T.C.
SİVAS CUMHURİYET ÜNİVERSİTESİ
EĞİTİM BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN VE MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANA BİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ BİLİM DALI

ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNİN GENELLEME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

SEDA PEKER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ DANIŞMANI
DR. ÖĞR. ÜYESİ HANDAN DEMİRCİOĞLU

SİVAS
ŞUBAT, 2020

ORTAÖĞRETİM ÖĞRENCİLERİNİN GENELLEME BECERİLERİNİN İNCELENMESİ

Seda PEKER

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi

Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Lisansüstü Eğitim, Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı İçin Öngördüğü

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Olarak Hazırlanmıştır.

Tez Danışmanı

DR. ÖĞR. ÜYESİ HANDAN DEMİRCİOĞLU

Sivas

ŞUBAT, 2020

KABUL VE ONAY

Seda PEKER'in hazırlamış olduğu "Ortaöğretim Öğrencilerinin Genelleme Becerilerinin İncelenmesi" başlıklı bu çalışma, 17.01.2020 tarihinde yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından, "Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı, Matematik Eğitimi Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Dr.Öğr.Üyesi Yasin GÖKBULUT	(Jüri Başkanı)
Dr.Öğr.Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU	(Danışman)
Doç.Dr.Fatih KARAKUŞ	(Üye)

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

…./…./

Doç.Dr.Fatih KARAKUŞ

Enstitü Müdürü

ETİK SÖZÜ

Sivas Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Tez Yazım Kılavuzu (Yönerge)'nda belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere, bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu ve atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- ✓ Bütün bilgilerin doğru ve tam olduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Tezin herhangi bir bölümünü, Sivas Cumhuriyet Üniversitesi veya bir başka üniversitede, bir başka tez çalışması olarak sunmadığımı; beyan ederim.

10/02/2020

Seda PEKER

ÖZET

PEKER, Seda, Ortaöğretim Öğrencilerinin Genelleme Becerilerinin İncelenmesi, Yüksek Lisans, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Ana Bilim Dalı, Sivas, 2020.

Bu çalışmanın amacı, ortaöğretim öğrencilerinin genelleme becerilerini sınıf ve akademik başarıya göre incelemek ve genelleme becerisinde farklı görsellerin etkisini araştırmaktır. Nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışması ile yapılan bu çalışma iki aşamada gerçekleştirilmiştir. 1.aşamaya 2019-2020 eğitim öğretim yılında Antalya ilinde özel bir Fen lisesinde öğrenimlerine devam eden 9. sınıflardan 63, 10. sınıflardan 56, 11.sınıflardan 61 öğrenci katılmıştır. 6 şubeden oluşan 9,10 ve 11.sınıflar için sadece A, B ve C şubelerindeki öğrenciler ile çalışma yapılmıştır. Bu şubeler okuldaki akademik başarıya göre seviye grupları olarak ayrılmaktadır. A en iyi, B orta C de ortanın altı olarak sınıflandırılmaktadır. 2.aşamada ise 1.aşamada uygulanan “Aşama 1” çalışmasında doğru sayısı fazla olan 3 öğrenciden gönüllü 1 öğrenci ile çalışma yapılmıştır. Çalışma grubunun belirlenmesinde öğretmen olan araştırmacının görev yaptığı okul olması nedeni ile kolay ulaşılabilir örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Çalışmanın her bir aşamasında paralel soruların yer aldığı beş sorudan oluşan veri toplama araçları kullanılmıştır. Öğrencilerden elde edilen verilerin analizi içerik analizi ile yapılmıştır.

Araştırma bulgularından elde edilen sonuçlar özetlendiğinde, 1.aşamadaki soruların tamamını doğru yanıtlayan yalnızca 2 öğrenci olmuştur. Bunlardan 1 tanesi 9.sınıf diğeri ise 11.sınıftandır. Toplamda 5 sorudan en az 4 doğru yapan 18 öğrenciden 7’si 9. ve 11.sınıftan, 4’ü ise 10.sınıftandır. Toplam başarılı öğrenci sayılarına bakarak incelendiğinde 9 ve 11.sınıflarda toplam 7 öğrenci başarılı iken 10.sınıfta ise 4 öğrencinin başarılı olduğu tespit edilmiştir. 9. sınıftaki öğrencilerin liseye geçiş sisteminin daha mantık muhakeme becerisi geliştirdiğinden daha başarılı olabileceği ve 11.sınıfların da akademik düzeylerinin daha gelişmiş olabileceği bakımından 10.sınıflara oranla daha başarılı olduğu söylenebilir.

Anahtar Kelimeler: Genelleme, Genellemenin Düşünme Yolları

ABSTRACT

PEKER, Seda, Examination of Generalization Skills of Secondary Education Students, Master's Degree, Department of Secondary Science and Mathematics Education, Sivas, Turkey, 2020.

The aim of this study is to examine the generalization skills of secondary school pupils according to class and academic achievement and to investigate the effect of visual and time on generalization skills. The study conducted through the case study from qualitative research methods was carried out in two stages. 63 pupils from 9th grade, 56 from 10th grade and 61 from 11th grade attended the first stage in a private science high school located in Antalya in the academic year 2019-2020. For the 9, 10 and 11 grades, which consist of six branches, only the pupils in the A, B and C branches were employed. These branches are classified as Level Group A Best, B middle C below middle. In the second stage – in the “Generalization Test 1” study applied in the first stage, a study was conducted with 1 volunteer out of 3 pupils who had more correct numbers. In determining the study group, easy accessible sampling method was utilized because of the school where the researcher worked as a teacher. At each stage of the study, data collection tools consisting of five questions with parallel questions were utilised. The data obtained from the pupils were analyzed by content analysis.

When the results obtained from the research findings are summarized, only two pupils answered all the questions in stage 1. One of them is 9th grade and the other is 11th grade. Of the 18 pupils who completed at least four of the five questions in total, seven were from 9th and 11th grade, and four were from 10th grade. When looking at the total number of successful pupils, it was found that seven were successful in 9th and 11th grades, while four pupils were successful in 10th grade.

Keywords: generalization, generalization strategies, thinking ways of generalization

ÖNSÖZ

Lisansüstü eğitimim boyunca ilminden ve tecrübelerinden faydalandığım, başından sonuna kadar yardımını esirgemeyip, bana her konuda destek sağlayan değerli hocam ve danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Handan DEMİRCİOĞLU'na sonsuz teşekkür ederim.

Çalışmanın veri toplama kısmında, çalışmaların gerçekleştirilmesine imkân sağlayan Antalya Final Okulları Genel Müdürü Hasan USLU hocama ve her konuda desteğini esirgemeyen Antalya Final Ortaokulu Müdürü Mehmet YILMAZ hocama ve bu çalışmaya dâhil olan tüm öğrencilere sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu yoğun süreçte karşılaştığım tüm zorluklarda her daim yanımda olan, koşulsuz sevgi ve destekleri ile her zaman daha iyi hissetmemi sağlayan değerli aileme sonsuz teşekkür ederim.

Bu tez çalışmamda yaşadığım sıkıntılar ve inişli çıkışlı süreçlerde beni bir sonraki adım için motive eden, her zaman yanımda olan çok değer verdiğim Süleyman Demirel Üniversitesi Öğr. Gör. Rıza Ersin ÖZTÜRK'e canı gönülden teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ONAY SAYFASI

ETİK SÖZÜ iii

ÖZET iv

ABSTRACT v

ÖNSÖZ vi

İÇİNDEKİLER vii

ŞEKİLLER LİSTESİ ix

TABLOLAR LİSTESİ x

GRAFİKLER LİSTESİ xii

BÖLÜM I 1

GİRİŞ 1

1.1. Problem Durumu 1

1.2. Araştırmanın Problem Cümlesi 2

1.3. Araştırmanın Alt Problemleri 2

1.4. Araştırmanın Amacı 3

1.5. Araştırmanın Önemi 4

1.6. Sayıltılar 5

1.7. Sınırlılıklar 5

1.8. Tanımlar 6

BÖLÜM II 7

ÇALIŞMANIN KAVRAMSAL ÇERÇEVESİ 7

2.1. Genelleme 7

2.2. Genelleme Süreci 10

2.3. Genellemenin Sınıflandırılması 14

2.4. Genelleme Problemleri 16

2.5. Genelleme Stratejileri 20

2.6. Genellemenin Düşünme Yolları 26

2.7. Matematik öğretim programlarında genelleme 29

2.8. İlgili Araştırmalar 33

2.8.1. Yurt İçinde Yapılan İlgili Çalışmalar 33

2.8.2.Yurt Dışında Yapılan İlgili Çalışmalar 38

BÖLÜM III 41

YÖNTEM **41**
3.1.Araştırmanın Deseni........ 41
3.1.1.Pilot Çalışma 42
3.2. Katılımcılar 43
3.3. Veri Toplama Araçları 44
3.4. Verilerin Toplanması 49
3.5. Verilerin Analizi........ 49
3.6. Geçerlilik ve Güvenirlilik 51
BÖLÜM IV **53**
BULGULAR VE YORUM **53**
4.1. Aşama 1'den Elde Edilen Bulgular........ 53
4.1.1."Küp parçalama1" Sorusundan Elde Edilen Bulgular 53
4.1.2." Siyah-Beyaz Nokta" Sorusundan Elde Edilen Bulgular 59
4.1.3."İğne ve Kartlar" Sorusundan Elde Edilen Bulgular 73
4.1.4." Kule Yapımı " Sorusundan Elde Edilen Bulgular........ 83
4.1.5."Sayı Örüntüsü ve Şekil Örüntüsü" Sorusundan Elde Edilen Bulgular........ 90
4.1.6. 1. Aşamanın Genel Analizi 96
4.2. Aşama 2'den Elde Edilen Bulgular........ 97
4.2.1. Birinci Sorudan Elde Edilen Bulgular 98
4.2.2. İkinci Sorudan Elde Edilen Bulgular 100
4.2.3. Üçüncü Sorudan Elde Edilen Bulgular 103
4.2.4. Dördüncü Sorudan Elde Edilen Bulgular........ 105
4.2.5. Beşinci Sorudan Elde Edilen Bulgular........ 107
BÖLÜM V **110**
SONUÇ TARTIŞMA ve ÖNERİLER **110**
5.1. Sonuç........ 110
5.1.1.Aşama 1 Sonucu........ 111
5.1.2.Aşama 2 Sonucu........ 118
5.2. Tartışma........ 119
5.3. Öneriler 122
5.3.1. Araştırma Sonuçlarına Yönelik Yapılan Öneriler........ 122
5.3.2. Gelecek Araştırmalar İçin Öneriler........ 123
KAYNAKÇA **124**
EKLER LİSTESİ **133**

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 2.1. Kuramsal Çerçeve Bağlamında Genelleme Bileşenleri 11
Şekil 2.2. Özelleştirme ve Genelleme Süreçleri 12
Şekil 2.3. Cebirsel Örüntü Genellemesinin İnşası 13
Şekil 2.4. Aritmetik Genelleme Süreci 13
Şekil 2.5. Fayanslardan Oluşturulan Bir Dizi Şekil... 17
Şekil 2.6. Dikdörtgen Şeklinde Olan Çiçek Tarhını Kare Fayanslar............................. 18
Şekil 2.7. Küplerle Oluşturulan Şekil Dizisi 18
Şekil 2.8. Çinilerle Oluşturulan Şekil Dizisi 19
Şekil 2.9. Bir Örüntüyü Genellemede Kullanılabilecek Strateji Örneği 20
Şekil 2.10. Sayısal Durumları Genellemede Kullanılan Kavramsal Model 22
Şekil 2.11. Parti Süslemeleri.. 25
Şekil 2.12. Kare Kartlar 25
Şekil 2.13. Friel Ve Markworth' Un (2009) Çalışmalarında Öğrencilere Sordukları Soru 27
Şekil 2.14. Ortaöğretim Matematik Öğretim Programında Yeni Yaklaşımlar 31
Şekil 4.1. Küp Parçalama1 Sorusu 53
Şekil 4.2. Siyah Beyaz Nokta Sorusu 59
Şekil 4.3. İğne ve Kartlar... 73
Şekil 4.4. Kule Yapımı Sorusu 83
Şekil 4.5. Sayı Örüntüsü ve Şekil Örüntüsü Sorusu 90
Şekil 4.6. Aşama 1 ve Aşama 2 'nin birinci sorusu 98
Şekil 4.7 Aşama 1 ve Aşama 2'nin ikinci sorusu 100
Şekil 4.8 Aşama 1 ve Aşama 2'nin üçüncü sorusu.. 103
Şekil 4.9 Aşama 1 ve Aşama 2'nin dördüncü sorusu 105
Şekil 4.10. Aşama 1 ve Aşama 2'nin beşinci sorusu 107

TABLOLAR LİSTESİ

Tablo 2.1. Genelleştirme Stratejilerini İçeren Çatı (Akkan ve Çakıroğlu, 2012: 110) .. 23
Tablo 3.1. Çalışmanın katılımcıları 44
Tablo 3.2. Aşama 1'de kullanılan veri toplama aracı 44
Tablo 3.3. Aşama 2'de kullanılan veri toplama aracı 46
Tablo 3.4. Verilerin toplanma süreci 49
Tablo 3.5. Yatay Olarak A-B-C Sütunları Sorunun Şıkları 50
Tablo 4.1. "Küp Parçalama1" Sorusunun Şıklarına ve Sınıflara Göre Analizi 54
Tablo 4.2. 9. Sınıftaki Öğrencilerin Küp Parçalama 1 Sorusu Analizi 54
Tablo 4.3.10. Sınıftaki Öğrencilerin Küp Parçalama 1 Sorusu Analizi 55
Tablo 4.4. 11. Sınıftaki Öğrencilerin Küp Parçalama 1 Sorusu Analizi 55
Tablo 4.5. Küp Parçalama 1 Sorusunun A Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 56
Tablo 4.6. Küp Parçalama 1 Sorusunun B Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 57
Tablo 4.7. Küp Parçalama 1 Sorusunun C Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 58
Tablo 4.8. "Siyah-Beyaz Nokta" Sorusunun Şıklarına ve Sınıflara Göre Analizi 60
Tablo 4.9. 9.Sınıftaki Öğrencilerin Siyah-Beyaz Nokta Sorusu Analizi 61
Tablo 4.10. 10.Sınıftaki Öğrencilerin Siyah-Beyaz Nokta Sorusu Analizi 62
Tablo 4.11. 11.Sınıftaki Öğrencilerin Siyah-Beyaz Nokta Sorusu Analizi 62
Tablo 4.12. Siyah –Beyaz Nokta Sorusunun A Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 63
Tablo 4.13. Siyah –Beyaz Nokta Sorusunun B Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 64
Tablo 4. 14. Siyah –Beyaz Nokta Sorusunun C Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 66
Tablo 4.15. Siyah –Beyaz Nokta Sorusunun D Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 69
Tablo 4.16. "İğne ve Kartlar"Sorusunun Şıklarına ve Sınıflara Göre Analizi 74
Tablo 4.17. 9. Sınıftaki Öğrencilerin İğne ve Kartlar Sorusu Analizi 75
Tablo 4.18. 10.Sınıftaki Öğrencilerin İğne ve Kartlar Sorusu Analizi 75
Tablo 4.19. 11.Sınıftaki Öğrencilerin İğne ve Kartlar Sorusu Analizi 76
Tablo 4.20. İğne ve Kartlar Sorusunun A Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 77
Tablo 4.21. İğne ve Kartlar Sorusunun B Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 79
Tablo 4.22. İğne ve Kartlar Sorusunun C Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 80
Tablo 4.23. İğne ve Kartlar Sorusunun D Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 81
Tablo 4.24. "Kule Yapma" Sorusunun Şıklarına ve Sınıflara Göre Analizi 84
Tablo 4.25. 9.Sınıftaki Öğrencilerin Kule Yapımı Sorusu Analizi 85
Tablo 4.26. 10.Sınıftaki Öğrencilerin Kule Yapımı Sorusu Analizi 85
Tablo 4.27. 11.Sınıftaki Öğrencilerin Kule Yapımı Sorusu Analizi 86
Tablo 4.28. Kule Yapma Sorusunun A Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 87

Tablo 4.29. Kule Yapma Sorusunun B Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 88
Tablo 4.30. Kule Yapma Sorusunun C Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 89
Tablo 4.31. " Sayı Örüntüsü ve Şekil Örüntüsü" Sorusunun Şıklarına ve Sınıflara Göre Analizi 91
Tablo 4.32. 9.Sınıftaki Öğrencilerin " Sayı Örüntüsü ve Şekil Örüntüsü "Sorusu Analizi 92
Tablo 4.33. 10.Sınıftaki Öğrencilerin " Sayı Örüntüsü ve Şekil Örüntüsü "Sorusu Analizi 92
Tablo 4.34. 11.Sınıftaki Öğrencilerin " Sayı Örüntüsü ve Şekil Örüntüsü "Sorusu Analizi 93
Tablo 4.35. Sayı ve Şekil Örüntüsü Sorusunun A Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 94
Tablo 4.36. Sayı ve Şekil Örüntüsü Sorusunun B Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular 95
Tablo 4.37. 9,10,11. Sınıfların A,B ve C Şubelerine Göre Doğru Sayıları 97
Tablo 4.38. 1.Sorudan Elde Edilen Bulgular 99
Tablo 4.39. 2.Sorudan Elde Edilen Bulgular 101
Tablo 4.40. 3.Sorudan Elde Edilen Bulgular 104
Tablo 4.41. 4. Sorudan Elde Edilen Bulgular 106
Tablo 4.42. 5. Sorudan Elde Edilen Bulgular 108

GRAFİKLER LİSTESİ

Grafik 5.1. 9-10-11.Sınıfların Doğru Sayıları Grafiği 111
Grafik 5.2. "0" Tam Doğru Yapan Öğrenciler 112
Grafik 5.3. "1" Tam Doğru Yapan Öğrenciler 113
Grafik 5.4. "2" Tam Doğru Yapan Öğrenciler 113
Grafik 5.5. "3" Tam Doğru Yapan Öğrenciler 114
Grafik 5.6. "4" Tam Doğru Yapan Öğrenciler 114
Grafik 5.7. "5" Tam Doğru Yapan Öğrenciler 115

BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Problem Durumu

Matematik, konusu nesneler olan bir bilimdir. Umay'a (2003) göre matematik, muhakeme etme, problem çözme becerisi kazandırma, olaylar arasında ilişki kurma ve düşünme gibi beceriler kazandırmaktadır. Dolayısıyla matematik sadece sayıları, işlemleri öğretmekle kalmayıp düşünmeyi öğrenmeyi, kesinliğe ulaşmayı ve evrensel doğruları bulmayı sağlamaktadır.

Matematik ve düşünme arasındaki ilişkiden yola çıkıldığında matematiksel düşünme kavramı ön plana çıkmaktadır. Matematiksel düşünme bilimsel ve günlük düşünmeden farklı düşünülmesine karşın matematiksel düşünme sağduyuya dayalı günlük düşünmeden temelde farklı olmayan bir düşünme sürecidir (Yıldırım, 2012). Bunun yanı sıra bilim dallarının tümünde de matematiksel düşünmeden yararlanılmaktadır (Aydın ve Köğce, 2008).

Her düşüncenin yararlı olmayacağı varsayımından da yola çıkarak matematiksel düşünmeyi Alkan ve Bukova (2005) "*düşüncenin yararlılığı, gereksinimlerin karşılanmasında kullanımı ve problemlerin çözümünde üretken olması ile ölçülür. Bu nitelikteki düşünmeye, kısaca Matematiksel Düşünme (MD) denir*" şeklinde tanımlarken Liu (2003) "*tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, örnekleme, genelleme, analoji, formal ve informal olmayan usavurma, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşim kümesi*" olarak tanımlamıştır. Matematiksel düşünme yeteneği, bir problemle ilgilenme, deneyimler üzerinde düşünme ve kurgulanan bir problem sürecini çalışma gibi çeşitli etkinlikler sonucunda ilerletilebilir (Hacısalihoğlu, Mirasyedioğlu ve Akpınar, 2003).

Bundan dolayı, matematiksel düşünmeyi pekiştiren becerilerden birisi de problem çözmedir. Problem çözme, öğrencilerin soyutlama, açıklama, sembolleştirme, genelleme, ispatlama ve yeni sorular ortaya atma gibi genel matematiksel stratejiler konusunda deneyimler kazanmalarını sağlamaktadır (Busbridge ve Özçelik, 1997).

Dolayısıyla problem çözmenin var olduğu her durumda matematiksel düşünme de gerçekleşmektedir (Arslan ve Yıldız, 2010).

Matematiksel düşünmeyi tanımlayabilmek için araştırmacılar matematiksel düşünme boyutlarından hareket etmişlerdir. Liu (2003), bu boyutları tahmin edebilme, tümevarım, tümdengelim, betimleme, genelleme, örnekleme, biçimsel ve biçimsel olmayan usa vurma, doğrulama ve benzeri karmaşık süreçlerin bir birleşim kümesi şeklinde ifade etmiştir. Yeşildere, Akkoç ve Baştürk (2017), bir problemin çözümü özelleştirme, genelleme, tahmin etme, hipotez üretme, hipotezin doğruluğunu kontrol etme gibi üst düzey düşünme becerilerini gerektiriyorsa, matematiksel düşünme gerçekleşeceğini belirtmiştir. Buradan hareketle genellemenin matematiksel düşünmede önemli bir yer tuttuğunu söylemek mümkündür.

Genelleme mantık muhakemesinin temel elemanıdır. Geçerli tüm dedüktif çıkarımların temelinde genelleme vardır. Doğrulama sürecinde, verilen herhangi bir duruma genellemenin sağlanıp sağlamadığının belirlemek için gerekmektedir (Yılmaz, 2011). Bu öneminden dolayı da öğrencilerde kazandırılması hedeflenen beceriler arasında yer almaktadır. Bu çalışmada da, ortaöğretim öğrencilerinin genelleme becerilerini sınıf ve akademik başarıya göre incelemek ve genelleme becerisinde farklı görsellerin etkisini araştırmak amaçlanmıştır.

1.2. Araştırmanın Problem Cümlesi

Araştırmanın problem cümlesi “Farklı sınıf ve akademik başarıya sahip ortaöğretim öğrencilerinin matematiksel genelleme sürecinde düşünme süreçleri nasıldır?“ şeklindedir.

1.3. Araştırmanın Alt Problemleri

1. Aynı sınıftaki öğrencilerin 9(A-B-C), 10(A-B-C), 11(A-B-C) genelleme sürecindeki düşünme süreçleri akademik başarıya göre farklılık göstermekte midir?
2. Farklı sınıf seviyelerindeki öğrencilerin (9-10-11.sınıf) genelleme sürecinde düşünme süreçleri nasıldır?
3. Genelleme becerilerinde farklı görsellerin etkisi nasıldır?

1.4. Araştırmanın Amacı

Okul öncesinden üniversiteye kadar olan her kademede matematiksel kavramları tanımak ve bu kavramlarla ilişkiler kurmak gerekmektedir. Dolayısıyla, kurulacak ilişkiyi bulmaya kılavuzluk eden beceri genelleme olup bu kavramların ilişkilendirilmesinde önemli bir paya sahiptir. Bu nedenle genelleme, matematik öğretiminin temel amaçlarından biri olarak adlandırılmakta ve aynı zamanda matematiksel düşünmenin temelini oluşturmaktadır. Genelleme günlük hayatta kullandığımız önemli beceriler arasında yer almaktadır. Bu nedenle matematik eğitimcileri, matematik öğretimin etkili yollarından birinin matematiksel düşünme becerisi kazandırmak olduğunu ve bunun için de genelleme becerisini geliştirmek olduğunu dile getirmişlerdir.

Günümüzde matematik öğretimi; matematiği yaptırmak olduğundan matematiği kullanabilen, problem çözebilen, çözümlerini ve düşüncelerini paylaşabilen ve matematiğe yönelik olumlu tutum geliştiren bireylerin yetişmesi amaçlanmaktadır.

Çalışma, genelleme üzerine yapılan diğer araştırmalardan farklı olarak özel bir fen lisesinde 9, 10 ve 11.sınıflara uygulanmıştır. Bu sınıfların seçilme durumları ise lise giriş sınavlarının farklı olmasıdır. Yani 11.sınıflar TEOG (Temel Eğitimden Ortaöğretime Geçiş Sistemi) ile 10.sınıflar yarı dönem TEOG, yarı dönem ise LGS (Liselere Geçiş Sistemi) ile 9.sınıflar ise LGS sınav sistemi ile liseye geçiş yapmıştır. Bu durumda 11.sınıflar, 2016-2017 eğitim öğretim yılında 8. sınıfta öğrenimlerini tamamlayarak TEOG sınavına hazırlanmış olup daha kavramsal düzeyde öğrenimlerini tamamlamışlardır. Bu çocuklar bu sınava hazırlanırken bilgi, kavrama ve uygulama basamaklarını daha çok kullanmıştır. 10.sınıflar 2017-2018 eğitim öğretim yılında 8.sınıfta öğrenimlerini tamamlayarak yarı dönem TEOG sınav odaklı, yarı dönem LGS sınav odaklı bir yılı geride bırakmış ve bu süreçte hem kavramsal hem de beceri odaklı çalışmalar yaparak öğrenimlerini tamamlamışlardır. 9.sınıflar ise 2018-2019 eğitim öğretim yılında 8.sınıfta öğrenimlerini tamamlayarak tamamen LGS sınav odaklı çalışmış olup çoğunlukla beceri odaklı çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmanın amacı farklı sistemle liseye gelen öğrencilerin genelleme becerilerini hem sınıf seviyelerine göre hem de bu sınıfların kendi içinde akademik seviyelerine göre incelemektir. Bu amaç doğrultusunda genelleme sürecinde öğrencilerin izledikleri düşünme süreçlerine göre incelemeler ve karşılaştırmalar yapmaktır.

Çalışmanın bir başka amacı da genelleme becerisinde, farklı görsellerin etkisini araştırmaktır. İki aşamada yapılan uygulamada 5 soru hazırlanmıştır. Her iki aşamanın ilk sorusunun sadece görselleri farklı olup sorular tamamen aynıdır. Diğer soruların ise görselleri farklı olup hedefleri aynıdır. Bu çalışmada iki aşamaya katılan katılımcının genelleme sürecinde farklı görsellere ait sorulara karşı izlediği düşünme süreçlerine göre karşılaştırmalar yapmak amaçlanmaktadır.

1.5. Araştırmanın Önemi

Matematik eğitimcileri tarafından matematik öğretiminin etkili yollarından birisinin matematik yaptırma olduğu ifade edilmekte ve matematik yaptırma yöntemlerinin ise genelleme, görselleştirme, sembolleştirme, modelleme ve ispat olduğu belirtilmektedir. Bu yöntemlerden genellemenin öğretimdeki önemi ise bilinmektedir. Öğretimdeki yeri önemli olan fakat öğrenciler tarafından zor kavranan bu süreçlerin incelenip geliştirilebilmesi ve böylece yaşanan zorlukların azaltılabilmesi matematik eğitimi açısından gereklidir.

2013 yıllında yenilenen İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı' nda matematiksel kavramları anlayabilen, kavramlar arasında ilişki kurabilen, bu kavramları-ilişkileri günlük hayatlarında ve farklı disiplinlerde kullanabilen ve farklı temsillerle ifade edebilen öğrenciler yetiştirmek matematik eğitiminin genel amaçları arasında gösterilmektedir (MEB, 2013). Matematik eğitiminin bu amacı ile öğrencilerin ilişkilendirme ve genelleme becerilerinin gelişiminin önemini vurgulanmaktadır. Öğrencilerin problem çözme becerilerini geliştirmeye yönelik çalışmalarda ise çözüm olarak genelleme sürecinin gerekliliğine yer verilmektedir.

Bu çalışma, genelleme üzerine yapılan diğer araştırmalardan farklı olarak özel bir fen lisesinde 9,10 ve 11.sınıflara uygulanmıştır. Bu sınıfların seçilme durumları ise lise giriş sınavlarının farklı olmasıdır. Bu çalışmada farklı sistemle liseye gelen öğrencilerin hem sınıf seviyelerine göre hem de her sınıf seviyesinden farklı akademik başarıya sahip öğrencilerin kendi sınıfları içindeki akademik farklılıklara göre genelleme becerileri incelenmiştir. Çalışmada kullanılan ölçme aracı yardımıyla çalışmaya katılan 9, 10 ve 11.sınıf öğrencilerin sınıf seviyelerine ve akademik farklılıklarına göre genelleme sürecindeki adımlar ile ilgili detaylı bilgiler elde edilebilmesi ve daha önce ülkemizde bu şekilde yapılmış herhangi bir çalışmaya rastlanmamış olunması nedeniyle bu çalışmanın önemli olduğu düşünülmektedir.

Bunun yanında genelleme üzerine çalışılan tüm çalışmalardan ayrı olarak, genelleme becerisinde, farklı görsellerin etkisi araştırılmıştır. Çalışmada iki aşamaya katılan katılımcının genelleme sürecinde farklı görsellere ait sorulara karşı izlediği düşünme süreçlerine göre karşılaştırmalar yapılmıştır. Çalışma ilgili detaylı bilgilerin elde edilmesi ile öğrencilere farklı görsellerle genelleme becerisi kazandırmak isteyen öğretmenlere ve öğretim programlarına ışık tutabileceği ön görülmektedir.

Bilimsel araştırma sürecinde her yeni araştırmanın, bir önceki araştırma bulgularına dayanmakla birlikte o çalışmada incelenemeyen, eksik kalan yönleri tamamlama görevini üstlenmesi beklenmektedir. Dolayısıyla bu çalışmanın yeni araştırmalar için yol gösterici olacağı umulmakla birlikte daha sonraki araştırmalara, eksikliklerin giderilmesi yönünde yardımcı olacağı da söylenebilir.

1.6. Sayıltılar

1. Katılımcıların performanslarını olabildiğince iyi derecede sergiledikleri düşünülmektedir.
2. Araştırmanın uygulama sürecinde, katılımcılar kontrol altına alınamayan (rahatsızlık, konsantrasyon, motivasyon, öz güven eksikliği…) bazı istenmeyen etkenlerden eşit düzeyde etkilenecekleri düşünülmüştür.

1.7. Sınırlılıklar

1. Araştırma, katılımcıların cevaplaması için seçilen sorularla sınırlıdır.
2. Araştırmanın verileri derslere devam eden öğrencilerin verdikleri bilgiler ile sınırlıdır.
3. Çalışmanın bulguları süreç boyunca toplanacak verilerle sınırlıdır.
4. Çalışmaya katılan 180 öğrenci ile sınırlıdır.

1.8. Tanımlar

Araştırmada sıkça geçen bazı tanımlar aşağıda ifade edilen anlamlarıyla kullanılmıştır.

Genelleme:

Matematiksel düşünme ve problem çözme yoluyla elde edilen sonuçların etki alanını daha geniş bir kümede uygulanabilir olması şeklinde ifade edilir. (Mason, vd. 2010). Birbirine benzer ve süreklilik içeren olayların en geniş kapsamda ele alınması sürecine genelleme denir. Genellikle, örüntüde bulunan ilişkisel yapının fark edilmesi neticesinde her kavram için geçerli olan ifadenin yazımıdır (Lannin, 2005).

TEOG:

Temel **E**ğitimden **O**rtaöğretime **G**eçiş Sistemi, Türkiye Cumhuriyeti Milli Eğitim Bakanlığının 2013-2014 Eğitim Öğretim yılından itibaren uygulamaya başladığı ve 2017-2018 Eğitim Öğretim yılında uygulamadan kaldırdığı ortaöğretime geçiş sistemine verilen addır.

LGS:

Liselere **G**eçiş **S**istemi, Türkiye Cumhuriyeti Milli Eğitim Bakanlığının 2017-2018 Eğitim Öğretim yılından itibaren uygulamaya başladığı ortaöğretime geçiş sistemine verilen addır.

BÖLÜM II

ÇALIŞMANIN KAVRAMSAL ÇERÇEVESİ

Matematik öğrenmede önemli amaçlarından biri olarak kabul edilen genelleme yapma, güçlük düzeyi ve problem durumlarına göre farklılıklar gösterebilmektedir. Genelleme, var olan bir çözüm yolunu benzer diğer durumlar için de geçerli olduğunun anlaşılması şeklinde ifade edilmektedir (Olkun, Şahin, Akkurt, Dikkartın ve Gülbağcı, 2009, 66).

Bu bölümde; çalışmanın temelini oluşturan teorik yapılardan bahsedilmiştir. Özellikle genelleme kavramsal olarak incelenmiş ve genelleme, genelleme süreci, genellemenin sınıflandırılması, genelleme eylemleri, genelleme problemleri, genelleme stratejileri, genellemenin düşünme yolları ve matematik öğretim programlarında genelleme konularına yer verilmiştir.

2.1. Genelleme

Genelleme matematikte ve günlük hayatta çok sık kullandığımız bir boyuttur. Matematikte ve diğer bilimlerde de ileri adımlar atılmasına imkân sağlamaktadır (Biber ve Argün, 2012). Genelleme yapma bilişsel öğrenme ürünlerindendir. Kısaca, öğrenme temeline dayanmaktadır (Erden ve Akman, 2004: 91). Genellemelerin öğrenme, olay ve olguların açıklanması ve problemleri çözme konularında önemli işlevleri vardır. Okullarda genellemelerin çoğu öğretilmektedir.

Genellemeyi kavramsal olarak sınırlı sayıdaki bireylerde gözlenmiş olanın bu bireylerin de içerisinde bulundukları tüm sınıfa yayma süreçleri, yargı oluşturma ile karar verme işlemi olarak tanımlanmaktadır. Genelleme yapmak zihnin genel düşünceler yapması işlemi veya özelden genele geçişi ifade etmektedir (Cevizci, 2000: 405). Kısaca insan, durumlar, objeler, eylemler veya fikirler sınıfı konusunda ulaşılan bir yargıdır. Genellemeler, genellenebilme özelliğine sahip, araştırmaya dayalı ve yol gösterici yargıları tarif etmektedir (Ülgen, 1997: 232).

Genelleme, ilgilenilen varlıkların ortak özelliklerine göre bir grup kapsamında toplama ve bu gruba isim verme anlamında kullanılmaktadır (Yağbasan ve Gülçiçek, 2003). Genelleme kavramının çoğu ilişkili disiplininde geniş uygulamalara sahip olduğunu belirtmek gerekir. Örneğin A ve B ilişkili iki kavram olarak; A'nın B kavramının bir genellemesi şeklinde düşünülürse gerek ve yeter şart :

- B kavramının her durumdaki örneklerinin A kavramında örnekleri olması,
- A kavramının örneklerin arasında B kavramı örneklerinin olmadığı örneklerin de var olması şeklinde ifade edilebilir.

Örneğin hayvan, ördeğin genellemesidir. Çünkü her ördek hayvandır ve ördek olmayan başka hayvanlar da bulunmaktadır (Yılmaz, 2011).

Matematik, ardışık soyutlama ve genellemeler süreci olarak geliştirilen fikirler (yapılar) ve bağıntılardan (ilişkilerden) oluşturulan bir sistemdir (Baykul, 2009: 34). Matematik alanyazınında genelleme kavramı birden fazla anlama sahiptir. Genelleme, nesnelerin tüm özellikleri için geçerli bir ifade oluşturmak amacıyla bilgiyi aktarmanın bir yolu olarak görülebilir (Dörfler, 1991).

Ellis (2007) genelleme yapmayı, genelleme eylemleri yani ilişkilendirme, genişletme ve araştırma ile refleksiyon genellemeleri açıklama veya belirleme, tanımlama, etki olarak sınıflandırmıştır. Genelleme eylemlerini ise kişilerin aktivite ve konuşmaları içerisinde neticelenen zihinsel aktiviteler şeklinde ifade etmiştir. Kişilerin açıkladıkları ifadeleri de refleksiyon genellemeleri şeklinde isimlendirmiştir.

Dörfler (1991: 63), "genelleme yapma" ile "genelleme" kavramlarının farklı anlamlara geldiğinin altını çizmiştir. Genelleme yapma, mevcut ve genel durumların ortaya çıkmasını sağlayan sosyal-bilişsel bir süreci ifade ederken, genelleme kavramı bilişsel yapıların yerini tutan ürünleri ortaya çıkaran kişisel algının içinde psikolojik bir süreç olarak değerlendirilmektedir.

Matematikte genellemelerin, teoremlerin formülasyonuna öncülük ettiğini ve makul örüntülerin ortaya konduğu örneklerin yapılandırılmalarıyla başlayan muhakeme ve yanılmaların zigzaglı bir tümevarım yolunun sonucu olduğunu belirtmek gerekir (Sriraman, 2004). Matematik öğretiminde etkili yollarından biri matematik yaptırmadır. Genellemenin, matematik yaptırma yöntemlerinin öğretiminde iyi olduğu bilinir.

Genellikle örüntüde bulunan ilişkisel yapının fark edilmesi neticesinde her kavram için geçerli olan ifadenin yazımıdır. Dolayısıyla matematiğin temel hedeflerden biri olarak görülen genelleme yapma, öğrencilerin sembolik temsillerini anlaması ve aritmatikteki önbilgilerin arasında ilişki kurabilmeyi sağlayan matematiksel düşünme süreçleridir (Lannin, 2005).

Matematik başarısıyla öğrenme hususunda genellemenin önemli rolü vardır. Genelleme Mason'nun ifadesiyle matematiğin kalbi ile NCTM standartlarında matematik öğretiminin temel amaçlarından biridir (NCTM, 2000).

Kaput (1999) genelleme kavramını, örnek durum veya durumların yanında bir akıl yürütme, iletişim kurma eylemleri gerçekleştirip; örnek durumların arasındaki ortak özelliklerin belirlenebilmesi ya da açığa çıkarılması, iletişim kurma ve akıl yürütme eylemlerini örnek durumların dışında bir seviyeye, örnek durum arasındaki bir örüntü, yapı veya ilişkiye taşımak olarak ifade etmiştir (Kaput, 2008).

Krutetskii (1976) genellemenin harf ya da sayı sembolleri kullanılıp benzer durumların fark edilmesi ve genelleştirilmiş çözüm ya da ispat yoluna hakim olunması olarak iki yönüyle dikkate alınabileceğini söylemiştir. Her iki durumda da ilişkiler, nesne veya işlemlerin arasında benzer, gerekli veya genel olanı seçerek bir genelleme yapma gerektiğini aktarmıştır. Genelleme, matematik öğrencilerinin göstermiş olduğu yüksek bilişsel yeteneklerden biridir. Çünkü bütünsel düşünme, soyutlama, görselleştirme, akıl yürütme ve esneklik gibi genelleme yeteneğinin, yetenekli öğrencileri karakterize ettiği ve onları diğerlerinden ayırdığı görülmektedir (Akt. Yakut ve Çayır, 2013).

Baki (2008), belirli bir olay veya durumdaki örüntüyü bularak; bir düşüncede toplama işi olan genelleştirmenin, bu haliyle aynı anda soyutlama olarak ifade etmiştir. Lee (1996) cebirin ve gerçekte bütün matematiğin, ilişkilerin genelleştirilmesindeki görüşü, matematik öğretimlerinde genelleştirmenin önemli olduğunu belirtmiştir (Akkan ve Çakıroğlu, 2012).

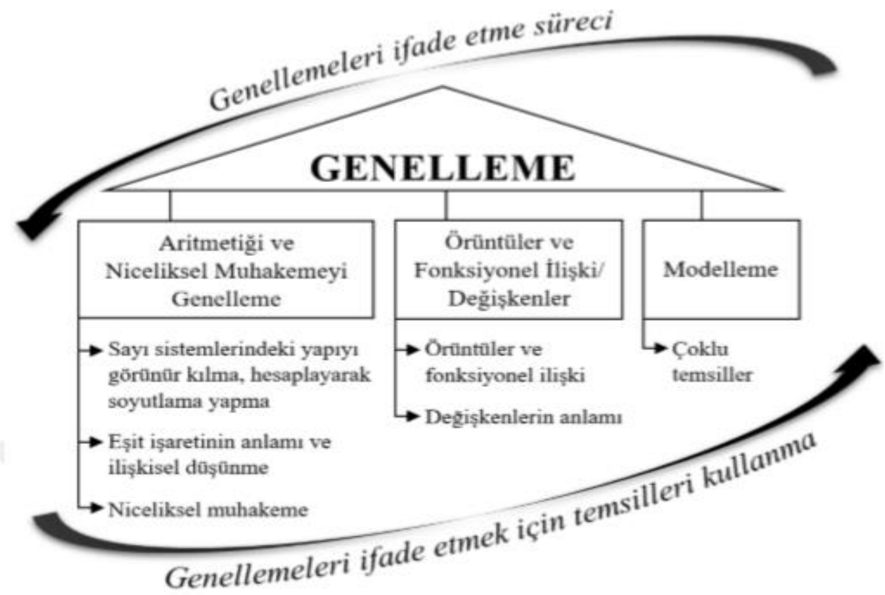
Hargreaves, Shorrocks-Taylor ve Threlfall (1998), genellemenin iki anlamda kullanıldığını belirtmişlerdir. Bunlardan birincisi bir örüntünün genellenmesi, diğeri ise bir dizinin genellenmesidir. Örüntü genellenmesinin daha çok verilen sayı kümesiyle sınırlı olduğu, dizi genellenmesinin ise sayı kümesinden öteye geçtiğidir. Örnek olarak, 1, 3, 5, 7, 9 sayı örüntüsünde çocuğun, sayıların tek sayı olduğu ve ikişer artarak devam ettiğini belirtmesi genelleme şeklinde adlandırılmaktadır. Buna karşın genellemenin birçok farklı yolunun olduğunu da belirtmek gerekmektedir. Burada, örüntüde bulunan sayıların tek sayı olduklarını bilme, sayı gruplarının bir özelliğiyle ilgili bir genellemedir. Sadece bu özelliğin dikkate alınıp; örüntüyü sürdürürken, sayıların ikişer artma ilişkisi ve sayıların sırasına önem verilememektedir. 1, 3, 5, 7, 9, 21, 37, 15 örnek olarak verilebilir. 1, 3, 5, 7, 9 örüntüsü ile ilgili genelleme kapsamında, daha çok matematiksel deneyim kazanabilmek için n. terimi f (n) = 2n-1 gibi cebirsel sembolize etmek gerekmektedir. Bu durum ise daha sonra örüntüde bulunan herhangi bir terimin değerini bulmayı sağlamaktadır (Tanışlı ve Özdaş, 2009.)

Genellemenin yapısını vurgulayan bu tanımların yanında dört temel özelliği bulunmaktadır. Bu özelliklerin ilki genişletmedir. Kısaca verilen argüman ya da muhakeme sınırlarının yükseltilmesidir. İkinci özelliğiyse soyutlamadır. Yani nesnelerin tümünün arasında değişmeyen ya da ortak özelliklerin tanımlanma durumudur. Soyutlama anlamında genelleme, belli bir grup durum için mevcut ortak noktaların sentezlenmesini kapsamaktadır. Genellemenin diğer bir özelliği de süreç özelliğidir. Genellemenin bir nesneden değil, bir etkinlik ya da eylemdir. Bu özelliğin tersine son özellik nesne özelliğidir. Yani genelleme sürecinin sonunda elde edilen bir ürün şeklinde de görülebilmektedir (Kirwan, 2015). Bu bilgiler ışığında genelleme süreci detaylı şekilde aşağıda açıklanmıştır.

2.2. Genelleme Süreci

Bir çok şekilde karşılaşılan genelleme durumu, matematiğin özü olarak kabul edilmektedir (Mason, 1996). Genelleme matematiksel işlemlerde kritik bir bileşendir ve her seviyedeki matematik öğrenimi için önemi giderek artmaktadır (Ellis, 2011: 308).

Matematik eğitiminde bu denli önemli olmasının sebebi, genelleştirme yapanın düşünme becerisi ve bilişsel süreçlerinin dikkate alınmasının gerekliliğidir (Carraher vd., 2008). Genelleştirmenin yapılması kadar yapma süreci de matematik eğitimi için önemlidir. Bu anlamda genelleştirme ve genelleştirme süreci araştırmacılar tarafından farklı olarak tanımlanarak açıklanmıştır. Şekil 2.1'den kuramsal çerçeve bağlamında genelleme bileşenleri verilmiştir. Buna göre genelleme; aritmetiği ve niceliksel muhakemeyi genelleme, örüntüler ve fonksiyonel ilişki/değişkenler ve modelleme olarak üç grupta değerlendirilmiştir:



Şekil 2.1. Kuramsal Çerçeve Bağlamında Genelleme Bileşenleri (Ayber, 2017: 18).

Genelleme süreci matematiksel kavramları tanıma ve bu kavramlarla ilişkiler kurmayı gerektirir. Bu sebeple kurulacak ilişkinin temsil edildiği doğru bir zihinsel imajın, bu kavramların ilişkilendirilmesi konusunda önemli bir payı vardır (Yılmaz ve Argün, 2013).

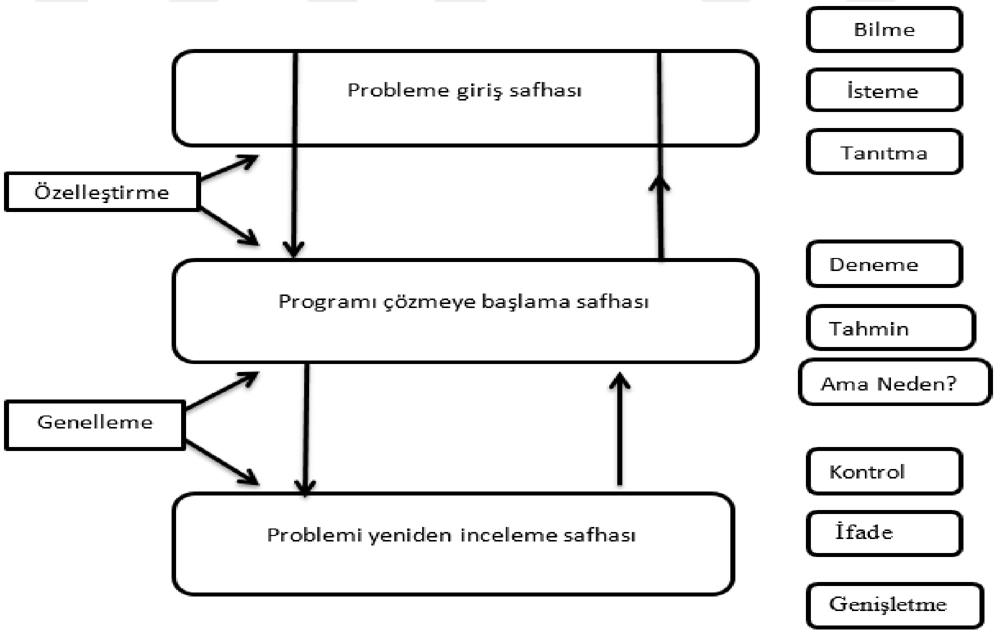
Dubinsky (1991) genelleştirme sürecini, mevcut bir durumun, bir öncekinden farklı olan yeni durumda kullanımı ve temsil edilmesi olarak tarif etmiştir. Radford (2008) bu süreci, aritmetik genelleme ile cebirsel genelleme şeklinde iki ayrı bağlamda değerlendirmiştir. Buna göre bütün terimlerde geçerli olacak bir ifade yazmadan örüntü konusunda bazı ortak yönlerin fark etme ve bazı ilişkilerin belirtilmesi aritmetik genelleme, örüntüde bulunan ilişkisel yapının fark edilmesi sonucunda her terim için geçerli olacak bir ifadenin yazımı cebirsel genellemeyi belirtmektedir.

Radford (2003) genellemeleri 3 aşamada değerlendirmiştir. İlk aşamada, yapılan genellemenin fiziki boyutta kaldığı olgusal genellemelerdir. Bu aşamada genel olarak eylemlerin işlemsel anlamda yürütülmektedir. İkinci aşamada daha soyut ve yapılan genellemelerin tanımlanabilmesi için dilin kullanıldığı bağlamsal genellemelerdir. Bağlamsal genellemelerde öğrenci gördüğü şekillerden hareket ederek bir sonraki şekil hakkında yorum yapar. Üçüncü aşama harflerin kullanımı ile cebirsel gösterimler yapılıp; genellemenin ifade edildiği sembolik genelleme aşamasıdır (Akt. Oflaz, 2017: 36).

Polya (1957) genellemenin aşamalı olarak gerçekleştiğini belirtmektedir. Bu süreçte gözlemlenen olayın açıklanması, konuyla ilgili örnek vermek ve ardından özel örneklerin incenlemesi yoluyla gerçekleşir. Ayrıca yapılan genellemenin, muhakkak matematiksel bir ispatla son bulması gerekir (Akt. Oflaz, 2017: 36).

Matematiksel genellemelerde belirli sayıdaki adımlardan hareket ederek iddia konusunda karar verilmeye çalışılmaktadır. Bu durumda, genelleme esnasında özelleştirme işleminin yapıldığını gösterir. Bu bileşen, matematik için önemlidir; çünkü spesifik sonuçlar faydalı olabilmesine karşın, matematiksel sonuçların karakteristik olarak genel olması söz konusudur. Genelleme, "Doğru olması muhtemel görünen şey nedir?, Niçin ve nerede doğrudur?" sorularına götürmektedir (Stacey, vd. 1985'den akt. Arslan ve Yıldız, 2010: 20).

Genelleme esnasında örüntü oluşturmak, sınıflamak, eşleştirmek, sıralamak ve karşılaştırma yapmak, farklılık ve benzerlikleri belirlemek, iki değişkenin arasındaki ilişkinin sözel veya matematiksel olarak ifade etmek, olabilecek tüm ihtimalleri tanımlamak gibi eylemler bulunmaktadır. Özelleştirme ve genelleme süreçlerini aşağıdaki şekilde görmek mümkündür (Hacısalihoğlu, vd. 2003).

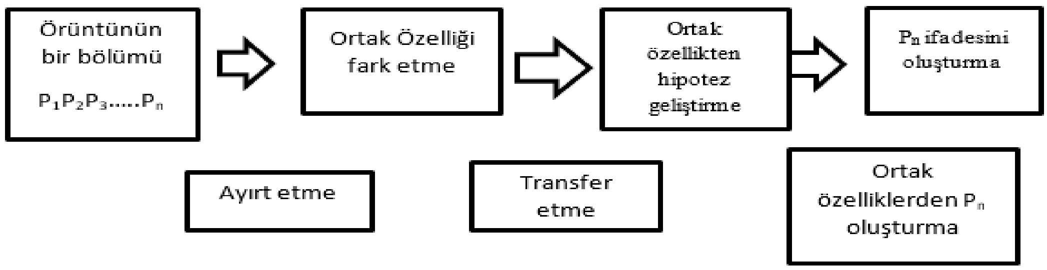


Şekil 2.2. Özelleştirme ve Genelleme Süreçleri (Arslan ve Yıldız, 2010: 20).

Cebirsel örüntü genellemesi kuramsal çerçevesinin Radford (2008) tarafından geliştirdiğini ve bu çerçeveye göre cebirsel örüntülerin genelleme sürecini belirtmek gerekir;

- Sayı örüntüsündeki ortak özelliğinin fark edilmesi,
- Fark edilen ortak özelliğin sayı örüntüsündeki diğer terimlerinde olup olmadığının incelenmesi,
- Örüntünün herhangi bir terimini direkt bulabilmek için cebirsel bir kural oluşturma adımlarından oluşur.

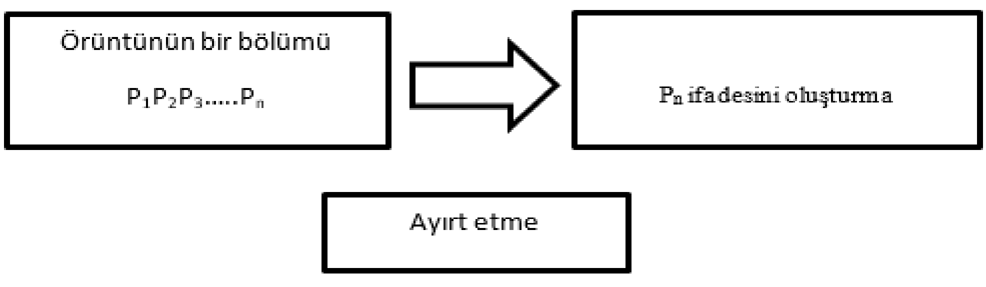
Cebirsel örüntü genellemesinin inşası denilen bu genelleme süreci Şekil 2.3'te verilmiştir (Yeşildere vd., 2017: 105).



Şekil 2.3. Cebirsel Örüntü Genellemesinin İnşası (Radford, 2008: 85)

Şekil 2.3.'teki süreçte Radford (2008), son okla gösterilen aşama çıkarıldığında yapılan genellemenin aritmetik genelleme olduğunu belirtmektedir.

Aritmetik genellemenin sayı örüntüsünün bütünü yerine belli bir bölümüne odaklandığı için elde edilen genellemenin herhangi bir terimi bulmaya yönelik olmadığı ve cebirsel bir yapısının bulunmadığı görülmektir. Aritmetik genelleme süreci (Yeşildere vd., 2017: 105-106) tarafından Şekil 2.4'te verilmiştir.



Şekil 2.4. Aritmetik Genelleme Süreci (Radford, 2008)

Şekilden de anlaşıldığı gibi aritmetik genelleme sürecinde, cebirsel genellemenin inşasında yer alan son adım yoktur. Terimlerin arasındaki ilişkinin sayılar ile belirtilmesi, ardışık terimin olması aritmetik genellemeye örnektir.

2.3. Genellemenin Sınıflandırılması

Cebirsel düşünmede iki önemli bileşen olduğunu söylemek mümkündür. Bunlar genelleme yapmak ve bunları gösterebilmek için sembollerle birlikte problemleri çözmek olarak sıralanabilir (Carpenter ve Levi, 2000: 1). Matematiksel yapıların genellenebilmesi için onların benzerliklerine göre sınıflama durumu söz konusudur. Bu anlamda genelleme ile ilgili alan yazında yapılan farklı sınıflandırmaların yapıldığı görülmektedir. Örneğin Michaelis ve Garcici (1996) ise üç temel genelleme sınıflandırması yapmıştır:

1. Betimsel genellemeler: Belli bir yere ve zamana özgü genellemeleri tarif eder. Nüfus artışının, şehirleşme, endüstrileşme ile çevre sorunlarına sebep olması örnek olarak verilebilir.
2. Koşullu genellemeler: Herhangi bir şarta bağlı yapılan genellemeleri ifade etmektedir. "Şayet ….olursa….olur" olarak belirtilir. Bir ürünün miktarı artarsa malın fiyatının düşmesi örnek olarak verilebilir.
3. Değer temelli genellemeler: Genel olarak bir tercih, istek, değer ve ya değer ilkesi kapsamaktadır. Örneğin çevre sorunları çözülecekse nüfus, endüstrileşime ve şehirleşme kontrol altına alınmalıdır.

Bununla birlikte konuyla yakından ilgili olarak Ellis (2007) tarafından yapılan genelleme sınıflandırması aşağıda açıklanmıştır.

Genelleme Eylemleri

Bir problem üzerinde çalışılırken matematiksel işlem gibi problem çözme davranışlarının incelenmesi, görünen matematiksel odaklanma, kullanılan özelikler ve ilişkiler veya belirlenen stratejiler, genelleme girişimlerinde kullanılan görünen zihinsel hareket çeşitlerinin tanımlaması şeklinde ifade edilmektedir. Davranışlar kendi genelleme eylemlerini oluşturmamaktadır. Buna karşın kişilerin hangi genelleme eylemlerini yerine getirdiğinin belirlenmesinde araştırmacılara katkı sağlamaktadır. Burada zihinsel eylemlerin fiziksel eylemlerden ayrıldığı görülmektedir. Ancak eylem kavramıyla, kişilerin tecrübe dünyalarındaki etkileşim içerisindeki bilgilerin yapılandığı aktif adaptif oluşumlar vurgulanmaktadır.

a. İlişkilendirme

Durumları ilişkilendirmeyle iki ya da daha çok durumun arasında bir çağrışım oluşmaktadır. Geri bağlantıyla mevcut durum ve daha önceden karşılaşılan durumun arasında bağlantı oluşmaktadır. Kişinin, önceden karşılaştığı bir durum veya problemle bağlantı kurmasını vurgulamaktadır. Aslında iki senaryonun arasında önemli farklılıkların olduğu belirtilmektedir. Kişiler aynı zamanda daha önceki durum veya problemden, benzer herhangi bir özelliğin hatırlanmasına neden olan var olan durumdaki özelliği fark ettiklerinde veya diğer problemdeki benzer özelliğin algılandığı bir probleme odaklandığı zaman tekrar geriye dönmektedirler. Yeninin oluşturulmasıyla mevcut duruma benzeyen yeni bir durum ortaya çıkarılmaktadır. Objelerin ilişkilendirilmesiyle iki ya da daha çok var olan objenin arasındaki benzerlikler bir çağrışımı oluşturmaktadır. Kişi grafikler, eşitlikler ya da diğer temsiller gibi iki veya daha çok matematiksel objelerle çağrışım kurmaktadır. Durumların ilişkilendirilmesi olarak isimlendirilen kategorinin tersine kişi, farklı durum veya bağlamlarla çağrışım yapabilmek için objeleri göz önünde bulundurmamakta ve problemdeki objeleri ilişkilendirmektedir. Bir eşitliğin farklı bir eşitlik ile aynı yapıya sahip olduğu veya iki grafiğin benzeyen özellikleri olduğunu fark etmesi örnek olarak verilebilir.

b. Araştırma

Araştırma kişinin, benzer bir durumun ortaya çıkıp çıkmadığının belirleme teşebbüsü içerisinde tekrarlanan hareketin ortaya konmasıdır. Şayet iki nesne arasında kurulan matematiksel ilişkiye odaklanılırsa, bu hareketler, benzer ilişkiler için araştırma şeklinde adlandırılmaktadır. Araştırmada bir oran hesaplaması gibi benzeyen eylemler ortaya konmaktadır. Araştırma eylemleri genellikle kişilerin birçok sayı çiftlerini kapsayan tablolar ile çalıştıkları zaman ortaya çıkmaktadır. Kişilerin araştırma yaparken örüntüler, prosedürler veya çözümlerin üzerinde odaklanmaları sonucunda bunların ilişkileri üzerinde durdukları görülmektedir.

c. Genişletme

Kişi burada; yalnızca benzerlik ilişkisi ya da bir örüntüyü fark etmekle kalmayıp; aynı zamanda bu örüntü veya ilişkiyi daha genel yapı içerisinde genişletir ise genelleştirme eylem olarak genişletme kategorisinde yerini almaktadır. Genişletme esnasında kişiler akıl yürütmesini genişletmektedir. Böylece orijinalde bulunan durum veya problemin ötesine ulaşmaktadır. Bu hareket içerisinde kişi, geçerli yeni tanım kümesi, yeni bir yapı, yeni bir ilişki, bir sınıfın yeni elemanları veya genel bir fenomenin yeni bir tanımlaması gibi yeni bir şey üretmektedir. İlişkilendirmede kişi, bazen yeni durumlar üretebilmektedir. Şayet kişi, herhangi bir ya da birkaç örnek, durum veya problemin ötesine genişletip; bir fikrin genelliğine odaklanıyor ise bu eylemler genişletme eylemleriyle kategorilendirilmektedir.

Stacey (1989) ise genellemeyi uzak ve yakın genelleme şeklinde ikiye ayırmaktadır. Yakın genelleme, bir sonraki kavramın bulunmasını gerektiren genellemeyi ifade etmektedir. Uzak genelleme örüntünün kurallarını bulmayı gerektirir. Stacey yaptığı çalışmada genellemeyle ilgili üç temel stratejiden bahsetmiştir. Bu stratejilerin, örüntünün bir terimine ortak fark eklenir ve bir sonraki terimin olduğu yinelemeli stratejidir. Örüntünün terimleri arasında bulunan ilişkiyle ilgili matematiksel bir ifadeyle belirtilir ve fonksiyonel ilişki arama stratejisidir. Son olarak $f(x) = ax + b$ $(b = 0)$ iken $f(x) = nx$ oranının kullanılarak aslında orantısal akıl yürütmenin kullanıldığı bütüne genişletme stratejisi olarak ifade edilmektedir (Akt. Oflaz, 2017: 38-40).

Bir argümanın genel olan bir içeriğe uygulanmasına genelleme diyen Harel ve Tall (1991: 29) üç çeşit genellemenin olduğunu belirtmektedir. Geniş genelleme yeni bir şema oluşturmaksızın mevcut şemanın uygulanabilirliğini genişletmektir. Yeniden yapılandırmacı genelleme mevcut şemanın uygulanabilirliğini artırmak için yeniden yapılandırıldığı genellemedir. Ayrıştırıcı genelleme şemanın yeni bir içeriğe dönüşürken yeni bir şema oluşturulmasını ifade etmektedir (Harel ve Tall, 1991).

2.4. Genelleme Problemleri

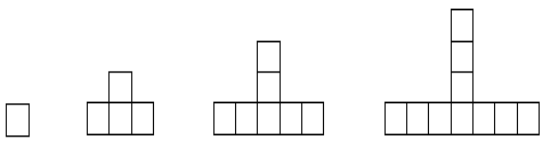
Öğrencinin bir matematikçi gibi sunulan problemlere çözüm yollarını kendi bularak, bu çözüm yolarının üzerine sınıf içi tartışmaların neticesinde bir genellemeye varması söz konusu olur. Öğrencilerin problemlere çözüm bulurken, verilen durumları analiz ettiği, bir desen aradığı ve bu desenleri düzenleyip bir genellemeye ulaşmaya çalıştığı görülmektedir. Matematik öğreniminin de bu süreç içerisinde gerçekleştiğini belirtmek gerekir. Bu tarz matematik öğretiminde konu öğretiminin yanı sıra daha ileri düzey becerilerinin geliştirilmesi hedeflenmektedir. Bu beceriler verilere dayalı bilgi düzenleme, akıl yürütme, genellemelere ulaşma, kanıtlama ve problem çözme becerileri olarak sıralanmaktadır (Toluk, 2003).

Matematik, günlük hayattaki problemlerin çözümünde de sıklıkla kullanılan önemli araçlardandır. Bu ifade de kullanılan problem kavramı yalnızca sayısal problemlerin değil, genellikle sorun olarak isimlendirilen problemleri de kapsamaktadır. Bu önemden dolayı matematik ile ilgili davranışların okul öncesi eğitim programlarından yükseköğretim programlarına dek her düzeyde ve her alanda yer almaktadır (Baykul, 2009).

Örüntü bulmak ve kullanmak matematiksel problemleri çözebilmek için önemli stratejilerdendir. Lee ve Wheeler (1987) bu tarz, özel durumların incelenmesi, sonuçları sistematik bir şekilde düzenleyerek; bir örüntü oluşturup cevap için kullanılabilen çözülebilen problemleri "genelleme problemleri" şeklinde isimlendirmişlerdir.

Birçok ülkede okullarda verilen matematik eğitiminin üzerinde durulan örüntü genelleme problemlerinin ortak bir özelliği bulunmaktadır. Genel olarak bu tarz problemler şekil ve sayısal şeklinde iki kategoride sınıflandırılır. Sayısal genelleme problemlerinin bir sayı dizisi olarak örüntüyü listelemekte, şekil genelleme problemleri ise resimsel bir bağlamda örüntüyü ifade etmektedir (Chua, 2009). Şekil ve sayısal genelleme problemleri konusunda aşağıda çeşitli örnekler verilmiştir:

Örnek 1: Ali kare fayanslardan bir dizi şekil oluşturmaktadır. Ali bir fayansla başlar, ardından bir önceki şeklin soluna, sağına ve üstüne bir tane daha eklemektedir.

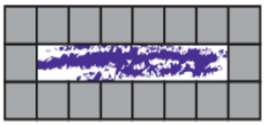


Şekil 2.5. Fayanslardan Oluşturulan Bir Dizi Şekil

Ali'ye n. şekli oluşturabilmesi için gereken fayans sayısını bulmasında yardım edebilir misiniz?

"1. Örnek iki boyutlu lineer bir şekil örüntüsü genelleme problemidir".

Örnek 2: Ali, 6 birime 1 birim boyutlarında dikdörtgen şeklinde olan çiçek tarhını kare fayanslar ile çevirmiştir.



Şekil 2.6. Dikdörtgen Şeklinde Olan Çiçek Tarhını Kare Fayanslar (Chua, 2009: 19)

Ali’nin bir satır genişliğinde olan herhangi bir uzunluktaki çiçek tarhını çevreleyebilmesi için gereken fayans sayısını bulmasına yardım edebilir misiniz?

“2. Örnek iki boyutlu lineer bir şekil örüntüsü genelleme problemidir”.

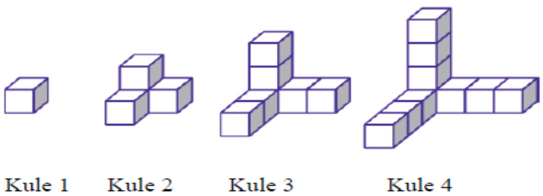
Örnek 3: Bir dizinin ilk beş terimi aşağıdaki gibidir:

1, 4, 7, 10, 13, ...

Dizinin n. terimini bulmak için bir kural yazabilir misiniz? Yanıtınızı nasıl bulduğunuzu gösteriniz.

“3. örnek lineer bir sayısal genelleme problemidir”.

Örnek 4: Ali küpleri kullanarak kulelerden bir dizi oluşturmuştur. Bir küple başlar ardından her kulenin yanına, önüne ve tepesine bir küp daha eklemiştir.

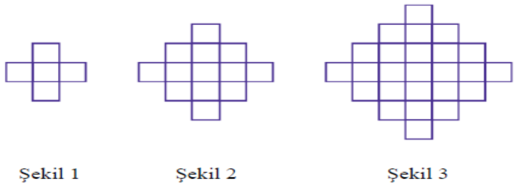


Şekil 2.7. Küplerle Oluşturulan Şekil Dizisi (Chua, 2009: 19)

Ali’nin n.inci kuleyi oluşturabilmesi için gereken küp sayısını bulmasına yardım edecek bir kural oluşturabilir misiniz? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu gösteriniz.

“4. örnek üç boyutlu lineer bir şekil örüntüsü genelleme problemidir”.

Örnek 5: Ali çiniler ile bir şekil dizisi oluşturmuştur.



Şekil 2.8. Çinilerle Oluşturulan Şekil Dizisi (Chua, 2009: 19)

Ali’nin n.inci şekli oluşturabilmesi için gereken çini sayısını bulmasına yardım edecek bir kural oluşturabilir misiniz? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu gösteriniz.

“5. örnek iki boyutlu kuadratik bir şekil örüntüsü genelleme problemidir”.

Örnek 6: Aşağıdaki matematiksel ifadeleri inceleyin.

1. Satır	1=1
2. Satır	1+3=4
3. Satır	1+3+5=9
4. Satır	1+3+5+7=16

Örnek satır sayısı ile her bir eşitlikte bulunan ardışık tek tam sayıların arasında bir bağlantı gösterir. Eşitliğin sağ tarafı kare sayılardır. Örneğin “1+3+5+7” ardışık tamsayılarının olduğu satırın sayısı 4’tür. Satır sayısının karesi “16” bu ardışık tek tam sayıların toplamına eşittir. Bu problem eşitliğin içerisine yerleştirildiği sayısal bir genelleme problemini ifade etmektedir (Chua, 2009).

Genelleme problemlerinin temelinde, öğrencinin örüntüyü belirleyebilmesi, tanıması, genişletebilmesi ve ifade etmesinin bekleniyor olması yatmaktadır. Bu becerilerin, aritmetikten cebire başarılı bir şekilde geçiş için önemli bir rolü vardır. Bu geçişin cebirsel düşünmede iki temel yönü bulunmaktadır. Bunlar aşağıdaki gibidir:

1. Girdi ve çıktı gibi nicelikler arasındaki ilişkilerin üzerindeki vurgu.
2. Çıktıların sayısal değerlerini harf kullanarak temsil eden açıkça bir kural ifade etmek (Kaput, 2008).

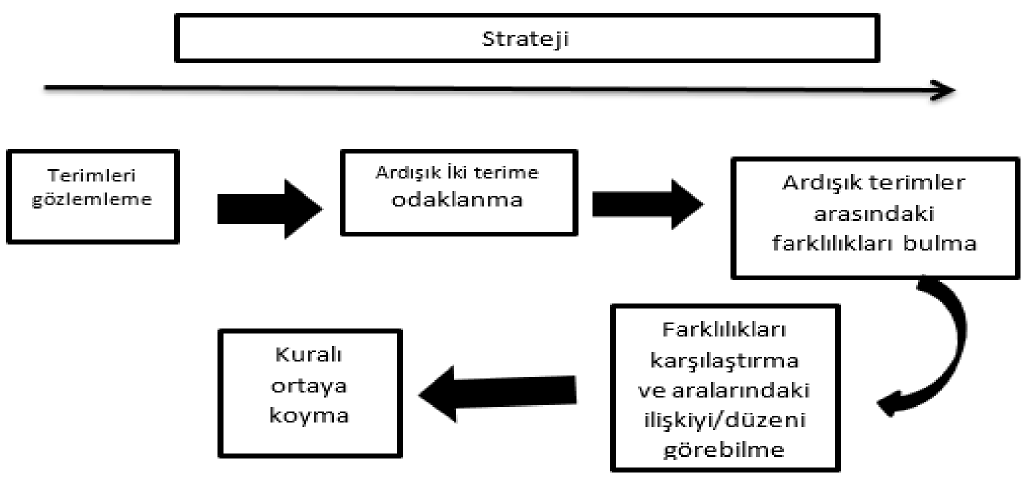
Öğrencilerin çoğu için örüntünün tanınması sorun değildir. Bununla birlikte cebirsel notasyon ya da kelimeler ile açık kuralı temsil ve ifade etme zorlayıcı olmaya devam eder (Cooper ve Warren, 1995).

2.5. Genelleme Stratejileri

Kelime anlamı olarak strateji kavramı, “sevketme, gönderme, yöneltme, götürme ve gütme” anlamına gelmektedir. Genel olarak strateji kavramı, bir kurumun (işletmenin veya devletin) gütmüş olduğu siyasete uygun seçtiği amaçlara ulaşmak için aldığı her alandaki tedbir ve her çeşit aracın kullanımıdır (Güçlü, 2003: 66).

Öğrencilerin matematiksel bir durum ya da yapıyla uğraşırken ya da bir problem çözerken sonuca ulaşailmek için kullanmış oldukları yollar ise çözüm stratejileri olarak ifade edilmektedir (Yaman, 2010).

Şekil 2.9’da tarif edildiği gibi, verilen bir örüntüde işlem yaparken öğrenci, bütün terimleri gözlemlemekte, sonra birinci ve ikinci terime odaklanmaktadır. Ardından terimlerin arasındaki farklılığı bulmaktadır. Bu işlemler diğer terimler için de tekrar edilebilmektedir. En sonunda da bu farklılıklar, farklılıkların arasında bir örüntü var ise, bunu bulabilmek için birbiriyle karşılaştırılması gerekir. Ardından örüntünün kuralı ortaya konulmaktadırr (Tanışlı, 2008: 21).



Şekil 2.9. Bir Örüntüyü Genellemede Kullanılabilecek Strateji Örneği (Hargreaves vd., 1999’den akt. Tanışlı, 2008: 21)

Bir hedefe ulaşabilmek için, birçok işlemi kapsayan strateji benzer hedeflere ulaşabilmek için tekrar kullanılabilmektedir. Alan yazına bakıldığında öğrencilerin bazı cebirsel problemleri çözerken kullanmış oldukları genelleme stratejileri, örüntünün parçalara ayrılması, bir önceki terimden sayıp bir sonraki terime ulaşlması olarak ifade edilmiştir. Bunların, araştırmacılar açısından yapılan sınıflandırmalar olduğunu belirtmek gerekir. Öyle ki bu stratejilerin, öğrencinin zihnindekilerle ilgili fikir vermediği görülmektedir (Oflaz, 2017: 8).

Tekrarlanan örüntülere bakıldığında kullanılan temel stratejilerin kalanlı bölme ve çarpımdan sayma şeklinde ayrıldığı görülmektedir. Bu stratejileri tekrarlanan bir örüntü sorusuyla aşağıdaki gibi açıklamak mümkündür (Tanışlı, 2008: 21):

"1000 tane vagona sahip oyuncak bir tren hayal ediniz. Trenin ilk 7 vagonunun rengi sırasıyla, kırmızı, turuncu, sarı, yeşil, mavi, mor ve beyaz olsun. Oyuncak trenin vagonları sekizinci vagondan itibaren tekrar sırasıyla kırmızı, turuncu, sarı, yeşil, mavi, mor ve beyaz şeklinde devam ederse 800. vagonun rengi ne olur?"

Kalanlı bölme: Örüntünün tekrar birimi 7 olduğundan, 114 bölüm ve 2 kalan elde edilir. Bu durumda 800. vagon baştan 2. vagon ile aynı renge sahip olur. Dolayısıyla 800. vagonun rengi turuncudur.

Çarpımdan sayma: Örüntünün 7. vagonu beyaz olduğundan, yedinin katları olan sayılara karşılık gelen vagonların renkleri de beyaz olur. Bu durumda 7x114=798 olduğundan, 798. vagon beyazdır. Böylece 799. kırmızı, 800. vagon turuncu olur.

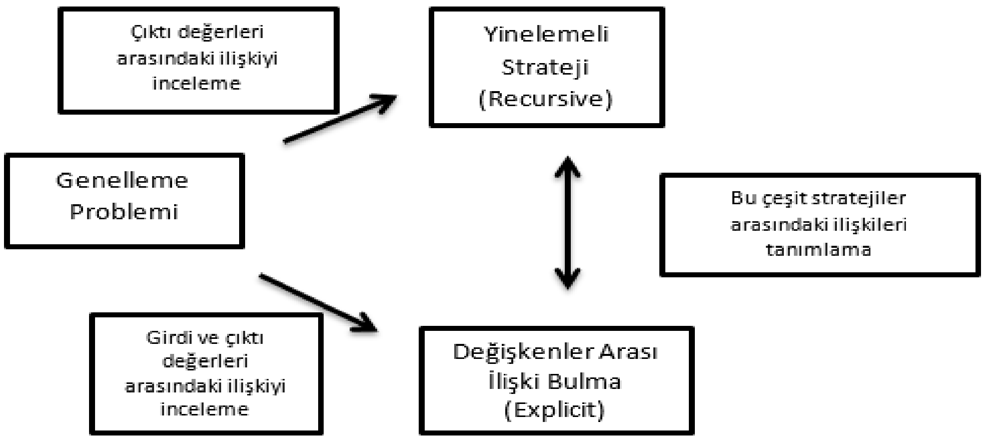
Sabit ve ya artarak değişen şekil de sayı örüntülerinde kullanılan stratejileri, yinelemeli stratejiler ve değişenler arası ilişki bulma stratejileri olmak üzere iki başlıkta değerlendirilmektedir (Sasman vd., 1999 Akt. Tanışlı, 2008: 21).

Yinelemeli stratejiler: Bağımsız değişkenin ardışık değerleri arasında ortaya çıkan ilişkinin açıklanmasıdır. Başka bir ifadeyle, bir dizide sonraki şekli/terimi bulabilmek için, önceki şeklin/terimin kullanımını kapsayan stratejileri ifade etmektedir (Yeşildere ve Akkoç, 2010: 1143).

Yinelemeli stratejilerle girdi değerini (yani bağımlı değişkeni) bulmak hızlı ve kolaydır. Bunun yanında bu stratejilerin, öğrencilerin sezgisel bilgilerinin analiz edilmelerini de sağladığı görülmektedir. Öğrencilerin sezgisel bilgilerinin, değişkenler arası ilişki bulma stratejilerine dönüştürmelerine yardımcı olmaktadır. Bu stratejilerin yardımıyla, öğrencilerin neler bildiği ya da bilmediği belirlenebilmektedir. Böylelikle öğrencilere bilgilerini birleştirecekleri, genişletecekleri ve ardından yeni bilgilere ulaşabilecekleri durumlar önerilebilmektedir. Ancak bu stratejilerin kullanılması için çıktı değerlerinin ilkinin (yani bağımlı değişkenin) bilinmesi önemlidir (Tanışlı, 2008: 22).

Değişkenler arası ilişki bulma stratejileri; Girdi (bağımlı) ve çıktı (bağımsız) değerlerinin arasındaki ilişkinin genellemesini ifade etmektedir. Bu durumda formül ve denklemler kullanılır ve fonksiyonları ifade etme konusunda bu ilk adımdır. Değişkenlerin arasındaki ilişkiyi bulma stratejileri örüntünün hem yakın hem de sonlu adımındaki terimler için geçerli değişmez kural olarak kabul edilmektedir. Böylelikle değişkenlerin arasındaki ilişkiyi bulma stratejilerinin, genel kuralı oluşturma ve dolayısıyla örüntünün herhangi bir terimini (n. terimi) bulma durumlarında yardımcı olur (Ley, 2005: 9).

Yinelemeli stratejilerle değişkenlerin arasındaki ilişki bulma stratejisi arasındaki ilişkiyi göz önüne alma durumu Şekil 2.10'da açıklanmıştır:



Şekil 2.10. Sayısal Durumları Genellemede Kullanılan Kavramsal Model

Genelleme problemleri, çıktı değerleri arasındaki ilişki ile girdi ve çıktı değerleri arasındaki ilişkinin incelenmesi ile yakından ilgilidir. Yinelemeli ve değişkenler arası ilişki bulma stratejileri içerisinde yer almayan başka stratejilerde bulunmaktadır. Öğrencilerin örüntü genelleme problemleri ile uğraşırken akıl yürütme ve genelleme stratejilerini inceleyen birçok çalışma bulunmaktadır (Chua ve Hoyles, 2010). Örüntünün resmedildiği problemlerde fonksiyonel kuralın oluşturulması için çeşitli stratejiler bulunmaktadır (Çayir ve Akyüz, 2015: 211):

Stacey (1989) yaptığı çalışmada üç temel genelleme stratejisinden bahsetmiştir (Çayir ve Akyüz, 2015: 212):

1. Ardışık yaklaşım (toplama stratejisi): Sayma, bir tablo yapma veya şekil çizme.
2. Fonksiyonel ilişki arama: bir figürden matematiksel bir ifade geliştirme.
3. Yanlış orantılı muhakeme yapma: ilişki f (x) = ax + b, b≠0 olduğunda f (x) = nx oranını kullanma.

Tablo 2.1. Genelleştirme Stratejilerini İçeren Çatı (Akkan ve Çakıroğlu, 2012: 110)

Stratejiler	Özellikleri
Parçaları sayma veya modelleme (Counting)	Bir şekli oluşturan parçaların sayısını hesaplamayı ya da arzu edilen niteliği hesaplamak için durumu resmeden bir model yapılandırmayı veya bir şekil çizmeyi içerir
Yinelemeli veya Eklemeli (Recursive or Additive)	Gelecek terimleri veya terimi bulmak için örüntüdeki önceki terimin kullanımını içerir. Öğrenciler genellikle iki terim arasındaki farkı bulmaya çalışır ve gelecek terimi bulmak için elde ettikleri farkı son terime eklerler. Bu işlem yinelemeli ve eklemeli olarak devam ettiğinden eklemeli strateji olarak da adlandırılır.
Fark ile çarpma (Multipliying with difference)	Dizideki ardışık iki terim arasındaki fark ile çarpmayı içerir. Özellikle doğrusal ilişkilerin genellemesinde ortaya çıkan bu durumda, öğrenci terimler arasındaki sabit farkın farkındadır. n. terimi farkla n'nin çarpılması şeklinde ifade eder. Bu yaklaşım 3, 6, 9, … şeklindeki bir dizi için geçerli (3n) iken, 3, 7, 11, … şeklindeki bir dizi için geçersiz (4n) olacaktır
Orantı (Whole-Object or Proportion)	Bu strateji örüntü problemlerini çözmede orantılı akıl yürütmenin kullanımını içerir. Lannin (2003: 343) bu stratejiyi "birimlerin katlarını kullanarak daha geniş bir birim yapılandırmak için bir birim olarak bir parçayı kullanma" olarak tanımlar. Örneğin; 3 elma 9 TL ise 9 elma 27 TL' dir.
Tahmin ve Kontrol (Guess and Check)	Kuralın işleyip işlemediğine bakmaksızın, bir kural tahminini içerir. Problem durumunu temsilen bir cebirsel ilişki (kural) ortaya koyulur. Öğrenci ortaya koyduğu kuralın süreç boyunca geçerliliğini düşünmez. Oluşturduğu cebirsel yapı genellikle problem durumu ile ilgili sayıları ve işlemleri içerir.
İçeriksel (Contextual	Durumu sağlayan bilgiye yani içeriğe odaklı bir kural veya formül yapılandırmayı içerir. Bu kural veya formül hesaplama tekniği ile ilişkili bir kuraldır.
Fonksiyonel veya kesin (Explicit)	Bu strateji herhangi bir değeri belirleyebilmek için iki değişken arasındaki ilişkiyi genelleştirmeyi içerir. Bu strateji denklemleri ve formülleri kullanarak fonksiyonları belirlemeye doğru aşamalı bir ilerlemenin ilk adımıdır. Bu strateji kullanıldığında hem uzak hem de yakın terimler için değişmeyen ve uygulanabilir olur. Bundan dolayı bu strateji n.terimi bulmaya ve genel bir kural yazmaya imkân verir.

Öğrencinin örüntünün resmedildiği problemin altındaki fonksiyonel kuralları oluşturabilmek için bazı stratejiler kullanır. Rivera ve Becker (2008), bu kullanılan stratejileri üç başlıkta değerlendirmiştir (Akt. Çayir, 2013: 25):

1. Sayısal Strateji: Yalnızca bir sayı dizisi şeklinde listelenen yada kuralı elde edebilmek için tablolaştıran herhangi bir örüntüden elde edilen ipuçlarını kullanmaktadır.
2. Şekilsel Strateji: Yalnızca diyagramlar aracılığıyla örüntüyü resmeden genelleme görevi ve kuralı çıkarmak için şekillerin yapısından doğruca kurulan tamamen görsel ipuçlarına dayanmaktadır.
3. Şekilsel ve sayısal yaklaşımların her ikisinin bir arada kullanıldığı stratejidir.

Şekilsel çözümler konusunda Rivera ve Becker (2008) iki farklı kategorinin olduğunu belirtmiştir (Akt. Çayir, 2013: 25):

1. Yapıcı Genelleme: Bir genellemede diyagram verildiğinde birbiri ile örtüşmeyen bileşenlerden oluşturulan bileşik diyagram şeklinde görüntülenen ve kuralı doğrudan bazı alt bileşenlerin toplamı olarak tarif eden durumlardır.
2. Parçalayıcı Genelleme: Diyagramı örtüşen bileşenlerden yapılarak görselleştiren ve kuralları diyagramın her bileşeni ayrıca sayılarak ve ardından örtüşen herhangi bir parça çıkarılıp; ifade edilen durumlarda ortaya çıkmaktadır.

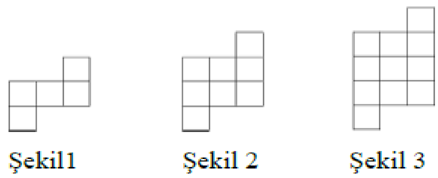
Bu iki şekil stratejisinin yanında Chua ve Hoyles (2010) ile Rivera ve Becker (2008) tarafından geliştirildiği görülen mevcut sınıflandırma şemasının içinde yeniden yapıcı genelleme olarak isimlendirilen yeni bir strateji eklemişlerdir. Bu strateji orjinal diyagramın bir ya da daha çok bileşenini tanıdık olarak yeniden düzenleyerek oluşmaktadır. Şekil yeniden yapılandırıldığı zaman örüntü yapısı açıklığa kavuşmakta ve fonksiyonel kuralın inşası kolaylaşmaktadır.

Bu stratejilerinin daha iyi açıklanabilmesi için Chua ve Hoyles (2010) tarafından yapılan çalışmalardaki problemi ve bu problemin çözümlenmesi için kullanılabilecek muhtemel stratejileri aktarmak gerekmektedir. Chua ve Hoyles (2010) tarafından yapılan çalışmalarda dört öğrenci çözümünü kapsayan bir anket her bir öğretmene dağıtılmıştır. Ankette bulunan çözümlerden;

1. yöntem yapıcı,
2. yöntem sayısal,
3. yöntem parçalayıcı ve
4. yöntem yeniden yapıcı

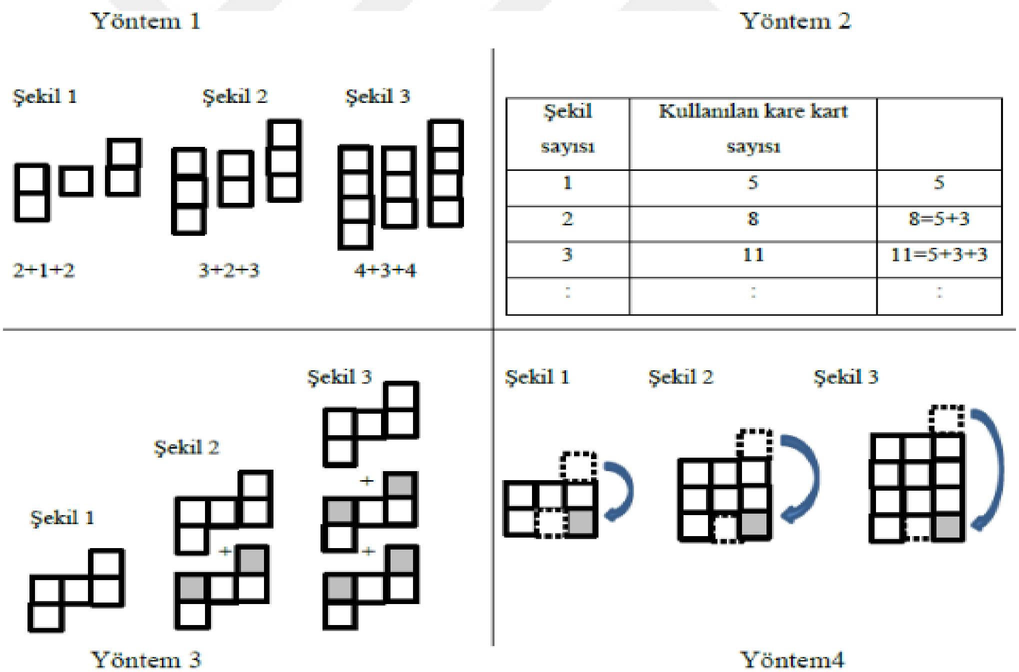
olarak ifade edilmiştir (Çayir, 2013: 27).

Yine bu çalışmada farklı boyutlardaki doğum günü partisi süslemeleri yapabilmek için eş kare kartlar kullanılmıştır. Aşağıdaki şekiller yapılan üç farklı parti süslemesine aittir:



Şekil 2.11. Parti Süslemeleri (Chua ve Hoyles, 2010'dan akt. Çayir ve Akyüz, 2015: 26)

Şekil sayısının artmasıyla daha fazla kare karta ihtiyaç duyulmaktadır. Herhangi bir şekli yapabilmek için kullanması gereken kare kartların sayısının bulunması istenir. Bu sayıyı bulabilmek için nasıl bir kural kullanmalıdır?



Şekil 2.12. Kare Kartlar (Chua ve Hoyles, 2010'dan akt. Çayir ve Akyüz, 2015: 26)

Bu stratejiler, lineer veya kuadratik sayı ile şekil örüntülerinde kullanılan stratejiler, yinelemeli stratejiler ve değişkenler arası ilişki bulma stratejileri olarak iki başlık altında ele alınmıştır (Çayir, 2013: 27).

2.6. Genellemenin Düşünme Yolları

Genelleme sürecinde düşünme yolları, genelleme yapılırken öğrencinin zihninde gelişen bilişsel sürecin karakteristiği şeklinde ifade edilebilir. Alan yazında bu konuyla ilgili yapılan çalışmalara bakıldığında genelleme stratejilerinde yinelemeli düşünme, görsel düşünme, belirgin düşünme, sayısal, sayısal ve görsel düşünmenin beraber kullanıldığı pragmatik düşünme şeklinde kategorize edildiğini söylemek mümkündür (Lannin, 2005; Becker ve Rivera, 2005).

Yinelemeli düşünme

Örüntü genelleme problemlerine bakıldığında yaygın bir şekilde kullanılan düşünme yöntemi yinelemeli düşünmedir. Öğrencilerin örüntüyü fark ettikleri zaman öncelikli olarak yinelemeli düşünmeye başladıkları görülmektedir. Bir dizideki önceki terim ile sonraki terimin arasındaki matematiksel ilişkinin araştırılması yinelemeli düşünmedir. Daha genel anlamda bir dizinin sıralı terimlerinin arasındaki ortak fark, dizinin bütün terimleri için geçerliliğinin olup olmadığının araştırılmasıdır. Alan yazın incelendiği zaman, yinelemeli düşünme içerisinde incelenen stratejilerin kullanıldığı çalışmaların olduğu görülmektedir (Tanışlı ve Yavuzsoy, 2011).

Sayma ve yinelemeli genelleme stratejilerinin, yinelemeli düşünme içerisinde incelenebildiğini söylemek mümkündür. Stacey (1989)'in öğrencilere sormuş olduğu bir örüntü sorusunda, öğrenciler kuralı bulurken bir şeklin ardından gelen şeklin bulunması olan sayma stratejisini kullanmışlardır. Bu durumu "her şekilde ışık sayısı 4 artmış" olarak ifade etmişlerdir. Yapılan aynı çalışmada öğrencilerin, bir başka soruda terimlerin arası farkı bulmuşlardır. Bu ortak farkın, bütün terimler için ortak olmasından hareket ederek çözüme ulaştıkları görülmüştür. Tanışlı ve Özdaş (2009) yaptıkları çalışmada ise öğrencilerin, verilen örüntüyü uzak ve yakın bir adıma devam ettirme konusunda kullandıkları stratejileri bir önceki şekilden bir sonraki şekli bulma, farklılığı aramak, terimlerin arasında bağıntı arama stratejileri şeklinde belirlemişlerdir.**Belirgin düşünme**

Yinelemeli düşünme, bir örüntü kuralını saptanırken öncelikli olarak kullanılan düşünme şeklidir. Ancak aynı işlemin devamlı yapılması yetersiz kalabilmektedir. Dolayısıyla da belirgin düşünme, yinelemeli düşünmeden daha fazla değer gördüğünü söylemek mümkündür. Belirgin düşünmeden kastedilen, bağımsız değişkenin verilen değerine karşılık bağımlı değişkenin değerini hesaplamaktır. Genel anlamda okulda verilen matematik derslerinin, formül içeren problemler olduğu görülmektedir. Buna karşın öğrencilerin, formül bulacak matematik bilgilerinin olmayabileceğinin de değerlendirilmesi gerekir. Kural bulma konusunda yinelemeli ve belirgin düşünmenin iç içe geçmiş bir şekilde devam ettiği belirtilmiştir (Lannin, 2004).

Değişkenlerin arasındaki ilişkilerin araştırıldığı bütüne genişletme, kuralların neden bu şekilde çalıştığı bilgisi olmadan herhangi bir kuralın tahmin edildiği kontrol ve tahmin, verilen problem durumundan çıkan ilişkiler temel alınarak bir kuralın meydana getirildiği bağlamsal stratejilerin, sabit değişim oranlarının çarpan olarak alınarak; terimlere eklenmesi ve çıkarılmasıyla bağımlı değişkenle beraber stratejiler belirgin düşünme içerisinde incelenmiştir (Barbosa, 2011: 29). Tanışlı ve Özdaş (2009) yapmış oldukları çalışmalarda örüntüye yaklaşan öğrencilerin belirgin stratejiler adı altında şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişki kullanma, sonlu adıma devam ettiren öğrencilerin ise modelleme yapma ve fonksiyonel bir ilişki kullanma stratejilerini kullandıklarını saptamışlardır.

Şekil 2.13. Friel Ve Markworth' Un (2009) Çalışmalarında Öğrencilere Sordukları Soru

Genelleme yapılırken görsel anlamda düşünen öğrencilere göre değişkenlerin, bir örüntünün oluşmasını sağlayan terimlerin sırasını ifade ederler (Becker ve Rivera, 2005). Görsel düşünme başlığında yapılan genelleme stratejilerinin, yapıcı ve yapıyı çözücü genelleme şeklinde ikiye ayıran çalışmalar mevcuttur (Rivera ve Becker, 2007). Yapıcı genelleme, formülü "y=mx+b" olan, şeklin köşesi ya da kenarında olanları dikkate alabilmek için çabalamaya gerek kalmaksızın şeklin özelliğinden kolaylıkla çıkarılabilen genellemelerdir. Yapıyı çözücü genelleme, daha karmaşıktır ve geçerliliğin sağlanması için şekilsel ipuçlarının örtüşen özelliklerini tanımayı gerektirir. Yapıcı genellemelerde kural, verilen şeklin oluşmasını sağlayan bileşenlerden kolaylıkla elde edilir. Yapıyı çözücü genellemede şekli oluşturarak, örtüşen parçaların belirlenebilmesi, kural bulma aşamasında her bileşenin sayılarak, örtüşenlerin çıkarılması gerekir.

Chua ve Hoyles (2009) yapılan bu sınıflandırmaya bir kategori daha eklemişlerdir. Bu da "yeniden oluşturma stratejisi"dir. Bu strateji kapsamında öğrencilerin genelleme yaparlarken verilen şeklin iyi bilinen bileşenlerine ayrıldığı ve bu bileşenlerine ayrılıp yeni oluşan şekillerden bir kural elde etmişlerdir.

Sayısal düşünme

Genelleme süreci içinde sayısal yaklaşımı kullananların kural bulurlarken sayısal işlemlerden faydalandıkları görülmüştür. Sayısal yaklaşımlarda, verilen şekil örüntüsünün sayı örüntüsüne dönüştürerek; bu sayı örüntüsünün kuralın belirlenmesinde kullanıldığı belirtilmiştir (Tanışlı ve Yavuzsoy, 2011: 59). Bezuszka ve Kenney (2008) yaptıkları çalışmada sayı örüntülerinin çözümleri için üç strateji tespit etmişlerdir. Bunlar;

1. Verilen sayı dizisinde bulunan terimlerin, kuralı belli olan başka bir dizi ile benzer terimlerin karşılaştırılma işlemi;
2. Sayı dizisinde bulunan her terimin kendisinden önce gelen terimin yerine konma işlemi,
3. Farklar metodu yardımı ile bir formül bulma işlemidir (Chua ve Hoyles, 2011).

Pragmatik düşünme

Pragmatik düşünme sayısal ve görsel düşünmenin beraber kullanımıdır; görsel ve sayısal yaklaşımın hibritlenmiş şeklidir (Kirwan, 2015: 29). Pragmatik anlamda düşünen öğrencilerin hem sayısal hem görsel düşünebilen öğrenciler olarak bilinmektedir (Tanışlı ve Özdaş, 2009: 39). Verilen bir örüntü kuralı saptanırken hem sayısal hem de görsel stratejilerden yararlanılır. Öğrencilerin genelleme yaparlarken sayarak örüntü adımını bulmak, örüntüyü yakın adıma devam ettirmek, fonksiyonel bir ilişki kullanmak gibi eylemler, öğrencilerin genelleme yaparlarken kullandıkları stratejilerdir.

Ellis (2007) yaptığı çalışmada genellemeyi, "süreç (genelleme eylemleri)" ve "ürün (yansıma genellemeleri)" şeklinde ele almıştır. Genelleme taksonomisini belirlemiştir. Genelleme taksonomisinin oluşma esnasında, Lobato (2003) tarafından öğrenen odaklı transfer yaklaşımı temel alınmıştır.

Lobato (2003) öğrencilerin karşılaşmış oldukları problemlerin arasında kendi benzerliklerin oluşma süreçlerini, öğrenen perspektifinden değerlendirmiştir. Böylelikle kaynaklarda geçen transfer çalışmalarının, araştırmacı gözünden öğrenen perspektifine yükseltip, transfer çalışmalarına yeni boyut getirmiştir. Öğrenen odaklı transfer, bireylerin karşılaştığı yeni durumu, önceden zihninde hangi yapıları ile nasıl ilişkilendirdiği konusunda önemli ipuçları verir (Lobato, 2003).

Literatüre bakıldığında, genelleme süreciyle transfer sürecinin birbirlerine benzediği görülür. Genelleme tanımlarında öne çıkan özellikler kişilerin muhakemesini genişletme ve kural geliştirme süreçleriyle öğrenen odaklı transferde genelleme ve öğrenmenin oluşma süreçleri birbirlerine benzemesidir. Bunun yanında genellemede yapılan durumların arasındaki benzerliği aktarmada öğrenen odaklı transferde kişilerin öğrenmeyi gerçekleştirirlerken mevcut hangi bilgisi ile benzerlik ilişkisi kurduğunun araştırılması da birbirlerine benzemektedir (Ellis, 2007).

Genelleme stratejileri daha ziyade araştırmacı odaklı transfer yaklaşımıyla açıklanmaktadır. Çünkü söz konusu bu stratejilerle öğrencinin daha önceden karşılaştığı hangi durum ve problem ile benzerlik ilişkisi kurduğu bilgisi elde edilememektedir. Örneğin, Stacey (1989) öğrencilerine sorduğu bir örüntü probleminde öğrenciler kuralı bulurlarken bir şekilden sonraki şeklin bulunması olan sayma stratejisini kullanmışlardır. Bunu her şekilde ışık sayısı 4 artmış şeklinde ifade etmişlerdir. Buna karşın sayma stratejisi, öğrencilerin zihnindeki hangi bilgileriyle benzerlik kurduğu konusunda bilgi vermez (Akt. Oflaz, 2017: 42-43).

2.7. Matematik öğretim programlarında genelleme

Matematik ve matematik öğretiminin yapısı, ardışık soyutlama ile genellemeler süreci şeklinde geliştirilen fikir, yapı ve bağıntılardan oluşan bir sistemdir. Bu sistemin özellikleri aşağıdaki gibi özetlenmektedir (Baykul, 1999: 36):

1. Matematik, günlük yaşamdaki problemleri çözme konusunda başvurulan sayma, ölçme, hesaplama ve çizme işlemleridir.
2. Matematik, bazı sembollerin kullanıldığı bir dildir.
3. Matematik, insanlarda mantıklı düşünmeyi geliştiren mantıksal bir sistemdir.

4. Dünyayı anlamak ve yaşanılan çevrenin geliştirilmesinde başvurulan bir yardımcı gibidir.
5. Matematik sadece bunlardan biri değil bunların bütünüdür.

Özet olarak, başlı başına bir sistem olduğu görülen matematik, bağıntı ve yapılardan oluşmaktadır. Bu bağıntı ve yapılardan oluşan ardışık soyutlama ve genelleme süreçlerini kapsayan soyut bir kavramdır. Bu soyut kavramların kazanımı zor olduğundan, matematiğin öğrencilere zor geldiğini de belirtmek gerekir. Bu sebeple matematik öğretim yöntemlerinin irdelenme durumu üzerinde öncelikle durulması gereken konulardandır (Alakoç, 2003: 43).

Dünya genelinde matematik eğitimini yönlendiren kurumlardan biri olduğu görülen NCTM'in 2000'de yayınladığı "Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi" (National Council of Teachers of Mathematics) isimli kitapta okul matematiğinin standartları süreç ve içerik standartları şeklinde ikiye ayrılmıştır. İçerik standartlarından biri de cebir olarak ifade edilmiştir. Bu standarda göre cebirin önemi ise "Cebir standardında yer alan düşünceler okullardaki matematik müfredatının en önemli parçasını oluşturur. Cebirde yeterlilik yetişkin yaşamında, iş dünyasında ve yükseköğrenime hazırlanırken önemlidir. Tüm öğrenciler cebir öğrenmelidir" olarak belirtilmiştir (NCTM, 2000: 33).

Birçok yetişkin için cebirin yalnızca semboller ile çalışmak şeklinde görüldüğü buna karşın cebirin bundan daha farklı anlamları olduğu, öğrencilerin sembolleri kendi düşüncelerini kaydedebilmek için kullanma durumları ve cebiri içselleştirmeleri gerektiği ifade edilmiştir. Cebir konusunda öğrencilerden beklenenler "örüntüleri, ilişkileri ve fonksiyonları anlama; cebir sembolleri kullanarak matematiksel durumları ve yapıları gösterme ve analiz etme; niceliksel ilişkileri göstermek ve anlamak için matematiksel modeller kullanma; çeşitli bağlamlardaki değişimleri analiz etme" şeklinde aktarılmıştır (NCTM, 2000: 35).

NCTM (2006), bazı temel alanlara odaklanılan bir öğretimin, temel kavram ve becerileri kazandırmanın yanı sıra, öğrencilerde derinlemesine anlama, matematiksel akıcılık ve genelleme yeteneğini kolaylaştırdığını belirtmiştir.

Amerika Birleşik Devletleri (ABD)'deki yeni eğitim reformunda önemli olan CCSSM, matematik öğretiminde, matematiksel uygulamalar ile geliştiği genellemenin bu matematiksel uygulamalardan biri olduğu ifade edilmiştir (NCTM, 2006).

Söz konusu bu uygulamalarda "yinelenen muhakemede düzeni aramak ve ifade etmek" "Matematikte uzman öğrenciler eğer işlemler tekrar ediyorsa bunun farkına varır ve hem genel bir metot ve hem de kısa yollar ararlar. Problem çözüm sürecinde ayrıntılarla ilgilenirken, aynı zamanda sürecin gözetimini sürdürürler. Onlar aralardaki sonuçların kabul edilebilirliğini sürekli olarak değerlendirirler" olarak belirtilmiştir.

Türkiye'de 2006 ile 2013 yıllarında yenilendiği görülen "İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı"nda matematiksel kavramların anlaşılması, kavramlar arasında ilişkinin kurulması, bu kavram ve ilişkilerin günlük yaşamda ve farklı disiplinlerde kullanılması ve farklı temsiller ile ifade edebilen öğrencilerin yetiştirilmesi matematik eğitiminin genel amaçları arasında sayılmıştır (MEB, 2006; MEB, 2013).

Ortaöğretim Matematik Öğretim programında yeni yaklaşımların yeri belirtilerek; kavramsal öğrenmeye dayalı olarak (Kemankaşlı, 2010: 17);

Problem Keşfetme → Hipotez Kurma → Doğrulama → Genelleme → İlişkilendirme

Şekil 2.14. Ortaöğretim Matematik Öğretim Programında Yeni Yaklaşımlar

Matematik öğretim programında öğrencilerin kendi bireysel anlamalarını sağlayacak ortamların oluşturulması, sınıf ortamında yapılandırılmış etkinliklerin, öğrencilerin analiz, sentez, değerlendirme, ilişkilendirme, sınıflandırma, genelleme ve sonuç çıkarma gibi yüksek seviyede matematiksel düşünme becerileri kazanmalarına yönelik olması gerektiği yer almaktadır (Kemankaşlı, 2010: 18).

İlköğretimde ilk üç sınıfta somut nesneler ile incelenen geometrik kavramlar, özellik ve ilişkiler, geometri terminolojisi kullandırılarak ele alınmanın önemi vurgulanmıştır. Öğrencilerin mantıklı çıkarımlar ile bazı sonuçlara ulaşmaları, böylelikle geometrik kavram, ilişki ve özellikleri geliştirip; genelleme yapabilmeleri gerekir. Genelleme yapma konusunda, belirli özelliklere göre gruplama ve sınıflama etkinliklerine yer verilmesi önemlidir (MEB, 2009: 28).

Matematik eğitiminin bu gayesi öğrencilerin ilişkilendirme becerilerinin gelişimine önem verildiğini göstermektedir. Bunun yanı sıra öğretim programında öğrencilere kazandırılması öngörülen temel becerilerden biri olarak genellemenin önemi vurgulanmakta ve öğrencilerin problem çözme becerilerini geliştirmeye yönelik çalışmalarda çözüm olarak genelleme sürecinin gerekliliğine yer verilmektedir. Aynı zamanda öğrencilere muhakeme becerilerinin kazandırılması için dikkate alınması gereken göstergelerden ikisi "mantıklı genellemelerde ve çıkarımlarda bulunma", "matematiksel bir durumu analiz ederken matematiksel örüntü ve ilişkileri açıklama ve kullanma" olarak belirtilmektedir (MEB, 2013).

Öğrencilerin örüntüdeki kuralı genellemesi ve değişken kullanarak ifade etmesi de temel cebir becerisi olarak ele alınmaktadır. Programda belirtildiği üzere öğrencilerin örüntülerdeki ilişkileri keşfetmeleri ve bu ilişkileri genellemeleri dış dünyayı algı becerilerinin gelişmesine olanak sağlayacaktır. Ayrıca örüntülerin farklı temsillerle ifade edilmesi ve özellikle sembolik olarak gösterilmesi, cebirin temel kavramlarının şekillenmesinde önemli bir yere sahip olacaktır (Ayber, 2017: 19).

Matematik Öğretmenleri Ulusal Konseyi, (National Council of Teachers of Mathematics-NCTM) (2000) ve Common Core State Standards (CCSSM) (2010) standartlarında; genellemeyi ifade etme için farklı stratejiler geliştirmeye, farklı hesaplama stratejileri oluşturmaya, ulaşılan genellemeye benzer diğer kavramlarla ilişki kurmaya, sayı özelliklerini keşfetmek için ters işlem yapmaya olanak sağlayan genelleme durumlarının cebirsel düşünme bağlamında önem teşkil ettiği vurgulanmaktadır. Türkiye'deki öğretim programında ise uluslararası programlarla paralel olarak örüntüler; işlem özelliklerinin öğretimi, öğrencilerin bu özellikleri kendince anlamlandırabilmesi, fonksiyonların öğretimi ve yinelemeli örüntülerin görsel temsili için bir araç olarak gösterilmektedir (MEB, 2013).

2.8. İlgili Araştırmalar

2.8.1. Yurt İçinde Yapılan İlgili Çalışmalar

Tanışlı ve Özdaş (2009) tarafından yapılan araştırma, ilköğretim 5. sınıf öğrencilerinin örüntüleri genelleme konusunda uyguladıkları stratejilerin belirlenmesi için yüksek, orta ve düşük başarı düzeye sahip 12 öğrenci ile yürütülmüştür. Araştırmacılar klinik görüşme ve öğrenci günlüklerini kullanmışlar ve verinin işlenmesi, verinin görsel hale getirilmesi, sonuç çıkarma ve teyit etme olarak üç tür veri analizi yapmışlardır. Araştırma neticesinde öğrencilerin sabit ve artarak değişen şekil örüntülerinin genellemelerini yaparlarken cebirsel ve görsel yaklaşımı benimsedikleri, belirgin stratejilerle karşılaştırıldığı zaman da yinelemeli stratejileri sıklıkla kullandıkları tespit etmişlerdir. Ayrıca öğrencilerin yakın genellemelerde yinelemeli, uzak genellemelerde belirgin stratejileri kullandıkları görülmüştür.

Olkun vd. (2010) yaptıkları çalışmada 3, 4 ve 5. sınıf öğrencilerinin genelleme ve modelleme sürecinin rutin olmayan sözel problemleri çözerlerken nasıl ortaya çıktığını incelenmiştir. Araştırmada farklı okullar bulunan 278 öğrenciye rutin olmayan bir problem yöneltilerek; modelleme gerektiren etkinlikler uygulanmıştır. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin bazılarının ipucu verilmeyen problemlerin çözümünde zorluk yaşadıkları, bazı öğrencilerin ise şekil ortadan kalktığı zaman sorun yaşadıkları tespit edilmiştir. Zorluk düzeyi yüksek olan problemlerde öğrencilerin başarı düzeylerinin oldukça düşük olduğu belirlenmiştir. Deneysel müdahaleyle sadece 5. sınıf öğrencilerinde gelişmeler olduğu ifade edilmiştir.

Tanışlı ve Yavuzsoy (2011), Lineer Şekil Örüntülerine İlişkin Genelleme Stratejileri: Görsel ve Sayısal İpuçlarının Etkisi konulu bir araştırma yürütmüşlerdir. Araştırmada sınıf öğretmeni adaylarının lineer şekil örüntülerini genelleme stratejileri araştırılmıştır. Araştırma toplam 16 sınıf öğretmeni adayıyla yürütülmüştür. Araştırmada, öğretmen adaylarının bazılarının lineer şekil örüntüsünü yakın/uzak bir adıma devam ettirme ve örüntü kuralını belirleme konusunda yalnızca şeklin yapısına odaklanan görsel ve şekil örüntüsünün sayı örüntüsüne dönüştürüldüğü sayısal yaklaşımı benimsedikleri görülmüştür. Bu yaklaşımlar altında toplamda 26 strateji kullandıklarını da belirtmek gerekir. Örüntüleri genellerken adayların, sayısal yaklaşım kapsamında yinelemeli, görsel yaklaşım altındaysa hem yinelemeli hem de değişkenler arası ilişkinin araştırıldığı fonksiyonel stratejileri kullandıkları görülmüştür.

Baş vd. (2011) yaptıkları çalışmada, lise matematik öğretmenlerinin, öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarıyla ilgili bilgi ve düşüncelerini ortaya çıkarmayı ve bu bilgilerin gerçekte öğrencilerin düşünme yapılarını ne derece yansıttığını belirlemeyi amaçlamışlardır. Araştırma, 49 9. sınıf öğrencisi ile 3 matematik öğretmeniyle yürütülmüştür. Çalışmada öncelikle öğrencilerin, bir genelleme etkinliğinin üzerinden cebirsel düşünme yapıları belirlenmiştir. Ardından öğretmenlerin bu düşünme yapısı üzerine bilgi ve beklentilerine bakılmıştır. Araştırma sonucunda, öğretmenlerin öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları konusundaki beklentileriyle öğrencilerin gerçek performanslarının arasında önemli farklar olduğu görülmüştür. Buna karşın çözüm kâğıtları sistemli olarak incelendiğinde, öğretmenlerin öğrencilerin düşünme yapılarını daha iyi anladıkları saptanmıştır. Öğrencilerin cebirsel düşünme yapıları ile ilgili bulgulara bakıldığında öğrencilerin farklı sorulara farklı çözüm stratejileri ile yaklaştıkları görülmektedir. Öğrencilerin genelinde, örüntüyü oluşturan şekillerin yapısal özelliklerinden ziyade, şekilden buldukları sayısal verileri kullanarak sonuca ulaşmaya çalıştıkları tespit edilmiştir. Araştırmada öğrencilerin aritmetik düşünme eğilimi sergilediklerini belirtmek gerekir.

Akkan ve Çakıroğlu (2012) yaptıkları araştırmada, 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin ikinci derece ve doğrusal örüntüler ile ilgili genelleştirme stratejilerini belirleme ve karşılaştırmalar yapmıştır. Araştırmayı, 6, 7 ve 8. sınıfta öğrenim gören 18 öğrenci ile yürütmüşlerdir. Dört sorudan oluşturulan veri toplama aracından elde edilen verilerin, daha önceden yapılan araştırmalarda kullanılan genelleştirme stratejileri incelenerek sınıflandırıldığı görülmüştür. Bu problemlerin ilk ikisi doğrusal örüntü problemi, diğer ikisi de ikinci dereceden örüntü problemi olarak belirlenmiştir. Ayrıca her problemin; takip eden ilk terimi bulma, 10. terimi bulma, 40. terimi bulma ve n. terim için bir harfli ifade yazma, olmak üzere kendi içinde dörde ayrılmıştır. Sonuçta, doğrusal ve ikinci dereceden örüntülerin hepsinde, 6,7 ve 8. sınıf öğrencilerinin öğrenim seviyesi arttıkça örüntü genelleştirme stratejilerindeki çeşitlilik ve doğru genellemeye ulaşma yeterliliklerinin arttığı görülmüştür. Öğrenciler genel olarak yinelemeli veya eklemeli stratejiyi kullanırken, fonksiyonel stratejiyi kullanan öğrencilerin sayısı oldukça azdır. Ayrıca 6. ve 7. sınıf öğrencilerinin büyük bölümünün örüntü kuralını sözel şekilde ifade ettiği, 8. sınıf öğrencilerininse cebirsel temsiller kullandıkları görülmüştür.

Çelebi (2013), matematik problemlerinin çözümünde genellemeler yapmanın ve genellemelerin sınırlılıklarını irdelemenin problem çözme becerisi üzerindeki etkisini incelediği araştırmada, açık uçlu sorulardan oluşturulan ön ve son testler kullanmıştır. Araştırma sonucunda deney grubunda bulunan 6., 7. ve 8. sınıf öğrencilerin aşamalı matematik problemlerini çözerken genellemeler yapması ve yaptıkları genellemelerin sınırlılıklarının farkında olmasının problem çözme başarısını arttırdığı saptanmıştır. Deney gruplarında kullanılan bu yöntemin kontrol gruplarında kullanılan geleneksel problem çözme yönteminden daha etkili olduğu anlaşılmıştır.

Haldar (2014), 4. sınıf öğrencilerinde aritmetik genellemeleri nasıl bulduklarını incelemek için bir çalışma yapmıştır. Çalışmada genellemenin üç türüne odaklanılmıştır;

1. Değişimin yönü (pozitif sayılar ile çıkarma işlemlerinde sayısal değerler azalırken toplama işleminde artmaktadır),
2. Özdeşlikler (herhangi bir sayı 0 ile toplandığı ya da herhangi bir sayıdan 0 çıkarıldığı zaman sayısal değer değişmez),
3. İşlemler arasındaki ilişki (çıkarma ve toplama birbirlerinin ters işlemidir).

Araştırma verilerinin iki ayrı grup ile klinik görüşmeler yapılarak toplandığı belirtilmiştir. İlk grupla yapılan çalışmada öğrencilerin çıkarma ve toplama etkinliklerinde toplamsal düşünmelere odaklanılırken, ikinci gruptaki çalışmada öğrencilerin çarpma ve bölme etkinliklerinde sergiledikleri çarpımsal düşünmelerine odaklanılmıştır. Bu kapsamda öğrencilerin kullandıkları stratejiler dört düzeye ayrılmaktadır. Düzey 1 ve 2'de bulunan öğrencilerin yerine koyma yöntemi ve belirli örnekleri kullandıkları görülürken, düzey 3 ve 4'te bulunan öğrencilerse herhangi bir örneğe bağlı kalmaksızın aritmetik işlemler ile ilgili genelleme yaptıkları görülmüştür. Her iki çalışmada işlemlerin arasındaki ilişkinin bulunma etkinlikleri düşük seviye genelleme becerisi, özdeşlik etkinliklerininse daha ileri seviye genelleme becerisi gerektirdiği saptanmıştır. Benzer olarak öğrencilerin toplamsal alanlarda çarpımsal alandan daha ileri seviyede genelleme ürettikleri tespit edilmiştir. Çarpımsal etkinliklerin öğrencilere daha zor gelmesinin karşısında, öğrencilerin düşünme biçimleri ve etkinliklerin zorluk dereceleri her iki alanda da aynı görünmektedir.

Özdemir vd. (2015), 7. sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme süreçleri incelemek için dokuz öğrenciyle bir çalışma yapmışlardır. 10 sorudan oluşturulan örüntü testi ile beş mülakat sorusu kullanmışlardır. Araştırmada orta ve yüksek başarı seviyelerine sahip olan öğrencilerin belirgin ve yinelemeli stratejiler kullanarak örüntü kuralını buldukları; düşük derecede başarılı olan öğrencilerin ise örüntü kuralını bulmakta zorlandıkları görülmüştür. Öğrenciler, örüntü kuralını bulurlarken görsel stratejileri kullanmadıkları, yinelemeli ilişkilere odaklandıkları ve çözüme bu şekilde ulaştıkları saptanmıştır. Öğrencilerin en fazla kullandıkları stratejiler, tahmin-kontrol ile bütüne genişletme stratejileri olmuştur. Öğrencilerin; tekrarlı örüntü sorularında orta ve yakın uzaklıktaki kavramları kullandıkları ve örüntünün kuralını buldukları görülürken; artarak genişleyen örüntü soruları için aynı başarıya ulaşamadıkları görülmüştür. Bu sonuçlardan hareketle, öğrenciler, artarak genişleyen örüntü problemlerinde zorluk yaşadıkları saptanmış, bu zorlukları aşabilmek için de öğrencilerin doğru stratejiyi kullanmalarının gerekli olduğu vurgulanmıştır.

Çayır ve Akyüz (2015) yaptıkları araştırmada, 9. sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme problemlerini çözerlerken kullanmış oldukları genelleme stratejilerini tespit etmeyi amaçlamışlardır. Araştırmada farklı okullardan 425 9. sınıf öğrencisi seçilmiş ve lineer şekil örüntülerini genelleme konusunda iki açık uçlu problem sorulmuştur. Bu problemler, standart olmayan problemlerden seçilmiştir. Öğrencilerden örüntünün temelinde bulunan fonksiyonel ilişkiyi açıklamaları için semboller kullanmaları istenmiştir. Sonuç olarak öğrencilerin farklı düşünme yapıları ile çözüm stratejileri, örüntü problemlerinin yardımıyla belirlenmiştir. En fazla kullanılan stratejiler ise; belirgin, yinelemeli ve orantı stratejileri olmuştur. Öğrencilerin yakın terimleri bulma konusunda örüntüyü sürdürebildikleri dolayısıyla uzak terimleri bulmaya göre daha başarılı oldukları saptanmıştır. Bunun yanında öğrencilerden bazıları, örüntü kurallarını sembol kullanmadan sözel olarak ifade etmişler ve öğrencilerin örüntüyü tanıma konusunda zorlanmadıkları, ancak örüntü kuralını cebirsel gösterimler ile ifade edemedikleri görülmüştür.

Tuncay (2015), akademisyen, matematik öğretmeni ve öğretmen adaylarının matematiksel düşünme becerilerinin incelendiği çalışmasında, nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışmasını kullanmıştır. Belirlenen katılımcılara, pilot çalışmalar sonucunda belirlenen sorular ve edinilen tecrübeler kapsamında her bir katılımcıyla görüşmeler tek tek gerçekleştirilmiştir. Araştırma sonucunda genelleme yaparlarken kullanılan stratejilerin örnekler oluşturma, varsayımlarını test etmek için örnekler verme, örnekleri sistemli bir şekilde organize etme, örnekler arası ilişkileri belirleme ve genellemeye ulaşma olduğu saptanmıştır.

Sucuoğlu (2015), ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının değişen örüntülere ilişkin genelleme stratejilerini araştırmıştır. Çalışmada, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının değişen örüntülere ilişkin genelleme stratejilerini betimlemeye çalışan bir tarama araştırması yapılmıştır. Araştırmanın verileri, açık uçlu örüntü sorularından oluşan test ve klinik görüşme tekniği ile toplanmıştır. Sabit değişen şekil örüntülerini genelleme sürecinde öğretmen adayları, görsel ve sayısal olmak üzere temelde iki yaklaşım benimsemişlerdir. Ardışık üç terimi verilmiş sabit değişen şekil örüntüsünün yakın ve uzak adımını bulma sürecinde öğretmen adaylarının büyük kısmı sayısal yaklaşımı benimsemiştir.

Ayber (2017), "Cebirsel Düşünmenin Genelleme Aracılığıyla Geliştirilmesi Perspektifinde Ortaokul Matematik Ders Kitaplarının İncelenmesi" başlıklı araştırmasında, ders kitaplarındaki genelleme durumları içeren görevler cebirsel düşünme bağlamında incelendiğinden dolayı nitel araştırma yöntemlerinden doküman incelemesi yaklaşımını kullanmıştır. Genellemeleri ifade etme süreci (Bakış Açısı A) işlem özelliklerini gerek rakamlar yardımıyla, gerekse sözel olarak (gelenek sembol sistemleriyle) ifade etmeyi gerektiren görevleri de içermektedir. Bu tür görevler aynı zamanda aritmetiksel problemlerin çözüm sürecinde kullanışlı stratejiler olarak benimsenen işlem özelliklerini içermesinden dolayı Aşama 1'in alt bileşeni olarak kabul edilmektedir. Ders kitaplarında bu düzeye ait genellemelerin yer yer sembolik (geleneksel semboller kullanılarak), yer yer görsel (şekil, resim ya da grafik) temsillerle ifade edildiği, çember yayınlarında sembolik temsillerden görsel temsillere geçişe daire yayınlarına kıyasla daha sık yer verildiği görülmektedir.

Oflaz (2017), Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Genelleme Süreçlerine İlişkin Düşünme Ve Anlama Yollarının Belirlenmesi: DNR Tabanlı Bir Öğretim Deneyi yapmıştır. 8. sınıf öğrencilerinin genelleme süreçlerine ilişkin düşünme ve anlama yollarının ve öğrencilerin DNR tabanlı öğretime ilişkin görüşlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Çalışmanın katılımcıları, araştırmacı tarafından hazırlanan işlemsel ve kavramsal cebir testlerinden iyi ve orta düzeyde not alan öğrenciler tarafından seçilmiştir. Veriler sürekli analiz ve geriye dönük analiz tekniği ile çözümlenmiştir. Araştırmanın sonuçlarına göre öğrencilerin genelleme yaparken ortaya koydukları düşünme yolları, genelleme taksonomisinde açıklanan ilişkilendirme, araştırma ve genişletme kategoriyle benzerlik göstermektedir. Taksonomide bulunmayan ancak bu çalışmada öğrenciler tarafından otorite ile ilişkilendirme ve aynı parça araştırma eylemlerinin de gerçekleştirildiği gözlemlenmiştir. Bu sebepten bu iki kategorinin taksonomiye eklenmesi önerilmektedir. Öğrencilerin ortaya koydukları anlama yolları ise taksonomide bulunan yansıma genellemeleri ile benzerlik göstermektedir.

2.8.2. Yurt Dışında Yapılan İlgili Çalışmalar

Hargreaves vd. (1998) yaptıkları çalışmada öğrencilerin artarak değişen sayı örüntülerini devam ettirme ve genellemelerde, sabit farkla değişen örüntülere nazaran daha fazla zorlandıklarını saptamışlardır.

Zaskis ve Liljedahl (2002) öğretmen adaylarıyla yürüttükleri çalışmada sayı örüntüleri genelleme yapma yollarını incelenmişlerdir. Araştırmada bir grup ilköğretim öğretmen adayının tekrarlanan görsel sayı örüntüsünü genelleme süreçleriyle, görsel modelleri bu süreç içinde nasıl kullandıklarını incelenmişlerdir. Çalışmada katılımcıların şekil örüntüleri genelleme süreci içinde ortak özelliklerini nasıl belirlediklerinin ortaya koyulması, belirlemiş oldukları ortak yönün genelleme sürecine ne kadar yardımcı olduğunun belirlenmesi ve nasıl genelleme yaptıklarının tespit edilmesi amaçlanmaktadır. Buna göre öğrencilerin sözlü genellemeyi ifade yeteneklerinin cebirsel gösterime eşlik etmediği ve bağlı olmadığı saptanmıştır. Bununla beraber katılımcıların çoğu tam ve doğru çözümlerinde yetersiz olarak cebirsel semboller kullanmışlardır.

Lin ve Yang (2004) yaptıkları araştırmada, ilköğretim öğrencilerinin, sabit ve artarak değişen şekil örüntüleri konusunda düşünme süreçlerinin belirlenmesi amaçlanmıştır. Araştırma 1181 ilköğretim 7. sınıf, 1105 ilköğretim 8. sınıf öğrenciyle yürütülmüştür. Veriler, sabit ve artarak değişen şekil örüntülerinden oluşan bir ölçme aracı hazırlanmıştır. Verilerin analizinde, altı maddeden oluşturulan kodlama anahtarı kullanılmıştır. Araştırmanın sonunda, 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin artarak değişen şekil örüntülerini, sabit değişen şekil örüntülerine göre daha iyi genelledikleri saptanmıştır. Sabit değişen şekil örüntüsünü, 7. sınıf öğrencilerinin % 35,4'ü, 8. sınıf öğrencilerinin % 52,7'si doğru cevap verilmiştir. Yanlış yanıtlarda, orantısal akıl yürütme stratejisi kullanılmıştır. Artarak değişen şekil örüntüsünü, 7. sınıf öğrencilerinin % 36,3'ü, 8. sınıf öğrencilerinin % 64,3'ü doğru cevaplamıştır.

Lannin vd. (2006) bazı örüntü etkinliklerinin öğrencilerinin yinelemeli stratejilere, bazılarının da değişkenler arasında fonksiyonel ilişki bulma stratejilerine teşvik ettiği; örüntülerde ardışık olan veya olmayan terimlerle çekici sayıların girdi değerleri olarak seçilmesinin strateji tercihini etkilediğini tespit eden bir çalışma yapmışlardır. Elia ve Spyrou (2006) da çalışmalarında öğrencilerin, fonksiyonun cebirsel olarak ifade edilmesinde yüksek başarı gösterdiklerini; ancak bunu grafik olarak ifade etmekte zorlandıklarını ifade etmişlerdir.

Ellis (2007) yaptığı araştırmada öğrencilerin matematiksel muhakeme süreçlerinde kullandıkları genelleme türleri üzerine çalışmıştır. Yedi 7. sınıf öğrencisine üç hafta süre ile öğretim uygulamış ve ardından bu öğrenciler ile klinik görüşmeler yapmıştır. Araştırmada, ilişki kurma (iki veya daha çok problemin arasında ilişki kurmak), araştırma (tekrar eden ve benzerlikleri araştırmak) ve genişletme (örüntü ya da ilişkiyi daha genel bir duruma genişletmek) olarak üç temel genelleme türü belirlenmiştir. Bu araştırmacıda genellemeyi yansıtma; duruma, tanımaya ve stratejiye göre şekillendiği görülmüştür.

Amit ve Neria (2008), yaptıkları çalışmada lineer ve lineer olmayan örüntü problem çözümlerinde yetenekli ön cebir öğrencilerinin kullandıkları genelleme yöntemlerinin üzerinde durulmuştur. Araştırmada üç problem verilmiş ve çözümünün nitel analizi, genelleme için, yinelemeli, yerel ve fonksiyonel, genel olarak iki yaklaşım ortaya konmuştur. Araştırmanın katılımcıları 139 öğrenci, 11-13 yaş arası matematik kulübünün üyelerinden seçilmiştir. Bu öğrencilerin kendi sınıflarının en başarılı öğrencileri olduğu görülmektedir. Araştırmada kullanılan problemler; resimsel bir lineer genelleme problemi, resimsel bir lineer olmayan genelleme problemi ve sözel olarak sunulan bir lineer olmayan günlük yaşam genelleme problemi olmak üzere üç adettir. Seçilen problemler rutin olmayan, öğrencileri hazır bir çözüm stratejisinden yoksunken bir strateji geliştirmeye zorlayan görevlerdir. Araştırmada öğrenciler sözel, resimsel ve sayısal temsillerin arasında sorunsuz geçiş ve daha etkin çarpımsal stratejiler lehine toplamsal çözüm yaklaşımlarını terk edip; zihinsel esneklik sergilemişlerdir. Bu çalışmada, yetenekli öğrencilerin genellemeyi çağrıştıran örüntü görevleriyle karşı karşıya kaldıkları zaman yüksek matematiksel yetenekler sergiledikleri görülmüştür. Öğrenciler karmaşık örüntüleri genelleme ve yerel genellemeler için yinelemeli yöntem ve genel genellemeler için fonksiyonel yöntem bulmada yetkin görünmüştür.

Taylor (2008) matematiksel anlamda üstün yetenekli öğrencilerin dört açık uçlu soru üzerinde sergiledikleri matematiksel düşünme ile matematik yapma yollarını değerlendirmiştir. Çalışmaya 8. sınıfta öğrenim gören 15 üstün yetenekli öğrenci dahil edilmiştir. Çalışma neticesinde, öğrenciler arasındaki sosyal etkileşimin öğrencilerin matematiksel kavram ve ilişkileri anlamalarına, daha karmaşık anlamlar inşa etmelerine ve matematik yoluyla konuşmalarına olanak sağladığını vurgulamıştır.

Yapılan çalışmalara bakıldığında lineer ve lineer olmayan örüntülerde genelleme yapmanın, genelleme stratejilerinin ve genellemede düşünme yolları çoğunlukta incelendiği görülmektedir. Yapılan çalışmalardaki genelleme stratejileri ve genellemenin düşünme yolları incelenmiş olup yapılan çalışmada oldukça katkısı olmuştur. Yurt içi ve yurt dışı çalışmalar detaylı incelendiğinde genellikle 6,7 ve 8. sınıfta çalışıldığı ya da sadece 12, sadece 9.sınıfların incelendiği görülmektedir. Bu çalışma, diğer çalışmalardan farklı olarak 9, 10 ve 11.sınıfların genelleme becerileri incelenmiştir. Bunun yanında her sınıf düzeyindeki katılımcıların akademik seviyelerine göre genelleme süreçleri incelenmiştir. Yapılan çoğu çalışmada strateji ya da genelleme süreçleri incelenirken bu çalışma aynı zamanda genellemede farklı görsellerin genelleme sürecini nasıl etkilediğini araştırmıştır.

BÖLÜM III

YÖNTEM

Bu bölümde araştırmanın deseni, katılımcılar, veri toplama araçları, verilerin toplanması ve verilerin analizi açıklanmıştır.

3.1. Araştırmanın Deseni

9., 10. ve 11. sınıf öğrencilerin genelleme becerilerinin incelendiği bu çalışmada nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir. Nitel araştırmalarda örneklemenin amacı, bir olguyu netleştirebilecek ve derinleştirebilecek olan belirli olgu ya da olayı elde etmektir. Bütün detaylar incelenerek konunun süreçleri hakkında bilgi toplamaya elverişli örneği bulmaya odaklanmaktadır. Dolayısıyla temsil gücünden çok, örneğin araştırma konusu ile olan ilgisi dikkate alınmaktadır (İslamoğlu ve Alnıaçık, 2016: 220).

Araştırmanın deseni olarak nitel araştırma desenlerinden özel durum çalışması kullanılmıştır. Kapsamlı veri elde etmek, her bir veriyi daha detaylı incelemek ve analiz etmek için bu araştırma deseni benimsenmiştir. Stake (1988)'e göre, durum çalışması yöntemsel bir seçenek değil, ne çalışılacağını belirleme seçeneğidir. Durum çalışmasında genelleştirme yerine durumdan en mükemmel şekilde ne anlaşıldığının çalışılmasının tasarısı üzerinde vurgu yapılmaktadır (Denzin ve Lincoln, 1985: 435 Akt. Aytaçlı, 2012: 3).

Durum çalışmasında izlenen süreç; araştırma sorularının belirlenmesi ve geliştirilmesi, araştırmanın alt problemlerinin geliştirilmesi, analiz birimin saptanması, çalışılacak durumun belirlenmesi, araştırmaya katılacak bireylerin seçilmesi, verilerin toplanması ve toplanan verinin önermelerle veya alt problemlerle ilişkilendirilmesi, verilerin analiz edilmesi ve yorumlanması ve durum çalışmasının raporlaştırılması şeklindedir (Yıldırım ve Şimşek, 2000).

Araştırmanın ilk sürecinde literatür taraması gerçekleştirilmiştir. Literatür taraması sonrasında çalışmada veri toplamak amacı ile kullanılacak bir soru havuzu oluşturulmuştur. Daha sonra bu soru havuzundan pilot çalışması için uygulama sorularının seçilmesi uzman görüşleri doğrultusunda gerçekleştirilmiştir. Seçilen bu soruların istenilen beceriyi ölçüp ölçmediğini belirlemek için bir pilot çalışma yapılmıştır. Pilot çalışması ile araştırmacının tecrübe kazanması sağlanmıştır. Pilot çalışmalar sonucunda son halini alan sorular biraz daha geliştirilerek iki aşamada uygulama yapılmıştır. İkinci aşamada mülakat ve ses kaydı alınmıştır. En son süreçte ise elde edilen veriler, veri analizi yapılarak, bulgular ve yorumlar oluşturulmuştur.

3.1.1. Pilot Çalışma

Pilot çalışma, hem araştırmacının deneyim kazanması, hem soruların ölçmek istediği beceriyi ölçmesi asıl çalışmanın bulgularını yorumlamadan önce ön hazırlık niteliği taşıdığından önemlidir. Bu çalışmada kullanılan soruların seçimi pilot çalışma yardımıyla gerçekleşmiştir. Pilot çalışmadaki amaç yapılan araştırmadaki katılımcıların dışında farklı katılımcıların genelleme sürecindeki öğrencilerin düşünme süreçlerini ve genelleme stratejilerini incelemektir. Bu doğrultuda katılımcılara yönelttiğimiz problemlerde anlamakta ya da cevaplandırmakta zorlandığı yerleri tespit ederek düzeltmek ve daha anlaşılır, doğru cevaplanabilirliği yüksek soruları belirlemektir. Bunun için öncelikle veri toplama aracındaki sorular belirlemek için bir soru havuzu oluşturulmuştur. Soru havuzu oluşturma aşamasından sonra uzman görüşü alınmıştır. Daha sonra veri toplama aracından seçilen problemleri test etmek için 30.05.2014 tarihinde, Sivas ili merkezinde bulunan bir Anadolu Lisesi ve bir Meslek lisesinde 9.sınıfta öğrenimlerine devam eden. Anadolu lisesinden 19 kişi, meslek lisesinden de 43 kişi olmak üzere toplamda 62 kişiye çalışma uygulanmıştır. Çalışmada öğrencilere 5 soru sorulmuştur. Bunlardan birincisi dört şıklı, ikincisi dört şıklı, üçüncüsü üç şıklı, dördüncüsü iki şıklı olup toplamda 14 tane soru yöneltilmiştir. Çalışma bir ders saatinde tamamlanmıştır. Uygulama aşamasında araştırmacının gözlemleri doğrultusunda ve araştırma sonunda toplanan cevap kâğıtlarının incelenmesi sonucu en çok cevaplandırılan ve beklenilen düşünme sürecinin gerçekleştiği düşünülen sorular belirlenerek veri toplama aracındaki soruların seçimi gerçekleşmiştir. Bu uygulama sonucunda elde edilen bulgular (Peker ve Demircioğlu, 2014) doğrultusunda çalışmaya geçilmiştir.

3.2. Katılımcılar

Çalışma grubunun belirlenmesinde öğretmen olan araştırmacının görev yaptığı okul olması nedeni ile kolay ulaşılabilir örnekleme yöntemi kullanılmıştır. Yıldırım ve Şimşek (2008)'e göre kolay ulaşılabilir durum örneklemesi yöntemi, araştırmacı açısından sürecin daha çabuk ve daha rahat uygulanabilir hale getirilmesi sürecidir. Bu bağlamda, araştırmacı kendisine rahat ulaşabileceği bir yaklaşım üzerinde çalışmalarını sürdürmektedir (Akt.: Demirbaş ve Pektaş, 2009).

Çalışma iki aşamada gerçekleştirilmiştir. 1.aşamaya 2019-2020 eğitim öğretim yılında Antalya ilinde özel bir fen lisesinde öğrenim gören 9. Sınıflardan 63, 10. Sınıflardan 56, 11.sınıflardan 61 öğrenci katılmıştır. Bu sınıfların seçilme durumları ise lise giriş sınavlarının farklı olmasıdır. Yani 11.sınıflar TEOG (Temel Eğitimden Ortaöğretime Geçiş Sistemi) ile 10.sınıflar yarı dönem TEOG, yarı dönem ise LGS (Liselere Geçiş Sistemi) ile 9.sınıflar ise LGS sınav sistemi ile liseye geçiş yapmıştır. Bu durumda 11.sınıflar, 2016-2017 eğitim öğretim yılında 8. sınıfta öğrenimlerini tamamlayarak TEOG sınavına hazırlanmış olup daha kavramsal düzeyde öğrenimlerini tamamlamışlardır. Bu çocuklar bu sınava hazırlanırken bilgi, kavrama ve uygulama basamaklarını daha çok kullanmıştır. 10.sınıflar 2017-2018 eğitim öğretim yılında 8.sınıfta öğrenimlerini tamamlayarak yarı dönem TEOG sınav odaklı, yarı dönem LGS sınav odaklı bir yılı geride bırakmış ve bu süreçte hem kavramsal hem de beceri odaklı çalışmalar yaparak öğrenimlerini tamamlamışlardır. 9.sınıflar ise 2018-2019 eğitim öğretim yılında 8.sınıfta öğrenimlerini tamamlayarak tamamen LGS sınav odaklı çalışmış olup çoğunlukla beceri odaklı çalışmalar yapmışlardır. Farklı sistemle liseye gelen öğrencilerin genelleme becerilerinin ölçülmesinin yanında faklı akademik başarının da ölçülmesi açısından 9,10 ve 11.sınıfların her birinden farklı seviyelerde sınıflar seçilmiştir. Okul tarafından oluşturulan bu seviye sınıfları 6 şubeden (A-F) oluşmaktadır. Bu çalışmada ise A, B ve C şubelerinden öğrenciler ile uygulama yapılmıştır. Bu şubeler seviye grubu olup A en iyi, B orta C de ortanın altı olarak sınıflandırılmıştır. 2.aşama ise 1 öğrenci ile gerçekleştirilmiştir. Bu öğrencinin seçiminde 1.aşamaya katılmış ve 5 soru içerisinde en az 4 doğru yapan öğrencilerden biri olması ve gönüllü olması ölçüt olarak alınmıştır. Bu öğrenci 9.sınıfların A şubesinde öğrenim görmektedir. Çalışmanın Katılımcıları Tablo 3.1'de özetlenmiştir.

Tablo 3.1. Çalışmanın katılımcıları

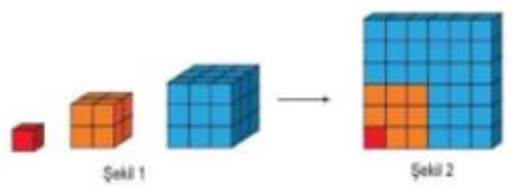
	SINIF	KATILIMCI SAYISI
1.AŞAMA	9	63
	10	56
	11	61
2.AŞAMA	9	1

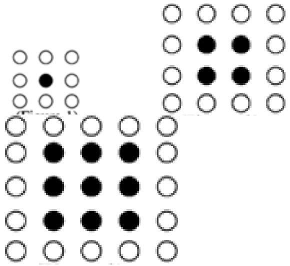
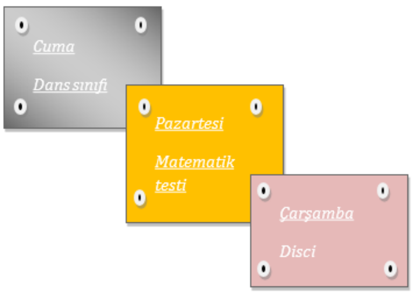
Tablo 3.1'de görüldüğü gibi 9, 10 ve 11 sınıflardan katılan öğrenci sayıları arasında fazla bir fark yoktur.

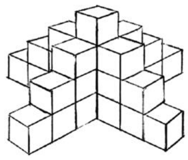
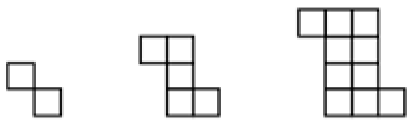
3.3. Veri Toplama Araçları

Çalışma iki aşamada gerçekleştirildiğinden her bir aşamada farklı ama paralel iki veri toplama aracı kullanılmıştır. Her iki veri toplama aracıda 5 tane sorudan oluşmaktadır. Tablo 3.2' de birinci aşamada kullanılan veri toplama aracı, Tablo 3.3'te ikinci aşamada kullanılan veri toplama aracında yer alan sorular ile birlikte sorulma amacı ve hangi kaynaktan alındığı verilmiştir.

Tablo 3.2. Aşama 1'de kullanılan veri toplama aracı

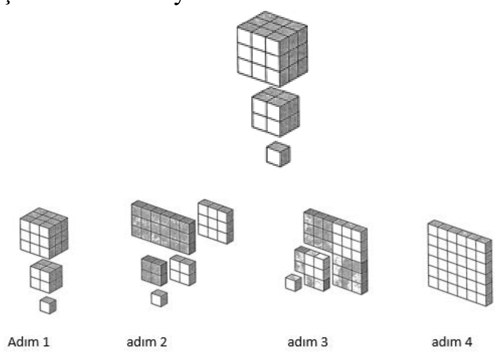
Sorular	**Sorunun Amacı**	**Alındığı Kaynak**
Küp parçalama1 Sorusu Şekil 1 de verilen küpler parçalarına ayrıldıktan sonra birleştirildiğinde şekil 2 elde edilmektedir.  **a)** Daha sonra şekil 1 de verilen küpler ile birlikte aşağıda verilen yeşil küp parçalara ayrılıp şekil 2 elde edilmeye çalışılıyor.  Bu durumda elde edilen şekildeki küplerin sayısı nedir? **b)** Bu şekilde kenar uzunluğu 10 br küp eklenene kadar devam edilirse bu durumda elde edilen yeni şekilde küp sayısı nasıl ifade edilebilir? **c)** Şekil 1 deki küpler ile birlikte n br küp eklenip şekil 2'deki gibi tekrar birleştirilirse	İlk aşamada verilen şekilden yola çıkarak $\mathbf{1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2}$ özel bir durumda kuralı bulması beklenmektedir. Bir sonraki aşamada bu kuraldan yola çıkarak $\mathbf{1^3+2^3+3^3+4^3}$ için kuralı keşfetmesi beklenmektedir. Daha sonra uzak bir durum 10 için kuralı genişletmesi istenmektedir. En son aşamasında ise herhangi bir duruma (n için) kuralı genellemesi beklenmektedir.	**Ak (2019)**

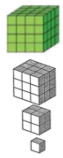
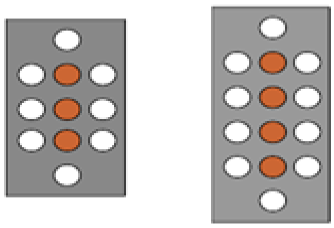
yeni elde edilen şekildeki küplerin sayısı nasıl ifade edilebilir?		
Siyah-Beyaz Nokta Sorusu Aşağıdaki şekilleri inceleyiniz.  Şekil 1 şekil 2 şekil 3 **a)** Şekil 4' e ne gelebileceğini çiziniz. **b)** Şekil 6' da kaç tane siyah nokta vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **c)** Şekil 6 'da kaç tane beyaz nokta vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız **d)** Şekil 1' de 8 tane beyaz nokta vardır. Şekil 3 'te 16 tane beyaz nokta vardır. Eğer bir şekilde 44 tane beyaz nokta var ise bu şekli nasıldır? Çiziniz. Bu kaç numaralı şekil olacaktır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.	İlk aşamada verilen şekilden yola çıkarak bir sonraki şekli bulması beklenmektedir. Daha sonra şekli yorumlayarak şekil 6'da kaç tane siyah ve beyaz noktanın olduğunu kendi düşünme sürecinden yola çıkarak bir kural bulması daha sonra bu kuraldan yola çıkarak uzak bir durum 44 için kuralı keşfetmesi ve genişletmesi beklenmektedir.	Cai ve Hwang (2002)
İğne ve Kartlar (Pins and Cards) Sorusu Ersin randevularını hatırlamak için odasındaki tahtasına notlar asmıştır. Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi notları tutturmak için iğneler kullanılmıştır.  Eğer bu şekilde notlar asılmaya devam edilirse; Eğer bu şekilde notlar asılmaya devam edilirse; **a)** 6 notu asmak için kaç tane iğneye ihtiyaç vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **b)** Eğer 35 not asılmışsa kaç tane iğne kullanılmıştır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **c)** Ersin üçgen şeklindeki notlar asmaya karar vermiştir ve üçgenin her bir köşesine bir iğne tutturacaktır. Üst üste gelen üçgenlerde ortak bir iğne bulunacaktır. Bu doğrultuda yukarıdaki soruları tekrar cevaplandırınız.	İlk aşamada verilen görseli inceleyerek yakın durum olan 6 not için kaç iğneye ihtiyaç olduğunu keşfetmesi beklenmektedir. Daha sonra uzak durumları genişletmesi için öğrencinin pragmatik düşünce ile hem görsel hem de sayısal stratejilerden yararlanarak bir kural keşfetmesi amaçlanmaktadır. Diğer taraftan c seçeneğinde ise genelleme becerisini farklı bir duruma taşıması hedeflenmektedir. Yani 4 kenarlı bir çokgenden 3 kenarlı bir çokgeni düşünerek n=6 yakın durum ve n=35 uzak durumları genişletmesi beklenmektedir.	Barbosa, Vale ve Palhares (2008) Barbosa, (2011)
Kule Yapımı Sorusu	İlk aşamada şekilde kaç tane küp olduğu bulunması istenmektedir. Bunu yaparken şekli devam	Nilsson & Juter (2011)

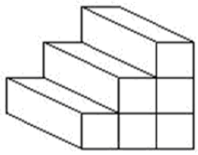
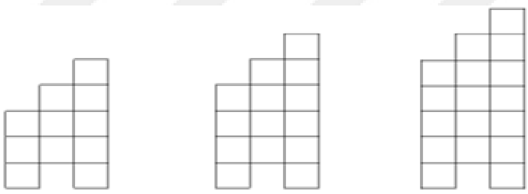
 **a)** Şekildeki kuleyi yapmak için kaç tane küpe ihtiyaç duyulmuştur? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **b)** 12 küp yüksekliğinde bir kule yapmak için toplam kaç küpe ihtiyaç vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **c)** n küp yükseklikte bir kule yapmak için kaç tane küpe ihtiyaç vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.	ettirmesinden çok bu küplerin artışındaki bir kuralı görmesidir. Ve uzak durum olan n=12 yüksekliğine genişletmesidir. Bir sonraki aşamasında ise herhangi bir durum (n için) kuralı genellemesi beklenmektedir.	
Şekil ve Sayı Örüntüsü Sorusu **a)** 4,5,7,11,19,___,67,131,259 boş bırakılan kısma gelecek elemanı yazınız nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **b)**  Şeklin devamını getiriniz. Ve nasıl yaptığınızı açıklayınız.	a şıkkında görselden faklı olarak sayısal düşünmesi bu süreçte ise yinelemeli düşünme sürecinden çok belirgin düşünmesi hedeflenmiştir. Sayıların arasında fonksiyonel bir ilişki yakalayıp genişletmesi beklenmektedir. b şıkkında ise sayısal düşünmesinden çok görsel olarak yaklaşması, şekiller arasında ilişki kurması ve yakın bir adıma genişletmesi hedeflenmektedir.	a şıkkı araştırmacı tarafından yazılmıştır. b şıkkı Barbosa vd., (2007) den uyarlanmıştır

Tablo 3.2'de görüldüğü gibi her soruda öncelikle özel durumda ilişkiyi görmesi daha sonra uzak bir özel durumda ilişkiyi yordaması ve sonunda herhangi bir durum için genelleme yapması beklenmektedir.

Tablo 3.3. Aşama 2'de kullanılan veri toplama aracı

Sorular	Sorunun amacı	Alındığı Kaynak
Küp parçalama 2 Sorusu **a)** Aşağıdaki şekilde verilen her bir küp aşağıdaki gibi parçalanıp ve yeniden düzenlenerek yeni bir şekil oluşturulmak isteniyor. 	Bu soru , aşama 1 'deki 1.soru ile paralel formda hazırlanmıştır. Bu paralel formlarda yalnızca kullanılan görsel farklıdır. Bu sayede genelleştirmede verilen görselin etkisini araştırmak hedeflenmektedir. İlk aşamada verilen şekilden yola çıkarak aşama 1'deki gibi $1^3+2^3+3^3= (1+2+3)^2$ özel bir durumda	Nelsen'dan (1993, s.86) dan uyarlanmıştır.

4. adımda elde edilen şekildeki küplerin sayısını nasıl ifade edilebiliriz?  **b)** Yukarıdaki şekli, a seçeneğinde yapıldığı gibi her bir küpün parçalanıp yeniden düzenlenerek yeni bir şekil oluşturulmak isteniyor. Bu durumda elde edilen yeni şekildeki birim küp sayısını nasıl ifade edileceğini yazınız. **c)** kenar uzunluğu 1br, 2br,…10 br olan küpler aynı şekilde parçalanıp düzenlenip yeni şekil elde edildiğinde elde edilen şekildeki birim küplerin sayısını nasıl ifade edebilirsiniz. **d)** herhangi bir n durumu için elde edilen yeni şekildeki birim küplerin sayısını nasıl ifade edebilirsiniz.	kuralı bulması beklenmektedir. Daha sonra bu kuraldan yola çıkarak bir sonraki adım olan $1^3+2^3+3^3+4^3$ için kuralı keşfetmesi ve uzak durum 10 için kuralı genişletmesi beklenmektedir. Bir sonraki aşamasında ise herhangi bir duruma (n için) kuralı genellemesi beklenmektedir.	
Pizza Talya Dükkânı (Sole Mio Pizzeria)sorusu Aşağıdaki resim Pizza dükkânındaki iki masayı göstermektedir. Bunlardan ilkinde 8 kişi ve 3 pizza bulunmakta iken diğerinde 10 kişi ve 4 pizza bulunmaktadır. Bu verilen bilgilere göre  Şekil 1 Şekil 2 **a)** 10 pizzanın bulunduğu bir masada kaç kişi oturur? **b)** Masada 31 pizza olsaydı masada kaç kişi otururdu? **c)** Doğum gününü bu pizza dükkânında kutlamaya karar veren Ersin, doğum gününe 57 kişiyi davet ettiğine göre kaç tane pizza siparişi verir?	Bu soru da, aşama 1'deki 2.soru örneği ile ilişkilendirilmiştir. Şekil 1 ve şekil 2 incelenerek pizza sayıları ve kişi sayıları arasında yinelemeli ve fonksiyonel bir ilişki olduğunu görmesi ve kendi düşünme sürecinden yola çıkarak bir kural bulması beklenmektedir. Bu kuraldan yola çıkarak uzak bir durum olan 10ve 31 pizza için kuralı genişletmesi beklenmektedir.	Barbosa, (2011)
Noel Ağaç (Christmas Trees) Sorusu Aşağıda 3 adet örneğini gördüğünüz farklı boyutlarda ancak hepsi aynı tasarımda Noel Ağaçları çizilmiştir. Bu ağaçların köşelerindeki üçgenler Noel ışıklarıdır.  **a)** 20 Noel ağacı olduğunda kaç tane ışık olacaktır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **b)** 100 Noel ağaç olduğunda kaç tane ışık olacaktır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.	Veri toplama aracındaki bu soru da aşama 1'deki 3.soru ile ilişkilendirilmiştir. İlk aşamada verilen görseli inceleyerek şekil 1 de 1 ağaç ve 3 ışık olduğunu, şekil 2 de 2 ağaç ve 7 ışık olduğunu şekil 3' de de 3 ağaç ve 11 ışık olduğunu farketmesi daha sonra uzak durumları genişletmesi için öğrencinin pragmatik düşünce ile hem görsel hem de sayısal stratejilerden	**Stacey (1989)**

	yararlanarak bir kural keşfetmesi amaçlanmaktadır.	
Merdiven Yapımı Sorusu  **a)** Şekildeki 3 basamaklı merdiveni yapmak için kaç adet blok kullanılmıştır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **b)** 12 basamaklı bir merdiven yapmak için toplam kaç adet blok kullanılmalıdır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **c)** n basamaklı bir merdiven yapmak için kaç adet blok kullanılmalıdır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.	Bu soru da aşama 1'deki 4. Soru ile ilişkilendirilmiştir. İlk aşamada şekilde kaç tane blok kullanıldığı istenmektedir. Bunu yaparken şekli devam ettirmesinden çok bu merdiven için kullanılan blokların artışındaki bir kuralını görmesidir. Ve uzak durum olan 12 basamaklı merdivene genişletmesidir. Bir sonraki aşamasında ise herhangi bir duruma (n için) kuralı genellemesi beklenmektedir.	Göl (2017) .
Sayı Örüntüsü ve Şekil Örüntüsü Sorusu **a)** 4, 5, 8, 17, 44, ___, 368, 972 boş bırakılan kısma gelecek elemanı yazınız nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **b)**  Yukarıdaki şeklin devamını getiriniz ve nasıl yaptığınızı açıklayınız.	a şıkkında yine aşama 1'deki gibi görselden faklı olarak sayısal düşünmesi bu süreçte ise yinelemeli düşünme sürecinden çok belirgin düşünmesi hedeflenmiştir. Sayıların arasında fonksiyonel bir ilişki yakalayıp genişletmesi beklenmektedir. b şıkkın da ise sayısal düşünmesinden çok görsel olarak yaklaşması, şekiller arasında ilişki kurması ve yakın bir adıma genişletmesi hedeflenmektedir.	a şıkkı araştırmacı tarafından yazılmıştır. b şıkkı Chua & Hoyle (2011)

Veri toplama aracındaki bu iki paralel formda kullanılan görsel farklıdır. Her iki aşamanın 1.sorularının sadece görseli farklıdır. Bu durumda genelleştirmede verilen görselin etkisini araştırmak hedeflenniştir. Diğer sorularda ise görselle birlikte içerik de değişmiştir. Fakat her iki ilişkilendirilmiş sorunun hedefleri aynı doğrultuda olup aynı genelleme becerileri ölçülmesi hedeflenmiştir.

3.4. Verilerin Toplanması

Veriler Aşama 1 ve Aşama 2 olarak iki oturumda toplanmıştır. İki aşamada da araştırma grubuna 1 ders saati süresince çözebileceği sorular yöneltilmiş ve cevaplar yazılı formda toplanıp bilgisayar ortamına aktarılmıştır. 1.Aşama, Antalya ilinde bir özel fen lisesinde 9. sınıflara 18 Eylül 2019, 10. sınıflara 26 Eylül 2019 ve 11. sınıflara 17 Eylül 2019 tarihinde uygulanmıştır. 2.Aşama ise 6 Kasım 2019 tarihinde 9.sınıflardan 1 öğrenciye uygulanmıştır.

Tablo 3.4. Verilerin toplanma süreci

	SINIF	KATILIMCI SAYISI	TARİH
1.AŞAMA	9	63 Öğrenci	18 Eylül 2019
	10	56 Öğrenci	26 Eylül 2019
	11	61 Öğrenci	17 Eylül 2019
2.AŞAMA	9	1	6 Kasım 2019

3.5. Verilerin Analizi

Elde edilen verilerin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemlerinden içerik analizi tekniği benimsenmiştir. İçerik analizinde temel amaç, toplanan verileri açıklayabilecek kavramlara ve ilişkilere ulaşmaktır. Çalışmada yorumlanan veriler, içerik analizinde daha derin bir işleme tabi tutulur ve betimsel bir yaklaşımla fark edilemeyen kod ve temalar bu analiz sonucu keşfedilebilir. Bu amaçla toplanan verilerin önce kavramsallaştırılması, daha sonra da ortaya çıkan kavramlara göre belirli bir biçimde düzenlenmesi ve buna göre verileri açıklayan temaların tespit edilmesi gerekmektedir. Bu durumda içerik analizi yoluyla veriler tanımlanmaya, verilerin içinde saklı olabilecek gerçekler ortaya çıkarılmaya çalışılır. İçerik analizinde temelde yapılan işlem, birbirine benzeyen verileri belirli kavramlar ve temalar çerçevesinde bir araya getirmek, kategorilendirmek ve bunları okuyucunun anlayabileceği bir biçimde düzenleyerek yorumlayabilmektir (Yıldırım ve Şimşek, 2006). Bu sebeple çalışma, öğrencilerin problem çözerken genelleme becerileri göz önüne alınarak incelenmiştir. Bu analizde öğrencilerin genelleme sürecinde hangi aşamaları en çok kullandığı, hangilerinde başarılı ve hangilerinde başarısız olduğu, genelleme yapabilme becerisi olup olmadığı gibi sonuçlar elde edilmiştir. Burada sorulacak olan bazı sorulara ilişkin öğrencilerin çözüm süreçlerinden bazı örnekler gösterilmiş ve daha sonra belirli bir kategori sistemine göre her bir veri tek tek incelenerek ortak tema ve alt temalar oluşturulmuştur. Temalar için uzman görüşü alındıktan sonra her bir çözüm süreçlerinin genel bir değerlendirmesi yapılmıştır. İkinci aşama sürecinde ise aynı öğrenciye ait iki çalışma detaylı incelenmiştir. Daha sonra bu öğrencinin her iki kağıda verdiği cevaplar karşılaştırılmıştır.

Verilerin analizi kodlama örneği

Verilerin analizlerinde yapılan tablolarda ilk sütüna çalışmaya katılan öğrenciye verilen kodlar yer almaktadır. Tablo 3.5'te 1. soruya ait bir analiz tablosuna yer verilmiştir. 9a kodlaması öğrencinin 9. sınıfta A şubesinde olduğunu ifade etmektedir. Ö1,Ö2,… ise 9A sınıfındaki öğrenciye verilen numaradır.

Tablo 3.5. Yatay Olarak A-B-C Sütunları Sorunun Şıkları

KODLAR	A	B	C	KODLAR	A	B	C
9a-Ö1	✓	✓	✗	9b-Ö33	✓	✗	
9a-Ö2			✗	9b-Ö34			
9a-Ö3	✗	✗		9b-Ö35	✗	✗	✗
9a-Ö4	✓	✗	✗	9b-Ö36			
9a-Ö5	✗	✓	✗	9b-Ö37	✓	✓	✗
9a-Ö6	✓	✓		9b-Ö38			
9a-Ö7	✓	✓		9b-Ö39	✓	✓	✓
9a-Ö8	✓	✗	✓	9b-Ö40		✓	✗
9a-ö9	✓	✓		9c-Ö41			
9a-Ö10	✓	✓	✓	9c-Ö42	✓		
9a-Ö11	✓	✓		9c-Ö43	✓		
9a-Ö12	✓	✓		9c-Ö44			
9a-Ö13	✓	✓		9c-Ö45			
9a-Ö14	✓	✓	✓	9c-Ö46			
9a-Ö15				9c-Ö47	✗	✗	
9a-Ö16	✓	✓	✓	9c-Ö48			
9a-Ö17	✓			9c-Ö49			
9b-Ö18	✗	✓	✗	9c-Ö50	✗	✗	✗
9b-Ö19				9c-Ö51			
9b-Ö20				9c-Ö52			
9b-Ö21	✓			9c-Ö53	✓		✗
9b-Ö22	✓			9c-Ö54			
9b-Ö23				9c-Ö55			
9b-Ö24				9c-Ö56	✗	✗	✗
9b-Ö25				9c-Ö57			
9b-Ö26	✗	✗		9c-Ö58			
9b-Ö27	✓	✗		9c-Ö59			
9b-Ö28				9c-Ö60			
9b-Ö29	✓			9c-Ö61			
9b-Ö30				9c-Ö62			
9b-Ö31	✗	✗		9c-Ö63			
9b-Ö32	✓	✗	✗				

Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	
işlem hatası	✓

Tablo 3.5'te yatay olarak A-B-C sütunları sorunun şıklarını göstermektedir. Doğru cevaplar ✓, yanlış cevaplar ✗ ve işlem hatası olan cevaplar ✓ olarak kodlanmıştır. Burada doğru cevap o seçenekte beklenenleri ifade eden cevaplar olarak

değerlendirilmiştir. İşlem hatası olmasına rağmen genelleme becerisi sergileyen cevaplar doğru kabul edilmiş fakat belirli olması için de sarı ile renklendirilmiştir. Yanlış cevaplar ise beklenen cevaplardan uzak cevaplar olarak ele alınmıştır.

Bulgular verilirken öncelikle tüm sınıflardaki toplam doğru yanlış cevaplar bir tablo ile verilmiş daha sonra her sınıf kendi içinde öğrencilere göre ayrı ayrı ele alınmıştır. Bu sayede hem sınıflar arası kıyaslamalar yapılmış hem de öğrenciye göre şıklar arasında karşılaştırmalar yapılmıştır.

2 aşamada hazırlanan paralel iki formdaki her soru detaylı incelenerek hangi aşamaları en çok kullandığı, hangilerinde başarılı ya da başarısız olduğu gibi durumlar detaylı incelenmiştir. Burada sadece görselin değiştiği ilk soru ve içeriği değişen ama hedefi aynı olan paralel sorular için katılımcının nasıl yaklaştığı tek tek incelenmiştir.

3.6. Geçerlilik ve Güvenirlilik

Nitel araştırmalarda geçerlik, belirli süreçler aracılığı ile araştırmacının, bulguların doğruluğunu kontrol etme ve denetlemeyi ifade ederken, güvenirlik ise farklı çalışma ve projelerin araştırmacıları tarafından, çalışmayı yapan araştırmacı ile bakış biçimlerindeki tutarlılığını ifade etmektir (Gibbs,2007).

Veri toplama aracında Aşama 1 ve Aşama 2' de açık uçlu soruların geliştirilmesi ve geçerliliğinde dört aşama izlenmiştir. Birinci aşamada literatür taramasına, ikinci aşamada soru havuzunun oluşturulmasına, üçüncü aşamada yapılan pilot çalışma ile test etme, dördüncü aşamada ise uzman görüşlerinin değerlendirilmesine yer verilmiştir.

Nitel araştırmada geçerlik ve güvenirlik kavramları; inandırıcılık (iç geçerlilik), aktarılabilirlik (dış geçerlilik), tutarlık (iç güvenirlik) ve teyit edilebilirlik (dış güvenirlik) kavramları ile ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

İnandırıcılık (iç geçerlilik), araştırmacının, katılımcının duygu ve düşüncelerini, süreç içerisindeki hissettiklerini, yaptıkları etkinlikleri doğru bir şekilde açıklaması ve yansıtmasıdır (Lodici, Spaulding ve Voegtle, 2006). Bu bağlamda araştırmacı uygulama anında orada olarak süreci izlemiş, incelemiş ve uygulama sürecini, tüm gözlemlerini aktarmıştır. Uygulama sonrası veri toplama sürecini, analiz sürecini detaylıca sunmuştur. Nitel araştırmalarda, inandırıcılığı arttıran önemli unsur uzman incelemesidir (Merriam, 2012; Neuman, 2007). Bu çalışmada araştırmanın öneri aşamasından veri analizine ve rapor edilmesine kadar tüm süreçlerde bir danışman gözetiminde yürütülmüştür.

Çalışmada veri toplama araçları; birinci aşamada farklı şube ve farklı sınıflardan katılan 180 öğrencinin çalışma kâğıtları ve ikinci aşamada bir öğrenci ile birebir görüşme kaydı ve ilgili uygulama çalışma kâğıdı gibi pek çok farklı kaynaktan elde edilen verilerle takdim edilmiştir.

Tutarlılık; araştırmanın veri toplama, analiz yapma, yorumlama gibi tüm süreçlerde yapılan denetlemelerin açık bir biçimde ifade edilmesidir (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Bu araştırmada araştırmacı, araştırmanın yöntemi, aşamaları, veri toplama ve analiz yöntemleri ile bulguları yorumlama ve sonuçlara ulaşma konusunda neler yapıldığını ayrıntılı bir şekilde açıklamıştır.

Teyit edilebilirlik; araştırmada elde edilen verilerin sürekli olarak teyit edilmesi ve araştırmacının nesnel bir yaklaşımla önyargıdan uzak verileri aktarmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2005; Miles ve Huberman, 1994). Bu araştırmada da verilerin analizinde ve yorumlanmasında nesnel yaklaşılmaya çalışılmış, gözlem, görüşme ve dokümanlar yoluyla elde edilen veriler, doğrudan alıntılarla açıklanmıştır. Elde edilen bulgular teyit edilerek, sonuçlar değerlendirilmiştir.

Aktarılabilirlik; diğer araştırmacılar tarafından çalışılan araştırmanın sonuçları, araştırma alanı ve diğer alanlar arasındaki benzerlik derecesidir (Lodici, Spaulding ve Voegtle, 2006). Guba ve Lincoln (1982) aktarılabilirliğin doğrulanması için ayrıntılı betimlemenin olması gerektiğini belirtmiştir. Ayrıntılı betimleme, çalışmanın içeriği hakkında yeterli bilginin verilmesi, ham verinin yorum katmadan doğrudan alıntılarla ve verinin doğasına mümkün olduğu ölçüde sadık kalınarak okuyucuya aktarılmasıdır. Bu durumda okuyucu, ayrıntılı betimleme ile çalışmanın uygulandığı ortamı, uygulama anını zihninde canlandırabilir ve kendi ortamına ilişkin olası sonuçlar alır. Ve çalışmanın farklı bir ortamda yapılıp yapılamayacağına karar verebilir. Burada çalışmanın sonuçları ve hipotezleri sonraki çalışmalarda benzer bir duruma aktarılabilir. Araştırmanın aktarılabilirliğini arttırmak için gözlem, görüşme ve dokümanlar yoluyla elde edilen veriler, doğrudan alıntılarla ve kanıtlarla desteklenerek detaylı bir biçimde betimlenmiştir.

BÖLÜM IV

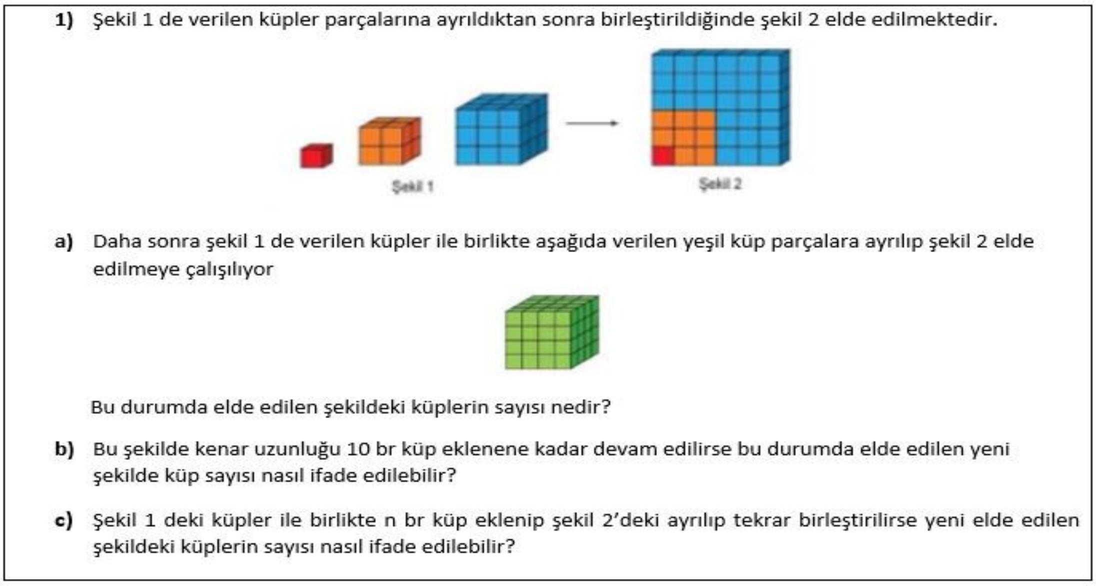
BULGULAR VE YORUM

Bu bölümünde, üçüncü bölümde belirtilen yöntem ve tekniklere dayanılarak yapılan analizler sonucunda elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

4.1. Aşama 1'den Elde Edilen Bulgular

4.1.1."Küp parçalama1" Sorusundan Elde Edilen Bulgular

Aşağıda verilen bu soru Ak 'dan (2019) alınmış ve uyarlanmıştır.



1) Şekil 1 de verilen küpler parçalarına ayrıldıktan sonra birleştirildiğinde şekil 2 elde edilmektedir.

Şekil 1 Şekil 2

a) Daha sonra şekil 1 de verilen küpler ile birlikte aşağıda verilen yeşil küp parçalara ayrılıp şekil 2 elde edilmeye çalışılıyor

Bu durumda elde edilen şekildeki küplerin sayısı nedir?

b) Bu şekilde kenar uzunluğu 10 br küp eklenene kadar devam edilirse bu durumda elde edilen yeni şekilde küp sayısı nasıl ifade edilebilir?

c) Şekil 1 deki küpler ile birlikte n br küp eklenip şekil 2'deki ayrılıp tekrar birleştirilirse yeni elde edilen şekildeki küplerin sayısı nasıl ifade edilebilir?

Şekil 4.1. Küp Parçalama1 Sorusu

Şekil 4.1'de görüldüğü gibi soru 3 şıklıdır. İlk aşamada görselde verilen şekli yorumlayıp bu şekilden yola çıkarak $1^3+2^3+3^3= (1+2+3)^2$ özel bir durumda kuralı keşfetmesi beklenmiştir. A seçeneğinde ise bir adım ileriye gitmesi ve 3 küp ile yaptığı süreci 4 küp ile yapması ve bir sonraki adım olan $1^3+2^3+3^3 +4^3$ için kuralını keşfetmesi ve $(1+2+3+4)^2=10^2=100$ cevabı vermesi beklenmektedir. Daha sonra b seçeneğinde uzak bir durum olan 10 için kuralı ilerletmesi, bir çıkarımda bulunması ve

(1+2+3+…+10)^2= $(\frac{10.11}{2})^2 = 55^2 = 3025$ cevabını vermesi beklenmektedir. En son aşamada ise herhangi sayıda küp alınırsa yani herhangi bir duruma kuralı genellemesi ve $1^3+2^3+3^3+4^3+…+ n^3=(1+2+3+…+n)^2$ cevabını vermesi beklenmektedir. Tablo 4.1'de sorunun şıklarına göre ve sınıflara göre yapılan analizleri verilmiştir.

Tablo 4.1. Küp Parçalama1 Sorusunun Şıklarına ve Sınıflara Göre Analizi

	A şıkkı			**B şıkkı**			**C şıkkı**		
	Doğru	**Yanlış**	**Boş**	**Doğru**	**Yanlış**	**Boş**	**Doğru**	**Yanlış**	**Boş**
9. sınıf (63 Kişi)	24	9	30	15	12	36	5	11	47
10. sınıf (56 Kişi)	12	10	34	5	10	41	0	10	46
11. sınıf (61 Kişi)	24	11	26	12	15	34	6	16	39

Tablo 4.1'den görüldüğü gibi n=3 için kuralı bulup a seçeneğinde (n=4 özel durumu için) 9. ve 11. sınıflardan 24 öğrenci yapabilirken 10. sınıflardan yalnızca 12 öğrenci yapabilmiştir. B seçeneğinde (n=10 özel durumu için) 9. sınıflardan 12, 10. sınıflardan 10 ve 11. sınıflardan 15 öğrenci doğru yanıt vermişlerdir. Görüldüğü gibi b seçeneğinde doğru cevap veren öğrencilerin sayısı neredeyse yarıya düşmüştür. C seçeneğinde ise 9.sınıflardan 5 ve 11. sınıflardan 6 öğrenci soruyu doğru olarak cevaplandırırken 10. sınıflardan hiçbir öğrenci doğru yanıt vermemiştir. Öğrencilerin hangi seçenekleri doğru yaptıkları 9. sınıflar için Tablo 4.2'de, 10. sınıflar için Tablo 4.3'te ve 11. sınıflar için de Tablo 4.4 'te gösterilmiştir.

Tablo 4.2. 9. Sınıftaki Öğrencilerin Küp Parçalama 1 Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	C	KODLAR	A	B	C
9a-Ö1	✓	✓	✗	9b-Ö33	✓	✗	
9a-Ö2			✗	9b-Ö34			
9a-Ö3	✗	✗		9b-Ö35	✗	✗	✗
9a-Ö4	✓	✗	✗	9b-Ö36			
9a-Ö5	✗	✓	✗	9b-Ö37	✓	✓	✗
9a-Ö6	✓	✓		9b-Ö38			
9a-Ö7	✓	✓		9b-Ö39	✓	✓	✓
9a-Ö8	✓	✗	✓	9b-Ö40		✓	✗
9a-ö9	✓	✓		9c-Ö41			
9a-Ö10	✓	✓	✓	9c-Ö42	✓		
9a-Ö11	✓	✓		9c-Ö43	✓		
9a-Ö12	✓	✓		9c-Ö44			
9a-Ö13	✓	✓		9c-Ö45			
9a-Ö14	✓	✓	✓	9c-Ö46			
9a-Ö15				9c-Ö47	✗	✗	
9a-Ö16	✓	✓	✓	9c-Ö48			
9a-Ö17	✓			9c-Ö49			
9b-Ö18	✗	✓	✗	9c-Ö50	✗	✗	✗
9b-Ö19				9c-Ö51			
9b-Ö20				9c-Ö52			
9b-Ö21	✓			9c-Ö53	✓		✗
9b-Ö22	✓			9c-Ö54			
9b-Ö23				9c-Ö55			
9b-Ö24				9c-Ö56	✗	✗	✗
9b-Ö25				9c-Ö57			
9b-Ö26	✗	✗		9c-Ö58			
9b-Ö27	✓	✗		9c-Ö59			
9b-Ö28				9c-Ö60			
9b-Ö29	✓			9c-Ö61			
9b-Ö30				9c-Ö62			
9b-Ö31	✗	✗		9c-Ö63			
9b-Ö32	✓	✗	✗				

Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	
işlem hatası	✓

Tablo 4.2'den görüldüğü gibi 9. sınıflardan 5 öğrenci c seçeneğini doğru yapmıştır. Bu 5 öğrencinin de a ve b seçeneklerini doğru yapması beklenirken bu öğrencilerden yalnızca 1 tanesi b seçeneğini doğru yapamamıştır. A, b ve c seçeneklerinin üçünü de doğru yapan 4 öğrenci vardır. Ayrıca 8 öğrenci de a ve b seçeneklerini doğru yapmalarına rağmen c seçeneğini doğru yapamamıştır.

Tablo 4.3.10. Sınıftaki Öğrencilerin Küp Parçalama 1 Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	C	KODLAR	A	B	C
10a-Ö1				10b-Ö29	✓	✓	
10a-Ö2				10b-Ö30	✓		
10a-Ö3	✗	✗	✗	10b-Ö31	✓		
10a-Ö4				10b-Ö32			
10a-Ö5	✗	✗	✗	10b-Ö33	✓		
10a-Ö6				10b-Ö34			
10a-Ö7	✓	✗	✗	10b-Ö35			
10a-Ö8				10b-Ö36			
10a-Ö9				10b-Ö37			
10a-Ö10				10c-Ö38			
10a-Ö11	✗	✗		10c-Ö39			
10a-Ö12	✓	✗	✗	10c-Ö40			
10a-Ö13				10c-Ö41			
10a-Ö14	✗	✗	✗	10c-Ö42			
10a-Ö15	✓	✗	✗	10c-Ö43			
10a-Ö16				10c-Ö44	✓		
10a-Ö17	✗	✗		10c-Ö45	✗	✗	✗
10a-Ö18				10c-Ö46			
10a-Ö19	✗	✓	✗	10c-Ö47			
10a-Ö20	✗	✗	✗	10c-Ö48			
10a-Ö21	✓	✓	✗	10c-Ö49	✗		
10a-Ö22	✓	✓	✗	10c-Ö50	✗		
10b-ö23	✓	✓		10c-Ö51			
10b-Ö24				10c-Ö52			
10b-Ö25				10c-Ö53			
10b-Ö26				10c-Ö54			
10b-Ö27				10c-Ö55			
10b-Ö28				10c-Ö56	✓	✓	

Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	

Tablo 4.3'ten görüldüğü gibi 10. sınıflardan c seçeneğini hiçbir öğrenci doğru yanıtlayamamıştır. Fakat 5 öğrencinin a ve b seçeneklerini doğru yaptıkları görülmektedir.

Tablo 4.4. 11. Sınıftaki Öğrencilerin Küp Parçalama 1 Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	C	KODLAR	A	B	C
11b-Ö1	✓	✗	✗	11c-Ö32			
11b-Ö2	✓	✓		11c-Ö33	✗	✗	✗
11b-Ö3	✗	✗	✗	11c-Ö34			
11b-Ö4	✓			11c-Ö35			
11b-Ö5	✗	✗	✗	11c-Ö36			
11b-Ö6	✓	✓	✓	11c-Ö37	✗	✗	
11b-Ö7	✓	✓	✗	11c-Ö38			
11b-Ö8	✓	✓	✗	11c-Ö39			
11b-Ö9	✓	✓	✓	11c-Ö40			
11b-Ö10				11c-Ö41			
11b-Ö11	✓			11a-Ö42			
11b-Ö12	✓	✓	✗	11a-Ö43			
11b-Ö13	✗			11a-Ö44	✗	✗	
11b-Ö14	✓	✓	✓	11a-Ö45			
11b-Ö15	✓	✗	✗	11a-Ö46	✓	✗	✗
11b-Ö16				11a-Ö47	✗	✗	✗
11b-Ö17	✓			11a-Ö48	✓	✓	✓
11b-Ö18	✗	✗		11a-Ö49	✗	✗	
11b-Ö19				11a-Ö50	✓	✗	✗
11b-Ö20	✓			11a-Ö51			
11c-Ö21				11a-Ö52			
11c-Ö22				11a-Ö53	✓		
11c-Ö23				11a-Ö54			
11c-Ö24	✓		✗	11a-Ö55	✓	✓	✓
11c-Ö25	✓	✗	✗	11a-Ö56	✓	✓	✓
11c-Ö26				11a-Ö57			
11c-Ö27				11a-Ö58	✗	✗	✗
11c-Ö28				11a-Ö59			
11c-Ö29	✓	✓	✗	11a-Ö60	✓	✓	
11c-Ö30	✓		✗	11a-Ö61	✗	✗	
11c-Ö31							

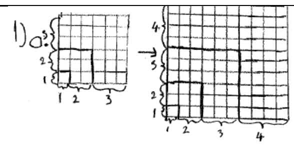
Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	

Tablo 4.4’ten görüldüğü gibi 11. sınıflardan 6 öğrenci c seçeneğini doğru olarak yanıtlamışlardır. 4 öğrenci de hem a hem de b seçeneğini yapmasına rağmen c seçeneğini doğru yanıtlayamadıkları görülmektedir.

Tablo 4.2, 4.3 ve 4.4 birlikte yorumlanırsa c seçeneğini doğru yapan öğrencilerin a ve b seçeneklerini de doğru yapması beklenmektedir. 9. sınıflardan c seçeneğini doğru yapan 5 öğrenciden 1 tanesi b seçeneğini doğru yapamamıştır. Ayrıca 10. sınıflardan hiçbir öğrenci c seçeneğini doğru yanıtlayamamıştır.11. sınıflardan 6 öğrenci c seçeneğini doğru olarak yanıtlamıştır. Diğer taraftan <u>a ve b seçeneklerini doğru yapmalarına rağmen c seçeneğini doğru yapamayan</u> 9. sınıflardan 8 öğrenci, 10. sınıflardan 5 öğrenci ve 11. sınıflardan 4 öğrencidir. Bu öğrencilerin özel durumlarda problemi çözebildikleri fakat genelleme ile ilgili sıkıntıları olduğu söylenebilir.

Küp parçalama1 sorusunda öğrencilerin problemi çözerken sorunun her bir seçeneğinde verdikleri cevapların sınıflarına göre karşılaştırmalarını yapmak amacıyla a seçeneğine yönelik verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.5’te, b seçeneğine yönelik verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.6’da ve c seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.7’de verilmiştir.

Tablo 4.5. Küp Parçalama 1 Sorusunun A Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

Kategori	**Örnek cevap**	**9. sınıf**	**10 sınıf**	**11 sınıf**	**Toplam**
Birim küpleri sayma	1-) 36 adet küp var. → $1^3+2^3+3^3$ = 36 yeşil ⇒ $4^3=64$ 30 + 64 = 100 adet küp var. → 100 adet küp olur. (9a-Ö10)	17	7	17	41
Karenin alanı	yeşilden 4 mavi 3 Turuncu 2x10 kırmızı 1x10 $(1+2+3+4)=10$ bir kenarı $10 \times 10 = 100$ (11b-Ö3)	1	1	3	5
Şekil çizme	 (10b-Ö23)	0	1	1	3
Sadece sonucu yazanlar	100	6	3	4	13

Tablo 4.5’ten görüldüğü gibi verilen cevaplar 4 farklı kategori altında toplanmıştır. Bu seçenekte öğrencilerin $1^3+2^3+3^3+4^3$ için kuralını keşfetmesi ve

$(1+2+3+4)^2=10^2=100$ cevabı vermesi beklenmektedir. “Birim küpleri sayma” kategorisinde cevap veren öğrenciler soruda verilen kırmızı, turuncu, mavi küplerin sayılarını hesaplayıp üzerine yeşil küpteki küp sayısı ekleyerek $1^{3+}2^3+3^3+4^3$ =100 şeklinde sonuca ulaşmışlardır. Bu şekilde cevap veren öğrencilerin sayısı 9 ve 11. sınıfta 17 iken 10.sınıfta 7 dir. “Karenin alanı” kategorisindeki öğrenciler oluşan yeni şeklin bir kenarının karesi şeklinde olduğunu fark etmişlerdir ve karenin alanından yola çıkarak $(1+2+3+4)^2$ şeklinde sonuca ulaşmışlardır. Bu şekilde cevap veren öğrencilerin sayısı 9 ve 10. sınıfta 1 iken 11.sınıfta 3’tür. “Şekil çizme” kategorisinde cevap veren öğrencilerde “Karenin alanı “ kategorisindeki öğrenciler ile aynı şekilde düşünmüşler fakat şekil çizerek elde edilen yeni karenin bir kenarının 1+2+3+4 olduğunu göstermişlerdir. Bu şekilde cevap veren öğrenciler 10 ve 11. sınıfta 1 iken 9. Sınıfta ise kimse bu şekilde cevaplamamıştır. “Sadece sonucu yazanlar” kategorisinde cevap veren öğrenciler sadece sonucu 100 şeklinde yazmışlardır. Bu şekilde cevap veren öğrencilerin sayısı 9. sınıfta 6 öğrenci, 10. sınıfta 3 ve 11.sınıfta 4’tür. Bu sorunun b seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.6’da verilmiştir.

Tablo 4.6. Küp Parçalama 1 Sorusunun B Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

	Örnek cevap	**9. sınıf**	**10 sınıf**	**11 sınıf**	**Toplam**
Birim küpleri sayma	$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3$ (10c-Ö56)	3	3	5	11
Karenin alanı	$9=(\overbrace{1+2+3+4+5+6+7+8+9+10}^{55})^2=$ (9b-Ö40) $\underbrace{\underbrace{1^3\ 2^3\ 3^3}_{6x6 \text{ kare yapılır}}\ 4^3\ 5^3\ 6^3\ 7^3\ 8^3\ 9^3\ 10^3}$ 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55 55x55 kare oluşur (10bÖ23) $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3$ 1 2 3 4 5 ...... 10 tane (1+2+3.....+10)=55 $\boxed{55.55}=55^2$ (11b-Ö09) $1^3+2^3+3^3+\dots+10^3=\left(\frac{10\cdot 11}{2}\right)^2=55^2$ (11a-Ö48)	8	2	6	16
Sadece sonucu yazanlar	3025	4	0	1	5

Tablo 4.6'dan da görüldüğü gibi cevaplar 4 farklı kategori altında toplanmıştır. Bu seçenekte 10 özel durumu için bir çıkarımda bulunması ve $(1+2+3+\ldots+10)^2=$ $(\frac{10.11}{2})^2 = 55^2 = 3025$ cevabını vermesi beklenmektedir. <u>"Birim küpleri sayma"</u> kategorisinde cevap veren öğrenciler Tablo 4.5'deki a seçeneğinde olduğu gibi $1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3=1+8+27+\ldots+100=3025$ şeklinde yapmışlardır. Bu kategoride 9. ve 10. sınıflardan 3 kişi yanıt verirken 11. sınıflardan 5 kişi yanıt vermiştir. <u>"Karenin alanı"</u> kategorisinde cevap veren öğrenciler Tablo 4.5'te a seçeneğinde olduğu gibi oluşacak karenin bir kenarının uzunluğunun 1+2+3+4 olduğunu fark etmişler ve karenin alanından faydalanarak $(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10)^2$ $=55^2=3025$ şeklinde hesaplamışlardır. Bu şekilde 9. sınıflardan 8 öğrenci yanıt verirken 10. sınıflardan 2 öğrenci ve 11. sınıflardan 6 öğrenci cevap vermiştir. 5 öğrenci ise (9. sınıflardan 4 ve 11. sınıflardan 1 öğrenci) sadece cevabı yazmışlardır. Bu sorunun c seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.7'de verilmiştir.

Tablo 4.7. Küp Parçalama 1 Sorusunun C Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

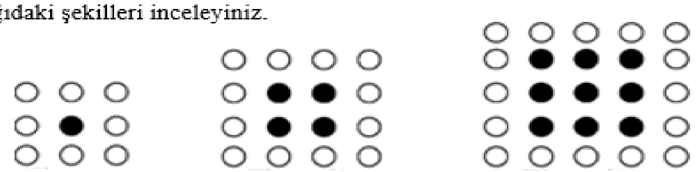
	Örnek cevap	9. sınıf	10 sınıf	11 sınıf	Toplam
Birim küpleri sayma	$1^3+2^3+3^3+4^3 --- n^3$ = Toplam küp sayısı (9a-Ö8)	2	0	2	4
Karenin alanı	$=)(\frac{n.(n+1)}{2})^2$ (9a-Ö14) $1^3+2^3+3^3 \ldots + n^3 = (\frac{n.n+1}{2})^2$ (11a-Ö48)	3	0	4	8

Tablo 4.7'den görüldüğü gibi cevaplar iki kategori altında toplanmıştır. A ve b seçeneklerinde olduğu gibi öğrenciler ya birim küplerin sayısından yola çıkarak ya da karenin alanından yola çıkarak cevap vermişlerdir. <u>"Birim küpleri sayma"</u> kategorisinde cevap veren 9. ve 11. sınıftan 2 öğrenci olmak üzere toplam 4 öğrenci de küp sayısının $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+ n^3$ şeklinde hesaplanacağını ifade etmişlerdir. <u>"Karenin alanı"</u> kategorisinde cevap veren 9. ve 11. sınıftan 4 öğrenci olmak üzere toplam 8 öğrenci de $1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots n^3 = (1+2+3+4+\ldots n)^2 = \left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^2$ şeklinde cevap vermişlerdir.

4.1.2. “ Siyah-Beyaz Nokta” Sorusundan Elde Edilen Bulgular

Aşağıda verilen bu soru Cai ve Hwang’dan (2002) alınmış ve uyarlanmıştır.

2) Aşağıdaki şekilleri inceleyiniz.



Şekil 1   Şekil 2   Şekil 3

a) Buna göre şekil 4 ‘ü çiziniz.

b) Şekil 6’ da kaç tane siyah nokta vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

c) Şekil 6 ‘da kaç tane beyaz nokta vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız

d) Şekil 1’ de 8 tane beyaz nokta vardır. Şekil 3 ‘te 16 tane beyaz nokta vardır. Eğer bir şekilde 44 tane beyaz nokta var ise bu şekil nasıldır? Çiziniz. Bu kaç numaralı şekil olacaktır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

Şekil 4.2. Siyah Beyaz Nokta Sorusu

Şekil 4.2’den de görüldüğü gibi soru 4 seçeneklidir. Sorunun ilk aşaması olan a seçeneğinde, verilen şekilden yola çıkarak bir sonraki şeklin bulunması istenmiştir.

Toplamda 180 öğrenciden 176’sı bu sorunun a seçeneğini doğru cevaplamıştır. Bir sonraki aşamada şekil 1, şekil 2 ve şekil 3 incelenerek şekil 6’da kaç tane siyah top olduğu istenmiştir. Burada siyah topların sayısını bulurken (şekil 1)^2= 1^2= 1 tane siyah nokta, (şekil 2)^2=2^2=4 tane siyah nokta ,(şekil 3)^2 = 3^2 = 9 adet siyah nokta olduğunu keşfetmesi ve b seçeneğinde uzak bir durum 6 için kuralı ilerletmesi, bir çıkarımda bulunması ve (şekil 6)^2=6^2 =36 tane siyah nokta olduğu cevabının verilmesi beklenmektedir. Bir diğer bakış açısıyla incelendiğinde şekil 1’ de 1 tane, şekil 2’de 4 tane ve şekil 3’te 9 adet siyah olduğunu fark edip siyah topların artış miktarından yola çıkarak aşağıdaki durumu keşfetmesi beklenmektedir.

Şekil 1		**Şekil 2**		**Şekil 3**		**Şekil 4**		**Şekil 5**		**Şekil 6**
1		4		9		16		25		36
	3		5		7		9		11	

Sorunun c seçeneğinde ise şekil 6’da kaç tane beyaz nokta olduğu sorulmuştur. Burada şekil 1’de 3x3 =9 nokta, şekil 2’de 4x4= 16 nokta, şekil 3’te 5x5=25 nokta olduğunu keşfedip uzak durum 6 için şekil 6 ‘da da (şekil sayısı +2)^2= 8x8= 64 adet nokta gelebileceğini keşfetmesi beklenmektedir. Burada tüm nokta sayısından (64) ,daha önce b şıkkından çıkarımda bulduğu siyah nokta sayısını (36) çıkararak 64-36= 28 adet beyaz nokta sayısının bulunması beklenmektedir. Bir diğer bakış açısıyla şekil 1' de 8 adet, şekil 2'de 12 adet, şekil 3'te 16 adet beyaz nokta olduğunu keşfedip yinelemeli düşünce yoluyla aşağıda gösterildiği gibi noktaların sabit 4'er adet arttığını fark etmesi ve buradan uzak durum 6 için genişletmesi beklenmektedir.

Şekil 1		Şekil 2		Şekil 3		Şekil 4		Şekil 5		Şekil 6
8		12		16		20		24		28
	4		4		4		4		4	

En son aşamada ise şekil 1 de 8 beyaz nokta, şekil 3 'te 16 nokta olduğu verilmiş ve 44 beyaz nokta olması durumunda hangi şekil numarasının olduğu sorulmuştur. Burada uzak bir durum istenmiş olup öğrenciden bir kural keşfetmesi beklenmiştir. Şekil sayıları ile beyaz nokta arasındaki ilişkiden faydalanıp 4x(şekil 1)+4=8 beyaz nokta, 4x(şekil 2)+4 =12 beyaz nokta ve 4x(şekil 3)+4=16 beyaz nokta olduğunu fark etmesi, bu durumda uzak durum için 4x(şekil no)+4= 44 kuralı için genişletmesi beklenmektedir.

4x(şekil no)+4= 44

4x(şekil no)=40

(şekil no)=10

Tablo 4.8. Siyah-Beyaz Nokta Sorusunun Şıklarına ve Sınıflara Göre Analizi

	a şıkkı			b şıkkı			ç şıkkı			d şıkkı		
	Doğru	Yanlış	Boş	Doğru	Yanlış	Boş	Doğru	Yanlış	Boş	Doğru	Yanlış	Boş
9.sınıf (63 Kişi)	62	0	1	52	9	2	48	12	3	44	5	14
10 sınıf (56 Kişi)	53	0	3	44	5	7	34	13	9	30	7	19
11.sınıf (61 Kişi)	61	0	0	56	3	2	49	10	2	40	16	5

Tablo 4.8'den görüldüğü gibi n=3 için kuralı keşfedip a seçeneğinde (n=4 özel durum için) 9.sınıflardan 62, 10.sınıflardan 53 ve 11.sınıflardan da 61 öğrenci yapabilmiştir. B seçeneğinde (n=6 özel durum için) siyah nokta sayısına 9.sınıflardan 52, 10.sınıflardan 44 ve 11.sınıflardan da 56 öğrenci doğru yanıt vermişlerdir. C seçeneğinde (n=6 özel durum için) beyaz nokta sayısına 9.sınıflardan 44, 10.sınıflardan 30 ve 11.sınıflardan

da 40 öğrenci doğru yanıt vermiştir. Öğrencilerin hangi seçenekleri doğru yaptıkları 9. sınıflar için Tablo 4.9'da 10. sınıflar için Tablo 4.10 ve 11. sınıflar içinde Tablo 4.11'de gösterilmiştir.

Tablo 4.9. 9.Sınıftaki Öğrencilerin Siyah-Beyaz Nokta Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	C	D	KODLAR	A	B	C	D
9a-Ö1	✓	✓	✓	✓	9b-Ö33	✓	✓	✓	
9a-Ö2	✓	✓	✗	✓	9b-Ö34	✓	✗	✗	
9a-Ö3	✓	✓	✗		9b-Ö35	✓	✓	✓	✓
9a-Ö4	✓	✓	✓	✓	9b-Ö36	✓	✓	✓	✓
9a-Ö5	✓	✓	✓	✓	9b-Ö37	✓	✓	✓	✓
9a-Ö6	✓	✓	✓		9b-Ö38	✓	✗	✗	
9a-Ö7	✓	✓	✓	✓	9b-Ö39	✓	✓	✓	✓
9a-Ö8	✓	✓	✓	✓	9b-Ö40	✓	✓	✓	✗
9a-ö9	✓	✓	✓	✓	9c-Ö41	✓	✓	✓	✓
9a-Ö10	✓	✓	✓	✓	9c-Ö42	✓	✓	✓	
9a-Ö11	✓	✓	✓	✓	9c-Ö43	✓	✓	✓	✓
9a-Ö12	✓	✓	✓	✓	9c-Ö44	✓	✓		
9a-Ö13	✓	✓	✓	✓	9c-Ö45	✓	✓	✗	✗
9a-Ö14	✓	✓	✓	✓	9c-Ö46	✓	✓	✓	✓
9a-Ö15	✓				9c-Ö47	✓	✓	✓	✓
9a-Ö16	✓	✓	✓	✓	9c-Ö48	✓	✓	✓	✓
9a-Ö17	✓	✓	✓	✓	9c-Ö49	✓	✗	✗	✗
9b-Ö18	✓	✓	✓	✓	9c-Ö50	✓	✓	✓	
9b-Ö19	✓	✓	✓	✓	9c-Ö51				
9b-Ö20	✓	✓	✓	✓	9c-Ö52	✓	✓	✗	✓
9b-Ö21	✓	✓	✓	✓	9c-Ö53	✓	✓	✓	✗
9b-Ö22	✓	✓	✓	✓	9c-Ö54	✓	✗	✗	✓
9b-Ö23	✓	✓	✓	✓	9c-Ö55	✓	✓	✓	
9b-Ö24	✓	✓	✗		9c-Ö56	✓	✗	✗	✗
9b-Ö25	✓	✓	✓	✓	9c-Ö57	✓	✓	✓	✓
9b-Ö26	✓	✓	✓		9c-Ö58	✓	✓	✓	✓
9b-Ö27	✓	✓	✓	✗	9c-Ö59	✓	✓	✓	✓
9b-Ö28	✓	✓	✓	✓	9c-Ö60	✓	✓	✗	
9b-Ö29	✓	✓	✓	✓	9c-Ö61	✓	✗	✓	✓
9b-Ö30	✓	✓	✓	✓	9c-Ö62	✓	✗	✗	✓
9b-Ö31	✓	✗	✓	✓	9c-Ö63	✓	✗	✓	✓
9b-Ö32	✓	✓	✓	✓					

Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	

Tablo 4.9'dan görüldüğü gibi 9. sınıflardan 44 öğrenci d seçeneğini doğru yapmıştır. Bu 44 öğrencinin de a,b ve c seçeneklerini doğru yapması beklenirken bu öğrencilerden 4 tanesi b seçeneğini, 4 tanesi de c seçeneğini yapamamıştır. Ayrıca 7 öğrenci de a, b, c seçeneklerini doğru yapmalarına rağmen d seçeneğini doğru yapamamış ya da boş bırakmıştır.

Tablo 4.10. 10.Sınıftaki Öğrencilerin Siyah-Beyaz Nokta Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	C	D	KODLAR	A	B	C	D
10a-Ö1	✓		✗		10b-Ö29	✓	✓	✓	✗
10a-Ö2	✓	✓	✓	✓	10b-Ö30	✓	✓	✓	
10a-Ö3	✓	✓	✗		10b-Ö31	✓	✓	✓	✓
10a-Ö4	✓	✓	✓		10b-Ö32	✓	✓	✓	✓
10a-Ö5	✓	✓	✓	✓	10b-Ö33	✓	✓	✓	✓
10a-Ö6	✓	✓	✓	✗	10b-Ö34	✓	✓	✓	✓
10a-Ö7	✓	✓	✗	✓	10b-Ö35				
10a-Ö8	✓	✓	✓	✓	10b-Ö36	✓			
10a-Ö9	✓	✓	✓	✓	10b-Ö37	✓	✓	✓	✓
10a-Ö10	✓	✓	✓		10c-Ö38	✓			
10a-Ö11	✓	✓	✓	✓	10c-Ö39	✓	✓	✓	✓
10a-Ö12	✓	✓	✓	✓	10c-Ö40	✓	✗	✗	✗
10a-Ö13	✓	✓	✓	✓	10c-Ö41	✓	✓	✓	✓
10a-Ö14	✓	✓	✓	✓	10c-Ö42	✓	✓	✓	
10a-Ö15	✓	✓	✓	✓	10c-Ö43	✓	✓	✓	✓
10a-Ö16	✓	✗	✗	✓	10c-Ö44	✓	✓	✓	✓
10a-Ö17	✓	✓	✗	✓	10c-Ö45	✓	✓	✗	✗
10a-Ö18	✓	✓	✓	✓	10c-Ö46	✓	✓	✓	✓
10a-Ö19	✓	✓	✓	✓	10c-Ö47	✓			
10a-Ö20	✓	✗	✗	✓	10c-Ö48				
10a-Ö21	✓	✓	✓	✓	10c-Ö49	✓	✗	✗	✗
10a-Ö22	✓	✓	✓	✗	10c-Ö50	✓	✓	✓	
10b-ö23	✓	✓	✓	✓	10c-Ö51	✓	✓	✗	
10b-Ö24	✓	✓	✓	✓	10c-Ö52	✓	✓		
10b-Ö25	✓	✓	✓	✓	10c-Ö53	✓	✓	✗	
10b-Ö26					10c-Ö54	✓	✓		
10b-Ö27	✓	✓	✗	✗	10c-Ö55	✓	✓	✓	
10b-Ö28	✓	✗	✗		10c-Ö56	✓	✓		✓

Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	

Tablo 4.10'dan görüldüğü gibi 10. sınıflardan 30 öğrenci d seçeneğini doğru yapmıştır. Bu 30 öğrencinin de a,b ve c seçeneklerini doğru yapması beklenirken bu öğrencilerden 2 tanesi b seçeneğini, 5 tanesi de c seçeneğini yapamamıştır. Ayrıca 7 öğrenci de a, b, c seçeneklerini doğru yapmalarına rağmen d seçeneğini doğru yapamamış ya da boş bırakmıştır.

Tablo 4.11. 11.Sınıftaki Öğrencilerin Siyah-Beyaz Nokta Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	C	D	KODLAR	A	B	C	D
11b-Ö1	✓	✓	✗	✗	11c-Ö32	✓	✓	✓	✓
11b-Ö2	✓	✓	✓		11c-Ö33	✓	✓	✓	✗
11b-Ö3	✓	✓	✓	✓	11c-Ö34	✓	✗	✗	✓
11b-Ö4	✓	✓	✓	✓	11c-Ö35	✓			
11b-Ö5	✓	✓	✓	✓	11c-Ö36	✓	✓	✓	✓
11b-Ö6	✓	✓	✗	✓	11c-Ö37	✓	✓	✓	✓
11b-Ö7	✓	✓	✓	✗	11c-Ö38	✓	✓	✓	✓
11b-Ö8	✓	✓	✓	✓	11c-Ö39	✓	✓	✓	✗
11b-Ö9	✓	✓	✓	✓	11c-Ö40	✓	✓	✓	✗
11b-Ö10	✓	✗	✓	✗	11c-Ö41	✓	✓	✓	✗
11b-Ö11	✓	✓	✓	✓	11a-Ö42	✓	✓	✗	
11b-Ö12	✓	✓	✗	✗	11a-Ö43	✓	✓	✓	✓
11b-Ö13	✓	✓	✓	✓	11a-Ö44	✓	✓	✓	✓
11b-Ö14	✓	✓	✓	✓	11a-Ö45	✓	✓	✓	✓
11b-Ö15	✓	✓	✓	✓	11a-Ö46	✓	✓	✓	✓
11b-Ö16	✓	✓	✓	✓	11a-Ö47	✓	✓	✓	✗
11b-Ö17	✓	✓	✓	✓	11a-Ö48	✓	✓	✓	✓
11b-Ö18	✓	✓	✓	✗	11a-Ö49	✓	✓	✓	✓
11b-Ö19	✓	✓	✗	✗	11a-Ö50	✓	✓	✓	✗
11b-Ö20	✓	✓	✓	✓	11a-Ö51	✓	✓	✓	✓
11c-Ö21	✓	✓	✓	✓	11a-Ö52				
11c-Ö22	✓	✓	✓	✓	11a-Ö53	✓	✓	✓	✓
11c-Ö23	✓	✓	✓	✓	11a-Ö54	✓	✓	✗	✗
11c-Ö24	✓	✓	✓	✗	11a-Ö55	✓	✓	✓	✗
11c-Ö25	✓	✓	✓	✓	11a-Ö56	✓	✓	✓	✓
11c-Ö26	✓	✓	✓	✓	11a-Ö57	✓	✓	✓	✓
11c-Ö27	✓	✓	✓	✓	11a-Ö58	✓	✗	✓	✗
11c-Ö28	✓	✓	✗	✓	11a-Ö59	✓	✓	✓	
11c-Ö29	✓	✓	✗	✓	11a-Ö60	✓	✓	✓	✓
11c-Ö30	✓	✓	✓	✓	11a-Ö61	✓	✓	✓	✓
11c-Ö31	✓	✓	✗	✓					

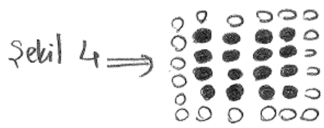
Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	

Tablo 4.11 detaylı incelendiğinde 11. sınıflardan 40 öğrenci d seçeneğini doğru yapmıştır. Bu 40 öğrencinin de a,b ve c seçeneklerini doğru yapması beklenirken bu öğrencilerden 1 tanesi b seçeneğini, 5 tanesi de c seçeneğini yapamamıştır. Ayrıca 12 öğrenci de a, b, c seçeneklerini doğru yapmalarına rağmen d seçeneğini doğru yapamamış ya da boş bırakmıştır.

Tablo 4.9, 4.10 ve 4.11 birlikte yorumlanırsa d seçeneğini doğru yapan öğrencilerin a, b ve c seçeneklerini de doğru yapması beklenmektedir. 9. sınıflardan d seçeneğini doğru yapan 44 öğrenciden 4 tanesi b seçeneğini, 4 tanesi de c seçeneğini yapamamıştır.10. sınıflardan d seçeneğini doğru yapan 30 öğrencilerden 2 tanesi b seçeneğini, 5 tanesi de c seçeneğini yapamamıştır. 11. sınıflardan d seçeneğini doğru yapan 40 öğrenciden 1 tanesi b seçeneğini, 5 tanesi de c şıkkını yapamamıştır. Diğer taraftan a, b ve c seçeneklerini doğru yapmalarına rağmen d seçeneğini doğru yapamayan 9 ve 10. sınıflardan 7 öğrenci ve 11. sınıflardan 12 öğrencidir. Bu öğrencilerin özel durumlarda problemi çözebildikleri fakat genelleme ile ilgili sıkıntıları olduğu söylenebilir.

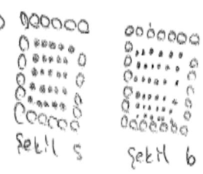
Siyah-Beyaz Nokta sorusunda öğrencilerin problemi çözerken sorunun her bir seçeneğinde verdikleri cevapların sınıflarına göre karşılaştırmalarını yapmak amacıyla a seçeneğine yönelik verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.12'de, b seçeneğine yönelik verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.13'te, c seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.14'te ve d seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler ise Tablo 4.15'te verilmiştir.

Tablo 4.12. Siyah –Beyaz Nokta Sorusunun A Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

	Örnek cevap	9. sınıf	10. sınıf	11. sınıf	Toplam
Şekil çizme	 (9a-Ö17)	62 kişi	53 kişi	61 kişi	176 kişi

2.sorunun a seçeneğinde öğrencilerden şekil 1, şekil 2 ve şekil 3 'ün incelemesi ve bir sonraki şekle genişletmesi beklenmektedir. Dolayısıyla Tablo 4.12'den de görüldüğü gibi tek bir kategori "şekil çizme" karşımıza çıkmaktadır. Bu şekilde cevap veren öğrencilerin sayısı 9.sınıfta 62,10.sınıfta 53 ve 11. sınıfta 61'dir. Boş bırakan çocuklar, derse geç gelip vakti yetmeyenler olmuştur. Bu sorunun b seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.13'te verilmiştir.

Tablo 4.13. Siyah –Beyaz Nokta Sorusunun B Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

Kategori	**Örnek cevap**	**9. sınıf**	**10 sınıf**	**11 sınıf**	**Toplam**
Şekil sayısının karelerini alma	Şekil b'de 36 tane siyah kare vardır. 1. şekil = $1^2 = 1$ 2. şekil = $2^2 = 4$ 3. şekil = $3^2 = 9$ ⋮ 6. şekil = $6^2 = 36$ şeklinde örüntüsü var. (11c-Ö38)	37	27	32	96
Beyaz nokta ile siyah nokta sayısı arasında ilişki kurma	b-) 36 siyah nokta vardır çünkü her şekilde beyaz kısmın kenar nokta sayısı siyah kısmın kenar nokta sayısından 2 fazla. Böylece 6. şeklin beyaz kenar nokta sayısı 8 olduğu için siyah ken. nokta say. 6 dır. 6.6=36 (9a-Ö12) bir kenardaki daire sayısı n olsun $(n-2)^2$ siyah nokta var $8-2=6^2$ siyah var (10b-Ö23)	2	3	2	7
Siyah noktaların artış miktarından faydalanma	1'den 2'ye 3 tane 2'den 3'e 5 tane 3'den 4'e 7 tane 4'den 5'e 9 tane 5'den 6'ya 11 tane ekleniyor 35+1 = 36 36 (11b-Ö14) 1 4 8 16 25 36 (3, 5, 7, 8, 11) 1. 2. 3. 4. 5 6. (11c-Ö22)	2	3	6	11
Şekil çizme	b) →  → 36 siyah nokta vardır Çizerek yaptım (9c-Ö52)	2	0	2	4
Sadece sonucu yazanlar	36	8	11	11	30

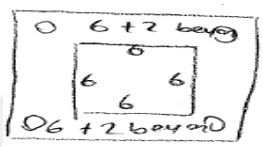
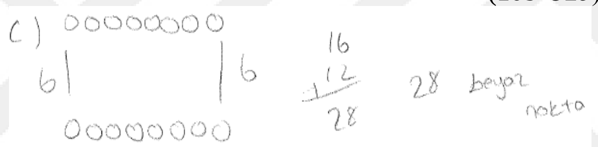
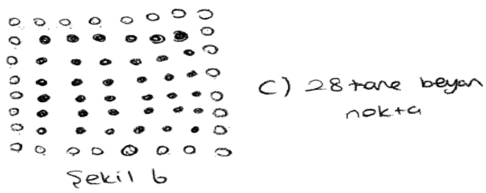
Tablo 4.13'ten de görüldüğü gibi verilen cevaplar 5 farklı kategori altında toplanmıştır. Bu aşamada şekil 1, şekil 2 ve şekil 3 incelenerek şekil 6'da kaç tane siyah top olduğu istenmiştir. Burada siyah topların sayısını bulurken (şekil $1)^2= 1^2= 1$ tane siyah nokta, (şekil $2)^2=2^2=4$ tane siyah nokta ,(şekil $3)^2 = 3^2 = 9$ adet siyah nokta olduğunu keşfetmesi ve b seçeneğinde uzak bir durum 6 için kuralı ilerletmesi, bir çıkarımda bulunması ve (şekil $6)^2=6^2 =36$ tane siyah nokta olduğu cevabının verilmesi beklenmektedir. "Şekil sayısının karelerini alma" kategorisinde cevap veren öğrenciler şekil sayısı ile siyah top sayısının arasında bir ilişki kurmuştur. Şekil sayısının karesinin siyah top sayısına eşit olduğunu fark edip yakın durum olan şekil 6 için kuralı genişletmiştir. (şekil $6)^2=6^2 =36$ şeklinde doğru cevaba ulaşmıştır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler diğer yaklaşımlara oranla daha fazla olup 9.sınıflarda 37, 10.sınıflarda 27 ve 11.sınıflarda 32 öğrenci olmuştur. "Beyaz nokta ile siyah nokta sayısı arasında ilişki kurma" kategorisinde cevap veren öğrenciler şekillerin kenarlarındaki beyaz top sayısı ile içindeki siyah top sayısı arasında ilişki kurmuş ve beyaz top ile siyah top arasında 2 sayı farkı olduğunu düşünerek bir kural oluşturmuşlardır. Şekil 1'in bir kenarında 3 beyaz, 1 siyah nokta, şekil 2'nin bir kenarında 4 beyaz, 2 siyah nokta, şekil 3'ün bir kenarında 5 beyaz, 3 siyah nokta olduğunu keşfedip bunu genişleterek uzak durum 6 için şekil 6'nın bir kenarında 8 beyaz, 6 siyah nokta olduğunu ve 6x6=36 siyah nokta olduğu çıkarımında bulunmuşlardır. Bu şekilde 9. sınıflardan 2 öğrenci yanıt verirken 10. sınıflardan 3 öğrenci ve 11. sınıflardan 2 öğrenci cevap vermiştir. "Siyah noktaların artış miktarından faydalanma" kategorisinde cevap veren öğrenciler, şekil 1' de 1 tane, şekil 2'de 4 tane ve şekil 3'te 9 adet siyah olduğunu fark edip siyah topların artış miktarından yola çıkarak aşağıdaki duruma genişletmiş ve şekil 6'da 36 adet siyah nokta olduğunu keşfetmişlerdir. Bu şekilde cevaplayan öğrenciler 9. sınıflarda 2, 10. Sınıflarda 3 ve 11. Sınıflarda ise 6 öğrencidir.

Şekil 1		**Şekil 2**		**Şekil 3**		**Şekil 4**		**Şekil 5**		**Şekil 6**
1		4		9		16		25		36
	3		5		7		9		11	

"Şekil çizme" kategorisinde cevap veren öğrenciler Şekil 1, şekil 2, şekil 3'ü incelenerek görsel bir örüntü keşfetmiş ve şekil 6'ya genişletmiştir. Bu şekilde cevaplayan öğrenciler 9. sınıflarda 2 ve 11. sınıflarda 2 öğrenci olup 10.sınıflarda bu şekilde yaklaşan öğrenci olmamıştır. "Sadece sonucu yazanlar" kategorisinde cevap verenler öğrenciler sadece sonucu 36 şeklinde yazmışlardır. Bu şekilde cevap veren öğrencilerin sayısı 9 sınıfta 8 öğrenci, 10. ve 11 ve 11.sınıfta 11'dir. Bu sorunun c şıkkına verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.14'te verilmiştir.

Tablo 4. 14. Siyah –Beyaz Nokta Sorusunun C Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

Kategori	**Örnek cevap**	**9. sınıf**	**10 sınıf**	**11 sınıf**	**Toplam**
Tüm nokta sayısından siyah nokta sayısını çıkarma	Açıklama: Şekil 1'de 3.3 Şekil 2'de 4.4 Şekil 3'te 5.5 tane yuvarlak var. Bu yuvarlakların Şekil 1'de 1 tane Şekil 2'de 4 tane Şekil 3'te 9 tanesi siyah yuvarlaktır. Burada bir örüntü vardır. Toplam yuvarlak sayısı ardışık olarak devam etmektedir, yani 1 şekil 3.3 2 şekil 4.4 3 şekil 5.5 4. şekil: 6.6 5 şekil 7.7 6. şekil 8.8 tane yuvarlak vardır. Bu yuvarlaklarda siyah nokta sayısında da bir örüntü vardır. Oradaki örüntü ise şekil 1: 1^2 Şekil 2 2^2 Şekil 3= 3^2 Şekil 4=4^2 Şekil 5= 5^2 Şekil 6 =6^2 olur. En sonunda de şekil 6 daki toplam yuvarlak sayısından siyah nokta sayısını çıkararak toplam beyaz sayısını bulmuş olurum (10a-Ö2) c-) Beyaz kenar nokta sayısı (6. şeklin) 8 dir. Böylece toplam nokta sayısı 8.8 = 64 'tür. İçinde de 36 siyah vardı. Yani 64- 36 = 28 beyaz nokta vardır (9a-Ö12)	21	14	23	**48**
Beyaz nokta sayısının artış miktarından faydalanma	Şekil 1 Şekil 2 Şekil 3 dörder dörder artıyor. 8 12 16 4 4 4 5 6 20 24 28 beyaz nokta (9a-Ö11) c → 8 12 16 20 24 28 4 4 4 4 4 1. 2. 3. 4. 5. 6. (11b-Ö22)	10	9	16	35
(şeklin sayısı +2)^2-(şekil sayısı)^2 şeklinde formül üretme	c) Şekil 1 $(1+2)^2-1$ tane beyaz nokta. Şekil 2 $(2+2)^2-2^2$ Şekil 3 $(3+2)^2-3^2$ beyaz nokta. Şekil 6 $(6+2)^2=64$ $64-6^2$ $64-36=28$ beyaz nokta (9a-Ö17) c/ $(n+2)^2-n^2$ = beyaz nokta 8^2-6^2 $64-36=28$ (11b-Ö9)	4	1	1	6
Beyaz nokta sayısını	C=28, Çünkü beyaz sayı formülü (n+1)4 (9a-Ö1)	3	2	4	9

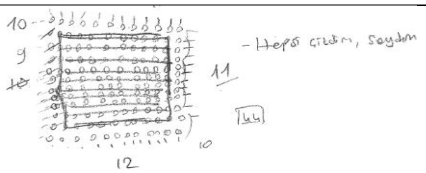
4(şekil no)+4 ya da 4(şekil no+1) şeklinde formül üretme	b) 36 tane var çünkü bu dizinin denklemi (r,p) = 4r+4, p² şeklindedir c) 28 tane var " " " " " " " (10a-Ö4)				
"n" bir şeklin bir kenarındaki nokta sayısı olmak üzere 4n-4 şeklinde formül üretme	c) 8·4=32 32−4=28 (11b-Ö10)	0	0	1	1
Şekli tam çizmeden şeklin çevresini hesaplama	 (10b-Ö25)  (9b-Ö19)	0	1	3	4
Şekil çizme	 (11c-Ö27)				
Sadece sonucu yazanlar	28	8	4	8	20

Tablo 4.14'ten de görüldüğü gibi verilen cevaplar 8 farklı kategori altında toplanmıştır. Burada şekil 1'de 3x3 =9 nokta, şekil 2'de 4x4= 16 nokta, şekil 3'te 5x5=25 toplam nokta olduğunu keşfedip uzak durum 6 için şekil 6'da da (şekil sayısı +2)^2= 8x8= 64 adet nokta gelebileceğini keşfetmesi beklenmektedir. Burada tüm nokta sayısından (64) ,daha önce b seçeneğinden çıkarımda bulduğu siyah nokta sayısını (36) çıkararak 64-36= 28 adet beyaz nokta sayısının bulunması beklenmektedir. Bir diğer başka bir bakış açısıyla şekil 1' de 8 adet, şekil 2'de 12 adet, şekil 3'te 16 adet beyaz nokta olduğunu keşfedip yinelemeli düşünce yoluyla noktaların sabit 4'er adet arttığını

fark etmesi ve buradan uzak durum 6 için genişletmesi beklenmektedir. “Tüm nokta sayısından siyah nokta sayısını çıkarma” kategorisinde cevap veren öğrenciler şekil 6 ‘nın bir kenarındaki nokta sayısını bulup sonra şekil 6’daki tüm nokta sayısına ulaşmışlardır. Daha sonra tüm nokta sayısından (b seçeneği) buldukları siyah nokta sayısını çıkararak cevaba ulaşmışlardır. Tüm sınıf seviyelerinde diğer yaklaşımlara oranla bu çıkarım en çok yaklaşılan çıkarım olmuştur. Bu şekilde cevaplayan öğrenciler 9. sınıflarda 21, 10. sınıflarda 14 ve 11. sınıflarda ise 23’tür.“Beyaz nokta sayısının artış miktarından faydalanma” kategorisinde cevap veren öğrenciler beyaz noktaların sayısının yinelemeli olarak 4’er 4’er arttığını keşfedip şekil 6 ‘ya genişleterek 28 cevabına ulaşmışlardır. Bu şekilde cevaplayan öğrenciler 9. sınıflarda 10, 10. sınıflarda 9 ve 11. sınıflarda ise 16’dır. “(şeklin sayısı +2)^2- (şekil sayısı)^2 şeklinde formül üretme ”kategorisinde cevap veren öğrenciler beyaz nokta sayısının bir kurala göre arttığını keşfedip bir formül geliştirmişlerdir. Bu formül , (Şeklin Sayısı +2)^2 –(Şeklin Sayısı)^2 şeklinde olup (şekil 6+2)^2- (şekil 6)^2= 8^2-6^2= 28 olarak doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde cevaplayan öğrenciler 9. sınıflarda 4, 10. ve 11. sınıflarda ise 1’dir. “Beyaz nokta sayısını 4(şekil no)+4 ya da 4(şekil no+1) şeklinde formül üretme” kategorisinde cevap veren öğrenciler beyaz nokta sayısı için 4(şekil no)+4 ya da 4(şekil no +1**)** şeklinde bir çıkarımda bulunmuşlardır. Yani şekil sayısı 6 için 4(6+1)=28 ya da (4x6)+4 =28 şeklinde doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde cevaplayan öğrenciler 9. sınıflarda 3, 10. sınıflarda 2 ve 11. sınıflarda ise 4’tür. “n” bir şeklin bir kenarındaki nokta sayısı olmak üzere 4n-4 şeklinde formül üretme “kategorisinde cevap veren öğrenci sadece 11.sınıflardan 1 öğrenci olmuştur. Öğrenci burada “n” bir şeklin kenarındaki nokta sayısı olmak üzere 4n-4 şeklinde bir formül geliştirmiştir. Ve şekil 6 ‘nın bir kenarında 8 nokta olduğundan 8x4=32 ,32-4=28 olarak cevaba ulaşmıştır. “Şekli tam çizmeden şeklin çevresini hesaplama” kategorisinde cevap veren öğrenciler şekil 6 nın tamamını tam çizmeden kenarlarındaki artıştan faydalanarak şekil 6 ‘nın çevresinde kaç tane beyaz nokta olduğunu düşünmeye çalışmışlardır. Bunun için de şekil 6’nın bir kenarında 8 tane beyaz nokta olduğunu her seferinde şekil sayısı +2 şeklinde geldiğini keşfedip şekil 6’da 8’er tane aşağı ve yukarda, 6’şar tane de sağ ve solda olmak üzere şeklin tüm çevresindeki beyaz nokta sayısına ulaşmışlardır. Bu şekilde cevaplayan öğrenciler 9. sınıflarda 4, 10. sınıflarda 1ve 11. sınıflarda ise 2’dir. “Şekil çizme” kategorisinde cevap verenler öğrenciler şekil 1,2,3 ‘ü inceleyerek şekil 6 ‘ya genişletmişlerdir ve beyaz nokta sayısına bu şekilde ulaşmışlardır. 10.sınıflardan 1,11.sınıflardan 3 öğrenci bu şekilde cevap verirken 9.sınıflardan bu şekilde cevap veren hiç olmamıştır. “Sadece sonucu yazanlar" kategorisinde cevap verenler öğrenciler sadece sonucu 28 şeklinde yazmışlardır. Bu şekilde cevap veren öğrencilerin sayısı 9. ve 11.sınıflarda 8, 10.sınıfta ise 4'tür.Bu sorunun d seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.15'te verilmiştir.

Tablo 4.15. Siyah –Beyaz Nokta Sorusunun D Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

Kategori	**Örnek cevap**	**9. sınıf**	**10 sınıf**	**11 sınıf**	**Toplam**
Tüm nokta sayısından siyah nokta sayısını çıkarma	d) 10 numaralı şekil 12x12 bir şekildir içinde 100 tane Siyah nokta vardır. Hocam vaktimiz zaten kısıtlı o yüzden 144 tane daire çizemem kusura bakmayın. (9b-Ö23) 100 − 64 = 36 121 − 81 = 40 144 − 100 = 44 (9a-Ö5)	9	3	3	15
Beyaz nokta sayısının artış miktarından faydalanma	Sekil 1 → 8 // 2 → 12 // 3 → 16 // 4 → 20 Şekil 5 → 24 // 6 → 28 // 7 → 32 // 8 → 36 Sekil 9 → 40 Şekil 10 → 44 (11c-Ö27)	10	5	12	27
(şeklin sayısı +2)^2- (şekil sayısı)^2 şeklinde formül üretme	d) n. şekil ise Formül n^2 → siyah nokta $(n+2)^2$ → noktaların tamamı $(n+2)^2 - n^2 = 44$ $n^2 + 4n + 4 - n^2 = 44$ $4n = 40$ $n = 10$ (9a-Ö8) d-1 şekil x $(x+2)^2 - x^2 = 44$ $(2x+2).(2) = 44$ ↳ 22 x = 10 (11a-Ö56	5	3	4	12
$\frac{beyaz\ nokta}{4}$ - 1 Şeklinde ya da $\frac{beyaz\ nokta-4}{4}$ Şeklinde formül üretme	Formül $\frac{n}{4} - 1$. (9a-Ö1) d) $\frac{44-4}{4} = 10$ 10 numaralı şekil olacaktır. (10a-Ö4)	2	4	3	9

“n” şekil no olmak üzere beyaz nokta sayısını 4n+4 şeklinde formül üretme	d) 4n+4 = beyaz daire formülü 4n+4=44 4n=40 n=10 10. adımda 44 beyaz olacaktır (9b-Ö21) 4.x+4=44 x=10 10 → 44 numaralı şekil 4.x+4 formülü ile aralarındaki oranı buldum. (11c-Ö37)	3	0	4	7
“n” beyaz nokta sayısı olmak üzere $\frac{n}{4}$ +1= bir kenarı bulunup kenar sayısı ile şekil no arasında 2 farkı keşfetme	d) 44/4 11+1=12 bir kenardaki beyaz sayısı n+2=12 ise bu 10. şekildir (10b-Ö23)	0	1	0	1
Denklem kurma	d) x+x+(x-2)+(x-2)=44 4x-4=44 4x=48 x=12 (9b-Ö27) 2) d) a olsun 2(a+2)+2a=44 2a+4+2a=44 4a+4=44 4a=40 a=10 (11b-Ö8)	1	0	1	2
Terim sayısı formülünden hesaplama	d-) $\frac{(44-8)}{4}$ + 1 = 10 numaralı şekil temel beyaz nokta sayısı eksi son nokta sayısı bölü artış miktarı (11c-Ö29)	0	1	6	7
Şekli tam çizmeden şeklin çevresini hesaplama	10. şekil; 1+10+1 Boyalı sayı etrafı beyaz (10b-Ö33)	3	1	3	7
Şekil çizme	d) Şekil 10  (9c-Ö57)	9	9	4	22
Sadece sonucu yazanlar	Şekil 10	2	3	1	6

Tablo 4.15’ten de görüldüğü gibi verilen cevaplar 11 farklı kategori altında toplanmıştır. Bu sorunun d seçeneğinde şekil 1 de 8 beyaz nokta, şekil 3 ‘te 16 nokta olduğu verilmiş ve 44 beyaz nokta olması durumunda hangi şekil numarasının olduğu sorulmuştur. Burada uzak bir durum istenmiş olup öğrenciden bir kural keşfetmesi beklenmiştir. Şekil sayıları ile beyaz nokta arasındaki ilişkiden faydalanıp 4x(şekil 1)+4=8 beyaz nokta, 4x(şekil 2)+4 =12 beyaz nokta ve 4x(şekil 3)+4=16 beyaz nokta olduğunu fark etmesi, bu durumda uzak durum için 4x(şekil no)+4= 44 kuralı için genişletmesi beklenmektedir. “Tüm nokta sayısından siyah nokta sayısını çıkarma” kategorisinde cevap veren öğrenciler, tüm şekildeki nokta sayısından siyah nokta sayısının çıkarılmasıyla beyaz nokta sayısına ulaşacaklarını keşfetmişlerdir.

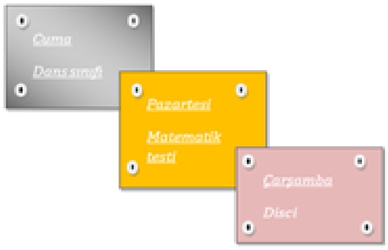
Diğer şekillere bakarak örüntü kuran öğrenciler bunu şekil 10 ‘a kadar genişletmişlerdir. Bu şekilde yaklaşan öğrencilerden 9.sınıfta 9, 10. ve 11.sınıfta da 3 kişidir. “Beyaz nokta sayısının artış miktarından faydalanma” kategorisinde cevap veren öğrenciler beyaz noktaların sayısının yinelemeli olarak 4’er 4’er arttığını keşfedip şekil 10 ‘ya genişleterek doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde cevap veren öğrencilerin sayısı 9. sınıfta 10, 10.sınıfta 5 ve 11.sınıfta da 12’dir. “(şeklin sayısı +2)^2- (şekil sayısı)^2 şeklinde formül üretme” kategorisinde cevap veren öğrenciler, beyaz nokta sayısının bir kurala göre arttığını keşfedip bir formül geliştirmişlerdir. Bu formül , (Şeklin Sayısı +2)^2 –(Şeklin Sayısı)^2 şeklinde olup (şekil no+2)^2- (şekil no)^2= 44, şekil no =10 olarak doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde cevaba ulaşan öğrencilerden 5 tanesi 9.sınıflardan, 3 tanesi 10.sınıflardan ve 4 tanesi de 11.sınıftandır. "($\frac{\text{Beyaz nokta}}{4}$ -1) şeklinde ya da $\frac{(\text{Beyaz nokta}-4)}{4}$ şeklinde formül üretme ” kategorisinde cevap veren öğrenciler, burada $\frac{\text{beyaz nokta}}{4}$ **-1** şeklinde ya da $\frac{\text{beyaz nokta}-4}{4}$ şeklinde formül geliştirerek $\frac{44}{4}$ -1 = 10 ya da $\frac{44-4}{4}$ =10 şeklinde doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler 9.sınıftan 2, 10.sınıftan 4 ve 11.sınıftan 3 kişidir. “ “n” şekil no olmak üzere beyaz nokta sayısını 4n+4 şeklinde formül üretme” kategorisinde cevap veren öğrenciler, “n” şekil no olmak üzere beyaz nokta sayısını 4n+4 şeklinde formül geliştirmişlerdir ve 4n+4= 44, buradan da n =10 bularak doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde cevap veren öğrenciler 9.sınıflardan 3,11.sınıflardan 4 olup 10.sınıflardan hiç kimse bu şekilde yaklaşmamıştır. ““n” beyaz nokta sayısı olmak üzere $\frac{n}{4}$ +1= bir kenarı bulunup kenar sayısı ile şekil no arasında 2 farkı keşfetme” kategorisinde cevap veren tek öğrenci 10.sınıflardan 1 öğrenci olmuştur. Öğrenci burada “n” beyaz nokta sayısı olmak üzere $\frac{n}{4}$ +1= bir kenarı bulup kenar sayısı ile şekil no arasında 2 farkı keşfederek şekil 10 doğru cevaba ulaşmıştır. "Denklem kurma" kategorisinde cevap veren öğrenciler 9. ve 11.sınıftan birer öğrencidir. Bu öğrenciler, şeklin kenarlarının karşılıklı olarak şekil numarasının 2 fazlası, diğer kenarların da şekil numarası sayısına eşit olduğunu fark etmiş ve burada şekil no'yu bilinmeyen göstererek denklem çözümüne geçmiştir. Şekil no x olsun, x+x+(x+2)+(x+2)= 44 denklemini kurup x=10 bularak doğru cevaba ulaşmışlardır. "Terim sayısı formülünden hesaplama" kategorisinde cevap veren öğrenciler, ilk şekilde 8 beyaz, son şekilde de 44 beyaz nokta olduğundan ve her şekilde 4 artan beyaz nokta sayısından yola çıkarak şekil sayısının terim sayısına ulaşmak için aşağıdaki terim sayısı formülünü kullanmışlardır.

Terim sayısı $=\frac{son\ terim - ilk\ terim}{artış\ miktarı}$ +1 ve $\frac{44-8}{4}$ +1 = 10 cevabına ulaşmışlardır. Bu şekilde cevap veren öğrenciler 10.sınıflardan 1,11.sınıflardan 6 kişi olup 9.sınıflardan bu şekilde yaklaşan öğrenci olmamıştır. "Şekli tam çizmeden şeklin çevresini hesaplama" kategorisinde cevap veren öğrenciler, şeklin tamamını çizmeden kenarlarına gelebilecek beyaz nokta sayıları keşfedip şeklin çevresini bularak doğru sonuca ulaşmışlardır. Yani karşılıklı iki kenarın şekil numarasının 2 fazlası olduğunu, diğer iki kenarın da şekil numarasına eşit geleceğini düşünmüş ve şeklin çevresini bularak doğru sonuca ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler, 9.ve 11.sınıflardan 3, 10.sınıflardan ise 1 kişidir. "Şekil çizme" kategorisinde cevap veren öğrenciler, şekil 1,2,3 'ü inceleyip 44 beyaz nokta gelene kadar şekli genişletmişlerdir. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler 9 ve 10. sınıflardan 9 kişi, 11.sınıflardan da 4 kişidir. "Sadece sonucu yazanlar" kategorisinde ise öğrenciler, işlem yapmadan doğrudan şekil 10 cevabına ulaşan öğrencilerdir.9.sınıflardan 3, 10.sınıflardan 2 ve 11.sınıflardan ise 1 kişi bu şekilde yazmışlardır.

4.1.3. “İğne ve Kartlar” Sorusundan Elde Edilen Bulgular

Aşağıda verilen soru örneği Barbosa, A., Vale, I. and Palhares, P. ‘dan (2008) çalışmasından alınmış ve uyarlanmıştır.

1) Ersin randevularını hatırlamak için odasındaki tahtasına notlar asmıştır. Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi notları tutturmak için iğneler kullanılmıştır.



Eğer bu şekilde notlar asılmaya devam edilirse;

d) 6 notu asmak için kaç tane iğneye ihtiyaç vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

e) Eğer 35 not asılmışsa kaç tane iğne kullanılmıştır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

f) Ersin üçgen şeklindeki notlar asmaya karar vermiştir ve üçgenin her bir köşesine bir iğne tutturacaktır. Üst üste gelen üçgenlerde ortak bir iğne bulunacaktır. Bu doğrultuda yukarıdaki soruları tekrar cevaplandırınız.

Şekil 4.3. İğne ve Kartlar Sorusu

Şekil 4.3’ten de görüldüğü üzere soru 3 seçeneklidir. Fakat c seçeneğinde, dikdörtgen şeklindeki notların üçgen şeklinde asılarak a ve b seçeneklerine göre tekrar cevaplandırılması istenmiştir. Bu durumda soru 4 seçenekli olmaktadır. Yani a ve b seçenekleri sorunun kendisinden gelen seçenekleri olup c seçeneğinde istenildiği üzere a ve b seçeneklerini tekrar cevaplayınız ifadesinden dolayı bu soruya ait a seçeneğini “c” olarak ve b seçeneğini de “d” seçeneği olarak alındı ve yorumlandı. Soruda randevuları hatırlamak için tahtaya 3 not ve bu notları tutturmak için 10 tane iğne kullanılmıştır. A seçeneğinde 6 notu asmak için kaç adet iğneye ihtiyaç olduğu sorulmuştur. Burada amacımız yakın durum olan n=6 için bir kural keşfetmesidir. Yani 1 not asılı iken 4 iğne, 2 not asılı iken 7 iğne, 3 not asılı iken 10 iğne olduğunu inceleyerek “3.(not sayısı)+1” kuralını keşfedip 3. 6+1=19 cevaba ulaşması beklenmektedir. Ya da başka bir bakış açısıyla her koşulda en son asılan notta 4 adet iğne olduğunu düşünüp diğer asılan notlarda ise 3’er adet iğne olacağını düşünerek “3(not sayısı-1) +4” şeklinde bir formül üretmesi beklenmiştir. B seçeneğinde ise bu formülleri n =35 uzak durum için genişletmesi beklenmektedir. 3.(not sayısı)+1 formülünden yola çıkarak, 3(35)+1=106 şeklinde ya da başka bakış açısıyla 3(not sayısı-1) +4 formülünden yola çıkarak 3.(35-1)+ 4 =106 şeklinde genişleterek cevaba ulaşması beklenmektedir. C seçeneğinde ise genelleme becerisini farklı bir duruma taşımak hedeflenmiştir. Yani 4 kenarlı bir çokgenden 3 kenarlı bir çokgen düşünerek n=6 yakın durum ve n=35 uzak durumları genişletmesi beklenmiştir. C seçeneğinde, duvarda 1 not asılıyken 3 iğne, 2 not asılıyken 5 iğne ve 3 not asılıyken de 7 iğne tutturulduğunu fark ederek not sayısı ile iğne arasında bir kural olduğunu ve bu kuralın “2.(not sayısı)+1” şeklinde olduğunu keşfetmeleri beklenmiştir. Ya da başka bir bakış açısıyla en son notta her koşulda 3 adet iğne olduğunu düşünüp diğer asılan notlarda ise 2’şer adet iğne olacağını düşünerek “2.(not sayısı-1) +3” şeklinde bir formül üretmesi beklenmektedir. Dolayısıyla n=6 özel durum için “2.(not sayısı)+1” formülünden 2.6+1=13 ya da “2.(not sayısı-1) +3” formülünden 2.(6-1)+3=13 cevabına ulaşması beklenmektedir. D seçeneğinde ise n= 35 uzak durum için aynı şekilde “2.(not sayısı)+1” formülünden 2.35+1=71 ya da “2.(not sayısı-1) +3” formülünden 2.(35-1)+3= 71 cevabına ulaşması beklenmektedir.

Tablo 4.16. “İğne ve Kartlar ” Sorusunun Şıklarına ve Sınıflara Göre Analizi

	a şıkkı			b şıkkı			c şıkkı			d şıkkı		
	Doğru	Yanlış	Boş	Doğru	Yanlış	Boş	Doğru	Yanlış	Boş	Doğru	Yanlış	Boş
9.sınıf (63 Kişi)	53	9	1	48	9	6	39	8	16	35	11	17
10 sınıf (56 Kişi)	40	9	7	37	7	12	23	2	31	19	5	32
11.sınıf (61 Kişi)	50	9	2	46	10	5	40	5	16	37	8	16

Tablo 4.16’ya göre a seçeneğini (n=6 özel durum için) 9.sınıflardan 53, 10.sınıflardan 40, 11.sınıflardan ise 50 öğrenci doğru cevaba ulaşmıştır. B seçeneğinde ise (n=35 özel durum için) 9.sınıflardan 48, 10.sınıflardan 37 ve 11.sınıflardan ise 46 öğrenci doğru cevaba ulaşmıştır. C seçeneğinde başka bir duruma transfer edilmesi hedeflenmiş olup dikdörtgen şeklindeki notlardan üçgen şekildeki notları düşünüp (n=6 özel durum için) 9.sınıflardan 39, 10.sınıflardan 23, 11.sınıflardan ise 40 öğrenci doğru cevaba ulaşmıştır. Burada 9.sınıflardan 14 öğrenci, 10.sınıflardan 17, 11.sınıflardan ise 10 öğrenci a seçeneğine doğru yanıt verirken c seçeneğine doğru yanıt verememiştir. D seçeneğinde ise üçgen şekildeki notların (n=35 özel durum için) 9.sınıflardan 35, 10.sınıflardan 19 ve 11.sınıflardan ise 37 öğrenci doğru yanıt vermiştir. Öğrencilerin hangi seçenekleri doğru yaptıkları 9. sınıflar için Tablo 4.17’de, 10. sınıflar için Tablo 4.18 ve 11. sınıflar içinde Tablo 4.19’da gösterilmiştir.

Tablo 4.17. 9. Sınıftaki Öğrencilerin İğne ve Kartlar Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	C	D	KODLAR	A	B	C	D
9a-Ö1	✓	✓	✓	✓	9b-Ö33	✓	✓	✓	✓
9a-Ö2	✓	✓	✓	✓	9b-Ö34	✗	✓	✓	✓
9a-Ö3	✓		✓	✓	9b-Ö35	✓	✓	✓	✓
9a-Ö4	✓	✓	✓	✓	9b-Ö36	✓	✗		
9a-Ö5					9b-Ö37	✓	✓	✓	✓
9a-Ö6	✗	✗	✗	✗	9b-Ö38	✗	✗		
9a-Ö7	✓	✓	✓	✗	9b-Ö39	✓	✓	✓	✓
9a-Ö8	✓	✓	✓	✓	9b-Ö40	✓	✓	✓	✓
9a-ö9	✓	✓	✓	✓	9c-Ö41	✗		✓	
9a-Ö10	✓	✓	✓	✓	9c-Ö42	✗	✗	✗	✗
9a-Ö11	✓	✓	✓	✓	9c-Ö43	✗	✗		
9a-Ö12	✓	✓	✓	✓	9c-Ö44	✓			
9a-Ö13	✓	✓	✓	✓	9c-Ö45	✓	✓	✓	✓
9a-Ö14	✓	✓	✓	✓	9c-Ö46	✓	✓		
9a-Ö15	✓	✓	✓	✓	9c-Ö47	✓	✓		
9a-Ö16	✓	✓	✓	✓	9c-Ö48	✗	✓		
9a-Ö17	✓	✓	✓	✓	9c-Ö49	✓	✓	✗	✗
9b-Ö18	✓	✓	✓	✓	9c-Ö50	✓	✓	✓	✓
9b-Ö19	✓	✓	✓	✗	9c-Ö51	✓	✗	✗	✗
9b-Ö20	✓	✓	✓	✓	9c-Ö52	✓	✓	✓	✓
9b-Ö21	✓	✓	✓	✓	9c-Ö53	✗	✗	✗	✗
9b-Ö22	✓	✓	✓	✗	9c-Ö54	✓	✗	✗	✗
9b-Ö23	✓	✓			9c-Ö55	✓	✓	✓	✓
9b-Ö24	✓	✓			9c-Ö56	✓			
9b-Ö25	✓	✓	✓	✓	9c-Ö57	✓	✓	✓	✓
9b-Ö26	✓	✓	✓	✓	9c-Ö58	✓	✓		
9b-Ö27	✓	✓	✓	✓	9c-Ö59	✓	✓	✓	✓
9b-Ö28	✓	✓	✓	✓	9c-Ö60	✓	✓	✓	✓
9b-Ö29	✓				9c-Ö61	✓	✓		
9b-Ö30	✓	✓			9c-Ö62	✓	✓		
9b-Ö31	✓	✓	✗	✗	9c-Ö63	✗	✗	✗	✗
9b-Ö32	✓	✓	✓	✓					

Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	
işlem hatası	✓

Tablo 4.17'den görüldüğü gibi 9.sınıflardan 35 öğrenci d seçeneğini doğru cevaplamıştır. Bu öğrencilerin a, b ve c seçeneklerini de doğru yapması beklenirken yalnızca 1 tanesi a seçeneğini yanlış yaparken, 1 tanesi de b seçeneğini boş bırakıp yapamamıştır. Bunun yanında yine Tablo 4.17 incelendiğinde 3 öğrenci a,b,c seçeneklerini doğru yapmalarına rağmen d seçeneğini doğru yapamamıştır. Ayrıca 10 öğrenci de a ve b seçeneklerini doğru yaparken diğer duruma transfer edemeyip ya yanlış cevaplamış ya da boş bırakmıştır.

Tablo 4.18. 10.Sınıftaki Öğrencilerin İğne ve Kartlar Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	C	D	KODLAR	A	B	C	D
10a-Ö1	✓	✓			10b-Ö29	✓	✓	✓	✓
10a-Ö2	✓	✓	✓	✗	10b-Ö30				
10a-Ö3	✓	✓	✓	✓	10b-Ö31	✓	✓	✓	✓
10a-Ö4	✗	✗	✗	✗	10b-Ö32				
10a-Ö5	✓	✓	✓	✓	10b-Ö33				
10a-Ö6	✓	✓	✓	✓	10b-Ö34				
10a-Ö7	✓	✓	✓	✓	10b-Ö35				
10a-Ö8	✓	✗			10b-Ö36	✓	✓		
10a-Ö9	✓				10b-Ö37	✓	✗		
10a-Ö10	✓	✓			10c-Ö38	✗	✓		
10a-Ö11	✓	✓			10c-Ö39	✓			
10a-Ö12	✓	✓	✓		10c-Ö40	✓	✓		
10a-Ö13	✓	✓	✓	✓	10c-Ö41	✓	✓		
10a-Ö14	✓	✓	✓	✓	10c-Ö42	✓	✓	✓	✓
10a-Ö15	✓	✓			10c-Ö43				
10a-Ö16	✓	✓			10c-Ö44	✗	✓	✓	✗
10a-Ö17	✓				10c-Ö45	✓	✓	✓	✓
10a-Ö18	✓	✓	✓	✓	10c-Ö46	✓	✓		
10a-Ö19	✓	✓	✓	✓	10c-Ö47	✗	✗		
10a-Ö20	✓	✓	✓	✓	10c-Ö48	✓	✓		
10a-Ö21	✓	✓	✓	✓	10c-Ö49	✗			
10a-Ö22	✓	✓	✓	✗	10c-Ö50	✗			
10b-ö23	✓	✓			10c-Ö51	✓	✓		
10b-Ö24	✓	✓	✓	✓	10c-Ö52	✗	✗		
10b-Ö25	✓	✓	✓	✓	10c-Ö53	✓	✓	✓	✓
10b-Ö26	✗	✗	✗	✗	10c-Ö54	✓	✓	✓	✓
10b-Ö27					10c-Ö55	✗	✗		
10b-Ö28	✓	✓			10c-Ö56	✓	✓	✓	✓

Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	
işlem hatası	✓

Tablo 4.18 incelendiğinde 10.sınıflardan 19 öğrenci d seçeneğini doğru cevaplamıştır. Bunun yanında 2 öğrenci a, b ve c seçeneklerini doğru yanıtlamalarına rağmen d seçeneğini bir tanesi yapamamış bir tanesi de yanlış cevaplamıştır. Ayrıca yine Tablo 4.18 incelediğinde 13 öğrenci a ve b seçeneklerini doğru yaparken diğer duruma transfer edemeyip boş bırakmıştır.

Tablo 4.19. 11.Sınıftaki Öğrencilerin İğne ve Kartlar Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	C	D	KODLAR	A	B	C	D
11b-Ö1	✓	✓	✓	✓	11c-Ö32	✓	✓	==✓==	✓
11b-Ö2					11c-Ö33	✓	✓	✓	✓
11b-Ö3	✓	✓	✓	✓	11c-Ö34	✓			
11b-Ö4	✓	✓	✓	✓	11c-Ö35	✗	✗	✗	✗
11b-Ö5	✓	✓	✓	✓	11c-Ö36	✓	✓		
11b-Ö6	✓	✓	✓	✓	11c-Ö37	✓	✓		
11b-Ö7	✓	✓	✓	✓	11c-Ö38	✓	✓	✓	✓
11b-Ö8	✓	✓	✓	✓	11c-Ö39	✗	✗	✓	✗
11b-Ö9	✓	✓	✓	✓	11c-Ö40	✗	✗	✓	✗
11b-Ö10	✓	✓	✓	✓	11c-Ö41	✓	✓		
11b-Ö11	✓	✓	✓	✓	11a-Ö42	✓	✓	✓	✓
11b-Ö12	✓	✓	✓	✓	11a-Ö43	✓	✓	✓	✓
11b-Ö13	✓	✓	✓	✓	11a-Ö44	✓	✓	✓	✓
11b-Ö14	✓	✓	✓	✓	11a-Ö45	✓	✓	✓	✓
11b-Ö15	✗	✗	✓	✓	11a-Ö46	✓	✓	✓	✓
11b-Ö16	✗	✗			11a-Ö47	✓	✓	✓	✓
11b-Ö17	✓	✓			11a-Ö48	✓	✓	✓	✓
11b-Ö18	✓	✓			11a-Ö49	✓	✓	✓	✓
11b-Ö19	✓	✓	✓	✓	11a-Ö50	✗	✗	✓	✓
11b-Ö20	✓	✓			11a-Ö51	✓	✗	✓	✗
11c-Ö21	✓	✓	✓	✓	11a-Ö52				
11c-Ö22	✓	✓	✓	✓	11a-Ö53	✗	✓	✓	==✓==
11c-Ö23	✓	✓	✓	✓	11a-Ö54	✗	✗	✗	✗
11c-Ö24	✓	✓			11a-Ö55	✓	✓	✓	✓
11c-Ö25	✓				11a-Ö56	✓	✓	✓	✓
11c-Ö26	✓	✓			11a-Ö57	✓	✓		
11c-Ö27	✓	✓	✓	✓	11a-Ö58	✓	✓	✓	✓
11c-Ö28	✓	✓	✓	✓	11a-Ö59	✓	✓	✓	✓
11c-Ö29	✓	✗	✗	✗	11a-Ö60	✓	✓		
11c-Ö30	✓				11a-Ö61	✗	✗	✗	✗
11c-Ö31	✓	✓	✗	✗					

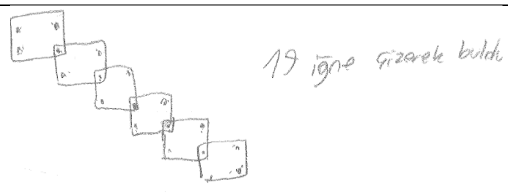
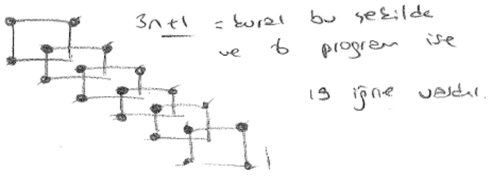
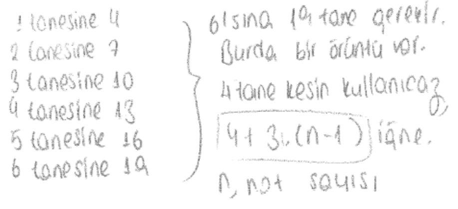
Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	
işlem hatası	==✓==

Tablo 4.19 incelendiğinde 11.sınıflardan 37 öğrenci d seçeneğini doğru cevaplamıştır. Bu öğrencilerden a, b ve c seçeneklerini doğru yapmaları beklenirken 2 tanesi a ve b seçeneğine yanlış cevap vermiş, 1 tanesi de sadece a seçeneğine yanlış cevap vermiştir. Bunun yanında a, b ve c seçeneklerini doğru cevaplayıp d seçeneğini cevaplayamayan öğrenci olmamıştır. Yalnızca a ve b seçeneğini doğru cevaplayıp diğer duruma transfer edemeyen 11 öğrenci mevcuttur.

Tablo 4.17, Tablo 4.18 ve Tablo 4.19 birlikte yorumlanırsa d seçeneğini doğru yapan öğrencilerin a, b ve c seçeneklerini de doğru yapması beklenmektedir. 9. sınıflardan d seçeneğini doğru yapan 35 öğrenciden yalnızca 1 tanesi a seçeneğini yanlış yaparken, 1 tanesi de b seçeneğini boş bırakıp yapamamıştır. 10. sınıflardan d seçeneğini doğru yapan 19 öğrenciden yalnızca 2 tanesi a, b ve c seçeneklerini doğru yanıtlamalarına rağmen d seçeneğini bir tanesi yapamamış bir tanesi de yanlış cevaplamıştır. 11. sınıflardan d seçeneğini doğru yapan 37 öğrenciden 2 tanesi a ve b seçeneğini yanlış cevap verirken 1 tanesi de a seçeneğine yanlış cevap vermiştir. Diğer taraftan a, b ve c seçeneklerini doğru yapmalarına rağmen d seçeneğini doğru yapamayan 9 sınıflardan 3, 10. sınıflardan 2 öğrencidir. 11.sınıfta ise a, b ve c seçeneklerini doğru cevaplayan öğrenciler d seçeneğini de doğru cevaplamışlardır. Bunun yanında a ve b seçeneklerini doğru cevaplayan fakat c ve d seçeneklerini boş bırakan ya da yanlış cevaplayan öğrencilerin sayısı 9.sınıfta 10, 10.sınıfta 13 ve 11.sınıfta ise 11'dir. Bu öğrencilerin özel durumlarda problemi çözebildikleri ve genelleyebildikleri fakat başka bir duruma transfer etme ile ilgili sıkıntıları olduğu söylenebilir.

İğne ve Kartlar Sorusu sorusunda öğrencilerin problemi çözerken sorunun her bir seçeneğinde verdikleri cevapların sınıflarına göre karşılaştırmalarını yapmak amacıyla a seçeneğine yönelik verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.20'de, b seçeneğine yönelik verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.21'de, c seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.23'te ve d seçeneğine verilen cevaplar ise tablo 4.24'te verilmiştir.

Tablo 4.20. İğne ve Kartlar Sorusunun A Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

Kategori	Örnek cevap	9. sınıf	10 sınıf	11 sınıf	Toplam
Şekil çizme	 (9a-Ö11)	11	5	3	19
"n" not sayısı olmak üzere 3n+1 şeklinde formül üretme	 (9b-Ö21)	26	12	29	67
"n" not sayısı olmak üzere 3(n-1)+4 şeklinde formül üretme	 (9a-Ö10)	7	15	15	37

“n” not sayısı olmak üzere 4n-(n-1) şeklinde formül üretme	3) a- 6.4-5=19 ayrı ayrı yaptığını düşünürsek 6 kağıt var. 1 kağıt için 4 iğne gerekir. Normalde 24 iğne olmalı. Ama üst üste olduğu için 6-1=5 iğne iki kağıdı birbirine bağlar o yüzden 24-5=19 (10a-Ö10)	4	4	2	10
Sadece sonucu yazanlar	19	6	5	1	12

Tablo 4.20’de da görüldüğü gibi a seçeneği 5 farklı kategori altında toplanmıştır. a seçeneğinde n=6 özel durum için iğne sayısı sorulmuştur. Burada öğrenciden 3 notu incelemesini ve n=6 özel durum için genişletmesi beklenmektedir. “Şekil çizme” kategorisinde cevap veren öğrenciler yakın durum olan 6 için, 6 notu da çizip üzerindeki iğneleri sayarak cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler 9.sınıfta 11, 10.sınıfta 5 ve 11.sınıfta ise 3’tür. ““n” not sayısı olmak üzere 3n+1 şeklinde formül üretme” kategorisinde cevap veren öğrenciler 1 not asılı iken 4 iğne, 2 not asılı iken 7 iğne, 3 not asılı iken 10 iğne olduğunu inceleyerek “3.(not sayısı)+1” kuralını keşfedip 3. 6+1=19 şeklinde doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrencilerden 26’sı 9.sınıf, 12 ‘si 10.sınıf ve 29’u da 11.sınıftandır. ““n” not sayısı olmak üzere 3(n-1)+4 şeklinde formül üretme” kategorisinde cevap veren öğrenciler her koşulda en son asılan notta 4 adet iğne olduğunu düşünüp diğer asılan notlarda ise 3’er adet iğne olacağını düşünerek “3(not sayısı-1) +4” şeklinde bir formül geliştirmiştir. Ve buradan 3.(6-1)+4=19 doğru cevabına ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler 9.sınıflardan 7, 10 ve 11.sınıflardan ise 15’tir. ““n” not sayısı olmak üzere 4n-(n-1) şeklinde formül üretme” kategorisinde cevap veren öğrenciler kâğıtları ayrı ayrı düşünüp her birinde 4 iğne olacağını fakat bunlardan 6-1 =5 tanesinin bu iki notu birbirine bağladığı için iki kere saydığını fark edip tüm durumdan çıkarmıştır. Yani 4.6-(6-1)=19 doğru cevabına ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler, 9. ve 10.sınıflardan 4 ve 11.sınıftan ise 2’dir. “Sadece sonucu yazanlar” kategorisinde cevap veren öğrenciler sadece 19 cevabını vermişlerdir. Bu şekilde cevap veren öğrenciler 9.sınıftan 6, 10.sınıftan 5 ve 11.sınıftan ise 1 kişidir. Bu sorunun b seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.21’de verilmiştir.

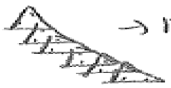
Tablo 4.21. İğne ve Kartlar Sorusunun B Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

Kategori	**Örnek cevap**	**9. sınıf**	**10 sınıf**	**11 sınıf**	**Toplam**
“n” not sayısı olmak üzere 3n+1 şeklinde formül üretme	b)35 not ile = 3n+1 kural uygulanır (3.35+1 = 106 iğne not (9b-Ö21)	26	15	28	69
“n” not sayısı olmak üzere 3(n-1)+4 şeklinde formül üretme	4+34.3 = 106 4+3(n-1) formül (11a-Ö53)	7	11	16	34
“n” not sayısı olmak üzere 4n-(n-1) şeklinde formül üretme	4.35 −34 106 (11a-Ö44)	6	4	2	12
Sadece sonucu yazanlar	106	7	6	0	13

Tablo 4.21’de görüldüğü gibi b seçeneği 4 farklı kategoride toplanmıştır. Burada n=6 özel durum için geliştirilen formüllerin n=35 için de genişletilmesi beklenmektedir. ““n” not sayısı olmak üzere 3n+1 şeklinde formül üretme” kategorisinde cevap veren öğrenciler n not sayısı olmak üzere a seçeneğinde geliştirdiği n=6 özel durum için uyguladığı 3n+1 formülünü n=35 için de genişletmiştir. Yani 3. 35+1 =106 doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler diğer kategorilere oranla daha fazla olup 9.sınıflarda 26, 10.sınıflarda 15 ve 11.sınıflarda ise 28’dir. ““n” not sayısı olmak üzere 3(n-1)+4 şeklinde formül üretme” kategorisinde cevap veren öğrenciler son asılan her notta 4 adet iğne olduğunu düşünüp diğer asılan notlarda ise 3’er adet iğne olacağını düşünerek “3(not sayısı-1) +4” şeklinde geliştirdiği formülü n=35 özel durum için genişletmiş ve 3.(35-1) +4 = 106 doğru cevabına ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler, 9.sınıflardan 7, 10.sınıflardan 11 ve 11.sınıflardan ise 16 ‘dır. ““n” not sayısı olmak üzere 4n-(n-1) şeklinde formül üretme” kategorisinde cevap veren öğrenciler de

a seçeneğinde n=6 özel durum için geliştirdikleri 4n-(n-1) şeklindeki formülü n=35 özel durum için genişletmişlerdir. Yani öğrenciler kâğıtları ayrı ayrı düşünüp her birinde 4 iğne olacağını fakat bunlardan 35-1 =34 tanesinin bu iki notu birbirine bağladığı için iki kere saydığını fark edip tüm durumdan çıkarmıştır ve bu durumda n not sayısı olmak üzere 4.35-(35-1)= 106 şeklinde doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrencilerden 6 ‘sı 9.sınıf, 4'ü 10.sınıf ve 2'si de 11.sınıftır. "Sadece sonucu yazanlar" kategorisinde cevap veren öğrenciler sadece 106 cevabını vermişlerdir. Bu şekilde cevap veren öğrenciler 9.sınıftan 7, 10.sınıftan 6 ‘dır. 11.sınıftan ise bu şekilde cevap veren olmamıştır. Bu sorunun c seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.22.'de verilmiştir.

Tablo 4.22. İğne ve Kartlar Sorusunun C Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

Kategori	**Örnek cevap**	**9. sınıf**	**10 sınıf**	**11 sınıf**	**Toplam**
Şekil çizme	 → 13 iğne (9c-Ö57)	1	0	0	1
"n" not sayısı olmak üzere 2n+1 şeklinde formül üretme	2n+1 6.2 = 12 +1 = 13 (9a-Ö4)	18	8	22	48
"n" not sayısı olmak üzere 2(n-1)+3 şeklinde formül üretme	yine formül yapalım; üçgen olduğu için 2(n-1)+3 = iğne sayısı 2(6-1)+3 = (2.5)+3 = 13 (9a-Ö8)	6	7	12	25
"n" not sayısı olmak üzere 3n-(n-1) şeklinde formül üretme	eğer üçgen olursa, formül iğne = (not sayısı).3 −(not sayısı−1) 6.3 − 5 = 13 (9a-Ö11)	4	1	1	6
Sadece sonucu yazanlar	13	10	7	3	20

Tablo 4.22'de de görüldüğü gibi c seçeneği 5 farklı kategoride toplanmıştır. c seçeneğinde ise genelleme becerisini farklı bir duruma taşımak hedeflenmiştir. Yani 4

kenarlı bir çokgenden 3 kenarlı bir çokgeni düşünerek duvarda 1 not asılıyken 3 iğne, 2 not asılıyken 5 iğne ve 3 not asılıyken de 7 iğne tutturulduğunu fark ederek not sayısı ile iğne arasında bir kural olduğunu ve bunu n=6 özel durum için genişletmesi beklenmektedir. "Şekil çizme" kategorisinde cevap veren öğrenciler şekil çizerek yakın durum olan n=6 özel durum için üzerinde 13 tane iğne olduğunu belirtmiştir. Bu şekilde yaklaşan 9.sınıflardan yalnızca 1 kişidir. ""n" not sayısı olmak üzere 2n+1 şeklinde formül üretme" kategorisinde cevap veren öğrenciler n not sayısı olmak üzere not sayısının 2 katının 1 fazlasının üzerindeki iğne sayısını verdiğini keşfetmiş ve n=6 özel durum için genişletmişlerdir. Yani 2.6+1=13 şeklinde doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler diğer kategorilere oranla daha fazla olup 9.sınıflardan 18, 10.sınıflardan 8 ve 11.sınıflardan ise 22 'dir. ""n" not sayısı olmak üzere 2(n-1)+3 şeklinde formül üretme "kategorisinde cevap veren öğrenciler, son notta her koşulda 3 adet iğne olduğunu düşünüp diğer asılan notlarda ise 2'şer adet iğne olacağını düşünerek "2.(not sayısı-1) +3" şeklinde bir formül üretmiş ve bunu n=6 özel durum için genişletmiştir. Yani 2.(6-1)+3=13 şeklinde doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrencilerden 6'sı 9.sınıf, 7'si 10.sınıf ve 12'si de 11.sınıftandır. ""n" not sayısı olmak üzere 3n-(n-1) şeklinde formül üretme" öğrenciler kâğıtları ayrı ayrı düşünüp her birinde 3 iğne olacağını fakat bunlardan 6-1 =5 tanesinin bu iki notu birbirine bağladığı için iki kere saydığını fark edip tüm durumdan çıkarmıştır. Yani 3.6-(6-1)=13 şeklinde doğru cevabına ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler 9.sınıflardan 4, 10 ve 11.sınıflardan da yalnızca 1'er kişidir. "Sadece sonucu yazanlar" kategorisinde cevap veren öğrenciler sadece 13 cevabını vermişlerdir. Bu şekilde cevap veren öğrenciler 9.sınıftan 10, 10.sınıftan 7 ve 11.sınıftan ise 3'tür. Bu sorunun d seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.23'te verilmiştir.

Tablo 4.23. İğne ve Kartlar Sorusunun D Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

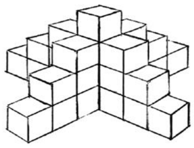
Kategori	**Örnek cevap**	**9. sınıf**	**10 sınıf**	**11 sınıf**	**Toplam**
"n" not sayısı olmak üzere 2n+1 şeklinde formül üretme	2x+1 örüntüsü → 35.2 +1 = 71 (9a-Ö16)	16	7	22	45

"n" not sayısı olmak üzere 2(n-1)+3 şeklinde formül üretme	yine formül yapalım ; n öğgen olduğu için 2(n-1)+3 = iğne sayısı 2(35-1)+3=(2.34)+3= 68+3 = 71 (9a-Ö8)	6	7	12	25
"n" not sayısı olmak üzere 3n-(n-1) şeklinde formül üretme	35x3=105 105 − (35−1) = 34 105 − 34 = 71 iğne (9a-Ö17)	4	2	0	6
Sadece sonucu yazanlar	71	8	5	2	15

Tablo 4.23'te de görüldüğü gibi 3.sorunun d seçeneği 4 farklı kategoride toplanmıştır. Burada duvarda 1 not asılıyken 3 iğne, 2 not asılıyken 5 iğne ve 3 not asılıyken de 7 iğne tutturulduğunu fark ederek not sayısı ile iğne arasında bir kural olduğunu c seçeneğinde keşfeden öğrenci, bu kuralı n=35 uzak durum için genişletmesi beklenmektedir. ""n" not sayısı olmak üzere 2n+1 şeklinde formül üretme" kategorisinde cevap veren öğrenciler c seçeneğinde, n not sayısı olmak üzere not sayısının 2 katının 1 fazlasının üzerindeki iğne sayısını verdiğini keşfetmiş ve n=35 uzak durum için genişletmişlerdir. Yani 2.35+1=71 şeklinde doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler yine diğer kategorilere oranla daha fazladır ve 9.sınıflardan 16, 10.sınıflardan 7 ve 11.sınıflardan da 22 kişidir. ""n" not sayısı olmak üzere 2(n-1) +3 şeklinde formül üretme" kategorisinde cevap veren öğrenciler n not sayısı olmak üzere c seçeneğinde keşfettiği 2(n-1)+3 formülünü n=35 uzak durum için genişletmişlerdir. Yani 2(35-1)+3=71 şeklinde doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler 9.sınıflardan 6, 10.sınıflardan 7 ve 11.sınıflardan ise 12 'dir. ""n" not sayısı olmak üzere 3n-(n-1) şeklinde formül üretme" kategorisinde n not sayısı olmak üzere c seçeneğinde keşfettikleri 3n-(n-1) formülünü n=35 uzak durum için genişletmiş ve 3.35-(35-1) = 71 şeklinde doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler 9.sınıflardan 4, 10.sınıflardan 2 olup 11.sınıftan böyle yaklaşan hiç öğrenci olmamıştır. "Sadece sonucu yazanlar" kategorisinde cevap veren öğrenciler sadece 71 cevabını vermişlerdir. Bu şekilde cevap veren öğrenciler 9.sınıftan 8, 10.sınıftan 5 ve 11.sınıftan ise 2'dir.

4.1.4.“ Kule Yapımı ” Sorusundan Elde Edilen Bulgular

Aşağıda verilen bu soru Nilsson ve Juter’dan (2011) çalışmasından alınmış ve uyarlanmıştır.



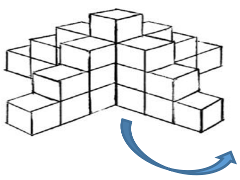
a) Şekildeki kuleyi yapmak için kaç tane küpe ihtiyaç duyulmuştur? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

b) 12 küp yüksekliğinde bir kule yapmak için toplam kaç küpe ihtiyaç vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

c) n küp yükseklikte bir kule yapmak için kaç tane küpe ihtiyaç vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

Şekil 4.4. Kule Yapımı Sorusu

Şekil 4.4’ten de görüldüğü gibi soru 3 seçeneklidir. Sorunun ilk aşaması olan a seçeneğinde şekilde görülen 3 boyutlu cisimde kaç tane küp olduğu sorulmuştur. Diğer aşama olan b seçeneğinde ise 12 küp yüksekliğinde bir küp yapmak için kaç küpe ihtiyaç olduğu sorulmuştur. Amacımız burada, öğrencilerden bu soruyu yaparken şekli devam ettirmesinden çok bu küplerin artışındaki bir kuralı görmesi ve uzak durum olan 12 yüksekliğine genişletmesidir. Bir sonraki aşamasında ise herhangi bir duruma (n için) kuralı genellemesi beklenmiştir. A seçeneğinde istenilen küp sayısını bulmak için:



1+2+3=6 …(*)

(*) ‘da bulunan (1+2+3)=6 ifadesinin 4 köşede de mevcut olduğunu, o halde 4.(1+2+3)= 24 adet olacak şekilde kenarlardaki küp sayısını elde etmesi beklenmektedir. İç kısımda olan ve şeklin de yüksekliğini veren küp sayısının 4 olduğunu şekli inceleyerek keşfetmesini ve toplam küp sayısını, 4(1+2+3) + 4 = 28 olacak şekilde bulması istenmektedir.

B seçeneğinde ise 12 küp yüksekliğinde bir küp yapmak için ihtiyaç duyulan toplam küp sayısı istenmiştir. Buradaki küp sayısını bulmak için a seçeneğinde bulunan kuralın uzak durum 12 için genişletmesi beklenmiştir. Yani (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) = 66 olan küp say ısının 4 köşede de mevcut olduğundan 4. (1+ 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) = 66. 4 = 264 adet yanlarda küp olduğunu ve bunun yanında 12 küp yüksekliğinde olan iç kısımda da 12 adet küp olduğunu fark ederek toplamda 4. (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11) = 66. 4 = 264 + 12 = 276 adet küp geleceğini keşfetmesi beklenmektedir.

C seçeneğinde ise bulunan kuralın herhangi bir durum n için kuralı genellemesi beklenmektedir. Yani, 4.(1+2+3+4…..+ n-1)+ n ya da 4.($\frac{(n-1)(n)}{2}$) + n şeklinde kuralı genişletmesi beklenmiştir.

Tablo 4.24. "Kule Yapımı" Sorusunun Şıklarına ve Sınıflara Göre Analizi

	a şıkkı			**b şıkkı**			**c şıkkı**		
	Doğru	**Yanlış**	**Boş**	**Doğru**	**Yanlış**	**Boş**	**Doğru**	**Yanlış**	**Boş**
9. sınıf (63 Kişi)	56	6	1	23	31	9	11	25	27
10. sınıf (56 Kişi)	37	3	16	17	19	20	13	14	29
11. sınıf (61 Kişi)	49	9	3	15	35	11	12	28	21

A seçeneğinde şekildeki kuleyi yapmak için kaç tane küpe ihtiyaç duyulduğu sorulmuştur. Tablo 4.24 incelendiğinde 9.sınıflardan 56, 10.sınıflardan 37, 11.sınıflardan 49 öğrenci yapabilmiştir. B seçeneğinde ise (n=12 özel durumu için) 9.sınıflardan 23, 10.sınıflardan 17, 11.sınıflardan da 15 öğrenci doğru yanıt vermiştir. Görüldüğü gibi b seçeneğinde doğru cevap veren öğrencilerin sayısı neredeyse yarıya düşmüştür. C seçeneğinde ise n.duruma genellemesi istenmiştir. Bu soruya yanıt veren öğrenciler, 9.sınıflardan 11, 10.sınıflardan 13 ve 11.sınıflardan ise 12'dir. 9.sınıf öğrencilerinde c seçeneğine doğru yanıt veren öğrenci sayısı b seçeneğine göre yarıya düşmüştür. Fakat bu durum 10 ve 11.sınıflarda görülmemiştir. Tablo 4.24'ten de görüldüğü gibi 10. sınıflardan 4, 11.sınıflardan ise 3 kişi b seçeneğine doğru yanıt verirken c seçeneğine doğru yanıt verememiştir.

Öğrencilerin hangi seçenekleri doğru yaptıkları 9. sınıflar için Tablo 4.25'te, 10. sınıflar için Tablo 4.26 'da ve 11. sınıflar için de Tablo 4.27'de gösterilmiştir.

Tablo 4.25. 9.Sınıftaki Öğrencilerin Kule Yapımı Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	C	KODLAR	A	B	C
9a-Ö1	✗	✗	✗	9b-Ö33	✓	✗	✗
9a-Ö2	✓	✓	✗	9b-Ö34	✗		
9a-Ö3	✓	✗	✗	9b-Ö35	✓	**✓**	✗
9a-Ö4	✓	**✓**	✓	9b-Ö36	✓	✗	
9a-Ö5	✓	✗		9b-Ö37	✓	✗	✗
9a-Ö6	✓	✗	✗	9b-Ö38	✓	✗	✗
9a-Ö7	✓	✗	✗	9b-Ö39	✓	✗	✗
9a-Ö8	✗	✗	✗	9b-Ö40	✓		✓
9a-ö9	✓	✓	✓	9c-Ö41	✓	✓	✗
9a-Ö10	✓	✓	✓	9c-Ö42	✓	✗	
9a-Ö11	✓			9c-Ö43	✓	✗	
9a-Ö12	✓	✗		9c-Ö44	✓	✓	✗
9a-Ö13	✓	✓	✓	9c-Ö45	✓	✗	✗
9a-Ö14	✓	✓	✓	9c-Ö46	✓	✓	✓
9a-Ö15	✓	✗	✗	9c-Ö47	✓	✗	✗
9a-Ö16	✓	✗		9c-Ö48	✓	✓	
9a-Ö17	✓	✓	✓	9c-Ö49	✓	✗	
9b-Ö18	✓	**✓**		9c-Ö50	✗	✗	✗
9b-Ö19	✓	✗	✗	9c-Ö51	✓	✗	
9b-Ö20	✓	✓	✗	9c-Ö52	✓		
9b-Ö21	✓	✗		9c-Ö53	✓	✗	✗
9b-Ö22	✓	✗	✗	9c-Ö54	✓	✗	✗
9b-Ö23	✓	**✓**		9c-Ö55	✓	✓	
9b-Ö24	✓		✗	9c-Ö56	✗	✗	✗
9b-Ö25	✓	✓	✓	9c-Ö57	✓	✗	
9b-Ö26	✓	✓	✓	9c-Ö58	✓	✓	
9b-Ö27	✓	✓	✓	9c-Ö59	✓	✓	
9b-Ö28	✓			9c-Ö60	✓	✓	
9b-Ö29	✓	✗	✗	9c-Ö61			
9b-Ö30	✗	✗	✗	9c-Ö62	✓	✗	
9b-Ö31	✓			9c-Ö63	✓	✓	
9b-Ö32	✓						

Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	
işlem hatası	**✓**

Tablo 4.25 ‘den görüldüğü gibi 9.sınıflardan 11 öğrenci c seçeneğini doğru yapmıştır. Bu öğrencilerin a ve b seçeneklerini doğru yapması beklenirken bu öğrencilerden yalnızca 1 tanesi b seçeneğini yapamamış boş bırakmıştır. Bunun yanında 12 öğrenci de a ve b seçeneğini doğru yapmalarına rağmen c seçeneğini doğru yapamamıştır.

Tablo 4.26. 10.Sınıftaki Öğrencilerin Kule Yapımı Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	C	KODLAR	A	B	C
10a-Ö1	✓	✓	✓	10b-Ö29	✓	✓	
10a-Ö2	✓			10b-Ö30			
10a-Ö3	✓	✗	✗	10b-Ö31			
10a-Ö4	✓	✓	✗	10b-Ö32			
10a-Ö5	✓	✗	✓	10b-Ö33			
10a-Ö6	✓	✓	✗	10b-Ö34			
10a-Ö7	✓	✗		10b-Ö35			
10a-Ö8	✓	✗		10b-Ö36	✓	✗	
10a-Ö9	✓	✗		10b-Ö37			
10a-Ö10	✓	✓	✓	10c-Ö38			
10a-Ö11	✓	✓	✓	10c-Ö39	✓	✗	✗
10a-Ö12	✓	✗	✓	10c-Ö40	✓	✓	✓
10a-Ö13	✓	✗		10c-Ö41	✓		
10a-Ö14	**✓**	✓	✓	10c-Ö42	✓	**✓**	✓
10a-Ö15	✓	✗	✗	10c-Ö43			
10a-Ö16	✓	✓		10c-Ö44			
10a-Ö17	✓	✓	✓	10c-Ö45	✓	✗	
10a-Ö18	✓	✓	✓	10c-Ö46			
10a-Ö19	**✓**	✓	✓	10c-Ö47			
10a-Ö20	✗	✗	✗	10c-Ö48	✓	✗	✗
10a-Ö21	✓	✓	✓	10c-Ö49	✓	✗	✗
10a-Ö22	✓	✓	✓	10c-Ö50	✗	✗	✗
10b-ö23				10c-Ö51	✓	✓	✗
10b-Ö24	✓	✗	✗	10c-Ö52			
10b-Ö25	✓	✓		10c-Ö53	✓		
10b-Ö26				10c-Ö54	✓	✗	✗
10b-Ö27				10c-Ö55	✗	✗	✗
10b-Ö28	✓			10c-Ö56	✓	✗	✗

Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	
işlem hatası	**✓**

Tablo 4.26 incelendiğinde 10.sınıflardan 13 öğrenci c seçeneğini doğru yapmıştır. Bu öğrencilerin a ve b seçeneklerini doğru yapması beklenirken bu öğrencilerden yalnızca 2 tanesi b seçeneğini yanlış cevaplamıştır. Yine tablo 4.26 incelendiğinde 6 öğrenci a ve b seçeneğini doğru cevaplarken c seçeneğini yanlış ya da boş bırakmıştır.

Tablo 4.27. 11.Sınıftaki Öğrencilerin Kule Yapımı Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	C	KODLAR	A	B	C
11b-Ö1	✓	✗	✗	11c-Ö32			
11b-Ö2	✓	✓	✓	11c-Ö33			
11b-Ö3	✓	✗	✗	11c-Ö34			
11b-Ö4	✓	✗	✗	11c-Ö35			
11b-Ö5	✓	✗	✗	11c-Ö36	✓	✗	
11b-Ö6	✓	✗	✗	11c-Ö37	✓	✗	✗
11b-Ö7	✓	✓	✓	11c-Ö38	✓		
11b-Ö8	✗	✗	✗	11c-Ö39	✗	✗	✗
11b-Ö9	✓	✗	✗	11c-Ö40	✓	✗	
11b-Ö10	✓			11c-Ö41	✗		
11b-Ö11	✓			11a-Ö42	✓	✓	✓
11b-Ö12				11a-Ö43	✓	✗	✗
11b-Ö13	✓	✓	✓	11a-Ö44	✓		
11b-Ö14	✓	✗	✗	11a-Ö45	✓	✗	✗
11b-Ö15	✓			11a-Ö46	✓	✓	✓
11b-Ö16	✓	✗	✗	11a-Ö47	✗	✗	✗
11b-Ö17	✓	✗		11a-Ö48	✓	✓	✓
11b-Ö18	✓			11a-Ö49	✓	✓	✓
11b-Ö19	✓	✓	✓	11a-Ö50	✓	✗	✗
11b-Ö20	✓	✓	✓	11a-Ö51	✓	✓	
11c-Ö21	✓			11a-Ö52			
11c-Ö22	✓	✓		11a-Ö53	✓	✓	✓
11c-Ö23	✓	✓		11a-Ö54	✗	✗	
11c-Ö24	✗	✗	✗	11a-Ö55	✓	✗	✗
11c-Ö25				11a-Ö56	✓	✗	✓
11c-Ö26	✓	✗	✗	11a-Ö57	✓	✗	✗
11c-Ö27	✓	✗	✗	11a-Ö58	✓	✓	✗
11c-Ö28	✗	✗	✗	11a-Ö59	✓	✗	
11c-Ö29	✓	✓	✓	11a-Ö60	✓	✗	✗
11c-Ö30	✗	✗	✗	11a-Ö61	✓	✗	✗
11c-Ö31	✓	✗	✗				

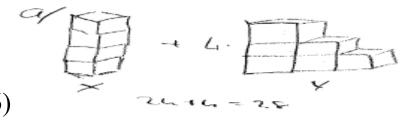
Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	
işlem hatası	✓

Tablo 4.27 'de de görüldüğü gibi 11.sınıflardan 12 öğrenci c seçeneğini doğru yanıtlamıştır. Fakat bu öğrencilerden yalnızca 1 tanesi b seçeneğini yanlış cevaplamıştır. Bunun yanında 4 öğrenci a ve b seçeneklerini doğru yanıtlarken c seçeneğini yanlış yapmış ya da boş bırakmıştır.

Tablo 4.25, 4.26 ve 4.27 birlikte yorumlanırsa c seçeneğini doğru yapan öğrencilerin a ve b seçeneklerini de doğru yapması beklenmektedir. 9. sınıflardan c seçeneğini doğru yapan 11 öğrenciden yalnızca 1 tanesi b seçeneğini yapamamış boş bırakmıştır.10. sınıflardan c seçeneğini doğru yapan 13 öğrencilerden yalnızca 2 tanesi b seçeneğini yapamamıştır. 11.sınıflardan c seçeneğini doğru yapan 12 öğrenciden yalnızca 1 tanesi b seçeneğini yanlış cevaplamıştır. Diğer taraftan a ve b seçeneklerini doğru yapmalarına rağmen c seçeneğini doğru yapamayan 9 sınıflardan 12, 10. sınıflardan 6 ve 11. sınıflardan 4 öğrenci olmuştur. Bu öğrencilerin özel durumlarda problemi çözebildikleri fakat genelleme ile ilgili sıkıntıları olduğu söylenebilir.

Kule yapma sorusunda öğrencilerin problemi çözerken sorunun her bir seçeneğinde verdikleri cevapların sınıflarına göre karşılaştırmalarını yapmak amacıyla a seçeneğine yönelik verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.28'de, b seçeneğine yönelik verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.29' da ve c seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.30'da verilmiştir.

Tablo 4.28. Kule Yapma Sorusunun A Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

Kategori	**Örnek cevap**	**9. sınıf**	**10 sınıf**	**11 sınıf**	**Toplam**
Sayarak cevaba ulaşma	28 tane / sayarak buldum (9a-Ö12) 4) a) 28 tane küp kullanılmıştır. Önden baktığı zaman görününde 13 tane küp görünüyor. En tepede duran küpün altında 3 tane daha küp var, bununla birlikte 16 yapıyor. Arkadakiler de de 12 tane daha küp görülüyor. (10a-Ö1)	20	10	5	35
"n=3" özel durum için 1+2+3)4+4 =28 şeklinde formül üretme	[(3+2+1).4]+4=28 formülle buldum  (11c-Ö26) (11b-Ö9)	26	19	37	
Sadece sonucu yazanlar	28	10	7	10	

Tablo 4.28'de de görüldüğü gibi a seçeneği 3 farklı kategori altında toplanmıştır. Bu seçenekte 3 boyutlu verilen şekildeki kule için kaç adet küpe ihtiyaç duyulduğu sorulmuştur. Öğrencilerden sayarak sonuca ulaşması ya da n=3 özel durum için bir formül üretmesi beklenmiştir. "Sayarak cevaba ulaşma" kategorisinde cevap veren öğrenciler şekildeki kuledeki tüm küpleri saymışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrencilerin sayısı 9.sınıfta 20, 10.sınıfta 10 ve 11.sınıfta 5 'tir. ""n=3" özel durum için 1+2+3)4+4 =28 şeklinde formül üretme" kategorisinde cevap veren öğrenciler, (1+2+3) =6 olan bir köşedeki küp sayısının 4 köşede de mevcut olduğunu, o halde 4.(1+2+3) = 24 adet olacak şekilde kenarlardaki küp sayısını elde etmiştir. Şeklin yüksekliğini veren ve iç

kısımda olan küplerin sayısının 4 tane olduğunu keşfederek toplam küp sayısına 4(1+2+3) + 4 = 28 olacak şekilde cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrencilerden 26'sı 9.sınıftan, 19'u 10.sınıftan ve 37'si de 11.sınıftan olmuştur. "Sadece sonucu yazanlar" kategorisinde cevap veren öğrenciler sadece sonucu 28 şeklinde yazmışlardır. Bu şekilde cevap veren öğrencilerin sayısı 9 ve 11.sınıfta 10 öğrenci, 10.sınıftan da 7 öğrencidir. Bu sorunun b seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.30'da verilmiştir.

Tablo 4.29. Kule Yapma Sorusunun B Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

Kategori	Örnek cevap	9. sınıf	10 sınıf	11 sınıf	Toplam
"n=11 özel durum için (1+2+3+…+n).4+(n+1) Şeklinde formül üretme	b) 12+11+10+9+8 ... =78 11+10 ... + = 66 . 4 = 264 264 + 12 276 (9c-Ö55) 264+12 = 276 → $\left(\frac{11.12}{2} . 4\right) + 12$ (10a-Ö22)	17	15	14	46
"n=12" özel durum için n.(n+n-1) şeklinde formül üretme	b) 4.7 5.9 6.11 7.13 8.15 9.17 10.19 11.21 $\boxed{12.23}$ $\boxed{n(n+n-1)}$ = Formül (9b-Ö25)	2	2	0	
Sadece sonucu yazanlar	276	4	1	0	

Tablo 4.29'dan da görüldüğü gibi b seçeneği 3 farklı kategori altında toplanmıştır. b seçeneğinde 12 küp yüksekliğinde bir küp yapmak için ihtiyaç duyulan toplam küp sayısı istenmiştir. Buradaki küp sayısını bulmak için a seçeneğinde bulunan kuralın uzak durum 12 için genişletmesi beklenmiştir. Yani (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) = 66 olan küp sayısının 4 köşede de mevcut olduğundan 4.(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11) = 66. 4 = 264 adet yanlarda küp olduğunu ve bunun yanında 12 küp yüksekliğinde olan iç kısımda da 12 adet küp olduğunu fark ederek toplamda 4. (1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11)= 66.4 = 264+12 = 276 adet küp geleceğini

keşfetmesi beklenmektedir. “n=11 özel durum için (1+2+3+…+n).4+(n+1) şeklinde formül üretme” kategorisinde cevap veren öğrenciler, 1’den 11’ e kadar küp sayılarının toplamını bulmuş ve bu toplamın 4 köşede de olduğunu keşfedip 4 ile çarpmışlardır. Daha sonra iç kısımda kulenin yüksekliğini veren 12 küpü de ekleyerek doğru sonuca ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler 9.sınıftan 17, 10.sınıftan 15,11.sınıftan da 14’tür.“n=12” özel durum için n.(n+n-1) şeklinde formül üretme” kategorisinde cevap veren öğrenciler n.(n+n-1) şeklinde geliştirdikleri formülü n=12 özel durum için uygulayarak doğru sonuca ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan 9. ve 10.sınftan 2’şer tanedir. 11.sınıftan ise bu şekilde yaklaşan olmamıştır. “Sadece sonucu yazanlar” kategorisinde cevap veren öğrenciler sadece sonucu 276 şeklinde yazmışlardır. Bu şekilde cevap veren öğrencilerin sayısı 9.sınıflarda 4, 10.sınıfta 1’dir. 11.sınıfta bu şekilde cevap veren olmamıştır. Bu sorunun c seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.30’da verilmiştir.

Tablo 4.30. Kule Yapma Sorusunun C Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

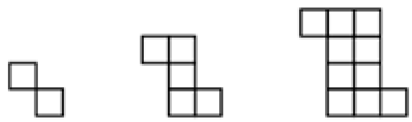
Kategori	**Örnek cevap**	**9. sınıf**	**10 sınıf**	**11 sınıf**	**Toplam**
“n” kulenin yüksekliği olmak üzere (1+2+3+…+n-1).4+(n) ya da n+ 4(n-1)+4 (n-2)…+ 4(n-(n-1)) ya da $\frac{\boldsymbol{n}.(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})}{\mathbf{2}}.\mathbf{4}+\boldsymbol{n}$ şeklinde formül üretme	$4(1+2+ \ldots + n-1)+n$ (11a-Ö53) $n+\{[(n-1)+(n-2)+(n-3)\ldots+(n-n)].4\}$ (10a-Ö1) c) $\left(\frac{(n-1).n}{2}\right).4+n$ (9a-Ö14)	9	13	12	34
“n” kulenin yüksekliği olmak üzere n.(n+n-1) şeklinde formül üretme	$n.(n+n-1)$ (9b-Ö24)	4	0	0	4

Tablo 4.31’den de görüldüğü gibi b seçeneği 2 farklı kategori altında toplanmıştır. İlk kategoride 3 formül vardır. Üçü de aynı ifadenin farklı versiyonlarıdır. Bu sebeple aynı kategori altında toplanmıştır.” “n” kulenin yüksekliği olmak üzere (1+2+3+…+n-1).4+(n) ya da n+ 4(n-1)+4 (n-2)…+ 4(n-(n-1)) ya da $\frac{n.(n-1)}{2}.4+n$ şeklinde formül üretme” kategorisinde cevap veren öğrenciler n-1. basamağa kadar olan küplerin toplamını bulup 4 köşede de olması sebebi ile 4 ile çarpıp iç kısımdaki küp sayısını da n. basamak olarak eklemişlerdir ve doğru sonuca ulaşmışlardır. Bu şekilde cevap veren öğrencilerin sayısı 9.sınıftan 9, 10.sınıftan 13 ve 11.sınıftan da 12 ‘dir. ““n” kulenin yüksekliği olmak üzere n.(n+n-1) şeklinde formül üretme” kategorisinde cevap veren öğrenciler n(n+n-1) şeklinde bir formül geliştirmiştir. Fakat bu formüle nasıl ulaştıkları tam olarak belirlenememiştir. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler sadece 9.sınıftan 4 kişidir.

4.1.5. “Sayı Örüntüsü ve Şekil Örüntüsü” Sorusundan Elde Edilen Bulgular

Aşağıda verilen sorunun a seçeneği araştırmacı tarafından geliştirilmiş, b seçeneği ise Barbosa vd., den (2007) uyarlanmıştır.

a) 4,5,7,11,19,___,67,131,259 sıraya gelecek elemanı yazınız nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

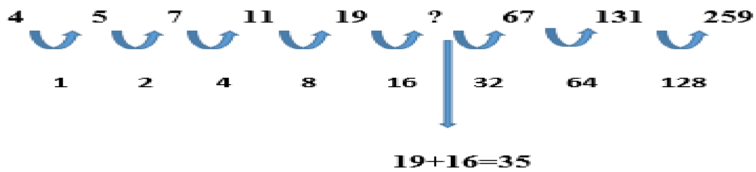


b)

Şeklin devamını getiriniz ve nasıl yaptığınızı açıklayınız.

Şekil 4.5. Sayı Örüntüsü ve Şekil Örüntüsü Sorusu

Şekil 4.5 ‘ten de görüldüğü gibi soru 2 seçenekten oluşmaktadır. A seçeneği sayı örüntüsü, b seçeneği ise şekil örüntüsüdür. A seçeneğinde hedefimiz sayılar arasında genelleme yapabilme becerilerini incelemek olup öğrencilerden sayıların dizilimi arasında bir kural bulması ve bu kuralı genişleterek Şekil 4.5‘te sorulan kısma gelebilecek uygun değeri bulması beklenmektedir. Yani bu değere ulaşmak için sayıların arasında artış değerlerini inceleyerek aşağıdaki gibi bir kurala ulaşmaları beklenmektedir.



Başka bir bakış açısıyla sayıların arasında “n” son terim olmak üzere “2n-3” şeklinde bir kural oluşturup n=19 özel durum için genişleterek 2.19 -3 =35 cevabına ulaşmaları beklenmektedir.

B seçeneğindeki hedefimiz ise şekil örüntüsünü inceleyerek bir sonraki adımlara genelleme yapabilme becerisini incelemektir. Öğrencilerden, şekli detaylı inceleyerek devamında gelebilecek şekli çizmeleri ve bunu nasıl yaptıklarını anlatmaları beklenmektedir.

Tablo 4.31. “ Sayı Örüntüsü ve Şekil Örüntüsü” Sorusunun Şıklarına ve Sınıflara Göre Analizi

	a şıkkı			**b şıkkı**		
	Doğru	**Yanlış**	**Boş**	**Doğru**	**Yanlış**	**Boş**
9. sınıf (63 Kişi)	49	4	10	41	3	9
10. sınıf (56 Kişi)	27	2	27	28	0	28
11. sınıf (61 Kişi)	49	1	11	48	0	13

Tablo 4.31 incelediğinde a seçeneğini 9.sınıflardan 49,10.sınıflardan 27 ve 11.sınıflardan da 49 kişinin doğru cevapladığı görülmektedir. B seçeneğinde ise 9.sınıflardan 41, 10.sınıflardan 28 ve 11.sınıflardan ise 48 kişinin doğru cevapladığı görülmektedir. Bu iki seçenekte de boş sayısının yanlış sayısından daha çok olduğu görülmektedir. Öğrencilerin hangi seçenekleri doğru yaptıkları 9. sınıflar için Tablo 4.33’te, 10. sınıflar için Tablo 4.34 ve 11. sınıflar için de Tablo 4.35 ‘te gösterilmiştir.

Tablo 4.32. 9.Sınıftaki Öğrencilerin “ Sayı Örüntüsü ve Şekil Örüntüsü “Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	KODLAR	A	B
9a-Ö1	✓	✓	9b-Ö33	✓	✓
9a-Ö2	✓	✓	9b-Ö34	✓	
9a-Ö3	✓		9b-Ö35	✓	✓
9a-Ö4	✓	✓	9b-Ö36	✓	✓
9a-Ö5			9b-Ö37	✓	✓
9a-Ö6	✓	✓	9b-Ö38	✗	✓
9a-Ö7	✓	✓	9b-Ö39	✓	
9a-Ö8	✓	✓	9b-Ö40	✗	✓
9a-ö9	✓	✓	9c-Ö41	✓	✓
9a-Ö10	✓		9c-Ö42	✓	✓
9a-Ö11	✓	✓	9c-Ö43	✓	✓
9a-Ö12	✓		9c-Ö44	✓	✓
9a-Ö13	✓	✓	9c-Ö45	✓	✓
9a-Ö14	✓	✓	9c-Ö46	✓	
9a-Ö15	✗		9c-Ö47	✓	✓
9a-Ö16	✓	✓	9c-Ö48	✓	✓
9a-Ö17		✓	9c-Ö49	✓	✗
9b-Ö18	✓	✓	9c-Ö50		✓
9b-Ö19	✓		9c-Ö51	✓	✓
9b-Ö20		✓	9c-Ö52	✓	✓
9b-Ö21	✓		9c-Ö53		
9b-Ö22	✓	✓	9c-Ö54		✗
9b-Ö23			9c-Ö55	✗	✓
9b-Ö24	✓		9c-Ö56	✓	✓
9b-Ö25	✓	✓	9c-Ö57	✓	✓
9b-Ö26	✓	✓	9c-Ö58	✓	✓
9b-Ö27	✓		9c-Ö59	✓	✓
9b-Ö28	✓	✓	9c-Ö60	✓	
9b-Ö29	✓		9c-Ö61		
9b-Ö30			9c-Ö62		✓
9b-Ö31	✓	✓	9c-Ö63	✓	✗
9b-Ö32	✓				

Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	

Tablo 4.32 incelediğinde her iki seçeneği de doğru yapan 34 öğrencidir.15 öğrenci a seçeneğini doğru cevaplarken b seçeneğini boş bırakmış ya da yanlış cevaplamıştır. Bu öğrencilerin sayı örüntüsünü doğru yaptıklarını fakat şekil örüntüsünü doğru yapamadıkları görülmektedir. 5 öğrenci ise b seçeneğini doğru cevaplarken a seçeneğini boş bırakmış ya da yanlış cevaplamıştır. Bu öğrencilerin de sayı örüntüsünü yapamadıkları fakat şekil örüntüsünü yapabildikleri görülmektedir. Yine Tablo 4.33 incelendiğinde 5 öğrencinin iki seçeneği de boş bıraktıkları görülmektedir.

Tablo 4.33. 10.Sınıftaki Öğrencilerin “ Sayı Örüntüsü ve Şekil Örüntüsü “Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	KODLAR	A	B
10a-Ö1	✓		10b-Ö29		
10a-Ö2		✓	10b-Ö30		
10a-Ö3	✓		10b-Ö31		
10a-Ö4	✓	✓	10b-Ö32		
10a-Ö5			10b-Ö33		
10a-Ö6	✓	✓	10b-Ö34		
10a-Ö7			10b-Ö35		
10a-Ö8			10b-Ö36		✓
10a-Ö9	✓		10b-Ö37		
10a-Ö10	✓	✓	10c-Ö38		
10a-Ö11	✓	✓	10c-Ö39	✓	✓
10a-Ö12	✓	✓	10c-Ö40	✓	✓
10a-Ö13	✓	✓	10c-Ö41		✓
10a-Ö14	✓	✓	10c-Ö42	✓	✓
10a-Ö15	✓	✓	10c-Ö43		
10a-Ö16	✓	✓	10c-Ö44		
10a-Ö17	✓		10c-Ö45		
10a-Ö18	✓	✓	10c-Ö46		
10a-Ö19	✓	✓	10c-Ö47	✗	✓
10a-Ö20	✓	✓	10c-Ö48		
10a-Ö21	✓	✓	10c-Ö49		✓
10a-Ö22	✓	✓	10c-Ö50		✓
10b-ö23			10c-Ö51		
10b-Ö24	✓	✓	10c-Ö52	✗	✓
10b-Ö25	✓	✓	10c-Ö53	✓	
10b-Ö26			10c-Ö54	✓	✓
10b-Ö27			10c-Ö55	✓	
10b-Ö28			10c-Ö56	✓	✓

Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	
işlem hatası	✓

Tablo 4.33 incelendiğinde her iki seçeneği de doğru yapan 19 öğrenci olduğu görülmektedir. Burada sarı renkli olan kutucuklar işlem hatası yapanlar ya da soruyu sayı örüntüsündeki sorulan yeri değil en son terimi bulmuşlardır. Her iki türlü de yaptıkları adımlar doğru olduğundan bu öğrencilerin cevapları doğru kabul edilmiştir. Burada 6 öğrenci a seçeneğini doğru cevaplarken b seçeneğini boş bırakmıştır. Bu öğrencilerin sayı örüntüsünü doğru yaptıklarını fakat şekil örüntüsünü doğru yapamadıkları görülmektedir. 7 öğrenci ise b seçeneğini doğru cevaplarken a seçeneğini boş bırakmış ya da yanlış cevaplamıştır. Bu öğrencilerin de sayı örüntüsünü yapamadıkları fakat şekil örüntüsünü yapabildikleri görülmektedir Yine Tablo 4.34'e bakıldığında 21 öğrencinin her iki seçeneği de boş bıraktığı görülmektedir.

Tablo 4.34. 11.Sınıftaki Öğrencilerin " Sayı Örüntüsü ve Şekil Örüntüsü "Sorusu Analizi

KODLAR	A	B	KODLAR	A	B
11b-Ö1	✓	✓	11c-Ö32		
11b-Ö2	✓	✓	11c-Ö33		
11b-Ö3	✓	✓	11c-Ö34	✓	✓
11b-Ö4	✓	✓	11c-Ö35	✗	✓
11b-Ö5	✓	✓	11c-Ö36	✓	✓
11b-Ö6	✓		11c-Ö37	✓	✓
11b-Ö7	✓	✓	11c-Ö38	✓	
11b-Ö8	✓	✓	11c-Ö39	✓	
11b-Ö9	✓	✓	11c-Ö40	✓	✓
11b-Ö10			11c-Ö41	✓	✓
11b-Ö11			11a-Ö42	✓	
11b-Ö12	✓	✓	11a-Ö43	✓	✓
11b-Ö13	✓	✓	11a-Ö44	✓	✓
11b-Ö14	✓	✓	11a-Ö45	✓	✓
11b-Ö15			11a-Ö46	✓	✓
11b-Ö16	✓	✓	11a-Ö47		✓
11b-Ö17		✓	11a-Ö48	✓	✓
11b-Ö18	✓		11a-Ö49	✓	✓
11b-Ö19		✓	11a-Ö50	✓	✓
11b-Ö20	✓	✓	11a-Ö51	✓	✓
11c-Ö21	✓	✓	11a-Ö52		
11c-Ö22	✓	✓	11a-Ö53	✓	✓
11c-Ö23	✓	✓	11a-Ö54	✓	✓
11c-Ö24	✓	✓	11a-Ö55	✓	✓
11c-Ö25			11a-Ö56	✓	✓
11c-Ö26	✓		11a-Ö57	✓	✓
11c-Ö27	✓	✓	11a-Ö58	✓	✓
11c-Ö28	✓	✓	11a-Ö59	✓	✓
11c-Ö29	✓	✓	11a-Ö60	✓	✓
11c-Ö30		✓	11a-Ö61	✓	✓
11c-Ö31	✓	✓			

Doğru yapanlar	✓
Yanlış yapanlar	✗
boş bırakanlar	
işlem hatası	✓

Tablo 4.34 incelendiğinde her iki seçeneği de doğru yapan 43 öğrenci olduğu görülmektedir. Yine burada sarı renkli olan bölgeler doğru kabul edilmiştir. Burada 6 öğrenci a seçeneğini doğru cevaplarken b seçeneğini boş bırakmıştır. Bu öğrencilerin sayı örüntüsünü doğru yaptıklarını fakat şekil örüntüsünü doğru yapamadıkları görülmektedir. 4 öğrenci ise b seçeneğini doğru cevaplarken a seçeneğini boş bırakmış ya da yanlış cevaplamıştır. Bu öğrencilerin de sayı örüntüsünü yapamadıkları fakat şekil örüntüsünü yapabildikleri görülmektedir. Yine Tablo 4.35 'e bakıldığında 7 öğrencinin her iki seçeneği de boş bıraktığı görülmektedir.

Tablo 4.33, Tablo 4.34 ve Tablo 4.35 birlikte yorumlanırsa 9.sınıflardan her iki seçeneği de doğru yapan 34,10 sınıflardan 19 ve 11.sınıflardan ise 43 öğrencidir. Yine tablolar incelendiğinde 9.sınıflardan 5, 10.sınıflardan 21 ve 11.sınıflardan ise 7 öğrenci her iki seçeneği de boş bırakmıştır. Boş bırakan öğrenciler için çoğunlukla süre sıkıntısı yaşadıkları söylenebilir. Süre sıkıntısı yaşamayan öğrencilerde ise genelleme sıkıntısı yaşadıkları söylenebilir.

Sayı ve Şekil Örüntüsü sorusunda öğrencilerin problemi çözerken sorunun her bir seçeneğinde verdikleri cevapların sınıflarına göre karşılaştırmalarını yapmak amacıyla a seçeneğine yönelik verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.36'da ve b seçeneğine yönelik verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo 4.37'de verilmiştir.

Tablo 4.35. Sayı ve Şekil Örüntüsü Sorusunun A Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

Kategori	Örnek cevap	9. sınıf	10 sınıf	11 sınıf	Toplam
Terimleri 2'nin kuvvetleri olarak artırma	1 2 4 8 16 32 ... - 4, 5, 7, 11, 19 35 67, 131, 259 19 + 16 = 35 sayılar artarken iki katı kadar artar (10a-Ö10)	30	19	39	88
"n" son terim olmak üzere 2n-3 şeklinde formül üretme	kural 2n-3 (19. 2)-3 = 38-3 = 35// (10c-Ö39)	10	3	8	21
"n" terim sayısı olmak üzere $2^{n-1}+3$ şeklinde formül üretme	35, a=2'nin kuvveti şeklinde örüntü $(2^{n-1})+3$ (9a-Ö1)	1	0	0	1
Sadece sonucu yazanlar	35	10	5	2	17

Tablo 4.35'den görüldüğü gibi a seçeneği 4 kategori altında toplanmıştır. Soruda belli bir kurala göre devam eden terimlerin arasında bir terim boş bırakılmıştır. Ve bu boş yere gelmesi gereken sayı sorulmuştur. Öğrencilerden burada bir kural bulması ve bu kuralı genişleterek doğru cevaba ulaşması beklenmektedir. "Terimleri 2'nin

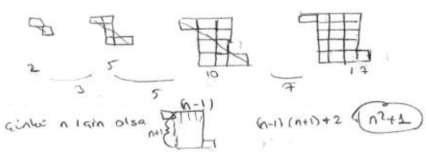
kuvvetleri olarak artırma" kategorisinde cevap veren öğrenciler terimler arasındaki artış miktarını incelemiş ve bu artışın düzenli olarak 2'nin kuvvetleri şeklinde eklenerek arttığını keşfetmişlerdir.

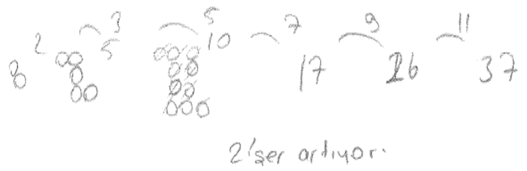
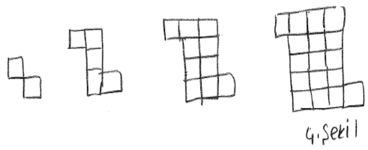
4----5----7---11---19---?--- 67---131---259

1 2 4 8 16 32 64

Burada öğrenciler 19 terimine 16 ekleyerek (19+16=35) doğru cevaba ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler 9.sınıftan 30, 10.sınıftan 19 ve 11.sınıftan ise 39 öğrencidir. ""n" son terim olmak üzere 2n-3 şeklinde formül üretme" kategorisinde cevap veren öğrenciler ise terimlerin diziliminde bir kuralın olduğunu ve "n" son terim olmak üzere 2n-3 kuralına göre diğer terimin geldiğini keşfetmişlerdir. Yani n = 4 için 2.4-3=5, n=5 için 2.5-3=7, n=7 için 2.7-3=11 şeklinde ilerlediğini fark etmişler ve bu durumu n=19 özel durum için genişletmişlerdir. n=19 için 2.19-3=35 doğru cevabına ulaşmışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler diğer kategoriye göre daha az olup 9.sınıflardan 10, 10.sınıflardan 3 ve 11.sınıflardan ise 8 kişidir. ""n" terim sayısı olmak üzere $2^{n-1}+3$ şeklinde formül üretme" kategorisinde cevap veren yalnızca 1 öğrencidir ve 9.sınıftan olup bu şekilde yaklaşan 10 ve 11. Sınıflardan öğrenci olmamıştır. Öğrenci burada "n" terim sayısı olmak üzere $2^{n-1}+3$ şeklinde bir kural keşfetmiştir. Yani, n=3 iken $2^{3-1}+3= 7$, n= 5 iken $2^{5-1}+3 =19$ dur. Bu şekilde kuralı keşfeden öğrenci bunu n= 6 özel durum için genişletmiş ve $2^{6-1}+3= 35$ doğru cevaba ulaşmıştır. "Sadece sonucu yazanlar" kategorisinde cevap veren öğrenciler sadece sonucu 35 şeklinde yazmışlardır. Bu şekilde cevap veren öğrencilerin sayısı 9.sınıflarda 10, 10.sınıflardan 5 ve 11.sınıflardan ise 2'dir. Bu sorunun b seçeneğine verilen cevaplardan elde edilen kategoriler Tablo4.37'de verilmiştir.

Tablo 4.36. Sayı ve Şekil Örüntüsü Sorusunun B Seçeneğinde Verilen Cevaplardan Elde Edilen Bulgular

Kategori	**Örnek cevap**	**9. sınıf**	**10 sınıf**	**11 sınıf**	**Toplam**
"n" kare sayısı olmak üzere n^2+1 formülünden faydalanarak şekli çizme	 (11a-Ö56)	3	0	1	4

Karelerin artış miktarından faydalanarak şekil çizme	 (9c-Ö45)	6	2	6	14
Direkt şekli çizenler	 (11a-Ö61)	33	24	38	95

Tablo 4.36’dan da görüldüğü gibi b seçeneği 3 kategoride toplanmıştır. Burada 3 adımda şekil örüntüsü verilmiştir. Öğrencilerden 4.adımdaki şekli çizmeleri ve bunu nasıl yaptıklarını açıklamaları istenmiştir. ““n” kare sayısı olmak üzere n^2+1 formülünden faydalanarak şekli çizme” kategorisinde cevap veren öğrenciler bu şekillerdeki kare sayılarının artışında bir kural keşfetmiştir. Yani “n” kare sayısı olmak üzere n^2+1 sayısında kare olacağını düşünerek şekli devam ettirmişlerdir. Bu şekilde yaklaşan öğrenciler, 9.sınıftan 3 ve 11.sınıftan ise yalnızca 1 kişidir. “Karelerin artış miktarından faydalanarak şekil çizme” kategorisinde cevap veren öğrenciler ise karelerin sayısının artış miktarından faydalanarak şekil çizmişlerdir.

2 5 10 17

3 5 7

Bu şekilde yaklaşan öğrenciler ise 9 ve 11.sınıfta 6, 10.sınıfta ise 2 kişidir. “ Direkt şekli çizenler” kategorisinde cevap verenler ise 4.adımı direkt çizmiş ve hiçbir açıklama yapmamışlardır. Bu şekilde yaklaşan öğrencilerin sayıları ise 9.sınıflardan 33, 10.sınıflardan 24 ve 11.sınıflardan ise 38’dir.

4.1.6. 1. Aşamanın Genel Analizi

9, 10, 11. sınıfların A, B ve C şubelerine göre 1.aşamada sorulan 5 sorudaki doğru sayıları Tablo 4.38’de verilmiştir.

Tablo 4.37. 9,10,11. Sınıfların A,B ve C Şubelerine Göre Doğru Sayıları

Sınıf	Şubeler	0 Doğru	1 Doğru	2 Doğru	3 Doğru	4 Doğru	5 Doğru	Toplam Kişi	Genel Toplam
9. SINIF	A Şubesi	1	3	4	3	5	1	17	63
	B Şubesi	3	6	7	6	1	0	23	
	C Şubesi	6	7	8	2	0	0	23	
10. SINIF	A Şubesi	0	10	6	2	4	0	22	56
	B Şubesi	6	6	1	2	0	0	15	
	C Şubesi	8	6	3	2	0	0	19	
11. SINIF	A Şubesi	1	1	8	6	3	1	20	61
	B Şubesi	1	4	6	6	3	0	20	
	C Şubesi	2	9	6	4	0	0	21	

Tablo 4.37'deki bilgilere göre aynı sınıf seviyesindeki A şubelerinin B şubelerinden, B şubelerinin de C şubelerinden daha fazla doğru sayısı olduğu görülmektedir. Bu durumda aynı sınıftaki öğrencilerin genelleme sürecindeki düşünme süreçlerinin akademik başarıya göre farklılık gösterdiği görülmektedir. Bunun yanında 9,10 ve 11.sınıflar ayrı ayrı incelenirse eğer, 9.sınıf ve 11.sınıfta 5 soruda 5 tam doğru yapan birer öğrenci mevcuttur. 4 tam doğru yapan öğrenci sayısı 9 ve 11 'lerde 6 öğrenci iken 10.sınıfta ise 4'tür. 3 tam doğru yapan öğrenci sayısı 9.sınıfta 11, 10.sınıfta 6 ve 11.sınıfta ise 16'dır. 2 tam doğru yapan öğrenci sayısı 9.sınıfta 19, 10.sınıfta 10, 11.sınıfta ise 20 öğrencidir.1 tam doğru yapan öğrenci sayısı 9.sınıfta 16, 10.sınıfta 22 ve 11.sınıfta ise 14'tür. Tam doğrusu olmayan öğrenci sayıları ise 9.sınıfta 10, 10.sınıfta 14 ve 11. sınıfta ise 4'tür. Bu bilgilere göre 5 sorudan en az 2'sini tam doğru yapan öğrenci sayısı 9 ve 11.sınıfların birbirine yakın olup 10.sınıftan fazladır. 5 sorudan en çok 1 doğrusu olan öğrenci sayısı ise 10.sınıflarda fazla olup 9 ve 11'lerde daha azdır. Bu sonuçlara bakıldığında 9 ve 11.sınıflar daha başarılı iken 10.sınıflar ise bu süreçte daha başarısız olmuştur. Bunun bir çok sebebi olabilir. Bunlardan bir tanesi, 9.sınıfların LGS sürecine hazırlanırken mantık muhakeme güçlerinin daha arttığı ve bu sebeble 10.sınıflardan daha başarılı olmuş olabilirler. 11.sınıfların ise 3 yıl üzerine kattıkları akademik alt yapı inşası ile matematiksel düşünme boyutlarının 10.sınıflara oranla daha çok geliştiği söylenebilir. 10.sınıfların ise yarı TEOG, yarı LGS sürecine hazırlandıkları için 9.sınıflar kadar muhakeme yetenekleri güçlü kalmadığı söylenebilir.

4.2. Aşama 2'den Elde Edilen Bulgular

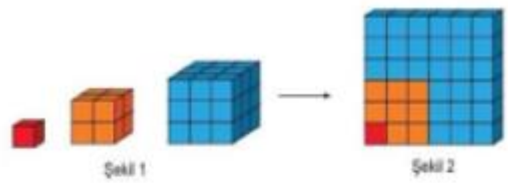
Bu kısımda aşama 1 ve aşama 2 sorularından elde edilen bulgulara yer verilmiştir. Aşama 1'de 5 soru sorulmuştur. Bunlardan ilki aşama 2'deki ilk soru ile aynıdır. Fakat iki sorunun görselleri farklıdır. Diğer 4 soru ise görsel ve içerik olarak farklı fakat sorudan istenilen genelleme süreçleri aynıdır. 2.aşama bir ders saati süresinde (40dk) yapılmıştır. Bu aşamada öğrenci video kaydını istemediği için ses kaydı yapılmıştır. Burada öğrencinin uyulama sırasındaki düşüncelerine de yer verilmiştir.

4.2.1. Birinci Sorudan Elde Edilen Bulgular

Aşağıda verilen Şekil 4.6'da Aşama 1 ve Aşama 2 'ye ait ilk sorular verilmiştir. Aşama 2'nin ilk sorusu Nelsen'den (1993, s.86) dan uyarlanmıştır.

AŞAMA 1

1) Şekil 1 de verilen küpler parçalarına ayrıldıktan sonra birleştirildiğinde şekil 2 elde edilmektedir.



a)Daha sonra şekil 1 de verilen küpler ile birlikte aşağıda verilen yeşil küp parçalara ayrılıp şekil 2 elde edilmeye çalışılıyor.

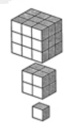
Bu durumda elde edilen şekildeki küplerin sayısı nedir?

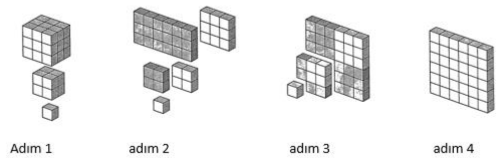
b)Bu şekilde kenar uzunluğu 10 br küp eklenene kadar devam edilirse bu durumda elde edilen yeni şekilde küp sayısı nasıl ifade edilebilir?

c)Şekil 1 deki küpler ile birlikte n br küp eklenip şekil 2'deki gibi tekrar birleştirilirse yeni elde edilen şekildeki küplerin sayısı nasıl ifade edilebilir?

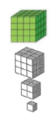
AŞAMA 2

1) a) Aşağıdaki şekilde verilen her bir küp aşağıdaki gibi parçalanıp ve yeniden düzenlenerek yeni bir şekil oluşturulmak isteniyor.





4.adımda elde edilen şekildeki küplerin ısıl ifade edilebiliriz?



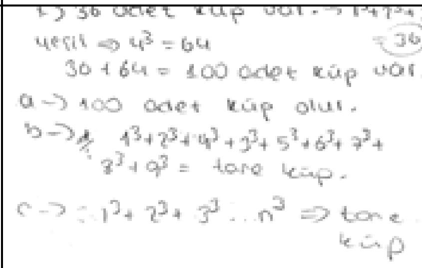
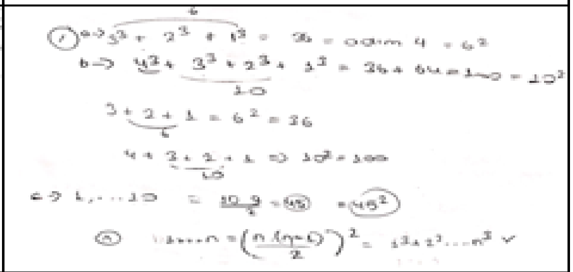
b) Yukarıdaki şekli, a seçeneğinde yapıldığı gibi her bir küpün parçalanıp yeniden düzenlenerek yeni bir şekil oluşturulmak isteniyor. Bu durumda elde edilen yeni şekildeki birim küp sayısını nasıl ifade edileceğini yazınız.
c) kenar uzunluğu 1br, 2br,…10 br olan küpler aynı şekilde parçalanıp düzenlenip yeni şekil elde edildiğinde elde edilen şekildeki birim küplerin sayısını nasıl ifade edebilirsiniz.
d) herhangi bir n durumu için elde edilen yeni şekildeki birim küplerin sayısını nasıl ifade edebilirsiniz.

Şekil 4.6. Aşama 1 ve Aşama 2 'nin birinci sorusu

Aşama 1 'deki 1.soru ve aşama 2'deki 1.soru iki paralel formda hazırlanmıştır. Bu paralel formlarda yalnızca kullanılan görsel farklıdır bu sayede genelleme sürecinde görselin etkisini araştırmak hedeflenmiştir.

İlk aşamada verilen şekilden yola çıkarak aşama 1'deki gibi $1^3+2^3+3^3= (1+2+3)^2$ özel bir durumda kuralı bulması daha sonra bu kuraldan yola çıkarak bir sonraki adım olan $1^3+2^3+3^3+4^3$ için kuralı keşfetmesi beklenmektedir. Daha sonra uzak bir durum 10 için ve herhangi bir duruma (n için) bu kuralı genişletmesi beklenmiştir. Öğrenci ilk aşamada doğru cevaplamıştır ancak istenilen asıl hedefe ise ikinci aşamada ulaşmıştır. Öğrencinin her iki soruya verdiği cevaplar aşağıdaki Tablo 4.39'da gösterilmiştir.

Tablo 4.38. 1.Sorudan Elde Edilen Bulgular

Öğrenci numarası	AŞAMA 1	AŞAMA 2
(9a-Ö10)		
	Doğru cevaplamıştır.	Doğru cevaplamıştır.

Kendisiyle yapılan görüşmede problem ve çözümü ile ilgili olarak şunları belirtmiştir:

A: Bu soruyu daha önceden görmüş müydün?

Ö: Evet, bu bize yaptığınız ilk uygulamadaki soru.

A: Peki nasıl yaptığını hatırlıyor musun?

Ö: Hayır hatırlayamadım.

A: Peki o zaman ilk defa görmüş gibi soruyu çözebilirsin. Sorunun tamamını okudun mu? Ne istiyor soru senden?

Ö: Öncelikle yeniden düzenlendiği için aynı sayıda küp olur. 4.adımdaki küpleri sayarım. $1^3+2^3+3^3=36$ tane küp vardır. Ama bunu bir şekilde ifade etmem lazım. O zaman sağlamasından gidebilirim. Şeklin bir kenarında 6 tane birim küp var 6 'nın karesinden 36 tane vardır.

A: B seçeneğine geçelim. Burada ne düşünürsün?

Ö: A seçeneğinde bulduğum sonuca 64 eklerim ve $1^3+2^3+3^3+4^3=36+64=100$ yani $100=10^2$ olur. Evet, şimdi fark ettim. Burada 4+3+2+1=10 diğer şıkta da 3+2+1=6 oluyor.

A: Peki tam olarak anladığını açabilir misin?

Ö: Yani 3+2+1=6 ve $6^2=36$ oluyor, 4+3+2+1=10 ve $10^2=100$ oluyor. O zaman c seçeneğinde 1'den 10'a kadar tüm sayıları toplarım. Terim sayısı formülünden $1+2+\ldots+10=\frac{9.10}{2}=45$ olup 45^2 olur.

Burada öğrenci terim sayısı formülünü bilmesine rağmen orada karıştırmıştır. Ve $\frac{n.(n+1)}{2}$ olan formülü $\frac{n.(n-1)}{2}$ olarak düşünmüştür. 55^2 olan cevabı 45^2 olarak bulmuştur. Öğrencinin yaklaşımı doğru olduğu için bu şık doğru kabul edilmiştir.

A: Peki d seçeneği için ne düşünürsün?

Ö: Diğer şıklarla aynı yaparım. 1'den n ' e kadar toplarım. $(1+2+\ldots\ldots+n)^2=(\frac{n.(n+1)}{2})^2$ olur.

A: Peki sence soru burada bizden ne görmek istedi?

Ö: Terim sayısını mı istedi?

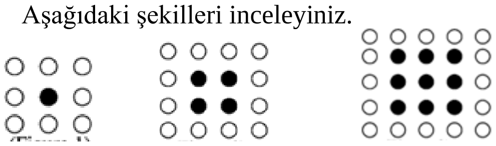
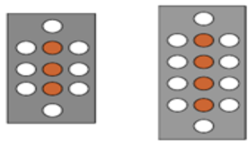
A: Yok hayır, ilk şıklarda gittiğin yolu hatırla, sence d seçeneğinde bulduğun hangi ifadeye eşit olabilir?

Ö: Anladım. $(1+2+\ldots\ldots+n)^2=(\frac{n.(n+1)}{2})^2 = 1^3+2^3+\ldots+ n^3$ bu şekilde olur.

Burada öğrenci 1.aşamada öğrenci $1^3+2^3+\ldots+ n^3$ şeklinde sonuca ulaşırken 2.aşamada $(1+2+\ldots\ldots+n)^2=(\frac{n.(n+1)}{2})^2 = 1^3+2^3+\ldots+ n^3$ durumunu fark etmiştir. Burada sorunun görselinin değişmesi öğrenci üzerinde bir farklılık yaratmamış her iki soruyu da doğru yanıtlamıştır.

4.2.2. İkinci Sorudan Elde Edilen Bulgular

Aşağıda verilen Şekil 4.7'de Aşama 1 ve Aşama 2 'ye ait ikinci sorular verilmiştir. Aşama 2'nin ikinci sorusu Barbosa, (2011) tarafından uyarlanmıştır.

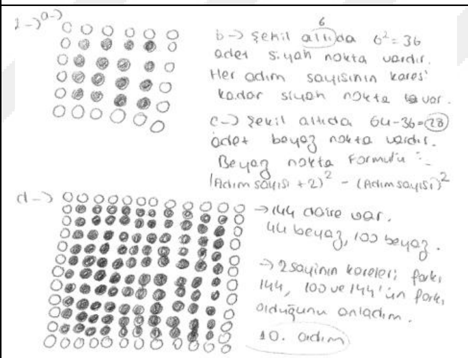
1.AŞAMA	**2.AŞAMA**
Aşağıdaki şekilleri inceleyiniz.  Şekil 1 şekil 2 şekil 3 **a)**Şekil 4' e ne gelebileceğini çiziniz. **b)**Şekil 6' da kaç tane siyah nokta vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **c)**Şekil 6 'da kaç tane beyaz nokta vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız **d)**Şekil 1' de 8 tane beyaz nokta vardır. Şekil 3 'te 16 tane beyaz nokta vardır. Eğer bir şekilde 44 tane beyaz nokta var ise bu şekli nasıldır? Çiziniz. Bu kaç numaralı şekil olacaktır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.	Aşağıdaki resim Pizza Talya dükkânındaki iki masayı göstermektedir. Bunlardan ilkinde 8 kişi ve 3 pizza bulunmakta iken diğerinde 10 kişi ve 4 pizza bulunmaktadır. Bu verilen bilgilere göre  Şekil 1 Şekil 2 **a)** 10 pizzanın bulunduğu bir masada kaç kişi oturur? **b)** Masada 31 pizza olsaydı masada kaç kişi otururdu? **c)** Doğum gününü bu pizza dükkânında kutlamaya karar veren Ersin, doğum gününe 57 kişiyi davet ettiğine göre kaç tane pizza siparişi verir?

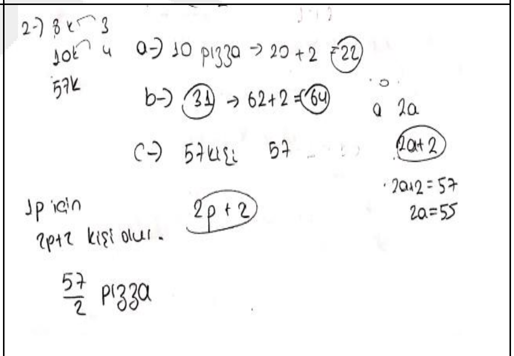
Şekil 4.7 Aşama 1 ve Aşama 2'nin ikinci sorusu

1.aşamada, verilen şekilden yola çıkarak bir sonraki şekli bulması beklenmiştir. Daha sonra şekli yorumlayarak şekil 6'da kaç tane siyah ve beyaz noktanın olduğunu kendi düşünme sürecinden yola çıkarak bir kural keşfetmesini ve bu kuralı n=4 uzak bir durum için genişletmesi beklenmiştir. Öğrenci 1.aşamada formül üreterek yaklaşmış ve doğru yanıtlamıştır.

2.aşamadaki soru aşama 1'deki 2.soru örneği ile ilişkilendirilmiştir. Şekil 1 ve şekil 2 incelenerek pizza sayıları ve kişi sayıları arasında yinelemeli ve fonksiyonel bir ilişki olduğunu görmesi ve kendi düşünme sürecinden yola çıkarak bir kural bulması beklenmiştir. Bu kuraldan yola çıkarak uzak bir durum olan 10 ve 31 pizza için kuralı genişletmesi hedeflenmiştir. Öğrenci ikinci aşamayı da yine formül üreterek doğru yanıtlamıştır. Öğrencinin her iki soruya verdiği cevaplar aşağıdaki Tablo 4.39'da gösterilmiştir.

Tablo 4.39. 2.Sorudan Elde Edilen Bulgular

<table>
<tr><th>Öğrenci numarası</th><th>AŞAMA 1</th><th>AŞAMA 2</th></tr>
<tr><td>(9a-Ö10)</td><td>


</td><td>


</td></tr>
<tr><td></td><td>Doğru cevaplamıştır.</td><td>Doğru cevaplamıştır.</td></tr>
</table>

Kendisiyle yapılan görüşmede problem ve çözümü ile ilgili olarak şunları belirtmiştir:

A: Evet ikinci soru için ne düşünüyorsun?

Ö: Şimdi burada 8 kişiye 3 pizza verilmiş, 10 kişiye 4 pizza verilmiş. Yani masada karşılıklı insanlar ve başlarına da 1 insan gelmektedir. O zaman 10 pizza olsaydı her pizzanın iki yanında 2 insan olurdu yani 20 kişi, başlarına da 2 insan gelirse 22 kişi olurlar.

A: Peki b seçeneği için ne düşünürsün?

Ö: Eğer 31 pizza olsaydı, 2 yanında insanlar olacağından 31.2=62 olurdu 2 kişi de başlarında 62+2=64 kişi olur.

A: C seçeneği?

Ö: Bence burada bir formül var. A pizza sayısı olsun. Her iki yanında birer insan olacağından 2a insan olur. Başlarına da 2 insan geleceği için yani 2a+2 gibi bir formül gelir. O zaman 2a+2=57 ise 2a=55 gelir. Ama bulamadım ben bunu.

A: Bir daha bak istersen.

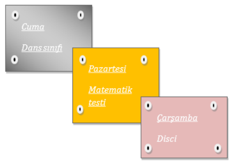
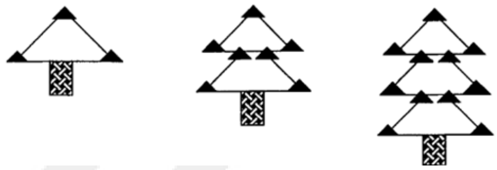
Ö: Bence bu şekilde 57 olamaz. Yani 57 ‘yi yapamam burada.

Burada öğrenci şekil 1 ve şekil 2 ‘yi inceleyerek bir kural bulmuştur. A pizza sayısı olmak üzere 2a+2 şeklinde bir formül geliştirmiştir. Öğrenci son seçenekte aşırı genelleme yaparak yanlış cevap vermemiştir. Burada 57 sayısı bilerek verilmiştir. Öğrencinin özel durumları inceleyerek uzak durumlar için aşırı genelleme yapıp yapmayacağı araştırılmak istenmiştir. Fakat öğrenci sorunun bu son seçeneğinde aşırı genellemeye kaçmamıştır.

Öğrenci her iki aşamada da şekildeki görselleri inceleyerek özel durumları incelemiş, uzak durumlar için formül geliştirmiştir ve görseli farklı hedefi aynı olan bu iki farklı soruyu doğru yanıtlamıştır.

4.2.3. Üçüncü Sorudan Elde Edilen Bulgular

Aşağıda verilen Şekil 4.8'de Aşama 1 ve Aşama 2 'ye ait ikinci sorular verilmiştir. Aşama 2'nin ikinci sorusu Stacey, (1989) tarafından uyarlanmıştır.

1.AŞAMA	**2.AŞAMA**
Ersin randevularını hatırlamak için odasındaki tahtasına notlar asmıştır. Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi notları tutturmak için iğneler kullanılmıştır.  Eğer bu şekilde notlar asılmaya devam edilirse; **a)** 6 notu asmak için kaç tane iğneye ihtiyaç vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **b)** Eğer 35 not asılmışsa kaç tane iğne kullanılmıştır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **c)** Ersin üçgen şeklindeki notlar asmaya karar vermiştir ve üçgenin her bir köşesine bir iğne tutturacaktır. Üst üste gelen üçgenlerde ortak bir iğne bulunacaktır. Bu doğrultuda yukarıdaki soruları tekrar cevaplandırınız.	Aşağıda 3 adet örneğini gördüğünüz farklı boyutlarda ancak hepsi aynı tasarımda Noel Ağaçları çizilmiştir. Bu ağaçların köşelerindeki üçgenler Noel ışıklarıdır.  **a)** 20 Noel ağacı olduğunda kaç tane ışık olacaktır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **b)** 100 Noel ağaç olduğunda kaç tane ışık olacaktır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

Şekil 4.8 Aşama 1 ve Aşama 2'nin üçüncü sorusu

İlk aşamadaki soruda verilen görselin incelenip yakın durum olan 6 not için kaç iğneye ihtiyaç olduğunu keşfetmesi beklenmiştir. Daha sonra uzak durumları genişletmesi için öğrencinin hem görsel hem de sayısal stratejilerden yararlanarak bir kural keşfetmesi amaçlanmıştır. Diğer taraftan c seçeneğinde ise genelleme becerisini farklı bir duruma taşımak hedeflenmiştir. Yani 4 kenarlı bir çokgenden 3 kenarlı bir çokgeni düşünerek n=6 yakın durum ve n=35 uzak durumları genişletmesi beklenmiştir. Öğrenci bu aşamayı formül üreterek doğru yanıtlamıştır.

İkinci aşamadaki bu soru da, aşama 1'deki 3.soru ile ilişkilendirilmiştir. Sorunun ilk adımında verilen görseli inceleyerek şekil 1'de 1 ağaç ve 3 ışık olduğunu, şekil 2'de 2 ağaç ve 7 ışık olduğunu şekil 3' de de 3 ağaç ve 11 ışık olduğunu incelemesi daha sonra uzak durumlara genişletmesi ve bu süreçle öğrencinin hem görsel hem de sayısal stratejilerden yararlanarak bir kural keşfetmesi amaçlanmıştır. Öğrenci ikinci aşamayı da formül üreterek doğru yanıtlamıştır. Öğrencinin her iki soruya verdiği cevaplar aşağıdaki Tablo 4.40‘da gösterilmiştir.

Tablo 4.40. 3.Sorudan Elde Edilen Bulgular

Öğrenci numarası	AŞAMA 1	AŞAMA 2
(9a-O10)	3-) 1 tanesine 4 a-) 2 tanesine 7 3 tanesine 10 4 tanesine 13 5 tanesine 16 6 tanesine 19 6'sında 19 tane gerekir. Burda bir örüntü var. 4 tane kesin kullanıcaz $\boxed{4+3.(n-1)}$ iğne. n, not sayısı b-) 35 not → 4 + 3 (35-1) → 106 iğne 4 + 102 = 106 üçgene göre: 1 tanesi 3 ,, 2 tanesi 5 ,, 3 tanesi 7 $\boxed{3+2(n-1)}$ → iğne sayım n = not sayım 6 not → 3 + 2 (6-1) 3 + 10 = 13 35 not için → 3 + (2.34) = 3 + 68 = 71 tane iğne	n 1 3 ışık 2 1+6 3^0 3 2+9 3^2 4 3+12 5 4+15 ⋮ 20 19+60 100 99+ a-) 20 ağaç için 79 ışık olur. b-) 100 noel ağacı 99 + 300 = 399 $\boxed{\text{n ağaç için} \rightarrow (n-1) + 3n}$ adet ışığım olur.
	Doğru cevaplamıştır.	Doğru cevaplamıştır.

Kendisiyle yapılan görüşmede problem ve çözümü ile ilgili olarak şunları belirtmiştir:

A: Peki 3.soru için ne düşünürsün?

Ö: Şimdi 1 ağaç için 3 ışık var, 2 ağaç için 7 ışık var. O zaman 1 tane fazladan geliyor. Yani 1+6 olur. O zaman 3 ışık kesin var ve buradan yola çıkarak ağaç kaç katlı ise onu 3 ile çarparız. İki ağaç varken 2.3 = 6 olur üstüne de 1 tane gelir. 3 ağaç varken 3 ile çarparız üstüne 2 gelir. O zaman böyle devam ederiz. 4 ağaç için, 3+12 olur. 5 ağaç için 4+15 şeklinde devam edebiliriz.

A: Tamam peki 20 ağaç için ne düşünürsün?

Ö: 20 ağaç için de şöyle olur, 19+60 şeklinde 20 ağaç için 79 tane ışık gelir.

A: b seçeneğine gelelim. Burada ne düşünürsün?

Ö: burada 100 noel ağacı soruluyor. O zaman burada n-1 geliyor. O zaman 100 ağaç için 99+ 300=399 ışık gelir. O zaman bunun için bir formül geliştirebilirim. N ağaç için (n-1) +3n adet ışığım olur.

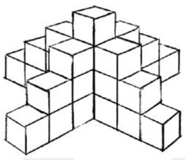
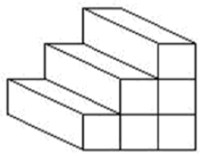
A: Peki teşekkürler, şimdi 4.soruya geçelim.

Öğrenci burada şekildeki ağaçları inceleyerek ağaç sayısı ile ışık sayısı arasında ilişki kurmuştur. İlk önce yakın durumları incelemiş ve daha sonra buradan bir formül geliştirmiştir. Bu formül, n ağaç sayısı olmak üzere (n-1)+3n şeklindedir. Buradan uzak durum olan n=20 ve n=100 için bu formülü genişletmiştir. n=20 için 19+60=79 ve n=100 için 99+300=399 cevaplarını bularak doğru yanıtlamıştır.

Öğrenci her iki aşamada da şekildeki görselleri inceleyerek özel durumları fark etmiş ve yakın durum için bir kural geliştirmiştir. Daha sonra uzak durumlar için bu kuralı genişletmiş ve görseli farklı hedefi aynı olan bu iki soruyu doğru yanıtlamıştır.

4.2.4. Dördüncü Sorudan Elde Edilen Bulgular

Aşağıda verilen Şekil 4.9'da Aşama 1 ve Aşama 2 'ye ait ikinci sorular verilmiştir. Aşama 2'nin ikinci sorusu Göl, (2017) tarafından uyarlanmıştır.

1.AŞAMA	**2.AŞAMA**
	
a)Şekildeki kuleyi yapmak için kaç tane küpe ihtiyaç duyulmuştur? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. b)12 küp yüksekliğinde bir kule yapmak için toplam kaç küpe ihtiyaç vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. c)n küp yükseklikte bir kule yapmak için kaç tane küpe ihtiyaç vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.	a)Şekildeki 3 basamaklı merdiveni yapmak için kaç adet blok kullanılmıştır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. b)12 basamaklı bir merdiven yapmak için toplam kaç adet blok kullanılmalıdır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **c)** n basamaklı bir merdiven yapmak için kaç adet blok kullanılmalıdır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

Şekil 4.9 Aşama 1 ve Aşama 2'nin dördüncü sorusu

İlk aşamada şekilde kaç tane küp olduğu bulunması istenmiştir. Bunu yaparken şekli devam ettirmesinden çok bu küplerin artışındaki bir kuralı görmesi ve uzak durum olan 12 yüksekliğine genişletmesi hedeflenmektedir. Bir sonraki aşamasında ise herhangi bir duruma (n için) kuralı genellemesi beklenmiştir. Öğrenci ilk aşamada n tane küp yükseklik olmak üzere n+(n-1)4 şeklinde bir formül geliştirmiştir. Ve bunu n=12 özel durum ve uzak durum n için genişleterek doğru cevaba ulaşmıştır.

İkinci aşamadaki bu soru ise aşama 1'deki 4. Soru ile ilişkilendirilmiştir. Sorunun ilk adımında, şekilde kaç tane blok kullanıldığı istenmektedir. Bunu yaparken şekli devam ettirmesinden çok bu merdiven için kullanılan blokların artışında bir kural görmesi ve uzak durum olan 12 basamaklı merdivene hedeflenmektedir. Bir sonraki aşamasında ise herhangi bir durum n için kuralı genellemesi beklenmiştir. Öğrenci ikinci aşamayı da yine formül üreterek doğru yanıtlamıştır. Öğrencinin her iki soruya verdiği cevaplar aşağıdaki Tablo 4.41‘de gösterilmiştir.

Tablo 4.41. 4. Sorudan Elde Edilen Bulgular

Öğrenci numarası	AŞAMA 1	AŞAMA 2
(9a-Ö10)	4küp ortada 6.4=24) 28 küpe ihtiyaç duyuldu. b-) 12 küp yüksekliği → 12 + (66.4) 264 + 12 = 276 küp gerekir c-) n yüksekliği için: n küp + (n-1).4 ... diye gider. toplanır	a→6 adet blok →3boş → 3+2+1 b-) 12 basamak için → 12 ... 1 → boş. $\frac{6\cancel{12}.13}{\cancel{2}}$ = 78 - Blok c-) n basamaklı 1+2+...n kadar blok $\frac{n.(n+1)}{2}$ blok kullanırız.
	Doğru cevaplamıştır.	Doğru cevaplamıştır.

Kendisiyle yapılan görüşmede problem ve çözümü ile ilgili olarak şunları belirtmiştir:

A: Evet şimdi 4.soruya geldik. Bu soru için ne düşünürsün?

Ö: Şekilde 6 adet blok vardır. Sayarak buldum.

A: Peki 12 basamak için ne düşünürsün?

Ö: Şimdi 3 basamak için 3+2+1 blok kullanılmış o zaman 12 basamak için de 12’den 1’e kadar sayıların toplamı kadar basamak kullanılır. O zaman 1’den n’e kadar olan sayıların toplam formülü olan $\frac{n.(n+1)}{2}$ ‘den yolla çıkarsak $\frac{12.13}{2}$=78 blok geldiğini görürüz.

A: Peki c seçeneği için ne düşünürsün?

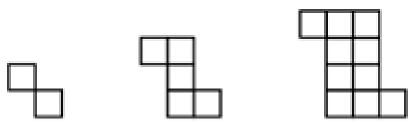
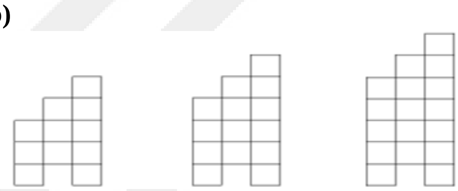
Ö: n basamak için de 1’den n ‘e kadar blok gelir yani $\frac{n.(n+1)}{2}$ tane blok kullanırız.

Öğrenci burada öncelikle şekildeki blok sayılarını incelemiştir. Daha sonra 1+2+3 şeklinde ilerlediğini fark etmiştir. Daha sonra n=12 özel durum için 1’den 12’ye kadar olan sayıların toplamını 1’den n’e kadar olan sayıların toplam formülü $\frac{n.(n+1)}{2}$ için genişletmiş ve 78 doğru cevabına ulaşmıştır. Sonraki adımda da n.durum için 1’den n’e kadar sayıların toplamının geleceğini düşünerek $\frac{n.(n+1)}{2}$ ifadesine ulaşmıştır.

Öğrenci her iki aşamada da şekildeki 3 boyutlu görselleri incelemiş ve yakın durumlar için bir formül geliştirmiştir. Daha sonra uzak durumlar için bu formülü genişletmiş ve görseli farklı hedefi aynı olan bu iki soruyu yine formül geliştirerek doğru yanıtlamıştır.

4.2.5. Beşinci Sorudan Elde Edilen Bulgular

Aşağıda verilen Şekil 4.10'de Aşama 1 ve Aşama 2 'ye ait ikinci sorular verilmiştir. Aşama 2'nin ikinci sorusun a seçeneği araştırmacı tarafından geliştirilmiştir. B seçeneği ise Chua ve Hoyle ,(2011) tarafından uyarlanmıştır.

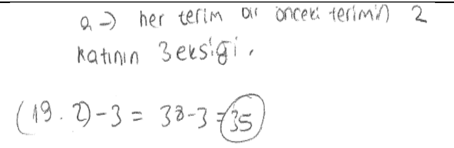
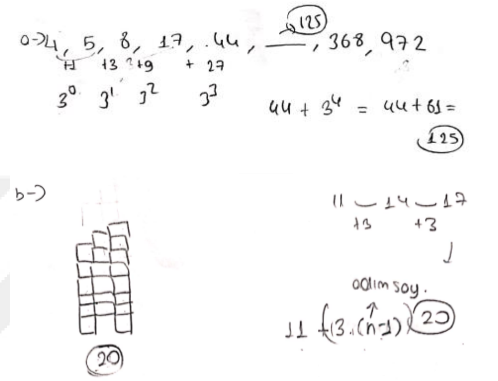
1.AŞAMA	**2.AŞAMA**
a) 4,5,7,11,19,___,67,131,259 sıraya gelecek elemanı yazınız nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **b)**  Şeklin devamını getiriniz. Ve nasıl yaptığınızı açıklayınız.	**a)** 4, 5, 8, 17, 44, ___, 368, 972 sıraya gelecek elemanı yazınız nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **b)**  Yukarıdaki şeklin devamını getiriniz ve nasıl yaptığınızı açıklayınız.

Şekil 4.10. Aşama 1 ve Aşama 2'nin beşinci sorusu

İlk aşamada, a seçeneğinde görselden faklı olarak sayısal düşünmesi bu süreçte ise yinelemeli düşünme sürecinden çok belirgin düşünmesi hedeflenmiştir. Sayıların arasında fonksiyonel bir ilişki yakalayıp genişletmesi beklenmiştir. B seçeneğinde ise sayısal düşünmesinden çok görsel olarak yaklaşması, şekiller arasında ilişki kurması ve yakın bir adıma genişletmesi hedeflenmiştir. Öğrenci ilk aşamada a seçeneğinde sayılar arasında bir ilişki yakalamış ve bu ilişkiyi "her terim bir önceki terimin 2 katının 3 eksiği" şeklinde ifade etmiş ve formül üreterek doğru cevaba ulaşmıştır. Fakat b seçeneğini boş bırakmıştır.

İkinci aşamadaki bu soru a seçeneğinde yine aşama 1'deki gibi görselden faklı olarak sayısal düşünmesi bu süreçte ise yinelemeli düşünme sürecinden çok belirgin düşünmesi hedeflenmiştir. Sayıların arasında fonksiyonel bir ilişki yakalayıp genişletmesi beklenmiştir. B seçeneğinde ise sayısal düşünmesinden çok görsel olarak yaklaşması, şekiller arasında ilişki kurması ve yakın bir adıma genişletmesi hedeflenmiştir. Öğrenci a seçeneklerini formül üreterek doğru yanıtlarken 1.aşamada b seçeneği boş bırakmış, ikinci aşamada b seçeneğini ise doğru yanıtlamıştır. Öğrencinin her iki soruya verdiği cevaplar aşağıdaki tablo 4.43' te gösterilmiştir.

Tablo 4.42. 5. Sorudan Elde Edilen Bulgular

Öğrenci numarası	AŞAMA 1	AŞAMA 2
(9a-Ö10)		
	A seçeneğini doğru yanıtlamıı b seçeneğini ise boş bırakmıştır.	Doğru cevaplamıştır.

Kendisiyle yapılan görüşmede problem ve çözümü ile ilgili olarak şunları belirtmiştir:

A: Evet son soru için ne düşünürsün?

Ö: Bulamadım bu örüntüyü.

A: Bence bir daha bak, çok rahat yapabilirsin. Ya da önce b seçeneğini yap sonra geri dönersin.

Ö: Tamam olur. Şimdi birinci şekilde 11 tane var, ikinci şekilde 14 ve üçüncü şekilde 17 tane vardır. Bunların hepsine 3 tane eklenmiş. Tamam şimdi çözdüm, hepsine basamak bir yükseltiliyor. Evet devamında da aynı şekilde eklerim.

A: O zaman şekli çizebilir misin buraya?

Ö: Öncelikle kaç tane geleceğini bulurum. 11+(13.(n-1)) şeklinde yazarım.

A: Burada n dediğin nedir?

Ö: Adım sayısı. O zaman bu şekilde düşünerek çizeyim.

A: Evet şimdi a seçeneğine geri dönelim.

Ö: Şimdi sayıları incelediğimde sayıların 3’ün kuvvetleri şeklinde arttığını görüyorum.

A: Nasıl yani? Biraz daha açar mısın?

Ö: Yani 4’ten 5 $1=3^0$, 5’ten 8’e $3=3^1$, 8’den 17 ‘ye $9=3^3$ eklenmiştir. O zaman 44’ e $3^4=81$ eklenmelidir. O halde 44+81=125 olur.

Öğrenci her iki aşamada da şekildeki verilen sayıları inceleyerek aralarındaki ilişkiyi fark etmiş uzak durumlar için bir kural geliştirmiştir ve hedefi aynı olan bu iki farklı soruyu doğru yanıtlamıştır. Öğrenci ilk aşamada 5.sorunun b seçeneği olan görsel soruyu boş bırakmıştır. Fakat ikinci aşamada farklı olan ancak hedefi aynı olan soruyu doğru yanıtlamıştır. Bu durumda ilk aşamada sınavın yetişmediği ya da öğrencinin soruyu yapmak istemediği gibi yorumlar yapılabilir.

BÖLÜM V

SONUÇ TARTIŞMA ve ÖNERİLER

Bu bölüm, verilerin analizinden elde edilen bulgulara dayalı olarak ortaya çıkan sonuçlara, literatürdeki genelleme becerileri ile ilgili araştırma bulgularıyla karşılaştırılarak tartışılmasına, ayrıca gerçekleştirilen araştırmaya ve ileride yapılabilecek benzer nitelikteki araştırmalara yönelik önerilere yer verilmiştir.

5.1. Sonuç

Genelleme süreçlerinin okul öncesinden üniversiteye kadar olan her kademesinde, öğrencilerin matematiği öğrenmesi, uygulaması ve buna bağlı olarak matematik başarısındaki rolü göz ardı edilemez. Bu nedenle bu iki beceri, öğrencilerinin sergilediği üst bilişsel yeteneklerden biri olarak sınıflandırılır ve matematik öğretiminin temel amaçlarından biri olarak adlandırılır. Genelleme ile ilgili yapılacak bir çalışmanın matematik eğitimine önemli bir katkı sağlayacağı düşünüldüğünden bu araştırma, orta öğretim öğrencilerinin genelleme becerilerini konu edinmiştir.

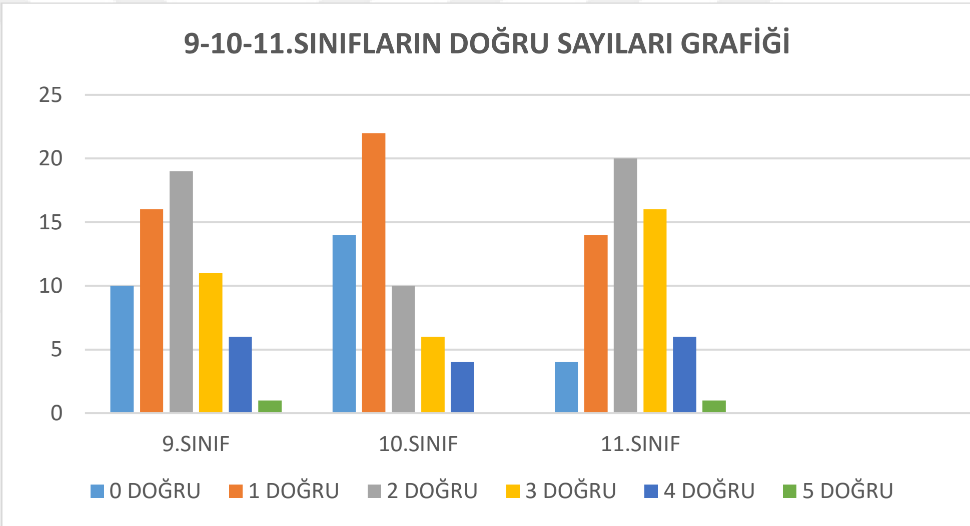
Bu doğrultuda orta öğretim öğrencilerinin genelleme becerilerini incelemek amacıyla Antalya ilinde bir özel Fen lisesinde öğrenim gören 9,10 ve 11.sınıftaki öğrencilere uygulanmış ve 'farklı sınıf sevilerindeki öğrencilerin matematiksel genelleme sürecinde düşünme süreçleri nasıldır?' sorusuna cevap aranmaya çalışılmıştır. Bunun için

1. Aynı sınıftaki öğrencilerin genelleme becerisi akademik başarıya göre farklılık göstermekte midir?
2. Farklı sınıf seviyelerindeki öğrencilerin genelleme becerileri nasıldır?
3. Genelleme becerilerinde görselliğin ve zaman aşımının etkisi nasıldır? Şeklinde alt problemler cevaplandırılmaya çalışılmıştır.

Aşama 1 ve Aşama 2 olarak iki oturumda uygulanmıştır. 1.Aşama 9. Sınıflara 18 Eylül 2019, 10. Sınıflara 26 Eylül 2019 ve 11. Sınıflara 17 Eylül 2019 tarihinde uygulanmıştır. 2.Aşama ise 6 Kasım 2019 tarihinde 9.sınıflardan 1 öğrenciye uygulanmıştır. Bu çalışmada nitel araştırma yaklaşımlarından durum çalışması (case study) yapılmıştır. İki aşamada da araştırma grubunun 1 ders saati süresince çözülebileceği sorular yöneltilmiş ve cevaplar yazılı formda toplanıp bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Öğrencilerden elde edilen verilerin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemlerinden içerik analizi tekniği benimsenmiştir. Bu analizde öğrencilerin genelleme sürecinde hangi aşamaları en çok kullandığı, hangilerinde başarılı ve hangilerinde başarısız olduğu genelleme yapabilme becerisi olup olmadığı gibi sonuçlar elde edilmiştir. Verilerin analizi sonucu şu sonuçlar elde edilmiştir:

5.1.1. Aşama 1 Sonucu

9.10. ve 11. sınıfların aşama 1 sonucunda yaptıkları tam doğru sayıları Grafik 5.1 'de verilmiştir.

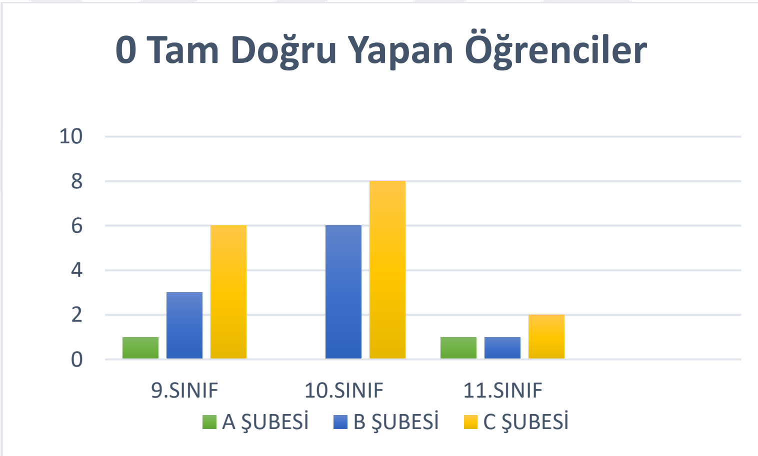


Grafik 5.1. 9-10-11.Sınıfların Doğru Sayıları Grafiği

Grafik 5.1 detaylı incelendiğinde 9. ve 11.sınıftan 5 tam doğru yapanın olduğu fakat 10.sınıflarda ise 5 tam doğru yapan öğrencinin olmadığı görülmektedir. Bunun yanında 2,3 ve 4 tam doğru yapan öğrencilerin 9. ve 11 sınıfta, 10.sınıflarına oranla daha fazla sayıda olduğu aşikardır. Grafik 5.1 yine incelendiğinde 10.sınıfta 0 ve 1 tam doğru yapan öğrenci sayısının 9 ve 11.sınıflara oranla daha fazla olduğu görülmektedir. Bu durumda grafikteki bilgilere göre 9 ve 11.sınıflar daha başarılı iken 10.sınıflar bu iki sınıfa oranla daha başarısız olmuştur. Bunun birçok sebebi olabilir. Bunlardan bir tanesi, 9.sınıfların LGS sürecine hazırlanırken mantık muhakeme güçlerinin daha arttığı ve bu sebeble 10.sınıflardan daha başarılı olmuş olabilirler. 11.sınıfların ise 3 yıl üzerine kattıkları akademik alt yapı inşası ile matematiksel düşünme boyutlarının 10.sınıflara oranla daha çok geliştiği söylenebilir. 10.sınıfların ise yarı TEOG, yarı LGS sürecine hazırlandıkları için 9.sınıflar kadar muhakeme yetenekleri güçlü kalmadığı söylenebilir.

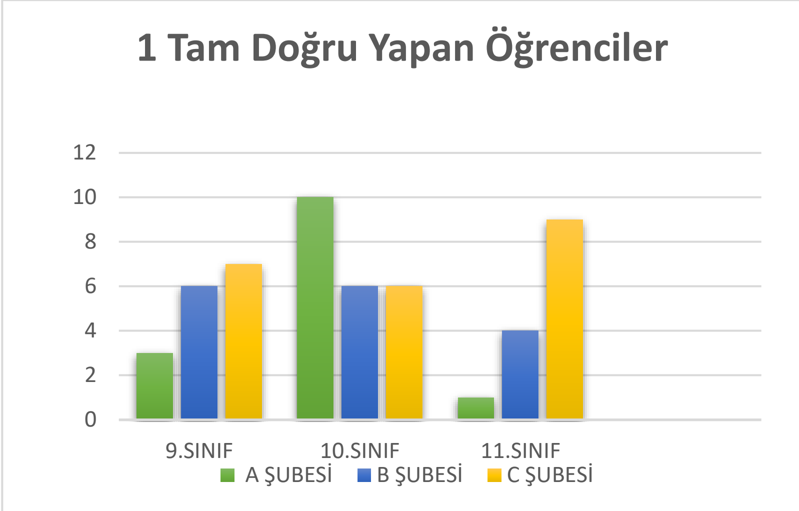
Bu sonuçlar doğrultusunda 11.sınıf öğrencilerinin başarılı olma durumu için aşamalı problemleri genellemeler yaparak çözmeyi öğrenmek için yaş, olgunlaşma ve zihinsel gelişim açısından diğer sınıflara göre daha uygun bir dönemde oldukları düşünülebilir. Çelebi (2013)'nin, 6,7,8. sınıflarla yaptığı çalışmada 8.sınıfların daha başarılı olduğunu bunun sebebi olarak da 8.sınıfların lise sınavına hazırlık döneminde oldukları için algılarının daha açık olması, yaş, olgunlaşma ve zihinsel gelişim açısından diğer sınıflara göre daha uygun bir dönemde olduklarını açıklamıştır. Bu bağlamda 11.sınıfların başarılı olması bu çalışma ile paralellik sağlamıştır.

9,10 ve 11. sınıf seviyelerindeki öğrencilerin bulundukları akademik başarı şubesine göre doğru sayıları Grafik 5.2, Grafik 5.3, Grafik 5.4, Grafik 5.5, Grafik 5.6 ve Grafik 5.7'de verilmiştir.



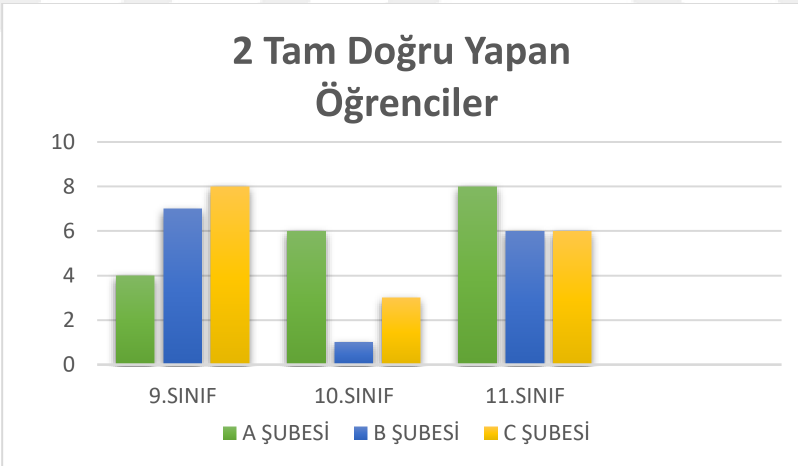
Grafik 5.2. "0" Tam Doğru Yapan Öğrenciler

Grafik 5.2 incelendiğinde her sınıf seviyesinde A şubesinin B şubesinden ve B şubesinin de C şubesinden daha az sayıda olduğu görülmektedir. 0 tam yapan öğrenci sayılarının az olması o şube ve sınıf seviyesinin daha başarılı olduğunu göstermektedir.



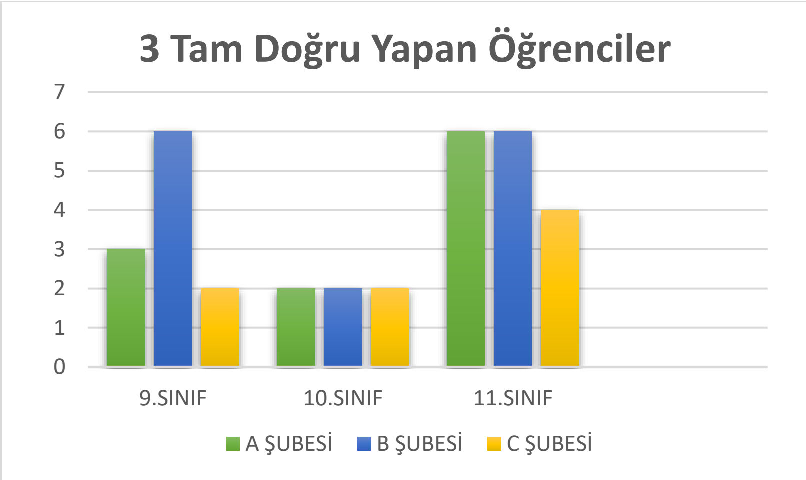
Grafik 5.3. "1" Tam Doğru Yapan Öğrenciler

Grafik 5.3 incelendiğinde 10.sınıftaki 1 tam doğru yapan öğrencilerin 9 ve 11. sınıflara oranla daha fazla olduğu görülmektedir. Bunun yanında 9. ve 11. sınıftaki A şubelerinde daha az öğrenci 1 tam doğru yaparken 10. sınıfta A şubesinde ise daha 1 tam doğru yapan öğrenci vardır. Bu durumda 10.sınıftaki A şubesinin öğrencileri, 9 ve 11.sınıftaki A şubesinin öğrencilerine göre daha başarısız olmuştur.



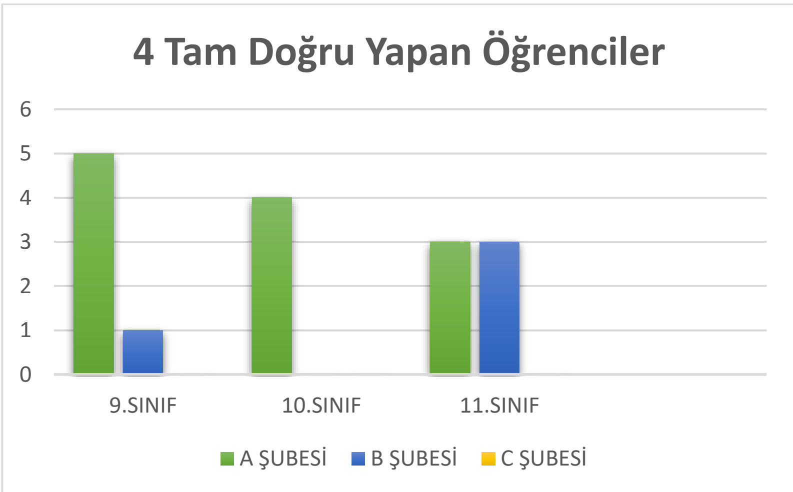
Grafik 5.4. "2" Tam Doğru Yapan Öğrenciler

Grafik 5.3 incelendiğinde 9 ve 11. sınıfta toplam 2 doğru yapan öğrenci sayısının 10.sınıfta toplam 2 doğru yapan öğrenci sayısından daha fazla olduğu görülmektedir. Bunun yanında 9.sınıfta C şubesinde 2 doğru yapan sayısı B ve A şubelerinden daha fazladır. Bu durumda A ve B şubelerinin toplam doğru sayıları daha fazla olduğu için daha başarılı olmuştur. 10 ve 11.sınıfta bu durum daha farklıdır. A şubelerindeki öğrencilerden 2 doğru yapan diğer şubelere oranla daha fazla olmuştur.



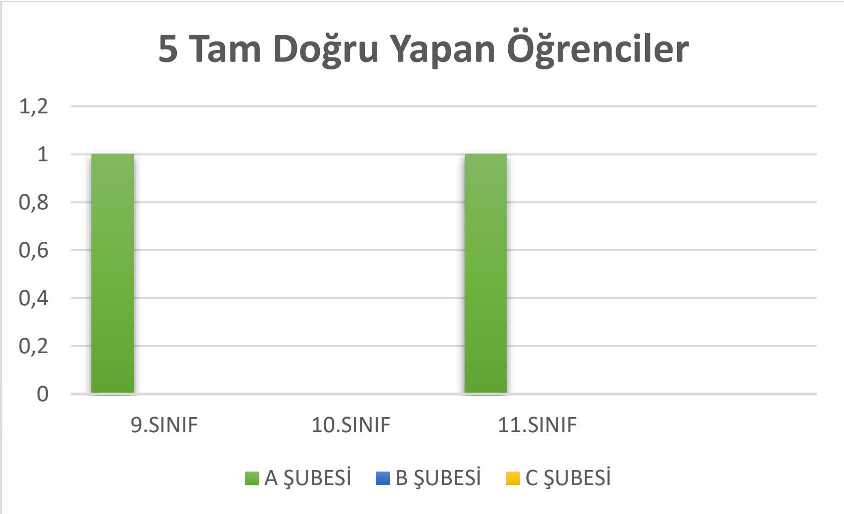
Grafik 5.5. “3” Tam Doğru Yapan Öğrenciler

Grafik 5.4 incelendiğinde 11.sınıfta 3 doğru yapan öğrencilerin 9 ve 10. sınıflara oranla daha fazla olduğu görülmektedir. Doğru sayısı arttıkça A ve B şubelerindeki doğru yapan öğrenci sayısının, C şubesindeki doğru yapan öğrencilere oranla daha fazlalaştığı çok net görülmektedir.



Grafik 5.6. “4” Tam Doğru Yapan Öğrenciler

Grafik 5.5 incelendiğinde 9. ve 11.sınıfta 6 öğrencinin 10.sınıfta ise 4 öğrencinin 4 tam doğru yaptığı görülmektedir. Sınıflar ayrı ayrı incelendiğinde C şubesinden 4 doğru yapan öğrencinin olmadığı, A ve B şubelerinden olduğu görülmektedir. Bu durumda A ve B şubelerinin C şubesine oranla daha fazla genelleme becerisine sahip olduğu ve bunun da akademik başarı ile paralellik gösterdiği anlaşılmaktadır.



Grafik 5.7. “5” Tam Doğru Yapan Öğrenciler

Grafik 5.6 incelendiğinde sadece 9 ve 11. sınıflardan 1 kişinin 5 tam doğru yaptığı görülmektedir. Her iki öğrenci de A şubelerinden olup akademik başarısı yüksek öğrencilerdir. 10.sınıftan ise 5 tam doğru yapan olmamıştır. Bu durumda tüm grafikler incelendiğinde 9 ve 11. sınıfların genelleme becerilerinin daha yüksek bunun yanında A ve B şubelerinin de C şubesinden daha yüksek olduğu çok net görülmektedir.

Hinsley, Hayes, ve Simon (1977) çalışmalarında, iyi problem çözen kişilerin problemleri henüz okurken muhakeme edebildiklerini ve kullanılacak çözüm yolu ile ilgili fikir sahibi olduklarını ve bu yolu uygulayabildiklerini açıklamışlardır. Bu çalışmanın bulgularından çıkarılabilecek sonuçlar da Hinsley ve diğerlerinin çalışmalarının sonuçlarıyla paraleldir. A ve B şubelerinin genelleme problemlerini daha iyi muhakeme edebildikleri, çözüm yolu ile ilgili fikir sahibi oldukları ve genelleme sürecinde bu yolu uygulayabildikleri görülmektedir.

Aşama 1’de sorulan her sorunun kendisine ait sonucu ve yapılma durumları detaylıca açıklanmıştır. Aşama 1’ de 5 soru sorulmuştur. Bunlardan ilki “Küp Parçalama” soru olup ilk aşamada görselde verilen şekli yorumlayıp bu şekilden yola çıkarak $1^3+2^3+3^3= (1+2+3)^2$ özel bir durumda kuralı keşfetmesi daha sonra n= 10 özel duruma genişletmesi ve en sonunda da herhangi bir n durumuna genellemesi beklenmiştir. Verileri incelediğinde doğru sayısının az ve boş sayısının fazla olması sebebiyle öğrencilerin en çok zorlandığı soru birinci soru olmuştur. 9.sınıflardan 4 öğrenci, 11.sınıflardan da 6 öğrenci tüm aşamaları doğru yanıtlamıştır. Fakat 10.sınıflardan ise bu soruya doğru cevabı veren olmamıştır. Diğer taraftan 3 seçenekli olan bu ilk sorunun a ve b seçeneklerini doğru yapmalarına rağmen c seçeneğini doğru yapamayan 9. sınıflardan 8 öğrenci, 10. sınıflardan 5 öğrenci ve 11. sınıflardan 4 öğrenci olmuştur. Bu öğrencilerin özel durumlarda problemi çözebildikleri fakat genelleme ile ilgili sıkıntıları olduğu söylenebilir.

"Siyah ve Beyaz Nokta" sorusunun ilk aşamasında, verilen şekilden yola çıkarak bir sonraki şekli bulması daha sonra şekli yorumlayarak şekil 6'da kaç tane siyah ve beyaz noktanın olduğu ile ilgili bir kural keşfetmesi ve bu kuraldan yola çıkarak bir sonraki adım 44 için kuralı genişletmesi beklenmiştir. Veriler incelediğinde doğru sayısının fazla, boş ve yanlış sayısının az olması sebebiyle öğrencilerin bu soruda fazla zorlanmadıkları söylenebilir. 4 seçenekli olan bu soruda, 9. sınıflardan d seçeneğini doğru yapan 44 öğrenciden 4 tanesi b seçeneğini, 4 tanesi de c seçeneğini yapamamıştır.10. sınıflardan d seçeneğini doğru yapan 30 öğrenciden 2 tanesi b seçeneğini, 5 tanesi de c seçeneğini yapamamıştır. 11. sınıflardan d seçeneğini doğru yapan 40 öğrenciden 1 tanesi b seçeneğini, 5 tanesi de c seçeneğini yapamamıştır. Diğer taraftan a, b ve c seçeneklerini doğru yapmalarına rağmen d seçeneğini doğru yapamayan 9 ve 10. sınıflardan 7 öğrenci ve 11. sınıflardan 12 öğrencidir. Bu öğrencilerin özel durumlarda problemi çözebildikleri fakat genelleme ile ilgili sıkıntıları olduğu söylenebilir.

"Pins and Cards" sorusunun ilk aşamasında, verilen görseli inceleyerek yakın durum olan 6 not için kaç iğneye ihtiyaç olduğunu keşfetmesi daha sonra uzak durumları genişletmesi için öğrencinin pragmatik düşünce ile hem görsel hem de sayısal stratejilerden yararlanarak bir kural keşfetmesi beklenmiştir. Diğer taraftan c seçeneğinde ise genelleme becerisini farklı bir duruma taşımak hedeflenmiş yani 4 kenarlı bir çokgenden 3 kenarlı bir çokgeni düşünerek n=6 yakın durum ve n=35 uzak durumları genişletmesi beklenmiştir. 4 seçenekli olan bu soruda, 9. sınıflardan d seçeneğini doğru yapan 35 öğrenciden yalnızca 1 tanesi a seçeneğini yanlış yaparken, 1 tanesi de b seçeneğini boş bırakıp yapamamıştır. 10. sınıflardan d seçeneğini doğru yapan 19 öğrenciden yalnızca 2 tanesi a,b ve c seçeneklerini doğru yanıtlamalarına rağmen d seçeneğini bir tanesi yapamamış bir tanesi de yanlış cevaplamıştır. 11. Sınıflardan d seçeneğini doğru yapan 37 öğrenciden 2 tanesi a ve b seçeneğini yanlış cevap verirken 1 tanesi de a seçeneğine yanlış cevap vermiştir. Diğer taraftan a, b ve c seçeneklerini doğru yapmalarına rağmen d seçeneğini doğru yapamayan 9 sınıflardan 3, 10. sınıflardan 2 öğrencidir. 11.sınıfta ise a,b ve c seçeneklerini doğru cevaplayan öğrenciler d seçeneğini de doğru cevaplamışlardır. Bunun yanında a ve b seçeneklerini doğru cevaplayan fakat c ve d seçeneklerini boş bırakan ya da yanlış cevaplayan öğrencilerin sayısı 9.sınıfta 10, 10.sınıfta 13 ve 11.sınıfta ise 11'dir. Bu öğrencilerin özel durumlarda problemi çözebildikleri ve genelleyebildikleri fakat başka bir duruma transfer etme ile ilgili sıkıntıları olduğu söylenebilir.

"Kule Yapımı" sorusunun ilk aşamasında şekilde kaç tane küp olduğu bulunması istenmiştir. Bunu yaparken şekli devam ettirmesinden çok bu küplerin artışındaki bir kuralı görmesi ve uzak durum olan n=12 yüksekliğine genişletmesi ve son aşamasında ise herhangi bir durum (n için) kuralı genellemesi beklenmiştir. 3 seçenekli olan bu soruda, 9. sınıflardan c seçeneğini doğru yapan 11 öğrenciden yalnızca 1 tanesi b seçeneğini yapamamış boş bırakmıştır.10. sınıflardan c seçeneğini doğru yapan 13 öğrenci yalnızca 2 tanesi b seçeneğini yapamamıştır. 11.sınıflardan c seçeneğini doğru yapan 12 öğrenciden yalnızca 1 tanesi b seçeneğini yanlış cevaplamıştır. Diğer taraftan a ve b seçeneklerini doğru yapmalarına rağmen c seçeneğini doğru yapamayan 9 sınıflardan 12, 10. sınıflardan 6 ve 11. sınıflardan 4 öğrenci olmuştur. Bu öğrencilerin özel durumlarda problemi çözebildikleri fakat genelleme ile ilgili sıkıntıları olduğu söylenebilir.

"Sayı ve Şekil Örüntüsü" sorusunun a seçeneğinde görselden faklı olarak sayısal düşünmesi bu süreçte ise yinelemeli düşünme sürecinden çok belirgin düşünmesi hedeflenmiştir. Sayıların arasında fonksiyonel bir ilişki yakalayıp genişletmesi beklenmiştir. B seçeneğinde ise sayısal düşünmesinden çok görsel olarak yaklaşması, şekiller arasında ilişki kurması ve yakın bir adıma genişletmesi hedeflenmiştir. 2 seçenekli olan bu soruda, 9.sınıflardan her iki seçeneği de doğru yapan 34,10 sınıflardan 19 ve 11.sınıflardan ise 43 öğrencidir. 9.sınıflardan 5, 10.sınıflardan 21 ve 11.sınıflardan ise 7 öğrenci her iki seçeneği de boş bırakmıştır. Boş bırakan öğrenciler için çoğunlukla süre sıkıntısı yaşadıkları söylenebilir. Süre sıkıntısı yaşamayan öğrencilerde ise genelleme sıkıntısı yaşadıkları söylenebilir.

5.1.2. Aşama 2 Sonucu

Aşama 2'de 5 soru sorulmuştur. Bunlardan ilki aşama 1'deki ilk soru ile aynıdır. Fakat iki sorunun görselleri farklıdır. Diğer 4 soru ise görsel ve içerik olarak farklı fakat sorudan istenilen genelleme süreçleri aynıdır. 2.aşama bir ders saati süresinde(40dk) yapılmıştır. Bu aşamada öğrenci video kaydını istemediği için ses kaydı yapılmıştır. Burada öğrencinin uygulama sırasındaki düşüncelerine de yer verilmiştir.

İkinci aşamanın ilk sorusunda verilen şekilden yola çıkarak aşama 1'deki gibi $1^3+2^3+3^3= (1+2+3)^2$ özel bir durumda kuralı bulması daha sonra bu kuraldan yola çıkarak bir sonraki adım olan $1^3+2^3+3^3 +4^3$ için kuralı keşfetmesi daha sonra uzak bir durum 10 için ve herhangi bir durum (n için) bu kuralı genişletmesi beklenmiştir. Öğrenci ilk aşamada doğru cevaplamıştır ancak istenilen asıl hedefe ikinci aşamada ulaşmıştır. Öğrenci 1.aşamada öğrenci $1^3+2^3+\ldots+ n^3$ şeklinde sonuca ulaşırken 2.aşamada $(1+2+\ldots\ldots+n)^2=(\frac{n.(n+1)}{2})^2 = 1^3+2^3+\ldots+ n^3$ durumunu fark etmiştir. Burada sorunun görselinin değişmesi öğrenci üzerinde bir farklılık yaratmamış her iki soruyu da doğru yanıtlamıştır.

İkinci aşamanın 2.sorusu, aşama 1'deki 2.soru örneği ile ilişkilendirilmiştir. Şekil 1 ve şekil 2 incelenerek pizza sayıları ve kişi sayıları arasında yinelemeli ve fonksiyonel bir ilişki olduğunu görmesi ve kendi düşünme sürecinden yola çıkarak bir kural bulması beklenmiştir. Bu kuraldan yola çıkarak uzak bir durum olan 10 ve 31 pizza için kuralı genişletmesi hedeflenmiştir. Öğrenci her iki aşamada da şekildeki görselleri inceleyerek özel durumları incelemiş, uzak durumlar için formül geliştirmiş ve görseli farklı hedefi aynı olan bu iki farklı soruyu doğru yanıtlamıştır.

İkinci aşamadaki 3. soru da aşama 1'deki 3.soru ile ilişkilendirilmiştir. Sorunun ilk adımında verilen görseli inceleyerek şekil 1'de 1 ağaç ve 3 ışık olduğunu, şekil 2'de 2 ağaç ve 7 ışık olduğunu şekil 3' de de 3 ağaç ve 11 ışık olduğunu incelemesi daha sonra uzak durumlara genişletmesi ve öğrencinin hem görsel hem de sayısal stratejilerden yararlanarak bir kural keşfetmesi amaçlanmıştır. Öğrenci her iki aşamada da şekildeki görselleri inceleyerek özel durumları fark etmiş ve yakın durum için bir kural geliştirmiştir. Daha sonra uzak durumlar için bu kuralı genişletmiş ve görseli farklı hedefi aynı olan bu iki soruyu doğru yanıtlamıştır.

İkinci aşamadaki 4.soru ise aşama 1'deki 4. soru ile ilişkilendirilmiştir. Sorunun ilk adımında, şekilde kaç tane blok kullanıldığı istenmektedir. Bunu yaparken şekli devam ettirmesinden çok bu merdiven için kullanılan blokların artışında bir kural görmesi ve uzak durum olan 12 basamaklı merdivene genişletmesi hedeflenmektedir. Bir sonraki aşamasında ise herhangi bir durum n için kuralı genellemesi beklenmiştir. Öğrenci her iki aşamada da şekildeki 3 boyutlu görselleri incelemiş ve yakın durumlar için bir formül geliştirmiştir. Daha sonra uzak durumlar için bu formülü genişletmiş ve görseli farklı hedefi aynı olan bu iki soruyu yine formül geliştirerek doğru yanıtlamıştır.

İkinci aşamadaki 5.sorunun a seçeneğinde yine aşama 1'deki gibi görselden faklı olarak sayısal düşünmesi bu süreçte ise yinelemeli düşünme sürecinden çok belirgin düşünmesi hedeflenmiştir. Sayıların arasında fonksiyonel bir ilişki yakalayıp genişletmesi beklenmiştir. B seçeneğinde ise sayısal düşünmesinden çok görsel olarak yaklaşması, şekiller arasında ilişki kurması ve yakın bir adıma genişletmesi hedeflenmiştir. Öğrenci ilk aşamada 5.sorunun b seçeneği olan görsel soruyu boş bırakmıştır. Fakat ikinci aşamada farklı olan ancak hedefi aynı olan soruyu doğru yanıtlamıştır. Bu durumda ilk aşamada sınavın yetişmediği ya da öğrencinin soruyu yapmak istemediği gibi yorumlar yapılabilir.

5.2. Tartışma

Bu bölümde verilerin analizinden elde edilen bulgulara dayalı olarak ortaya çıkan sonuçlara değinilmiş, literatürdeki genelleme becerileri ile ilgili araştırma bulgularıyla karşılaştırılarak tartışılmalara yer verilmiştir.

Çalışmanın veri toplama aracında 5 soru sorulmuştur. Ross ve Kennedy'nin (1990) çalışmalarının sonuçlarına göre problem çözmede yeni olan bireylerin çok sayıda problemle karşılaşmaları, daha önceki problemlerle bağlantı kurmalarını zorlaştırmakta ve kullanışlı olmayan genellemeler yapmalarına yol açmaktadır. Öğrenciler çok sayıda problemle karşılaştırılacaksa, bu konuda yetkin bir eğitimcinin öğrencilerin dikkatini gerekli noktalara çekmesi önerilmektedir. Yetkin eğitimci tarafından böyle bir eğitim uygulanamayacaksa ikinci bir yol olarak problem sayısının azaltılması önerilmiştir. Bu durumda ise yapılan genellemelerin zamansal olarak bitişikliğinin önemine dikkat çekilmiştir. Çalışmada çok fazla sayıda problem sorulmamıştır. Her problemin kendi hedefleri doğrultusunda genellemeler yaptırılmıştır. Çalışma bu yönüyle Ross ve Kennedy'nin önerilerini desteklemektedir.

Araştırma 9, 10 ve 11.sınıflara uygulanmıştır. Burada farklı sınıf seviyelerinin genelleme becerileri karşılaştırılmıştır. 9. ve 11. sınıfların daha başarılı olduğu 10.sınıfların ise bu sınıflara oranla daha az başarı gösterdikleri tespit edilmiştir. Bu durum Alkan ve Bukova Güzel'in (2005) bireylerin yaşam biçimi ve öğrenim derecelerine göre değişik düzeyde matematiksel düşünceye sahip olabilecekleri yani matematiksel düşüncenin hem bireyin gelişimi hem de aldığı eğitim ile doğrudan ilişkili olduğu görüşü, 10 ve 11.sınıfların daha başarılı olması beklenirken 9 ve 11.sınıfların başarılı olması durumuyla çelişmiştir. Bu durumun sebebi, 9.sınıfların 2018-2019 eğitim öğretim yılında 8.sınıfta öğrenimlerini tamamlayarak LGS sınav odaklı çalışmaları; sadece bilgi, anlama ve uygulama basamaklarında değil analiz ve sentez basamaklarını da kullanarak beceri temelli sorular ile muhakeme güçlerinin daha çok geliştiği söylenebilir. 10.sınıflar yarı dönem TEOG, yarı dönem LGS sürecine hazırlandıkları için 9.sınıflara oranla genelleme sürecinde daha az başarı gösterebilmişlerdir. 11.sınıflar ise sadece TEOG sistemi ile liseye hazırlanmışlardır fakat 11.sınıfların aşamalı problemleri genellemeler yaparak çözmeyi öğrenmek için yaş, olgunlaşma ve zihinsel gelişim açısından diğer sınıflara göre daha uygun bir dönemde oldukları düşünülebilir.

Sweller (1988), problem çözmede deneyimli ve deneyimsiz kişiler arasındaki temel farkın, deneyimli olanların sahip olduğu özelleşmiş şemalar olduğunu ve bu şemaların geleneksel problem çözme stratejileri kullanılarak problem çözüldüğünde değil, mantıksal akıl yürütme gerçekleştiğinde kazanılabileceğini belirtmiştir. Yani öğrenciler özelleşmiş şemalar edinebilmek için bol miktarda ve benzer matematiksel yapı içeren problemlerle değil, farklı matematiksel yapılar içeren ve çözümünde bu yapıların incelenmesini zorunlu kılan problemlerle karşılaşmalıdırlar. Blessing ve Ross (1996) ise deneyimli öğrencilerin henüz problemi okurken çözüm yolunu deneyimleri doğrultusunda oluşturmaya başladığını öne sürmüşlerdir.

Çalışmanın bulguları Blessing ve Ross ile Sweller'in görüşlerini desteklemektedir. Çelebi (2013) de matematik derslerinde aşamalı problemler çözen ve aşamalar sonrasında sayılardan bağımsız genellemeler yapan deney grubu öğrencilerinin problem çözme başarılarında artış olduğunu belirtmiştir. Bu durumu deney grubunda harcanan toplam ders saatinin daha fazla olması, ev ödevlerinin verilmesi gibi etkenler de bu başarı farkına etki etmiş olabileceğini ve bu öğrencilerin deneyimleri doğrultusunda benzer matematiksel yapılar görmesi başarıyı artırmada bir etken olduğu düşünülebileceğini belirtmiştir. Bu düşüncelere paralel olarak 11.sınıflar 10.sınıflardan daha başarılı olabileceği söylenebilir. Yine bu çalışmada elde edilen bulgular Amit ve Neria (2008) tarafından gerçekleştirilen çalışma ile paralellik göstermektedir. Çalışma, akademik yeterliği olan öğrencilerin genellemeyi çağrıştıran örüntü problemleri ile karşı karşıya kaldıklarında yüksek matematiksel yetenekler sergilediklerini göstermiştir.

Çalışmada farklı olarak aynı sınıftaki öğrencilerin 9(A-B-C), 10(A-B-C), 11(A-B-C) genelleme sürecindeki düşünme süreçlerinin akademik başarıya göre farklılık gösterdiği tespit edilmiştir. Her sınıf seviyesinde A, B ve C sınıfları akademik başarıya göre sınıflandırılmaktadır. Çalışmanın sonucunda A şubesinin B ve C şubesinden daha başarılı olduğu ve B şubesinin de C şubesinden başarılı olduğu tespit edilmiştir. Bu durum akademik beceriye sahip öğrencilerin genelleme sürecinde de başarılı olduğunu göstermektedir.

Baykul'a göre (2009) bireyin problem çözmede deneyimli olması problem çözme başarısını etkileyen önemli bir faktördür. Araştırmada kullanılan problem çözme yöntemi, öğrencilerin daha önce karşılaştıkları problemlerde kullandıkları çözüm yollarının matematiksel yapılarını içselleştirmelerine ve bu yapıların işleyiş biçimini incelemelerine olanak sağlamaktadır. Araştırmanın bulguları deneyimlerinin geçerli olduğu matematiksel yapıyı irdeleyerek ve geliştirerek bir sonraki problemi çözen öğrencilerin daha başarılı olduğunu göstermektedir. Bu durum A ve B şubelerinin akademik alt yapıları ile matematiksel yapıyı irdeleyerek genelleme sürecinde daha başarılı olduğu düşüncesi ile paralellik göstermektedir. Dindyal (2007) de yaptığı çalışmada matematik başarısı düşük olan öğrencilerin, genelleme basamağında daha fazla zorlandığı sonucunu elde etmiştir. Zaman (2011) ise 9. sınıf öğrencileriyle gerçekleştirdiği çalışmasında, genellemenin matematik başarısı ile yüksek oranda pozitif ilişkili olduğunu saptamıştır.

Çalışmada en son genelleme sürecinde farklı görsellerin etkisinin olmadığı saptanmıştır. İki aşamada uygulanan araştırmada her iki aşamada da 5 soru sorulmuştur. 1.aşamada bu 5 sorudan en az 4'ünü tam doğru yapan katılımcılardan gönüllü 1 öğrenci ile çalışılmıştır. 9.sınıf ve A şubesinde olan bu öğrenciye uygulama aşamasında ses kaydı alınarak mülakat yapılmıştır. 2.aşamada, 1.aşamada sorulan 5 sorudan ilki diğer ikinci aşamadaki ilk soru ile aynı olup sadece görselleri farklıdır. Burada amaç aynı soruya ait farklı görsellerin genelleme sürecini nasıl etkilediğini araştırmaktır. Diğer 4 soru ise 1.aşamadaki diğer 4 soruyla aynı hedefi olup farklı sorulardır. Öğrenci 1.aşamada 5 sorudan 4'ünü tam yapmış, son sorunun b seçeneğini boş bırakmıştır. Fakat 2.aşamada ise 5 sorunun tamamını doğru yanıtlamıştır. Katılımcının 1.aşama ile 2.aşamadaki genelleme sürecinde sorulara yaklaşımı aynı olmuştur. Her iki aşamada da önce görselleri inceleyerek yakın durumlar arasındaki ilişki fark etmiş ve bir formül geliştirmiştir. Daha sonra geliştirdiği formülü uzak durumlara genişleterek doğru cevaba ulaşmıştır. Bu durumda farklı görsellerle karşına çıkan sorulara karşı genelleme süreci değişmediği tespit edilmiştir. Bu çalışmanın bu alt problemi ile ilgili henüz bir çalışmaya rastlanmamıştır.

5.3. Öneriler

Ortaöğretim öğrencilerinin genelleme becerilerini incelemek için gerçekleştirilen bu çalışmadan elde edilen sonuçlara ve gelecekte yapılabilecek benzer çalışmalara yönelik öneriler bu bölümde sunulmuştur.

5.3.1. Araştırma Sonuçlarına Yönelik Yapılan Öneriler

1. İki aşama için örneklem sayısı daha az olup eşit sayıda seçilebilir ve böylelikle her öğrenci iki aşamada kolaylıkla incelenebilir. Her iki aşamada da görüşme yapılarak öğrencinin genelleme süreci ve problem çözümü ile ilgili kayıt alınarak ayrıntılı bilgi sağlanabilir.
2. Araştırmanın sonucunda öğrencilerin çoğunluğunun doğru genellemelere ulaşmada yetersiz kaldıkları tespit edilmiştir. Böylelikle yakın durumları genelleyebildikleri fakat uzak durumlara genişletemedikleri görülmüştür. Bu nedenle öğretmenlerin farklı genelleme problemleri gösterebileceği özellikle de değişkenler arasındaki ilişkiyi ifade eden fonksiyonel stratejinin mantığını öğrencilere kavratabileceği bir yaklaşım seçilebilir.
3. Matematik öğretiminin günlük hayat ile doğrudan ilişkili olması ve öğrencilere kazandırılan bilgi ve becerilerin günlük hayatta kullanabilmelerine olanak sağlayacak şekilde düzenlenebilir. Dolayısıyla ders kitaplarında genelleme ile ilgili uygulamalarda günlük hayat problemlerine daha fazla önem verilebilir.
4. Öğretmenlere, matematiksel düşünme becerisi olan genelleme problemlerinin farkında olmaları ve günlük hayatta kullanmayı sağlayacak ve bunları

öğrencilere aktarabilecek eğitim verilmesi öğrencilerin matematiksel düşünmelerinin geliştirilmesi açısından yarar sağlayabilir.

5. Matematik yapmanın temel yöntemlerinden olan genellemelerin istenildiği gibi gerçekleşebilmesi için uygun görselleştirmeler kullanmanın gerekli ve faydalı olacağı düşünülmektedir. Görselleştirmenin kullanılması ve bu yönde bir katkının sağlanması için öncelikle öğretmenlerin görsel düşünme konusunda bilinçli olmalarının, bunun için de bu bağlamda yetiştirilmeleri gerekebilir. Bu nedenle, öğretmen yetiştiren kurumlarda görselleştirme konusunda daha fazla araştırma yapmak ve bunları değerlendirilmek yararlı olabilecektir.

5.3.2. Gelecek Araştırmalar İçin Öneriler

1. Aşama 1, toplamda 180 katılımcı ile gerçekleştirilmiştir. Aşama 2 ise yalnızca 1 öğrenci ile sınırlı tutulmuştur. Dolayısıyla iki aşamada gerçekleştirilecek çalışma için ilk aşamada katılımcı sayısı 50-100, ikinci aşamada da katılımcı sayısı en az 3 katılımcı ile sınırlandırılabilir. 1. katılımcı en başarılı, 2. orta başarılı 3.ise başarısız olarak seçilmesi fayda sağlayabilir.

2. İkinci aşamanın birden fazla örneklemle yapılması konu üzerinde daha derin ve kapsamlı bilgiler sağlayabilir. Ve ayrıca her iki aşamada da nitel araştırma yöntemlerinden görüşme tekniğine yer verilerek öğrencilerde var olan kavramsal yanılgılar ve öğrenme güçlükleri belirlenebilir.

KAYNAKÇA

Akkan, Y. ve Çakıroğlu, Ü. (2012). Doğrusal ve ikinci dereceden örüntüleri genelleştirme stratejileri: 6-8. sınıf öğrencilerinin karşılaştırılması. Eğitim ve Bilim, 37(165).

Alakoç, Z. (2003), Matematik Öğretiminde Teknolojik Modern Öğretim Yaklaşımları, The Turkish Online Journal of Educational Technology, 1(2), 43-49.

Alkan, H. ve Bukova Güzel E. (2005). Öğretmen Adaylarında Matematiksel Düşünmenin Gelişimi, GÜ, Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 25(3), 221-236.

Amit, M.,ve Neria, D. (2008). “Rising to the challenge”: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. ZDM, 40, 111-129.

Arslan, S. ve Yıldız, C. (2010). 11.sınıf öğrencilerinin matematiksel düşünmenin aşamalarındaki yaşantılarından yansımalar. Eğitim ve Bilim, 35(156), 17-31.

Ayber, G. (2017). Cebirsel Düşünmenin Genelleme Aracılığıyla Geliştirilmesi Perspektifinde Ortaokul Matematik Ders Kitaplarının İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Eskişehir Anadolu Üniversitesi.

Aydın, M. ve Köğce, D. (2008). Öğretmen Adaylarının “Denklem Ve Fonksiyon” Kavramlarına İlişkin Algıları, Yüzüncü Yıl Üniversitesi, Eğitim Fakültesi Dergisi. V(I), 46-58.

Aytaçlı, B. (2012). Durum Çalışmasına Ayrıntılı Bir Bakış, Adnan Menderes Üniversitesi Eğitim Fakültesi Eğitim Bilimleri Dergisi, Haziran 2012, 3 (1), 1-9

Baki, A. (2008). Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi. Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.

Barbosa, A. (2011). Patterning problems: sixth graders' ability to generalize. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda, Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, pp. 420-428. Rzeszow: ERME.

Barbosa, A., Palhares, P ve Vale, I (2007) Patterns and generalization: the influence of visual strategies. Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 2007, pp. 844-851

Barbosa, A., Vale, I.& Palhares, P. (2008) The influence of visual strategies in generalization: a study with 6th grade students solving a pattern task .ETEN 18 The Proceedings of the 18th Annual Conference of the European Teacher Education Network. 71-77.

Baş, S., Erbaş, A. K. ve Çetinkaya, B. (2011). Öğretmenlerin dokuzuncu sınıf öğrencilerinin cebirsel düşünme yapılarıyla ilgili bilgileri. Eğitim ve Bilim,36 (159), 41-55.

Baykul, Y. (2009). İlköğretimde Matematik Öğretimi: 6.-8. Sınıflar. Ankara: Pegem Yayıncılık

Baykul,Y. (1999). İlköğretimde Matematik Öğretimi, Anı yayıncılık, Ankara

Becker, J. R. ve Rivera, F. (2005). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra (1). In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Saiz & A. Mendez (Eds.), Proceeding of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Bezuszka S. ve Kenney, M. (2008), Designs from mathematical patterns, Stanley Bezuszka, Margaret Kenney, Linda Silvey, illustrator, Ed Almazol.

Biber, A. Ç., ve Argun, Z. (2012). Matematik öğretmen adaylarının tek değişkenli fonksiyonlarda limit kavram bilgilerini kullanarak yürüttükleri bazı genelleme ve soyutlamalar. Kastamonu Eğitim Dergisi, 20(2), 655-668.

Busbridge, J. ve Özçelik, D. A. (1997). İlköğretim matematik öğretimi. YÖK/DÜNYA Bankası Milli Eğitimi Geliştirme Projesi, Hizmet Öncesi Öğretmen Eğitimi, Ankara: Ajans-Türk Basın ve Basım A.Ş.

Cai J. ve Hwang S. (2002). Generalized and generative thinking in US and Chinese students' mathematical problem solving and problem posing . Journal of Mathematical Behavior 21 401–421

Carpenter, T. P. ve Levi, L. (2000). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. Teaching Children Mathematics, 6, 232-236.

Carraher, D.W., Martinez, M.V. ve Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. ZDM Mathematics Education, 40, 3-22.

Cevizci, A. (2000). Paradigma Felsefe Sözlüğü, İstanbul: Paradigma Yayınları.

Chua, B. L. (2009). Features Of Generalising Tasks: Help Or Hurdle To Expressing Generality. Australian Mathematics Teacher, 65 (2), 18-24

Chua, B. L., & Hoyles, C. (2011). Secondary school students' perception of best help generalising strategies. CERME7 (pp. 440–449)

Chua, B. L., ve Hoyles, C. (2010). Teacher And Student Choices Of Generalising Strategies: A Tale Of Two Views? 5th East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Tokyo

Cooper, T. J. ve Warren, E. (1995). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning. In Early Algebraization (pp. 187-214). Springer Berlin Heidelberg.

Çayır, M. Y. (2013). 9. Sınıf Öğrencilerinin Örüntü Genelleme Problemlerini Çözme Baiarılarının Ve Kullandıkları Genelleme Stratejilerinin Belirlenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Çayır, M. Y. ve Akyüz, G. (2015). 9. sınıf öğrencilerinin örüntü genelleme problemlerini çözme stratejilerinin belirlenmesi. Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 9(2).

Çelebi, Ö. (2013). Matematik Problemlerinin Çözümünde Genellemeler Yapmanın Ve Genellemelerin Sınırlılıklarını İrdelemenin Problem Çözme Becerisi Üzerindeki Etkisi, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

D., Hayes, J., ve Simon, H. (1977). From Words to Equations: Meaning and Representation in Algebra Word Problems. In M. A. Just ve P. A. Carpenter (Eds.), *Cognitive Processes in Comprehension*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Demirbaş, M., Demirbaş, M., ve Pektaş, H. M. (2009). İlköğretim öğrencilerinin çevre sorunu ile ilişkili temel kavramları gerçekleştirme düzeyleri. Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi, 3(2), 195-211.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In Mathematical knowledge: Its growth through teaching (pp. 61-85). Springer Netherlands.

Dubinsky, E. (1991).Constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. Epistomological Foundations of Mathematical Experience. (pp. 160-187). New York: Springer. Verlag

Dindyal, J. (2007). High school students' use of patterns and generalisations. In J. Watson & K. Beswick (Eds.), *Proceedings of the 30th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 236 - 245): MERGA Inc.

Elia, I. ve Spyrou, P. (2006). How Students Conceive Function: a Triarchic Conceptual-semiotic Model Of The Understanding Of a Complex Concept. The Montana Mathematics Ensthusiant, 3(2), 256- 272

Ellis, A. B. (2007). A taxonomy for categorizing generalizations: generalizing actions and reflection generalizations. The Journal of The Learning Sciences, 16 (2), 221–262.

Ellis, A. B. (2011). Connections between generalizing and justifying students' reasoning with linear relationships. Journal for Research in Mathematics Education, 38(3), 194–229

Erden, M. ve Akman, Y. (2004). Gelişim ve öğrenme. Ankara: Arkadaş Yayınevi.

Friel, S. N. ve Markworth, A. (2009). A framework for analyzing geometric pattern tasks. Mathematics Teaching in Middle School, 15(1), 24-33.

Gibbs, G.R. (2007) Thematic Coding and Categorizing, Analyzing Qualitative Data. SAGE Publications Ltd., London

Göl, R. (2017). 12. Sınıf Fen Lisesi Öğrencilerinin Matematiksel Düşünme Becerilerinin Özelleştirme, Tahmin, İspat Ve Genelleme Basamakları Bağlamında İncelenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Uşak Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Guba, E. G., & Lincoln, Y. S. (1982). Epistemological and methodological bases of naturalistic inquiry. Educational Communication and Technology Journal, 30 (4), 233-252.

Güçlü, N. (2003). Stratejik Yönetim, G.Ü. Gazi Eğitim Fakültesi Dergisi, 23(2), 61-85.

Hacisalihoğlu, H. H.,, Mirasyedioğlu, Ş., Akpınar, A. (2003). Matematik Öğretimi (1. Baskı), Ankara: Asil Yayın Dağıtım.

Haldar, L. C. (2014). Students' Understandings of Arithmetic Generalizations. Doctoral Dissertation. Berkeley: University of California

Harel, G., ve Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. For the Learning of Mathematics, 11(1), 38–42.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. and Threlfall, J. (1998). Children's Strategies with Number Patterns. Educational Studies, 24(3), 315-331.

Hinsley, D. A., Hayes, J. R., & Simon, H. A. (1977). From words to equations: Meaning and representation in algebra word problems. In M. A. Just & P. A. Carpenter (Eds.), Cognitive processes in comprehension (pp. 89-106). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

http://my.ahmetkahya.com/pdf_arsiv/matematik_ogretim_programi_9-12.pdf, 2013

http://talimterbiye.mebnet.net/Ogretim%20Programlari/ilkokul/2013-2014/Matematik1-5.pdf, 2009

İslamoğlu, A. H., Alnıaçık, Ü. (2014). Sosyal Bilimlerde Araştırma. Yöntemleri. İstanbul: Beta Basım Yayım Dağıtım

Kaput, J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra', in E. Fennema and T. Romberg(eds.), Mathematics Classrooms that Promote Understanding, Erlbaum, Mahwah, NJ, pp. 133–155.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.), Algebra in the Early Grades (pp. 5–17). New York: Routledge, Taylor & Francis Group.

Kemankaşlı, N. (2010). 10. Sınıflarda Geometri Öğrenme Ortamı Tasarımı: Üçgenler Ünitesi Örneği Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

Kirwan, J. V. (2015). Preservice secondary mathematics teachers' knowledge of generalization and justification on geometric numerical patterning tasks (Doctoral dissertation). Illinois State University, USA.

Lannin, J. K., Barker, D. D., & Townsend, B. E. (2006). Recursive and explicit rules: How can we build student algebraic understanding?. Journal of Mathematical Behavior, 25, 299-317.

Lannin, J. K. (2004). Developing MP by using explicit and recursive reasoning. Mathematics Teacher, 98(4), 216-253.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The chalenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. Mathematical Thinking and Learning, 7(3), 231-258.

Ley, A. F. (2005). A cross-sectional investigation of elementary school student's ability to work with linear generalizing patterns: The impact of format and age on accuracy and strategy choice. Masters Abstract International, 44 (02), 124.

Lin, M.N., ve Yang, D.C. (2004). Assessment of Animated SelfDirected Learning Activities Modules for Children's Number Sense Development. Educational Technology & Society, 16 (3), 44-58.

Liu, P. H. (2003). Do Teachers Need To Incorporate The History Of Mathematics İn Their Teaching?, The Mathematics Teacher, 96(6), 416.

Lobato, J. (2003). Alternative perspectives on the transfer of learning: history, issues, and challenges for future research. The Journal of The Learning Sciences, 15, 431-449

Lodico, M. G., Spaulding, D. T., & Voegtle, K. H. (2006). Methods in Educational Research: From Theory to Practice. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (eds), Approaches to Algebra, Kluwer, Dordrecht/Boston/London, pp. 65– 86.

MEB (2006). İlköğretim matematik dersi öğretim programı. Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

MEB (2009). İlköğretim matematik dersi 1-5. sınıflar öğretim programı. Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

MEB (2013). İlköğretim matematik dersi öğretim programı. Ankara: Milli Eğitim Basımevi.

Merriam, S. B. (2012). Nitel araştırma nedir? (Çev. S. Turan). In S. Turan, (Çev. Ed.), Nitel araştırma, desen ve uygulama için rehber. Ankara: Nobel Yayıncılık.

Michaelis, J. N. ve Garcia, S. (1996), Social Studies For Children (11.Baskı). Boston: Allyn And Bacon

Miles, M, B., ve Huberman, A. M. (1994). Qualitative data analysis: An expanded Sourcebook. (2nd ed). Thousand Oaks, CA: Sage.

NCTM. (2000). Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence. Reston, VA: NCTM

NCTM. (2006). Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics: A quest for coherence. Reston, VA: NCTM.

Nelsen, R. B. (1993). Proof Without Words. Washington DC: The Mathematical Association of America.

Neuman, W. L. (2007). Toplumsal araştırma yöntemleri: Nicel ve nitel yaklaşımlar (S. Özge, Çev.). İstanbul: Yayın Odası.

Nilsson, P. ve Juter, K. , (2011). Flexibility and coordination among acts of visualization, Journal of Mathematical Behavior 30, 194 –205

Oflaz, G. (2017). Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Genelleme Süreçlerine İlişkin Düşünme Ve Anlama Yollarının Belirlenmesi: Dnr Tabanlı Bir Öğretim Deneyi, Doktora Tezi Matematik Ve Fen Bilimleri Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Bilim Dalı, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Olkun, S., Şahin, Ö., Akkurt, Z., Dikkartın, F. T. ve Gülbağcı, H. (2009). Modelleme Yoluyla Problem Çözme ve Genelleme: İlköğretim Öğrencileriyle Bir Çalışma, Eğitim ve Bilim, 2009, Cilt 34, Sayı 151, 66-73.

Olkun, S., Şahin, Ö., Akkurt, Z., Dikkartin, F. T. ve Gülbağcı, H. (2010). Modelleme yoluyla problem çözme ve genelleme: İlköğretim öğrencileriyle bir çalışma. Eğitim ve Bilim, 34(151).

Özdemir, E., Dikici, R. ve Kültür, N. (2015). Öğrencilerin Örüntüleri Genelleme Süreçleri: 7. Sınıf Örneği, K. Ü. Kastamonu Eğitim Dergisi, 23 (2), 523-548

Peker, S., ve Demircioğlu, H. (2014). Genelleme sürecinde öğrencilerin düşünme süreçlerinin incelenmesi, 11. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: A Semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patters in different contexts. ZDM Mathematics Education, 40, 83-96.

Rivera, F. Ve ve Becker, J.R (2008). Visualizing as a mathematical way of knowing: understanding figural generalization. Mathematics Teacher, 101(1), 69-75.

Rivera, F. ve Becker, J.R. (2007). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. Mathematics Teaching In The Mıddle School, 11(4), 198-203.

Sriraman, B. (2004). Reflective abstraction, uniframes and the formulation of generalizations. Journal of Mathematical Behavior, 23, 205-222.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. Educational Studies in Mathematics, 20, 147-164

Sucuoğlu, D. (2015). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Değişen Örüntülere İlişkin Genelleme Stratejileri, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Sweller, J. (1988). Cognitive Load During Problem Solving: Effects on Learning. *Cognitive Science, 12*, 257-285.

Tanışlı, D. (2008). İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Örüntülere İlişkin Anlama Ve Kavrama Biçimlerinin Belirlenmesi, Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü.

Tanışlı, D. ve Özdaş, A. (2009). The strategies of using the generalizing patterns of the primary school 5th grade students. Educational Sciences: Theory and Practice, 9(3), 1485-1497

Tanışlı, D. ve Yavuzsoy Köse, N. (2011). Lineer Şekil Örüntülerine İlişkin Genelleme Stratejileri: Görsel ve Sayısal İpuçlarının Etkisi, Eğitim ve Bilim, 36 (160), 184-198.

Taylor, D. (2008). Children's Strategies with Number Patterns. Educational Studies, 24(3), 315-331

Toluk, Z. (2003). Üçüncü Uluslararası Matematik ve Fen Araştırması(TIMSS): Matematik Nedir? İlköğretim-Online Dergisi. 2(1). 36-41.

Tuncay, H. A. (2015). Matematiksel düşünme süreçlerinin incelenmesi, Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Sivas.

Umay, A. (2003). Matematiksel muhakeme yeteneği. Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 24, 234–243.

Ülgen, G. (1997). Eğitim Psikolojisi, İstanbul: Alkım Yayınevi.

Yağbasan, R. , Gülçiçek, Ç. (2003): Fen Öğretiminde Kavram Yanılgılarının Karakteristiklerinin Tanımlanması, Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, No:13, 102-119

Yakut, M. ve Çayır, G. (2013). Determining Pattern Generalization Problem Solving Strategies of 9th Grade Students, Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED) 9(2),n205-229.

Yaman S. (2010). Matematik Ögretmen Adaylarının Matematiksel Problem Kurma ve Problem Çözme Becerilerinin Belirlenmesi. Eğitim Araştırmaları Dergisi, 18: 41-56

Yeşildere, S. ve Akkoç, H. (2010). Algebraic generalization strategies of number patterns used by pre-service elementary mathematics teachers, Procedia Social and Behavioral Sciences, 2 (11142–1147.

Yeşildere-İmer, S., Akkoç, H. ve Baştürk-Şahin, B. N. (2017). Ortaokul Öğrencilerinin Farklı Temsil Biçimlerini Kullanarak Matematiksel Genelleme Yapma Becerileri, Turkish Journal of Computer and Mathematics Education, 8(1), 103-129.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2000). Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri. Ankara: Seçkin Yayıncılık (2. Baskı).

Yıldırım, A., Şimşek, H. (2006). Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri. Ankara: Seçkin.

Yıldırım, C. (2012). Matematiksel Düşünme (6. Baskı). İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yılmaz, R. ve Argün, Z., (2013). Matematiksel Genelleme Sürecinde Görselleştirme ve Önemi, Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi (H. U. Journal of Education) 28(2), 564-576.

Yılmaz. K. (2011). Öğrencilerin Epistemolojik ve Matematik Problemi Çözümlerine Yönelik İnançlarının Problem Çözme Sürecine Etkisinin Araştırılması. Yüksek Lisans Tezi. Marmara Üniversitesi. Eğitim Bilimleri Enstitüsü. İstanbul.

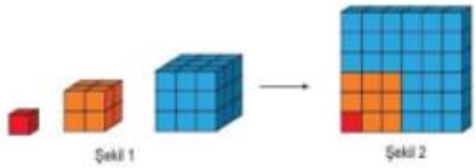
Zaman, A. (2011). *Relationship between mathematical thinking and achievement in mathematics among secondary school students of North West Frontier Province, Pakistan*. Doctoral Thesis, International Islamic University, Islamabad.

Zazkis, R. ve Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. Educational Studies in Mathematics, 49, 379- 402.

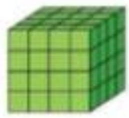
EKLER LİSTESİ

EK-1: AŞAMA 1

1) Şekil 1 de verilen küpler parçalarına ayrıldıktan sonra birleştirildiğinde şekil 2 elde edilmektedir.



a) Daha sonra şekil 1 de verilen küpler ile birlikte aşağıda verilen yeşil küp parçalara ayrılıp şekil 2 elde edilmeye çalışılıyor

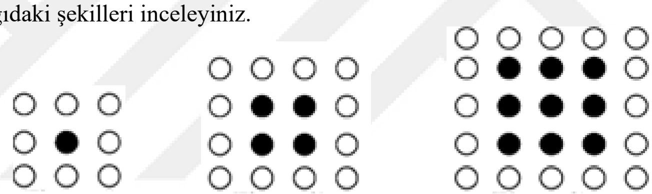


Bu durumda elde edilen şekildeki küplerin sayısı nedir?

b) Bu şekilde kenar uzunluğu 10 br küp eklenene kadar devam edilirse bu durumda elde edilen yeni şekilde küp sayısı nasıl ifade edilebilir?

c) Şekil 1 deki küpler ile birlikte n br küp eklenip şekil 2'deki ayrılıp tekrar birleştirilirse yeni elde edilen şekildeki küplerin sayısı nasıl ifade edilebilir?

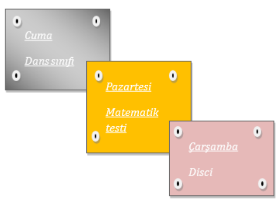
2) Aşağıdaki şekilleri inceleyiniz.



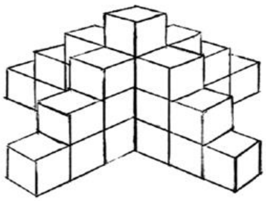
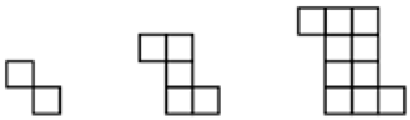
Şekil 1 Şekil 2 Şekil 3

a) Buna göre şekil 4 'ü çiziniz.
b) Şekil 6' da kaç tane <u>siyah nokta</u> vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.
c) Şekil 6 'da kaç tane <u>beyaz nokta</u> vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız
d) Şekil 1' de 8 tane beyaz nokta vardır. Şekil 3 'te 16 tane beyaz nokta vardır. Eğer bir şekilde 44 tane beyaz nokta var ise bu şekil nasıldır? Çiziniz. Bu kaç numaralı şekil olacaktır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

3) Ersin randevularını hatırlamak için odasındaki tahtasına notlar asmıştır. Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi notları tutturmak için iğneler kullanılmıştır.

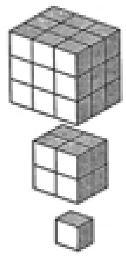


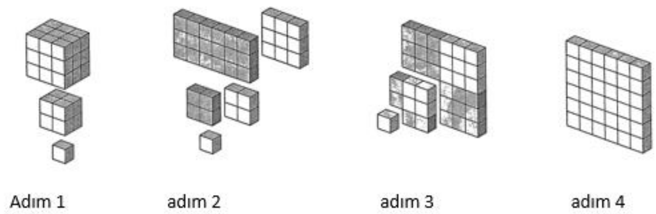
Eğer bu şekilde notlar asılmaya devam edilirse;
a) 6 notu asmak için kaç tane iğneye ihtiyaç vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.
b) Eğer 35 not asılmışsa kaç tane iğne kullanılmıştır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.
c) Ersin üçgen şeklindeki notlar asmaya karar vermiştir ve üçgenin her bir köşesine bir iğne tutturacaktır. Üst üste gelen üçgenlerde ortak bir iğne bulunacaktır. Bu doğrultuda yukarıdaki soruları tekrar cevaplandırınız.

4)  **a)** Şekildeki kuleyi yapmak için kaç tane küpe ihtiyaç duyulmuştur? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **b)** 12 küp yüksekliğinde bir kule yapmak için toplam kaç küpe ihtiyaç vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **c)** n küp yükseklikte bir kule yapmak için kaç tane küpe ihtiyaç vardır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.
5) **a)** 4,5,7,11,19,___,67,131,259 boş bırakılan kısma gelecek elemanı yazınız nasıl bulduğunuzu açıklayınız. **b)**  Şeklin devamını getiriniz. Ve nasıl yaptığınızı açıklayınız.

EK-2: AŞAMA 2

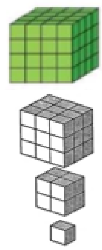
1) **a)** Aşağıdaki şekilde verilen her bir küp aşağıdaki gibi parçalanıp ve yeniden düzenlenerek yeni bir şekil oluşturulmak isteniyor.





4. adımda elde edilen şekildeki küplerin sayısını nasıl ifade edilebiliriz?

b)

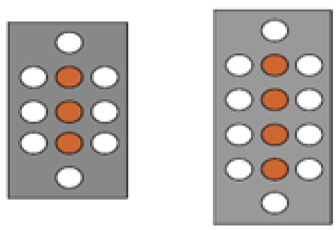


Yukarıdaki şekli, a seçeneğinde yapıldığı gibi her bir küpün parçalanıp yeniden düzenlenerek yeni bir şekil oluşturulmak isteniyor. Bu durumda elde edilen yeni şekildeki birim küp sayısını nasıl ifade edileceğini yazınız.

c) kenar uzunluğu 1br, 2br,…10 br olan küpler aynı şekilde parçalanıp düzenlenip yeni şekil elde edildiğinde elde edilen şekildeki birim küplerin sayısını nasıl ifade edebilirsiniz.

d) herhangi bir n durumu için elde edilen yeni şekildeki birim küplerin sayısını nasıl ifade edebilirsiniz.

2) Aşağıdaki resim Sole Mio Pizza dükkânındaki iki masayı göstermektedir. Bunlardan ilkinde 8 kişi ve 3 pizza bulunmakta iken diğerinde 10 kişi ve 4 pizza bulunmaktadır. Bu verilen bilgilere göre



Şekil 1 Şekil 2

a) 10 pizzanın bulunduğu bir masada kaç kişi oturur?

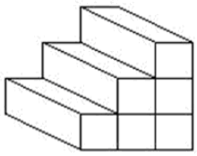
b) Masada 31 pizza olsaydı masada kaç kişi otururdu?

c) Doğum gününü bu pizza dükkânında kutlamaya karar veren Ersin, doğum gününe 57 kişiyi davet ettiğine göre kaç tane pizza siparişi verir?

3) Aşağıda 3 adet örneğini gördüğünüz farklı boyutlarda ancak hepsi aynı tasarımda Noel Ağaçları çizilmiştir. Bu ağaçların köşelerindeki üçgenler Noel ışıklarıdır.

a) 20 Noel ağacı olduğunda kaç tane ışık olacaktır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.
b) 100 Noel ağaç olduğunda kaç tane ışık olacaktır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

4)

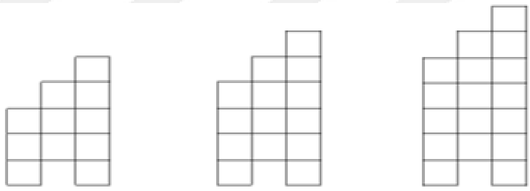


a) Şekildeki 3 basamaklı merdiveni yapmak için kaç adet blok kullanılmıştır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

b) 12 basamaklı bir merdiven yapmak için toplam kaç adet blok kullanılmalıdır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

c) n basamaklı bir merdiven yapmak için kaç adet blok kullanılmalıdır? Cevabınızı nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

5) **a)** 4, 5, 8, 17, 44, ___, 368, 972 sıraya gelecek elemanı yazınız nasıl bulduğunuzu açıklayınız.



b)

Yukarıdaki şeklin devamını getiriniz ve nasıl yaptığınızı açıklayınız