p-SEL TAMSAYILARIN
GROMOV-HAUSDORFF LİMİTİ

Yüksek Lisans Tezi

GÖKÇE ÖZKAYA

Eskişehir 2019

p-SEL TAMSAYILARIN GROMOV-HAUSDORFF LİMİTİ

Gökçe ÖZKAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Topoloji Tezli Yüksek Lisans Programı
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Doç.Dr. Yunus ÖZDEMİR

Eskişehir
Eskişehir Teknik Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Aralık 2019

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Gökçe ÖZKAYA'nın "p-sel Tamsayıların Gromov-Hausdorff Limiti" başlıklı tezi 25/12/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği"nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri		**Unvanı Adı-Soyadı**	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	:	Doç.Dr. Yunus ÖZDEMİR	....
Üye	:	Doç.Dr. Mustafa SALTAN	....
Üye	:	Doç.Dr. Fatih KARABACAK	....

Prof. Dr. Murat TANIŞLI
Enstitü Müdürü

ÖZET

p-SEL TAMSAYILARIN GROMOV-HAUSDORFF LİMİTİ

Gökçe ÖZKAYA
Matematik Anabilim Dalı
Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Aralık 2019

Danışman: Doç.Dr. Yunus ÖZDEMİR

1897 yılında Kurt Hensel tarafından tanımlanmış olan p-sel sayılar hala oldukça gizemli ve detaylıca incelenmesi gereken cebirsel yapılar olarak önümüzde durmaktadır. Bir p asal sayısı için, $\mathbb{Q}_p$ p-sel sayılar kümesi p-mutlak değer normuna göre rasyonel sayıların tamlanışı olarak ifade edebilir. Ayrıca p-sel tamsayılar kümesi $\mathbb{Z}_p$ de kısaca $\mathbb{Q}_p$ içindeki birim disk olarak ifade edilebilir.

Öte yandan, farklı iki (kompakt) metrik uzay verildiğinde bu uzaylar arasında bir uzaklık tanımlama çabasının en kıymetli sonucu olarak Gromov-Hausdorff uzaklığı da metrik geometrinin en önemli araçlarından biridir. İki metrik uzay arasındaki Gromov-Hausdorff uzaklığı, bu iki metrik uzayın (aynı metrik uzaya) izometrik olarak gömülebildiği mümkün bütün metrik uzaylardaki (Hausdorff metriğine göre) uzaklıklarının infimumu olarak tanımlanabilir.

Bu tez çalışmasında, her biri kompakt olan p-sel tamsayılar kümeleri $\mathbb{Z}_p$'lerin belirlediği dizinin Gromov-Hausdorff anlamında bir metrik uzaya yakınsayıp yakınsayamayacağı problemi ele alınmıştır. Var olan tanım ile p-sel tam sayılar dizisinin bir metrik uzaya yakınsayamayacağı gösterilmiştir. Noktalı metrik uzayların yakınsaması kavramından esinlenerek, bu türden metrik uzayların yakınsaklığı için anlamlı olduğu düşünülen, yeni bir yakınsama tanımı verilmiş ve bu tanım ile p-sel tam sayılar dizisin ayrık metrik ile donatılmış olan negatif olmayan tamsayılar kümesine yakınsadığı gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Gromov-Hausdorff uzaklığı, Mutlak değer fonksiyonu, p-sel sayılar, p-sel tamsayılar, Ostrowski Teoremi.

ABSTRACT

GROMOV-HAUSDORFF LIMIT OF THE p-ADIC INTEGERS

Gökçe ÖZKAYA
Department of Mathematics
Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, December 2019

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Yunus ÖZDEMİR

The p-adic numbers described by Kurt Hensel in 1897 are still quite mysterious algebraic structures that need to be studied in detail. For a prime number p, p-adic numbers $\mathbb{Q}_p$ can be obtained as the completion of rational numbers according to the p-absolute value norm. In addition, p-adic integers $\mathbb{Z}_p$ can be briefly expressed as the unit disk in $\mathbb{Q}_p$.

On the other hand, Gromov-Hausdorff distance is one of the most important tools in the field of metric geometry to measure the distance between two different (compact) metric spaces. The Gromov-Hausdorff distance between two metric spaces can be defined as the infimum of the Hausdorff distances between possible isometric embeddings of them into a third metric space.

In this work, it is studied with the problem of whether the sequence of compact sets $\mathbb{Z}_p$ converges to a metric space in the sense of Gromov-Hausdorff. In the sense of classical Gromov-Housdorff convergence, it is shown that p-adic integers cannot converge to a metric space. Inspired by notion of the convergence of a sequence of pointed metric spaces, a new convergence definition, which is considered to be more significant for the convergence of such metric spaces, is given and shown that the sequence of p-adic integers converges to a set of non-negative integers equipped with discrete metric.

Keywords: Gromov-Hausdorff distance, Absolute value function, p-adic numbers, p-adic integers, Ostrowski Theorem.

TEŞEKKÜR

Tez çalışması boyunca yardımlarını esirgemeyen değerli hocamız Şahin KOÇAK'a ve tez danışmanım Yunus ÖZDEMİR'e teşekkür ederim.

Gökçe ÖZKAYA

25/12/2019

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan "bilimsel intihal tespit programı"yla tarandığını ve hiçbir şekilde "intihal içermediğini" beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Gökçe ÖZKAYA

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\vert \cdot \vert_0$	:	standart mutlak değer fonksiyonu
$\vert \cdot \vert_p$	:	p-sel norm
$\mathbb{Q}_p$	:	p-sel sayılar
$\mathbb{Z}_p$	:	p-sel tamsayılar
d_H	:	Hausdorff metrik
d_{GH}	:	Gromov-Hausdorff metrik
dis	:	Distorsiyon (Bozulma)
$\mathbf{R}$	:	Çok değerli kısmi dönüşüm (Correspondence)
d_p	:	p-sel metrik
d_a	:	Ayrık metrik
$B_r(x)$	:	x merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$U_r(X)$	:	X kümesinin r-komşuluğu

1. p-SEL SAYILAR

p-sel sayılar 1897 yılın Alman matematikçi Kurt Hensel tarafından tanımlanmıştır ([4]). p-sel sayılar matematiğin farklı alanlarındaki problemlerin sayılar teorisine aktarılması konusunda bir araç olarak kullanılmaktadır. p-sel sayılar ile ilgili detaylı bilgi için bkz. [5], [6], [3], [7], [9].

Bu çalışmada temel olarak p-asal sayıları için, p-sel tamsayılar kümelerinin oluşturduğu $\mathbb{Z}_p$'lerin belirlediği dizinin Gromov-Hausdorff anlamında bir metrik uzaya yakınsayıp yakınsayamayacağı incelenmiştir. Bu bağlamda, bu bölümde genel olarak p-sel mutlak değer (norm), p-sel sayılar ve p-sel tamsayılar tanıtılıp, bu teorideki en önemli teoremlerden biri olan Ostrowski Teoremine yer verilmiştir.

İlk olarak mutlak değer fonksiyonu ve p-sel norm kavramları ele alınacaktır. Bu kavramlar yardımıyla, rasyonel sayılar üzerinde tanımlı bütün (aşikar olmayan) mutlak değer fonksiyonlarının bilinen standart mutlak değer veya tek bir p asal sayısı için p-sel mutlak değer fonksiyonuna denk olduğunu söyleyen Ostrowski Teoremi ifade ve ispat edilmiştir. Sonraki alt bölümlerde ise p-sel sayılar ayrıntılı olarak incelenecektir.

1.1. p-sel Norm ve Ostrowski Teoremi

1.1.1. Mutlak değerler ve p-sel norm

Tanım 1.1. $(F, +, \cdot)$ bir cisim olmak üzere,
F üzerine bir mutlak değer $|.| : F \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$;

M1) $\forall x \in F$ için, $|x| \geq 0$ ve $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0_F$

M2) $\forall x, y \in F$ için, $|x \cdot y| = |x||y|$

M3) $\forall x, y \in F$ için, $|x + y| \leq |x| + |y|$

koşullarını sağlayan pozitif tanımlı bir fonksiyondur.

Tanım 1.2. $\forall x \in F$ için,

$$|x| = \begin{cases} 0, & x = 0_F \\ 1, & x \neq 0_F \end{cases}$$

ile F üzerine tanımlı mutlak değere, **aşikar mutlak değer** denir.

Tanım 1.3 (p-sel değerlendirme fonksiyonu)**.** $x \in \mathbb{Q}$,

$$x = \frac{a}{b} = p^r \frac{a'}{b'}, \quad a', b' \in \mathbb{Z}, \quad b' \neq 0, \quad (a', b') = 1, \quad p \mid a'$$

olmak üzere,

$$\begin{array}{rccl} ord_p: & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \\ & x & \longmapsto & ord_p(x) = r \end{array}$$

ve $x = 0$ için $ord_p(0) = \infty$ ile genişletilen $\mathbb{Q}$ üzerine tanımlı ord_p fonksiyonuna p-sel değerlendirme denir.

Örnek 1.4. $p = 3$, $p = 5$ ve $p = 7$ için bazı rasyonel sayılara bakalım:

- $ord_5(35) = 1$
- $ord_7(35) = 1$
- $ord_3\left(\frac{-1}{2}\right) = 0$

Uyarı 1.5. p-sel değerlendirmenin sağladığı bazı özellikler şunlardır:
$\forall x, y \in \mathbb{Q}$ için

- $ord_p(xy) = ord_p(x) + ord_p(y)$
- $ord_p(x + y) \geq \min\{ord_p(x), ord_p(y)\}$

şeklindedir.

Tanım 1.6 (p-sel mutlak değer)**.**

$$\begin{array}{rccl} |.|_p: & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \left(\frac{1}{p}\right)^{ord_p(x)}, & x \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

şeklinde tanımlı $|.|_p$ mutlak değeri $\mathbb{Q}$ üzerine bir mutlak değerdir ve $|.|_p$ mutlak değerine **p-sel mutlak değer** denir.

Şimdi $|.|_p$ 'nin mutlak değer olma koşullarını sağladığını görelim:

- Tanım gereği $\forall x \in \mathbb{Q}$ için $|x|_p \geq 0$ ve $x = 0 \Leftrightarrow |x|_p = 0$ şeklindedir. Böylece M1 sağlanır.

- $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ için $|x|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{ord_p(x)}$ ve $|y|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{ord_p(y)}$

$$\begin{aligned} |xy|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{ord_p(xy)} &= \frac{1}{p^{ord_p(xy)}} \\ &= \frac{1}{p^{ord_p(x)+ord_p(y)}} \\ &= \frac{1}{p^{ord_p(x)}p^{ord_p(y)}} \\ &= \frac{1}{p^{ord_p(x)}}\frac{1}{p^{ord_p(y)}} \\ &= |x|_p|y|_p \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Böylece M2 sağlanır.

- $\forall x, y \in \mathbb{Q}$ için $b \neq 0 \neq d$ olmak üzere, $x = \dfrac{a}{b}$ ve $y = cd$ olsun. Bu durumda

$$x + y = \frac{ad + bc}{bd}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} ord_p(x+y) &= ord_p\left(\frac{ad+bc}{bd}\right) \\ &= ord_p(ad+bc) - ord_p(bd) \\ &= ord_p(ad+bc) - ord_p(b) - ord_p(d) \\ &\geq \min\{ord_p(ad), ord_p(bc)\} - ord_p(b) - ord_p(d) \\ &= \min\{ord_p(a) + ord_p(d), ord_p(b) + ord_p(c)\} - ord_p(b) - ord_p(d) \\ &= \min\{ord_p(a) - ord_p(b), ord_p(c) - ord_p(d)\} \\ &= \min\{ord_p(x), ord_p(y)\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Buradan

$$
\begin{aligned}
|x+y|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{ord_p(x+y)} &= p^{-ord_p(x+y)} \\
&\leq \max\{p^{-ord_p(x)}, p^{-ord_p(y)}\} \\
&= \max\{|x|_p, |y|_p\} \qquad (1..1)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$|x+y|_p \leq |x|_p + |y|_p$$

eşitsizliği geçerlidir. Böylece M3 sağlanır.

Örnek 1.7. $p = 2, p = 3$ ve $p = 7$ için bazı rasyonel sayılara bakalım:

- $|4|_2 = \frac{1}{4}, |4|_3 = 1, |4|_7 = 1$
- $\left|\frac{1}{3}\right|_2 = 1, \left|\frac{1}{3}\right|_3 = 3, \left|\frac{1}{3}\right|_7 = 1$
- $|-25|_2 = 1, |-25|_3 = 1, |-25|_7 = 1$

Uyarı 1.8. Eşitsizlik (1..1) 'den $|.|_p$ mutlak değerinin güçlü üçgen eşitsizliğini sağladığı görülür.

Tanım 1.9. $(F, |.|)$ mutlak değerli cismi verilsin. $\forall x, y \in F$ için

$$|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$$

güçlü üçgen eşitsizliği sağlanıyorsa $|.|$ mutlak değerine **Arşimetsel olmayan (Non-Archimedean) mutlak değer** denir. Eğer güçlü üçgen eşitsizliği sağlanmıyorsa $|.|$ mutlak değeri **Arşimetsel (Archimedean) mutlak değer**dir, denir.

Sonuç 1.10. *$\mathbb{Q}$ üzerine tanımlı $|.|_p$ mutlak değeri Arşimetsel olmayan mutlak değerdir.*

Uyarı 1.11.

$$
\begin{aligned}
|.|: \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\
x &\longmapsto \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

olarak $\mathbb{R}$ üzerine tanımlı $|.|$ standart mutlak değerini $\mathbb{Q}$ üzerine kısıtlayalım ve yeni mutlak değeri $|.|_0$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{array}{rrcl} |.|_0 : & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} \end{array}$$

olarak ifade edilebilir.

Sonuç 1.12. *$\mathbb{R}$ üzerine tanımlı $|.|$ standart mutlak değeri, dolayısıyla $\mathbb{Q}$ üzerine tanımlı $|.|_0$ mutlak değeri Arşimetsel mutlak değerdir.*

Tanım 1.13 (Mutlak Değerlerin Denkliği)**.** F cismi üzerine tanımlı $|.|_1$ ve $|.|_2$ mutlak değerleri verilsin. Eğer

$$|x|_1^\alpha = |x|_2, \qquad \forall x \in F$$

olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{R}^+$ varsa $|.|_1$ ve $|.|_2$ mutlak değerlerleri denktir, denir ve $|.|_1 \sim |.|_2$ ile gösterilir.

Bir sonraki bölümde Ostrowski Teoremi ile $\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlı her mutlak değerin ya bildiğimiz mutlak değere ya da tek bir p asalı için p-sel mutlak değere denk olduğunu göreceğiz.

1.1.2. Ostrowski Teoremi

Teorem 1.14 (Ostrowski)**.** *[6] $\mathbb{Q}$ üzerine tanımlı aşikar mutlak değere denk olmayan her mutlak değer ya bir tek p asal sayısı için $|.|_p$ p-sel mutlak değere ya da $|.|_0$ mutlak değerine denktir.*

Kanıt. Kanıt adımlarımız öncelikle en az bir tamsayının mutlak değerinin 1 sayısından kesin büyük olduğu durumun incelenmesi ve ardından her tamsayının mutlak değerinin 1 sayısına eşit veya daha küçük olması durumunun incelenmesidir. Ayrıca kanıt adımlarında kullanmak üzere aşağıdaki hesapları önden yapmakta fayda vardır:

$a, b, n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ ve $a, b > 1$ olmak üzere b^n sayısını a tabanına göre yazalım: $c_0, c_1, \cdots, c_m \in \{0, 1, \ldots, a-1\}, c_m \neq 0$ olmak üzere

$$b^n = c_0 + c_1 a + \cdots + c_m a^m$$

şeklinde yazılır. $M = \sup\{|1|, \ldots, |a-1|\}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} |b^n| &= |c_0 + c_1 a + \ldots + c_m a^m| \\ &\leq |c_0| + |c_1||a| + \cdots + |c_m||a^m| \\ &\leq M(m+1)\max\{|1|, |a|, \ldots, |a|^m\} \end{aligned} \tag{1..2}$$

eşitsizliği geçerlidir ve b^n 'yi a tabanına göre yazdığımız için $a^m \leq b^n$,

$$a^m \leq b^n \Rightarrow m \leq n\log_a(b)$$

ve

$$\max\{1, |a|, \ldots, |a|^m\} = \begin{cases} |a|^m, & a \geq 1 \\ 1, & a < 1. \end{cases}$$

olur. Böylece

$$\max\{1, |a|, \ldots, |a|^m\} \leq \sup\{1, |a|^{n\log_a(b)}\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi Eşitsizlik (1..2)'den

$$\begin{aligned} |b|^n &\leq M(m+1)\max\{1, |a|, \ldots, |a|^m\} \\ &\leq M(m+1)\sup\{1, |a|^{\log_a(b)}\} \end{aligned}$$

ve burada da her iki tarafın n. dereceden kökü alınırsa

$$|b| \leq (M(m+1))^{\frac{1}{n}} \sup\{1, |a|^{\log_a(b)}\}$$

elde edilir. Bu her $n \geq 1$ tamsayısı için doğru olduğundan, $n \to \infty$ iken,

$$|b| \leq \sup\{1, |a|^{\log_a(b)}\}$$

elde edilir.

<u>I. Durum:</u> $\exists b \in \mathbb{Z}$ için $|b| \gneqq 1$ olsun. Bu durumda

$$1 \lneqq |b| \leq \sup\{1, |a|^{\log_a(b)}\}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla $|a|^{\log_a(b)} > 1$ ve $\log_a(b) > 1$ olduğundan $|a| > 1$. Bu durumda

$$|b| \leq |a|^{\log_a(b)}$$

ve a ile b'nin rollerini değiştirip aynı işlemler yapıldığında

$$|a| \leq |b|^{\log_b(a)}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} |b| &\leq |a|^{\log_a(b)} \\ &= |a|^{\frac{\log(b)}{\log(a)}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |b|^{\frac{1}{\log(b)}} \leq |a|^{\frac{1}{\log(a)}} \tag{1..3}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned} |a| &\leq |b|^{\log_b(a)} \\ &= |b|^{\frac{\log(a)}{b}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |a|^{\frac{1}{\log(a)}} \leq |b|^{\frac{1}{\log(b)}} \tag{1..4}$$

elde edilir. Eşitsizlik (1..3) ve Eşitsizlik (1..4)'ten

$$|a|^{\frac{1}{\log(a)}} = |b|^{\frac{1}{\log(b)}}$$

elde edilir.

$a, b > 1$ olduğundan $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere $|a| = a^\alpha$ ve $|b| = b^\beta$ yazılabilir. Dolayısıyla

$$|a|^{\frac{1}{\log(a)}} = (a^\alpha)^{\frac{1}{\log(a)}}$$

$$|b|^{\frac{1}{\log(b)}} = (b^\beta)^{\frac{1}{\log(b)}}$$

$$b^\beta = (a^\alpha)^{\frac{\log(a)}{\log(b)}}$$

$$(a^\alpha)^{\log_a(b)} = b^\beta$$

$$(a^{\log_a(b)})^\alpha = b^\beta$$

$$\alpha = \beta$$

şeklindedir. Sonuç olarak a'dan bağımsız bir $0 < \gamma \in \mathbb{R}$ için

$$|a| = a^\gamma$$

elde edilir. Dolayısıyla $|a| = |a|_0^\gamma$ yazılır. Böylece $|.| \sim |.|_0$ elde edilir.

II. Durum $\forall b \in \mathbb{Z}$ için $|b| \leq 1$ olsun.

$|.|$ mutlak değeri aşikar olmadığından $\exists p$ asal sayısı için $|p| \lneqq 1$ 'dir.

Eğer böyle olmasaydı, $\forall b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ için $|b| = 1$ olurdu. Çünkü $p_1, p_2, \ldots, p_n$ asal sayıları ve $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ olmak üzere $\forall b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ tamsayısı $b = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ şeklinde yazıldığından

$$\begin{aligned}
|b| &= |p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}| \\
&= |p_1^{\alpha_1}||p_2^{\alpha_2}| \cdots |p_n^{\alpha_n}| \\
&= |p_1|^{\alpha_1} |p_2|^{\alpha_2} \cdots |p_n|^{\alpha_n} \\
&= 1^{\alpha_1} 1^{\alpha_2} \cdots 1^{\alpha_n} \\
&= 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi böyle bir p asalının tek olduğunu görelim:

q, p'den farklı bir asal sayı olsun. Bu durumda $|q| = 1$ olduğunu görmeliyiz.

Kabul edelim ki $q \neq p$ iki asal sayı ve $|p| \lneqq 1$ ve $|q| \lneqq 1$ olsun.

Bu durumda $m, n \leq 1$ olmak üzere öyle m, n tamsayıları bulabiliriz ki

$$|q^m| \lneqq \frac{1}{2} \text{ ve } |p^n| \lneqq \frac{1}{2}$$

yazılabilir.

Şimdi $(p, q) = 1$ olduğundan öyle $x, y \in \mathbb{Z}$ vardır ki $xq^m + yp^n = 1$ yazılır.

$$\begin{aligned}
1 = |1| &= |xq^m + yp^n| \\
&\leq |x||q^m| + |y||p^n| \\
&\leq |q^m| + |p^n| \\
&\lneqq 1
\end{aligned}$$

elde edilir, fakat bu bir çelişkidir. Yani p asal sayıları arasında $|p| \lneqq 1$ şartını sağlayan tek bir tane asal sayı vardır. Şimdi bu durum için $|.|$ mutlak değerinin $|p| \lneqq 1$ şartını sağlayan tek p asalı için p-sel mutlak değere denk olduğunu görelim:

$\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$\begin{aligned} |n| &= |p^{ord_p(n)} n_0|, \quad (p, n_0) = 1 \\ &= |p|^{ord_p(n)} && (1..5) \\ &= \left(\left(\frac{1}{p}\right)^{ord_p(n)} \right)^{\gamma} \quad , \gamma \in \mathbb{R}^+ && (1..6) \\ &= |n|_p^{\gamma} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Dolayısıyla $|a| = |a|_p^{\gamma}$ yazılır. Böylece $|.| \sim |.|_p$ olduğu görülmüş olur. □

Uyarı 1.15. Reel sayılar üzerinde tanımlanan her mutlak değer fonksiyonu, norm olma koşullarını sağlar.

Sonuç 1.16. *p-sel mutlak değer, $\mathbb{Q}$ üzerinde bir normdur.*

Sonuç 1.17. *$\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlanan herhangi aşikar olmayan bir norm, ya standart norma ya da tek bir p asalı için $|.|_p$, p-sel normuna denktir. Başka bir deyişle, Ostrowski Teoremi sayesinde $\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlanan normlar Archimedian veya non-Archimedian olarak sınıflandırılabilir.*

1.2. p-sel Sayılar

p-sel sayıları açıkça ifade etmeden önce herhangi bir metrik uzayın tamlaması kavramından bahsedilmiştir.

Teorem 1.18 (Tamlama Teoremi, [5])**.** *Her M metrik uzayı, aşağıdaki koşulları sağlayan bir $(\hat{M}, D)$ metrik uzayı var ise tamlanabilirdir.*

(i) $\hat{M}$, D metriğine göre tamdır,

(ii) $\hat{M}$'nin M'ye izometrik olan bir $\hat{M}_0$ altkümesi vardır,

(iii) $\hat{M}_0$, $\hat{M}$ içinde yoğundur.

p bir asal sayı olsun. p-sel sayılar, Rasyonel sayıların $|.|_p$ normuna göre tamlaması olarak tanımlanır ve $\mathbb{Q}_p$ olarak gösterilir. $\mathbb{Q}_p$'nin elemanları $|.|_p$ normuna göre genişletilen $\mathbb{Q}$ içindeki Cauchy dizilerinin denklik sınıflarıdır. Bir $a \in \mathbb{Q}_p$ için $\{a_n\}$, a sayısını temsil eden Rasyonel Cauchy dizisi olsun. Bu durumda

$$|a|_p = \lim_{n \to \infty} |a_n|_p$$

şeklindedir.

$\forall i \geq -m$ için $d_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ ve $0 < d_{-m} < p$ olmak üzere

$$d_{-m}\, p^{-m} + d_{-m+1}\, p^{-m+1} + \cdots + d_{-2}\, p^{-2} + d_{-1}\, p^{-1} + d_0 + d_1\, p + d_2\, p^2 + \cdots + d_m\, p^m + \cdots \tag{1..7}$$

serisi bir Cauchy dizisinin kısmi toplamlar dizisidir ve (1..7) şeklindeki her seri $\mathbb{Q}_p$'nin elemanlarının birer temsilidir. $\mathbb{Q}$ içindeki Cauchy dizilerinin her denklik sınıfı, (1..7) şeklinde bir kısmi toplamlar dizisi olan tek bir Cauchy dizisinin tek bir kanonik temsilini içerir (detay için bkz. [5]).

Bir a sayısı p tabanına göre,

$$a = \sum_{n=0}^{\infty} d_n p^n$$

şeklinde yazılır. Burada d_n' ler p-sel basamaklardır ve a sayısı p tabanına göre

$$\ldots d_n \ldots d_2 d_1 d_0$$

şeklinde ifade edilebilir ve bu

$$a = \ldots d_n \ldots d_2 d_1 d_0$$

olarak yazılabilir. Bu gösterime a sayısının *kanonik p-sel genişlemesi* veya *kanonik formu* denir.

Eğer $|a|_p > 1$ ise, bu demektir ki a sayısının p-sel açılımında d_0'dan önce bir p-sel basamak bulunmaktadır, o halde a sayısı $a' = ap^m$ olacak şekilde uygun bir m kuvveti için p^m ile çarpılarak, $|a'|_p = 1$ olacak şekilde bir a p-sel sayısı olarak yazılabilir. Bu sayede

$$a =_p \sum_{n=-m}^{\infty} d_n p^n$$

şeklinde ifade edilebilir. p-sel norma göre yakınsak olan bu toplama eşit olan a

sayısı, bir önceki gösterimde kullanılan "$=_p$" yerine yalınlık hatırına "$=$" notasyonu kullanılacaktır.

Burada $d_{-m} \neq 0$ ve $d_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ ve verilen a p-sel sayısı sonsuz çoklukta p-sel basamak ile p tabanına göre

$$\ldots d_n \ldots d_2 d_1 d_0, d_{-1} \ldots d_{-m}$$

şeklinde temsil edilebilir ve bu gösterime a'nın *kanonik p-sel genişlemesi* denir ([5]). Bu temsilden hareketle

$$a = \ldots d_n \ldots d_2 d_1 d_0, d_{-1} \ldots d_{-m}$$

biçiminde ifade edilecektir.

Örnek 1.19. Bazı p-sel sayılar ve kanonik p-sel genişlemeleri aşağıda verilmiştir.

- $\frac{1}{2}$ bir 2$-$sel sayıdır, yani $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}_2$ şeklindedir. Çünkü, 2-sel norma göre

  $$\frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + \cdots$$

  şeklinde yazılır. Bu durumda bu sayıyı $\frac{1}{2} = 0,1$ şeklinde ifade edilebilir.

- $\frac{77}{18} \in \mathbb{Q}_7$'dir. Çünkü 7-sel norma göre

  $$\frac{77}{18} = 0 + 1 \cdot 7 + 5 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^3 + 0 \cdot 7^4 + 5 \cdot 7^5 + 2 \cdot 7^6 + 0 \cdot 7^7 + \cdots$$

  yazılır. Bu durumda $\frac{77}{18} = \ldots 02503510$ şeklinde ifade edilebilir.

- $-1 \in \mathbb{Q}_5$'dir. Çünkü 5-sel norma göre

  $$-1 = 4 + 4 \cdot 5 + 4 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^3 + 4 \cdot 5^4 + 4 \cdot 5^5 + 4 \cdot 5^6 + 4 \cdot 5^7 + \cdots$$

  yazılır. Bu durumda $-1 = \ldots 44444$ şeklinde ifade edilebilir.

- $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}_7$'dir. Çünkü 7-sel norma göre

  $$\sqrt{2} = 3 + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^3 + 1 \cdot 7^4 + \cdots$$

  yazılır. Bu durumda $\sqrt{2} = \ldots 16213$ şeklinde ifade edilebilir.

- $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}_3$'tür. Çünkü 3-sel norma göre

$$\frac{1}{3} = 1 \cdot 3^{-1} + 0 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3^2 + \cdots$$

yazılır. Bu durumda $\frac{1}{3} = 0,1$ şeklinde ifade edilebilir.

- $\frac{1}{10} \in \mathbb{Q}_5$'dir. Çünkü 5-sel norma göre

$$\frac{1}{10} = 3 \cdot 5^{-1} + 2 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + \cdots$$

yazılır. Bu durumda $\frac{1}{10} = \ldots 22,3$ şeklinde ifade edilebilir.

- $\sqrt{-1} \in \mathbb{Q}_5$'dir. Çünkü 5-sel norma göre

$$\sqrt{-1} = 2 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 + 3 \cdot 5^4 + \cdots$$

yazılır. Bu durumda $\sqrt{-1} = \ldots 31212$ şeklinde ifade edilebilir.

- Her p asalı için, $1 \in \mathbb{Q}_p$'dir. Çünkü p-sel norma göre

$$1 + 0 \cdot p + 0 \cdot p^2 + \cdots + 0 \cdot p^m + \cdots$$

yazılır. Bu durumda $1 = \ldots 001$ şeklinde ifade edilebilir.

- Her p asalı için, $-1 \in \mathbb{Q}_p$'dir. Çünkü p-sel norma göre

$$-1 = (p-1) + (p-1) \cdot p + (p-1) \cdot p^2 + \cdots + (p-1) \cdot p^m + \cdots$$

yazılır. Bu durumda $-1 =_p \ldots (p-1)(p-1)(p-1)$ şeklinde ifade edilebilir.

- Her p asalı için, $\frac{1}{p} \in \mathbb{Q}_p$'dir. Çünkü p-sel norma göre

$$1 \cdot p{-}1 + 0 + 0 \cdot p + 0 \cdot p^2 + \cdots + 0 \cdot p^m + \cdots$$

yazılır. Bu durumda $\frac{1}{p} =_p 0,1$ şeklinde ifade edilebilir.

1.2.1. p-sel tamsayılar

Tanım 1.20. Eğer bir a p-sel sayısı kanonik genişlemesinde hiç negatif kuvvetli bir p-sel basamağa sahip değil ise, p-sel tamsayı olarak adlandırılır ve p-sel tamsayılar

$\mathbb{Z}_p$ ile gösterilir.

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n p^n : 0 \leq a_n \leq p-1 \right\}$$

Örnek 1.21. Her p asal sayısı için $0, 1, 2, \ldots$, tüm doğal sayılar p tabanına göre yazılabileceğinden her p asalı için birer p-sel kanonik genişlemeleri vardır. p-sel basamakları 1 kaydırarak negatif tam sayıların p-sel kanonik genişlemelerini yazmak mümkündür. $\mathbb{Z}_p$ kümesinin birim elemanı 1 ve toplamsal tersi -1 p-sel sayılarının kanonik p-sel genişlemeleri

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0 \cdot p + 0 \cdot p^2 + \cdots + 0 \cdot p^m + \cdots \\ 1 &= \ldots 0001 \\ -1 &= (p-1) + (p-1) \cdot p + (p-1) \cdot p^2 + \cdots + (p-1) \cdot p^m + \cdots \\ -1 &= \ldots (p-1)(p-1)(p-1) \end{aligned}$$

şeklindedir ve böylece birim eleman ve birim elemanın toplamsal tersi yardımıyla diğer p-sel sayıların temsillerini bulabilmek mümkündür. Örneğin $p > 2$ için 2 p-sel sayısının temsilinin $\ldots 002$ olacağı açıktır.

Tanıma geri dönülürse, $\frac{1}{p}$, p-sel kanonik genişlemesinde $\frac{1}{p}$ p-sel basamağı olduğu için bir p-sel tamsayı değildir. Bu $\mathbb{Z}_p$ ile $\mathbb{Q}_p$ arasındaki temel farktır. $\mathbb{Z}_p$ kümesi içinde p asalının hiçbir negatif kuvvetini içeren bir sayı yer almaz fakat p asalından farklı bir asal sayının negatif kuvvetleri $\mathbb{Z}_p$ içinde yer alır. Örneğin $\frac{1}{3}$ sayısının kanonik genişlemesi 3-sel sayılar içinde $0,1$ fakat 5-sel sayılar içerisinde ise $\ldots 1313132$ şeklindedir. Bu da demek oluyor ki $\frac{1}{3}$ sayısı bir 5-sel tamsayıdır, fakat 3-sel tamsayı değildir.

Uyarı 1.22. $< \frac{1}{p} > := \left\{ a \left(\frac{1}{p} \right)^b : a \in \mathbb{Z} - \{0\}, b \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ kümesi tanımlansın. $\mathbb{Q} \cap < \frac{1}{p} >$ rasyonel sayıları p-sel sayıdır fakat p-sel tamsayı değildir.

p-sel sayılar ile p-sel tamsayılar arasındaki bir farkın da, p-sel genişlemelerini yazarken virgüle ihtiyaç olmaması söylenebilir. Bu durumda bir p-sel tamsayıyı temsil etmek için p-sel genişlemesindeki sırayı tersten yazalım, yani p-sel genişlemesi

$$a = \ldots d_n \ldots d_2 d_1 d_0$$

olan bir p-sel tamsayıyı bundan sonra

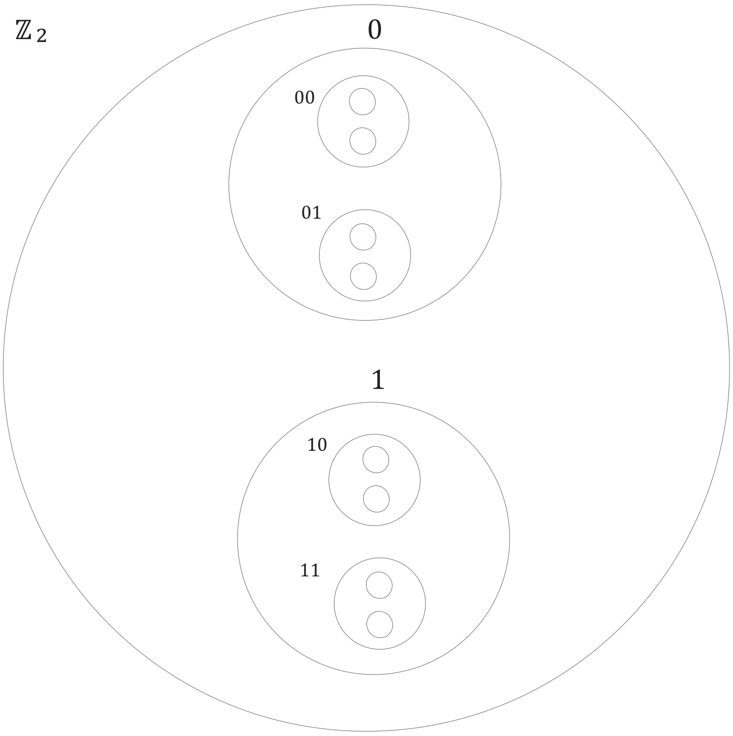
$$a = d_0 d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$$

şeklinde temsil edelim ve bu gösterime a'nın p-sel temsili diyelim. Burada dikkat edilmesi gereken husus, bir p-sel tamsayının, harfleri $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ kümesinin elemanları olan sonsuz uzunluklu bir $d_0 d_1 d_2 \cdots d_n \cdots$ kelimesi ile temsil edilebiliyor olmasıdır.

p-sel tamsayıların $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ harflerinden oluşan kelimeler oldukları bahsine geri dönüldüğünde, bu kelimelerin $\mathbb{Z}_p$ kümesini anlamamıza olanak sağlayacağı söylenebilir; öyle ki kelimelerinin harflerine bakarak p-sel sayıları gruplandırmak mümkündür. Gruplandırma şu şekilde düşünülebilir: eğer kelimeler 0 ile başlıyorsa bu p-sel sayıları bir gruba, eğer 1 ile başlıyorsa bir başka gruba, ve devam edersek $p-1$ ile başlayanları ise başka bir gruba ait şeklinde düşünülebilir. Benzer şekilde ikinci harflere bakarak böyle bir sınıflandırma yapmak mümkündür. Örneğin ilk harfi 0 olan grubun içinde; ikinci harfi 0 ile başlayan kelimeleri 0 ile başlayanların yaşadığı gruptaki bir alt grupta, 1 ile başlayanları bir başka alt grupta, ve devam edersek benzer şekilde $p-1$ ile başlayanları da başka bir alt grupta düşünebiliriz. Yani daha açık olarak, 00 ile başlayanları (ilk harfi 0 olan grubun içindeki) bir grupta, 01 başlayanları bir grupta, devam edildiğinde $0p$ ile başlayanları başka bir grupta toplanmış olur ve aynı gruplandırma 1 ile başlayanlar için, 10 ile başlayanlar, 11 ile başlayanlar şeklinde devam ettirilebilir. Bu gruplandırma $\mathbb{Z}_p$ kümesini p bölgeye ayırır: 0 ile başlayanlar, 1 ile başlayanlar, ..., $p-1$ ile başlayanlar. Bu p bölge de kendi içlerinde 0 ile başlayanlar, 1 ile başlayanlar, ..., $p-1$ ile başlayanlar şeklinde sınıflandırılan p alt-bölgeye ayrılır ve bu sınıflandırma kelimelerin harflerine bakılarak daha derinlere kadar yapılabilir. Birinci harfe bakılarak yapılan sınıflandırmada görülen bölgelere birinci seviye altküme diyelim. Bu durumda verilen bir p-sel sayının ilk harfine bakarak hangi altkümede olduğunu söylemek kolaydır. Örneğin ilk harfi 0 olan bir p-sel sayı için, bu sayı $\mathbb{Z}_p$'nin birinci seviye 0-altkümesindedir diyeceğiz. Yine aynı şekilde ikinci harfine bakarak ikinci seviye altkümeler belirlenir. Örneğin ilk harfi 0 ikinci harfi $p-1$ olan bir p-sel sayı için bu sayı ikinci seviye $0(p-1)$-altkümesindedir diyeceğiz. Bu sayede verilen kelimenin sadece ilk n harfine bakıp bu p-sel sayının yerini anlamış olacağız ve kıyaslamalar yapmak mümkün olacak.

Örneğin $\mathbb{Z}_2$ için, birinci seviye alt-kümeler 0 ve 1 ile başlayanlar olmak üzere iki birinci seviye altkümeden oluşuyor ve bunlar birinci seviye 0-altkümesi ve birinci seviye 1-altkümesidir. Birinci seviye 0-altkümesi ise, 0-altkümesi ve 1-altkümesi şeklinde ayrılacak ve ikinci seviye 00 ve 01-altkümeleri, benzer şekilde ikinci seviye 10 ve 11-altkümeleri oluşacak (bkz. Şekil 1.1).

$\mathbb{Z}_3$ için, birinci seviye alt-kümeler 0, 1 ve 2 ile başlayanlar olmak üzere üç tane



Şekil 1.1. *$\mathbb{Z}_2$ için bir model*

birinci seviye altkümeden oluşuyor ve bunlar birinci seviye 0-altkümesi, birinci seviye 1-altkümesi ve birinci seviye 2-altkümesidir. Birinci seviye 0-altkümesi ise, 0-altkümesi, 1-altkümesi ve 2-altkümesi şeklinde ayrılacak ve ikinci seviye 00, 01 ve 02-altkümeleri, benzer şekilde ikinci seviye 10, 11 ve 12-altkümeleri ve 20, 21 ve 22-altkümeleri oluşacak (bkz. Şekil 1.2).

Genel olarak bir p asalı için $\mathbb{Z}_p$ kümesinin altküme seviyelerine inerken (bkz. Şekil 1.3) sanki ilk adımdan başlar gibi kendini tekrarlayan bir yapı ile karşılaşıyoruz. Bu konu ile ilgili detaylı bilgi için bkz. [2].

Yardımcı Teorem 1.23. *p-sel tamsayılar $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$ içindeki birim disktir.*

Kanıt. Herhangi bir a p-sel tamsayısı verilsin. $a_i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ olmak üzere,

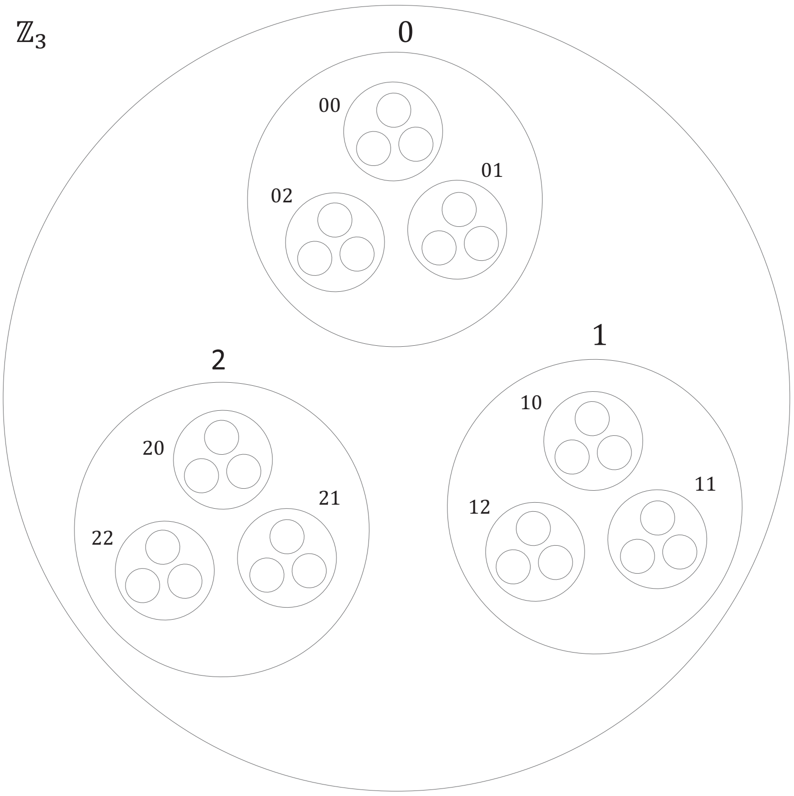
$$a = a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 + \cdots + a_k \cdot p^k + \cdots$$

p-sel sayısı için

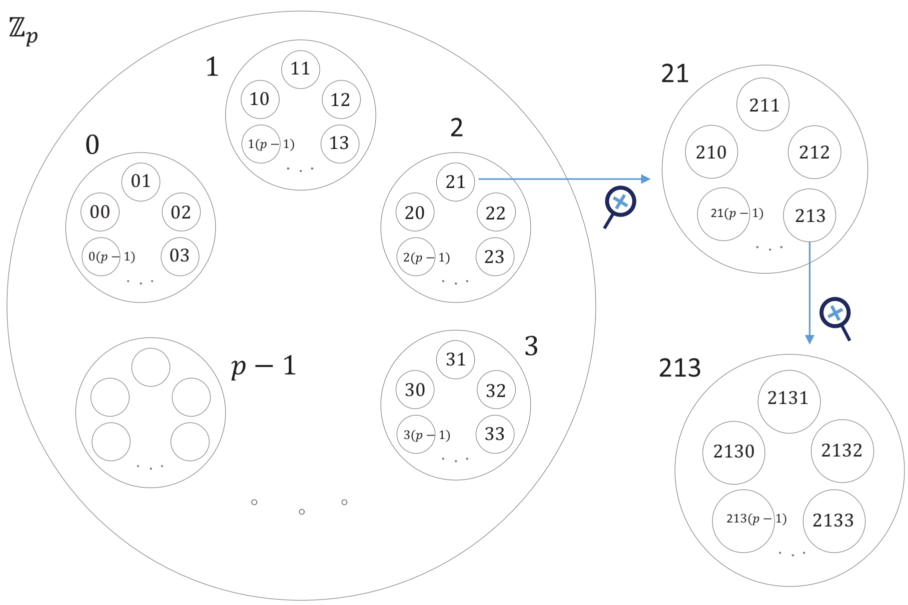
$$|a|_p = \left(\frac{1}{p}\right)^{ord_p(a)} \leq 1$$

olarak elde edilir. □

Sonuç 1.24. *$\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}_p$ içinde kapalı ve sınırlı olduğundan kompakttır.*

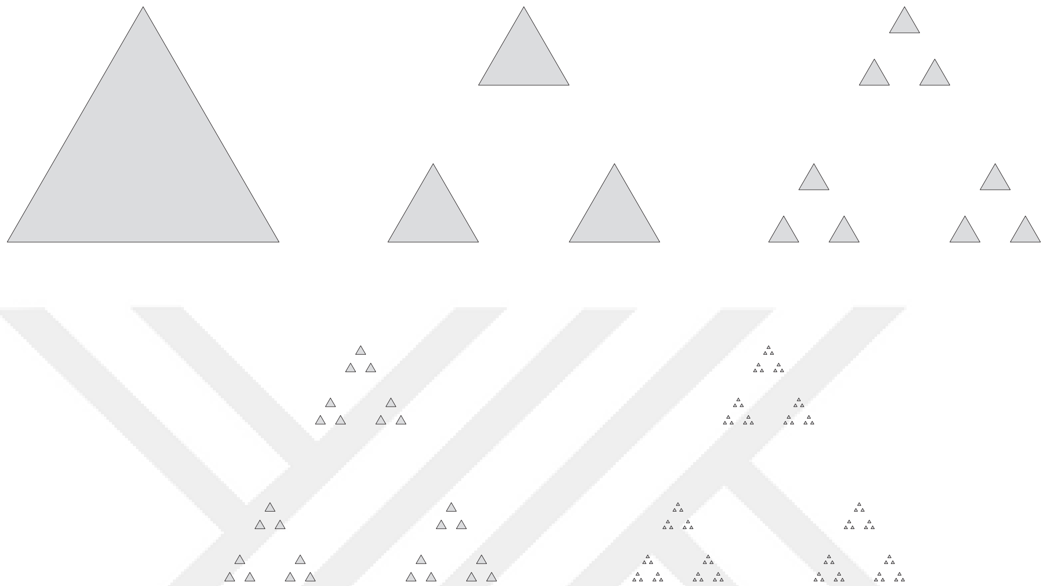


Şekil 1.2. $\mathbb{Z}_3$ *için bir model*

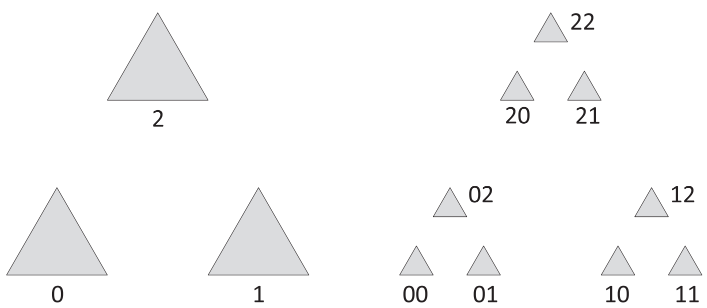


Şekil 1.3. $\mathbb{Z}_p$ *için bir model*

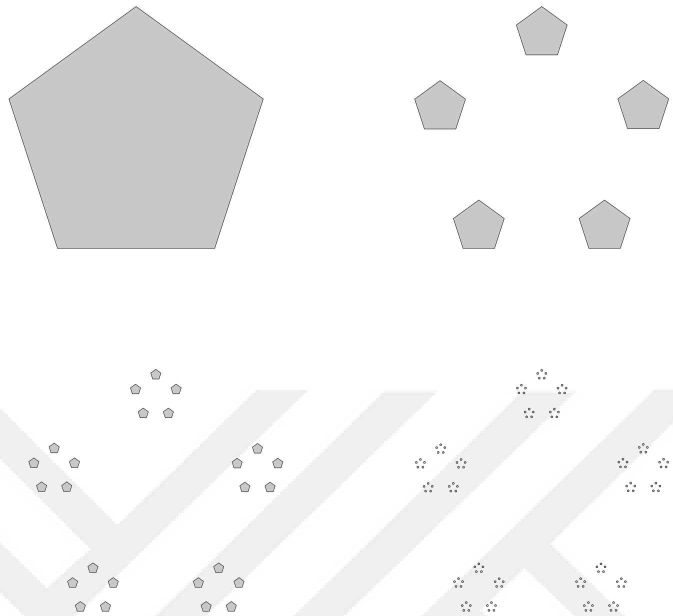
p-sel sayıların Öklidyen bir uzayda modellenmesi ile ilgili farklı çalışmalar mevcuttur. Bu kümelerin Öklidyen uzaylardaki modelleri ile fraktallar arasında da ilginç ve keyifli bir ilişki bulunmaktadır ([2], [5]). Fraktallarda genel olarak bulunan kendine benzerlik özelliği, p-sel sayıların geometrik olarak temsil edilmesinde kolaylık sağlamaktadır. [2] çalışmasında p-sel tamsayıların düzlemdeki temsillerine örnekler klasik kendine benzer kümeler kullanılarak verilmiştir (bkz. Şekil 1.4-Şekil 1.9).



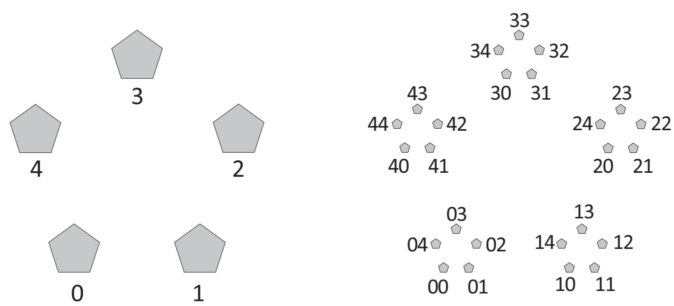
Şekil 1.4. *Düzlemde kendine benzer bir küme olarak* $\mathbb{Z}_3$



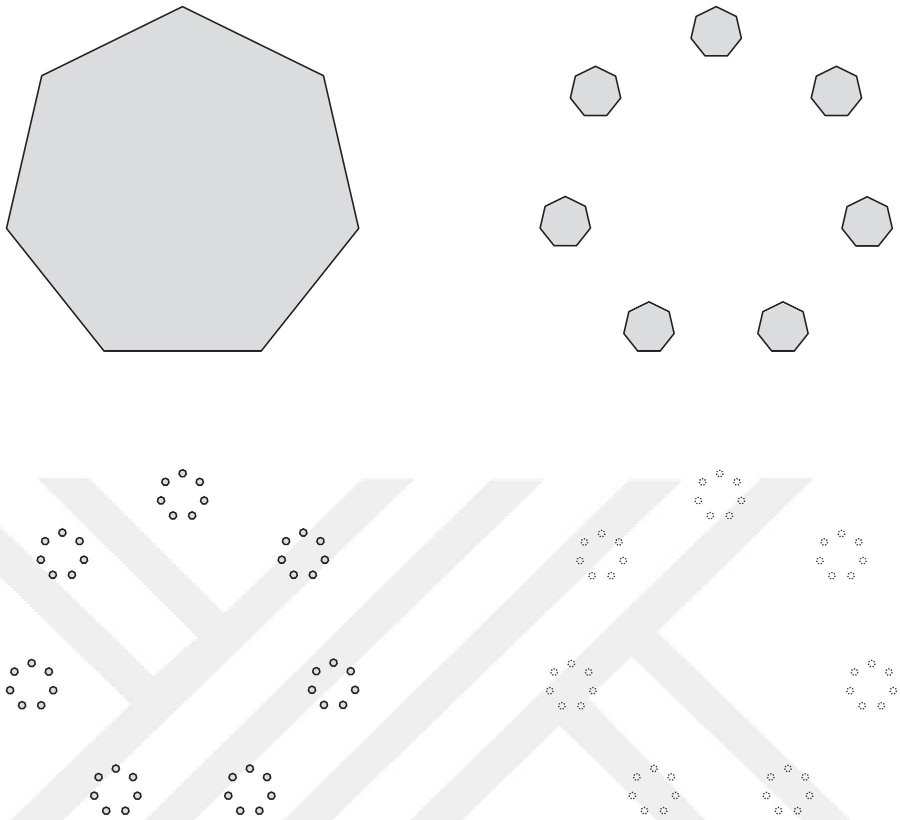
Şekil 1.5. $\mathbb{Z}_3$*'ün düzlemdeki bir modelinde noktaların koduna bağlı yaşadıkları altkümeler*



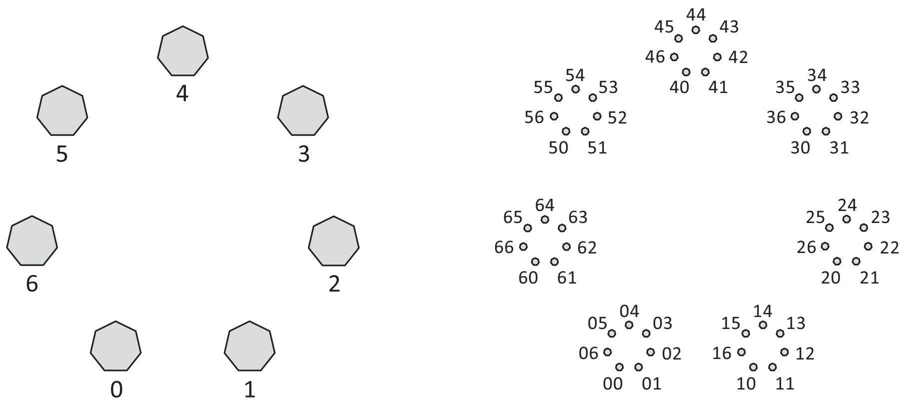
Şekil 1.6. *Düzlemde kendine benzer bir küme olarak* $\mathbb{Z}_5$



Şekil 1.7. $\mathbb{Z}_5$*'in düzlemdeki bir modelinde noktaların koduna bağlı yaşadıkları altkümeler*



Şekil 1.8. *Düzlemde kendine benzer bir küme olarak* $\mathbb{Z}_7$



Şekil 1.9. $\mathbb{Z}_7$*'nin düzlemdeki bir modelinde noktaların koduna bağlı yaşadıkları altkümeler*

Ayrıca, bu temsillerden farklı modelleme çalışmaları da mevcuttur. [5] çalışmasında Katok, her p asal sayısı için $\mathbb{Z}_p$'nin 2 boyutlu Öklidyen uzayda bir modelini, düzgün bir p-gen'in üzerinde tanımlı p-tane (benzerlik dönüşümü olan) büzülme ile belirlenen bir yinelemeli fonkiyon sisteminin atraktörü olarak vermiştir.

Tam bu noktada, $\mathbb{Z}_p$, p-sel tamsayılar metrik uzayları n-boyulu Öklidyen uzayların içine izometrik olarak gömülebilir mi sorusu gündeme gelebilir. Ancak standart metrikle donatılmış Öklidyen bir uzaya izometrik bir gömülme mümkün değildir. Detaylı bilgi için bkz. [8].

2. GROMOV-HAUSDORFF METRİĞİ

Bir metrik uzay verildiğinde, bu metrik uzaydaki iki farklı eleman arasındaki uzaklık metrik yardımı ile hesaplanabilir. Peki iki farklı metrik uzay verildiğinde, bu metrik uzaylar arasında anlamlı bir uzaklık kavramı tanımlanabilir mi?

Eğer verilen iki metrik uzay bir metrik uzayın farklı iki altkümesi ise, bu içinde yaşadıkları metrik uzayın metriği yardımı ile tek türlü belirli olan ve Hausdorff metrik olarak adlanrılan metrik yardımı ile bu mümkündür. Yani bir metrik uzayın farklı altkümeleri arasındaki uzaklığı hesaplayabiliriz.

2.1. Hausdorff Metriği

Bir metrik uzay (X, d) verildiğinde bu metrik uzayın boş olmayan tüm kompakt altkümelerini içeren kümeyi $\mathcal{H}(X)$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\mathcal{H}(X) := \{A \subset X \mid A \text{ kompakt ve } A \neq \emptyset\}$$

şeklinde tanımlanır ve $\mathcal{H}(X)$ üzerinde bir uzaklık tanımlamak mümkündür.

Tanım 2.1 (Hausdorff uzaklığı). (X, d) bir metrik uzay ve $A, B \in \mathcal{H}(X)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} d_H : \mathcal{H}(X) \times \mathcal{H}(X) &\to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ (A, B) &\mapsto d_H(A, B) = \max\{d(A, B), (B, A)\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan d_H fonksiyonuna *Hausdorff uzaklığı* denir.

Tanım 2.1'de A kümesinin B kümesine uzaklığı olan $d(A, B)$,

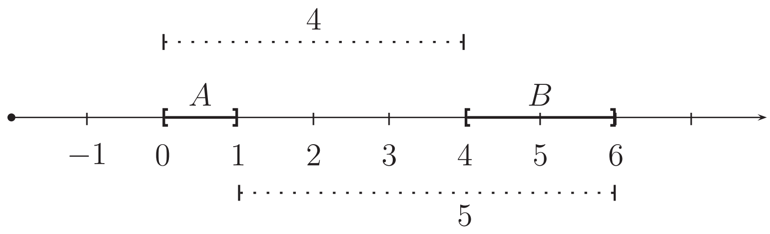
$$d(A, B) = \max\{d(a, B) \mid a \in A\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada ise A kümesinden bir noktanın B kümesine olan uzaklığı $d(a, B)$ ise

$$d(a, B) = \min\{d(a, b) \mid b \in B\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.2. Standart metrikle donatılmış $\mathbb{R}$'de A kümesi $[0, 1]$ aralığı, B kümesi de $[4, 6]$ aralığı olsun. A kümesinin B kümesine uzaklığı 5, öte yandan B'nin A kümesine uzaklığı ise 4 olarak kolayca hesaplanabilir. Bu durumda, bu iki kompakt küme arasındaki Hausdorff uzaklığı $\max\{4, 5\} = 5$ olarak bulunur.

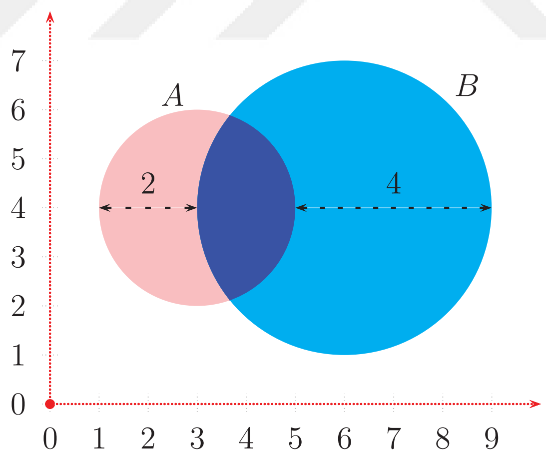


Şekil 2.1. *$A = [0, 1]$ ile $B = [4, 6]$ kümeleri arasındaki Hausdorff uzaklığı*

Örnek 2.3. $\mathbb{R}^2$'de A kümesi $(3, 4)$ merkezli ve 2 yarıçaplı bir daire, B kümesi de $(6, 4)$ merkezli ve 3 yarıçaplı bir daire olsun. Bu iki kompakt kümenin Hausdorff uzaklığını hesaplayalım. Şekilden de açıkça görüldüğü üzere $d(A, B) = 2$ ve $d(B, A) = 4$ dür. Bu durumda

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} = 4$$

olarak bulunur.

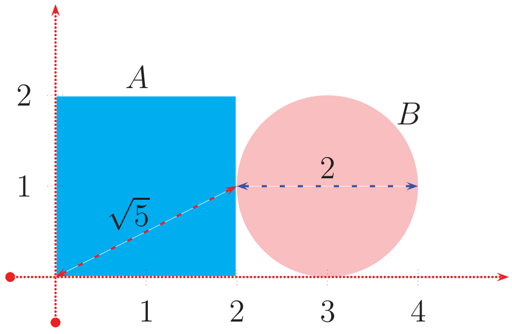


Şekil 2.2. *2 yarıçaplı A ile 3 yarıçaplı B daireleri arasındaki Hausdorff uzaklığı*

Örnek 2.4. $\mathbb{R}^2$'de A kümesi şekilde gösterildiği üzere 2 birim kenara sahip bir kare, B kümesi de $(3, 1)$ merkezli ve 1 yarıçaplı bir daire olsun. Bu iki kompakt kümenin Hausdorff uzaklığı nedir?

Yine şekilden hesaplanabileceği üzere $d(A, B) = \sqrt{5}$ ve $d(B, A) = 2$ dir. Bu durumda

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} = \sqrt{5}$$



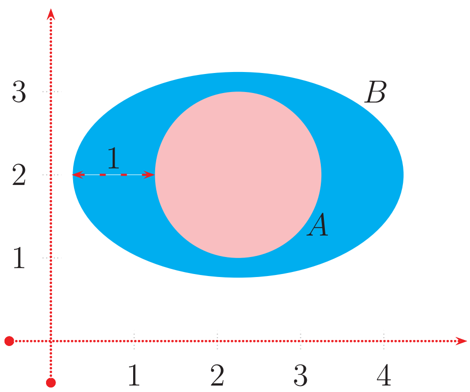
Şekil 2.3. *A karesi ile 1 yarıçaplı B dairesi arasındaki Hausdorff uzaklığı*

olarak bulunur.

Örnek 2.5. $\mathbb{R}^2$'de A kümesi $(2,25, 2)$ merkezli ve 1 yarıçaplı bir daire, B kümesi aynı merkezli ve eksenleri sırasıyla 2 ve $1,25$ olan bir elips olsun.
A kümesi B kümesinin altkümesi olduğu için $d(A, B) = 0$ olduğu açıktır ve $d(B, A) = 1$ olduğu da şekilden görülmektedir. Sonuç olarak

$$h(A, B) = \max\{d(A, B), d(B, A)\} = 1$$

şeklinde bulunur.



Şekil 2.4. *A dairesi ile B elipsi arasındaki Hausdorff uzaklığı*

Uyarı 2.6. Hausdorff uzaklığının yukarıda verilen tanımı ile pratikte hesap yapmak oldukça zordur. İki küme arasındaki Hausdorff uzaklığını daha iyi ve geometrik olarak yansıtan alternatif bir tanıma yer vermek yararlı olacaktır.

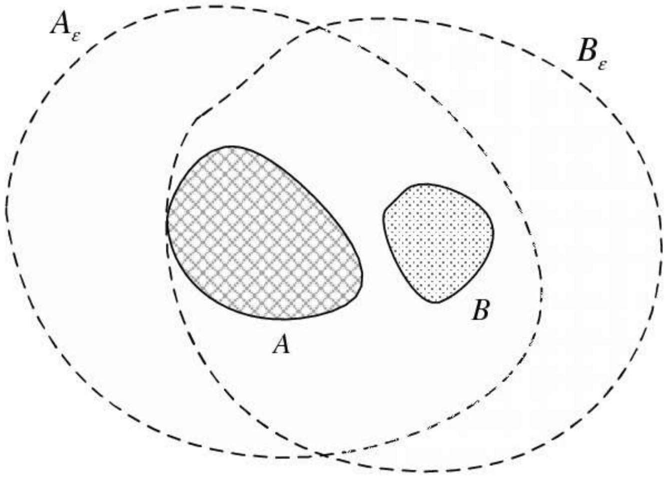
(X, d) metrik uzayı, $A \in \mathcal{H}(X)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. A kümesinin ε-komşuluğu

$$U_r(A) = \{x \in X : d(x, A) < r\}$$

olmak üzere A ile B arasındaki *Hausdorff uzaklığı* uzaklığı $d_H(A,B)$, $A \subset U_\varepsilon(B)$ ve $B \subset U_\varepsilon(A)$ koşulunu sağlayan en küçük pozitif ε sayısı olarak da tanımlanabilir, yani

$$d_H(A,B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset U_r(B) \text{ ve } B \subset U_r(A)\}$$

şeklinde de tanımlanabilir (bkz. Şekil 2.5).



Şekil 2.5. *A ve B kümelerinin ε komşulukları*

Yardımcı Teorem 2.7. *(X,d) metrik uzayı ve $A,B,C \in \mathcal{H}(X)$ verilsin. Bu durumda Tanım 2.1'de tanımlanmış d_H fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.*

1. $d_H(A,A) = 0$
2. $d_H(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
3. $d_H(A,B) = d_H(B,A)$
4. $d_H(A,C) \leq d_H(A,B) + d_H(B,C)$

Sonuç 2.8. *Lemma 2.7 yardımıyla d_H fonksiyonunun bir metrik olduğu görülür. Yani $(\mathcal{H}(X), d_H)$ bir metrik uzaydır.*

Peki, verilen iki metrik uzay, aynı bir metrik uzayın altkümesi değillerse bu metrik uzaylar arasındaki uzaklığa nasıl anlam kazandırılabilir?

2.2. Gromov-Hausdorff Metriği

Aynı metrik uzayın altkümeleri olmayan iki farklı metrik uzayın aralarındaki uzaklığı, bu iki metrik uzayı bir başka metrik uzayın içine gömerek hesaplamak anlamlı olabilir. Bir metrik uzayı başka bir metrik uzaya izometrik olarak gömmek her zaman mümkün olmasa da ε-izometri gibi yardımcı argümanlar ve belirli kısıtlamalar ile uzaklık koruyan bir biçimde gömmek mümkündür. Verilen metrik uzayların aralarındaki uzaklığı, bu uzayların izometrik olarak gömülebildiği metrik uzaylar içinde, önceki alt bölümde tanımlanan anlamda, bu gömülmelerinin arasındaki uzaklık olarak hesaplayabiliriz.

2.2.1. Gromov-Hausdorff uzaklığı, distorsiyon ve ε-izometri

(X, d_X) ve (Y, d_Y) iki metrik uzayı verilsin. Bu iki metrik uzayın diğer metrik uzaylara gömülmelerini düşünelim. Hatta bu iki metrik uzayın aynı bir Z ile göstereceğimiz metrik uzayın içine (uzaklığı koruyacak şekilde, yani izometrik olarak) gömüldüğünü varsayalım. Verilen herhangi iki metrik uzayın birlikte yaşadıkları bir uzay her zaman var mıdır? Öncelikle bu şekilde bir Z metrik uzayının her zaman var olduğunu belirtelim.

Uyarı 2.9. (X, d_X) ve (Y, d_Y) iki metrik uzayı verilsin. X ve Y uzaylarının ayrık birleşimleri olan $X \times Y$ uzayını ve üzerinde doğal olarak tanımlanan maksimum metriğini düşünelim. Verilen her $(x, y), (x', y')$ noktaları için

$$d((x, y), (x', y')) := \max\{d_X(x, x'), d_Y(y, y')\}$$

metriği ile $(X \times Y, d)$ bir metrik uzaydır ve burada X ve Y uzaylarının aralarındaki uzaklığı hesaplamak mümkündür.

(X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylarının (izometrik olarak) gömülü olduğu metrik uzaylardaki Hausdorff uzaklarının infimumu alınarak bu metrik uzaylar arasında bir metrik (Gromov-Hausdorrf metriği) şu şekilde tanımlanabilir:

Tanım 2.10. (X, d_X) ve (Y, d_Y) iki metrik uzay olsun. X ile Y metrik uzayları arasındaki *Gromov-Hausdorff uzaklığı*, $d_{GH}(X, Y)$,

$$d_{GH}(X, Y) = \inf_{r>0}\{d_H(X', Y') < r : X', Y' \subset Z \text{ metrik uzay}, X \text{ ile } X', Y \text{ ile } Y' \text{ izometrik}\}$$

şeklinde tanımlanır.

[1] çalışmasında detayları bulunabilecek olan bu uzaklık kavramı ile ilgili, yine aynı çalışmada aşağıdaki bazı önemli tespitlerin detaylarına ulaşılabilinir.

Yardımcı Teorem 2.11. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzayları verilsin. Eğer bu uzaylar sınırlı ise, o zaman $d_{GH}(X, Y) < \infty$.*

Yardımcı Teorem 2.12. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylar ve çap $X < \infty$ olsun. Bu durumda $d_{GH}(X, Y) \geq \frac{1}{2}|$ çap $X -$ çap $Y|$ 'dir.*

Yardımcı Teorem 2.13. *P tek noktalı bir uzay olsun. Bu durumda herhangi bir (X, d_X) metrik uzayı için $d_{GH}(X, P) = \frac{1}{2} diamX$ 'dir.*

Önerme 2.14. *d_{GH} üçgen eşitsizliğini sağlar. Herhangi (X_1, d_{X_1}), (X_2, d_{X_2}), $(X_3,\ d_{X_3})$ metrik uzayları için*

$$d_{GH}(X_1, X_3) \leq d_{GH}(X_1, X_2) + d_{GH}(X_2, X_3)$$

geçerlidir.

İki metrik uzay arasında Tanım 2.10'deki gibi tanımlanan uzaklığı pratikte hesaplamak oldukça güçtür. Ama, bu uzaklık için en azından bir üst sınır veren bazı önemli sonuçlar bulunmaktadır (detaylı bilgi için bkz. [1]). Bunun için önce "distorsiyon" ve "ε izometri" kavramlarını tanımlayalım.

Tanım 2.15 (distorsiyon)**.** (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzayları verilsin. $f : X \to Y$ dönüşümünün distorsiyonu (bozulması)

$$disf := \sup_{x,y \in X} \{|\ d_X(x, y) - d_Y(f(x), f(y))\ |\}$$

olarak tanımlanır ve $disf$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.16 (ε-net)**.** (X, d_X) bir metrik uzay ve $\varepsilon > 0$ olsun. Eğer $\forall x \in X$ için $d_X(x, A) \leq \varepsilon$ ise $A \subset X$ kümesine bir $\varepsilon - net$ denir.

Tanım 2.17 (ε-izometri)**.** (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzayları ve $\varepsilon > 0$ olsun. Sürekli olması gerekmeyen bir $f : X \to Y$ dönüşümü aşağıdaki koşulları sağladığında ε-izometri olarak adlandırılır:

1. $disf \leq \varepsilon$,
2. $f(X) \subset Y$ bir ε-net.

Tanım 2.18. X ve Y iki küme olmak üzere, X ve Y arasında bir $\mathcal{R} \subset X \times Y$ çok değerli kısmi dönüşümü (correspondence) şu şekilde tanımlanır:

1. $\forall x \in X$ için $\exists y \in Y$ vardır öyle ki $(x, y) \in \mathcal{R}$

2. $\forall y \in Y$ için $\exists x \in X$ vardır öyle ki $(x, y) \in \mathcal{R}$

Örnek 2.19. X ve Y kümeleri verilsin. $f : X \to Y$ örten dönüşümü X ile Y arasında bir $\mathcal{R}$ belirler:

$$\mathcal{R} = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\}$$

Buna f fonksiyonuna göre belirli çok değerli kısmi dönüşüm denir.

Örnek 2.20. X ve Y kümeleri verilsin. Z herhangi bir küme olmak üzere $f : Z \to X$ ve $g : Z \to Y$ örten dönüşümleri X ile Y arasında bir $\mathcal{R}$ belirler:

$$\mathcal{R} = \{(f(z), g(z)) \,|\, z \in Z\}$$

Tanım 2.21. $\mathcal{R}$, (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzayları arasında tanımlanmış olsun. $\mathcal{R}$'nin distorsiyonu

$$dis\mathcal{R} := \sup\{|\, d_X(x, x') - d_Y(y, y') \,| : (x, y), (x', y') \in \mathcal{R}\}$$

şeklindedir.

Yardımcı Teorem 2.22. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzayları arasında Örnek 2.19'deki gibi tanımlanan bir $\mathcal{R}$ verilsin. Bu durumda*

$$dis\mathcal{R} = disf$$

olduğu kolayca görülebilir.

Kanıt. $f : X \to Y$ herhangi bir örten dönüşüm ve $\mathcal{R} = \{(x, f(x)) \,|\, x \in X\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} dis\mathcal{R} &= \sup_{x,y \in X} \{|\, d_Y(y, y') - d_X(x, x') \,|\} \\ &= \sup_{x,y \in X} \{|\, d_Y(f(x), f(x')) - d_X(x, x') \,|\} \\ &= disf \end{aligned}$$

elde edilir. □

Yardımcı Teorem 2.23. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzayları arasında Örnek 2.20 şeklinde tanımlanan bir $\mathcal{R}$ verilsin. Bu durumda*

$$dis\mathcal{R} = \sup_{z,z' \in X} \{|\, d_x(f(z), f(z')) - d_Y(g(z), g(z')) \,|\}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Kanıt. $f : Z \to X$ ve $g : Z \to Y$ örten dönüşümler ve $\mathcal{R} = \{(f(z), g(z)) \,|\, z \in Z\}$ olmak üzere,

$$dis\mathcal{R} := \sup\{\mid d_X(x,x') - d_Y(y,y') \mid : (x,y),(x',y') \in \mathcal{R}\}$$

$(x,y) \in \mathcal{R}$ olduğundan $x = f(z), y = g(z)$ ve $(x',y') \in \mathcal{R}$ olduğundan $x' = f(z')$, $y' = g(z')$ olacak şekilde $z, z' \in Z$ vardır. O halde

$$dis\mathcal{R} = \sup_{z,z' \in X}\{\mid d_x(f(z), f(z')) - d_Y(g(z), g(z')) \mid\}$$

elde edilir. □

Yardımcı Teorem 2.24. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzayları arasında bir $\mathcal{R}$ verilsin. Bu durumda $dis\mathcal{R} = 0$ olması $\mathcal{R}$'nin , X ile Y arasında izometri ile belirli bir çok değerli kısmi dönüşüm olması durumlarını birbirlerini gerektirir.*

Kanıt. X ile Y arasında ϕ fonksiyonuna göre belirli bir $\mathcal{R}$ ve $dis\mathcal{R} = 0$ olsun. $\phi : X \to Y$ dönüşümünün bir izometri olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} dis\mathcal{R} &:= \sup\{\mid d_X(x,x') - d_Y(y,y') \mid : (x,y),(x',y') \in \mathcal{R}\} \\ &= \sup\{\mid d_X(x,x') - d_Y(\phi(x),\phi(x')) \mid : x,x' \in X\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Bu durumda $\forall x, x' \in X$ için

$$\begin{aligned} \mid d_X(x,x') - d_Y(\phi(x),\phi(x')) \mid &= 0 \\ d_X(x,x') - d_Y(\phi(x),\phi(x')) &= 0 \end{aligned}$$

ve buradan da

$$d_X(x,x') = d_Y(\phi(x),\phi(x'))$$

elde edilir. Dolayısıyla ϕ dönüşümü uzaklık koruyan bir dönüşümdür. Aynı zamanda $\mathcal{R}$'nin kurulumundan dolayı ϕ dönüşümü örtendir. $\mathcal{R}$ Tanım (2.18) koşullarını sağladığından $\phi(x), \phi(x') \in Y$ için birer $x, x' \in X$ vardır. Ayrıca ϕ uzaklık koruyan bir dönüşüm olduğundan eğer $\phi(x) = \phi(x')$ ise

$$d_X(x,x') = d_Y(\phi(x),\phi(x')) = 0$$

ve dolayısıyla $x = x'$ elde edilir. Bu durumda ϕ dönüşümü birebirdir. Böylece ϕ dönüşümü bir izometridir. $\phi : X \to Y$ izometri dönüşümü ve ϕ dönüşümüne bağlı $\mathcal{R}$ verilsin. $dis\mathcal{R} = dis f = 0$ olduğu açıktır. $\square$

Teorem 2.25. *(X, d_X) ve (Y, d_Y) herhangi iki metrik uzay olsun. Bu durumda*

$$d_{GH} = \frac{1}{2} \inf_{\mathcal{R}} dis\mathcal{R}$$

şeklindedir. Başka bir ifadeyle X ile Y metrik uzaylarının Gromov-Hausdorff anlamında uzaklığı X ile Y metrik uzayları arasındaki $dis\mathcal{R} < 2r$ olacak şekilde kurulan $\mathcal{R}$'lerin yarıçaplarının infimumudur ([1]).

Yardımcı Teorem 2.26. *(X, d_X), (Y, d_Y) ve (Z, d_Z) metrik uzaylar ve $\mathcal{R}_1$, X ile Y arasında; $\mathcal{R}_2$, Y ile Z arasında tanımlanmış olsun. Bu durumda $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_1$ ile $\mathcal{R}_2$'nin bileşimi olmak üzere*

$$\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 := \{(x, z) \in X \times Z \mid (x, y) \in \mathcal{R}_1 \text{ ve } (y, z) \in \mathcal{R}_2\}$$

şeklinde tanımlanır ve aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. *$\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$, X ile Z arasında Tanım (2.18) koşullarını sağlar.*
2. *$dis(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2) \leq dis\mathcal{R}_1 + dis\mathcal{R}_2$*

Sonuç 2.27. *([1], Corollary 7.3.28) (X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzayları ve $\varepsilon > 0$ olsun.*

1. *$d_{GH}(X, Y) < \varepsilon$ ise X'ten Y'ye bir 2ε-izometri vardır.*
2. *X'ten Y'ye bir ε-izometri varsa, $d_{GH}(X, Y) < 2\varepsilon$'dur.*

Kanıt. 1. X'ten Y'ye bir $\mathcal{R}$ için $dis\mathcal{R} < 2\varepsilon$ olsun ve her $x \in X$ için $(x, f(x)) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde bir $f(x) = y$ seçilsin. Bu şekilde bir $f : X \to Y$ dönüşümü tanımlanmış olur ve $dis f \leq dis\mathcal{R} < 2\varepsilon$ olduğu açıktır. $f(X)$'in Y içinde bir 2ε-net olduğunu görelim: $y \in Y$ için $(x, y) \in \mathcal{R}$ olacak şekilde $x \in X$ alalım. $(x, y) \in \mathcal{R}$ ve $(x, f(x)) \in \mathcal{R}$ olduğundan

$$d(y, f(x)) \leq d(x, x) + dis\mathcal{R} < 2\varepsilon$$

Böylece $d(y, f(x)) < 2\varepsilon$ elde edilir. Bu her $y \in Y$ için yapılabileceğinden $f(X)$, Y içinde bir 2ε-izometridir.

2. $f : X \to Y$ bir ε-izometri olsun. $\mathcal{R} \subset X \times Y$,

$$\mathcal{R} := \{(x, y) \in X \times Y \mid d_Y(y, f(x)) \leq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlansın. f bir ε-izometri olduğundan $f(X)$ Y'de bir ε-nettir. Böylece $\mathcal{R}$ Tanım (2.18) koşullarını sağlar. $(x, y), (x', y') \in \mathcal{R}$ olduğundan biri şuna sahiptir:

$$\begin{aligned} |d_Y(y, y') - d_X(x, x')| &\leq |d_Y(f(x), f(x')) - d_X(x, x')| + \\ &\quad d_Y(y, f(x)) + d_Y(y', f(x')) \\ &\leq disf + \varepsilon + \varepsilon \leq 3\varepsilon \end{aligned}$$

$dis\mathcal{R} \leq 3r$ olduğundan Teorem 2.25 gereği $d_{GH} \leq \frac{3}{2}r < 2\varepsilon$ elde edilir.

□

2.2.2. Gromov-Hausdorff metriği ve yakınsaklığı

Teorem 2.28. *Gromov-Hausdorff uzaklığı kompakt metrik uzayların izometri sınıfları üzerinde sonlu bir metrik tanımlar. Başka bir deyişle, negatif olmayan, simetrik, üçgen eşitsizliğini sağlayan ve dahası $d_{GH}(X, Y) = 0$ durumu ancak ve ancak X ile Y uzaylarının izometrik olması durumunu gerektiren bir metrik tanımlar ([1]).*

Kanıt. Bkz. [1]. □

Bir metrik olarak Gromov-Hausdorff metriği ile yakınsak kavramının bildiğimiz yakınsaklık kavramından aslında bir farkı yoktur. Standart yakınsaklık kavramına göre verilen dizinin terimlerinin yeterince ilerledikçe bir limit noktasına yığılarak bu limite yaklaşmalarını beklenir fakat Gromov-Hausdorff anlamında yakınsaklık dendiğinde dizi terimlerimizin bilinen metrik uzayların elemanları olarak değil, birer metrik uzay olduklarının göz ardı edilmemesi gerekir. Gromov-Hausdorff metriği ile terimleri birer metrik uzay olan dizilerin yığılma noktaları ve limitlerinin bulunabilmesi pratikte zor olsa da teorik olarak mümkündür. Artık kompakt metrik uzayların Gromov-Hausdorff uzayındaki yakınsak dizilerinden bahsedilebilir.

Tanım 2.29 (Gromov-Hausdorff Anlamında Yakınsaklık)**.** $\{X_n\}_{n\geq 1}$ kompakt metrik uzaylar dizisi ve X kompakt metrik uzayı verilsin. Eğer $n \to \infty$ iken $d_{GH}(X_n, X) \to 0$ ise, $\{X_n\}_{n\geq 1}$ kompakt metrik uzaylar dizisi X kompakt metrik uzayına yakınsar denir ve $\{X_n\} \xrightarrow{GH} X$ ile gösterilir.

2.2.3. Noktalı metrik uzayların Gromov-Hausdorff anlamında yakınsaklığı

[1] çalışmasında kompakt olmayan noktalı metrik uzayların Gromov-Hausdorff anlamında yakınsaması için bir tanım verilmiştir. Noktalı metrik uzaylar dizisinin yakınsaması şu şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 2.30. (X, p) noktalı metrik uzay ve $\{(X_n, p_n)\}_{n=1}^{\infty}$ noktalı metrik uzay dizisi verilsin. $\{(X_n, p_n)\}_{n=1}^{\infty}$ noktalı metrik uzay dizisinin Gromov-Hausdorff anlamında (X, p) noktalı metrik uzayına aşağıdaki koşullar sağlandığında yakınsar: $\forall r > 0$ ve $\varepsilon > 0$ için bir n_0 vardır öyle ki $\forall n > n_0$ için (sürekli olması gerekmeyen) aşağıdaki koşulları sağlayan bir $f : B_r(p_n) \to X$ dönüşümü vardır:

1. $f(p_n) = p$
2. $disf < \varepsilon$
3. $B_{r-\varepsilon}(p) \subset U_\varepsilon\left(f(B_r(p_n))\right).$

3. GROMOV-HAUSDORFF ANLAMINDA p-SEL TAMSAYILARIN LİMİTİ

p-asal sayısının değeri büyüdükçe birinci seviye altkümelerin sayısının artması ve birinci seviye altkümelerin aralarındaki p-sel uzaklığın her p asal sayısı için hep 1 olması, d_p p-sel normun ürettiği metrik olmak üzere $\{(\mathbb{Z}_p, d_p)\}_p$ dizisinin p sonsuza giderken sonsuz noktalı ayrık metrik uzaya yakınsamasını düşünmek çok doğaldır. Ancak izleyen alt bölümde görüldüğü üzere Gromov-Hausdorff anlamında maalesef bu mümkün olmamaktadır.

3.1. p-sel Tamsayılar Arasındaki Gromov-Hausdorff Uzaklığı ve Bu Anlamda Yakınsaklığı

Öncelikle $(\mathbb{Z}_2, d_2)$ ile $(\mathbb{Z}_3, d_3)$ kompakt metrik uzaylarının içinde izometrik olarak yaşadığı akla gelen ilk uzay olan ve $\mathbb{Z}_2$ ile $\mathbb{Z}_3$ metrik uzaylarının ayrık bileşimleri olan $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ metrik uzayını düşünelim. Bu birleşim (aslında çarpım) uzayında doğal olarak yaşayan maksimum metriği yardımıyla $\mathbb{Z}_2$ ile $\mathbb{Z}_3$ arasındaki Gromov-Hausdorff uzaklığına bir üst sınır bulunabilir.

a, 2-sel ve b, 3-sel bir tamsayı olsun. 2-sel bir tamsayı $\{0, 1\}$ harflerinden, 3-sel bir tamsayı ise $\{0, 1, 2\}$ harflerinden oluşan birer sonsuz uzunluklu kelime olduklarından $i, j \geq 0$, $a_i \in \{0, 1\}$ ve $b_j \in \{0, 1, 2\}$ olmak üzere

$$a = a_0 a_1 a_2 \ldots \text{ ve } b = b_0 b_1 b_2 \ldots$$

p-sel temsillerinden de kolayca görülebildiği gibi iki p-sel sayının aralarındaki uzaklığı belirleyen şey aynı olmayan ilk p-sel basamaklarıdır. Yani eğer $a, a' \in \mathbb{Z}_2$ 2-sel tamsayılarının ilk $n-1$ basamağı aynı, n. basamakları farklı ise aralarındaki p-sel uzaklıkları $\frac{1}{2^n}$'dir. Benzer şekilde $b, b' \in \mathbb{Z}_3$ 3-sel tamsayılarının ilk $m-1$ basamağı aynı, m. basamakları farklı ise aralarındaki p-sel uzaklıkları $\frac{1}{3^m}$'dir. Bu arada $(a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ olmak üzere,

$$d((a, b), (a', b')) = \max\{d_2(a, a'), d_3(b, b')\}$$

şeklinde olduğundan, $d_2(a, a') \leq 1$ ve $d_3(b, b') \leq 1$ olduğu açıktır. Böylece

$$d((a, b), (a', b')) \leq 1$$

elde edilir, ve buradan da

$$d_{GH}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3) \leq 1$$

sonucuna ulaşılır.

$\mathbb{Z}_3$ içerinde birinci seviye altkümeler arasındaki 3-sel uzaklık 1, ikinci seviye altkümeler arasındaki 3-sel uzaklık $\frac{1}{3}$'tür. Eğer $\mathbb{Z}_3$ içerinde iki 3-sel tamsayı $n-1$. seviye altkümeye kadar aynı altküme içinde, n. seviyede farklı altkümelerde yer alıyorsa aralarındaki 3-sel uzaklık $\frac{1}{3^n}$'dir, ki bu durum verilmiş olan iki 3-sel tamsayının 3-sel temsillerinin n. basamağının aynı olması demektir. Aynı şekilde 5-sel tamsayılar içinde birinci seviye altkümeler arasındaki 5-sel uzaklık 1, ikinci seviye altkümeler arasındaki 5-sel uzaklık $\frac{1}{5}$ ve n. basamak altkümeler arasındaki 5-sel uzaklık $\frac{1}{5^n}$'dir. Bu durumda yine yukarıdaki durumda olduğu gibi $\mathbb{Z}_3$ ve $\mathbb{Z}_5$ arasındaki Gromov-Hausdorff uzaklığı 1 ile üstten sınırlıdır.

Bu durum $p \neq q$ olan her asal sayı için geçerlidir. Yani $\mathbb{Z}_p$ ile $\mathbb{Z}_q$ arasındaki Gromov-Hausdorff uzaklığı her zaman 1 ile üstten sınırlıdır. Yukarıda $p = 2$ ve $q = 3$ için incelenen durum genellenirse, $i, j \geq 0$ ve $a_i, b_j \in \{0, 1, \dots p-1\}$ ve olmak üzere a, b p-sel tamsayılarının

$$a = a_0a_1a_2\dots \text{ ve } b = b_0b_1b_2\dots$$

p-sel temsillerinden de kolayca görülebildiği gibi bu iki p-sel sayının aralarındaki uzaklığı belirleyen durum aynı olmayan ilk p-sel basamaklarıdır. Yani eğer $a, b \in \mathbb{Z}_p$ p-sel tamsayılarının ilk $n-1$ basamağı aynı, n. basamakları farklı ise aralarındaki p-sel uzaklıkları $\frac{1}{p^n}$'dir.

$\mathbb{Z}_p$ ile $\mathbb{Z}_q$ uzaylarının izometrik olarak içinde yaşadığı uzayları $\mathcal{Z}$ ile gösterelim.

$$d_{GH}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q) = \inf_{(\mathcal{Z}, d_{\mathcal{Z}})} \{d_H(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q) \mid \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q \subset \mathcal{Z}\}.$$

Doğal olarak $\mathcal{Z} = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ olarak alınırsa,

$$d_H(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q) = \max\{d_p(a_1, a_2), d_q(b_1, b_2) : (a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q\} \leq 1$$

olduğu açıktır. Böylece

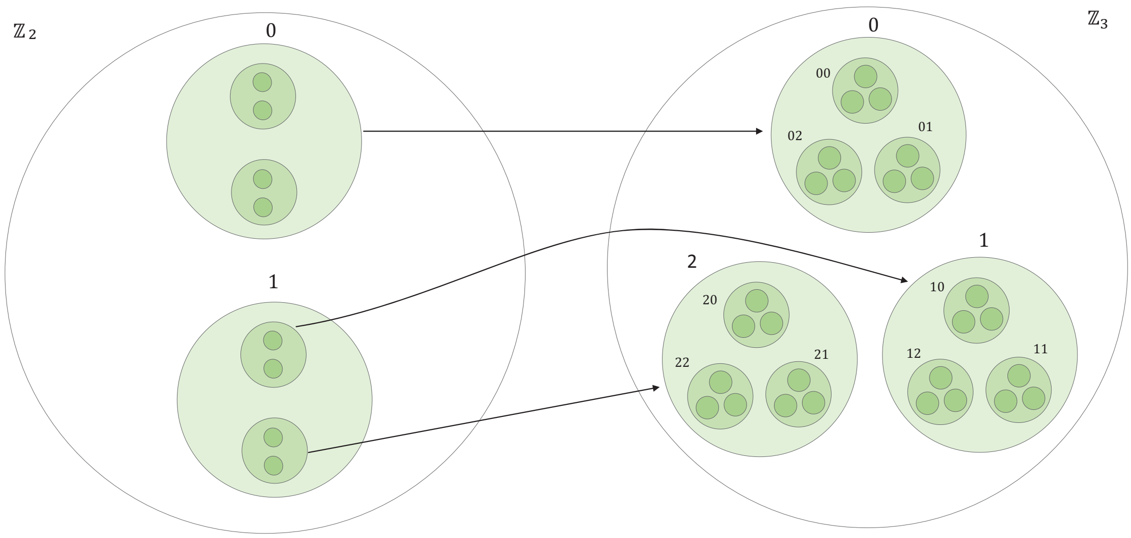
$$d_{GH}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q) \leq 1$$

elde edilir ve $\mathbb{Z}_p$ ile $\mathbb{Z}_q$ arasındaki Gromov-Hausdorff uzaklığı 1 ile üstten sınırlandırılmış olur.

$\mathbb{Z}_p$ ile $\mathbb{Z}_q$ arasındaki Gromov-Hausdorff uzaklığını alttan sınırlamak mümkün mü?

$\mathbb{Z}_p$ ile $\mathbb{Z}_q$ arasındaki Gromov-Hausdorff uzaklığını alttan sınırlayabilmek için önceki bölümde verilmiş olan Sonuç 2.27(2) sonucunu kullanabiliriz. Verilen iki metrik uzay arasında eğer bir ε-izometri var ise, o zaman bu iki metrik uzayın aralarındaki Gromov-Hausdorff uzaklıkları 2ε ile üstten sınırlanmaktadır. Bu önermenin tersini kullanarak eğer verilen metrik uzaylar arasında bir ε-izometri yazılamayacağı görülürse, o zaman aralarındaki Gromov-Hausdorff uzaklığının $\frac{\varepsilon}{2}$ ile alttan sınırlanacağı söylenebilir.

Örnek 3.1. Öncelikle $\mathbb{Z}_2$ ile $\mathbb{Z}_3$ arasında bir $\frac{1}{3}$-izometri yazılamayacağını görelim. Bir $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_3$ fonksiyonunu $\frac{1}{3}$-izometri olabilmesi için Tanım (2.17) gereğince $disf \le \frac{1}{3}$ ve $f(\mathbb{Z}_2) \subset \mathbb{Z}_3$ bir $\frac{1}{3}$-net olmalıdır. Öncelikle $f(\mathbb{Z}_2), \mathbb{Z}_3$ içinde bir $\frac{1}{3}$-net olacak şekilde bir f tanımlamaya çalışalım. Bu durumda $\mathbb{Z}_2$ içindeki birinci seviye 0- altkümesini $\mathbb{Z}_3$ içindeki birinci seviye 0-altkümesine, $\mathbb{Z}_2$ içindeki birinci seviye 1-altkümesini ise içindeki ikinci seviye 10 ve 11 altkümelerini $\mathbb{Z}_3$ içindeki birinci seviye 1 ve 2 altkümelerine gönderelim (bkz. Şekil 3.1). Böylece birinci seviye altkümeler açıkta bir 2-sel sayı kalmadan $\mathbb{Z}_3$ içine f ile gönderilmiş oldu. Fakat burada dikkat edilmesi gereken husus $disf = \frac{1}{2}$ olduğundan bir $\frac{1}{3}$-net olma koşuluna ulaşmaya çalışırken $disf \le \frac{1}{3}$ olma koşulunun sağlanamamasıdır.



Şekil 3.1. *$\mathbb{Z}_2$'den $\mathbb{Z}_3$'e bir fonksiyon*

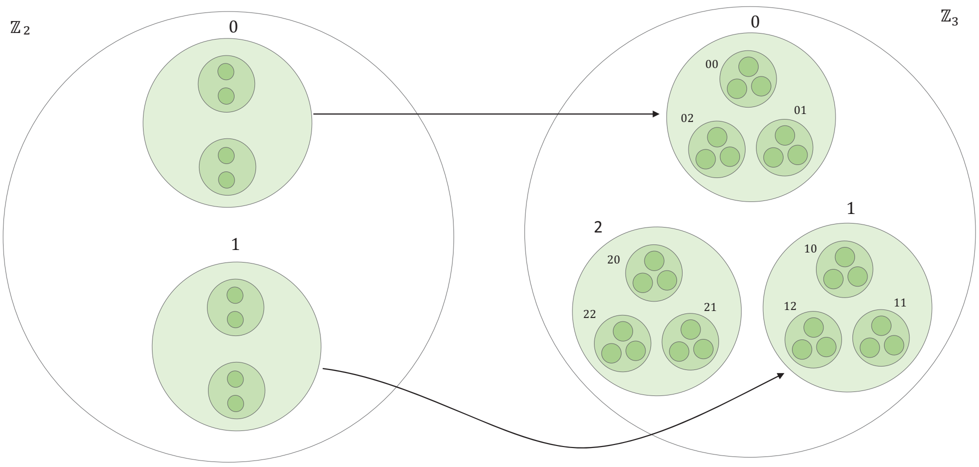
O halde $disf \le \frac{1}{3}$ koşulunu sağlayan bir f fonksiyonu için $f(\mathbb{Z}_2) \subset \mathbb{Z}_3$ bir $\frac{1}{3}$-net olabilir mi inceleyelim:

$\mathbb{Z}_2$ içerisindeki birinci seviye 0-altkümesini, $\mathbb{Z}_3$ içerisindeki birinci seviye 0-altkümesine, $\mathbb{Z}_2$ içerisindeki birinci seviye 1-altkümesini, $\mathbb{Z}_3$ içerisindeki birinci seviye 1-altkümesine gönderelim (bkz. Şekil 3.2). Alt seviye altkümelerinde de, aynı şekilde 00-altkümesi, 00-altkümesine, 01-altkümesi de 0-altkümesi içindeki 01-altkümesine gitsin. Kelimelerin uzunluğu arttıkça da bu kuralla devam edelim. Bu şekilde tanımlanan f fonksiyonunun distorsiyonu $disf \le \frac{1}{3}$ koşulunu sağlamaktadır fakat $f(\mathbb{Z}_2)$

kümesi $\mathbb{Z}_3$ içerisinde bir 1-nettir. Bu yüzden $\mathbb{Z}_2$ ile $\mathbb{Z}_3$ arasında bir $\frac{1}{3}$-izometri yazılamayacağı hemen söylenebilir. Böylece

$$d_{GH}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3) \leq \frac{1}{6}$$

sonucu elde edilir.



Şekil 3.2. *$\mathbb{Z}_2$'den $\mathbb{Z}_3$'e distorsiyonu koruyan bir fonksiyon*

Örnek 3.2. Benzer şekilde $\mathbb{Z}_3$ ile $\mathbb{Z}_5$ arasında $\frac{1}{2}$-izometri yazılamaz.

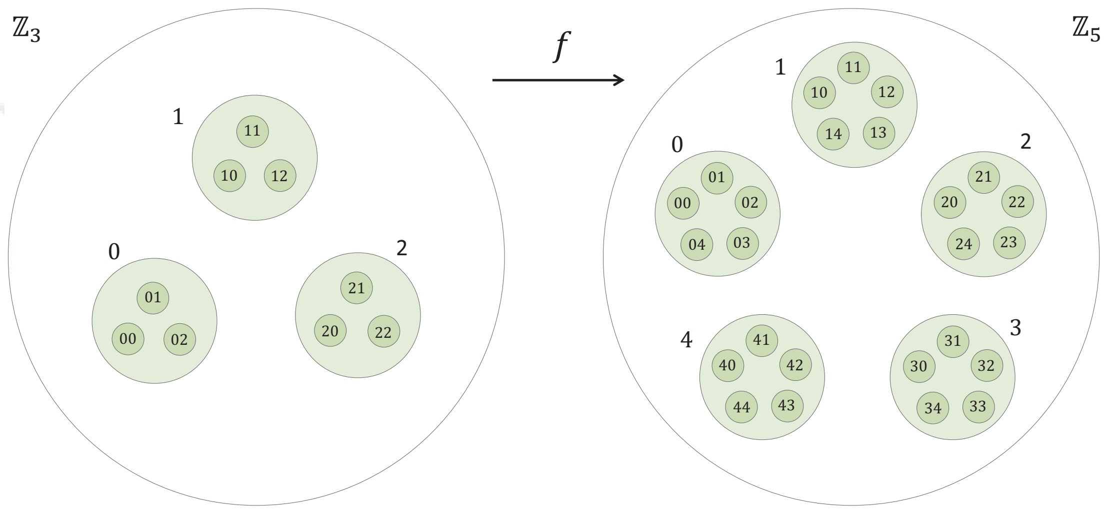
Bir $f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_5$ fonksiyonunu $\frac{1}{2}$-izometri olabilmesi için Tanım (2.17) gereğince $disf \leq \frac{1}{2}$ ve $f(\mathbb{Z}_3) \subset \mathbb{Z}_5$ bir $\frac{1}{2}$-net olmalıdır. Öncelikle $f(\mathbb{Z}_3), \mathbb{Z}_5$ içinde bir $\frac{1}{2}$-net olacak şekilde bir f tanımlamaya çalışalım. Bu durumda $\mathbb{Z}_3$ içindeki birinci seviye 0- altkümesini $\mathbb{Z}_5$ içindeki birinci seviye 0-altkümesine, $\mathbb{Z}_3$ içindeki birinci seviye 1- altkümesini $\mathbb{Z}_5$ içindeki birinci seviye 1-altkümesine, $\mathbb{Z}_3$ içindeki birinci seviye 2-altkümesini ise içindeki ikinci seviye 20, 21 ve 22 altkümelerini $\mathbb{Z}_5$ içindeki birinci seviye 3 ve 4 altkümelerine gönderelim. Böylece birinci seviye altkümeler açıkta bir 3-sel sayı kalmadan $\mathbb{Z}_5$ içine f ile gönderilmiş oldu (bkz. Şekil 3.3). Fakat burada dikkat edilmesi gereken husus $disf = \frac{2}{3}$ olduğundan bir $\frac{1}{2}$-net olma koşuluna ulaşmaya çalışırken $disf \leq \frac{1}{2}$ olma koşulunun sağlanamamasıdır.

O halde $disf \leq \frac{1}{3}$ koşulunu sağlayan bir f fonksiyonu için $f(\mathbb{Z}_3) \subset \mathbb{Z}_5$ bir $\frac{1}{2}$-net olabilir mi inceleyelim:

$\mathbb{Z}_3$ içerisindeki birinci seviye 0-altkümesini, $\mathbb{Z}_5$ içerisindeki birinci seviye 0-altkümesine, $\mathbb{Z}_3$ içerisindeki birinci seviye 1-altkümesini, $\mathbb{Z}_5$ içerisindeki birinci seviye 1-altkümesine, ve aynı şekilde $\mathbb{Z}_3$ içerisindeki birinci seviye 2-altkümesini, $\mathbb{Z}_5$ içerisindeki birinci seviye 2-altkümesine gönderelim. Alt seviye altkümelerinde de, aynı şekilde 00-altkümesi, 00-altkümesine, 01-altkümesi de 0-altkümesi içindeki 01-altkümesine gitsin. Kelimelerin uzunluğu arttıkça da bu kuralla devam edelim. Bu şekilde tanımlanan f fonksiyonunun distorsiyonu $disf \leq \frac{1}{3}$ koşulunu sağlamaktadır fakat $f(\mathbb{Z}_3)$ kümesi $\mathbb{Z}_5$ içerisinde bir 1-nettir. Bu yüzden $\mathbb{Z}_3$ ile $\mathbb{Z}_5$ arasında bir $\frac{1}{2}$-izometri yazılamayacağı hemen söylenebilir. Böylece

$$d_{GH}(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5) \leq \frac{1}{4}$$

sonucu elde edilir.



Şekil 3.3. *$\mathbb{Z}_3$'ten $\mathbb{Z}_5$'e bir fonksiyon*

Aslında, $p > 2$ ve $p < q$ olmak üzere $\mathbb{Z}_p$ ile $\mathbb{Z}_p$ arasında bir $\frac{1}{2}$-izometri yazılamaz. $p = 2$ özel durumunda ise $\mathbb{Z}_2$ kümesinin kendine has yapısı nedeni ile bir $\frac{1}{2}$-izometri yazılabilmektedir.

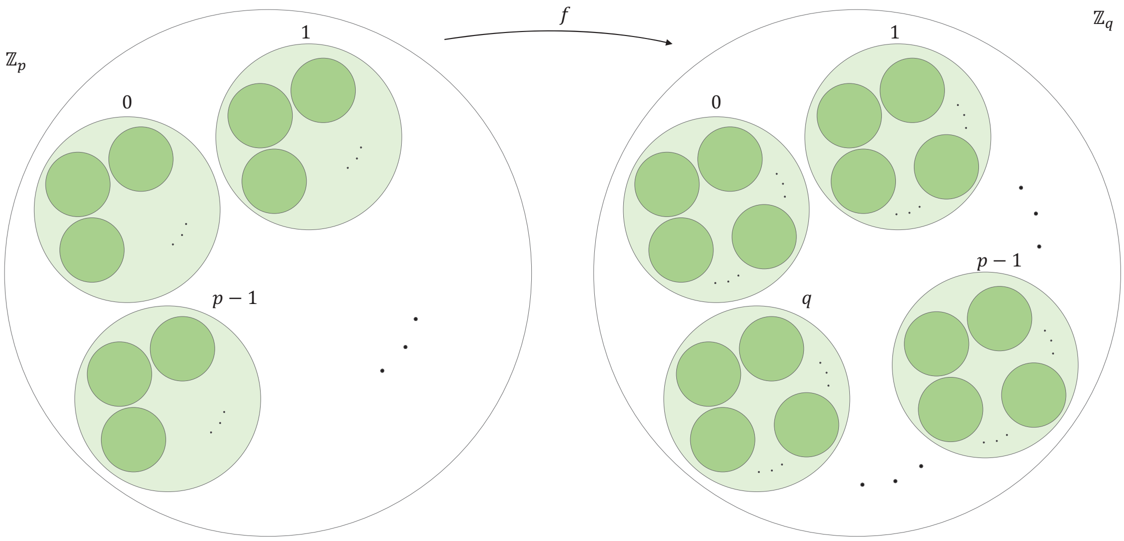
Olası tüm $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_q$ dönüşümlerinin $\frac{1}{2}$-izometri olmadığını görelim.

Böylece aynı zamanda $d_{GH}(X, Y) \geq \frac{1}{4}$ olduğu ve $\{(\mathbb{Z}_p, |\cdot|_p)\}_p$ metrik uzaylar dizisinin bir Cauchy dizisi olmadığı görülür.

Yardımcı Teorem 3.3. *$2 \neq p \neq q$ asal sayıları için $\mathbb{Z}_p$ ile $\mathbb{Z}_q$ arasındaki uzaklık $\frac{1}{4}$ ile alttan sınırlıdır.*

Kanıt. $p < q$ olmak üzere, $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_q$ herhangi bir dönüşüm olsun:

(i) $\forall i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ için $f(\mathbb{Z}_{p_i}) \subset \mathbb{Z}_{q_j}$ olacak şekilde sabit bir $j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ olsun. Bu durumda en az bir j^* için $\mathbb{Z}_{q_{j^*}}$ içinde $\mathbb{Z}_p$'den gelen bir eleman olamaz. Varsayalım ki $\forall j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ için $\exists i \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ olsun öyle ki $f(\mathbb{Z}_{p_i}) \subset \mathbb{Z}_{q_j}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{Z}_{p_i}$ topları f dönüşümü ile



Şekil 3.4. *$\mathbb{Z}_p$'den $\mathbb{Z}_q$'ya bir fonksiyon*

$\mathbb{Z}_{q_j}$ toplarını tamamen örtmüş olurdu ve $p = q$ olurdu. Öyleyse bir j^* için $\mathbb{Z}_{q_{j^*}}$ için $f(\mathbb{Z}_{p_i}) \nsubseteq \mathbb{Z}_{q_{j^*}}$ 'dir. Bu durumda $f(\mathbb{Z}_p)$ $\mathbb{Z}_q$ içinde ancak 1-net olabilir. $\forall j \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ için $d_q(\mathbb{Z}_{q_{j_1}}, \mathbb{Z}_{q_{j_2}}) = 1$ ve $\forall x \in \mathbb{Z}_p \setminus f(\mathbb{Z}_p)$ için $d_q(x, f(\mathbb{Z}_p) = 1$. Yani bu şekilde tanımlanan f dönüşümleri ancak 1-izometri olabilir. $\varepsilon = \frac{1}{2}$ için

$$d_q(x, f(\mathbb{Z}_p)) \nleq \frac{1}{2}$$

olduğundan $\frac{1}{2}$ -izometri tanımının ikinci koşulu sağlanmaz ve f bir $\frac{1}{2}$-izometri olamaz. Bu durumda $\mathbb{Z}_p$ ile $\mathbb{Z}_q$ arasında bir $\frac{1}{2}$ -izometri yazılamaz.

(ii) $\exists x, y \in \mathbb{Z}_{p_i}$ için $j \neq k$ ve $j, k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ olmak üzere $f(x) \in \mathbb{Z}_{q_j}$ ve $f(y) \in \mathbb{Z}_{q_k}$ olsun. Bu durumda $\forall i_1, i_2 \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ için $i_1 \neq i_2$ iken $d_p(\mathbb{Z}_{p_{i_1}}, \mathbb{Z}_{p_{i_2}}) = 1$ ve $x, y \in \mathbb{Z}_{p_i}$ için $d_p(x, y)$ en fazla $\frac{1}{p}$'dir. Öte yandan $j \neq k$ ve $j, k \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$ için $d_q(\mathbb{Z}_{q_j}, \mathbb{Z}_{q_k}) = 1$ Bu durumda f dönüşümünü distorsiyonu $disf > 1 - \frac{1}{p}$ olur. Böylece $p \geq 2$ olduğundan $disf > \frac{1}{2}$ elde edilir. $\frac{1}{2}$ -izometri tanımının ilk koşulu $disf \leq \frac{1}{2}$ sağlanmaz. Bu durumda $\mathbb{Z}_p$ ile $\mathbb{Z}_q$ arasında bir $\frac{1}{2}$ -izometri yazılamaz.

□

O halde verilen herhangi bir $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_q$ dönüşümünün $2 < p < q$ için bir $\frac{1}{2}$-izometri olması mümkün değildir. Bu durumda $d_{GH}(X, Y) \geq \frac{1}{4}$ elde edilir.
$\{(\mathbb{Z}_p, d_p)\}_p$ metrik uzaylar dizisi d_{GH} Gromov-Hausdorff anlamında bir Cauchy dizisi değildir. $\varepsilon = \frac{1}{4}$ için $d_{GH}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q) < \frac{1}{4}$ olacak şekilde bir $p, q > n_0, n_0 \in \mathbb{N}$ buluna-

maz. Yani standart Gromov-Hausdorff yakınsaklık tanımına göre $\{(\mathbb{Z}_p, d_p)\}_p$ dizisi yakınsamaz.

Aynı argümanı kullanarak herhangi bir p-asal sayısı için $\mathbb{Z}_p$ ile sonsuz noktalı ayrık metrik uzayın arasındaki Gromov-Hausdorff uzaklığına bir alt sınır belirlenebilir. $n \to \infty$ iken $d_{GH}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{N} \cup 0) < \varepsilon$ koşulunu sağlamayan $\exists \varepsilon > 0$ sayısı bulunabilir. Açıkça görülüyor ki $\{(\mathbb{Z}_p, d_p)\}_p$ metrik uzaylar dizisi d_{GH} Gromov-Hausdorff anlamında sonsuz noktalı ayrık metrik uzaya yakınsamaz.

3.2. Noktalı Metrik Uzaylar Olarak $\mathbb{Z}_p$ Uzaylarının Yakınsaklığı

$(\mathbb{Z}_l, d_p)$ metrik uzaylarının $0 \in \mathbb{Z}_p$ noktaları ile noktalı metrik uzay haline getirildiğini düşünelim. Bu durumda $\{(\mathbb{Z}_p, 0)\}$ noktalı metrik uzaylar dizisi, Tanım 2.30 anlamında yakınsak olamazlar. Yakınsaklık adayımız sonsuz noktalı ayrık metrik uzay, $(\mathbb{N} \cup 0, d_a)$ metrik uzayını 0 noktası ile noktalı metrik uzay haline getirelim. Bu durumda bir $r > 0$ ve $\varepsilon > 0$ verildiğinde uygun bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $n > n_0$ iken aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde bir $f : B_r(0) \to \mathbb{N} \cup 0$ dönüşümü tanımlamaya çalışalım:

1. $f(p_n) = f(0) = 0$
2. $disf < \varepsilon$
3. $B_{r-\varepsilon}(0) \subset U_\varepsilon(f(B_r(p_n))) = U_\varepsilon(f(B_r(0)))$

Burada dikkat edilmesi gereken husus, $r - \varepsilon > 1$ olduğunda $\mathbb{N} \cup \{0\}$ içinde 0 merkezli $r - \varepsilon$ yarıçaplı yuvarının tüm uzay gelmesi ve herhangi bir $(\mathbb{Z}_p, 0)$ için $f(B_r(0))$'ın küçük bir komşuğunun içinde kalamıyor olmasıdır. $i.$ ve $ii.$ koşullarını sağlayan bir f dönüşümü keyfi verilen $r, \varepsilon > 0$ sayıları için $iii.$ koşulunu her zaman sağlamadığından $\{(\mathbb{Z}_p, 0)\}$ noktalı metrik uzaylar dizisi sonsuz noktalı ayrık metrik uzaya Tanım 2.30 anlamında yakınsayamaz.

Bir $r > 0$ ve $\varepsilon > 0$ verilmiş olsun. Bu durumda bir $f(0) = 0$ ve $disf < \varepsilon$ olacak şekilde bir $f : B_r(0) \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ dönüşümü tanımlamak mümkündür. Örneğin $r = 1,1$ ve $\varepsilon = \frac{2}{p}$ olsun. $B_{1,1}(0)$ yuvarı $\mathbb{N} \cup \{0\}$ kümesidir ve burada $f(0) = 0$ olan ve $disf < 1 - \frac{1}{p}$ şeklinde olan bir dönüşüm bir sonraki bölümde ayrıntılı olarak verilmiştir. Ancak çalıştığımız uzaylarda p-sel metrik ve ayrık metrik var olduğundan verilen her $r, \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n > n_0$ iken diğer iki koşulu ve $B_{r-\varepsilon}(0) \subset U_\varepsilon(f(B_r(0)))$ koşulunu sağlayacak bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı bulmak mümkün değildir. Bunun sebebi ayrık metriğe göre $\mathbb{N} \cup \{0\}$ uzayının çapının da 1 olmasıdır. Yani verilen r, ε sayılarının farkı eğer 1'den büyük ise, başka bir ifadeyle büyük bir $r > 0$ ve çok küçük bir $\varepsilon > 0$

sayısı için, $B_{r-\varepsilon}(0)$ yuvarı tüm $\mathbb{N}\cup\{0\}$ uzayı olduğundan $U_\varepsilon(f(B_r(0)))$ komşuluğunun içinde kalması mümkün değildir. Verilen herhangi bir r, ε ikilisi için

$$B_{r-\varepsilon}(0) \subset U_\varepsilon(f(B_r(0)))$$

koşulu sağlanamayacağından, $\{(\mathbb{Z}_p, 0)\}$ noktalı metrik uzaylar dizisinin $(\mathbb{N} \cup 0, d_a)$ metrik uzayına bu anlamda bir yakınsaklığı olamaz.

3.3. $\mathbb{Z}_p$ Metrik Uzaylarının Yakınsaklığı

Peki p-sel tamsayıların belirlediği diziyi p-sel metriğe göre yakınsak kılacak bir yakınsaklık tanımı var mıdır? Önceki bölümde tanımlanan noktalı metrik uzayların Gromov-Hausdorff anlamında yakınsaklı ele alındığında, her p için p-sel tamsayılar uzayımızı 0 ile noktalayarak bir noktalı metrik uzay olarak düşünsek bile, p-sel tam sayı dizimiz hala yakınsak olmamaktadır. Fakat noktalı metrik uzayların yakınsaklık kavramının tanımlanma ihtiyacından hareketle, aşağıda vermiş olduğumuz tanım arzu ettiğimiz sonuca bizi ulaştırabilecektir.

Tanım 3.4. $((X_n, d_n))_{n=1}^{\infty}$ kompakt metrik uzaylar dizisi ve (X, d) (kompakt olmayan) bir metrik uzay olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $n > n_0$ iken $d_{GH}(X_n, A_n) < \varepsilon$ koşulunu sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var olacak şekilde X'in $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$ koşulunu sağlayan $A_1 \subset A_2 \subset \cdots A_n \subset \cdots \subset X$ şeklinde bir filtrelemesi varsa, $((X_n, d_n))_{n=1}^{\infty}$ dizisi (X, d) metrik uzayına yakınsar denir.

Artık yeni yakınsaklık tanımımız ile p-sel tamsayılar kümelerinin oluşturduğu dizinin Gromov-Hausdorff anlamında yakınsak olduğunu aşağıdaki Önerme yardımı ile söyleyebiliriz.

Önerme 3.5. *$\mathbb{Z}_p$, p-sel tamsayılar kompakt metrik uzaylar dizisi, p_n n. asal sayı ve $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \cup \{0\}$ olsun. $X_n = \mathbb{Z}_{p_n}$ ve d_n, p_n-sel metrik olmak üzere $((X_n, d_n))_{n=1}^{\infty}$ dizisi, $m \neq n$ iken $d_a(m, n) = 1$ ayrık metriği ile $(\mathbb{N}^*, d_a)$ metrik uzayına yakınsar.*

Kanıt. $A_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$ olmak üzere $\mathbb{N}$'nin bir $\{A_p\}$ filtrelemesini düşünelim. $d_{GH}(\mathbb{Z}_p, A_p) < \frac{2}{p}$ olduğunu görmek yakınsaklığı görmek için yeterli olacaktır.

$\mathbb{Z}_p$'nin i.seviye altkümesini $i \in A_p$ elemanına götüren $f_p : \mathbb{Z}_p \to A_p$ dönüşümü bir $\frac{1}{p}$-izometridir:

f_p dönüşümü örten olduğundan $f_p(\mathbb{Z}_p)$ kümesinin bir 0-net olduğu açıktır.

$disf_p = \frac{1}{p}$ olduğunu görelim.

Eğer $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_p$ farklı seviye altkümelerde ise,

$$d_p(x_1, x_2) = 1$$

ve

$$d_a(f_p((x_1), (x_2))) = 1$$

bulunur.

Eğer $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}_p$ aynı seviye altkümede ise,

$$d_p(x_1, x_2) \leq \frac{1}{p}$$

ve

$$d_a(f_p((x_1), (x_2))) = 0$$

bulunur.

Buradan $disf_n = \frac{1}{p}$ elde edilir. Böylece Sonuç 2.27'den $d_{GH}(\mathbb{Z}_p, A_p) < \frac{2}{p}$ sonucuna ulaşılır. $\square$

Yeni yakınsaklık kavramımız ile $\mathbb{Z}_p$, p-sel tamsayıların oluşturduğu kompakt metrik uzaylar dizisi, Gromov-Hausdorff anlamında sonsuz noktalı ayrık metrik uzaya yakınsar.

KAYNAKÇA

[1] D. Burago, Y. Burago, and S. Ivanov. (2001). *A Course in Metric Geometry.* USA: AMS.

[2] A. Cuoco. (1991). Visualizing the p-adic integers. *The American Mathematical Monthly*, 98, 355–364.

[3] F. Q. Gouvêa. (1997). *p-adic Numbers.* Berlin: Springer-Verlag.

[4] K. Hensel. (1897). Über eine neue begründung der theorie der algebraischen zahlen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 6(3), 83–88.

[5] S. Katok. (2007). *p-adic Analysis Compared with Real.* USA: AMS.

[6] N. Koblitz. (1977). *p-adic Numbers, p-adic Analysis, and Zeta-Functions.* New York: Springer-Verlag.

[7] A. M. Robert. (2000). *A Course in p-adic Analysis.* New York: Springer-Verlag.

[8] M. Saltan. (2012). *Yenilemeli Fonksiyon Sistemi Anlamında Kendine Benzer Gruplar.* Doktora Tezi, Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.

[9] W. H. Schikhof. (1984) *Ultrametric Calculus an Indroduction to p-adic Calculus.* New York: Cambridge University Press.

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı	:	Gökçe ÖZKAYA
Yabancı Dil	:	İngilizce
Doğum Yeri ve Yılı	:	Ödemiş / 1993
E-Posta	:	gokceozkaya@eskisehir.edu.tr

Eğitim Geçmişi:

- 2007-2011, Selçuk İ.M.K.B. Anadolu Lisesi
- 2011-2017, Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü.
- 2017-, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans.