu için 180 dereceye eşitlediği görülmektedir. İspatı yapan ve görselde herhangi bir işaretleme yapmayan 3 öğrenciden birisi gerekçe olarak "*İki iç açı bir dış açı* " olarak ifade ederken 2'si " *Z kuralı*", "*Yöndeş açılar", "İki iç açı bir dış açı*", "*Üçgenin iç açıları toplamı*" nı gerekçe göstermişlerdir. Diğer taraftan ispatı yapmayan ve görsel üzerinde işaretleme yapan 3 öğrenci "*İki iç açı bir dış açı*" gerekçe gösterirken, ,görsel açıklama yapmayanlardan ise 1 tanesi iki iç bir dış açı, 2 tanesi ise z kuralı, yöndeş açı, iki iç bir dış açı kullanılmıştır şeklinde ifade etmişlerdir. En çok iki iç açı bir dış açıya eşittir gerekçesini ifade etmişlerdir.



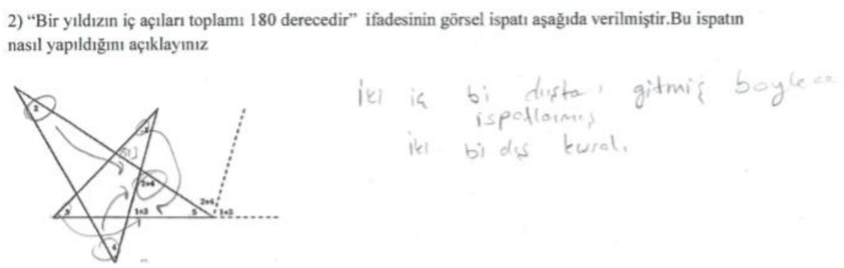
Şekil 8 İspatı görseli kullanmadan açıklamaya çalışan ve gerekçe olarak '' *İki iç açı bir dış açı'* 'gösteren öğrencinin cevap kağıdı.

Şekil 8 de öğrenci ispat yaparken şekil üzerinde çizim yapmazken ‘*’2 numaralı açı ile 4 numaralı açının toplamı 2 dış açı bir iç açıya eşit olacak üzere yazılı. Aynı şekilde 1 ve 3 te.5+(2+4)+(1+3)=180’’*şeklinde ifade etmiştir. Burada iki iç açının kendisine komşu olmayan bir dış açıya eşit olması ve bu açıları doğrusal alıp toplamlarının doğru açı yani 180 derece olduğunu ifade ederek açıklamıştır.



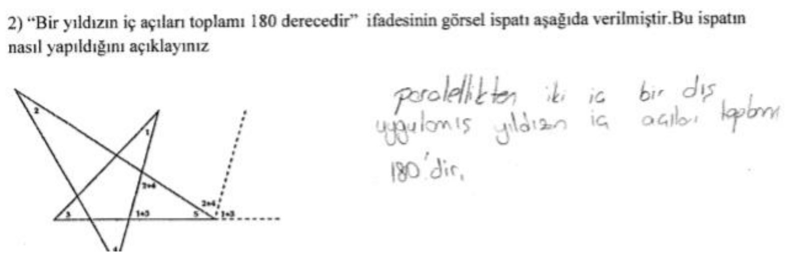
Şekil 9 İspatı görseli kullanmadan yapmaya çalışan ve gerekçe olarak ‘’ *Z kuralı, Yöndeş açılar, İki iç açı bir dış açı, Üçgenin iç açıları’* belirten öğrencinin cevap kağıdı.

Şekil 9 da da görüldüğü gibi ispat yapmak için sözel ifadeler kullanmış ‘*’yıldızın uzantı yani koluna paralel çizgi çizdiğimizde z kuralını kullanırız. Ayrıca yöndeş açıları da kullanırız ve iki iç bir dış açı kullanırız*. ’şeklinde açıklamalar yapmıştır.



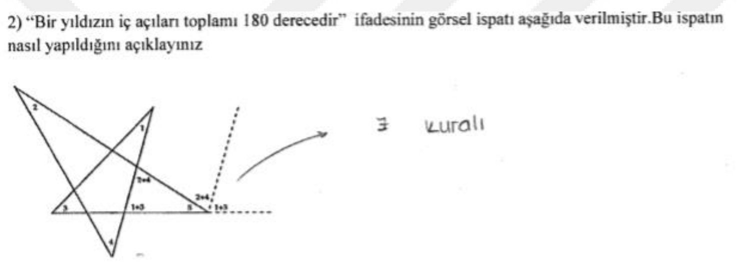
Şekil 10 İspatı yapamayan ancak görsel olarak açıklama yapmaya çalışan ve gerekçe olarak ‘’ İki iç açı bir dış açı’ ’olarak gösteren öğrencinin cevap kağıdı.

Şekil 10 öğrenci ‘*’iki iç bir dış açı kuralı* ‘’şeklinde açıklama yapmaya çalışmış ve şekil üzerinde hangi iki iç bir dışa eşittir onları görsel olarak ifade etmiştir. İspatı açıklamayan ve görselde de işlem yapmayan 6 öğrenciden bir tanesinin cevabı şekil 11 de verilmiştir.



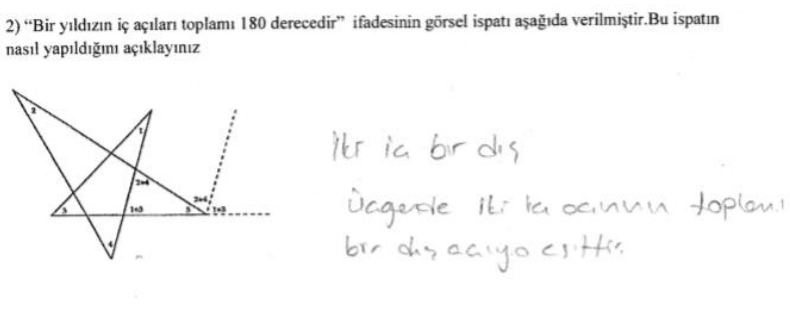
Şekil 11 İspatı açıklayamayan ve görsel olarak açıklama yapmayan gerekçe olarak ‘’*paralellik iki iç bir dı*ş’ ’ifade eden öğrencinin cevap kağıdı.

Şekil 10’da öğrenci sözel olarak ‘*’paralellikten iki iç bir dış uygulanmış’’* şeklinde açıklama yapmıştır. Yine ispatı açıklayamayan ve görselde de açıklama yapamayan bir öğrencinin cevap kağıdı Şekil 12 de verilmiştir.



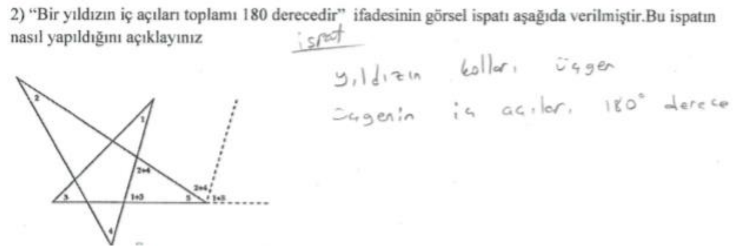
Şekil 12 İspatı açıklayamayan ve görselde de açıklama yapmayan gerekçe olarak ‘’z kuralı’’diye ifade eden öğrencinin cevap kağıdı.

Şekil 12 de öğrenci sadece açıklama olarak ‘’z kuralı’’ ifadesini kullanmıştır. İspatı açıklayamayan ve görselde de açıklama yapamayan 2 öğrenciden bir tanesinin cevap kağıdı Şekil 13 de verilmiştir.



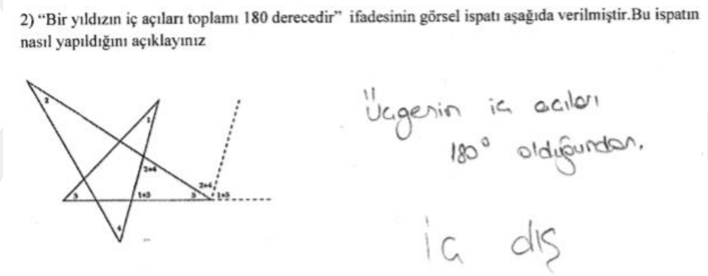
Şekil 13 İspatı açıklayamayan ve görsel üzerinde işlem yapmamış gerekçe olarak ‘’ Üçgenin iç açıları toplamı, iki iç açı bir dış açı’ ’ifade eden öğrencinin cevap kağıdı.

Şekil 13 sözel olarak ‘*’iki iç bir dış açı’* ’ifadesini kullanarak açıklamaya çalışmıştır. İspatı açıklayamayan ve görselde çizim kullanmayan 2 öğrenciden bir tanesinin cevap kağıdı Şekil 14 de verilmiştir.



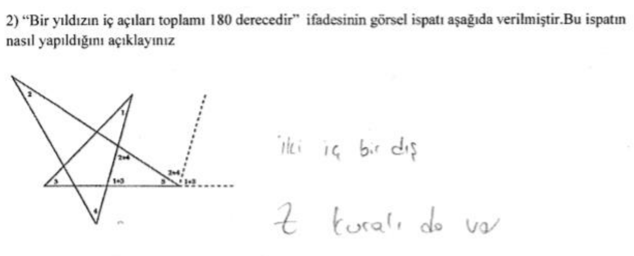
Şekil 14 İspatı açıklayamayan ve görsel üzerinde açıklama yapmayan gerekçe olarak ‘’üçgenin iç açıları ‘’ifadesini kullanan öğrencinin cevap kağıdı.

Şekil 14 te öğrenci sadece ‘*’üçgenin iç açıları 180 derecedir*. ’ifadesini kullanmıştır. İspatı açıklayamayan ve görsel üzerinde hiç işlem yapmayan gerekçesi farklı olan 20 öğrenciden bir tanesini cevap kağıdı Şekil 15 te verilmiştir.



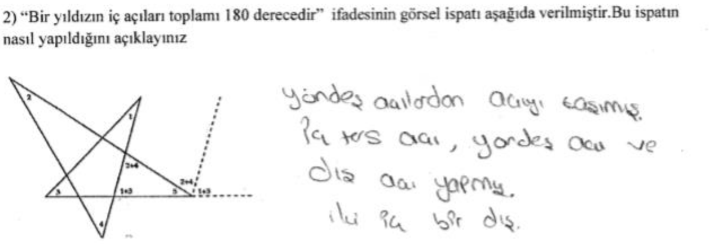
Şekil 15 İspatı açıklayamayan ve görselde işlem yapmayan gerekçe olarak ‘’ Üçgenin iç açıları toplamı, iki iç açı bir dış açı’’olarak ifade eden öğrencinin cevap kağıdı.

Şekil 15’te öğrencinin yaptığı ‘*’üçgenin iç açıları 180 ve iç dış* ‘’şeklindeki ifadeyi 20 kişi daha kullanmıştır. Şekil 16’da ise gerekçesi farklı olan bir başka öğrencinin cevap kağıdı verilmiştir.



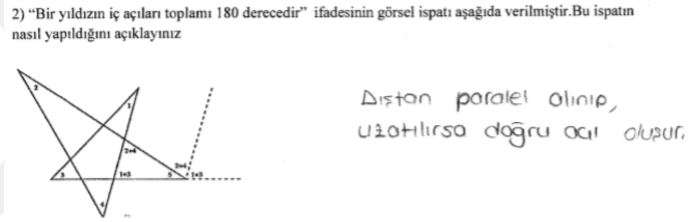
Şekil 16 İspatı açıklamayan ve görselde işlem yapmamış gerekçe olarak ise ‘’ Z kuralı, İki iç açı bir dış açı’ ’ifade eden öğrencinin cevap kağıdı verilmiştir.

Şekil 16’daki öğrenci de sözel olarak ‘*’iki iç bir dış ve z kuralı* ‘’ ifadesini kullanmıştır. Şekil 17 de ise gerekçesi farklı olan bir öğrencinin cevap kağıdı verilmiştir.



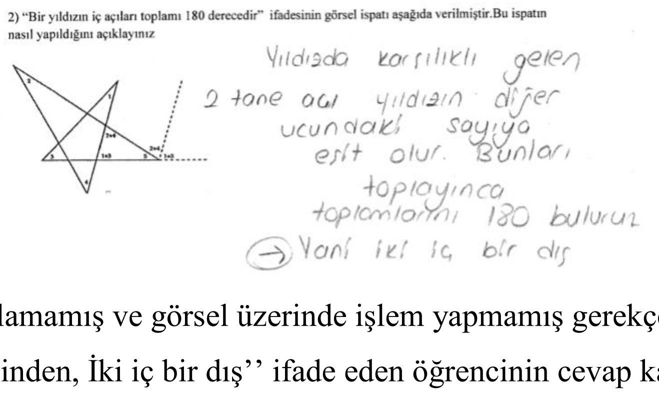
Şekil 17 İspatı açıklamayan ve görsel üzerinde işlem yapmamış gerekçe olarak ‘’ Yöndeş açı, İç ters açı, dış açı, İki iç açı bir dış açı’ ’ifadesini kullanan öğrencinin cevap kağıdı.

Burada da öğrenci sözel olarak ‘*’yöndeş açılardan açıyı taşımış iç ters açı yöndeş açı yapmış iki iç bir dış* ‘’şeklinde açıklama yapmıştır. Şekil 18 de ise gerekçesi başka olan 2 öğrenciden birinin cevap kağıdı verilmiştir.



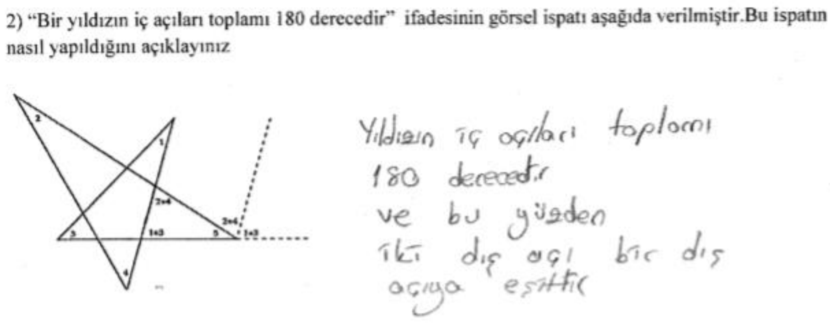
Şekil 18 İspatı açıklamayan ve görsel üzerinde işlem yapmamış gerekçe olarak ‘’ Paralel, doğru açı’ olarak ifade eden öğrencinin cevap kağıdı.

Öğrenci sözel olarak ‘’*dıştan paralel alınıp, uzatılırsa doğru açı oluşur*.’’ Şeklinde açıklama yapmıştır. Bir başka gerekçeye sahip olan öğrencinin cevap kağıdı şekil 19de verilmiştir.



Şekil 19 İspatı açıklamamış ve görsel üzerinde işlem yapmamış gerekçe olarak ‘’ Yıldızın özelliğinden, İki iç bir dış’’ ifade eden öğrencinin cevap kağıdı.

Şekil 19 de *öğrenci’ ’yıldızda karşılıklı gelen 2 tane açı yıldızın diğer ucundaki sayıya eşit olur. Bunların toplamı 180 bulunur. Yani iki iç bir dış.* ’şeklinde açıklama yapmıştır. Şekil 18 de ise bir başka gerekçeye sahip 3 öğrenciden bir tanesinin cevap kağıdı verilmiştir. Şekil 18 görüldüğü üzere ‘*’yıldızın iç açıları toplamı 180 derecedir ve bu yüzden iki dış açı bir dış* açı ‘’ şeklinde açıklama yapmıştır. Aynı ifadeyi kullanan 3 öğrenciden bir tanesi örnek olarak yukarıda verilmiştir.



Şekil 20. İspatı açıklamayan ve görsel üzerinde işlem yapmamış’’ İspat edeceği varsayımı kabul’’ eden bir öğrencinin cevap kağıdı.

Burada ispatı yapmayan ve görsel üzerinde işlem yapmayan farklı gerekçelere sahip öğrencilerin cevap kağıtları incelenmiş ve her gerekçe için bir öğrencinin cevap kağıdı ifade edilmiştir. Diğer taraftan hangi gerekçenin hangi sıklıkla ifade edildiği de önemlidir. Bu nedenle çalışmaya katılan öğrencilerin bu görsel ispat ile yaptığı gerekçelendirmeler Tablo2 de verilmiştir. Tablo 4 oluşturulurken Tablo 3’de verilmiş olan gerekçeler ayrı ayrı ele alınmıştır.

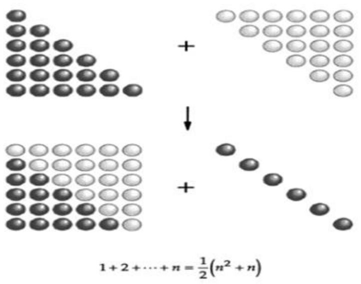
Tablo 4.
Çalışmaya katılan öğrencilerin yapmış oldukları gerekçeler ile ilgili bulgular

	Kategoriler	**f**
Gerekçeler	Paralellik	12
	İki iç bir dış	42
	Üçgenin iç açıları toplamı	10
	Doğru açı,	3
	Yöndeş açılar,	4
	Z kuralı	6
	Üçgenin iç açıları toplamı,	24
	Yöndeş açı, ,	1
	İç ters açı	1
	Dış açı,	1
	Yıldızın özelliğinden,	1
Diğer	Yok, (İspat edeceği varsayımı kabul)	3

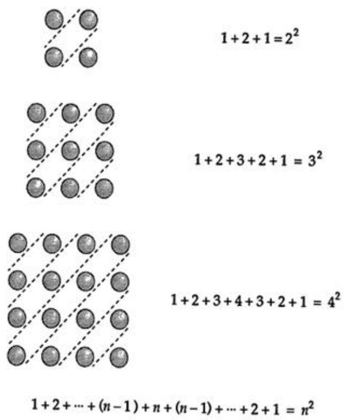
Tablo4 ‘den görüldüğü gibi bu ispat için en çok öne sürülen gerekçelendirme ‘’*iki iç açının ölçüsü kendisine komşu olmayan bir dış açıya eşittir’’* ifadesidir. Çalışmaya katılan öğrenciler genel olarak benzer ifadeler kullanmaktadırlar ancak birbirlerinden ayrılan yönleri de vardır. Burada en çok öğrencilerin kullandığı bir diğer gerekçede “üçgenin iç açılarının toplamı” ve daha sonra “paralellik” olmuştur. Aslında yaklaşım tarzı olarak önce paralelliği daha sonra iki iç kendisine komşu olmayan bir dış açıya eşittir kuralını kullanmaktadırlar. Genel olarak aynı kanıya varmaktadırlar. Cevap verip ispatı açıklayamayanların çoğu aslında ispata yaklaşmışlardır. Ancak zihinlerinde canlandırdıklarını ifadeye dökemediklerinden tam manası ile açıklama yapamamışlardır. Zengin bir düşünce yapısı ile farklı farklı gerekçelerle aynı sonuca varmaya çalışmışlardır. Gerekçelerin çok olması aslında öğrencilerin bazı bilgileri tam hatırlayamadıkları ve öğrendikleri yeni bilgiler ile harmanlayıp sunamadıklarından kaynaklanmakta olduğu düşünülebilir.

4.2. Sayıların Toplamından Elde Edilen Bulgular ve Yorum

12. Sınıf öğrencilerinin sayıların toplamına yönelik sözsüz ispat becerilerini incelemek için Şekil 21’de verilen sözsüz ispatlar sorulmuştur.



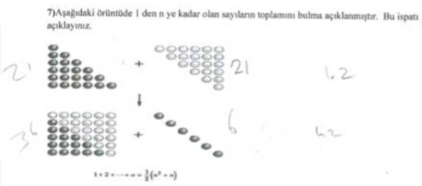
(Nelsen, s.83)



Şekil 21. Sayıların toplamı ile ilgili yöneltilen sözsüz ispatlar

Çalışmaya katılan öğrencilerin 1’den ne’ye kadar olan sayıların toplamı ile ilgili sözsüz ispata yönelik vermiş oldukları cevaplar Tablo 5’de özetlenmiştir.

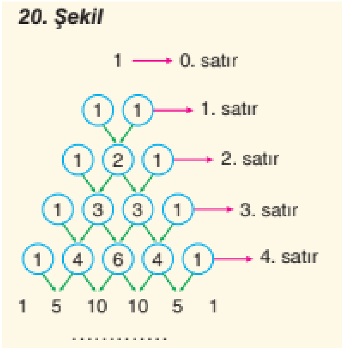
Tablo 5. 1’den n’ye kadar sayıların toplamından elde edilen bulgular

Tema	Kategoriler	Örnek cevaplar	f	%
Cevap yok			29	43,3
Gauss teoremi	Gauss ifade etmemiş ama onun yaptığı gibi yapmış	1+2+3+4 - - - +n n+n-1+ - - - +1 n+1 +n+1+n+1 - - - n+1 $\underbrace{}_{n \text{ tane}}$ $\frac{n.(n+1)}{2} = \frac{1}{2}(n^2+n)$	13	19,4
	Gauss teoremi diye ifade etmiş	1+2+3=6 Gauss formülü $\frac{n(n+1)}{2}$ n sayı terim $\frac{3.4}{2}=6$	2	3
Pascal üçgeni	Pascal üçgeni	pascal üçgeni	8	11,9
Noktaları sayma	Noktaları sayma Gauss		1	1,5
	Noktaları sayma		1	1,5
Şekle odaklanma	Noktaların sayısına odaklanma	Yukarıdan aşağı yada aşağıdan yukarı 1 artarak toplam sayısı bulunur.	1	1,5
	Üçgen ortadan bölünmüş	Üçgeni ortadan ikiye bölmüş	1	1,5
	Bütüne tamamlama	Birbirini bütüne tamamla Anlayamadım	1	1,5
	Dikdörtgen oluşturma	Tam bir dikdörtgen olması için siyahtan çaprazlama bir sıra çıkartılmış	1	1,5
	Boncuklarla ifade etme	Sayıların toplamını bulmak için 1'den n'e kadar sayılar boncuklarla ifade edilmiştir. Ve n'in karesi olmuştur	1	1,5
Örüntü	Örüntüyü ikiye ayırma Terim sayısını bulma	Oranta ikiye ayrıldığı için $\frac{1}{2}(n^2+n)$ olur. Böyle olduğu için de terim sayısı bulmanın işlemine benzetebiliriz.	5	7,5
	Örüntü	örüntü	1	1,5
	Simetri ekseni Örüntü Kuralla artan düzen	n+1 simetri ekseni birleşip bir örüntü oluşturmuştur. Kuralla artan bir düzen	2	3

Tablo 5’den görüldüğü gibi çalışmaya katılan 67 öğrenciden 29’u (% 43,3) soruyu cevaplamamıştır. 13 öğrenci (%19,4) Gauss teoremi ile açıklamaya çalışırken 2 öğrenci (%3) ise sadece Gauss Teoremi cümlesini kullanmışlardır. Katılımcılardan 8 öğrenci (%11,9) Paskal üçgeni diye ifade ederken 1 öğrenci (%1,5) ise noktaları sayma ve Gauss cevabı vermekte bir başka öğrenci ise (%1,5) sadece noktaları sayma işlemi yaparak açıklamaya çalışmıştır. Şekle odaklanan 5 öğrenciden (%7,5) bir tanesi (%1,5) noktaların sayısına odaklanırken bir diğeri (%1,5) üçgen ortadan bölünmüş ifadesi kullanmış bir (%1,5) diğeri ise bütüne tamamlama şeklinde ifade etmiştir. Yine bir öğrenci (%1,5) ise dikdörtgen oluşturma diye ifade ederken diğer biri (%1,5) ise boncuklarla ifade etme şeklinde açıklama yapmıştır. Ayrıca 8 öğrenci (%11,9) örüntü olarak değerlendirmiş bunlardan 5 (%7,5) tanesi örüntüyü ikiye ayırıp terim sayısı bulmaya çalışırken 1 öğrenci (%1,5) sadece örüntü diye ifade etmiş, 2 öğrenci (%3) ise simetri ekseni çizilmiş kuralla artan bir örüntü şeklinde ifade etmiştir.

İlk kategori olan Gauss yöntemi ile ispat etmeye çalışan 15 öğrenci aslında Gauss Teoremini ispat etmemişlerdir sadece onun yaptığı gibi alt alta toplamaya çalışmışlardır Daha önceki deneyimlerine bakarak bu yöntemle ispat edebileceklerini düşünmüşlerdir. Şekilden bağımsız olarak ispat yapmayı tercih etmişlerdir.1 den n ye kadar olan ve n den 1 e kadar olan sayıların toplamışlar ve iki defa 1 den ne ye kadar olan sayıları topladıkları için tekrar ikiye bölmeyi ifade etmişlerdir. Zihinlerinde ilk canlanan ve ispat olarak öğrendikleri ilk yöntemleri uygulama gereksinimi duymaktadırlar. Pascal üçgeni diye cevap verenlerde aslında en başta verilen Pascal üçgen tanımına benzettikleri için olacağı düşünülebilir. Orada verilen sayılar gibi bunların da toplandığını düşünebilirler. Çalışmaya katılan öğrencilerin azımsanmayacak bir kısmı 8 öğrenci bu şekilde cevap vermişlerdir. Bazı öğrenciler ise noktaların sayısına odaklanarak nasıl bir artış nasıl bir örüntü oluşturduğunu bulmaya çalışmışlardır. Belirli bir yere kadar gelip kalmış öğrenciler ispata yaklaşmışlar ancak devamını tamamlayamamışlardır. Genel olarak bu soruda öğrenciler şekle odaklanmışlar şekil üzerinde işlemler yaparak ispatlamaya çalışmışlardır.

Burada kategorilerden biri olan kullanılan ifadelerden biri Pascal (şekil 22) üçgenidir. Pascal üçgeninde; her satırın birinci sayısı olan 1 den sonra gelen sayı, bir üst satırın birinci ve ikinci sayılarının toplamıdır. Her satırın üçüncü sayısı üst satırın ikinci ve üçüncü sayılarının toplamıdır. Bu şekilde oluşturulan Pascal üçgeninde her satırın son sayısı ise yine 1’dir şeklinde tanımlanmaktadır.



Şekil 22 Paskal üçgeni

Aynı zamanda 1 den n ye kadar ve n den 1 e kadar olan sayıların toplamı ile elde edilen gauss yöntemi kullanan öğrenci sayısı azımsanmayacak çoktur. Bu yöntem aşağıdaki şekilde verilmiştir.

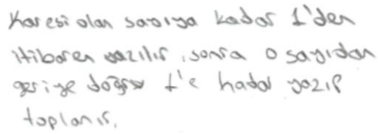
$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{1+2+3+4+\cdots+n} \\ \mathbf{n+(n-1)+\cdots+1)} \\ \hline \mathbf{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)} \end{array}\right\} = \boldsymbol{n.(n+1)}$$ olur. Burada elde edilen sonuç aynı toplamın iki defa yazılması sonucu elde edildiğine göre; $\mathbf{1+2+3+4+\cdots+n} = \frac{\boldsymbol{n.(n+1)}}{\mathbf{2}}$ olur.

8 öğrenci ise (%11,9) şekle bakarak bir örüntü oluştuğunu ifade etmekle birlikte bazıları bu örüntüyü bulmaya çalışmış bunun simetri ekseni ile bölüp artan bir kural olduğunu düşünenlerin yanı sıra sadece örüntü diye ifade eden öğrencilerde mevcuttur. Genel olarak ispatlamaya çalışan öğrencilerin hepsinin bir örüntünün varlığını gördükleri ve her biri bunu bulmak için farklı yaklaşımlar sergilemişlerdir. Yaklaşımları, yaptıkları işlemler her öğrencinin zihinlerinde algıladıkları ya da zihinde açıkladıkları bilgileri yansıtmaya çalışmışlar zengin bir çalışma olmasına da zemin hazırlamışlardır.

Tablo 6 Toplamlardan elde edilen bulgular

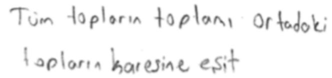
				f
Cevap yok				16
Örüntünün kuralını açıklama	Sözel açıklama	Eşitliğin tek tarafına odaklanma		1
		Eşitliği açıklama	Görsel ile açıklama	10
			Görselden bağımsız açıklama	12
	n kullanarak açıklama		Görselden bağımsız açıklama	2
			Görsel ile açıklama	5
Örüntü			Örüntü-paskal üçgeni	3
			Örüntü	3
Bir sonraki adımı çizme			Eşitliğin diğer tarafı ile ilişki kurma	
			L şeklinde artış	2
Diğer			Simetri	11
			∞'a kadar gider	3
			ardışık sayıların toplamı	
			Şekillerle formül açıklanmış	

16 öğrenci bu soruya yanıt vermemiştir. 30 öğrenci örüntünün kuralını açıklamaya çalışmışlardır. Bu öğrencilerden 23'ü sözel olarak açıklamıştır. Sözel açıklayan öğrencilerden birisi verilen eşitliklerin tek tarafına odaklanmıştır. Bu öğrencinin yanıtı Şekil 23 te gösterilmiştir.



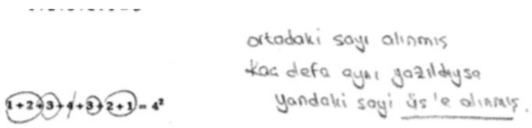
Şekil 23 Eşitliğin tek tarafına odaklanan öğrencinin yanıtı

10 öğrenci verilen eşitliği görselden hareketle açıklamıştır.



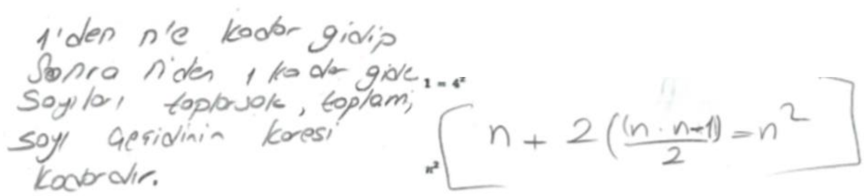
Şekil 24 Eşitliği görsel ile birlikte açıklayan öğrencilerden birsinin yanıtı

Bu öğrencilerin cevapları incelendiğinde verilen görseldeki noktaların toplam sayısı ile paralel ve kesik kesik verilmiş çizgiler arasında noktaların sayısı arasında ilişki kurdukları ve bunu açıklamaya çalıştıkları görülmüştür. Diğer taraftan görselden bağımsız açıklamaya çalışan öğrenciler ise görseller yanında verilen eşitlikleri açıklamışlardır. Görseller üzerinde hiçbir işaretleme yapmamışlardır. Bu öğrencilerden birsinin yanıtı Şekil 25 te verilmiştir.



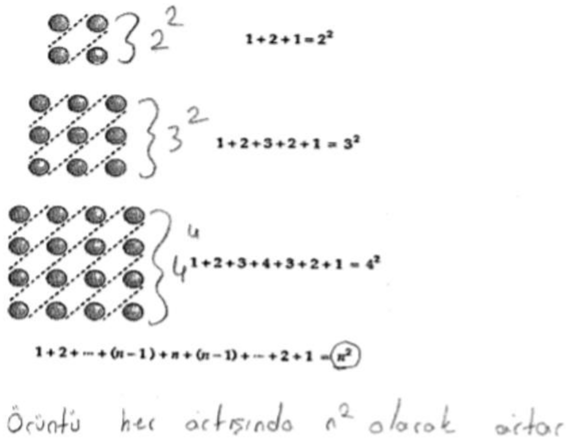
Şekil 25 Eşitliği görselden bağımsız açıklayan öğrencilerden birsinin yanıtı

Şekil 25 den de görüldüğü gibi bu öğrenciler görsel, kesik kesik çizgilerden veya toplardan bahsetmemişler yalnızca sayıların artarak ortadaki sayıya kadar gelip sonra tekrar azalması şeklinde açıklamışlar ve bu sayıların toplamının ortadaki sayının karesine eşit olduğuna vurgu yapmışlardır. Örüntünün kuralını açıklayan öğrencilerden 7'si kuralı "n" ile açıklamaya çalışmışlardır. Bu öğrenciler genel durum hakkında yorumladıkları için ayrı bir kategoride değerlendirilmişlerdir. Bu 7 öğrenciden de 2'si görselden bağımsız olarak açıklarken 5'i görsel ile ilişki kurarak açıklamıştır. Görselden bağımsız cevap veren öğrencilerin cevabı Şekil 26 da verilmiştir.



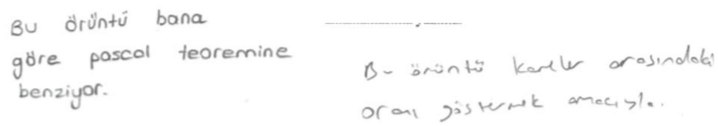
Şekil 26 "n" ile görselden bağımsız açıklayan öğrencilerin yanıtı

Şekil 26 dan da görüldüğü gibi bu öğrencilerden birisi özel durumlardan yola çıkarak herhangi bir durumda da 1'den n'ye kadar ve n'den 1 e kadar sayıların toplamı n'nin karesine eşit olacağını ifade etmiştir. İkinci öğrenci ise 1'den n'ye kadar olan sayıların toplamını alarak yeni bir formül üretmeye çalışmıştır. Görselden yararlanarak n için açıklamaya çalışan öğrencilerden birsinin yanıtı şekil 27 de verilmiştir.



Şekil 27 **"**n" ile birlikte görselden açıklamaya çalışan öğrencilerden birisinin yanıtı

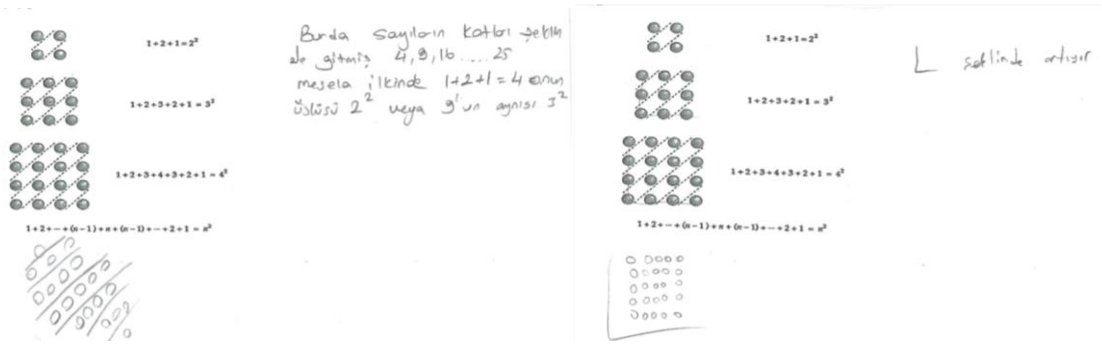
Şekil 27 den de görüldüğü gibi bu öğrencilerde sözel açıklayan öğrenciler gibi yanıt vermişlerdir. Yalnız bu öğrenciler herhangi bir durum içinde muhakeme yapmışlardır. 6 öğrenci örüntü olduğunu ifade etmiştir. Bu öğrencilerden üçü yalnızca örüntü derken diğer üç öğrenci örüntü ile birlikte paskal üçgenini ifade etmişlerdir.



Şekil 28 Örüntü ve paskal üçgeni yanıtını veren öğrencilerin yanıtı

2 öğrenci örüntü genellemesi problemlerinde olduğu gibi bir sonraki adımdaki görseli çizmişler ve artışa odaklanmışlardır. Bu öğrencilerden bir tanesi L şeklinde arttığını ifade ederken diğer öğrenci ise problemde verilenlerden 2^2, 3^2, 4^2 ve kendisinin çizdiği şekilden 5^2

olduğunu gördüğü için ardışık sayıların karelerinin geldiğini ifade etmiştir. Şekil 30 da bu öğrencilerin yanıtları verilmiştir.



Şekil 29 Bir sonraki adımı çizerek açıklamaya çalışan öğrencilerin yanıtı

Şekil 29 dan da görüldüğü gibi bir sonraki adımı çizerek yorum yapmışlardır. Bu genellikle örüntü genellemeleri problemlerinde sorulan bir adımdır. Öğrenciler muhtemelen bu tarzda soruları hatırladıkları için bu şekilde bir adım sonrasını çizmiş olabileceği söylenebilir.

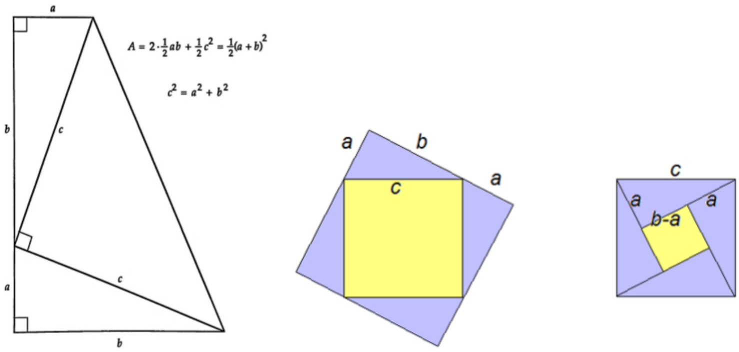
14 öğrencinin cevabı “diğer” kategorisinde değerlendirilmiştir. 11 öğrenci simetri olduğunu ifade etmiştir.

Şekil 30 Simetri cevabı veren öğrencilerden birsinin yanıtı

Simetri ifade eden öğrenciler ya sadece simetri ya da tek sayılara göre simetri şeklinde açıklama yapmışlardır. bu öğrenciler ya görseldeki noktaların sıralanışına veya kuralda verilen sayıların sırasına yönelik bu şekilde ifade ettikleri söylenebilir.. Geriye kalan öğrenciler ise “ardışık sayıların toplamı”, şekillerle formül açıklanmış”, ve “∞’a kadar gider” yanıtlarını vermişlerdir.

4.3. Pisagor Teoreminden Elde Edilen Bulgular ve Yorum

12. Sınıf öğrencilerinin Pisagor teoremi ile ilgili sözsüz ispat becerilerini incelemek için Şekil 32 de verilen sözsüz ispatlar yöneltilmiştir.



Şekil 31 Pisagor ispatının sözsüz ispatları

Bu ispatlardan birincisi ABD'nin yirminci cumhurbaşkanı James Abram Garfield (1831-1881) tarafından yapılmıştır. Matematikle oldukça ilgilenmiş ve 1876'da Temsilciler Meclisi (*House of Representatives*) üyesi olarak hizmet ederken Pisagor teoreminin bu ilginç bir kanıtı keşfetmiştir. New England Eğitim Dergisinde (*New England Journal of Education*) yayınlanmıştır. İspat yamuğun alan iki farklı biçimde hesaplayıp birbirine eşitlenerek yapılmaktadır (Pappas, 1989).

Metot (1): yamuğun alanı = 1/2(alt taban+üst taban)(yükseklik)

Metot (2): yamuk 3 dik üçgene bölünmüş ve 3 dik üçgenin alanları hesaplanır. üç üçgeninin alanı toplamı ile yamuğun alanı birbirine eşittir. Yani: $\frac{2ab+c^2}{2} = \frac{a^2+b^2+2ab}{2} = a^2 + b^2 = c^2$ dir. Pappas (1989) tarafından verilen ispatı aşağıdaki gibidir.

Construct trapezoid ABCD with $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, angles C and B right angles, and the indicated lengths, a, b and c.

Calculate the area of the trapezoid using the two methods listed above.

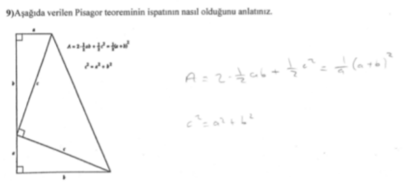
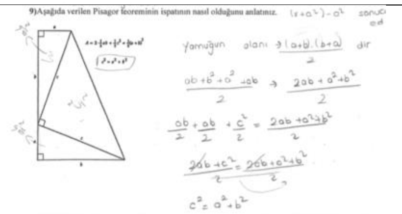
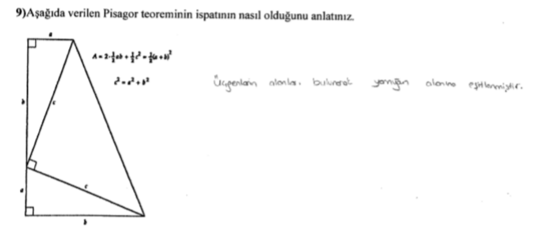
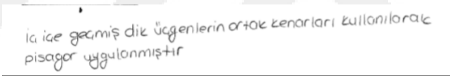
	area method (1)	=	**area method (2)**
	1/2(a+b)(a+b)		=1/2(ab)+1/2(ab)+1/2(c c)
	(a+b) (a+b)	=	ab + ab + c^2
	a^2 + 2ab + b^2		= 2ab + c^2
QED	a^2 + b^2		= c^2

(Pappas, 1989,s.201).

Şekil 32 Pappas (1989) tarafından verilen ispat

Çalışmaya katılan öğrencilerin bu ispata verdikleri cevaplar Tablo 7 de özetlenmiştir

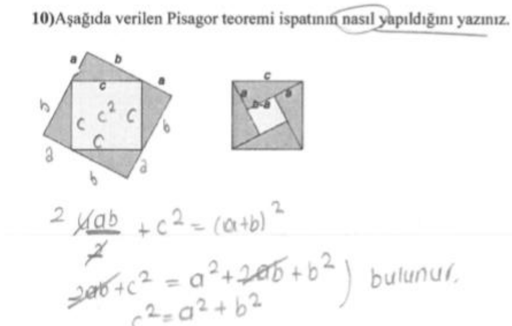
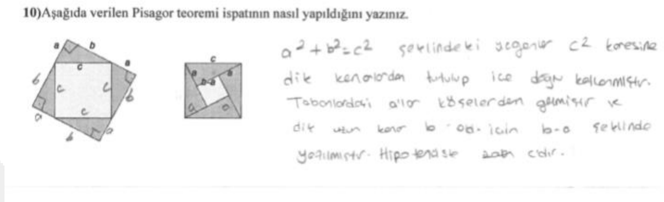
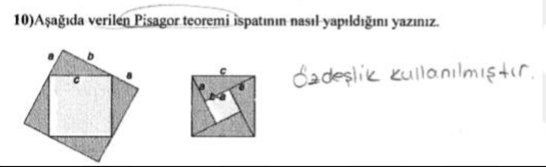
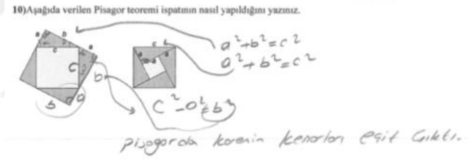
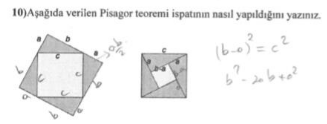
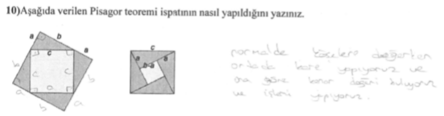
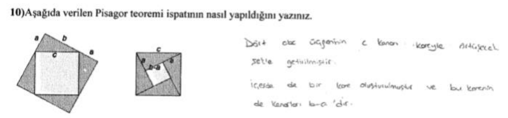
Tablo 7 Garfield'ın Pisagor teoreminin ispatından elde edilen bulgular

		Örnek cevap	f	%
Cevap yok	Boş		12	
	Açıklama yok		12	
Doğru cevap	Yamuğun alanı, üçgenlerin alanları toplamına eşit ile ispat		21	
	Açıklama var ispat yok		11	
Diğer			11	

Tablo 7'den görüldüğü gibi çalışmaya katılan 24 öğrenci cevap vermemiştir. Bu öğrencilerden 12'si hiçbir karalama yapmazken 12 öğrenci ise soruda verilenleri yazmıştır. 32 öğrenci ise alanlardan yola çıkarak "*yamuğun alanının dik üçgenlerin alanalarının toplamına eşit*" olacağından yola çıkmışlardır. Bu öğrencilerden 22'i ispatı açıklarken 11öğrenci ise sadece "*alanlar eşitlenmiş*" şeklinde ifade etmişlerdir. Soruda yapacakları işlem adımları verildiği için yazmadıkları kabul edilerek bu öğrencilerinde cevapları doğru cevap olarak alınmıştır. 12 öğrencinin verdiği cevaplar ise diğer kategorisi altına alınmıştır. Bu öğrencilerin cevaplarında pisagor teoreminin ispatı yerine pisagor teoreminin uygulanması vardır.

Pisagor teoremine yönelik sorulan ikinci soru 12.yy da Bhaskara tarafından yapılan sözsüz ispattır. Çalışmaya katılan öğrencilerin bu ispata verdikleri cevaplar Tablo8'de özetlenmiştir

Tablo 8. Bhaskara'ın pisagor teoreminin ispatından elde edilen bulgular

Kategori	Örnek cevap	f	%
Cevap yok		31	46,3
Alan		5	7,5
Origami		3	4,5
Özdeşlik		1	1,5
Pisagor teoremini kullanma		5	7,5
İlişki kuramama		23	34,3
Diğer	 	2	3

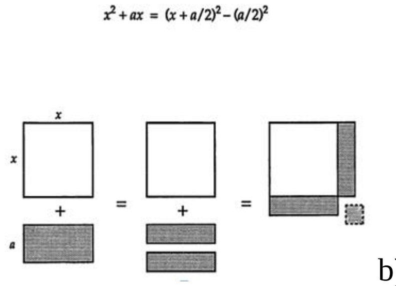
Tablo 8'den görüldüğü gibi çalışmayan katılan 67 öğrenciden 31'i (%46,3) bu soruyu yanıtlayamamıştır. Alanlardan yola çıkarak göstermeye çalışan öğrenci sayısı 5 (%7,5) dir. Bu öğrenciler birinci ve ikinci karenin alanlarını ayrı ayrı toplayarak alan korunumundan aynı kalacağı prensibinden yola çıkarak yapmışlardır. Yani karenin içinde bulunan üçgenlerin alanlarını bulup toplamış ve ilk karenin alanına eşitleyerek ispatı açıklamaya çalışmışlardır. 3

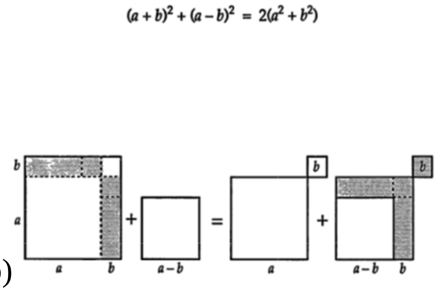
öğrenci (%4,5) şekli katlayarak kare yapıldığını yani origamiden bahsetmişlerdir. Origami ile ispatlar yapılırken verilen görsellere benzettikleri söylenebilir.

Öğrenciler uygulama öncesinde Pisagor teoremi ile bir yaşantıyı hatırlayarak ve görseli de oradakine benzeterek cevap vermiş oldukları söylenebilir. Yani şekli katlayarak kare yapma şeklinde ifade eden öğrenciler karenin kenarlarını içeri doğru katlayarak hepsi için hipotenüs uzunluğunu içerdeki karenin bir kenarı olduğunu ifade etmişlerdir. “Özdeşlikleri kullanma” şeklinde açıklama yapan 1 öğrenci (%1,5) bulunmaktadır. Bu öğrencinin kareli ifadeleri özdeşliklere benzetmiş olduğu veya $(a+b)^2$ ifadesi açıklamaya çalışmış olduğu söylenebilir ancak devamını yapmadığı için tam olarak ne demek istediği ortaya koyamamıştır. Ayrıca katılımcılardan 5 tanesi (% 7,5) Pisagor teoremi kullanarak ispatı yapmaya çalışmışlardır. Bu öğrenciler ispatlamaya çalışacakları ifadeyi kullandıkları söylenebilir. 23 öğrenci (%34,3) ise görsel ile Pisagor teoremi arasında ilişki kuramamışlardır. Bu öğrenciler görselin yanına $a^2+b^2=c^2$ şeklinde Pisagor teoremini yazmışlardır. Dolayısıyla kavramsal bilgi olarak bildikleri söylenebilir. Bu bulgu teoremi bilmelerine rağmen şekil ile nasıl açıklayacaklarını anlamlandıramamışlardır ya da gördükleri genelde dik kenarlar üzerine yerleştirilmiş Pisagor teoreminin görseli olduğu için onunla açıklamaya çabalamışlardır şeklinde yorumlanmıştır. 2 öğrenci (%3) ise bu kategorilerin dışında kalmış herhangi bir açıklama yapamamışlardır.

4.4. Özdeşlikler ile İlgili Sözsüz İspatlardan Elde Edilen Bulgular ve Yorum

12. Sınıf öğrencilerinin özdeşlikler ile ilgili sözsüz ispat becerilerini incelemek için Şekil 33 de verilen sözsüz ispatlar yöneltilmiştir.

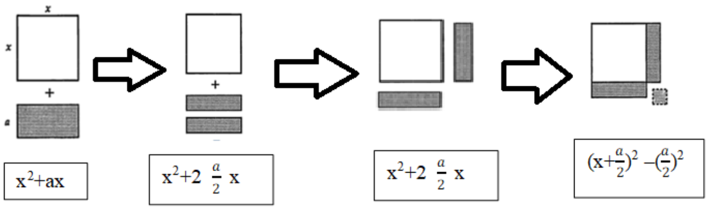
a) 

b) 

Şekil 33. Özdeşlikler ile ilgili sözsüz ispatlar

Çalışmaya katılan öğrencilerin Şekil 33’de verilen sözsüz ispatlara vermiş oldukları cevaplar sırasıyla Tablo 9 ve Tablo10 özetlenmiştir. Şekil 33a’da verilen sözsüz ispat $x^2+ax=(x+\frac{a}{2})^2$ –

$(\frac{a}{2})^2$ özdeşliği ile ilgilidir. Öğrencilerin bu ispatta bir sayının karesi ile karenin alanı arasında ilişki kurmaları ve Şekil 34'de verilen ispat adımlarını takip etmeleri beklenmektedir.



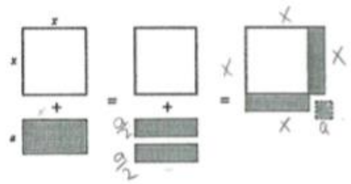
Şekil 34. $x^2+ax=(x+\frac{a}{2})^2-(\frac{a}{2})^2$ özdeşliği ile ilgili sözsüz ispat adımları

Bu sözsüz ispattan elde edilen bulgular Tablo 9'da özetlenmiştir.

Tablo 9. Özdeşlikle ilgili birinci sözsüz ispattan elde edilen bulgular

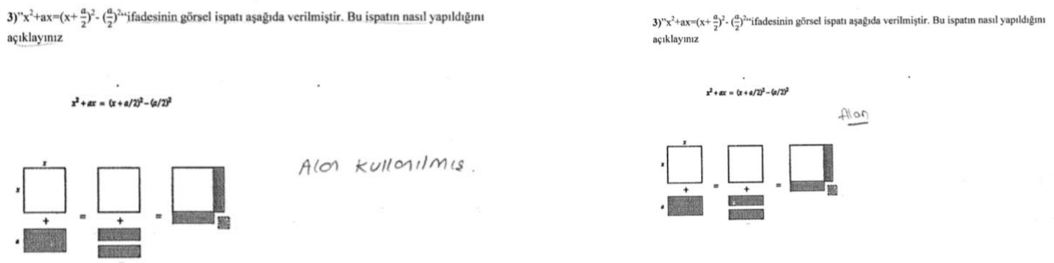
İspat Var/yok	Gerekçelendirme kategorisi		f	%
İspat yok	Cevap yok	Boş	13	21
		Bilmiyorum	1	
		Görselde kenar uzunluklarını isimlendirme	7	
	Alan		4	15
	İki kare farkı		2	
	Alan-İki kare farkı		1	
	Siz yapmışsınız		1	
	Modelleme		1	
	Şekillerle denklemi açıklamış		1	
	Kare ve dikdörtgenin yer değiştirmesi		5	
İspat var	İspatı görsel ile açıklama		24	31
	Görselden bağımsız ispat		7	

Tablo 9'dan görülüğü çalışmaya katılan 21 öğrenci (%31,3) "*cevap yok*" kategorisi altında cevap vermişlerdir. Bu öğrencilerden 12 tanesi kağıdında hiçbir karalama yapmazken bir öğrenci bilmiyorum şeklinde yazmıştır. 7 öğrenci ise Şekil 35'deki gibi görseller üzerinde kare ve dikdörtgenlerin kenarlarını isimlendirme yapmışlardır.



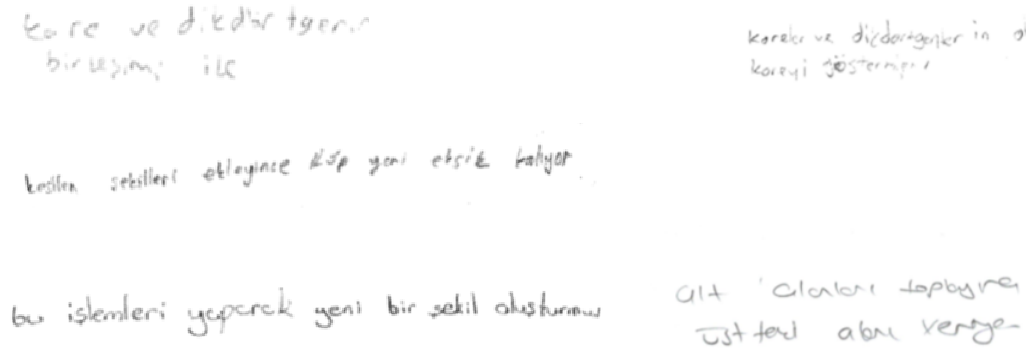
Şekil 35. Kenarları isimlendirilen öğrencilerden birisinin cevabı

Bu öğrenciler isimlendirmeden farklı bir şey yapmadıkları için cevap yok kategorisi altında değerlendirilmiştir. İspatı yapmayan 4 öğrenci yalnızca "*alan, alan kullanılmış, alandan yapılmış*" şeklinde yazmışlardır. Fakat bu öğrencilerin cevaplarında alan ile x^2 arasında ilişki kurduğu için mi bu şekilde cevap verdiği hakkında bir bilgi bulunmamaktadır.



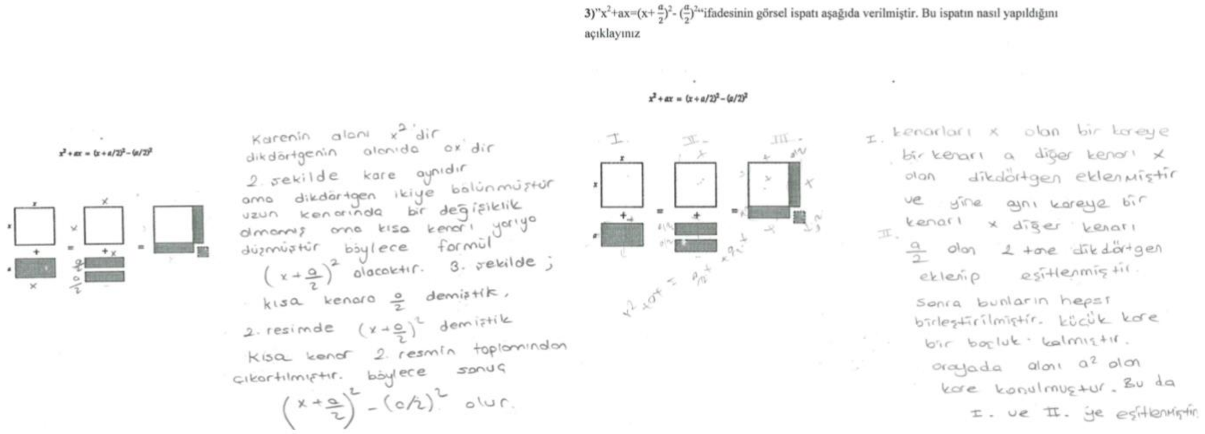
Şekil 36. Alan kategorisinde cevap veren öğrencilerin cevaplarından örnekler

Alan cevabı veren öğrencilerin cevaplarına benzer olarak 2 öğrenci "iki kare farkı", 1 öğrenci "*Alan-İki kare far*kı" 1 öğrenci "*Modelleme*" 1 öğrenci de "*Siz yapmışsınız*" 1 öğrenci de "*Şekillerle denklemi açıklamış* " şeklinde yazmıştır. Bu 10 öğrencide bu cümlelerin dışında ne görseller üzerinde karalama yapmışlar ne de farklı bir şey ifade etmişlerdir. "*Kare ve dikdörtgenin yer değiştirmesi*" kategorisindeki 5 öğrenci ise Şekil 37 de verildiği gibi kare ve dikdörtgenlerin yer değiştirmesi ve yeni şekil elde edilmesine vurgu yapmışlardır fakat ispatın nasıl olduğu ile ilgili bir açıklama yapmamışlardır.



Şekil 37. "*Kare ve dikdörtgenin yer değiştirmesi*" kategorisindeki öğrencilerin cevapları

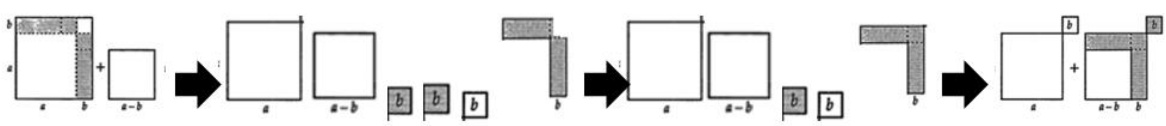
Yöneltilen soruda nasıl ispat edildiğini açıklayınız şeklinde ifade edildiğinden bu öğrencilerin cevapları ispat yok olarak değerlendirilmiştir. Buna karşılık olarak çalışmaya katılan 31 öğrencinin cevabı ispat var olarak değerlendirilmiştir. Bu öğrencilerden yalnızca 23'ü verilen görsel üzerinde karalamalar yapmıştır. Bu karamalar ise kenar uzunluklarını x veya $\frac{a}{2}$ veya alanları x^2 , $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ $\frac{a}{2}x$ veya ax yazma şeklindedir. Bu öğrenciler Şekil 38'de örnekleri verildiği gibi görseldeki her bir eşitlikte alanların aynı olmasından yola çıkarak özdeşliğin nasıl elde edildiğini açıklamışlardır.



Şekil 38. İspatı yapan öğrencilerin cevaplarından örnekler

İspatın nasıl olduğunu açıklama yaparken de 1. görselde bir kenarı x olan bir kare ile bir kenarı x diğer kenarı a olan dikdörtgenin alanları ayrı ayrı bulunup toplanmıştır. 2. görselde ise dikdörtgenin a birim olan kısa kenarı ikiye bölünüp ayrı ayrı alanları bulunup toplanmıştır. 3. görselde ise bir kenarı x birim olan kare ile bir kenarı x diğer kenarı a/2 olan iki tane dikdörtgen birleştirilip yeni şeklin alanı bulunurken bir kenarı a/2 olan küçük karenin alanı çıkarılmıştır. En son olarak üç bulunan alan eşitlendiğinde yukarıdaki özdeşlik elde edilmiştir şeklinde ifade etmişlerdir.

Özdeşlikler ile ikinci sözsüz ispatta kenar uzunlukları a+b ve a-b olan karelerden yola çıkılarak elde edilmektedir. Yine bir öncekinde olduğu gibi öğrencilerin alan kavramı ile ilişkilendirmeleri beklenmektedir.



Şekil 39. $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$ özdeşliği ile ilgili sözsüz ispat adımları

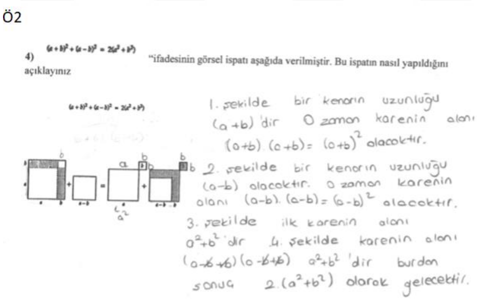
Bu sözsüz ispattan elde edilen bulgular Tablo10 'da özetlenmiştir.

Tablo 10. Özdeşlikle ilgili ikinci sözsüz ispattan elde edilen bulgular

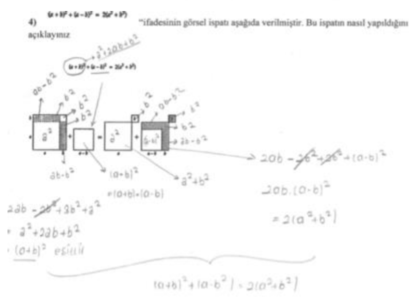
İspat Var/yok	**Gerekçelendirme kategorisi**	**f**		**%**
Cevap yok		32		47,8
İspat Var	Alan ile açıklama	4	11	
	İspat yolunu ifade etme	2		
	Özdeşliği açma	5		
İspat Yok	Alan	1	15	
	Kare açılımı, İki kare farkı	10		
	Şekillerin alanları Alan ifade etme	4		
	Diğer	12	12	

Tablo10’ dan görüldüğü gibi çalışmaya katılan 32 öğrenci (%47,8) bu soruya yanıt vermemiştir.

İspatı alan ile açıklayan 4 birisi Şekil 40a’daki gibi adım adım yazmıştır. Diğer 3 öğrenci ise Şekil 40b’deki gibi açıklama yapmadan her bir şeklin alanını görsel üzerinde yazarak özdeşliğin nasıl elde edildiğini göstermiştir.



a)

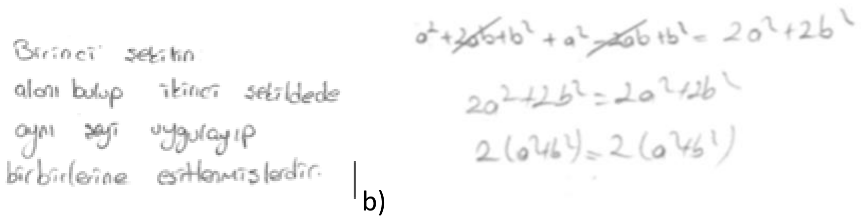


b)

Şekil 40. İspatı alan ile açıklayan öğrencilerin cevaplarından örnekler

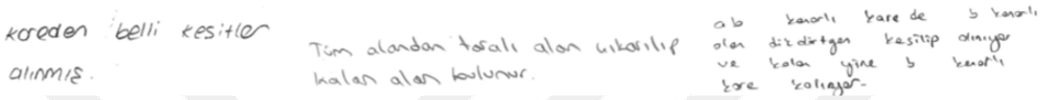
2 öğrenci ise Şekil 41 a’daki gibi ispatı yapmamış olmasına rağmen ispatın nasıl yapılabileceğini ifade etmiştir. Bu öğrencilerin cevapları da ispat var kategorisi altında değerlendirilmiştir. 5 öğrenci Şekil 41b’ de gösterildiği gibi görselden bağımsız bir şekilde verilen özdeşlikteki her bir ifadenin açılımlarını yaparak her iki ifadenin birbirine eşit olduğunu göstermiştir.

a) b)



Şekil 41. İspatı yapan öğrencilerin cevaplarından örnekler

1 öğrenci sadece "*alan*" ve 10 öğrenci de sadece "*kare açılımı*" veya "*iki kare farkı*" yazmışlardır ve hiçbiri görsel üzerinde de karalama yapmamıştır. 12 öğrencinin cevabı diğer kategorisi altına alınmıştır.



Şekil 42. "Diğer" kategorisindeki öğrencilerin cevaplarından örnekler

Şekil 41'den görüldüğü gibi bu öğrenciler görseldeki şekillere, şekillerin yer değiştirmesine odaklanmışlardır.

BÖLÜM 47

TARTIŞMA VE SONUÇ

5.1.Tartışma ve sonuç

12. sınıf öğrencilerinin “yıldızın iç açıları toplamı” sorusundaki sözsüz ispat becerileri incelenirken ilk olarak ispatı yapan ve yapmayan öğrenciler ikinci olarak görsel üzerinde herhangi bir çizim, karalama yapan öğrenciler üçüncü olarak da ispat, doğrulama yaparken sundukları gerekçeler ele alınmıştır. Çalışmaya katılan 67 öğrenciden 17 si ispat yaparken 42’si ispatı yapamamıştır. 8 öğrenci ise soruyu hiç yanıtlamamıştır. Görüldüğü gibi ispatı yapan öğrenci sayısı oldukça azdır. Diğer taraftan ispatı yapan 17 öğrenciden 14’ü, verilen görsel üzerinde işaretlemeler yaparken 3 öğrenci hiçbir işaretleme yapmamıştır. İspat yapmayan 42 öğrenciden yalnızca 3’ü verilen görsel üzerinde işaretlemeler yaparken 39’u hiçbir işaretleme yapmamıştır. Çalışmaya katılan öğrencilerden ispatı yapan öğrencilerin çoğunluğu görseli kullandıkları, ispatı yapamayan öğrencilerin görselden faydalanmadıkları bu nedenle de ispatı yapamadıkları söylenebilir. En çok öne sürülen gerekçeler ‘’*iki iç açının ölçüsü kendisine komşu olmayan bir dış açıya eşittir’’(42 öğrenci)* , “*üçgenin iç açılarının toplamı*” (24 öğrenci) ve daha sonra “*paralellik*” (12 öğrenci) olmuştur. İspatı yapan ve yapmayan öğrencilerin aynı gerekçeleri sundukları görülmektedir. Bu bulgu gerekli matematiksel bilgiye sahip olmalarına rağmen ispatı yapamadıkları şeklinde yorumlanmıştır. Healy ve Hoyles (2000) ispatlama sürecinin karmaşık bir süreç olduğunu ve bu süreçte varsayımları belirleyebilme, verilen özelliklerin, ilişkilerin uygun biçimde seçilip kullanılabilmesi ve mantıksal argümanlar belirlemek gibi bir dizi öğrenci yeterliğinin olması gerektiğini ifade etmektedir. Ayrıca bu bulgu, Healy ve Hoyles (2000) ve Öztürk (2016) çalışmalarındaki, öğrenciler geçerli ispat yapamasalar dahi, kabul edilebilir gerekçe veya argüman üretmiş olmaları, ispata başlangıç niteliğinde muhakeme anlayışına sahip olmalarının olumlu olarak görüldüğü bulgusuyla örtüşmektedir. Diğer taraftan Moore (1994) öğrenciler için üç ana zorluk kaynağı tespit etmiştir. Bunlar kavramsal anlayış, matematiksel dil ve gösterim ve bir ispat yapmaya başlamaktır. Kavramsal bilgiye sahip olmalarına rağmen ispata başlayamamış olmaları ifade edilebilir.

Sayıların toplamı ile ilgili sözsüz ispat ilk sözsüz ispatta çalışmaya katılan öğrencilerin 67 öğrenciden 29’u soruyu cevaplamamıştır. Cevap veren öğrenciler ise ispat yaparken verilen görseli kullanmak yerine Gauss'un yaptığı kısa yoldan yapıldığını ifade etmişlerdir. Bu öğrencilerin görseli dikkate almadıkları önceki öğrenmelerinden yola çıkarak cevapladıkları söylenebilir. Geriye kalan öğrenciler ise verilen görseldeki noktalara odaklanmışlardır. Bu türlü ispatlarda öğrencilerin tek durumdan yola çıkarak genelleme yapmaları beklenmektedir. Genelleme becerisine sahip olmayan ya da daha öncesinde böyle deneyimi olmayan öğrenciler için zorlayıcı bir ispat olmaktadır. Demircioğlu ve Polat (2016) bu durumu tümevarımsal düşünmede yeterli olmamaya bağlamamaya bağlarken, Doruk (2016) tümevarımsal gerekçe tipine sahip bireylerin matematiksel ifadelere birkaç durum ya da örnek ile ikna olabileceklerini ve bu gerekçe tipine sahip bireylerin, çoğunlukla sonuç genellemesi yaptıklarını; hâlbuki tümevarımsal ispat yapabilmek için, sürecin düzenliliğine yoğunlaşan süreç örnek genellemesi yapmaları gerektiğini belirtmektedir. Öğrencilerin sözsüz ispatlarla daha sık karşılaşması, örüntüleri görmede ifade etmede, varsayım üretmede hatta cebirsel ifadeye geçiş yapabilmede kolaylık sağlayabilir.

Pisagor teoremi ile ilgili sözsüz ispat becerileri incelenirken Garfield ve Bhaskara tarafından verilen sözsüz ispatlar kullanılmıştır. Çalışmaya katılan 24 öğrenci cevap vermemiştir. Doğru cevap veren 23 öğrenci vardır. Bu öğrencilerden yalnızca 21'i ipatı yaparken 11 öğrenci yalnızca nasıl yapıldığını açıklamıştır. Bhaskara'ın Pisagor teoreminin ispatında ise çalışmayan katılan 67 öğrenciden 31'i bu soruyu yanıtlayamamıştır. Alanlardan yola çıkarak göstermeye çalışan öğrenci sayısı 5 dir. Bu öğrenciler birinci ve ikinci karenin alanlarını ayrı ayrı toplayarak alan korunumundan aynı kalacağı prensibinden yola çıkarak yapmışlardır. Yani karenin içinde bulunan üçgenlerin alanlarını bulup toplamış ve ilk karenin alanına eşitleyerek ispatı açıklamaya çalışmışlardır. 3 öğrenci şekli katlayarak kare yapıldığını yani origamiden bahsetmişlerdir. Origami ile ispatlar yapılırken verilen görsellere benzettikleri söylenebilir. Demircioğlu ve Polat (2016) öğretmen adaylarıyla yaptıkları çalışmasında, Pisagor teoremi gibi aşina oldukları sözsüz ispatlarda zorlanmadıkları belirtilmiştir. Her iki ispatta da alanların korunumu kavramı kullanılmaktadır. Her iki sözsüz ispatta da öğrenciler origami, Gauss gibi önceden öğrendikleri ispat yöntemlerini ifade etmektedirler. Dolayısıyla öğrenciler alternatif ispat yöntemlerinin hatırlanması daha kolay olmaktadır. Bu anlamda bu türlü alternatif yolların kullanılması bunun içinde öğretmenlerin de farklı ispat yöntemleri hakkında bilgi sahibi olmaları gerektiği söylenebilir.

Özdeşlikler ile ilgili sözsüz ispatlarda ilk soru için çalışmaya katılan 21 öğrenci cevap vermemiştir. Bu öğrencilerden 12 tanesi kağıdında hiçbir karalama yapmazken 7 öğrenci ise görseller üzerinde kare ve dikdörtgenlerin kenarlarını isimlendirme yapmışlardır. Bu öğrenciler isimlendirmeden farklı bir şey yapmadıkları için cevap yok kategorisi altında değerlendirilmiştir. İspatı yapmayan 4 öğrenci yalnızca "*alan, alan kullanılmış, alandan yapılmış*" şeklinde yazmışlardır. Fakat bu öğrencilerin cevaplarında alan ile x^2 arasında ilişki kurduğu için mi bu şekilde cevap verdiği hakkında bir bilgi bulunmamaktadır. Alan cevabı veren öğrencilerin cevaplarına benzer olarak 2 öğrenci "iki kare farkı", 1 öğrenci "*Alan-İki kare far*kı" 1 öğrenci "*Modelleme*" 1 öğrenci de "*Siz yapmışsınız*" 1 öğrenci de "*Şekillerle denklemi açıklamış* " şeklinde yazmıştır. Bu 10 öğrencide bu cümlelerin dışında ne görseller üzerinde karalama yapmışlar ne de farklı bir şey ifade etmişlerdir. "*Kare ve dikdörtgenin yer değiştirmesi*" kategorisindeki 5 öğrenci ise kare ve dikdörtgenlerin yer değiştirmesi ve yeni şekil elde edilmesine vurgu yapmışlardır fakat ispatın nasıl olduğu ile ilgili bir açıklama yapmamışlardır. Yöneltilen soruda nasıl ispat edildiğini açıklayınız şeklinde ifade edildiğinden bu öğrencilerin cevapları ispat yok olarak değerlendirilmiştir. Buna karşılık olarak çalışmaya katılan 31 öğrencinin cevabı ispat var olarak değerlendirilmiştir. Bu öğrencilerden yalnızca 23'ü verilen görsel üzerinde karalamalar yapmıştır. Bu karamalar ise kenar uzunluklarını x veya $\frac{a}{2}$ veya alanları x^2 , $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ $\frac{a}{2}x$ veya ax yazma şeklindedir. Bu öğrenciler görseldeki her bir eşitlikte alanların aynı olmasından yola çıkarak özdeşliğin nasıl elde edildiğini açıklamışlardır. İkinci soruda ise çalışmaya katılan 32 öğrenci bu soruya yanıt vermemiştir. İspatı alan ile açıklayan 4 öğrenciden birisi ispatı adım adım yazmıştır. Diğer 3 öğrenci ise açıklama yapmadan her bir şeklin alanını görsel üzerinde yazarak özdeşliğin nasıl elde edildiğini göstermiştir. 2 öğrenci ise ispatı yapmamış olmasına rağmen ispatın nasıl yapılabileceğini ifade etmiştir. Bu öğrencilerin cevapları da ispat var kategorisi altında değerlendirilmiştir. 5 öğrenci görselden bağımsız bir şekilde verilen özdeşlikteki her bir ifadenin açılımlarını yaparak her iki ifadenin birbirine eşit olduğunu göstermiştir. 1 öğrenci sadece "*alan*" ve 10 öğrenci de sadece "*kare açılımı*" veya "*iki kare farkı*" yazmışlardır ve hiçbiri görsel üzerinde de karalama yapmamıştır. 12 öğrencinin cevabı diğer kategorisi altına alınmıştır. Bu öğrenciler görseldeki şekillere, şekillerin yer değiştirmesine odaklanmışlardır. Koylahisar (2012) ifade ettiği gibi kenar uzunluğu ile alan arası ilişkinin kavranabilmesi için öncelikle alan korunumunun kavranmış olması gerekmektedir ve birçok çalışma (Kamii& Kysh, 2006; Emekli, 2001; Şişman &Aksu, 2009) alan korunumu gelişiminde 7. ve 8. Sınıf öğrencilerin hala sorun yaşadığını göstermektedir.

5.2. Öneriler

- Bu çalışmada öğrencilerin herhangi bir sözsüz ispatı kendilerinin oluşturması beklenmemiştir.Yani şekilleri kendileri oluşturmamış verilen görsel ile ifadenin nasıl ispatlandığını ifade etmesi beklenmiştir. Fakat ileriki araştırmalar için öğrencilerin yaptıkları sözsüz ispatlar incelenebilir.Kendilerinin oluşturduğu görseller ile ispat yapmaları beklenebilir.
- İspat becerisi, akademik başarı, kavramsal bilgi gibi değişkenlerle sözsüz ispat becerisi arasındaki ilişkilerin incelendiği çalışmalar yapılabilir.
- İleride yapılacak çalışmalarda farklı konulardaki sözsüz ispatlar alınarak öğrencilerin muhakeme ve akıl yürütme süreçleri incelenebilir.
- Ortaöğretim Matematik Dersi Öğretim Programında görselleştirme yaklaşımının kullanıldığı etkinlikler içeren örnek ders planlarına yer verilebilir.
- Origami ve sözsüz ispatlar öğretim programlarında seçmeli ders olarak verilebilir.Böylelikle öğrencilerin yaratıcılıklarının geliştirilmesi de sağlanabilir.

Kaynakça

Akkan, Y, Öztürk, M, Akkan, P. (2017). Pre-Service Elementary Mathematics Teachers' Generalization Processes of Patterns: Strategies and Justifications. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education* (TURCOMAT) , 8 (3) , 513-550 . DOI: 10.16949/turkbilmat.323384

Alsina, C., & Nelsen R. (2010). An invitation to proofs without words. *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, *3*(1), 118-127. Retrieved from http://www.labjor.unicamp.br/comciencia/files/matematica/ar_roger/ar_roger.pdf

Arcavi, A.(2003) The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 215-241.

Akkan, Y., Öztürk, M. ve Akkan, P. (2017). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının örüntüleri genelleme süreçleri: stratejiler ve gerekçelendirmeler. *Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Dergisi,* 8(3), 513-550.

Almeida, D. (1996). Variation in proof standarts: Implication for mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 27, 659–665. doi:10.1080/0020739960270504

Almeida, D. (2003). Engendering proof attitudes: Can the genesis of mathematical knowledge teach us anything?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 34(4), 479–488.

Bardelle, C. (2010). *Visual proofs: an experiment*. In V. Durand-Guerrier et al (Eds), Paper presented at the annual meeting of CERME6, Lyon, France. INRP, 251-260. Retrieved from http://ife.ens-lyon.fr/publications/edition-electronique/cerme6/wg2-08-bardelle.pdf

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics, In: D. Pimm (Ed.), *Mathematics, Teachers and Children* (pp. 216-235). London: Hodder & Stoughton. Retrieved from http://edumat.uab.cat/Diseo/Balacheff.pdf

Bayer, R. (2009). Proof by picture. Retrieved from http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/ download?doi=10.1.1.353.5627&rep=rep1&type=pdf

Bell, A. W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40. doi:10.1007/BF00144356

Bell, C. J. (2011). Proof without words: A visual application of reasoning. *Mathematics Teachers, 104*(9), 690–695. Retrieved from http://is234mathforum.webs.comBrown, J. R. (1999). Philosophy of mathematics: The world of proofs and pictures. New York: Routledge.

Borwein, P. & Jörgenson, L. (1997). Visible structures in number theory. http://www.cecm.sfu.ca/loki/papers/numbers/node3.html. adresinden alınmıştır

Borwein, P., & Jörgenson, L. (2002). Visible structures in number theory. *The American Mathematical Monthly, 108*(5), 897-910. Retrieved from https://www.maa.org/sites/default/files/pdf/upload_library/22/Ford/Borwein897-910.pdf

Bülbül, A., & Urhan, S. (2016). Argümantasyon ve Matematiksel Kanıt süreçleri Arasındaki İlişkiler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 10*(1), 0-0. doi:10.17522/nefefmed.00387

CadwalladerOlsker, T. (2011). What do we mean by mathematical proof? *Journal of Humanistic Mathematics*, 1(1), 33–60.

Casselman, B. (2000). Pictures and proofs. *Notices of the AMS*, 47, 1257–1266. Retrieved from www.ams.org/notices/200010/fea-casselman.pdf

Dede, Y., & Karakuş, F. (*2014).* Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi,* (2), 47-71. http://dergipark.gov.tr/adyuebd/issue/1373/16174 adresinden edinilmiştir.

Demircioğlu, H., & Polat, K. (2015). Ortaöğretim matematik öğretmen adaylarının "sözsüz ispat" yöntemine yönelik görüşleri. *The Journal of Academic Social Science Studies,* 41, 233-254. doi:10.9761/JASSS3171

Demircioğlu, H., & Polat, K. (2016). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının "sözsüz ispatlar" ile yaşadıkları zorluklar hakkındaki görüşleri. *International Journal of Turkish Education Sciences, 4*(7), 82-99.

DeVilliers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras*, 24, 17-24. Retrieved from http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/proofa.pdf

Doruk, M. (2016). *İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının analiz alanındaki argümantasyon ve ispat süreçlerinin incelenmesi*. (Doktora Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 433823)

Duval R. (1999). *Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning.* In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty-first Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Mexico, 1, 3-26. Retrieved from https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf

Emekli, A., (2001). Ölçüler konusunun öğretiminde yanılgıların teşhisi ve alınması gereken tedbirler. (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi), Selçuk Üniversitesi, Konya

Gelişen, A. (2016). 9. sınıfta üçgenlerin öğretiminde origami ve sözsüz ispatların kullanılması ile ilgili bir öğretim deneyi (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Cumhuriyet Üniversitesi / Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics: an epistemological study*. Oxford University Press: New York. doi: 10.1093/acprof:oso/9780199285945.001.0001

Gierdien, F. (2007). From "Proofs without words" to "Proofs that explain" in secondary mathematics. *Pythagoras,* 65, 53 – 62. doi:10.4102/pythagoras.v0i65.92

Gökkurt, B., Soylu, Y., & Şahin, Ö. (2014, December). Analysis of the mathematical proof skills of students of science education. *Educational Research Quarterly, 38*(2), 3-22.

Güler, G., & Ekmekçi, S. (2016). Matematik öğretmeni adaylarının ispat değerlendirme becerilerinin incelenmesi: Ardışık tek sayıların toplamı örneği. *Bayburt Eğitim Fakültesi Dergisi*, *11*(1), 60-81.

Hanna, G. (1991). *Research on mathematical proof*. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (*pp*. 54-61). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Hanna, G. (2000a). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 5-23

Hanna, G. (2000b). Proof and its classroom role: A survey. In M.J. Saraiva et al (Eds.), Proceedings of Conference en el IX Encontro de Investigaçao en Educaçao Matematica (pp. 75 -104). Funado.

Hanna, G. (2007). The Ongoing Value of Proof. In Boero, P. (Ed.), Theorems in schools: From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice to Classroom Practice (pp. 3-18). Rotterdam: Sense Publishers.

Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: A brief survey of philosophical perspectives. *ZDM Mathematics Education*, *39*(1–2), 73–78. doi:10.1007/s11858-006-0005-0

Hanna, G. & Jahnke, H.N. (1996) Proof and proving. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick and C. Laborde (eds.), International Handbook of Mathematics Education. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, pp. 877–908.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students'proof schemes: results from exploratory studies. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 7, 234-282. doi:10.1090/cbmath/007/07

Harel, G., & Sowder, L (2007). Toward comprehensive perspectives on learning and teaching proof, In F. Lester (Ed.), Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics (2nd Ed.). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Hawro, J. (2007). University students' difficulties with formal proving and attempts to overcome them. *CERME-5*, (s. 2290-2299). http://www.erme.tu-dortmund.de/~erme/CERME5b/WG14.pdf#page=72 adresinden alınmıştır

Healy, L., & Hoyles, C. (2000). A study of proof conceptions in algebra, *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(4), 396-428. doi:10.2307/749651

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 389-399.

Hershkowitz, R. (1990). *Psychological aspects of learning geometry*. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Cambridge: Cambridge University Press, 70-95. doi:10.1017/CBO9781139013499.006

Kamii, C., & Kysh, J., (2006). The difficulty of "length x width": Is a square the unit of measurement? *Journal of Mathematical Behavior*, 25, 105-115.

Karrass, M. (2012). *Diagrammatic Reasoning Skills of Pre-Service Mathematics Teachers*. (Doctoral dissertation). Retrieved from ProQuest LLC

Konyalıoğlu, A. C. (2015). *Matematik alan eğitimi*. Erzurum: Ertual Akademi.

Koyulhisar (Dündar), T. (2012). İlköğretim 8. Sınıf Öğrencilerinde Özdeşlikleri Modelleme Becerilerinin İncelenmesi: Origami ile Modellenmesi. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi) Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Matematik Eğitimi Ana Bilim Dalı .

Lo, J.-J., Grant, T. J., & Flowers, J. (2008). Challenges in deepening prospective teachers' understanding of multiplication through justification. Journal of Mathematics Teacher Education, 11, 5–22.

Mancoğlu, E. (2019). Ortaöğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel teoremlerin ispatlarını görselleştirme durumlarının incelenmesi (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi) Gazi Üniversitesi / Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Mejia-Ramos, J.P., & Inglis, M. (2009). What are the argumentative activities associated with proof?. Research in Mathematics Education, 11(1), 77-78.

Miller R. L. (2012). On Proofs Without Words. Retrieved from: http://www.whitman.edu/mathematics/SeniorProjectArchive/2012/Miller.pdf

Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2013). Ortaöğretim Matematik Dersi (9,10,11 Ve 12. Sınıflar) Öğretim Programı. MEB Ankara.

Milli Eğitim Bakanlığı Talim ve Terbiye Kurulu Başkanlığı (2013). İlköğretim Matematik Dersi (6, 7 Ve 8. Sınıflar) Öğretim Programı. MEB Ankara.

Moore, R. C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 249-266. doi:10.1007/BF01273731

Morash, R. P. (1987). *Bridge to abstract mathematics: Mathematical proof and structures,* New York: Random House.

NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, Virginia: VA: NCTM.

Özer, Ö., & Arıkan, A. (2002). Lise Matematik Derslerinde Öğrencilerin İspat Yapabilme Düzeyleri. *5. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Konferansı.* Ankara: Ortadoğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi.

Öztürk, T. (2016). *Matematik Öğretmeni Adaylarının İspatlama Becerilerini Geliştirmeye Yönelik Tasarlanan Öğrenme Ortamının Değerlendirilmesi*. (Doktora Tezi). Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi'nden edinilmiştir. (Tez No. 448319)

Pappas, T.(1989). *The Joy of Mathematics,* Wide World Publishing, 1989

Polat, K. (2018). Alternatif bir ispat yöntemi olarak sözsüz ispatlar: Lise öğrencilerinin ispat yapabilme becerilerinin incelenmesi (Yayınlanmamış doktora tezi) Atatürk Üniversitesi / Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Polat, K., & Demircioğlu, H. (2016). Matematik Eğitiminde Sözsüz İspatlar: Kuramsal Bir Çalışma. *Ziya Gökalp Eğitim Fakültesi Dergisi*, 28, 129-140. doi:10.14582/DUZGEF.686

Rodd, M. M. (2000). On mathematical warrants: Proof does not always warrant, and a warrant may be other than a proof. *Mathematical Thinking and Learning*, *2(*3), 221–244. doi:10.1207/S15327833MTL0203_4

Staples, M. E., Bartlo, J., & Thanheiser, E. (2012). Justification as a teaching and learning practice: Its (potential) multifaceted role in middle grades mathematics classrooms. *The Journal of Mathematical Behavior*, 31, 447–462.

Strausova, I. & Hasek, R. (2012). "Dynamic visual proofs" using DGS. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology, 7*(2), 130-143. Retrieved from http://eds.b.ebscohost.com

Stylianou, D., Chae, N., & Blanton, M. (2006). Students' proof schemes: A closer look at what characterizes students' proof conceptions. In Alatorre, S. Cortina, J. and Mendez A.(Eds, 2006). Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapters of the International Group of the Psychology of Mathematics Education. Merida, Mexico.

Şadan, N. & Uğurel, I. (2018a). *Fen Lisesi Öğrencilerinin Görsel İspat Geliştirme Sürecinde Yaptıkları Hatalar ve Karşılaştıkları Zorluklar*. 8th International Conference on Research in Education. (09-10 May) Manisa.

Şadan, N. & Uğurel, I. (2018b). *Bir Fen Lisesi Öğrencisinin Görsel İspat Geliştirme Sürecinin İncelenmesi*. 8th International Conference on Research in Education. (09-10 May) Manisa.

Şadan, N.(2017). Fen lisesi öğrencilerinin görsel ispat geliştirme süreçlerinin incelenmesi üzerine bir öğretim deneyi çalışması (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi) Dokuz Eylül Üniversitesi / Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Şimşek, E., Şimşek, A., & Dündar, S. (2013, Kasım). Lise 12. Sınıf Öğrencilerinin Geometrik İspat Süreçlerinin İncelenmesi. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 2*(4), 43-47.

Şişman Tan, A., &Aksu, M. (2009). Yedinci Sınıf Öğrencilerinin Alan ve Çevre Konularındaki Başarıları, *İlköğretim Online*, 8(1), 243-253

Tanışlı, D, Yavuzsoy Köse, N, & Camci, F. (2017). Matematik Öğretmen Adaylarının Örüntüler Bağlamında Genelleme ve Doğrulama Bilgileri. Eğitimde Nitel Araştırmalar Dergisi, 5 (3) , 195-222 . Retrieved from https://dergipark.org.tr/tr/pub/enad/issue/32382/360150

Tekin, B. & Konyalıoğlu, A. C. (2010). Trigonometrik fonksiyonların toplam ve fark formüllerinin ortaöğretim düzeyinde görselleştirilmesi. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *5*(1-2), 24-37.

Thornton, S. (2001). A Picture is worth a thousand words. Retrieved from http://math.unipa.it/grim/AThornton251.PDF

Uğurel, I., & Moralı, S. (2010). Bir Ortaöğretim Matematik Dersindeki İspat Yapma Etkinliğine Yönelik Sınıfiçi Tartışma Sürecine Öğrenci Söylemleri Çerçevesinde Yakından Bakış. *Buca Eğitim Fakültesi Dergisi, 28*, 135-154.

Uğurel, I., Moralı, H. S. & Karahan, Ö. (2011). *Matematikte Yetenekli Olan Ortaöğretim Öğrencilerin Sözsüz İspat Oluşturma Yaklaşımları*, I. Uluslararası Eğitim Programları ve Öğretimi Kongresi, Anadolu Üniversitesi, (5-8 Ekim) Eskişehir.

Uğurel, I., Moralı, H. S., Karahan, Ö., & Boz, B. (2016). Mathematically gifted high school students' approaches to developing visual proofs (vp) and preliminary ideas about VP. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, *4*(3), 174-197. doi:10.18404/ijemst.61686

Ülker, E. (2018). *Ortaokulda İspata Giriş: Gerçekçi Matematik Eğitimi Çerçevesinde Sözsüz İspatların Kullanımı.* Eskişehir. Anadolu Üniversitesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi.

Weber, K. (2001, Ocotber). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101-119. doi:10.1023/A:1015535614355

Yassin, E. İ. A. (2013). *The effect of using the proof without words method on the results and the transfer of learning among the scientific the first grade secondary students in Nablus.* (Master's thesis) Retrieved from https://scholar.najah.edu/sites/default/files/Eman%20Yassin.pdf

Yılmaz, R. Argün, Z.& Keskin, M. Ö. (2009) What Is the Role of Visualization in Generalization Processes: The Case of Preservice Secondary Mathematics Teachers. *Humanity & Social Sciences Joumal* 4 (2): 130-137, 2009