



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ-CERRAHPAŞA
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**



DOKTORA TEZİ

DAMAR İÇİNDE KAN AKIŞININ MODELLENMESİ

Betül UYSAL

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Erol UZAL**

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Makine Mühendisliği Programı

İSTANBUL-2019

Bu çalışma 06.02.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Makine Mühendisliği Anabilim Dalı, Makine Mühendisliği Programı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

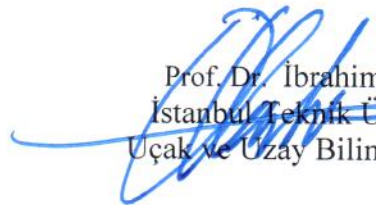
TEZ JÜRİSİ


Prof. Dr. Erol UZAL
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa
Mühendislik Fakültesi


Prof. Dr. Hasan Rıza GÜVEN
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa
Mühendislik Fakültesi


Prof. Dr. Serdar BARİŞ
İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa
Mühendislik Fakültesi


Prof. Dr. Metin Orhan KAYA
İstanbul Teknik Üniversite
Uçak ve Uzay Bilimleri Fakültesi


Prof. Dr. İbrahim ÖZKOL
İstanbul Teknik Üniversitesi
Uçak ve Uzay Bilimler Fakültesi



20.04.2016 tarihli Resmi Gazete’de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa’nın abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Doktora tezimi hazırlarken her türlü bilgisini ve desteğini benden esirgemeyen çok kıymetli danışmanım Prof. Dr. Erol UZAL'a sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca her zaman yanımda olan, manevi destekleriyle zaman zaman içine düştüğüm umutsuzlukları gideren özellikle eşime, çocuklarıma, anneme ve babama teşekkürü borç bilirim.

Şubat 2019

Betül UYSAL



İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER.....	v
ŞEKİL LİSTESİ	vii
TABLO LİSTESİ.....	x
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ.....	xi
ÖZET	xiii
SUMMARY	xv
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL KISIMLAR.....	3
3. MALZEME VE YÖNTEM.....	10
3.1. AKIŞKAN İÇİN HAREKET DENKLEMLERİ	10
3.1.1. Korunum Denklemleri.....	11
3.1.1.1. Süreklilik Denklemi.....	12
3.1.1.2. Momentumun Korunumu	14
3.1.1.3. Akışkan İçin Bünye Denklemleri.....	15
3.1.2. Navier-Stokes Denklemleri	17
3.1.3. Silindirik Koordinatlarda Akışkan Hareket Denklemleri.....	17
3.2. DAMAR İÇİN HAREKET DENKLEMLERİ.....	20
3.2.1. Damar İçin Bünye Denklemleri.....	22
3.2.2. Denge Denklemleri.....	23
3.2.3. Silindirik Koordinatlarda Katı Malzeme İçin Hareket Denklemleri	23
3.3. AKIŞKAN HAREKET DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ	26
3.4. DAMARA AİT TEMEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜLMESİ.....	31
3.5. AKIŞKAN-DAMAR ETKİLEŞİMİ	36
3.5.1. Akışkan Hareket Denklemlerinin Lineerleştirilmesi.....	37
3.5.2. Akışkan Hareket Denklemlerinin Çözümü	38
3.5.3. Akışkan-Damar Etkileşimi İçin Sınır Şartları	43
4. BULGULAR.....	49
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	77
KAYNAKLAR.....	79



ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 3.1: Kontrol Hacmi.	12
Şekil 3.2: Silindirik koordinat sistemi (Birim vektörler ve hız bileşenleri).....	18
Şekil 3.3: Damar iç yapısı.	21
Şekil 3.4: İçerisinden aksenal doğrultuda sabit U_1 hızı ile akışkan geçen silindirik boru.....	36
Şekil 4.1: $h= 0,002$ m ve $k= 1$ için öz frekansların reel ($Re(\omega)$), ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.....	50
Şekil 4.2: $h= 0,002$ m ve $k= 2$ için öz frekansların reel ($Re(\omega)$), ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.....	51
Şekil 4.3: $h= 0,002$ m ve $k= 2$ için öz frekansların reel ($Re(\omega)$), ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.....	51
Şekil 4.4: $h= 0,003$ m ve $k= 1$ için öz frekansların reel ($Re(\omega)$), ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.....	52
Şekil 4.5: $h= 0,003$ m ve $k= 2$ için öz frekansların reel ($Re(\omega)$), ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.....	53
Şekil 4.6: $h= 0,003$ m ve $k= 3$ için öz frekansların reel ($Re(\omega)$), ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.....	54
Şekil 4.7: $h= 0,004$ m ve $k= 1$ için öz frekansların reel ($Re(\omega)$), ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.....	55
Şekil 4.8: $h= 0,004$ m ve $k= 2$ için öz frekansların reel ($Re(\omega)$), ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.....	55
Şekil 4.9: $h= 0,004$ m ve $k= 3$ için öz frekansların reel ($Re(\omega)$), ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının hız (U_1) değerleri ile değişimi.....	56
Şekil 4.10: $h=0,002$ m için çarpınma hızı (U_{kr}) dalga sayısı (k) değişimi ile.....	56
Şekil 4.11: $h=0,003$ m için çarpınma hızı (U_{kr}) ile dalga sayısı (k) değişimi.....	57
Şekil 4.12: $h=0,004$ m için çarpınma hızı (U_{kr}) ile dalga sayısı (k) değişimi.....	57
Şekil 4.13: $h=0,006$ m için çarpınma hızı (U_{kr}) ile dalga sayısı (k) değişimi.....	57

Şekil 4.14: Belirli damar kalınlıklarında (h) çarpınma hızı (U_{kr}) ile dalga sayısı (k) değişimi.	58
Şekil 4.15: $k=1$ için, çarpınma hızı (U_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.	59
Şekil 4.16: $k=2$ için, çarpınma hızı (U_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.	59
Şekil 4.17: $k=3$ için, çarpınma hızı (U_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.	59
Şekil 4.18: Farklı dalga sayılarında (k) çarpınma hızı (U_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.	60
Şekil 4.19: $k=1$ için, kritik dalga hızı (C_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.	60
Şekil 4.20: $k=2$ için, kritik dalga hızı (C_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.	61
Şekil 4.21: $k=3$ için, kritik dalga hızı (C_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.	61
Şekil 4.22: $k=4$ için, kritik dalga hızı (C_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.	61
Şekil 4.23: Farklı dalga sayılarında (k) kritik dalga hızı (C_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.	62
Şekil 4.24: $h=0,002$ m için, çarpınma hızı (U_{kr}) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.	62
Şekil 4.25: $h=0,003$ m için, çarpınma hızı (U_{kr}) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.	63
Şekil 4.26: $h=0,004$ m için, çarpınma hızı (U_{kr}) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.	63
Şekil 4.27: $h=0,006$ m için, çarpınma hızı (U_{kr}) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.	63
Şekil 4.28: Farklı damar kalınlıklarında çarpınma hızı (U_{kr}) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.	64
Şekil 4.29: Farklı damar kalınlıklarında (h) dalga sayısı (k) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.	65
Şekil 4.30: $k=1$ için çarpınma hızı (U_{kr}) ile kütle oranı (m^*) değişimi.	66
Şekil 4.31: $k=2$ için çarpınma hızı (U_{kr}) ile kütle oranı (m^*) değişimi.	66
Şekil 4.32: $k=3$ için çarpınma hızı (U_{kr}) ile kütle oranı (m^*) değişimi.	66
Şekil 4.33: Belirli dalga sayıları için çarpınma hızı (U_{kr}) ile kütle oranı (m^*) değişimi.	67
Şekil 4.34: Belirli dalga sayıları için kritik dalga hızı (C_{kr}) ile kütle oranı (m^*) değişimi.	67
Şekil 4.35: Damara ait farklı Poisson oranı (ν) değerlerinde dalga sayısı (k) ve çarpınma hızı (U_{kr}) değişimi.	68

Şekil 4.36: Damara ait farklı Poisson oranı (ν) değerlerinde dalga sayısı (k) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.	69
Şekil 4.37: Damara ait farklı Poisson oranı (ν) değerlerinde farklı dalga sayıları (k) için çarpınma hızı (U_{kr}) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.....	69
Şekil 4.38: Farklı Poisson oranı (ν) değerlerinde damar kalınlığı (h) ve çarpınma hızı (U_{kr}) değişimi.....	70
Şekil 4.41: Farklı damar kalınlıkları (h) için Poisson oranı (ν) ve çarpınma hızı (U_{kr}) değişimi.	72
Şekil 4.42: Farklı damar kalınlıkları (h) için Poisson oranı (ν) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.....	73
Şekil 4.43: Farklı elastisite modüllerinde (E), damar kalınlığı (h) ve çarpınma hızı (U_{kr}) değişimi.....	74
Şekil 4.46: Farklı damar kalınlıklarında (h), elastisite modülü (E) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.....	76

TABLO LİSTESİ

	Sayfa No
Tablo 4.1: $h= 0,002$ m ve $k= 1$ için elde edilen özdeğerler.	50
Tablo 4.2: $h= 0,002$ m ve $k= 2$ için elde edilen özdeğerler.	50
Tablo 4.3: $h= 0,002$ m ve $k= 3$ için elde edilen özdeğerler.	51
Tablo 4.4: $h= 0,003$ m ve $k= 1$ için elde edilen özdeğerler.	52
Tablo 4.5: $h= 0,003$ m ve $k= 2$ için elde edilen özdeğerler.	53
Tablo 4.6: $h= 0,003$ m ve $k= 3$ için elde edilen özdeğerler.	53
Tablo 4.7: $h= 0,004$ m ve $k= 1$ için elde edilen özdeğerler.	54
Tablo 4.8: $h= 0,004$ m ve $k= 2$ için elde edilen özdeğerler.	55
Tablo 4.9: $h= 0,004$ m ve $k= 3$ için elde edilen özdeğerler.	56

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
ρ_{fl}	: Akışkan yoğunluğu
\vec{U}	: Akışkan için hız vektörü
$\frac{dm}{dt}$: Kütle miktarının zaman ile değişimi
\vec{n}	: Yüzey elemanına ait normal vektör
dS	: Yüzey elemanı
p	: Hidrostatik basınç
δ_{ij}	: Kronecker delta fonksiyonu
τ_{ij}	: Viskoz gerilim tensörü
σ_{ij}	: Gerilme bileşenleri
μ	: Akışkanın viskozitesi
ε_{ij}	: Birim şekil değiştirme hızı tensörü
$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$: r, θ ve z doğrultularındaki birim vektörler
u_r^*, u_θ^*, u_z^*	: Akışkan hızının radyal, teğetsel ve eksenel doğrultudaki bileşenleri.
f_r, f_θ, f_z	: Radyal, teğetsel ve eksenel doğrultudaki hacim kuvvet bileşenleri
ν	: Kinematik viskozite
τ_{ij}^{**}	: Gerilme tensörünün bileşenleri
C_{ijkl}	: Elastik rijitlik tensörü (viskozite tensörü)
e_{kl}^*	: Genleme tensörünün bileşenleri
$\bar{\lambda}$ ve $\bar{\mu}$: Lamé sabitleri (Elastik sabitler)
E	: Elastisite modülü (Young modülü)
$\bar{\nu}$: Poisson oranı
ρ	: Damarın yoğunluğu
r	: Damar yarıçapı
r_1	: Damar iç yarıçapı
r_2	: Damar dış yarıçapı
h	: Damar kalınlığı
\mathcal{V}_r	: Radyal doğrultudaki yer değiştirme
\mathcal{V}_θ	: Teğetsel doğrultudaki yer değiştirme

\mathcal{V}_z	: Eksenel doğrultudaki yer değiştirme
F_r, F_θ, F_z	: Radyal, teğetsel ve eksenel doğrultudaki kütleel kuvvetler
$I_0(kr)$: Sıfırncı mertebeden birinci tür Modifiye Bessel fonksiyonu
$J_0(mr)$: Sıfırncı mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu
$J_1(mr)$: Birinci mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu
B_0	: Sıfırncı mertebeden Bessel Fonksiyonu
B_1	: Birinci mertebeden Bessel Fonksiyonu
Y_0	: Sıfırncı mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu
Y_1	: Birinci mertebeden ikinci tür Bessel fonksiyonu

Kısaltmalar

Açıklama

EKG	: Elektrokardiyogram
KdV	: Korteweg-de Vries denklemleri
KdVB	: Korteweg-de Vries-Burgers evölüsyon denklemleri

ÖZET

DOKTORA TEZİ

DAMAR İÇİNDE KAN AKIŞININ MODELLENMESİ

Betül UYSAL

İstanbul Üniversitesi-Cerrahpaşa

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Makine Mühendisliği Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. Erol UZAL

Bu tez çalışmasında, damar içerisindeki kan akışı incelenmiştir. Bu problem, içinden akışkan geçen elastik, silindirik borularda dalga yayılımı probleminin özel bir şeklidir. Bu nedenle damar malzemesinin ve kanın mekanik özellikleri birlikte dikkate alınmıştır.

Modelleme yapılırken akışkan (kan) viskoz, sıkıştırılamayan ve Newtonyen akışkan olarak kabul edilmiştir. Hücresel kısmın hareketi büyük çaplı damarlarda önemli olmadığı için ihmal edilmiş, kanda hücresel kısmı ve plazma beraber değerlendirilmiştir. Damar ise tek tabakalı, lineer ve elastik malzeme olarak seçilmiştir. Kanın ve kanın içinden geçtiği damarın hareketi aksel ve radyal simetrik olarak ele alınmıştır.

Silindirik koordinatlarda, akışkan ve damar için bünye denklemleri ve genel hareket denklemleri elde edilmiş ve bu denklemlerin aksel doğrultudaki zamana bağlı harmonik dalga hareketi incelenmiştir.

Daha sonra damar (lineer, elastik, silindirik boru) ve akışkan (kan) etkileşimi ele alınmıştır. Bunun için probleme ait uygun sınır şartlarının belirlenmesi ve damar denklemlerinin ve akışkan denklemlerinin bu sınır şartlarına göre birlikte çözülmesi gerekir. Damar titreşimleri incelenerek, damarda meydana gelebilecek herhangi bir deformasyonun hangi şartlarda oluşabileceği belirlenebilir. Bu yüzden çarpınma analizi yapılarak problem için sayısal bir çözüm yapılmıştır. Akışkanın hızıyla sistemin öz frekansları arasındaki ilişkiyi belirleyebilmek için akışkan hızı değiştirilerek sistemin öz frekansları bulunmuştur. Kanın elastik damarda kararsız titreşimlere neden olduğu kritik dalga hızı ve çarpınma hızı elde edilmiştir.

Şubat 2019, 100 sayfa.

Anahtar kelimeler: Harmonik dalga hareketi, elastik boru, akışkan-damar etkileşimi, çarpınma analizi

SUMMARY

Ph.D. THESIS

MODELING OF INTRA- VESSEL BLOOD FLOW

Betül UYSAL

Istanbul University-Cerrahpasa

Institute of Graduate Studies

Department of Mechanical Engineering

Supervisor : Prof. Dr. Erol UZAL

In this dissertation, intravascular blood flow is investigated. The intravascular blood flow problem is a special form of the wave propagation problem in the elastical cylindrical pipes containing fluids. For this reason, the mechanical properties of both the human blood and structural vein material have been considered. General motion equations and body equations have been established for the cylindrical coordinates belonging to the fluid and the vessel, and the time-based axial harmonic wave propagation of these equations have been analyzed.

In the modeling phase, blood has been considered as an incompressible viscous Newtonian fluid. Additionally, since the movement of the cellular part is important only for the capillaries, it has been disregarded and considered with the movement of the plasma. The vessel has been regarded to be made up of a single layer linear elastic material. Also, it has been assumed that the movement of the blood and the vessel structure around it has a radial and axial symmetry.

As the next step, the interaction of the the elastic cylindrical pipe (i.e. the vessel) and the fluid it carried (i.e. the blood) has been investigated. For the fluid-vessel interaction, the equations related to the fluid and the vessel have to be solved together. To achieve this, problem-specific boundary conditions have been established. Vessel vibrations have been analyzed to determine under which conditions a deformation could occur on the vessels. For this, flutter analysis have been carried out. Analytical solution for the problem has been obtained, the relation between the fluid velocity and the self frequencies of the system has been determined by changing the the fluid velocity values. The flutter velocity has been found for the situation that the blood in the vessel causes unstable vibrations of elastic nature.

February 2019, 100 pages.

Keywords: Harmonic wave motion, elastic pipe, fluid-vessel interaction, flutter analysis.

1. GİRİŞ

Kalp damar sistemi hastalıkları insan sağlığını etkileyen ve dünyada ölüm nedenleri içerisinde birinci sırada yer alan en önemli hastalıklardan birisidir. Kan, kalp damar sistemi içinde tüm vücudu dolaşarak gerekli olan oksijeni ve besin maddelerini dokulara taşır. Ayrıca dokulardaki karbondioksit ve atık ürünlerini burarlardan uzaklaştırır.

Kalp damar sistemi hastalıklarının meydana gelmesine neden olan temel faktörlerden birisi damarların geometrisidir. Plaklar ve yağlı maddelerin damar yüzeyinde birikmesi, damarlardaki dallanmalar, birleşmeler vb. sebepler damar içerisinde tıkanıklıklara ve daralmalara neden olmaktadır. Damar fizyolojisinin bozulması, damarlardaki tıkanıklıklar ve daralmalar, damar içindeki kanın akış hızını etkilemektedir. Bu nedenle kalp damar sistemi hastalıklarının teşhis edilmesinde ve tedavisinde, akış değerlerinin bilinmesi oldukça önemlidir.

Kalp, pompa etkisi oluşturarak kanı vücuda ve akciğerlere pompalar. Kalbin kanı ileriye atma hareketi, damardaki kan akışını etkileyen en önemli etkenlerden birisidir. Kan akışını etkileyen diğer faktörler ise kanın viskozitesi ve damarların çapıdır.

Kalp damar sistemi hastalıklarının teşhis edilmesine ve bu hastalıkların tedavisine faydalı olacağı düşüncesiyle bu tez çalışmasında damar içerisindeki kan akışı incelenmiştir. Bu problem, içinden akışkan geçen elastik, silindirik borularda dalga yayılımı probleminin özel bir şeklidir. Damarın elastik özelliklerine bağlı olarak taşıma katsayıları ve dalga hızları değişmektedir. Damar yapısında meydana gelen değişiklikler hakkında ve fizyolojik açıdan meydana gelen değişimler hakkında bilgi vereceği için bu değerleri belirlemek önemlidir.

Modelleme yapılırken akışkan (kan) viskoz, sıkıştırılmayan ve Newtonyen akışkan olarak kabul edilmiştir. Hücresel kısmın hareketi büyük çaplı damarlarda önemli olmadığı için ihmal edilmiş, kanda hücresel kısmı ve plazma beraber değerlendirilmiştir. Damar ise tek tabakalı, lineer ve elastik malzeme olarak seçilmiştir. Kanın ve kanın içinden geçtiği damarın hareketi aksel ve radyal simetrik olarak ele alınmıştır.

Tezde öncelikle silindirik koordinatlarda, akışkan ve damar için bünye denklemleri ve genel hareket denklemleri elde edilmiştir. Elde edilen bu denklemler için eksenel doğrultuda zamana bağlı dalga hareketi incelenmiştir.

Daha sonra damar (lineer, elastik, silindirik boru) ve akışkan (kan) etkileşimi ele alınmıştır. Bunun için probleme ait uygun sınır şartları belirlenmiş ve damar denklemleri ve akışkan denklemleri bu sınır şartlarına göre birlikte çözülmüştür. Damar titreşimleri incelenerek, damarda meydana gelebilecek herhangi bir deformasyonun hangi şartlarda oluşabileceği belirlenebilir. Bu yüzden çarpınma analizi yapılarak problem için sayısal bir çözüm yapılmıştır. Akışkanın hızıyla sistemin öz frekansları arasındaki ilişkiyi belirleyebilmek için akışkan (kan) hızı değiştirilerek sistemin öz frekansları bulunmuştur. Akışkanın elastik damarda kararsız titreşimlere neden olduğu kritik dalga hızı ve çarpınma hızı elde edilmiştir.

Son bölümde elde edilen sayısal sonuçlar grafiklerde gösterilmiş, gerekli yorumlar yapılmış ve önerilerde bulunulmuştur.

2. GENEL KISIMLAR

Kalp damar sistemi hastalıklarının tespit edilmesine ve tedavisine fayda sağlamak için uzun senelerden beri çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bunun için, içinden akışkan geçen silindirik borularda dalga yayılımı problemi ele alınmış ve damardaki kan akışı modellenmiştir.

İlk olarak Thomas Young [1, 2], 1808 ve 1809'da yaptığı çalışmalarda elastik tüplerde ve kan damarlarında akışkan hareketini ele almış ve kan damarlarının elastik özellikleriyle nabız dalga hızı arasındaki ilişkiyi incelemiştir. İçinde sıkıştırılmaz akışkan bulunan homojen, izotropik, elastik tüpteki dalga hızları için, literatürde Young dalga modu olarak bilinen bir formül bulmuştur.

1850 yılında, Wilhelm Eduard Weber ve Ernst-Heinrich Weber kardeşler tarafından yapılan çalışmalarda, elastik tüplerde dalga hızı için aşağıdaki formül önerilmiştir.

$$c = \sqrt{\frac{R}{2k\rho}} \quad (1.1)$$

Burada;

c : Dalga hızı,

R : Tüp yarıçapı,

k : Elastik tüpe ait elastikiyet katsayısı

ρ : Akışkanın yoğunluğudur.

Moens [3, 4], 1878'de, kan damarlarında harmonik dalga yayılımını incelemiş, Weber kardeşler tarafından önerilen (1.1)'deki dalga hızı ifadesini değiştirmiştir.

Moens'in elde ettiği verilere bağlı olarak Korteweg [5], 1848-1941 yılları arasında içerisinde viskoz olmayan, sıkıştırılmaz akışkan geçen ince ve elastik tüplerdeki harmonik dalga hareketini araştırmıştır. Dalga hızları, tüpün geometrisine ve elastik özelliklerine bağlı olarak değişmektedir. Akışkan- yapı etkileşimi, özellikle yapı üzerinde deformasyonun ihmal edilemediği ve akışkanın sıkıştırılmaz akışkan olduğu zamanlarda önem kazanmaktadır [5].

Korteweg, uzun dalga boyu için elde ettiği dalga hızı ile Young dalga modülü arasındaki benzerliği incelenmiştir. Günümüzde Moens-Korteweg eşitliği olarak bilinen aşağıdaki ifadeyi elde etmiştir.

$$c = \sqrt{\frac{E h_w}{2 r_i \rho}} \quad (1.2)$$

Bu eşitlikte;

c : Dalga hızı

E : Tüp malzemesi için Young modülü,

h_w : Tüpün kalınlığı

ρ : Akışkan yoğunluğu,

r_i : Tüpün iç yarıçapıdır.

Otto Frank'ın [6] kalp damar sistemi üzerine yaptığı araştırmalar, kardiyoloji pratiği için önemlidir. Frank, damar sistemi için literatürde Windkessel modeli olarak bilinen bir model önermiştir. Bu modelde, elastik oda ana atardamarları, rijit ve sabit dirençli borular ise atardamarlarla bağlantılı olan diğer damarları temsil etmektedir.

1920' de Frank, Moens-Korteweg eşitliğinden yararlanarak dalga hızını aşağıdaki gibi önermiştir;

$$c = \sqrt{\frac{A}{\rho C_A}} \quad (1.3)$$

Burada;

ρ : Akışkan yoğunluğu

A : Damarın kesit alanıdır.

$$C_A \text{ ise } C_A = \frac{\Delta A}{\Delta \rho}$$

şeklindedir.

Witzig [7], ince ve esnek tüpler için dalga yayılımını incelemiş ve iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerini çözmüştür. Akışkan viskozitesinin dalga hızını nasıl etkilediğini araştırmıştır. Dalga sayısını Poisson katsayısı, kinematik viskozite ve tüpün iç yarıçapına bağlı olarak aşağıdaki eşitlikle açıklamıştır;

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2(1-\sigma^2)}{c^2(1-F_{10})}} \quad (1.4)$$

Burada ;

k: Dalga sayısı,

ω : Açısal hız,

σ : Poisson katsayısı,

c : Moens-Korteweg dalga hızıdır. F_{10} ise;

$$F_{10} = \frac{2 J_1(\varepsilon)}{\varepsilon J_0(\varepsilon)} \quad (1.5.a)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada;

J_0 ve J_1 : Sıfırıncı ve birinci mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonlarıdır. ε ise;

$$\varepsilon = a i^{3/2} \left(\frac{\omega}{\nu} \right)^{1/2} \quad (1.5.b)$$

şeklindedir.

a : Tüpün iç yarıçapı,

i : Kompleks sayı,

ν : Kinematik viskozitedir.

Womersley [9], elastik, izotropik, ince duvarlı, sonsuz uzun tüpleri incelemiştir. Doğrusallaştırılmış iki boyutlu Navier-Stokes denklemlerini, akışkanı viskoz, Newtonyen akışkan olarak kabul ederek çözmüştür. Womersley'in [8,9] 1955 ve 1957 yılında sonsuz uzun

tüpler için yaptığı çalışmalar, daha sonra yapılan araştırmalarda en çok başvurulan kaynaklar olmuştur.

Klip [10] bu konu ile ilgili, 60 m'den daha uzun, homojen, viskoelastik ve izotrop, kalın ve ince duvarlı borular kullanarak deneysel çalışmalar yapmıştır. Dalga hızı için elde ettiği sonuçları Womersley ve Moens-Korteweg'in elde ettiği verilerle karşılaştırmıştır. Sonuçların uyumlu olduğunu göstermiştir.

Benzer şekilde Gerrard [11] da deneysel bir araştırma yapmıştır. Çalışmasında izotropik, viskoelastik, lateks kauçuk borular kullanmıştır. Bulduğu deneysel sonuçları Womersley teorisi ile karşılaştırarak, elde ettiği verilerin, sonsuz uzun tüplerin giriş kısmında Womersley teorisi ile uyumlu olmadığını, diğer kısımlarda uyumlu olduğunu göstermiştir. Gerrard başka bir deneysel çalışmada 30 metre uzunluğunda borular kullanmıştır. Klip'in elde ettiği verilerle kendi verilerini karşılaştırmış sonuçların uyumlu olduğunu göstermiştir.

Atabek ve Lew [12], başlangıçta radyal ve aksel yönde ön gerilmeye maruz kalmış, ince ve elastik tüplerdeki dalga hareketini incelemişlerdir. Tüpün içinde sıkıştırılmaz, viskoz akışkan olduğunu kabul etmişlerdir. Hareket denklemlerini ve süreklilik denklemini kullanarak dalga yayılma hızını bulmuşlardır. Ayrıca radyal ve aksel yöndeki ön gerilmeleri ihmal etmiş, bu durum için elde ettikleri sonuçları Womersley'in sonuçlarıyla karşılaştırmış, sonuçların uyumlu olduğunu belirtmişlerdir.

Mirsky [13], içinde viskoz sıvı bulduran anizotropik, elastik damardaki dalga yayılımını araştırmış, Womersley teorisini ele aldığı probleme göre değiştirmiştir. 1968 yılında yaptığı başka bir çalışmada [14], damar için başlangıç şekil değiştirmesini dikkate almış faz hızı için sayısal bir çözüm yapmıştır.

Klip ve diğ. [15], çalışmalarında boruyu viskoelastik, kalın duvarlı ve simetrik olmayan tüp olarak kabul etmişlerdir. İçinde sıkıştırılabilir, Newtonyen akışkan bulunan borudaki boyuna dalga hareketini ele almışlardır. Dalga hızı için yaklaşık bir çözüm sunmuşlardır.

1968 yılında Cox [16], izotropik, sıkıştırılmaz, viskoelastik, silindirik, kalın duvarlı borudaki harmonik dalga hareketini araştırmıştır. Tüp için elastisite teorisini, Newtonyen akışkan hareketi için Navier-Stokes denklemlerini kullanmıştır. Uygun sınır şartlarını belirlemiş ve tüp denklemleri ile akışkan denklemlerini bu sınır şartlarına göre birlikte

çözerek homojen bir denklem takımı bulmuştur. Sayısal çözüm yaparak probleme ait bir dispersiyon bağıntısını elde etmiştir.

Cox [17] , tüpü sıkıştırılabilir, kalın duvarlı tüp olarak ele almış, daha önce incelediği problemi tekrar çözmüştür. Ayrıca damardaki kan akışı problemi için 1969 yılına kadar önerilen tüm modelleri inceleyerek, birbirleriyle kıyaslamıştır [18].

Rudinger [19], düzgün genişleyen, içinde viskoz olmayan akışkan bulunan yarı sonsuz tüplerdeki dalga hareketini ele almış ve aort damarında meydana gelen şok dalgalarını incelemiştir. Karakteristik yöntemle lineer olmayan denklemleri çözmüştür. Yaptığı araştırmada dalga basıncının dalga hızıyla doğru orantılı olarak artacağını göstermiştir. Fakat elde edilen sonuçlar yalnızca düzgün genişleyen damarlar için kullanılabilir.

Anliker ve diğ. [20], arterlerde dalga yayılımını incelemek için benzer şekilde karakteristik yöntem kullanmışlardır. Kanı sıkıştırılmaz akışkan olarak kabul etmişlerdir. Damarı ise konik, elastik ve yarı sonsuz tüp olarak almışlardır. Akışkan viskozitesinin etkisini hareket denklemlerinde hesaba katarak arterlerdeki şok dalgaları için bir boyutlu nonlinear denklemleri çözmüşlerdir.

1978 yılında Hoogstraten ve Smith [21], Rudinger'in araştırmasına benzer bir çalışma yapmışlardır. Ancak çalışmalarında sürtünme terimini de dikkate alarak, düzgün genişlemeyen, yarı sonsuz tüplerde dalga yayılımını incelemişlerdir.

Rachev [22], iç basınç ve damar etrafındaki kas hareketlerinin, atardamarlarda nabız dalgaları üzerine etkisini incelemiştir. Bunun için kanı viskoz ve sıkışmaz akışkan olarak, damarı ise ön gerilmeye maruz, elastik, aksenal simetrik bir tüp olarak ele almıştır. Aksenal germe, yaşlılık ve iç basınç ile dalga hızının nasıl değiştiğini açıklamıştır.

Kan, kan hücreleri ve plazmadan oluşmaktadır. Bu nedenle Nag ve Jana [23], çalışmalarında kanı iki farklı ortam olarak düşünmüşlerdir. İnce, elastik ve gerilmemiş bir borudaki iki fazlı akışı incelemişlerdir.

Hashizume [24] ve Yomosa [25], uzun dalga yaklaşımı altında, sıkıştırılmaz, viskoz olmayan bir akışkan ile dolu, düz, ince, elastik bir tüpte doğrusal olmayan basınç dalgası yayılımını incelemişlerdir. Değişken dönüşümü kullanarak, probleme ait denklemlerin, nonlinear

evolüsyon denklemi olan Korteweg-de Vries (KdV) denklemine indirgenebileceğini göstermişlerdir. Büyük kan damarlarında oluşan sivrileşme ve dikleşme olaylarını araştırmışlardır.

Demiray'ın da bu konuda yapmış olduğu birçok bilimsel çalışması mevcuttur. Demiray ve diğ. [26-27], aksenal yöndeki ön gerilmenin ve iç basıncın damar üzerindeki etkisini incelemiştir. Bunun için, içerisinde viskoz ve viskoz olmayan akışkan bulunan kalın, silindirik kabukta dalga yayılımı problemini ele almışlar, 'Küçük dinamik yerdeğiştirmelerin büyük statik ön şekil değiştirmeler üzerine süperpozisyonu teorisi' ni kullanarak probleme ait denklemleri elde etmişlerdir. Kuvvet seri yöntemini kullanarak elde edilen denklemler için yaklaşık çözüm bulmuşlardır.

Daha sonra, Demiray [28-29-30-31-32-33-34-35-36-37-38-39-40-41-42-43-44-45-46-47-48-49-50-51-52], Akgün ve Demiray [53,54,55], Antar ve Demiray [56,57,58], Bakırtaş ve Demiray [59,60,61] yapmış oldukları bir dizi çalışmada, içinde sıkıştırılmaz, viskoz olmayan akışkan veya viskoz akışkan bulunan, öngerilmeli, izotropik, ince elastik, kalın elastik, ince viskoelastik veya kalın viskoelastik tüplerde zayıf nonlinear dalga yayılımını incelemiştir. Bütün bu çalışmalarda, atardamarları, sabit kesitli, dairesel, silindirik uzun tüpler olarak kabul etmişlerdir. Tam denklemleri ya da akışkan denklemlerinin yaklaşık denklemlerini kullanarak, zayıf nonlinear dalgaların yayılımı için Korteweg-de Vries (KdV), Burgers ve Korteweg-de Vries-Burgers (KdVB) evolüsyon denklemlerini elde etmişlerdir.

Bu tez çalışmasına temel kaynak oluşturacağından, içerisinde akışkan geçen silindirik borularda dalga yayılımı problemi için yapılan bu literatür araştırmasının yanı sıra, çarpınma analizi ile ilgili de bir literatür araştırması yapılmıştır.

Yapılan çalışmada, çarpınma olayının inşaat ve havacılık sektöründe, kağıt imalatı ve nanoteknoloji alanında önemli olduğu görülmüştür. Ayrıca tıpta da kalp damar sistemi hastalıklarında sıkça karşılaşılan bir problemdir. Bu problem, kalp damar sistemi hastalıklarında, atriyal fibrilasyon, atriyal flutter veya taşikardi gibi terimlerle ifade edilmektedir. Yapılan çalışmalarda çarpınmaya neden olan etkenler, hastalık belirtileri, çarpınma probleminin teşhis edilmesine yönelik yöntemler, tedavi yöntemleri v.b konular ele alınmıştır.

Mairesse ve diğ. [62], çarpınmanın sebep olduğu damar blokajını incelemişlerdir. Çalışmalarında elektrokardiyogram (EKG) verilerini kullanmışlardır.

Khan ve diğ. [63], atriyal flutter ve atriyal fibrilasyon esnasındaki hız kontrolü ile ilgili bir çalışma yapmışlardır.

Finsterer ve Stöllberger [64], miyopati hastalarındaki atriyal fibrilasyon/flutter için bir araştırma yapmışlardır.

Ravelli ve diğ. [65], damar çarpınmasına sebep olan etkenleri ele almışlardır. Bu etkenlerin titreşimlere olan etkisini incelemişlerdir.

Naccarelli ve diğ. [66] , 65 yaş ve üstü hastalarda atriyal fibrilasyon sıklığını araştırmışlar ve bu hastaların hastaneye yatış oranlarını veren istatistiksel çalışma yapmışlardır.

Yapılan literatür çalışmasında, çarpınma probleminin modellenmesine yönelik bir çalışma yapılmadığı görülmüştür. Bu nedenle bu çalışmada, damar içerisinde kan akışı modellenerek, çarpınma analizi yapılacaktır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu çalışmada, damar içindeki kan akışı modelleneyecektir. Kalp, damar içinde hareket eden kana pulsatif hareket uygular. Kan da içinde bulunduğu damara bir iç basınç uygular. Akışkan viskozitenin damar çeperinde oluşturduğu sürtünmeden ve kanın damara uyguladığı bu iç basınçtan dolayı kanın hareketine benzer bir hareket de damarda oluşur.

Damar içerisindeki kan akışı problemi, içinden akışkan geçen elastik, silindirik borularda dalga yayılımı probleminin özel bir şeklidir. Bu yüzden hem akışkanın (kanın) hem de damarın (elastik borunun) hareketi ayrı ayrı incelenmelidir.

Bu bölümde, içinden akışkan geçen elastik, silindirik borularda dalga yayılımı probleminin çözümünde kullanılacak diferansiyel denklemler oluşturulacaktır.

3.1. AKIŞKAN İÇİN HAREKET DENKLEMLERİ

Kan, kan hücrelerinden ve plazmadan oluşan, damarda sürekli hareket eden canlı bir sıvıdır. Bir insanda yaklaşık 5-6 litre kan bulunur. Plazma, kanın %55'ini, kan hücreleri ise geri kalan kısmını oluşturur. Kanın sıvı kısmı plazmadır. %10'luk kısım katı maddeleri içerir, geriye kalan % 90' lık kısım ise sudur. Katı maddelerin % 7'si proteinler, % 3'ü ise diğer çözülmüş maddelerdir. Kan hücreleri ise eritrositler (kırmızı kan hücreleri ve alyuvarlar), trombositler (kan pulcukları ve plateletler) ve lökositlerdir (akyuvarlar ve beyaz kan hücreleri).

Belirli miktardaki kan içinde bulunan kan hücrelerinin hacminin, toplam kan hacmine oranına hematokrit oran denir. Yani kanın içerdiği kan hücrelerinin miktarıdır. Kan aslında sıkıştırılmayan, Newtonyen olmayan bir akışkandır. Bu konuda birçok deneysel çalışma yapılmıştır. Bu deneysel çalışmalar sonucunda, kayma hızına ve hematokrit oranına bakılarak, kanın, kayma (şekil değiştirme) hızı yüksek ve hematokrit oranı düşük iken Newtonyen akışkan gibi hareket ettiği söylenebilir. Ayrıca kayma (şekil değiştirme) hızı düşük ve hematokrit oranı yüksek iken kanın, Newtonyen olmayan bir akışkan olduğu kabul edilebilir. Poiseuille akımına göre, kayma (şekil değiştirme) hızı damar duvarına yakın yerlerde yüksektir. Ayrıca hematokrit oranı, damarın duvar kısımlarında düşmektedir. Çünkü kan akışı

esnasında, merkeze yakın bölgelerde hız yüksektir ve alyuvarlar bu bölgelere kayarlar. Bu yüzden, büyük damarlarda kan, Newtonyen bir akışkan olarak kabul edilebilir [67].

Bu çalışmada büyük çaplı damarlarda kan akışı inceleneceği için kan viskoz, sıkıştırılmayan, Newtonyen bir akışkan olarak kabul edilmiştir. Ayrıca kan hücrelerinin hareketi küçük çaplı damarlarda önemli olduğunu için kan hücrelerinin hareketi dikkate alınmayarak plazmayla birlikte düşünülecektir.

Ayrıca kan hareketinin ve kanın içinde hareket ettiği damar malzemesinin hareketinin radyal ve aksel simetrik olduğu kabul edilecektir. Gerçekte kan akışı aksel simetriye sahip değildir. Çünkü kalp tarafından kan pompalanırken kalp kapakçıkları açılıp kapanmaktadır. Kalp kapakçıkları açılıp kapanırken, kan akışının aksel simetrik hareketini bozular. Fakat kalpten belirli mesafe uzaklaşınca bu etkilerin minimum olduğu kabul edilebilir.

3.1.1. Korunum Denklemleri

Sıcaklık, basınç, hız vektörü, yoğunluk v.b. büyüklüklere termodinamik büyüklükler denir. Bu termodinamik büyüklükleri kullanılarak bir akış alanını tarif etmek mümkündür. Üç temel korunum denklemi kullanılarak bu akış alanı çözülebilir. Bunlar; kütle korunumu, momentumun korunumu ve enerjinin korunumu denklemleridir. Ayrıca bünye denklemlerinin de bilinmesi gerekir.

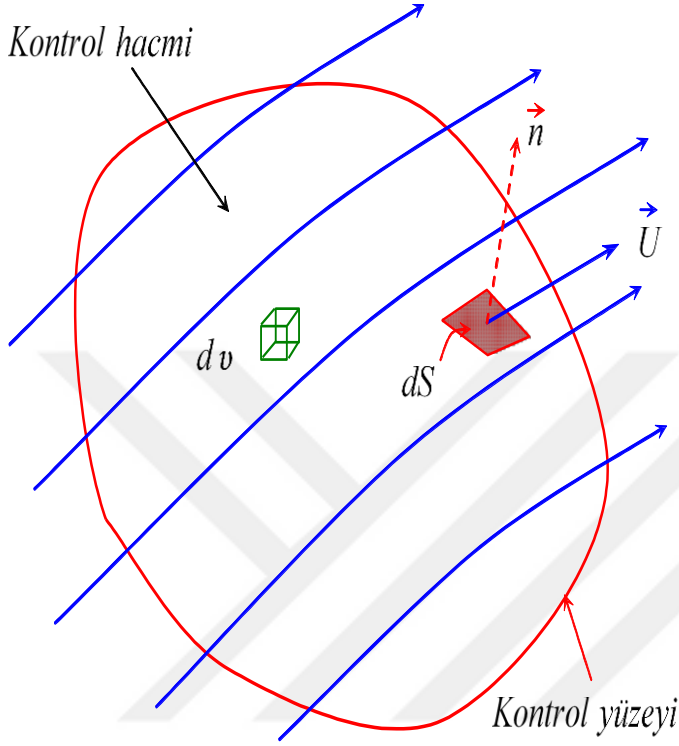
Bünye denklemleri, malzemenin basınç, ısı, kuvvet v.b yük etkileri altındaki davranışını tanımlayan, örneğin, şekil değiştirme ile gerilme arasındaki ilişkiyi tanımlayan, bağıntılardır.

Kan akışı da;

- Kütle korunumu denklemi (Süreklilik denklemi)
- Momentumun korunumu denklemi,
- Bünye denklemleri

kullanılarak tanımlanabilir.

Bu denklemlerin belirlenebilmesi için akışkana ait enerji, momentum, yoğunluk v.b özelliklerin kontrol hacmi içinde incelenmesi gerekir. Bu yüzden Şekil 3.1. 'deki gibi bir kontrol hacmi seçilmiştir.



Şekil 3.1: Kontrol Hacmi.

3.1.1.1. Süreklilik Denklemi

Kütlenin korunumu kanununa göre, belirli hacimdeki toplam kütle zamanla değişmemektedir. Kontrol hacmi içerisinde akışkanın yoğunluğu gözlenerek analiz edilir ve integral formda aşağıdaki gibi yazılır;

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_v \rho_{fl} dv + \iint_S \rho_{fl} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dS = 0 \quad (3.1)$$

Burada;

ρ_{fl} : Akışkanın kütle yoğunluğu (birim hacim başına kütle),

\vec{U} : Akışkanın hız vektörü,

$\frac{dm}{dt}$: Akışkan kütle miktarının zamanla değişimi,

\vec{n} : Yüzey elemanın normal vektörü,

dS : Yüzey elemanıdır.

Bu denklem, v kontrol hacminin S yüzeyinden birim zamanda çıkan net kütle miktarının, v kontrol hacmindeki kütle miktarının birim zamandaki değişimine eşit olduğunu açıklar.

Süreklilik denkleminin diferansiyel formunu elde edebilmek için (3.1)' de elde edilen denklemdeki yüzey integralinin, hacim integraline dönüştürülmesi gerekir. Çünkü denklemdeki tüm integrallerin aynı boyutta olması gerekir. Bunun için diverjans teoreminden yararlanılır.

$\iint_S \vec{U} \cdot \vec{n} dS$: Kontrol hacminin yüzeyinden geçen hacimsel debi,

$\iiint_v \nabla \cdot \vec{U} dv$: Kontrol hacmi içerisindeki akışkanın genişleme hızı,

olmak üzere, diverjans teoremine göre;

$$\iint_S \rho_{fl}(\vec{U} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_v \nabla \cdot (\rho_{fl}\vec{U}) dv \quad (3.2)$$

yazılabilir. Burada;

∇ : Gradyant operatörüdür.

Buna göre süreklilik denklemi yeniden düzenlenecek olursa;

$$\iiint_v \left(\frac{\partial \rho_{fl}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{fl}\vec{U}) \right) dv = 0 \quad (3.3)$$

elde edilir.

(3.3)'deki integral içerisindeki ifade de sifıra eşittir. Çünkü bu denklem akışkan içindeki herhangi bir kontrol hacmi için geçerlidir. Böylece denklemin diferansiyel formu da aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\frac{\partial \rho_{fl}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{fl} \vec{U}) = 0 \quad (3.4)$$

Bu denklem, ikinci terimi açılarak;

$$\frac{\partial \rho_{fl}}{\partial t} + \rho_{fl} \nabla \cdot \vec{U} + \vec{U} \cdot \nabla \rho_{fl} = 0 \quad (3.5)$$

şeklinde yazılabilir. Daimi akışta;

$$\frac{\partial \rho_{fl}}{\partial t} = 0 \quad (3.6)$$

dır. Ayrıca sıkıştırılmaz bir akışkanın yoğunluğu (ρ_{fl}), akış boyunca değişmez ve süreklilik denklemi aşağıdaki şekli alır;

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0 \quad (3.7)$$

3.1.1.2. Momentumun Korunumu

Momentumun korunumu ilkesine göre, bir kontrol hacminden birim zamanda dışarı çıkan momentum miktarı ile bu kontrol hacminde birim zamanda biriken momentum miktarının toplamı, kontrol hacminden geçen momentumun birim zamandaki değişimine eşittir. Buna göre;

$$\frac{d(m\vec{U})}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho_{fl} \vec{U} dv + \iint_S \rho_{fl} \vec{U} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dS \quad (3.8)$$

olur. Newton'un II. hareket kanununa göre; bir kontrol hacmi içindeki akışkana etkiyen kuvvetlerin toplamı, momentumdaki birim zamandaki değişime eşit olmalıdır. Bu kuvvetlerin x_i doğrultusundaki bileşenleri;

$$(\Sigma \vec{F})_i = \iiint_V \rho_{fl} f_i dv + \iint_S n_j \sigma_{ij} dS \quad (3.9)$$

şeklinde yazılabilir. Burada;

$n_j \sigma_{ij}$: Birim alan başına yüzey kuvvetleri,

$\rho_{fl} f_i$: Birim hacim başına bünye kuvvetleridir.

(3.8) ve (3.9) eşitliklerinden yararlanarak momentum denkleminin x_i doğrultusundaki integral şekli aşağıdaki gibi yazılır;

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho_{fl} u_i^* dv + \iint_S \rho_{fl} u_i^* (\vec{U} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_V \rho_{fl} f_i dv + \iint_S n_j \sigma_{ij} dS \quad (3.10)$$

Diverjans teoreminden yararlanarak;

$$\iint_S \rho_{fl} u_i^* (\vec{U} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_V \nabla \cdot (\rho_{fl} u_i^* \vec{U}) dv \quad (3.11)$$

$$\iint_S n_j \sigma_{ij} dS = \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dv \quad (3.12)$$

yazılabilir. Buna göre (3.10) denklemi yeniden düzenlenirse;

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{fl} u_i^*) + \nabla \cdot (\rho_{fl} u_i^* \vec{U}) - \rho_{fl} f_i - \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \right] dv = 0 \quad (3.13)$$

elde edilir.

Bu integralin içi de sifıra eşittir. Çünkü burada elde edilen integral denklemi yine herhangi bir kontrol hacmi için geçerlidir. Dolayısıyla x_i doğrultusunda momentum denkleminin diferansiyel formu da aşağıdaki gibi yazılabilir;

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{fl} u_i^*) + \nabla \cdot (\rho_{fl} u_i^* \vec{U}) \right] = \rho_{fl} f_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.14)$$

3.1.1.3. Akışkan İçin Bünye Denklemleri

Akışkanlar mekaniği problemlerini sadece süreklilik denklemi ve momentum denklemlerini kullanılarak çözemeyiz. Ayrıca gerilme bileşenlerini, basınç alanı ve hız alanına bağlı olarak veren bünye denklemlerinden de faydalanılır.

Bir akışkan hareketsizken, akışkan yüzeyine sadece yerel hidrostatik basınç etki eder. Bu basınç yüzeyin normal doğrultusunda ve içeri doğrudur. Ancak akışkan durgun olmadığı zaman, hidrostatik basınçla birlikte viskoz gerilmeler oluşabilir.

Newtonyen akışkanlarda gerilme bileşenleri (σ_{ij}) , hız alanına bağlı olup, $\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j}$ türevleri ile doğrusal orantılıdır. Bu gerilme bileşenleri (σ_{ij}) aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\sigma_{ij} = \left(-p - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k^*}{\partial x_k}\right) \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i}\right) \quad (3.15)$$

Sıkıştırılmaz akışkan için termal etkilerin ihmal edildiği en genel bünye denklemi ise;

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \tau_{ij} \quad (3.16)$$

şeklindedir. (3.16) eşitliğinde;

p : Hidrostatik basınç,

δ_{ij} : Kronecker delta fonksiyonu,

τ_{ij} : Viskoz gerilim tensörü,

σ_{ij} : Gerilme bileşenleridir.

Kronecker delta fonksiyonu (δ_{ij}), aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.17)$$

İzotermal yaklaşım viskozitenin sabit olduğu, sıkıştırılmaz akış ise yoğunluğun sabit olduğu manasına gelir. Bu yüzden izotermal, sıkıştırılmaz ve Newtonyen bir akışkan için τ_{ij} viskoz gerilim tensörü aşağıdaki gibi olur;

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.18)$$

Bu ifadede;

μ : Akışkan viskozitesi,

ε_{ij} : Birim şekil değiştirme hız tensörüdür.

(3.16) eşitliği yeniden düzenlenirse gerilim ifadesi;

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (3.19)$$

olarak elde edilir.

Burada, birim şekil değiştirme hız tansörü (ε_{ij}) ;

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i} \right) \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlanır.

3.1.2. Navier-Stokes Denklemleri

Newtonyen bir akışkanın aksenal simetrik hareketi, Navier-Stokes denklemleri ile temsil edilmektedir. Viskozite (μ) sabit kabul edilip (3.15) ifadesi (3.14) denkleminde yerine konulursa, Navier-Stokes denklemleri;

$$\rho_{fl} \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \right] = \rho_{fl} \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{U} + \frac{\mu}{3} \nabla (\nabla \cdot \vec{U}) \quad (3.21)$$

gibi bulunur.

Sıkıştırılmaz akışkan için ($\nabla \cdot \vec{U} = 0$ olduğundan), (3.21) eşitliği yeniden düzenlenecek olursa;

$$\rho_{fl} \left[\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \vec{U} \cdot \nabla \vec{U} \right] = \rho_{fl} \vec{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{U} \quad (3.22)$$

elde edilir.

3.1.3. Silindirik Koordinatlarda Akışkan Hareket Denklemleri

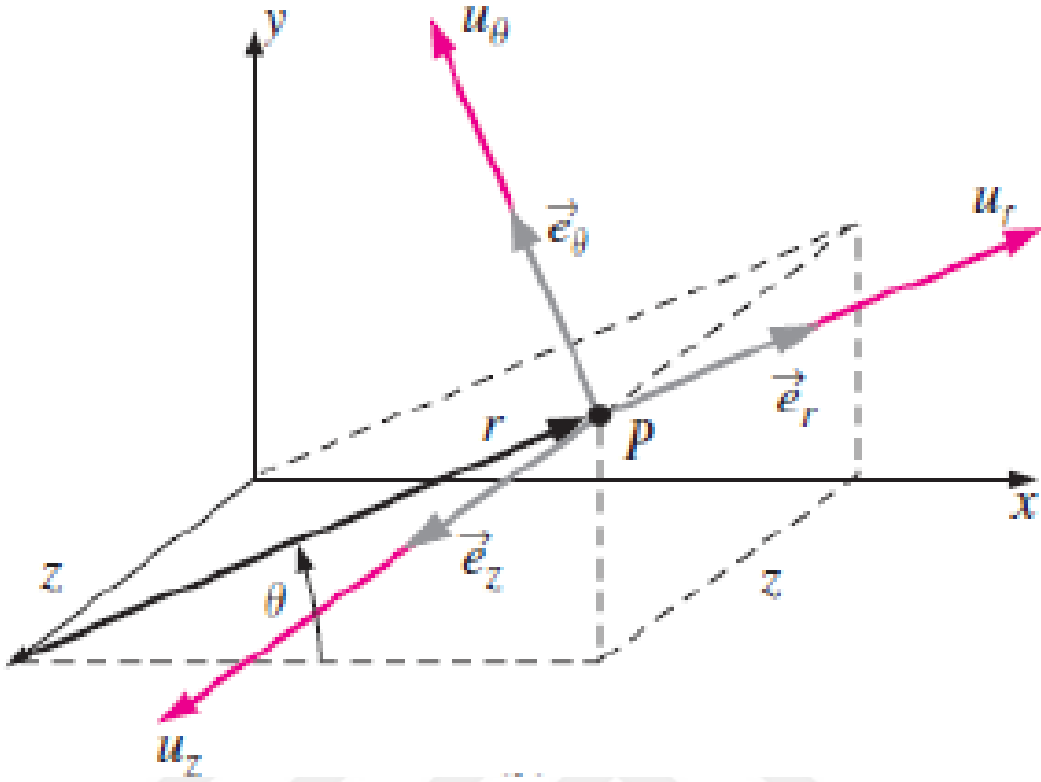
Silindirik koordinat sistemi Şekil 3.2'de gösterilmiştir. Bu koordinat sisteminde laplasiyen ve gradyan operatörleri;

$$\text{Gradyan } \nabla = \left(\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}, \vec{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.23)$$

$$\text{Laplasiyen } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.24)$$

řeklinindedir. Burada;

$\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$: r, θ ve z doğrultularındaki birim vektörlerdir.



Şekil 3.2: Silindirik koordinat sistemi (Birim vektörler ve hız bileşenleri).

Birim şekil değiştirme hız tansörü bileşenleri;

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r^*}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r^*}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^*}{\partial \theta} \quad (3.25)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z^*}{\partial z}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^*}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^*}{\partial r} - \frac{u_\theta^*}{r} \right)$$

$$\varepsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r^*}{\partial z} + \frac{\partial u_z^*}{\partial r} \right)$$

$$\varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z^*}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^*}{\partial z} \right)$$

şeklindedir. Buna göre, silindirik koordinatlarda sıkıştırılamaz akışkana ait (3.7)' de verilen süreklilik denklemi,;

$$\frac{u_r^*}{r} + \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z^*}{\partial z} = 0 \quad (3.26)$$

olur.

(3.22) denkleminde yararlanarak, r, θ ve z doğrultusundaki hareket denklemleri ise sırasıyla;

$$\begin{aligned} & \rho_{fl} \left(\frac{\partial u_r^*}{\partial t} + u_r^* \frac{\partial u_r^*}{\partial r} - \frac{u_\theta^{*2}}{r} + \frac{u_\theta^*}{r} \frac{\partial u_r^*}{\partial \theta} + u_z^* \frac{\partial u_r^*}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial p}{\partial r} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_r^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^*}{\partial r} - \frac{u_r^*}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r^*}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r^*}{\partial z^2} \right) \\ & \quad + \rho_{fl} f_r \\ & \rho_{fl} \left(\frac{\partial u_\theta^*}{\partial t} + u_r^* \frac{\partial u_\theta^*}{\partial r} + \frac{u_\theta^*}{r} \frac{\partial u_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{u_r^* u_\theta^*}{r} + u_z^* \frac{\partial u_\theta^*}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_\theta^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^*}{\partial r} - \frac{u_\theta^*}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta^*}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r^*}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta^*}{\partial z^2} \right) \\ & \quad + \rho_{fl} f_\theta \\ & \rho_{fl} \left(\frac{\partial u_z^*}{\partial t} + u_r^* \frac{\partial u_z^*}{\partial r} + \frac{u_\theta^*}{r} \frac{\partial u_z^*}{\partial \theta} + u_z^* \frac{\partial u_z^*}{\partial z} \right) \\ & = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial z^2} \right) + \rho_{fl} f_z \end{aligned} \quad (3.27)$$

şeklinde elde edilir. Burada;

u_r^*, u_θ^*, u_z^* : Akışkan hızının radyal, teğetsel ve eksenel doğrultudaki bileşenleridir.

f_r, f_θ, f_z : Radyal, teğetsel ve eksenel doğrultudaki hacim kuvvet bileşenleridir.

Bu çalışmada akışkanın eksenel simetrik hareketi inceleneceği için, akışkanın sadece radyal $u_r^* = u_r^*(r, z, t)$ ve eksenel $u_z^* = u_z^*(r, z, t)$ hız bileşenleri bulunacak, teğetsel hız bileşeni $u_\theta^* = 0$ olacaktır. Ayrıca hacim kuvvetleri ihmal edilirse ($f_r = 0, f_\theta = 0, f_z = 0$), (3.27)'de verilen hareket denklemleri;

$$\left(\frac{\partial u_r^*}{\partial t} + u_r^* \frac{\partial u_r^*}{\partial r} + u_z^* \frac{\partial u_r^*}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho_{fl}} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_r^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^*}{\partial r} - \frac{u_r^*}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r^*}{\partial z^2}\right) \quad (3.28)$$

$$\left(\frac{\partial u_z^*}{\partial t} + u_r^* \frac{\partial u_z^*}{\partial r} + u_z^* \frac{\partial u_z^*}{\partial z}\right) = -\frac{1}{\rho_{fl}} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial z^2}\right)$$

halini alır. Burada;

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_{fl}}$$

ν : Kinematik viskozitedir.

Ayrıca (3.26)'da verilen sıkışmazlık koşulu;

$$\frac{\partial u_r^*}{\partial r} + \frac{u_r^*}{r} + \frac{\partial u_z^*}{\partial z} = 0 \quad (3.29)$$

şeklini alır. Sınır şartlarında kullanılacak gerilme bileşenleri ise (3.19) eşitliğinden yararlanarak

$$\sigma_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial u_r^*}{\partial r} \quad (3.30)$$

$$\sigma_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u_r^*}{\partial z} + \frac{\partial u_z^*}{\partial r}\right)$$

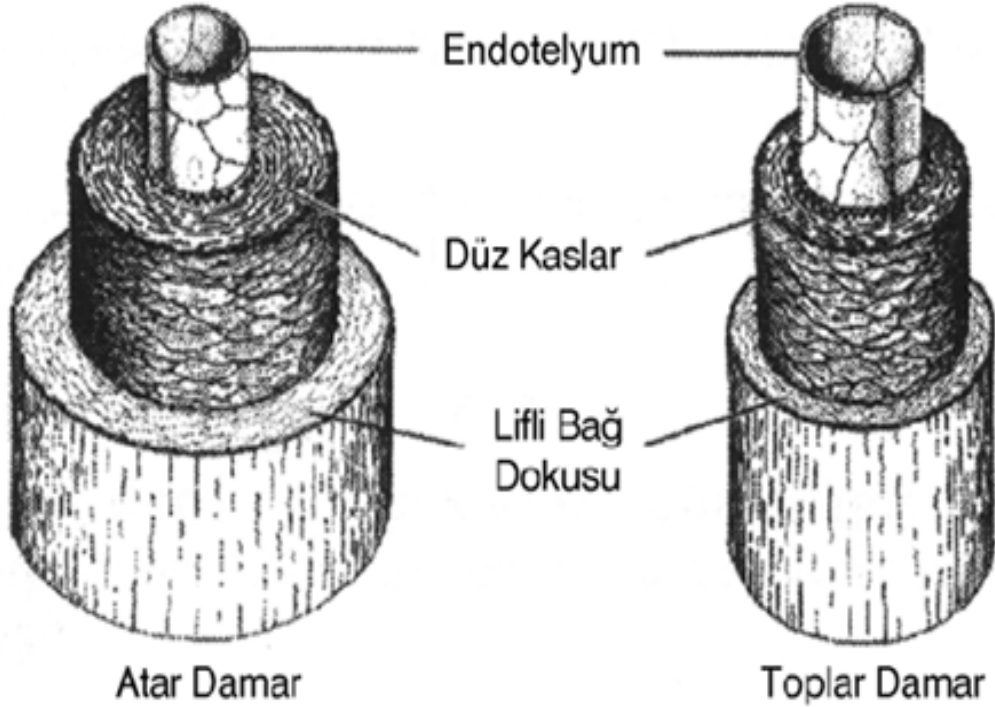
şekilde yazılır.

3.2. DAMAR İÇİN HAREKET DENKLEMLERİ

Damarlar, kanı vücudumuzun her tarafına taşıyan dolaşım sistemi organlarıdır. Atardamarlar, toplardamarlar ve kılcal damarlar olmak üzere üç gruba ayrılırlar. Atardamarlar, temiz kanı kalpten alarak vücudumuzdaki organlara dağıtan damarlardır (Akciğer atardamarı, kalpteki kirli kanı akciğerlere taşır). Bu damarlara arter denilmektedir. Toplardamarlar, vücudumuza yayılan kanın tekrar kalbe ulaşmasını sağlayan damarlardır. Bu damarlar genellikle kirli kanı

taşırlar (Akçığır toplardamarı temiz kan taşıır) . Bu damarlara da ven denilmektedir. Atardamarlar ile toplardamarları birleştiren damarlar ise kılcal damarlardır. Kılcal damarlar, kandaki oksijen ve besini hücrelere, hücrelerdeki atıkları ise kana taşırlar. En büyük damar aort atardamarıdır. Bu damar kanın bütün vücuda pompalandığı atardamardır.

Atardamarlar üç tabakadan oluşurlar. Bu tabakalar içten dışa doğru, İntima tabakası, Media tabakası ve Adventisia tabakasıdır. İntima tabakası, en içte tek katlı epitel hücrelerin oluşturduğu endotel tabakası ve endotel tabakasının hemen altındaki bağ dokusundan oluşmaktadır. Endotel tabakası, kanın kolay hareket etmesi için kaygan bir yüzey oluşturur. İntima tabakasının kalınlığı çok azdır. Bu yüzden yük taşımadığı kabul edilebilir. Media tabakası, düz kaslardan oluşmaktadır. Bu tabaka içerisinde elastik lifler bulunmaktadır. Bu elastik lifler damara esneklik kazandırarak kanın hareketini kolaylaştırır. Adventisia tabakası ise lifli bağ dokusundan oluşmaktadır. Bu lifler sayesinde oluşan kan basıncına karşı damarın dayanıklılığını artırır.



Şekil 3.3: Damar iç yapısı.

İçinden akışkan geçen elastik ve silindirik borularda dalga yayılımı problemi ele alınacağı için damar dokusuna ait mekanik davranışın da incelenmesi gerekir. Bu yüzden damar, lineer ve elastik malzeme olarak kabul edilmiş, tek tabakalı olarak ele alınmıştır.

3.2.1. Damar İçin Bünye Denklemleri

Genelleştirilmiş Hooke kanunu, lineer elastik bir malzemede gerilmelerle genlemeler arasındaki ilişkiyi açıklar. Bu kanuna göre;

$$\tau_{ij}^{**} = C_{ijkl} e_{kl}^* \quad (3.31)$$

olur. Burada;

τ_{ij}^{**} : Gerilme tensörünün bileşenleri,

C_{ijkl} : Elastik rijitlik tensörü (viskozite tensörü),

e_{kl}^* : Genleme tensörünün bileşenleridir.

Damar malzemesi lineer, izotropik, elastik kabul edildiği için, C_{ijkl} tensörü izotrop tensör olur. Buna göre;

$$C_{ijkl} = \bar{\lambda} \delta_{ij} \delta_{kl} + \bar{\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.32)$$

olur. Hooke kanunundan yararlanarak;

$$\tau_{ij}^{**} = \bar{\lambda} e_{kk}^* \delta_{ij} + 2\bar{\mu} e_{ij}^* \quad (3.33)$$

bulunur. Elastik katı malzeme için yer değiştirmeler genlemelerle ilişkilidir. Buna göre yer değiştirme- genleme bağıntıları;

$$e_{ij}^* = \frac{1}{2} (\mathcal{V}_{i,j} + \mathcal{V}_{j,i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \mathcal{V}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.34)$$

şeklindedir. Bu bağıntı (3.33) 'de yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\tau_{ij}^{**} = \bar{\lambda} \mathcal{V}_{k,k} \delta_{ij} + \bar{\mu} (\mathcal{V}_{i,j} + \mathcal{V}_{j,i}) \quad (3.35)$$

elde edilir. Burada;

$\bar{\lambda}$ ve $\bar{\mu}$: Lamé sabitleridir (Elastik sabitler).

Lamé sabitleri, aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\bar{\lambda} = \frac{E \bar{\nu}}{(1 + \bar{\nu})(1 - 2\bar{\nu})} \quad (3.36)$$

$$\bar{\mu} = \frac{E}{2(1 + \bar{\nu})}$$

Burada;

E: Elastisite modülü (Young modülü),

$\bar{\nu}$: Poisson oranıdır.

3.2.2. Denge Denklemleri

Newton'un ikinci kanunundan yani;

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \quad (3.37)$$

yararlanarak elastik katı için dinamik haldeki denge denklemleri aşağıdaki gibi yazılır;

$$\tau_{ij,j}^{**} + F_i = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{V}_i}{\partial t^2} \quad (3.38)$$

(3.35)'deki gerilme ifadesi (3.38)'de verilen denge denkleminde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \mathcal{V}_{j,ji} + \bar{\mu} \mathcal{V}_{i,jj} + F_i = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{V}_i}{\partial t^2} \quad (3.39)$$

elde edilir. Bu denklemler Navier-Lame denklemleridir. Navier-Lame denklemleri, sınır şartlarını yer değiştirmeler cinsinden veren problemlere daha uygun olan denklemlerdir..

3.2.3. Silindirik Koordinatlarda Katı Malzeme İçin Hareket Denklemleri

Bir önceki bölümde katı malzeme (damar) için ifade edilen yerdeğiştirmeye ilgili hareket denklemleri bu bölümde silindirik koordinatlarda verilecektir.

$\mathcal{V} = (\mathcal{V}_r, \mathcal{V}_\theta, \mathcal{V}_z)$ radyal doğrultudaki, teğetsel doğrultudaki ve eksenel doğrultudaki yer değiştirmelerdir. Buna göre, silindirik koordinatlarda genleme tensörünün bileşenleri;

$$\begin{aligned}
e_{rr}^* &= \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial r} \\
e_{\theta\theta}^* &= \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\mathcal{V}_r}{r} \\
e_{zz}^* &= \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial z} \\
e_{r\theta}^* &= e_{\theta r}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{V}_\theta}{\partial r} - \frac{\mathcal{V}_\theta}{r} \right) \\
e_{rz}^* &= e_{zr}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial z} \right) \\
e_{\theta z}^* &= e_{z\theta}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{V}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial \theta} \right)
\end{aligned} \tag{3.40}$$

şeklinde bulunur. Gerilme bileşenleri ise;

$$\begin{aligned}
\tau_{rr}^{**} &= \bar{\lambda} \operatorname{div} \mathcal{V} + 2\bar{\mu} \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial r} \\
\tau_{\theta\theta}^{**} &= \bar{\lambda} \operatorname{div} \mathcal{V} + 2\bar{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\mathcal{V}_r}{r} \right) \\
\tau_{zz}^{**} &= \bar{\lambda} \operatorname{div} \mathcal{V} + 2\bar{\mu} \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial z} \\
\tau_{\theta r}^{**} &= \tau_{r\theta}^{**} = \bar{\mu} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial \theta} - \frac{\mathcal{V}_\theta}{r} + \frac{\partial \mathcal{V}_\theta}{\partial r} \right) \\
\tau_{rz}^{**} &= \tau_{zr}^{**} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial z} \right) \\
\tau_{\theta z}^{**} &= \tau_{z\theta}^{**} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{V}_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial \theta} \right)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

olarak bulunur. Burada

$$\operatorname{div} \mathcal{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial (r\mathcal{V}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial z} \tag{3.42}$$

şeklindedir. Genel koordinatlarda ifade edilen (3.39)'daki denklem takımı, gerilme bileşenleri cinsinden silindirik koordinatlarda yazılırsa;

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{rr}^{**}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}^{**}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}^{**}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr}^{**} - \tau_{\theta\theta}^{**}}{r} + F_r &= \rho \frac{\partial^2 \mathcal{V}_r}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}^{**}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}^{**}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}^{**}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\theta}^{**} + F_\theta &= \rho \frac{\partial^2 \mathcal{V}_\theta}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{rz}^{**}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}^{**}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}^{**}}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz}^{**} + F_z &= \rho \frac{\partial^2 \mathcal{V}_z}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (3.43)$$

denklemleri elde edilir. Burada;

F_r, F_θ, F_z : Radyal, teğetsel ve eksenel doğrultudaki kütlelesel kuvvetlerdir.

Bu çalışmada katı malzemenin (damarın) eksenel simetrik hareketi dikkate alınacaktır .Yani, $\mathcal{V}_r = (r, z, t)$, $\mathcal{V}_\theta = 0$, $\mathcal{V}_z = (r, z, t)$ olduğu kabul edilecektir. Ayrıca F_r, F_θ, F_z kütle kuvvetleri ihmal edilecektir. Buna göre (3.41)'deki gerilme bileşenleri yeniden düzenlenecek olursa;

$$\begin{aligned}\tau_{rr}^{**} &= \bar{\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r\mathcal{V}_r)}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial z} \right) + 2\bar{\mu} \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial r} \\ \tau_{\theta\theta}^{**} &= \bar{\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r\mathcal{V}_r)}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial z} \right) + 2\bar{\mu} \left(\frac{\mathcal{V}_r}{r} \right) \\ \tau_{zz}^{**} &= \bar{\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r\mathcal{V}_r)}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial z} \right) + 2\bar{\mu} \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial z} \\ \tau_{r\theta}^{**} &= \tau_{\theta r}^{**} = 0 \\ \tau_{rz}^{**} &= \tau_{zr}^{**} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial z} \right) \\ \tau_{z\theta}^{**} &= \tau_{\theta z}^{**} = 0\end{aligned}\quad (3.44)$$

olur. (3.43)'deki denge denklemleri ise;

$$\frac{\partial \tau_{rr}^{**}}{\partial r} + \frac{\tau_{rr}^{**} - \tau_{\theta\theta}^{**}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}^{**}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{V}_r}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}^{**}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{zz}^{**}}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz}^{**} = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{V}_z}{\partial t^2} \quad (3.45)$$

şeklinde elde edilir. (3.44)'de verilen gerilme bileşenleri (3.45)'de denge denklemlerinde yerine koyulup, düzenlenirse aşağıdaki diferansiyel denklem takımı bulunur;

$$(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial r} - \frac{\mathcal{V}_r}{r^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_r}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_z}{\partial r \partial z} \right) + \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_r}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{V}_z}{\partial r \partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{V}_r}{\partial t^2}$$

$$(3.46)$$

$$(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_r}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_z}{\partial z^2} \right) - \bar{\mu} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_r}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial z} - \frac{\partial^2 \mathcal{V}_z}{\partial r^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{V}_z}{\partial t^2}$$

Sınır şartlarında kullanılacak gerilme bileşenleri de aşağıdaki gerilme bileşenleridir.

$$\tau_{rr}^{**} = \bar{\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r \mathcal{V}_r)}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial z} \right) + 2\bar{\mu} \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial r}$$

$$\tau_{rz}^{**} = \tau_{zr}^{**} = \bar{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial z} \right) \quad (3.47)$$

3.3. AKIŞKAN HAREKET DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Akışkan denklemleri için eksenel doğrultuda zamana bağlı dalga hareketi incelenecektir. Bu nedenle, akışkanın silindirik koordinatlarda hareket denklemleri için aşağıda belirtilen harmonik çözümler aranacaktır;

$$p = P(r) e^{i(\omega t - kz)}$$

$$u_r^* = U_r(r) e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.48)$$

$$u_z^* = U_z(r) e^{i(\omega t - kz)}$$

Burada;

$P(r)$, $U_r(r)$, $U_z(r)$: Dalga genlikleri,

k : Dalga sayısı,

ω : Açısal frekansıdır.

Daha önce (3.28)'de akışkana ait hareket denklemleri ifade edilmişti.

$$u_z^* \frac{\partial u_r^*}{\partial z} \ll \frac{\partial u_r^*}{\partial t} \quad \text{ve} \quad u_r^* \frac{\partial u_r^*}{\partial r} \ll \frac{\partial u_r^*}{\partial t} \quad (3.49)$$

$$u_z^* \frac{\partial u_z^*}{\partial z} \ll \frac{\partial u_z^*}{\partial t} \quad \text{ve} \quad u_r^* \frac{\partial u_z^*}{\partial r} \ll \frac{\partial u_z^*}{\partial t}$$

olduğundan bu denklemlerdeki $u_z^* \frac{\partial u_r^*}{\partial z}, u_r^* \frac{\partial u_r^*}{\partial r}, u_z^* \frac{\partial u_z^*}{\partial z}, u_r^* \frac{\partial u_z^*}{\partial r}$ terimleri ihmal edilebilir.

Denklemler yeniden düzenlenirse;

$$\frac{\partial u_r^*}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_{fl}} \frac{\partial p}{\partial r} + v \left(\frac{\partial^2 u_r^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^*}{\partial r} - \frac{u_r^*}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r^*}{\partial z^2} \right) \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial u_z^*}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_{fl}} \frac{\partial p}{\partial z} + v \left(\frac{\partial^2 u_z^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^*}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z^*}{\partial z^2} \right)$$

bulunur. (3.48)'deki ifadeler, (3.29) ve (3.50)'de yazılırsa aşağıda belirtilen adi türevli diferansiyel denklem takımı elde edilir ;

$$U_r' + \frac{1}{r} U_r - i k U_z = 0 \quad (3.51)$$

$$i \omega U_r = -\frac{1}{\rho_{fl}} P' + v \left(U_r'' + \frac{1}{r} U_r' - \frac{1}{r^2} U_r - k^2 U_r \right) \quad (3.52)$$

$$i \omega U_z = \frac{i k}{\rho_{fl}} P + v \left(U_z'' + \frac{1}{r} U_z' - k^2 U_z \right) \quad (3.53)$$

Üsler r 'ye göre türevi göstermektedir. (3.51)'den;

$$U_z = \frac{1}{i k} \left(U_r' + \frac{1}{r} U_r \right) \quad (3.54)$$

elde edilir. (3.52) eşitliği $(-1/r)$ ile çarpılırsa;

$$i \omega \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r \rho_{fl}} P' + v \left(-\frac{1}{r} U_r'' - \frac{1}{r^2} U_r' + \frac{1}{r^3} U_r + \frac{1}{r} k^2 U_r \right) = 0 \quad (3.55)$$

bulunur. (3.54) eşitliği (3.53)'de yerine yazılır, $(i k)$ ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} -\frac{k^2}{\rho_{fl}} P + v \left[\left(U_r' + \frac{1}{r} U_r \right)'' + \frac{1}{r} \left(U_r' + \frac{1}{r} U_r \right)' - k^2 \left(U_r' + \frac{1}{r} U_r \right) \right] \\ -i \omega \left(U_r' + \frac{1}{r} U_r \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

elde edilir. (3.55) ve (3.56) toplanırsa;

$$\frac{1}{r \rho_{fl}} P' - \frac{k^2}{\rho_{fl}} P + v \left[\left(U_r' + \frac{1}{r} U_r \right)'' - k^2 U_r' \right] - i \omega U_r' = 0 \quad (3.57)$$

olur. (3.52) ifadesi $(-d/dr)$ ile çarpılırsa;

$$\frac{1}{\rho_{fl}} P'' - v \left[\left(U_r' + \frac{1}{r} U_r \right)'' - k^2 U_r' \right] + i \omega U_r' = 0 \quad (3.58)$$

elde edilir. (3.57) ve (3.58) toplanıp, elde edilen ifade $(r^2 \rho_{fl})$ ile çarpılırsa;

$$r^2 P'' + r P' - r^2 k^2 P = 0 \quad (3.59)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem Modifiye Bessel Denklemi'dir. (3.59)'dan, $P(r)$ fonksiyonunun $r = 0$ 'da sonlu kalacak çözümü;

$$P(r) = D I_0(kr) \quad (3.60)$$

olarak bulunur. Burada;

D : Keyfi integrasyon sabiti,

$I_0(kr)$: Sıfıncı mertebeden birinci tür Modifiye Bessel fonksiyonudur.

(3.53) ifadesi v 'ye bölünüp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$U_z'' + \frac{1}{r} U_z' + m^2 U_z = -\frac{ik}{\mu} P \quad (3.61)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Burada,

$$m^2 = - \left(k^2 + \frac{i \omega}{v} \right) \quad (3.62)$$

olarak tanımlanmıştır. (3.61) denklemi r^2 ile çarpılırsa;

$$r^2 U_z'' + r U_z' + m^2 r^2 U_z = - r^2 \frac{i k}{\mu} P \quad (3.63)$$

elde edilir. (3.63) diferansiyel denkleminin sol tarafı Bessel denklemidir. Denklemin çözümü;

$$U_z(r) = U_{z_1}(r) + U_{z_2}(r) \quad (3.64)$$

olsun. $U_{z_1}(r)$ fonksiyonunun $r = 0$ 'da sonlu kalacak çözümü;

$$U_{z_1}(r) = E J_0(mr) \quad (3.65)$$

olarak bulunur. Burada;

E : Keyfi integrasyon sabiti,

$J_0(mr)$: Sıfıncı mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonudur.

$$U_{z_2}(r) = F I_0(kr) \quad (3.66)$$

olsun. (3.60) ve (3.66) ifadesi (3.63)'de yerine yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$F = - \frac{i k}{\mu(k^2 + m^2)} D \quad (3.67)$$

olarak bulunur. Buna göre (3.66)'dan;

$$U_{z_2}(r) = - \frac{i k}{\mu(k^2 + m^2)} D I_0(kr) \quad (3.68)$$

olur. (3.65) ve (3.68) ifadeleri (3.64)'de yazılırsa;

$$U_z(r) = - \frac{i k}{\mu(k^2 + m^2)} D I_0(kr) + E J_0(mr) \quad (3.69)$$

elde edilir. (3.52) ifadesi v 'ye bölünüp, elde edilen denklem r^2 ile çarpılırsa aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir;

$$r^2 U_r'' + r U_r' + (m^2 r^2 - 1) U_r = r^2 \frac{1}{\mu} P' \quad (3.70)$$

(3.70) 'daki denklemde eşitliğin sol tarafı Bessel denklemidir. Denklemın çözümü;

$$U_r(r) = U_{r_1}(r) + U_{r_2}(r) \quad (3.71)$$

olsun. $U_{r_1}(r)$ fonksiyonunun $r = 0$ 'da sonlu kalacak çözümü;

$$U_{r_1}(r) = H J_1(mr) \quad (3.72)$$

olarak bulunur. Burada;

H : Keyfi integrasyon sabiti,

$J_1(mr)$: Birinci mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonudur.

$$U_{r_2}(r) = G I_1(kr) \quad (3.73)$$

olsun. (3.60) ve (3.73) ifadeleri, (3.70)' de yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$G = \frac{k}{\mu(k^2+m^2)} D \quad (3.74)$$

olarak elde edilir. Buna göre (3.73)'den;

$$U_{r_2}(r) = \frac{k}{\mu(k^2+m^2)} D I_1(kr) \quad (3.75)$$

olur. (3.72) ve (3.75) ifadeleri (3.71)' de yazılırsa;

$$U_r(r) = \frac{k}{\mu(k^2+m^2)} D I_1(kr) + H J_1(mr) \quad (3.76)$$

elde edilir. (3.76)' da elde edilen $U_r(r)$ ifadesi ve (3.69)'da elde edilen $U_z(r)$ ifadesi, (3.51)'de sıkışmazlık koşulunda yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$H = \frac{ik}{m} E \quad (3.77)$$

şeklinde bulunur. Buna göre (3.76) yeniden düzenlenirse;

$$U_r(r) = \frac{k}{\mu(k^2+m^2)} D I_1(kr) + \frac{ik}{m} E J_1(mr) \quad (3.78)$$

olur. (3.60), (3.69) ve (3.78)'de elde edilen $P(r), U_z(r), U_r(r)$ dalga genlikleri (3.48)'de yerine yazılırsa;

$$p = [D I_0(kr)] e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.79)$$

$$u_r^* = \left[\frac{k}{\mu(k^2+m^2)} D I_1(kr) + \frac{ik}{m} E J_1(mr) \right] e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.80)$$

$$u_z^* = \left[-\frac{ik}{\mu(k^2+m^2)} D I_0(kr) + E J_0(mr) \right] e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.81)$$

elde edilir.

Bu ifadeler yardımıyla, (3.30) 'da belirtilen sınır şartlarında kullanılacak gerilme bileşenleri yeniden düzenlenirse;

$$\sigma_{rr} = \left[\left[-I_0(kr) + \frac{2k}{r(k^2+m^2)} (kr I_0(kr) - I_1(kr)) \right] D + \left[\frac{2ik\mu}{mr} (mr J_0(mr) - J_1(mr)) \right] E \right] e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.82)$$

$$\sigma_{rz} = \left[\left[-\frac{2ik^2}{(k^2+m^2)} I_1(kr) \right] D - \left[\frac{\mu}{m} (m^2 - k^2) J_1(mr) \right] E \right] e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.83)$$

olarak bulunur.

3.4. DAMARA AİT TEMEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜLMESİ

Silindirik koordinatlarda katı malzeme (damar) için verilen (3.46)'daki hareket denklemleri;

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} + 2\bar{\mu} &= c_1, & \bar{\lambda} + \bar{\mu} &= c_2 \\ \bar{\mu} &= c_3, & \bar{\lambda} &= c_4 \end{aligned} \quad (3.84)$$

olmak üzere yeniden düzenlenecek olursa;

$$c_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} \right) + c_2 \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r \partial z} \right) + c_3 \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 v_r}{\partial t^2} \quad (3.85)$$

$$c_1 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{V}_z}{\partial z^2} \right) + c_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_r}{\partial r \partial z} \right) + c_3 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 \mathcal{V}_z}{\partial r^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 \mathcal{V}_z}{\partial t^2} \quad (3.86)$$

elde edilir. Bu bölümde, akışkan denklemlerinde olduğu gibi, damar denklemlerinin de aksel doğrultuda, zaman bağlı harmonik dalga hareketi ele alınacaktır. Bu yüzden, katı malzemenin silindirik koordinatlardaki hareket denklemleri için;

$$\mathcal{V}_r = \underline{A} B_1(\alpha r) e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.87)$$

$$\mathcal{V}_z = \underline{D} B_0(\alpha r) e^{i(\omega t - kz)}$$

şeklinde kabul edilerek harmonik çözüm aranacaktır. Burada;

\underline{A} ve \underline{D} : Keyfi sabitler,

B_0 : Sıfırıncı mertebeden Bessel Fonksiyonları,

B_1 : Birinci mertebeden Bessel Fonksiyonları

k : Dalga sayısı,

ω : Açısal frekansıdır.

(3.87)'deki \mathcal{V}_r ve \mathcal{V}_z ifadeleri, (3.85) ve (3.86)'daki hareket denklemlerinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$(\rho\omega^2 - c_1\alpha^2 - c_3k^2)\underline{A} - (ik\alpha c_2)\underline{D} = 0 \quad (3.88)$$

$$(ik\alpha c_2)\underline{A} + (\rho\omega^2 - c_3\alpha^2 - c_1k^2)\underline{D} = 0$$

şeklinde iki lineer cebirsel denklem elde edilir. Bu lineer denklem takımının matris formu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{bmatrix} \rho\omega^2 - c_1\alpha^2 - c_3k^2 & -(ik\alpha c_2) \\ (ik\alpha c_2) & (\rho\omega^2 - c_3\alpha^2 - c_1k^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{A} \\ \underline{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

Denklem takımının sıfırdan farklı bir çözümünün bulunabilmesi için katsayılar matrisinin determinantının sıfıra eşitlenmesi gerekir. Buna göre;

$$[c_1 c_3] \alpha^4 + [-\rho \omega^2 (c_1 + c_3) + k^2 (c_1^2 + c_3^2 - c_2^2)] \alpha^2 + [\rho^2 \omega^4 - \rho \omega^2 k^2 (c_1 + c_3) + k^4 c_1 c_3] = 0 \quad (3.90)$$

elde edilir. Burada;

$$a = c_1 c_3 \quad (3.91)$$

$$b = [-\rho \omega^2 (c_1 + c_3) + k^2 (c_1^2 + c_3^2 - c_2^2)]$$

$$c = [\rho^2 \omega^4 - \rho \omega^2 k^2 (c_1 + c_3) + k^4 c_1 c_3]$$

$$\alpha^2 = \beta$$

olsun. Buna göre (3.90) denklemi ;

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0 \quad (3.92)$$

şeklinde ikinci derece denkleme dönüştür. Bu denklemin çözümünden;

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad (3.93)$$

$$\alpha_{3,4} = -\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad (3.94)$$

elde edilir.

$$B_0(-\alpha r) = B_0(\alpha r) \quad (3.95)$$

$$B_1(-\alpha r) = -B_1(\alpha r)$$

olduğundan α kökleri için sadece α_1 ve α_2 değerleri alınabilir.

$B_0 = J_0$ ve $B_1 = J_1$ olsun. Burada;

J_0 ve J_1 : Birinci türden Bessel fonksiyonlarıdır.

\mathcal{V}_r ve \mathcal{V}_z 'yi, α_1 ve α_2 ve J_0 ve J_1 'e göre yeniden düzenlersek;

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_r &= [A_1 J_1(\alpha_1 r) + A_2 J_1(\alpha_2 r)] e^{i(\omega t - kz)} \\ \mathcal{V}_z &= [D_1 J_0(\alpha_1 r) + D_2 J_0(\alpha_2 r)] e^{i(\omega t - kz)}\end{aligned}\quad (3.96)$$

olur. Bu ifadeleri ana denklemlerde yerine yazarsak;

$$[(\rho\omega^2 - c_1\alpha_1^2 - c_3k^2)A_1 - (ik\alpha_1c_2)D_1]J_1(\alpha_1 r) + [(\rho\omega^2 - c_1\alpha_2^2 - c_3k^2)A_2 - (ik\alpha_2c_2)D_2]J_1(\alpha_2 r) = 0\quad (3.97)$$

$$[(ik\alpha_1c_2)A_1 - (\rho\omega^2 - c_3\alpha_1^2 - c_1k^2)D_1]J_0(\alpha_1 r) + [(ik\alpha_2c_2)A_2 + (\rho\omega^2 - c_3\alpha_2^2 - c_1k^2)D_2]J_0(\alpha_2 r) = 0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}D_1 &= A_1 \varepsilon_1 \\ D_2 &= A_2 \varepsilon_2\end{aligned}\quad (3.98)$$

olsun. Buna göre (3.97)'den;

$$[(\rho\omega^2 - c_1\alpha_1^2 - c_3k^2)A_1 - (ik\alpha_1c_2)A_1\varepsilon_1] = 0\quad (3.99)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{(\rho\omega^2 - c_1\alpha_1^2 - c_3k^2)}{(ik\alpha_1c_2)}$$

$$[(\rho\omega^2 - c_1\alpha_2^2 - c_3k^2)A_2 - (ik\alpha_2c_2)A_2\varepsilon_2] = 0\quad (3.100)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{(\rho\omega^2 - c_1\alpha_2^2 - c_3k^2)}{(ik\alpha_2c_2)}$$

olur. Benzer şekilde, $B_0 = Y_0$ ve $B_1 = Y_1$ olsun. Burada;

Y_0 ve Y_1 : İkinci türden Bessel fonksiyonlarıdır.

Bu kez \mathcal{V}_r ve \mathcal{V}_z 'yi, α_1 ve α_2 ve Y_0 ve Y_1 'e göre yeniden düzenlersek;

$$\mathcal{V}_r = [A_3 Y_1(\alpha_1 r) + A_4 Y_1(\alpha_2 r)] e^{i(\omega t - kz)}\quad (3.101)$$

$$\mathcal{V}_z = [D_3 Y_0(\alpha_1 r) + D_4 Y_0(\alpha_2 r)] e^{i(\omega t - kz)}$$

olur. Bu ifadeleri ana denklemlerde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned} & [(\rho\omega^2 - c_1\alpha_1^2 - c_3k^2)A_3 - (ik\alpha_1c_2)D_3]Y_1(\alpha_1r) \\ & + [(\rho\omega^2 - c_1\alpha_2^2 - c_3k^2)A_4 - (ik\alpha_2c_2)D_4]Y_1(\alpha_2r) = 0 \end{aligned} \quad (3.102)$$

$$\begin{aligned} & [(ik\alpha_1c_2)A_3 - (\rho\omega^2 - c_3\alpha_1^2 - c_1k^2)D_3]Y_0(\alpha_1r) \\ & + [(ik\alpha_2c_2)A_4 + (\rho\omega^2 - c_3\alpha_2^2 - c_1k^2)D_4]Y_0(\alpha_2r) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} D_3 &= A_3\varepsilon_1 \\ D_4 &= A_4\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (3.103)$$

olur. Bu iki işlem sonucunda;

$$\mathcal{V}_r = [A_1J_1(\alpha_1r) + A_2J_1(\alpha_2r) + A_3Y_1(\alpha_1r) + A_4Y_1(\alpha_2r)] e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.104)$$

$$\mathcal{V}_z = [A_1\varepsilon_1J_0(\alpha_1r) + A_2\varepsilon_2J_0(\alpha_2r) + A_3\varepsilon_1Y_0(\alpha_1r) + A_4\varepsilon_2Y_0(\alpha_2r)] e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.105)$$

olarak bulunur. Damar için sınır şartlarında kullanılacak gerilme bileşenleri de (3.47)'deki ifadeler yeniden düzenlenirse aşağıdaki gibi olur.

$$\tau_{rr}^{**} = c_4 \left(\frac{\mathcal{V}_r}{r} + \frac{\partial \mathcal{V}_z}{\partial z} \right) + c_1 \frac{\partial \mathcal{V}_r}{\partial r} \quad (3.106)$$

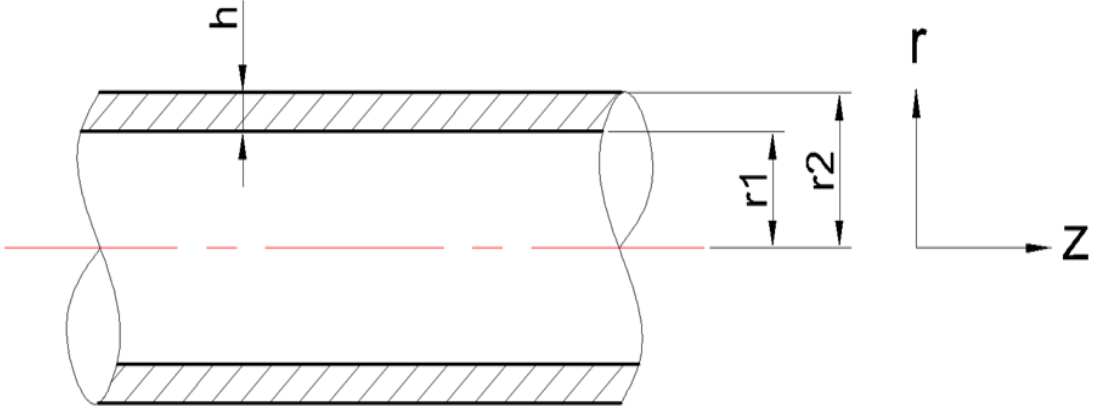
$$\begin{aligned} \tau_{rr}^{**} &= \left(\left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r} J_1(\alpha_1r) + (c_1\alpha_1 - c_4 ik\varepsilon_1) J_0(\alpha_1r) \right] A_1 \right. \\ &+ \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r} J_1(\alpha_2r) + (c_1\alpha_2 - c_4 ik\varepsilon_2) J_0(\alpha_2r) \right] A_2 \\ &+ \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r} Y_1(\alpha_1r) + (c_1\alpha_1 - c_4 ik\varepsilon_1) Y_0(\alpha_1r) \right] A_3 \\ &+ \left. \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r} Y_1(\alpha_2r) + (c_1\alpha_2 - c_4 ik\varepsilon_2) Y_0(\alpha_2r) \right] A_4 \right) e^{i(\omega t - kz)} \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\tau_{rz}^{**} = \tau_{zr}^{**} = c_3 \left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z} \right) \quad (3.108)$$

$$\tau_{rz}^{**} = \tau_{zr}^{**} = \left[c_3 \left[(-ik - \alpha_1 \varepsilon_1) J_1(\alpha_1 r) A_1 + (-ik - \alpha_2 \varepsilon_2) J_1(\alpha_2 r) A_2 + (-ik - \alpha_1 \varepsilon_1) Y_1(\alpha_1 r) A_3 + (-ik - \alpha_2 \varepsilon_2) Y_1(\alpha_2 r) A_4 \right] \right] e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.109)$$

3.5. AKIŞKAN-DAMAR ETKİLEŞİMİ

Bu bölümde ele alınacak problemde akışkanın, şekil 3.4'deki gibi silindirik boru içinde başlangıçta aksenal doğrultuda sabit U_1 hızı ile hareket ettiği kabul edilecektir.



Şekil 3.4: İçerisinden aksenal doğrultuda sabit U_1 hızı ile akışkan geçen silindirik boru.

Sistemde sabit U_1 hızı ile hareket eden bir akışkan olması durumunda, akışkanın hareketinden dolayı akışkan ve damar üzerinde belirli titreşimler meydana gelecektir. Bu titreşimlerin belirli frekansları olduğu için bu frekanslardan yararlanarak sistemin kararlılığı hakkında inceleme yapılabilir.

Dolayısıyla bu bölümde, akışkanın hareketi sonucu oluşturduğu titreşimlerin frekanslarından yola çıkarak sistemin hangi durumlarda kararlı hangi durumlarda kararsız olduğuna bakılacaktır.

3.5.1. Akışkan Hareket Denklemlerinin Lineerleştirilmesi

Akışkan (kan), silindirik boru (damar) içinde başlangıçta aksenal doğrultuda sabit U_1 hızı ile hareket etmektedir. Sistemin kararlılığını incelemek amacıyla, pertürbasyon teoremine göre temel akış hızları (u_r^* , u_z^*) ve basınç (p), bozuntular cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilecek ve akışkan hareketi sabit U_1 akışkan hızına bağlı olarak lineerize edilecektir. Akış yönünü z eksenini kabul edersek;

$$u_r^* = u_r^{**}$$

$$u_z^* = U_1 + u_z^{**} \quad (3.110)$$

$$p = p^*$$

şeklinde olur. u_r^{**}, u_z^{**}, p^* bozuntulardır. (3.110) eşitlikleri, (3.29)' da verilen sıkışmazlık şartında ve (3.28)'de belirtilen akışkan hareket denklemlerinde yerine yazılırsa;

$$\frac{\partial u_r^{**}}{\partial r} + \frac{u_r^{**}}{r} + \frac{\partial u_z^{**}}{\partial z} = 0 \quad (3.111)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u_r^{**}}{\partial t} + u_r^{**} \frac{\partial u_r^{**}}{\partial r} + (U_1 + u_z^{**}) \frac{\partial u_r^{**}}{\partial z} \right) = - \frac{1}{\rho_{fl}} \frac{\partial p^*}{\partial r} \\ + v \left(\frac{\partial^2 u_r^{**}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{**}}{\partial r} - \frac{u_r^{**}}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r^{**}}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (3.112)$$

$$\left(\frac{\partial u_z^{**}}{\partial t} + u_r^{**} \frac{\partial u_z^{**}}{\partial r} + (U_1 + u_z^{**}) \frac{\partial u_z^{**}}{\partial z} \right) = - \frac{1}{\rho_{fl}} \frac{\partial p^*}{\partial z} + v \left(\frac{\partial^2 u_z^{**}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{**}}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z^{**}}{\partial z^2} \right) \quad (3.113)$$

şeklinde elde edilir.

(3.49)'dan yararlanarak, benzer şekilde $u_r^{**} \frac{\partial u_r^{**}}{\partial r}, u_r^{**} \frac{\partial u_z^{**}}{\partial r}, u_z^{**} \frac{\partial u_z^{**}}{\partial z}, u_z^{**} \frac{\partial u_r^{**}}{\partial z}$ terimleri ihmal edilir, (3.112) ve (3.113)'deki hareket denklemleri yeniden düzenlenirse;

$$\left(\frac{\partial u_r^{**}}{\partial t} + U_1 \frac{\partial u_r^{**}}{\partial z} \right) = - \frac{1}{\rho_{fl}} \frac{\partial p^*}{\partial r} + v \left(\frac{\partial^2 u_r^{**}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{**}}{\partial r} - \frac{u_r^{**}}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r^{**}}{\partial z^2} \right) \quad (3.114)$$

$$\left(\frac{\partial u_z^{**}}{\partial t} + U_1 \frac{\partial u_z^{**}}{\partial z} \right) = - \frac{1}{\rho_{fl}} \frac{\partial p^*}{\partial z} + v \left(\frac{\partial^2 u_z^{**}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{**}}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z^{**}}{\partial z^2} \right) \quad (3.115)$$

elde edilir.

3.5.2. Akışkan Hareket Denklemlerinin Çözümü

Bu problemde, lineerleştirilmiş akışkan denklemlerinin aksel doğrultuda zamana bağlı dalga hareketi ele alınacaktır. Bu nedenle silindirik koordinatlarda, akışkanın hareket denklemleri için;

$$\begin{aligned}
 p^* &= \hat{P}(r) e^{i(\omega t - kz)} \\
 u_r^{**} &= \hat{U}_r(r) e^{i(\omega t - kz)} \\
 u_z^{**} &= \hat{U}_z(r) e^{i(\omega t - kz)}
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

şeklinde harmonik çözüm aranacaktır. Burada;

$\hat{P}(r)$, $\hat{U}_r(r)$, $\hat{U}_z(r)$: Dalga genlikleri,

k : Dalga sayısı,

ω : Açısal frekansıdır.

Genellikle, açısal frekans (ω) karmaşık bir sayı, dalga sayısı (k) ise gerçek sayıdır. Açısal frekans (ω) ;

$$\omega = \omega_r + i \omega_i \tag{3.117}$$

gibi ifade edilebilir. Özellikle açısal frekansın sanal kısmı önemlidir. Eğer sanal kısmı (ω_i) ;

$\omega_i < 0$ ise sistemde kararsız durum meydana gelecektir. Çünkü (3.116)'da belirtilen zamana bağlı üstel terimler pozitif olacak ve sonuçlar sonsuza yaklaşacaktır.

$\omega_i > 0$ ise, sistem kararlı hareket edecektir. Çünkü üstel terim zamanla sifira yaklaşacaktır.

$\omega_i = 0$ ise, sistem kritik kararlılık sınırındadır.

(3.116) verilen ifadeler (3.111), (3.114) ve (3.115)'deki eşitliklerde yerine yazılırsa;

$$\hat{U}_r' + \frac{1}{r} \hat{U}_r - i k \hat{U}_z = 0 \tag{3.118}$$

$$i \omega \hat{U}_r - i k U_1 \hat{U}_r = -\frac{1}{\rho_{fl}} \hat{P}' + v \left(\hat{U}_r'' + \frac{1}{r} \hat{U}_r' - \frac{1}{r^2} \hat{U}_r - k^2 \hat{U}_r \right) \tag{3.119}$$

$$i \omega \hat{U}_z - i k U_1 \hat{U}_z = \frac{ik}{\rho_{fl}} \hat{P} + v \left(\hat{U}_z'' + \frac{1}{r} \hat{U}_z' - k^2 \hat{U}_z \right) \quad (3.120)$$

biçiminde adi türevli diferansiyel denklem takımı bulunur. Burada üsler r'ye göre türevi göstermektedir. (3.118) eşitliğinden;

$$\hat{U}_z = \frac{1}{ik} \left(\hat{U}_r' + \frac{1}{r} \hat{U}_r \right) \quad (3.121)$$

elde edilir. (3.119) ifadesi (-1/r) ile çarpılırsa;

$$i \omega \frac{1}{r} \hat{U}_r - i k \frac{1}{r} U_1 \hat{U}_r + \frac{1}{r \rho_{fl}} \hat{P}' + v \left(-\frac{1}{r} \hat{U}_r'' - \frac{1}{r^2} \hat{U}_r' + \frac{1}{r^3} \hat{U}_r + \frac{1}{r} k^2 \hat{U}_r \right) = 0 \quad (3.122)$$

bulunur. (3.121) eşitliği (3.120) eşitliğinde yerine koyulup ve (i k) ile çarpılırsa;

$$-\frac{k^2}{\rho_{fl}} \hat{P} + v \left[\left(\hat{U}_r' + \frac{1}{r} \hat{U}_r \right)'' + \frac{1}{r} \left(\hat{U}_r' + \frac{1}{r} \hat{U}_r \right)' - k^2 \left(\hat{U}_r' + \frac{1}{r} \hat{U}_r \right) \right] - i \omega \left(\hat{U}_r' + \frac{1}{r} \hat{U}_r \right) + i k U_1 \left(\hat{U}_r' + \frac{1}{r} \hat{U}_r \right) = 0 \quad (3.123)$$

elde edilir. (3.122) ve (3.123) toplanırsa;

$$\frac{1}{r \rho_{fl}} \hat{P}' - \frac{k^2}{\rho_{fl}} \hat{P} + v \left[\left(\hat{U}_r' + \frac{1}{r} \hat{U}_r \right)'' - k^2 \hat{U}_r' \right] - i \omega \hat{U}_r' + i k U_1 \hat{U}_r' = 0 \quad (3.124)$$

olur. (3.119) ifadesi (-d/dr) ile çarpılırsa;

$$\frac{1}{\rho_{fl}} \hat{P}'' - v \left[\left(\hat{U}_r' + \frac{1}{r} \hat{U}_r \right)'' - k^2 \hat{U}_r' \right] + i \omega \hat{U}_r' - i k U_1 \hat{U}_r' = 0 \quad (3.125)$$

elde edilir. (3.124) ve (3.125)'deki eşitlikler toplanıp, bulunan ifade ($r^2 \rho_{fl}$) ile çarpılırsa aşağıdaki diferansiyel denklemi elde edilir ;

$$r^2 \hat{P}'' + r \hat{P}' - r^2 k^2 \hat{P} = 0 \quad (3.126)$$

Bu diferansiyel denklem, Modifiye Bessel Denklemi'dir. (3.126) eşitliğinden, $\hat{P}(r)$ fonksiyonunun $r = 0$ 'da sonlu kalacak çözümü;

$$\hat{P}(r) = D_0 I_0(kr) \quad (3.127)$$

olarak bulunur. Burada;

D_0 : Keyfi integrasyon sabiti,

$I_0(kr)$: Sıfıncı mertebeden birinci tür Modifiye Bessel fonksiyonudur.

(3.120) ifadesi v'ye bölünüp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\hat{U}_z'' + \frac{1}{r} \hat{U}_z' + \hat{m}^2 \hat{U}_z = - \frac{ik}{\mu} \hat{P} \quad (3.128)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Burada,

$$\hat{m}^2 = - \left(k^2 + \frac{i\omega}{v} - \frac{ik}{v} U_1 \right) \quad (3.129)$$

olarak tanımlanmıştır. (3.128) denklemi r^2 ile çarpılırsa aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir;

$$r^2 \hat{U}_z'' + r \hat{U}_z' + \hat{m}^2 r^2 \hat{U}_z = -r^2 \frac{ik}{\mu} \hat{P} \quad (3.130)$$

Bu (3.130)'daki denklemin sol tarafı Bessel denklemidir. Diferansiyel denklemin çözümü;

$$\hat{U}_z(r) = \hat{U}_{z_1}(r) + \hat{U}_{z_2}(r) \quad (3.131)$$

olsun. $\hat{U}_{z_1}(r)$ fonksiyonunun $r = 0$ 'da sonlu kalacak çözümü;

$$\hat{U}_{z_1}(r) = E_0 J_0(\hat{m}r) \quad (3.132)$$

olarak bulunur. Burada;

E_0 : Keyfi integrasyon sabiti,

$J_0(\hat{m}r)$: Sıfıncı mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonudur.

$$\hat{U}_{z_2}(r) = F_0 I_0(kr) \quad (3.133)$$

olarak kabul edilsin. (3.127) ve (3.133) eşitlikleri (3.130)'da yazılıp, gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$F_0 = -\frac{ik}{\mu(k^2 + \hat{m}^2)} D_0 \quad (3.134)$$

olarak bulunur. Buna göre (3.133)'den;

$$\hat{U}_{z_2}(r) = -\frac{ik}{\mu(k^2 + \hat{m}^2)} D_0 I_0(kr) \quad (3.135)$$

elde edilir. (3.132) ve (3.135) eşitlikleri (3.131)' de yerine yazılırsa;

$$\hat{U}_z(r) = -\frac{ik}{\mu(k^2 + \hat{m}^2)} D_0 I_0(kr) + E_0 J_0(\hat{m}r) \quad (3.136)$$

olarak bulunur. (3.119) eşitliği v 'ye bölünüp, elde edilen ifade r^2 ile çarpılırsa aşağıdaki diferansiyel denklem elde edilir;

$$r^2 \hat{U}_r'' + r \hat{U}_r' + (\hat{m}^2 r^2 - 1) \hat{U}_r = r^2 \frac{1}{\mu} \hat{P}' \quad (3.137)$$

(3.137) diferansiyel denkleminin sol tarafı Bessel denklemidir. Denklemin çözümü;

$$\hat{U}_r(r) = \hat{U}_{r_1}(r) + \hat{U}_{r_2}(r) \quad (3.138)$$

olsun. $\hat{U}_{r_1}(r)$ fonksiyonunun $r = 0$ 'da sonlu kalacak çözümü;

$$\hat{U}_{r_1}(r) = H_0 J_1(\hat{m}r) \quad (3.139)$$

olur. Bu ifade de;

$J_1(\hat{m}r)$: Birinci mertebeden birinci tür Bessel fonksiyonu

H_0 : Keyfi integrasyon sabitidir.

$$\hat{U}_{r_2}(r) = G_0 I_1(kr) \quad (3.140)$$

olarak kabul edilsin. (3.127) ve (3.140) eşitlikleri, (3.137)' de yazılıp gerekli düzeltmeler yapılırsa;

$$G_0 = \frac{k}{\mu(k^2 + \hat{m}^2)} D_0 \quad (3.141)$$

olarak elde edilir. Buna göre (3.140)'dan;

$$\hat{U}_{r_2}(r) = \frac{k}{\mu(k^2 + \hat{m}^2)} D_0 I_1(kr) \quad (3.142)$$

olur. (3.139) ve (3.142) ifadeleri (3.138)'de yazılırsa;

$$\hat{U}_r(r) = \frac{k}{\mu(k^2 + \hat{m}^2)} D_0 I_1(kr) + H_0 J_1(\hat{m}r) \quad (3.143)$$

bulunur. (3.143)'deki $\hat{U}_r(r)$ eşitliği ve (3.136)'daki $\hat{U}_z(r)$ eşitliği, (3.118)'da sıkışmazlık şartında yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$H_0 = \frac{ik}{\hat{m}} E_0 \quad (3.144)$$

şeklinde bulunur. Buna göre (3.143) yeniden düzenlenirse;

$$\hat{U}_r(r) = \frac{k}{\mu(k^2 + \hat{m}^2)} D_0 I_1(kr) + \frac{ik}{\hat{m}} E_0 J_1(\hat{m}r) \quad (3.145)$$

olur. (3.127), (3.136) ve (3.145)'de elde edilen $\hat{P}(r), \hat{U}_z(r), \hat{U}_r(r)$ dalga genliklerini (3.116)'da yerine yazılırsa;

$$p^* = [D_0 I_0(kr)] e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.146)$$

$$u_r^{**} = \left[\frac{k}{\mu(k^2 + \hat{m}^2)} D_0 I_1(kr) + \frac{ik}{\hat{m}} E_0 J_1(\hat{m}r) \right] e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.147)$$

$$u_z^{**} = \left[-\frac{ik}{\mu(k^2 + \hat{m}^2)} D_0 I_0(kr) + E_0 J_0(\hat{m}r) \right] e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.148)$$

şeklinde elde edilir. Sınır şartlarında kullanılacak (3.30) 'da ifade edilen gerilme bileşenleri bu ifadeler yardımı ile yeniden düzenlenirse;

$$\sigma_{rr} = \left[\left[-I_0(kr) + \frac{2k}{r(k^2 + \hat{m}^2)} (kr I_0(kr) - I_1(kr)) \right] D_0 + \left[\frac{2ik\mu}{\hat{m}r} (\hat{m}r J_0(\hat{m}r) - J_1(\hat{m}r)) \right] E_0 \right] e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.149)$$

$$\sigma_{rz} = \left[\left[-\frac{2ik^2}{(k^2 + \hat{m}^2)} I_1(kr) \right] D_0 - \left[\frac{\mu}{\hat{m}} (\hat{m}^2 - k^2) J_1(\hat{m}r) \right] E_0 \right] e^{i(\omega t - kz)} \quad (3.150)$$

şeklinde bulunur.

3.5.3. Akışkan-Damar Etkileşimi İçin Sınır Şartları

Akışkan (kan) ile damar etkileşimi için, akışkan denklemlerinin ve damar denklemlerinin birlikte çözülmesi gerekir. Bunun için uygun sınır koşulları oluşturulmalıdır. Bu bölümde probleme için sınır şartları belirlenecektir.

Modelde, damarın dış yüzeyinde gerilme olmadığı kabul edilmiştir. Bu yüzden damarın dış yüzeyinde damara ait gerilme bileşenleri sıfır olmalıdır. Buna göre;

$r = r_2$ için ;

$$\tau_{rr}^{**} = 0 \quad (3.151)$$

$$\tau_{rz}^{**} = 0 \quad (3.152)$$

olacaktır. (3.107), (3.109), (3.151) ve (3.152)'den yararlanarak bu sınır şartları aşağıdaki gibi elde edilir;

$$\begin{aligned} & \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_2} J_1(\alpha_1 r_2) + (c_1 \alpha_1 - c_4 i k \varepsilon_1) J_0(\alpha_1 r_2) \right] A_1 \\ & + \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_2} J_1(\alpha_2 r_2) + (c_1 \alpha_2 - c_4 i k \varepsilon_2) J_0(\alpha_2 r_2) \right] A_2 \\ & + \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_2} Y_1(\alpha_1 r_2) + (c_1 \alpha_1 - c_4 i k \varepsilon_1) Y_0(\alpha_1 r_2) \right] A_3 \\ & + \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_2} Y_1(\alpha_2 r_2) + (c_1 \alpha_2 - c_4 i k \varepsilon_2) Y_0(\alpha_2 r_2) \right] A_4 = 0 \end{aligned} \quad (3.153)$$

$$\begin{aligned} & c_3 [(-ik - \alpha_1 \varepsilon_1) J_1(\alpha_1 r_2) A_1 + (-ik - \alpha_2 \varepsilon_2) J_1(\alpha_2 r_2) A_2 + (-ik - \alpha_1 \varepsilon_1) Y_1(\alpha_1 r_2) A_3 + \\ & (-ik - \alpha_2 \varepsilon_2) Y_1(\alpha_2 r_2) A_4] = 0 \end{aligned} \quad (3.154)$$

Damara ait gerilme bileşenleri, damarın iç yüzeyinde akışkana ait gerilme bileşenlerine eşit olmalıdır. Yani;

$r = r_1$ için;

$$\tau_{rr}^{**} = \sigma_{rr} \quad (3.155)$$

$$\tau_{rz}^{**} = \sigma_{rz} \quad (3.156)$$

olur. Bu iki sınır şartı (3.107), (3.109), (3.149), (3.150), (3.155) ve (3.156)'den yararlanarak aşağıdaki gibi bulunur;

$$\begin{aligned} & \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_1} J_1(\alpha_1 r_1) + (c_1 \alpha_1 - c_4 i k \varepsilon_1) J_0(\alpha_1 r_1) \right] A_1 \\ & + \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_1} J_1(\alpha_2 r_1) + (c_1 \alpha_2 - c_4 i k \varepsilon_2) J_0(\alpha_2 r_1) \right] A_2 \\ & + \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_1} Y_1(\alpha_1 r_1) + (c_1 \alpha_1 - c_4 i k \varepsilon_1) Y_0(\alpha_1 r_1) \right] A_3 \\ & + \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_1} Y_1(\alpha_2 r_1) + (c_1 \alpha_2 - c_4 i k \varepsilon_2) Y_0(\alpha_2 r_1) \right] A_4 \\ & - \left[-I_0(kr_1) + \frac{2k}{r_1(k^2 + \hat{m}^2)} (-I_1(kr_1) + k r_1 I_0(kr_1)) \right] D_0 \\ & + \left[\frac{2ik\mu}{\hat{m}r_1} (-J_1(\hat{m}r_1) + \hat{m}r_1 J_0(\hat{m}r_1)) \right] E_0 \Big] = 0 \end{aligned} \quad (3.157)$$

$$\begin{aligned} & [c_3 [(-ik - \alpha_1 \varepsilon_1) J_1(\alpha_1 r_1) A_1 + (-ik - \alpha_2 \varepsilon_2) J_1(\alpha_2 r_1) A_2 + (-ik - \alpha_1 \varepsilon_1) Y_1(\alpha_1 r_1) A_3 \\ & + (-ik - \alpha_2 \varepsilon_2) Y_1(\alpha_2 r_1) A_4] \\ & - \left[-\frac{2ik^2}{(k^2 + \hat{m}^2)} I_1(kr_1) \right] D_0 - \left[\frac{\mu}{\hat{m}} (\hat{m}^2 - k^2) J_1(\hat{m}r_1) \right] E_0 \Big] = 0 \end{aligned} \quad (3.158)$$

Probleme ait diğer iki sınır şartı da, damarın iç yüzeyinde akışkan (kan) hız bileşenleriyle damar hız bileşenlerinin birbirine eşit olmasıdır. Buna göre;

$r = r_1$ için ;

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = u_r^{**} \quad (3.159)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial t} = u_z^{**} \quad (3.160)$$

olmalıdır. (3.104), (3.105), (3.147) ve (3.148)' den yararlanarak bu sınır şartları da aşağıdaki gibi ifade edilir;

$$\begin{aligned} & [(i\omega)[A_1 J_1(\alpha_1 r_1) + A_2 J_1(\alpha_2 r_1) + A_3 Y_1(\alpha_1 r_1) + A_4 Y_1(\alpha_2 r_1)]] - \\ & \left[\frac{k}{\mu(k^2 + \hat{m}^2)} I_1(kr_1) D_0 + \frac{i k}{\hat{m}} J_1(\hat{m} r_1) E_0 \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.161)$$

$$\begin{aligned} & [(i\omega)[A_1 \varepsilon_1 J_0(\alpha_1 r_1) + A_2 \varepsilon_2 J_0(\alpha_2 r_1) + A_3 \varepsilon_1 Y_0(\alpha_1 r_1) + A_4 \varepsilon_2 Y_0(\alpha_2 r_1)]] - \\ & \left[-\frac{i k}{\mu(k^2 + \hat{m}^2)} I_0(kr_1) D_0 + J_0(\hat{m} r_1) E_0 \right] = 0 \end{aligned} \quad (3.162)$$

Probleme ait bu sınır şartlarına bağlı olarak elde edilen (3.153), (3.154), (3.157), (3.158), (3.161) ve (3.162)'deki eşitlikler kullanılarak, $A_1, A_2, A_3, A_4, D_0, E_0$ katsayılarına bağlı lineer homojen bir denklem takımı bulunmuştur. Bu açısal frekans (ω) için, cebirsel bir özdeğer problemidir.

Bu lineer homojen denklem takımının matris formu aşağıda (3.163)'de belirtildiği gibidir;

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ D_0 \\ E_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.163)$$

Burada;

$$K_{11} = \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_2} J_1(\alpha_1 r_2) + (c_1 \alpha_1 - c_4 i k \varepsilon_1) J_0(\alpha_1 r_2) \right]$$

$$K_{12} = \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_2} J_1(\alpha_2 r_2) + (c_1 \alpha_2 - c_4 i k \varepsilon_1) J_0(\alpha_2 r_2) \right]$$

$$K_{13} = \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_2} Y_1(\alpha_1 r_2) + (c_1 \alpha_1 - c_4 i k \varepsilon_1) Y_0(\alpha_1 r_2) \right]$$

$$K_{14} = \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_2} Y_1(\alpha_2 r_2) + (c_1 \alpha_2 - c_4 i k \varepsilon_1) Y_0(\alpha_2 r_2) \right]$$

$$K_{15} = 0$$

$$K_{16} = 0$$

(3.164.a)

$$K_{21} = c_3(-ik - \alpha_1 \varepsilon_1) J_1(\alpha_1 r_2)$$

$$K_{22} = c_3(-ik - \alpha_2 \varepsilon_2) J_1(\alpha_2 r_2)$$

$$K_{23} = c_3(-ik - \alpha_1 \varepsilon_1) Y_1(\alpha_1 r_2)$$

$$K_{24} = c_3(-ik - \alpha_2 \varepsilon_2) Y_1(\alpha_2 r_2)$$

$$K_{25} = 0$$

$$K_{26} = 0$$

(3.164.b)

$$K_{31} = \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_1} J_1(\alpha_1 r_1) + (c_1 \alpha_1 - c_4 i k \varepsilon_1) J_0(\alpha_1 r_1) \right]$$

$$K_{32} = \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_1} J_1(\alpha_2 r_1) + (c_1 \alpha_2 - c_4 i k \varepsilon_1) J_0(\alpha_2 r_1) \right]$$

$$K_{33} = \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_1} Y_1(\alpha_1 r_1) + (c_1 \alpha_1 - c_4 i k \varepsilon_1) Y_0(\alpha_1 r_1) \right]$$

$$K_{34} = \left[(c_4 - c_1) \frac{1}{r_1} Y_1(\alpha_2 r_1) + (c_1 \alpha_2 - c_4 i k \varepsilon_1) Y_0(\alpha_2 r_1) \right]$$

$$K_{35} = \left[I_0(kr_1) - \frac{2k}{r_1(k^2 + \hat{m}^2)} (-I_1(kr_1) + k r_1 I_0(kr_1)) \right]$$

$$K_{36} = - \left[\frac{2ik\mu}{\hat{m}r_1} (-J_1(\hat{m}r_1) + \hat{m}r_1 J_0(\hat{m}r_1)) \right]$$

(3.164.c)

$$K_{41} = c_3(-ik - \alpha_1 \varepsilon_1) J_1(\alpha_1 r_1)$$

$$K_{42} = c_3(-ik - \alpha_2 \varepsilon_2) J_1(\alpha_2 r_1)$$

$$K_{43} = c_3(-ik - \alpha_1 \varepsilon_1) Y_1(\alpha_1 r_1)$$

$$K_{44} = c_3(-ik - \alpha_2 \varepsilon_2) Y_1(\alpha_2 r_1)$$

$$K_{45} = \left[\frac{2 i k^2}{(k^2 + \hat{m}^2)} I_1(kr_1) \right]$$

$$K_{46} = \left[\frac{\mu}{\hat{m}} (\hat{m}^2 - k^2) J_1(\hat{m}r_1) \right] \quad (3.164.d)$$

$$K_{51} = (i\omega) J_1(\alpha_1 r_1)$$

$$K_{52} = (i\omega) J_1(\alpha_2 r_1)$$

$$K_{53} = (i\omega) Y_1(\alpha_1 r_1)$$

$$K_{54} = (i\omega) Y_1(\alpha_2 r_1)$$

$$K_{55} = -\frac{k}{\mu(k^2 + \hat{m}^2)} I_1(kr_1)$$

$$K_{56} = -\frac{i k}{\hat{m}} J_1(\hat{m}r_1) \quad (3.164.e)$$

$$K_{61} = (i\omega) \varepsilon_1 J_0(\alpha_1 r_1)$$

$$K_{62} = (i\omega) \varepsilon_2 J_0(\alpha_2 r_1)$$

$$K_{63} = (i\omega) \varepsilon_1 Y_0(\alpha_1 r_1)$$

$$K_{64} = (i\omega) \varepsilon_2 Y_0(\alpha_2 r_1)$$

$$K_{65} = \frac{i k}{\mu(k^2 + \hat{m}^2)} I_0(kr_1)$$

$$K_{66} = -J_0(\hat{m}r_1) \quad (3.164.f)$$

şeklindedir.

Bu homojen denklem takımının sıfırdan farklı bir çözümünü elde edebilmek için, (6x6) boyutlu katsayılar matrisinin determinantını sıfıra eşitlemek gerekir. Bu şart, özdeğer açısıl frekansı (ω) veren karakteristik denklemdir.

Karakteristik denklem, açısıl frekanstan (ω) başka, dalga sayısını (k) ve akışkan hızını (U_1) da içermektedir. Yani denklem ω , k ve U_1 'nin bir fonksiyonudur. Burada verilmiş bir dalga

sayısına (k) karşılık açısal frekansın sanal kısmını sıfır yapan ($\omega_i = 0$) bir U_1 akışkan hız değeri vardır. Bu U_1 akışkan hızına, kritik hız U_{kr} denir. Dalga sayısı (k) değiştirilince kritik akışkan hızı da değişir. Kritik hızdan (U_{kr}) daha düşük değerlerdeki hızlarda sistem asla kararsız hale geçmez. Bu hıza da çarpınma hızı denir. Çarpınma hızına karşılık gelen dalga hızı da kritik dalga hızıdır (C_{kr}). En düşük kritik hız, çarpınma hızıdır. Çarpınma hızından daha düşük değerlerde, hareket kararlıdır.



4. BULGULAR

Bu bölümde, sayısal hesaplamalar yapılmış ve elde edilen sonuçlar grafiklerle verilmiştir. Bunun için bir önceki bölümde elde edilen denklem takımını için katsayılar matrisinin determinantı hesaplanarak, karakteristik denklem bulunmuştur. Bu karakteristik denklem akışkan hızı (U_1), dalga sayısı (k) ve açısal frekansın (ω) bir fonksiyonudur. Dalga sayısı ve akışkan hız değerleri değiştirilerek bu değerlere karşılık gelen sistemin öz frekansları hesaplanmıştır. Sayısal hesaplamalarda MATLAB bilgisayar programını kullanılmıştır.

Denklem takımını için analitik çözüm mümkün olmadığı için sayısal çözüm yapılmıştır. Sayısal hesaplamalarda akışkanın viskozitesi $\mu = 0,00345$ Pa.s, akışkanın yoğunluğu $\rho_f = 1050$ kg/m³ alınmıştır.

Ayrıca damar için Elastisite modülü $E = 4,66$ MPa, Poisson oranı $\bar{\nu} = 0,45$, damar kütle yoğunluğu $\rho = 1062$ kg/m³, damar iç yarıçapı $r_1 = 0,0125$ m, damar dış yarıçapı ise $r_2 = 0,0145$ m olarak alınmıştır [68].

(3.163)'de matris formunda verilen lineer homojen denklem takımının sıfırdan farklı çözümünü elde edebilmek için, yukarıda belirtilen sayısal değerler kullanılarak katsayılar matrisinin determinantı sıfıra eşitlenmiştir. Verilen farklı dalga sayısı (k) ve farklı akışkan hızları (U_1) için sistemin öz frekansları hesaplanmıştır. Açısal frekansın sanal kısmını negatif yapan akışkan hızı bulunmuştur. Bulunan bu kritik akışkan hızı, çırpınma hızıdır. Bu çırpınma hızına karşılık gelen dalga hızı da kritik dalga hızıdır.

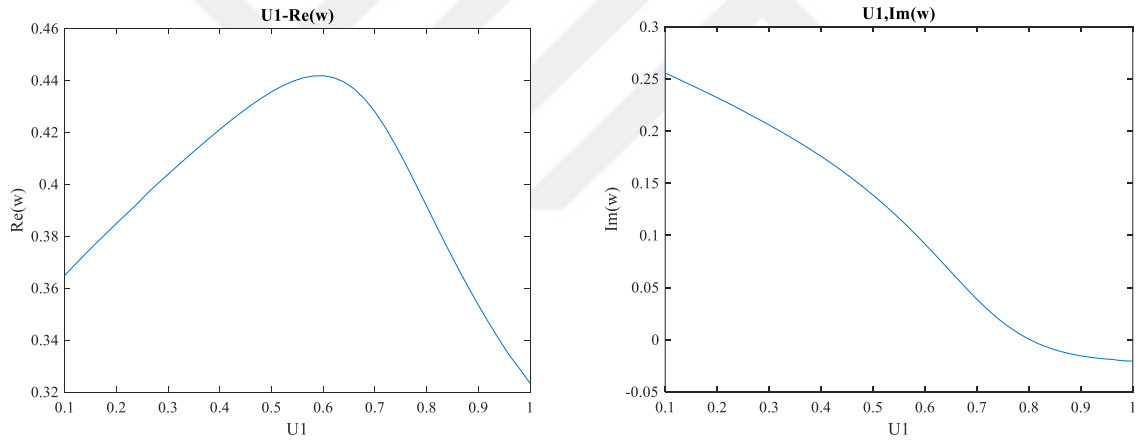
Çırpınma hızına ve kritik dalga hızına damar geometrisinin etkisini incelemek için bu hesaplamalar farklı damar kalınlıklarında (h) yapılmıştır. Damar kalınlığı 0,002 m, 0,003 m, 0,004 m ve 0,006 m olarak alınmıştır.

Tablo 4.1, Tablo 4.2 ve Tablo 4.3' de damar kalınlığı $h = 0,002$ m için farklı dalga sayısı ve farklı akışkan hızlarında elde edilen öz frekans değerleri gösterilmiştir.

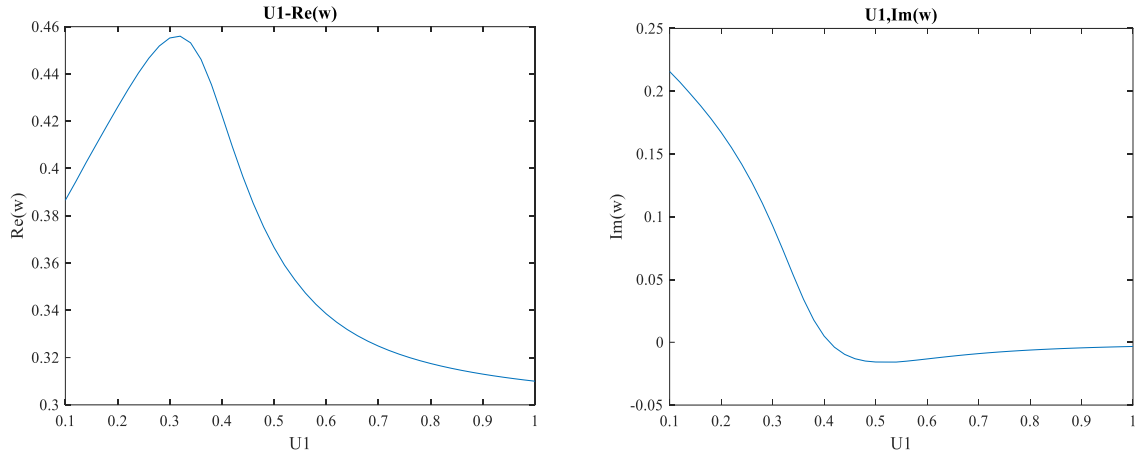
Elde edilen bu değerler kullanılarak Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Şekil 4.3' de öz frekansların reel ($Re(\omega)$), ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının hız (U_1) değerleri ile değişimi verilmiştir.

Tablo 4.1: $h=0,002$ m ve $k=1$ için elde edilen özdeğerler.

U_1 (m/s)	ω
0,1	$0,364 + 0,255i$
0,2	$0,384 + 0,231i$
0,3	$0,403 + 0,205i$
0,4	$0,421 + 0,175i$
0,5	$0,435 + 0,138i$
0,6	$0,441 + 0,0916i$
0,7	$0,427 + 0,0387i$
0,8	$0,391 + 0,00045i$
0,81	$0,387 - 0,0155i$

**Şekil 4.1:** $h=0,002$ m ve $k=1$ için öz frekansların reel ($Re(\omega)$) ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.**Tablo 4.2:** $h=0,002$ m ve $k=2$ için elde edilen özdeğerler.

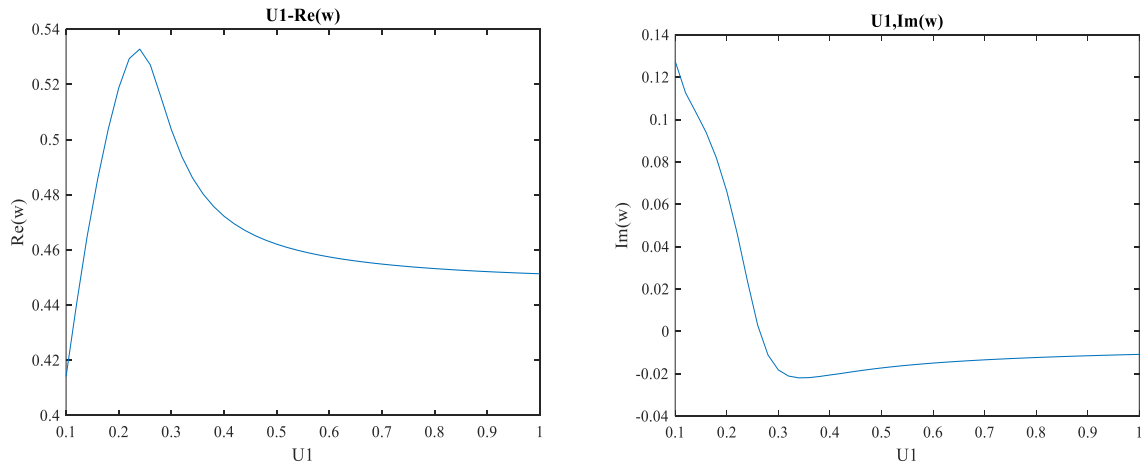
U_1 (m/s)	ω
0,1	$0,386 + 0,215i$
0,2	$0,425 + 0,167i$
0,3	$0,455 + 0,0929i$
0,4	$0,422 + 0,00498i$
0,42	$0,409 - 0,00389i$



Şekil 4.2: $h=0,002$ m ve $k=2$ için öz frekansların reel ($\text{Re}(\omega)$) ve sanal ($\text{Im}(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.

Tablo 4.3: $h=0,002$ m ve $k=3$ için elde edilen özdeğerler.

U_1 (m/s)	ω
0,1	$0,414 + 0,127i$
0,2	$0,518 + 0,0661i$
0,25	$0,531 + 0,0127i$
0,27	$0,521 - 0,00514i$

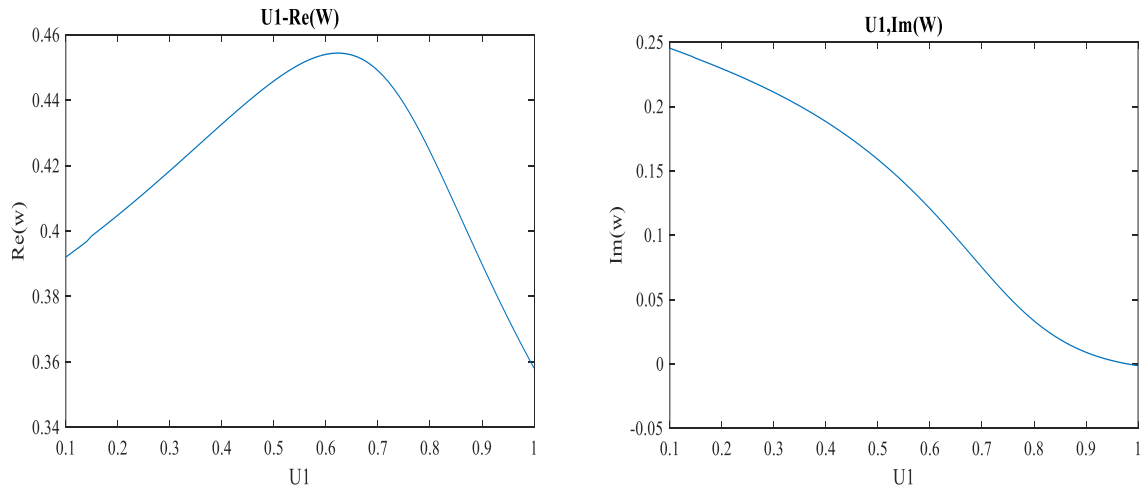


Şekil 4.3: $h=0,002$ m ve $k=2$ için öz frekansların reel ($\text{Re}(\omega)$) ve sanal ($\text{Im}(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.

Damar kalınlığı $h= 0,003$ alınarak yine farklı dalga sayısı ve farklı akışkan hızlarında öz frekans değerleri hesaplanmış, bu değerler Tablo 4.4, Tablo 4.5 ve Tablo 4.6' da verilmiştir. Öz frekansların reel ($Re(\omega)$) ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının, hız (U_1) değerleri ile değişimi Şekil 4.4, Şekil 4.5 ve Şekil 4.6' da gösterilmiştir.

Tablo 4.4: $h= 0,003$ m ve $k= 1$ için elde edilen özdeğerler.

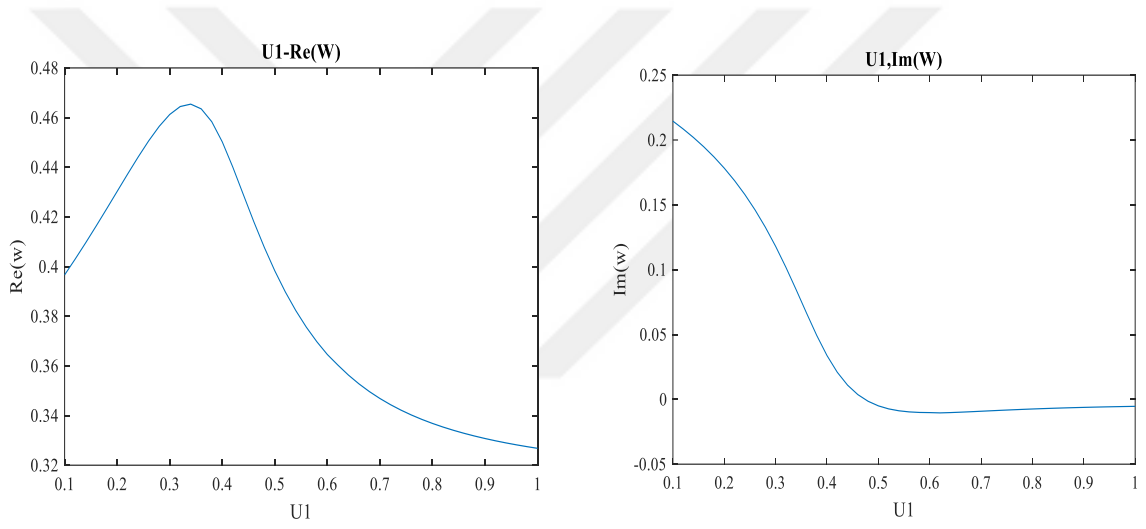
U_1 (m/s)	ω
0,1	$0,392 + 0,245i$
0,2	$0,404 + 0,229i$
0,3	$0,418 + 0,211i$
0,4	$0,432 + 0,188i$
0,5	$0,445 + 0,158i$
0,6	$0,454 + 0,120i$
0,7	$0,449 + 0,074i$
0,8	$0,424 + 0,0334i$
0,9	$0,389 + 0,00907i$
0,99	$0,361 - 0,00067i$



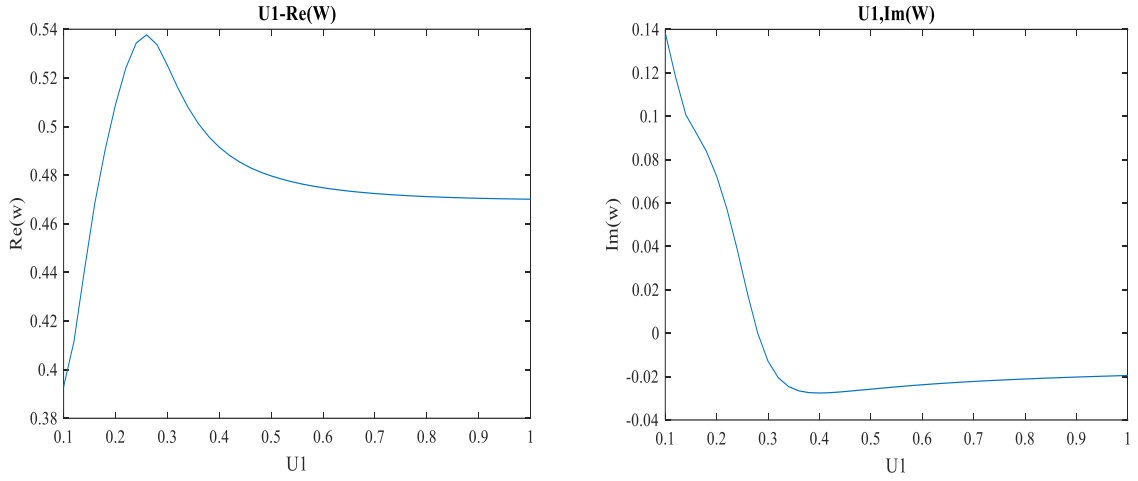
Şekil 4.4: $h= 0,003$ m ve $k= 1$ için öz frekansların reel ($Re(\omega)$) ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.

Tablo 4.5: $h=0,003$ m ve $k=2$ için elde edilen özdeğerler.

U_1 (m/s)	ω
0,1	$0,396 + 0,214i$
0,2	$0,430 + 0,178i$
0,3	$0,461 + 0,117i$
0,4	$0,450 + 0,0337i$
0,44	$0,429 + 0,0109i$
0,48	$0,407 - 0,00148i$

**Şekil 4.5:** $h=0,003$ m ve $k=2$ için öz frekansların reel ($Re(\omega)$) ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.**Tablo 4.6:** $h=0,003$ m ve $k=3$ için elde edilen özdeğerler.

U_1 (m/s)	ω
0,1	$0,392 + 0,138i$
0,2	$0,508 + 0,0723i$
0,24	$0,534 + 0,0386i$
0,28	$0,533 - 0,000081i$

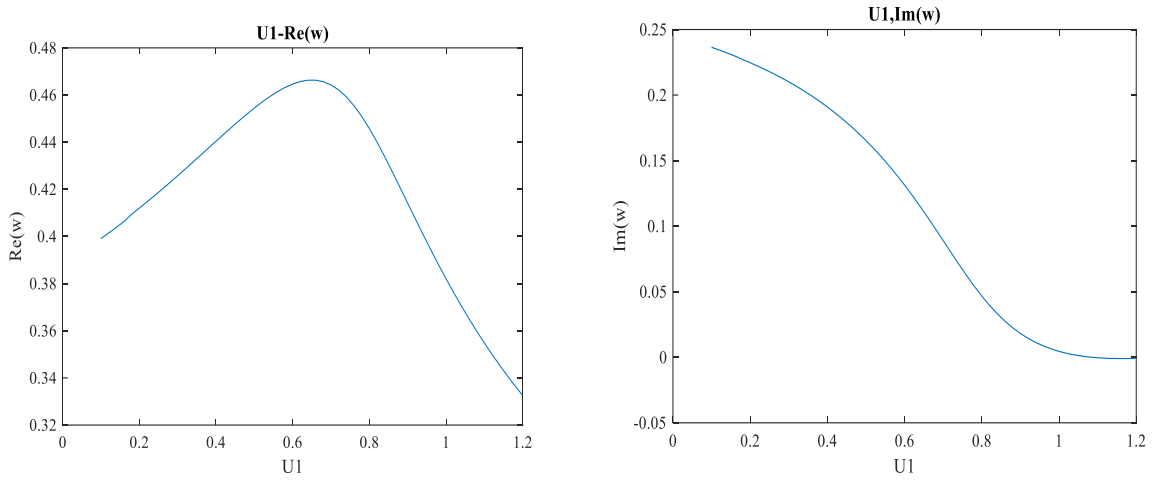


Şekil 4.6: $h=0,003$ m ve $k=3$ için öz frekansların reel ($\text{Re}(\omega)$) ve sanal ($\text{Im}(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.

Daha sonra damar kalınlığı $h=0,004$ alınarak yine farklı dalga sayısı ve farklı akışkan hızlarında öz frekans değerleri hesaplanmış, bu değerler de Tablo 4.7, Tablo 4.8, Tablo 4.9’ da verilmiştir. Öz frekansların reel ($\text{Re}(\omega)$) ve sanal ($\text{Im}(\omega)$) kısımlarının, hız (U_1) değerleri ile değişimi de Şekil 4.7, Şekil 4.8 ve Şekil 4.9’ daki gibidir.

Tablo 4.7: $h=0,004$ m ve $k=1$ için elde edilen özdeğerler.

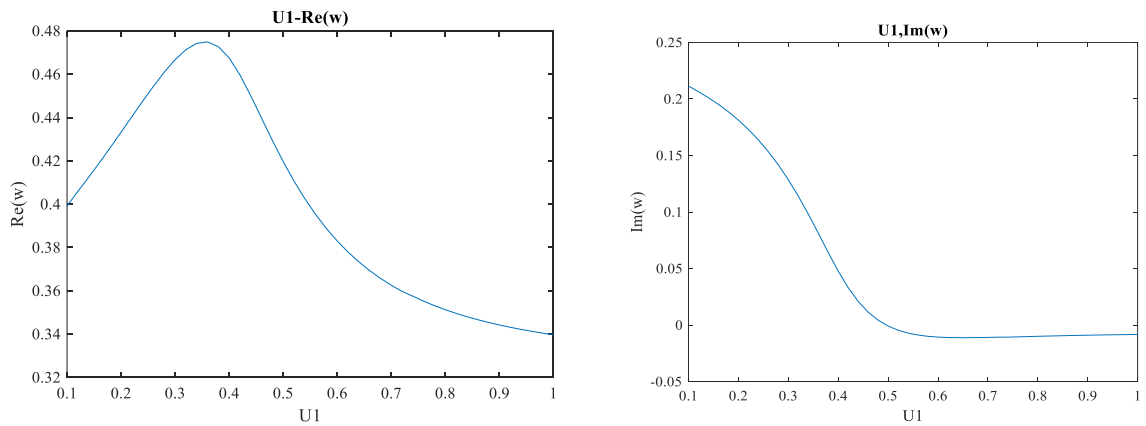
U_1 (m/s)	ω
0,1	$0,399 + 0,236i$
0,3	$0,425 + 0,21i$
0,5	$0,454 + 0,165i$
0,7	$0,464 + 0,089i$
0,9	$0,414 + 0,0181i$
1	$0,382 + 0,0045i$
1,04	$0,370 + 0,00179i$
1,09	$0,357 - 0,00014i$



Şekil 4.7: $h=0,004$ m ve $k=1$ için öz frekansların reel ($\text{Re}(\omega)$) ve sanal ($\text{Im}(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.

Tablo 4.8: $h=0,004$ m ve $k=2$ için elde edilen özdeğerler.

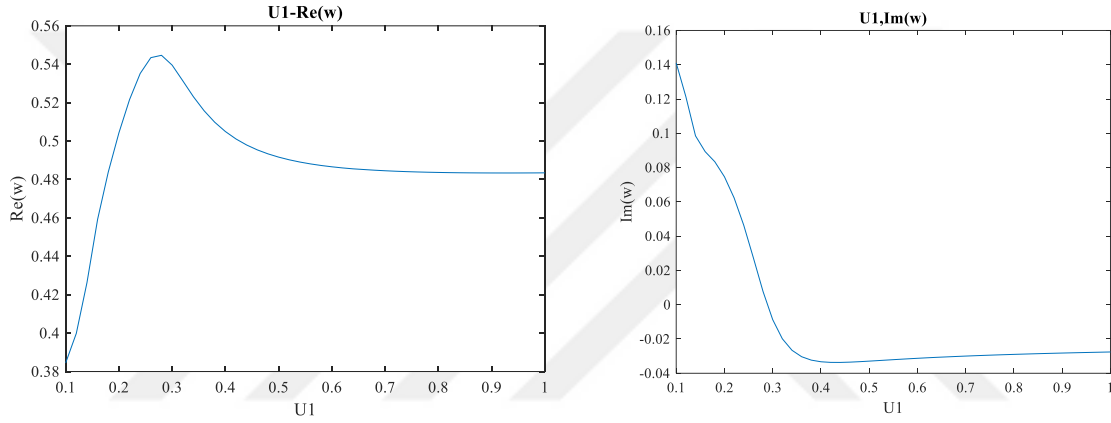
U_1 (m/s)	ω
0,1	$0,399 + 0,211i$
0,2	$0,433 + 0,181i$
0,3	$0,466 + 0,128i$
0,4	$0,467 + 0,0478i$
0,48	$0,429 + 0,00437i$
0,5	$0,419 - 0,00081i$



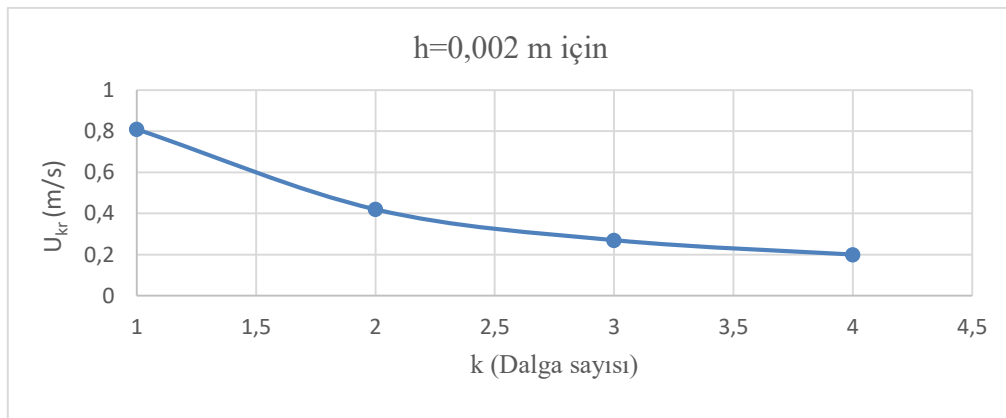
Şekil 4.8: $h=0,004$ m ve $k=2$ için öz frekansların reel ($\text{Re}(\omega)$) ve sanal ($\text{Im}(\omega)$) kısımlarının akışkan hız (U_1) değerleri ile değişimi.

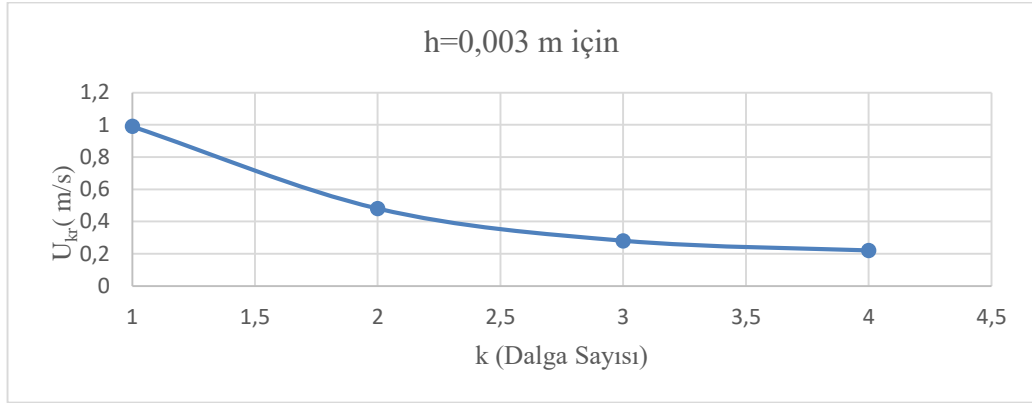
Tablo 4.9: $h=0,004$ m ve $k=3$ için elde edilen özdeğerler.

U_1 (m/s)	ω
0,1	$0,384 + 0,141i$
0,2	$0,504 + 0,0746i$
0,24	$0,535 + 0,0463i$
0,28	$0,544 + 0,00768i$
0,29	$0,542 - 0,00112i$

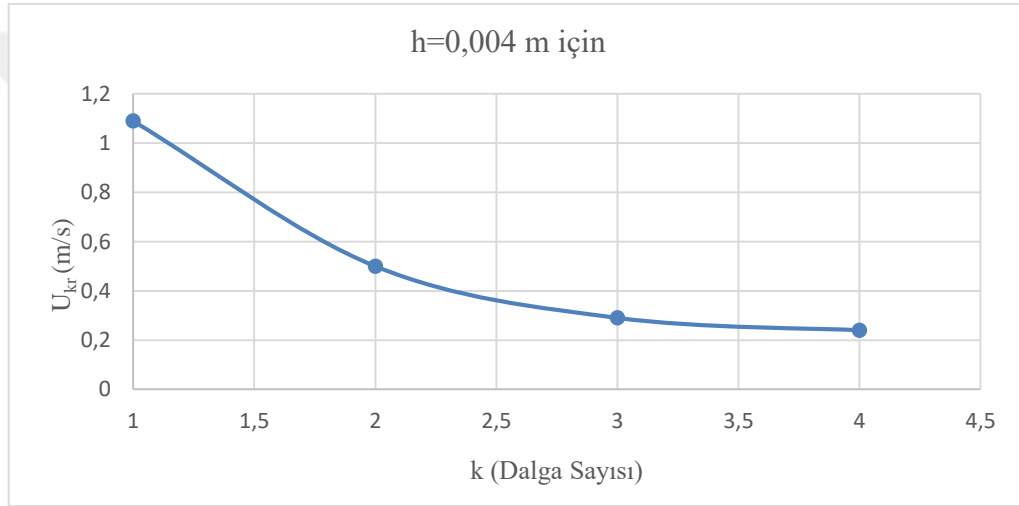
**Şekil 4.9:** $h=0,004$ m ve $k=3$ için öz frekansların reel ($Re(\omega)$) ve sanal ($Im(\omega)$) kısımlarının hız (U_1) değerleri ile değişimi.

Elde edilen tüm bu sonuçlardan yararlanarak, sabit damar kalınlığı (h) değerlerine karşılık çirpınma hızı (U_{kr}) ile dalga sayısı (k) arasındaki ilişki incelenebilir.

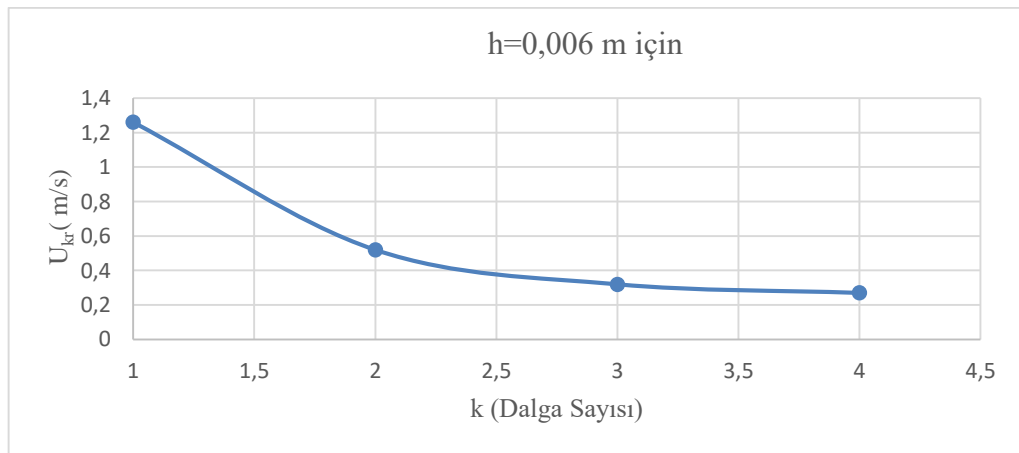
**Şekil 4.10:** $h=0,002$ m için çirpınma hızı (U_{kr}) dalga sayısı (k) değişimi.



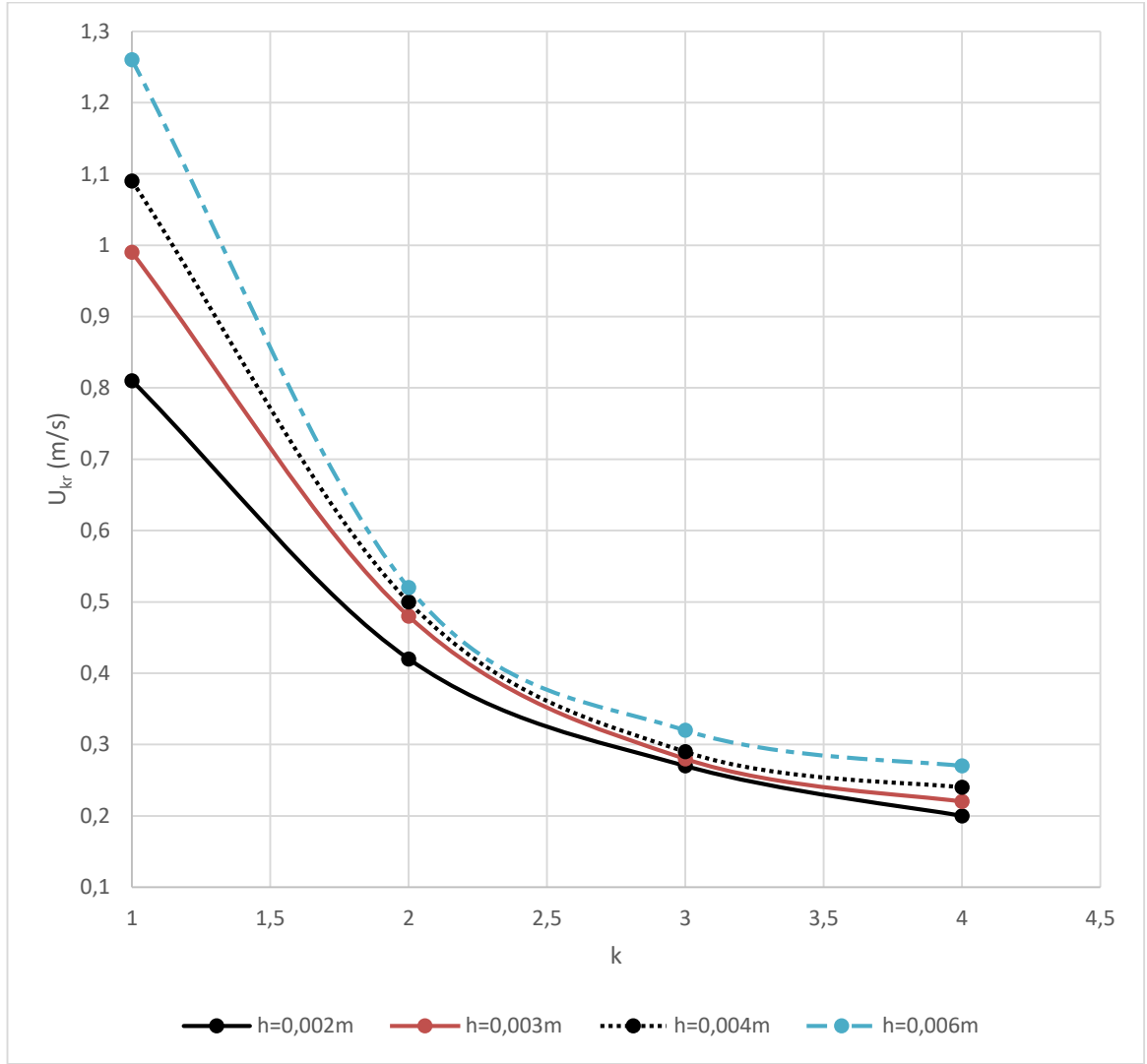
Şekil 4.11: h=0,003 m için çirpınma hızı (U_{kr}) ile dalga sayısı (k) değışimi.



Şekil 4.12: h=0,004 m için çirpınma hızı (U_{kr}) ile dalga sayısı (k) değışimi.



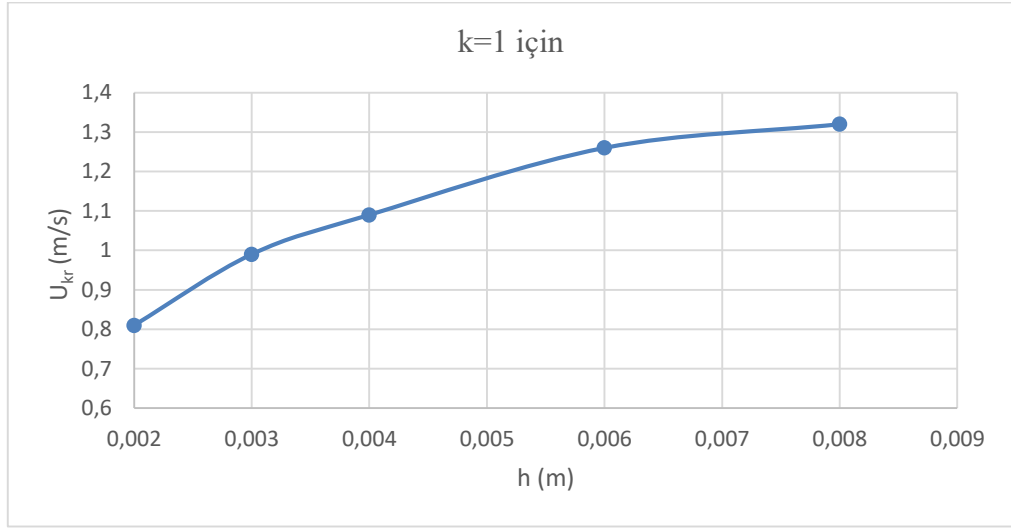
Şekil 4.13: h=0,006 m için çirpınma hızı (U_{kr}) ile dalga sayısı (k) değışimi.



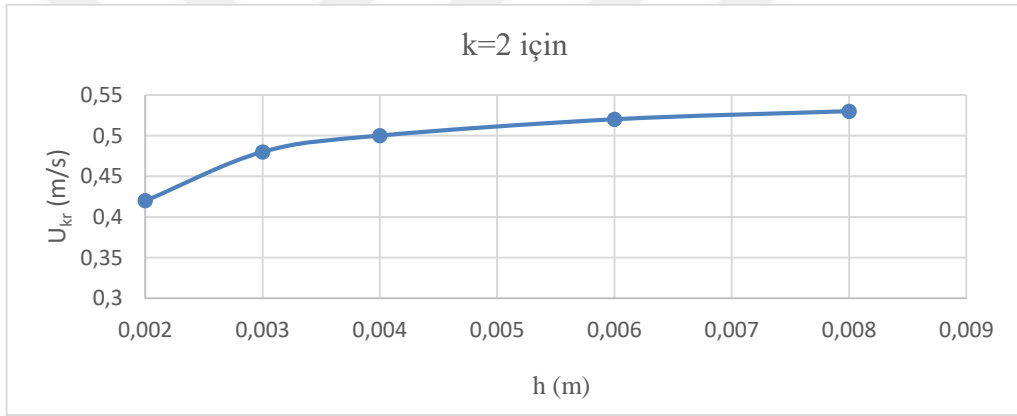
Şekil 4.14: Belirli damar kalınlıklarında (h) çarpınma hızı (U_{kr}) ile dalga sayısı (k) değişimi.

Şekil 4.10, Şekil 4.11, Şekil 4.12, Şekil 4.13 ve Şekil 4.14'den görüldüğü üzere belirli damar kalınlıklarında (h), dalga sayısı (k) arttıkça çarpınma hızı (U_{kr}) azalmakta ve bir değere asimtotik olarak yaklaşmaktadır.

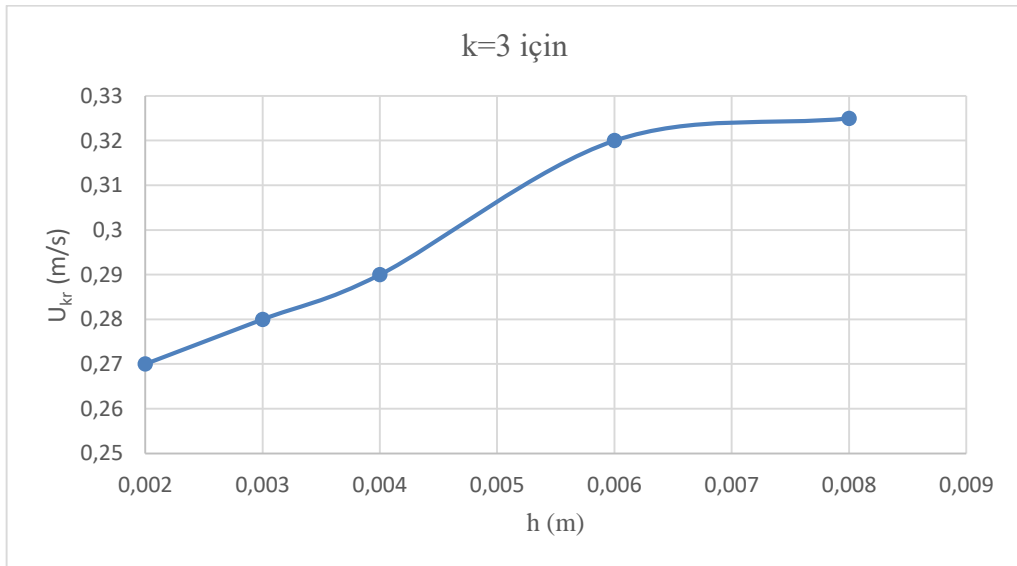
Benzer şekilde sabit dalga sayısı (k) değerlerine karşılık çarpınma hızı (U_{kr}) ile damar kalınlığı (h) arasındaki ilişki incelenebilir.



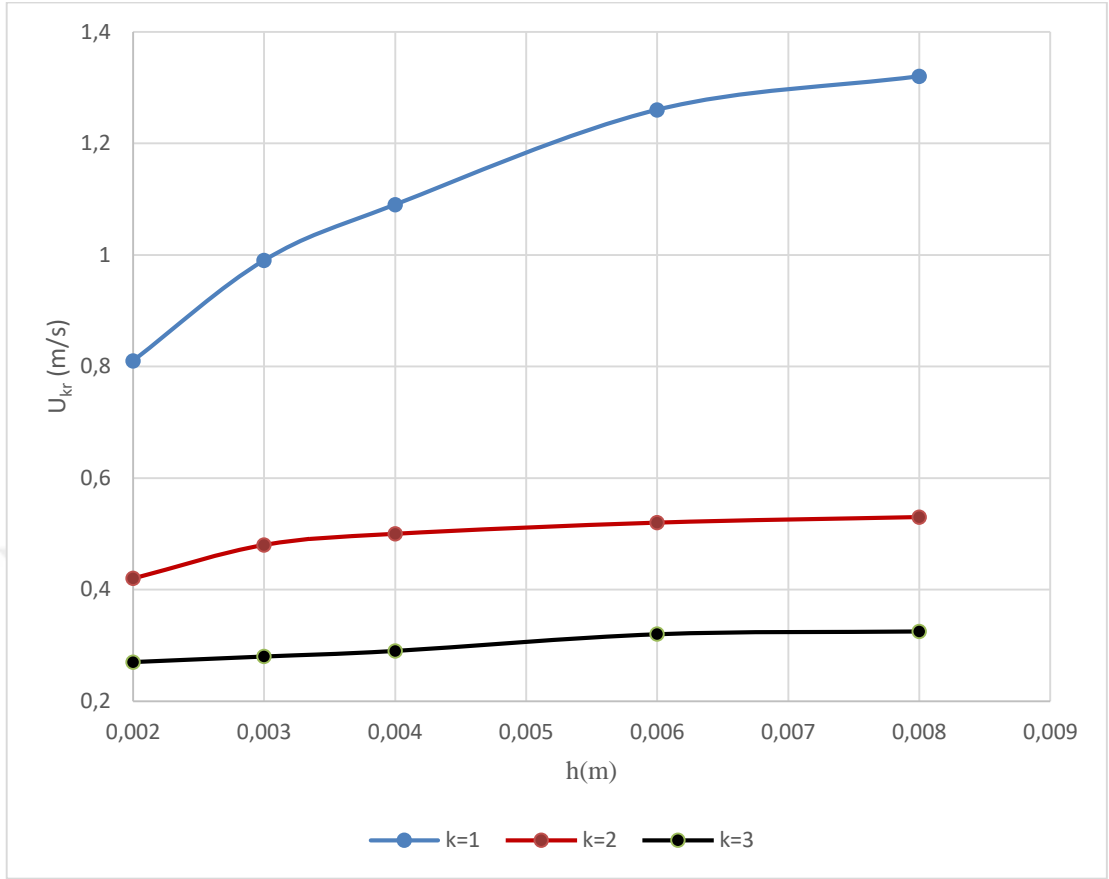
Şekil 4.15: k=1 için, çirpınma hızı (U_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.



Şekil 4.16: k=2 için, çirpınma hızı (U_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.

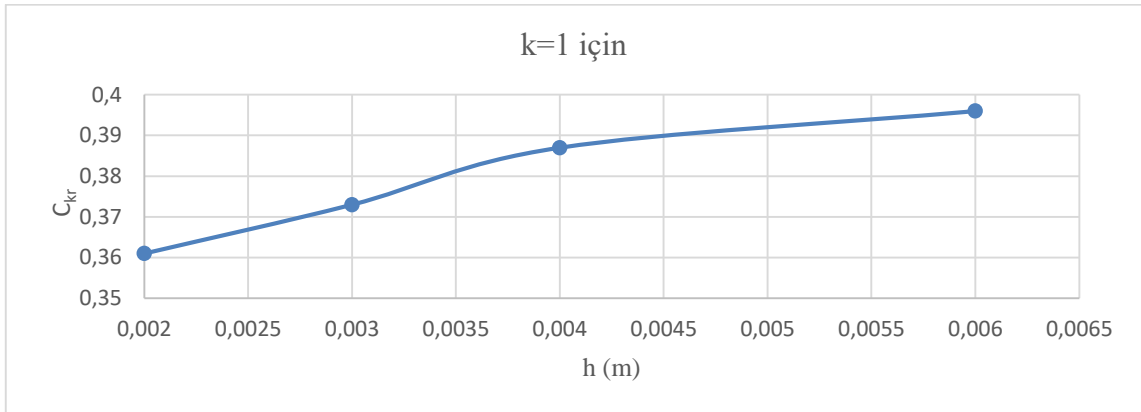


Şekil 4.17: k=3 için, çirpınma hızı (U_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.

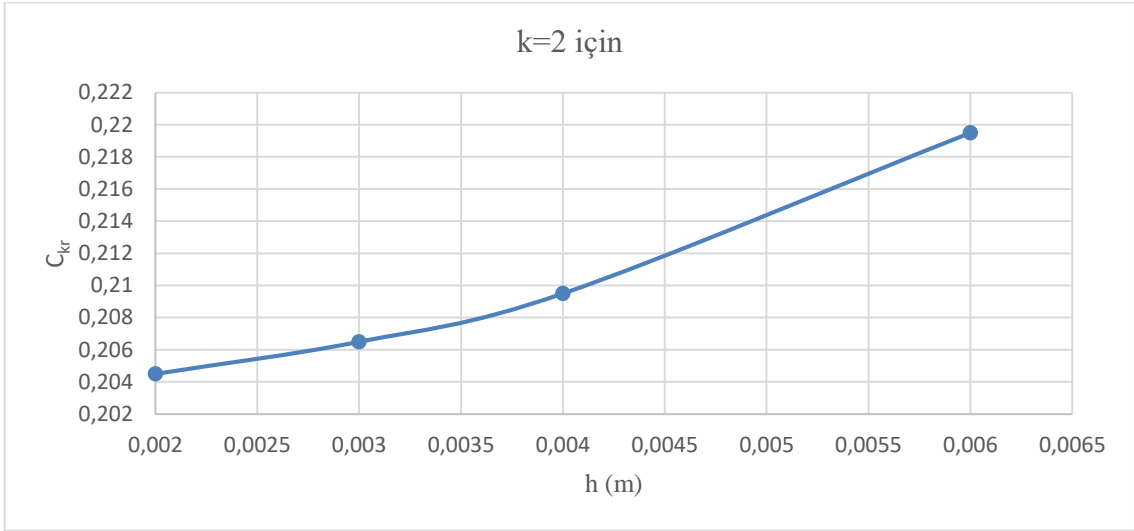


Şekil 4.18: Farklı dalga sayılarında (k) çarpınma hızı (U_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.

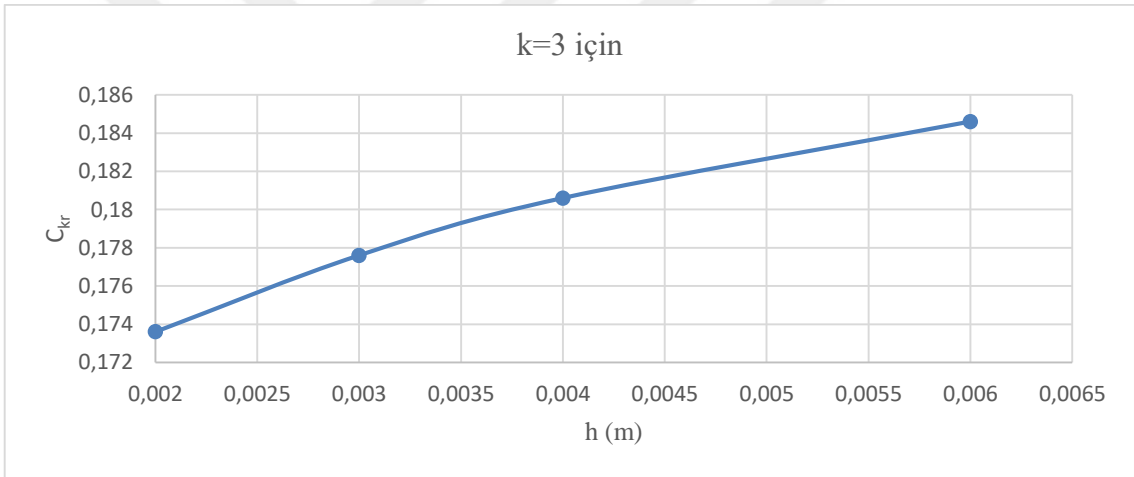
Şekil 4.15, Şekil 4.16, Şekil 4.17 ve Şekil 4.18'den belirli dalga sayılarında damar kalınlığı (h) arttıkça çarpınma hızı (U_{kr})'nın da arttığı görülmektedir. Ayrıca dalga sayısı arttıkça çarpınma hızının azaldığı bu grafiklerde de görülmektedir.



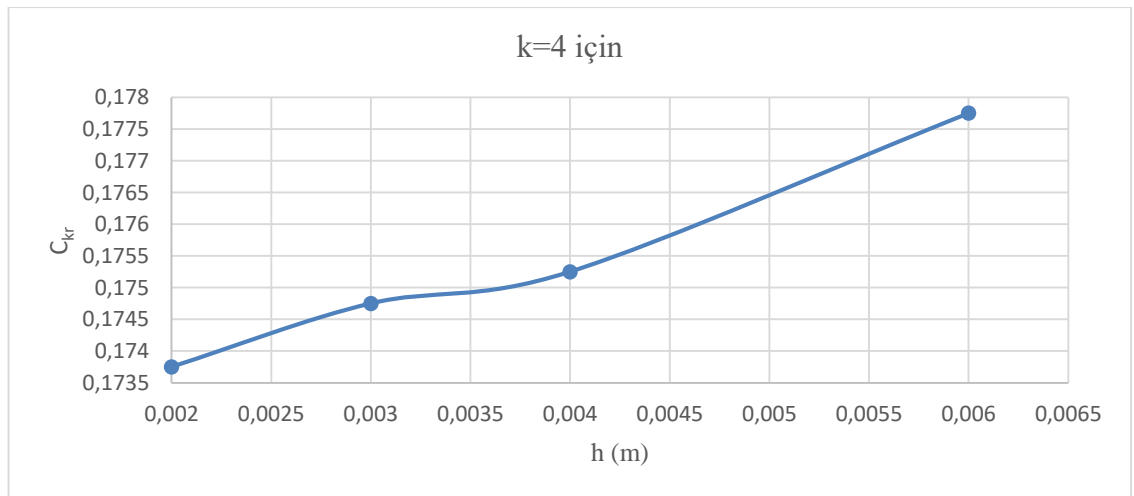
Şekil 4.19: k=1 için, kritik dalga hızı (C_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.



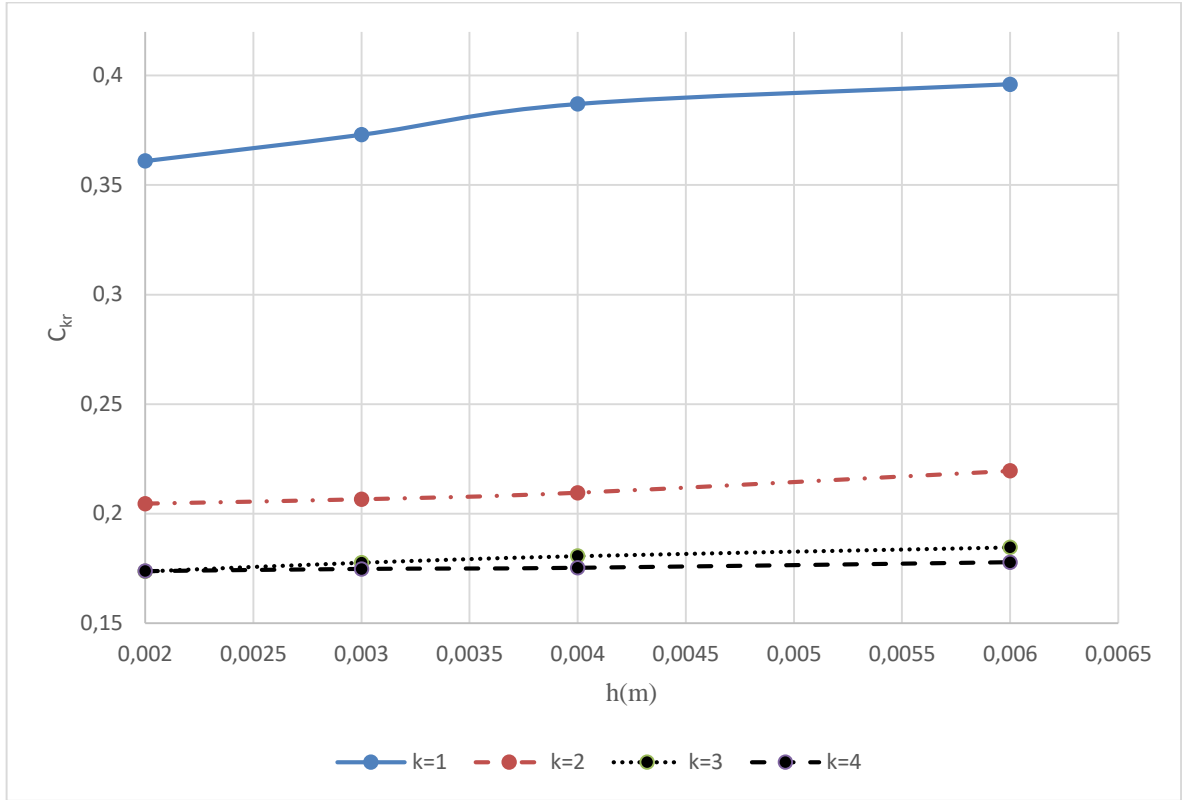
Şekil 4.20: k=2 için, kritik dalga hızı (C_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.



Şekil 4.21: k=3 için, kritik dalga hızı (C_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.

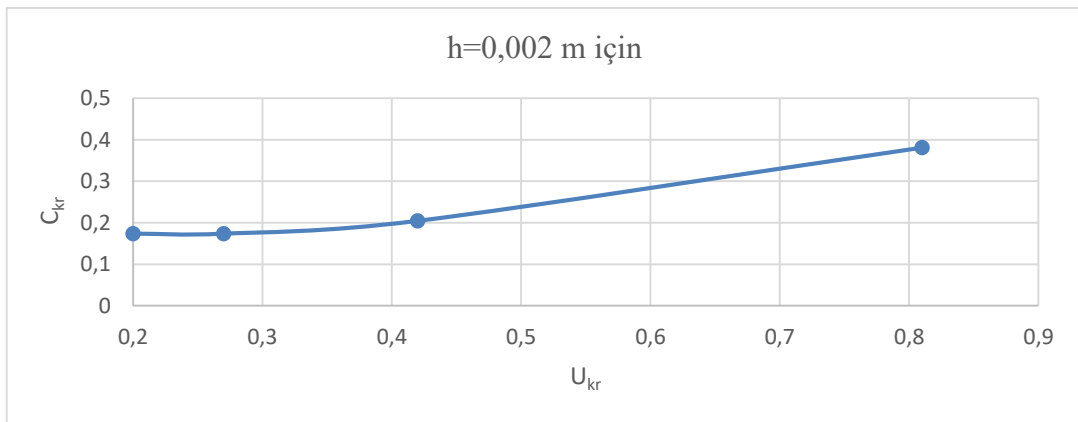


Şekil 4.22: k=4 için, kritik dalga hızı (C_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.

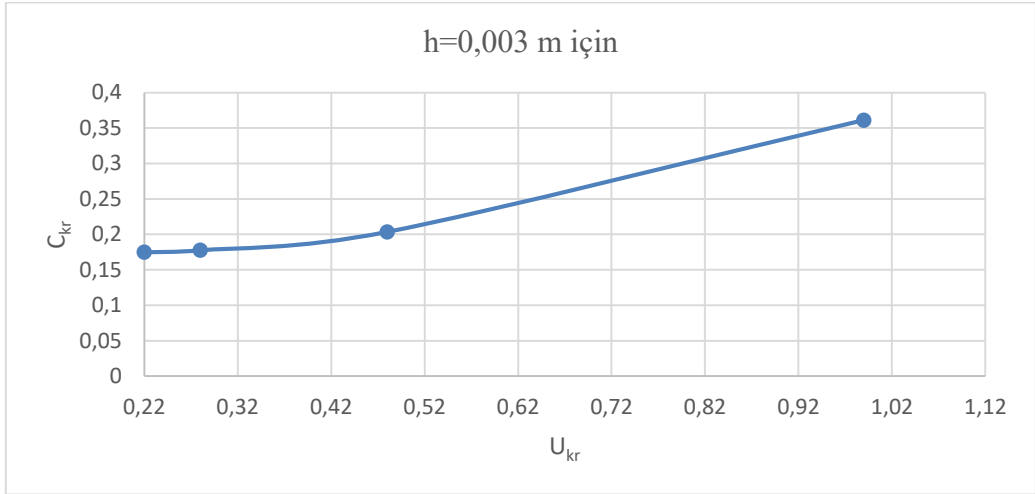


Şekil 4.23: Farklı dalga sayılarında (k) kritik dalga hızı (C_{kr}) ile damar kalınlığı (h) değişimi.

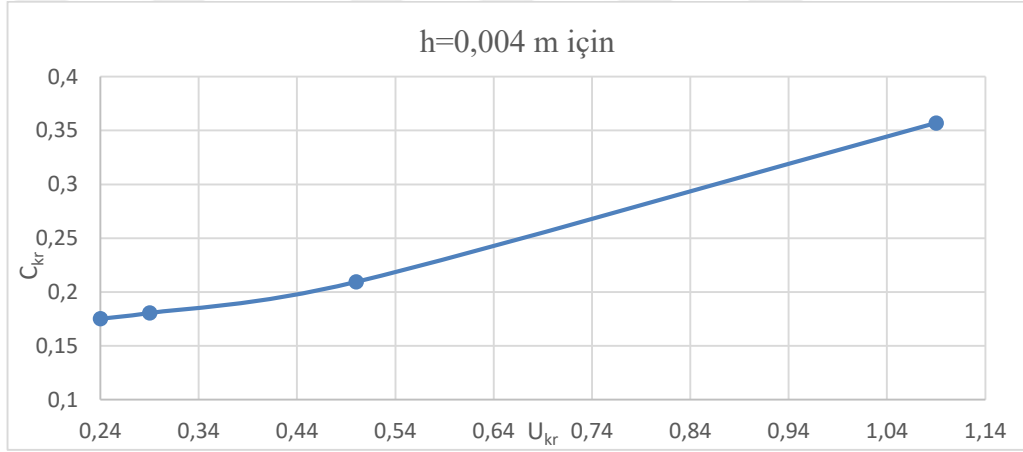
Şekil 4.19, Şekil 4.20, Şekil 4.21, Şekil 4.22 ve Şekil 4.23'deki grafiklerde belirli dalga sayılarında damar kalınlığı ile kritik dalga hızının değişimi incelenmiştir. Damar kalınlığı (h) arttıkça kritik dalga hızı (C_{kr}) da artmaktadır. Kritik dalga hızı eğrileri, k=3 ve k=4 için hemen hemen düz doğru şeklindedir. Ayrıca belirli damar yüksekliklerinde dalga sayısı arttıkça kritik dalga hızının da arttığı görülmektedir.



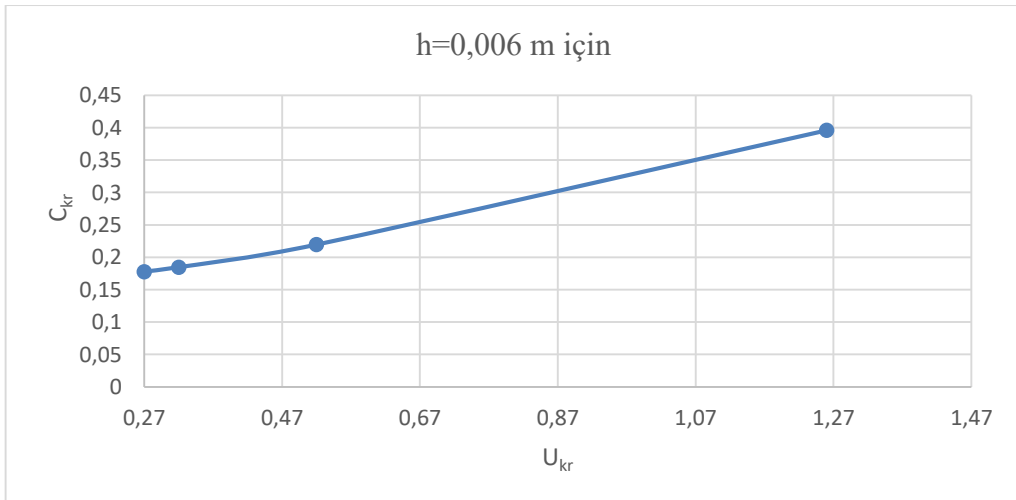
Şekil 4.24: h=0,002 m için, çırpınma hızı (U_{kr}) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.



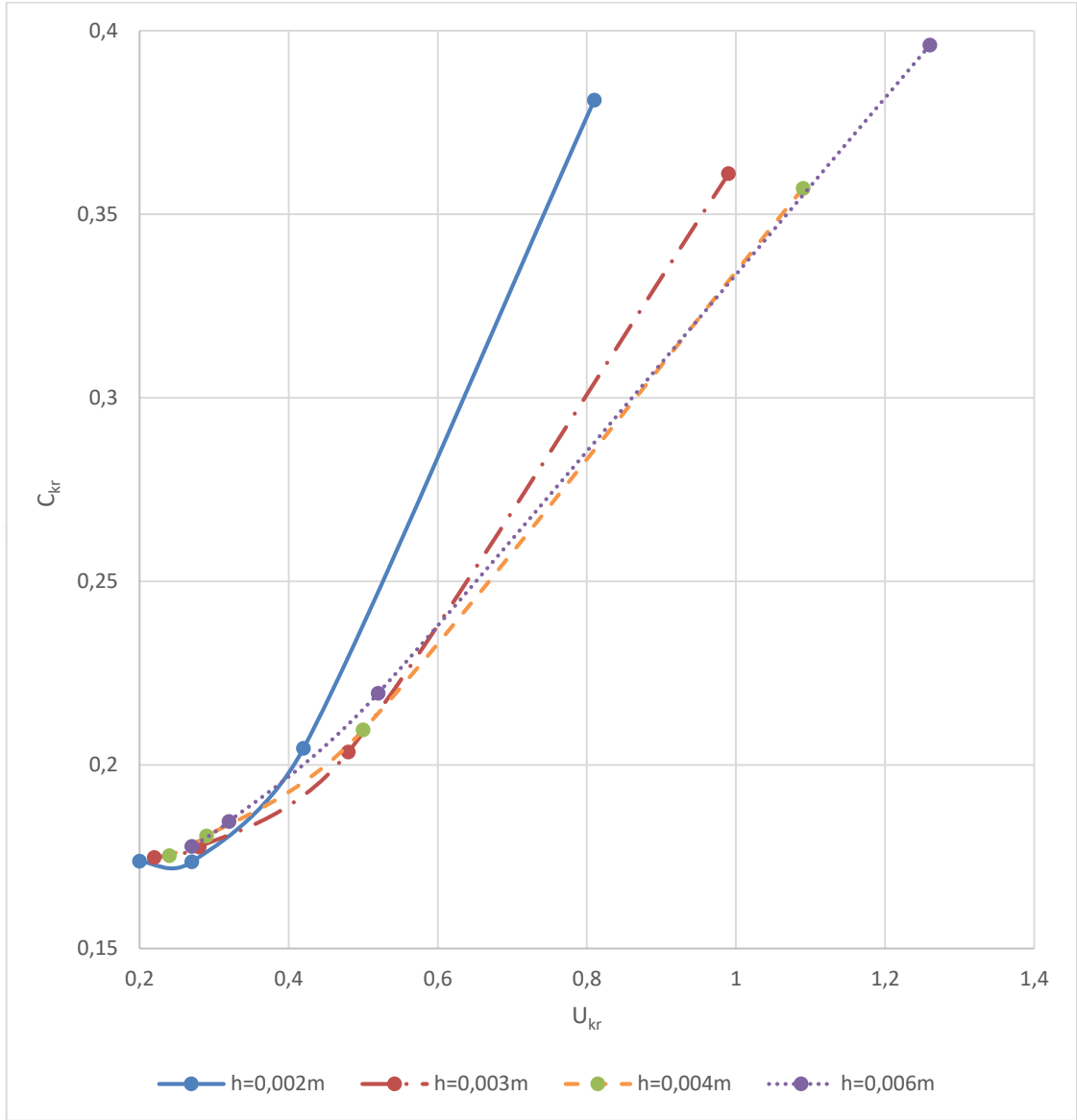
Şekil 4.25: h=0,003 m için, çırpınma hızı (U_{kr}) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.



Şekil 4.26: h=0,004 m için, çırpınma hızı (U_{kr}) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.

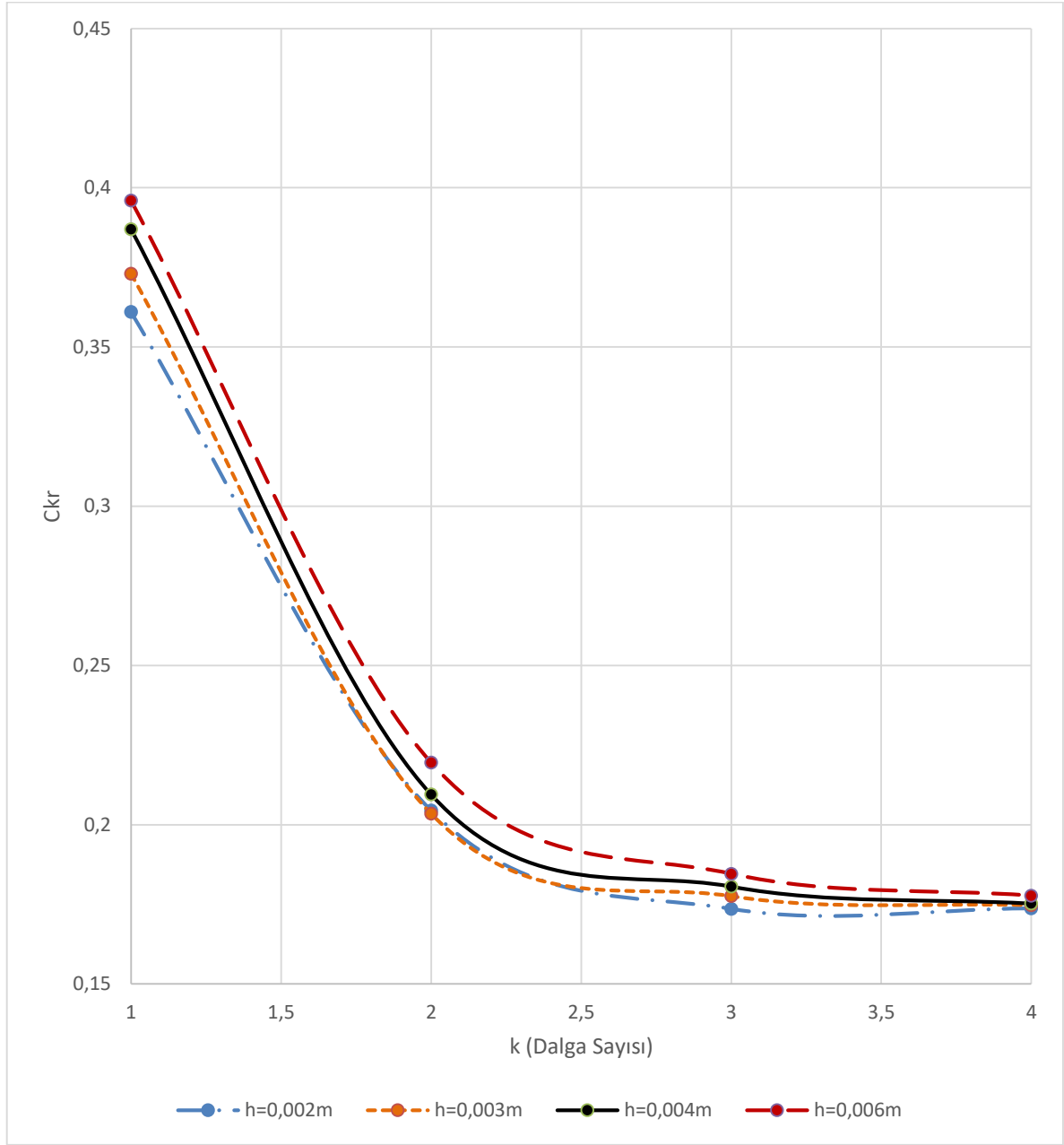


Şekil 4.27: h=0,006 m için, çırpınma hızı (U_{kr}) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.



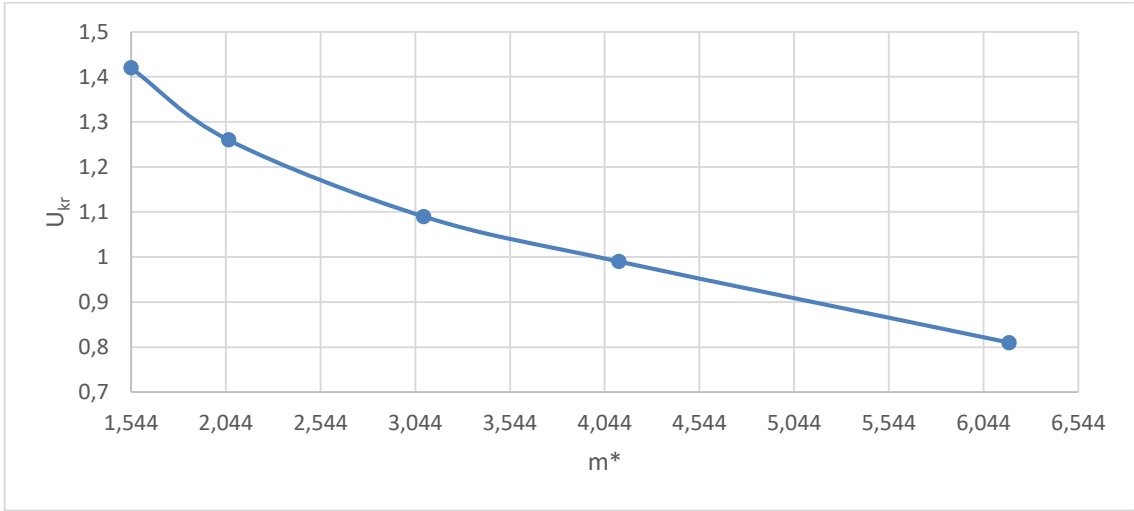
Şekil 4.28: Farklı damar kalınlıklarında çarpınma hızı (U_{kr}) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.

Farklı damar kalınlıklarında, çarpınma hızlarına karşılık gelen kritik dalga hızları, Şekil 4.24, Şekil 4.25, Şekil 4.26, Şekil 4.27 ve Şekil 4.28'deki grafiklerde gösterilmiştir. Çarpınma hızı arttıkça kritik dalga hızı da artmaktadır. Ayrıca damar kalınlığı arttıkça çarpınma hızı ve kritik dalga sayısının da arttığı görülmektedir.

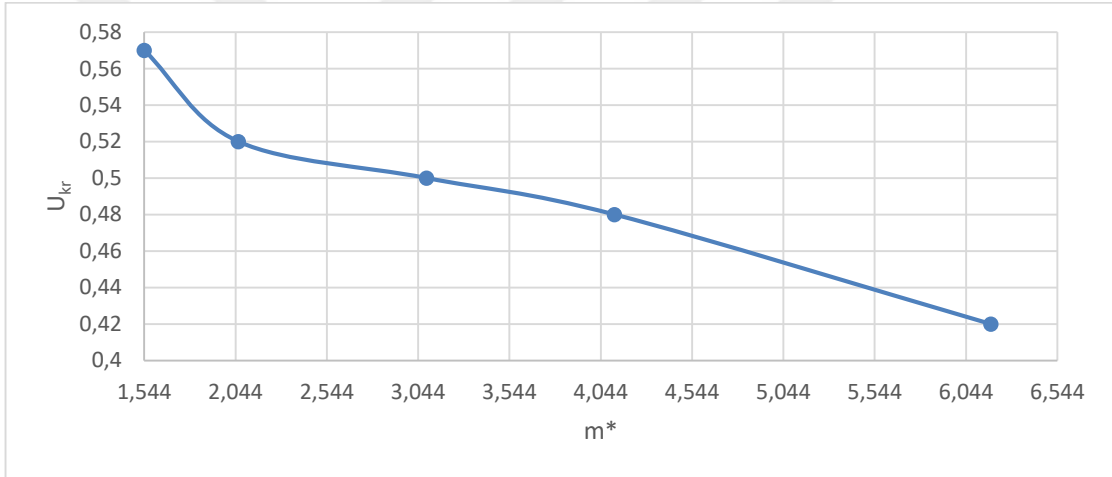


Şekil 4.29: Farklı damar kalınlıklarında (h) dalga sayısı (k) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.

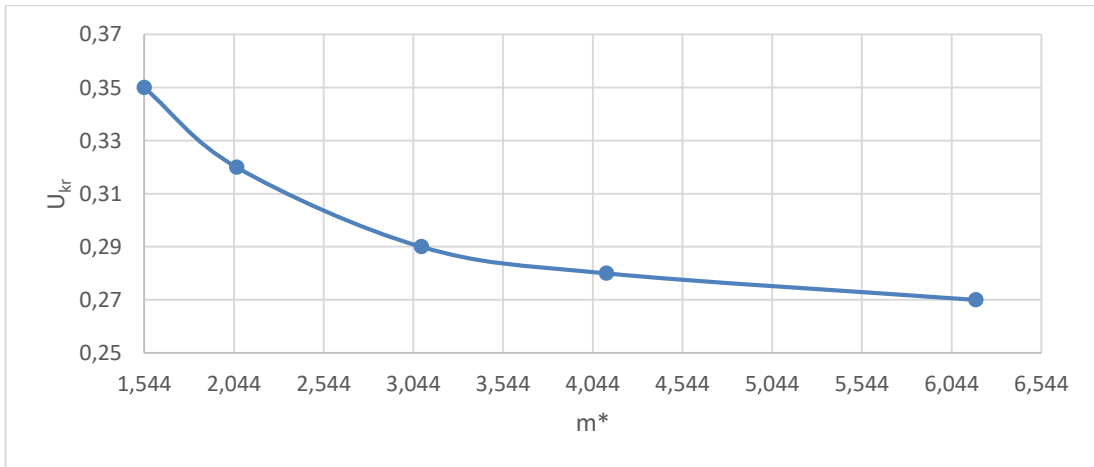
Şekil 4.29'daki grafikte farklı damar kalınlıklarında, dalga sayısı (k) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi incelenmiştir. Dalga sayısı arttıkça kritik dalga hızı azalmakta ve bir değere asimtotik olarak yaklaşmaktadır. Ayrıca damar kalınlığı arttıkça kritik dalga hızının arttığı burada da görülmektedir.



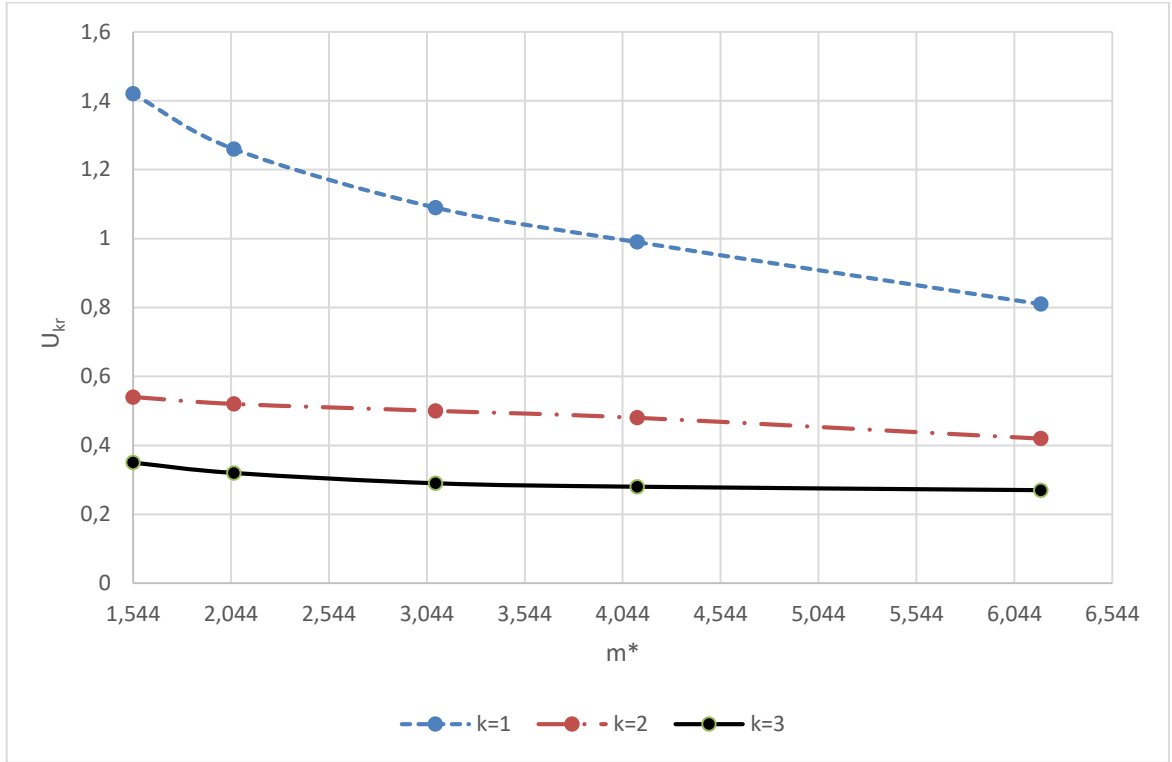
Şekil 4.30: $k=1$ için çirpınma hızı (U_{kr}) ile kütle oranı (m^*) değişimi.



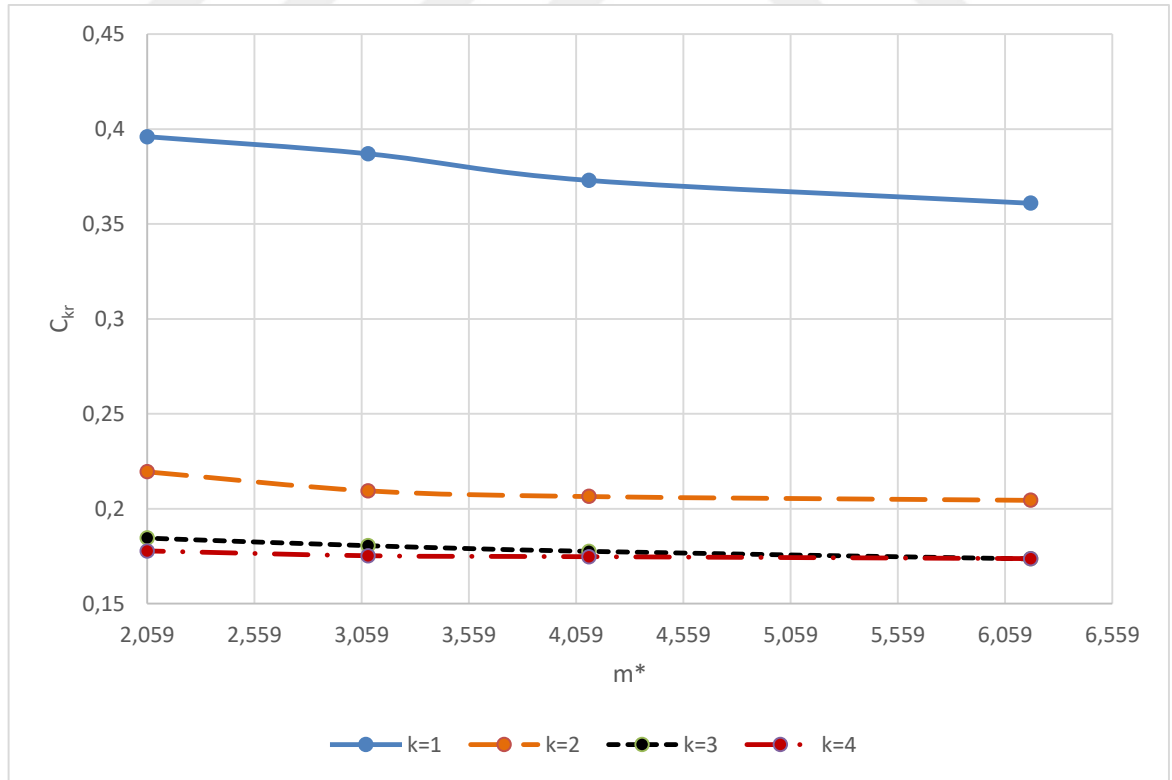
Şekil 4.31: $k=2$ için çirpınma hızı (U_{kr}) ile kütle oranı (m^*) değişimi.



Şekil 4.32: $k=3$ için çirpınma hızı (U_{kr}) ile kütle oranı (m^*) değişimi.



Şekil 4.33: Belirli dalga sayıları için çırpnma hızı (U_{kr}) ile kütle oranı (m^*) değişimi.

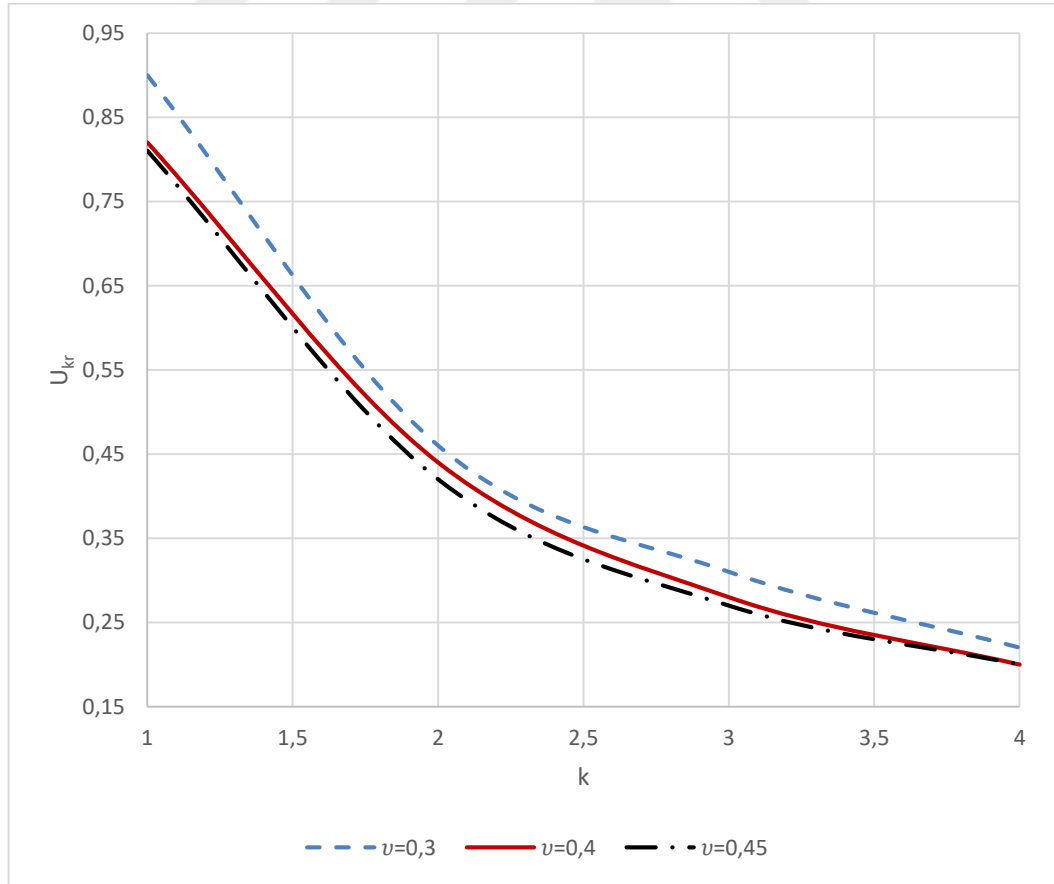


Şekil 4.34: Belirli dalga sayıları için kritik dalga hızı (C_{kr}) ile kütle oranı (m^*) değişimi.

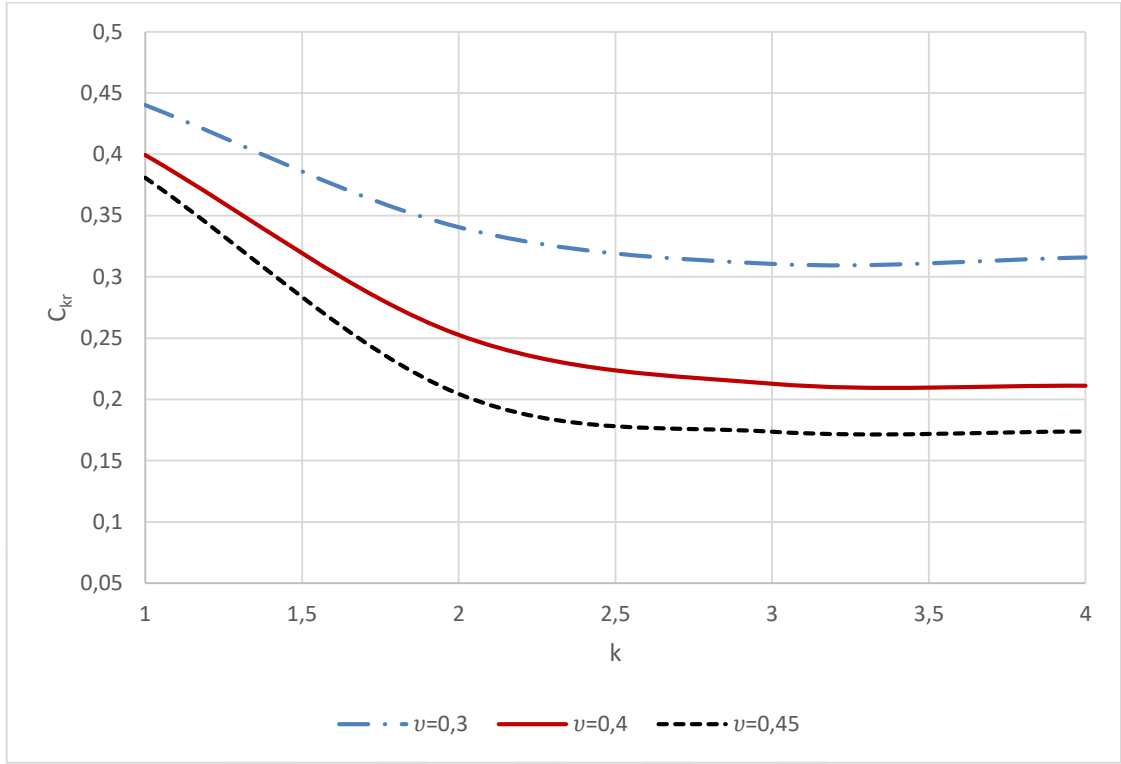
Kütle oranı, $m^* = \frac{\rho_f r_1}{\rho h}$ olmak üzere, belirli dalga sayılarında, kütle oranı (m^*) değişimlerine karşılık gelen çarpınma hızları (U_{kr}) Şekil 4.30, Şekil 4.31, Şekil 4.32 ve Şekil 4.33'deki grafiklerde gösterilmiştir. Kütle oranı (m^*) arttıkça çarpınma hızı (U_{kr}) azalmaktadır.

Şekil 4.34'de belirli dalga sayıları için kritik dalga hızı (C_{kr}) ile kütle oranı (m^*) değişimi incelenmiştir. Kütle oranı (m^*) arttıkça kritik dalga hızı (C_{kr}) azalmaktadır. Dalga sayısı $k=3$ ve $k=4$ için kütle oranı değişse de kritik dalga hızındaki (C_{kr}) değişim çok küçük olduğundan elde edilen eğriler hemen hemen düz doğru şeklindedir.

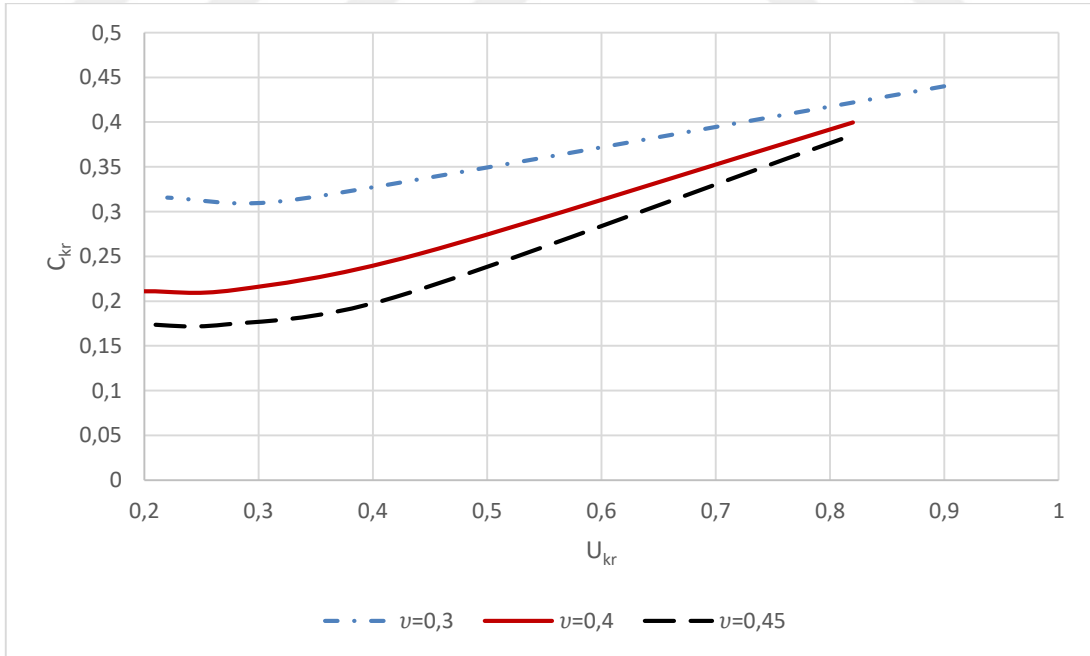
Damarın elastik özelliklerinin de çarpınma hızına ve kritik dalga hızına etkisini inceleyebilmek için, damar malzemesine ait Poisson oranı ve elastisite modülü değerleri değiştirilerek hesaplamalar tekrarlanmış, elde edilen değerler aşağıdaki grafiklerde yorumlanmıştır. Bunun için damara ait Poisson oranı ($\bar{\nu}$) değerleri 0,3 , 0,4 ve 0,45 olarak, elastisite modülü (E) değerleri ise 0,5 MPa, 1 MPa, 3 MPa, 4,66 MPa olarak alınmıştır.



Şekil 4.35: Damara ait farklı Poisson oranı ($\bar{\nu}$) değerlerinde dalga sayısı (k) ve çarpınma hızı (U_{kr}) değişimi.



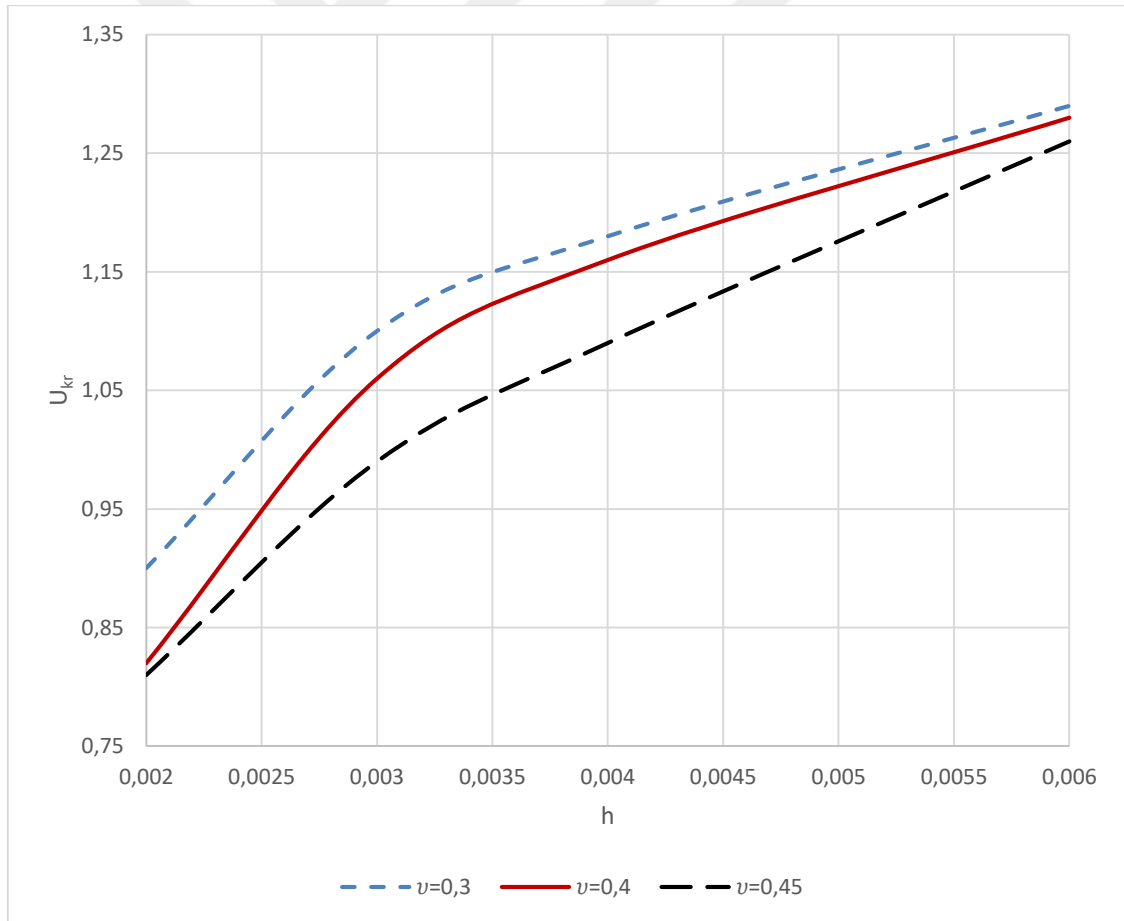
Şekil 4.36: Damara ait farklı Poisson oranı ($\bar{\nu}$) değerlerinde dalga sayısı (k) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.



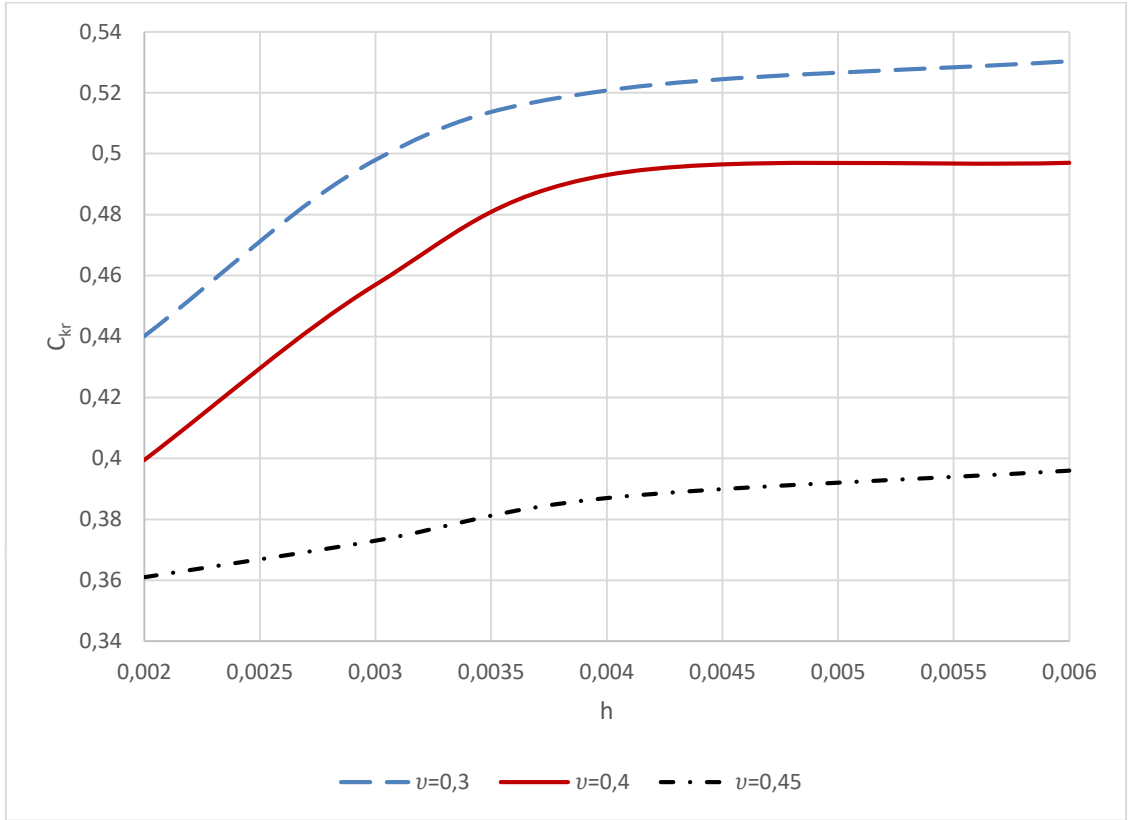
Şekil 4.37: Damara ait farklı Poisson oranı ($\bar{\nu}$) değerlerinde farklı dalga sayıları (k) için çarpınma hızı (U_{kr}) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.

Şekil 4.35 ve Şekil 4.36’da farklı Poisson oranı ($\bar{\nu}$) değerlerinde, artan dalga sayısı (k) değerlerine karşılık çarpınma hızı (U_{kr}) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi incelenmiştir. Şekil 4.35’den , dalga sayısı (k) arttıkça, çarpınma hızının (U_{kr}) azaldığı ve belirli bir değere doğru yakınsadığı görülmektedir. Ayrıca Poisson oranı ($\bar{\nu}$) arttıkça, çarpınma hızı (U_{kr}) azalmaktadır. Benzer şekilde Şekil 4.36’dan, dalga sayısı (k) arttıkça, kritik dalga hızının (C_{kr}) azaldığı görülmektedir. Ancak Poisson oranı ($\bar{\nu}$) arttıkça, kritik dalga hızı (C_{kr}) azalmaktadır.

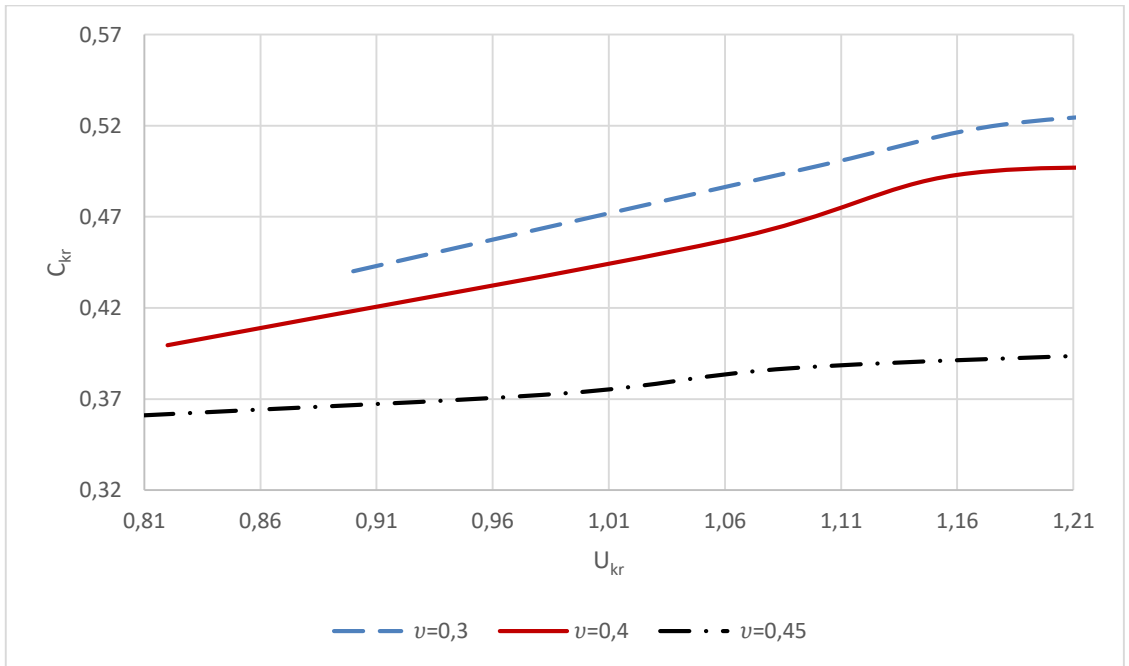
Şekil 4.37’de farklı Poisson oranı ($\bar{\nu}$) değerlerinde, farklı dalga sayıları için çarpınma hızı (U_{kr}) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi incelenmiştir. Çarpınma hızı (U_{kr}) arttıkça, kritik dalga hızı (C_{kr}) da artmaktadır. Ayrıca Poisson oranı ($\bar{\nu}$) arttıkça, kritik dalga hızının (C_{kr}) azaldığı burada da görülmektedir.



Şekil 4.38: Farklı Poisson oranı ($\bar{\nu}$) değerlerinde damar kalınlığı (h) ve çarpınma hızı (U_{kr}) değişimi.



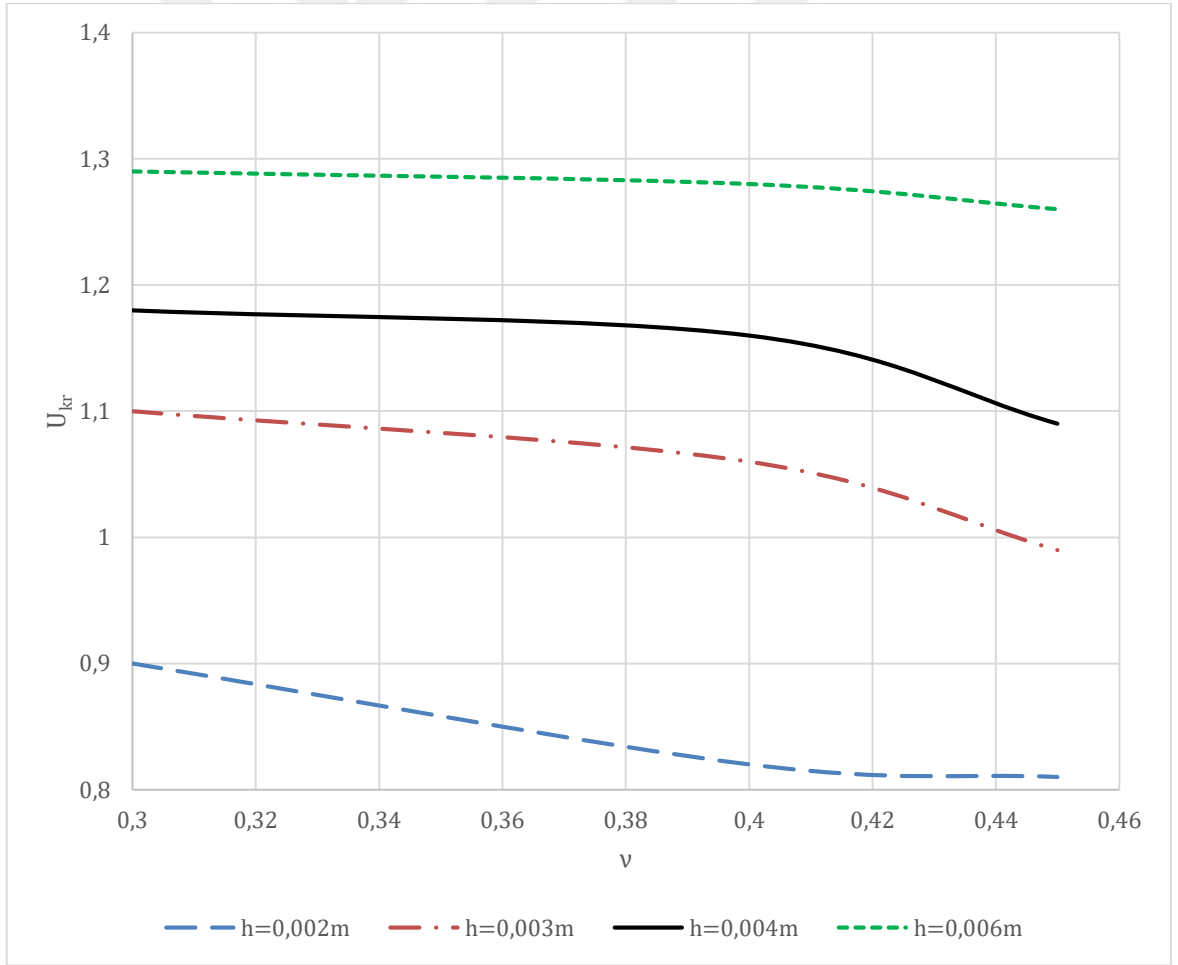
Şekil 4.39: Farklı Poisson oranı ($\bar{\nu}$) değerlerinde damar kalınlığı (h) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.



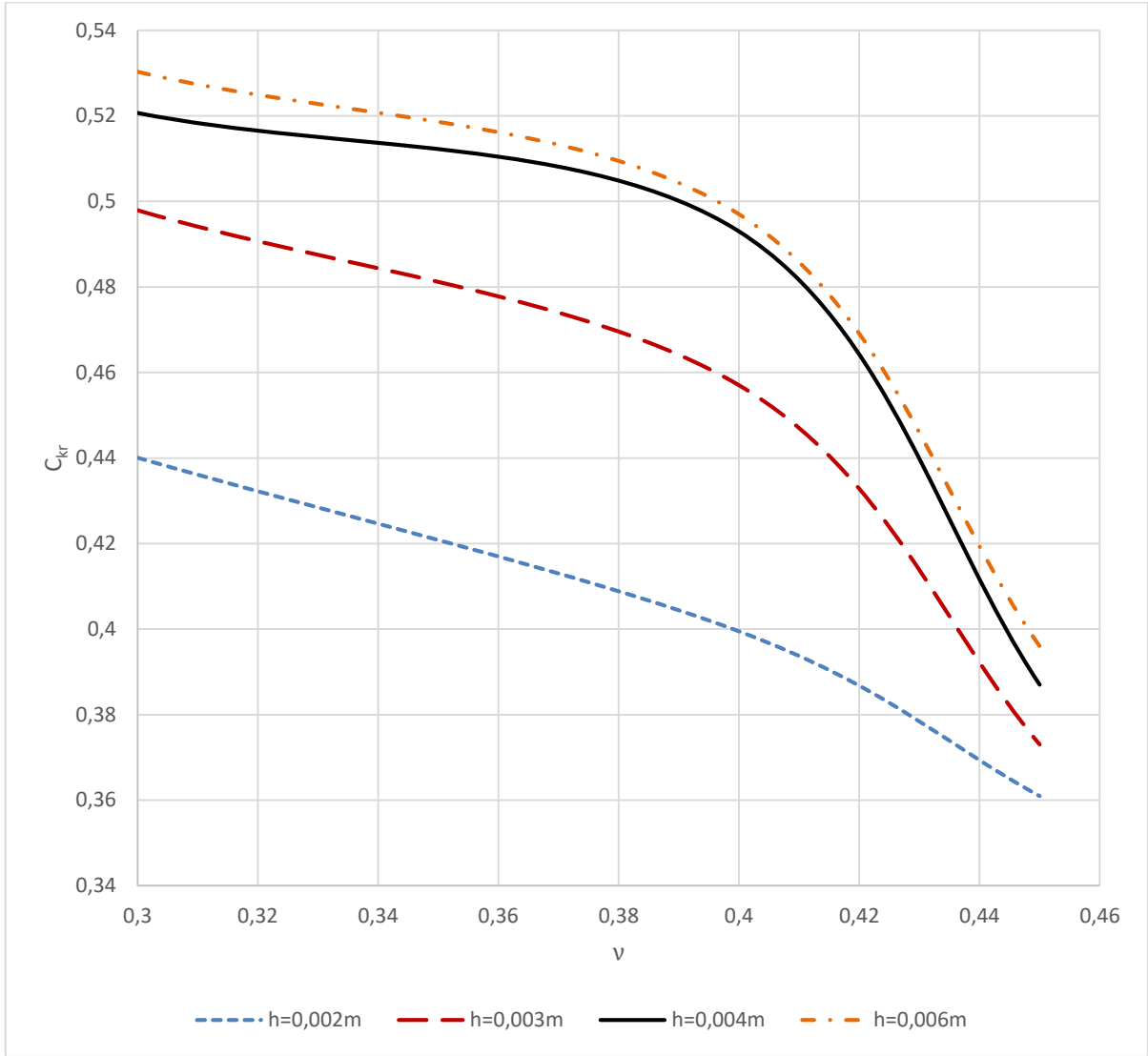
Şekil 4.40: Farklı Poisson oranı ($\bar{\nu}$) değerlerinde, farklı damar kalınlıkları (h) için çarpınma hızı (U_{kr}) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.

Şekil 4.38, Şekil 4.39'da ise damar malzemesi için farklı Poisson oranı ($\bar{\nu}$) değerleri seçilerek farklı damar kalınlıkları (h) için çarpınma hızı (U_{kr}) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi incelenmiştir. Şekil 4.38'den , damar kalınlığı (h) arttıkça, çarpınma hızının (U_{kr}) arttığı ve belirli bir değere doğru yakınsadığı görülmektedir. Ayrıca Poisson oranı ($\bar{\nu}$) arttıkça, çarpınma hızı (U_{kr}) azalmaktadır. Benzer şekilde Şekil 4.39'dan, damar kalınlığı (h) arttıkça, kritik dalga hızının (C_{kr}) arttığı görülmektedir. Ancak Poisson oranı ($\bar{\nu}$) arttıkça, kritik dalga hızı (C_{kr}) azalmaktadır.

Şekil 4.40'da farklı Poisson oranı ($\bar{\nu}$) değerlerinde, farklı damar kalınlıkları (h) için çarpınma hızı (U_{kr}) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi incelenmiştir. Çarpınma hızı (U_{kr}) arttıkça, kritik dalga hızı (C_{kr}) da artmaktadır. Ayrıca Poisson oranı ($\bar{\nu}$) arttıkça, kritik dalga hızının (C_{kr}) azaldığı burada da görülmektedir.

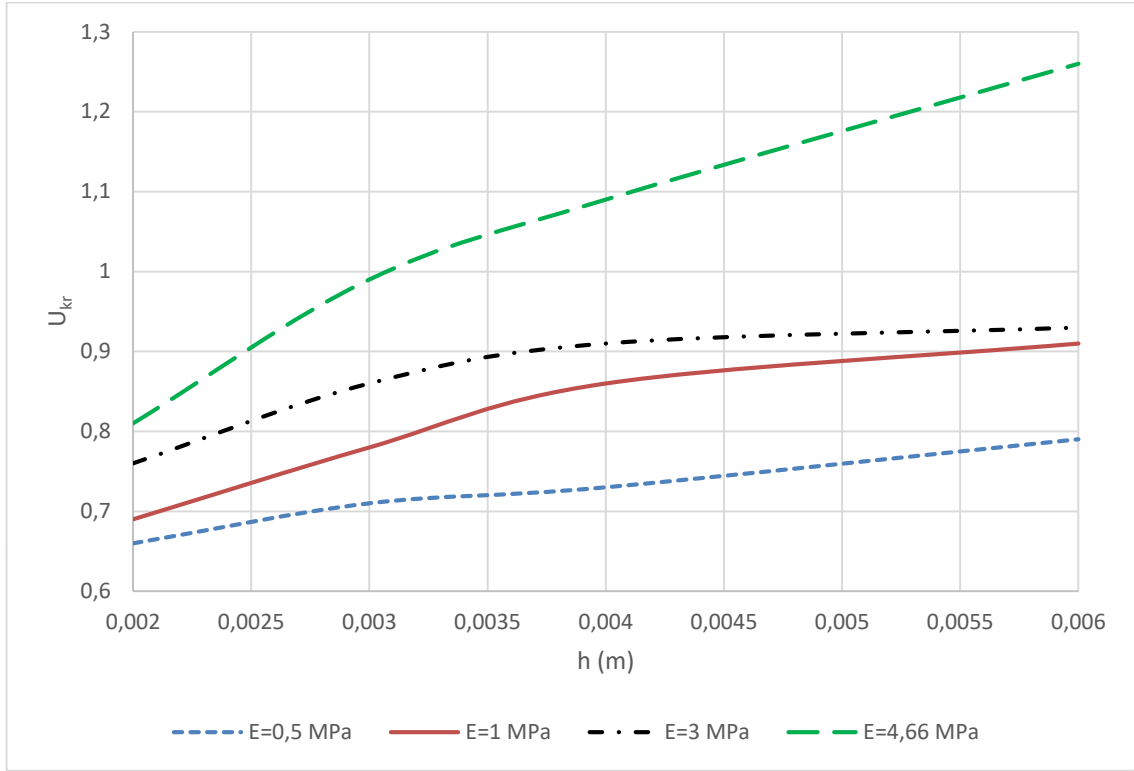


Şekil 4.41: Farklı damar kalınlıkları (h) için Poisson oranı ($\bar{\nu}$) ve çarpınma hızı (U_{kr}) değişimi.

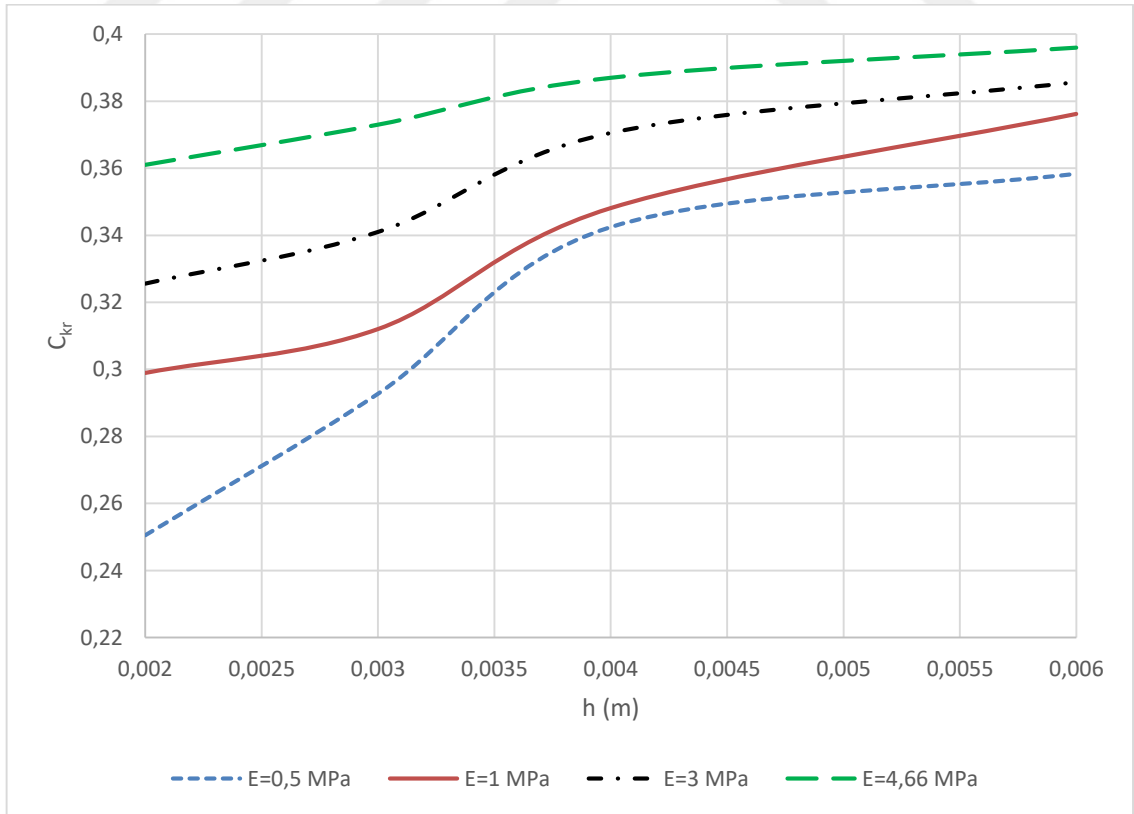


Şekil 4.42: Farklı damar kalınlıkları (h) için Poisson oranı ($\bar{\nu}$) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.

Şekil 4.41’de, farklı damar kalınlıklarında (h), Poisson oranı ($\bar{\nu}$) ile çarpınma hızı (U_{kr}) değişimi incelenmiştir. Poisson oranı ($\bar{\nu}$) arttıkça, çarpınma hızı (U_{kr}) azalmaktadır. Şekil 4.42’de ise farklı damar kalınlıklarında (h), Poisson oranı ($\bar{\nu}$) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi görülmektedir. Poisson oranı ($\bar{\nu}$) arttıkça, kritik dalga hızı (C_{kr}) azalmaktadır.

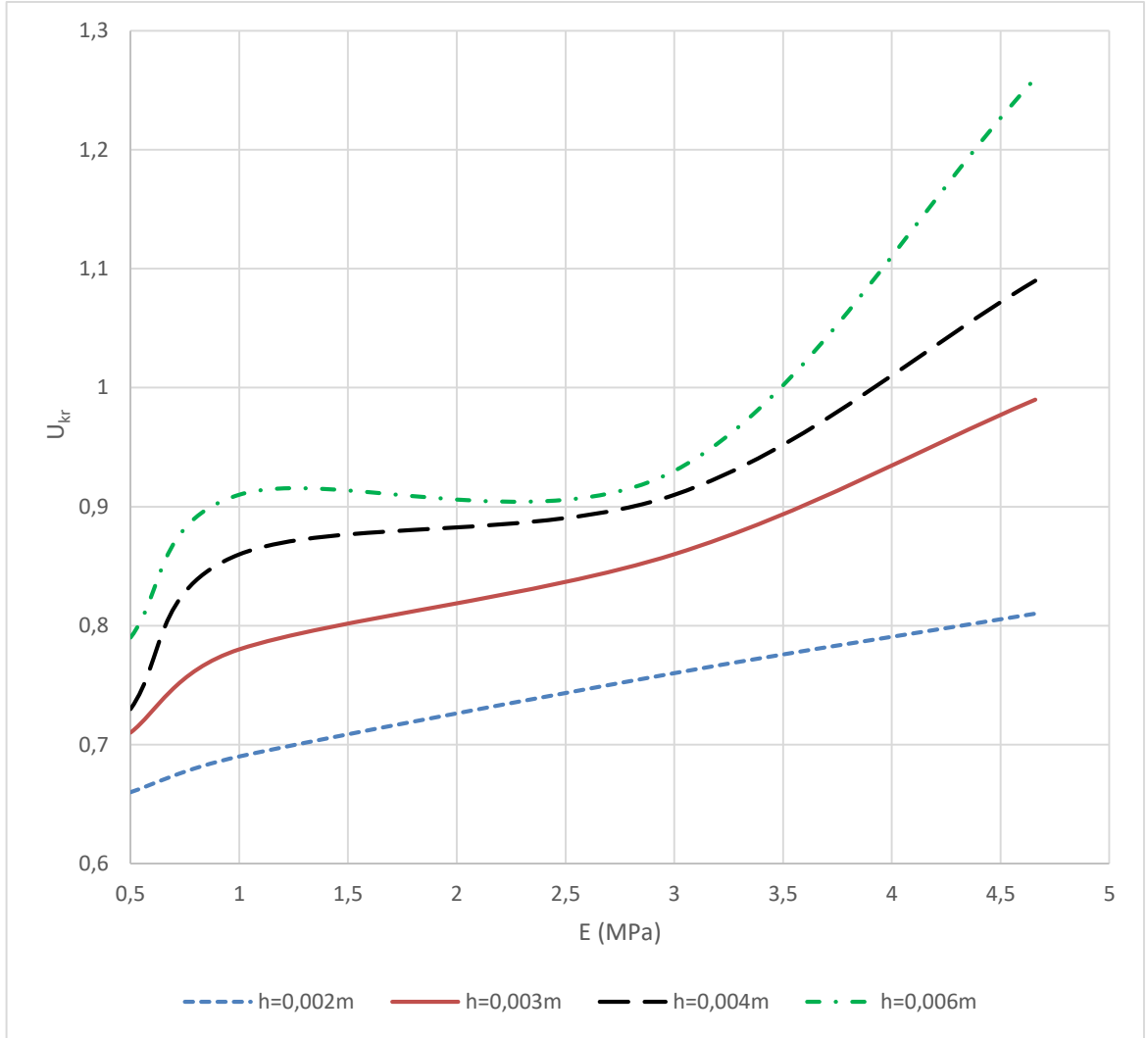


Şekil 4.43: Farklı elastisite modüllerinde (E), damar kalınlığı (h) ve çırpınma hızı (U_{kr}) değişimi.



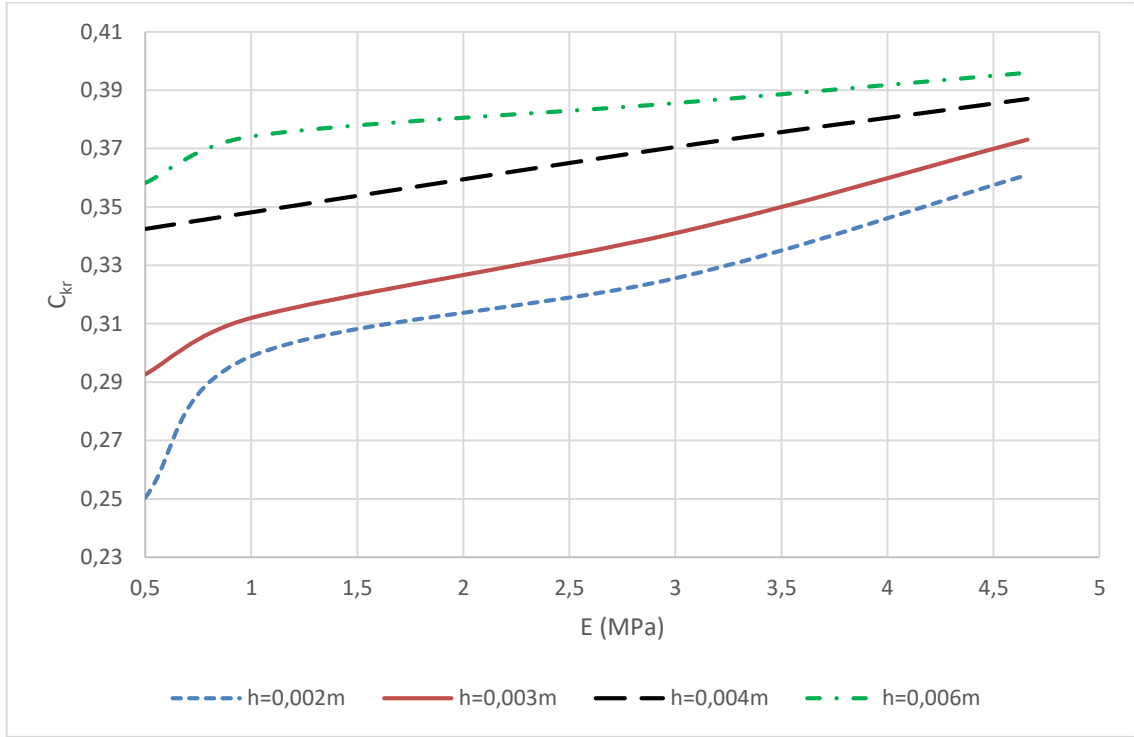
Şekil 4.44: Farklı elastisite modülleri (E) için damar kalınlığı (h) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi.

Şekil 4.43 ve Şekil 4.44’de, damara ait farklı elastisite modülleri (E) seçilerek, damar kalınlığı (h) ile çarpınma hızının (U_{kr}) ve kritik dalga hızının (C_{kr}) değişimi gösterilmiştir. Damar kalınlığı arttıkça çarpınma hızı (U_{kr}) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) artmaktadır.



Şekil 4.45: Farklı damar kalınlıklarında (h), elastisite modülü (E) ve çarpınma hızı (U_{kr}) değişimi.

Belirli damar kalınlıklarında (h), damara ait elastisite modülleri (E) değiştirilerek, bu değerlere karşılık gelen çarpınma hızları (U_{kr}) Şekil 4.45’deki grafikte gösterilmiştir. Elastisite modülü (E) arttıkça çarpınma hızı (U_{kr}) artmaktadır. Ayrıca damar kalınlığı arttıkça çarpınma hızının (U_{kr}) arttığı burada da görülmektedir.



Şekil 4.46: Farklı damar kalınlıklarında (h), elastisite modülü (E) ile kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi. Şekil 4.46’da ise belirli damar kalınlıklarında (h), damara ait elastisite modülü (E) değerleri değiştirilerek, bu değerlerde karşılık gelen kritik dalga hızları (C_{kr}) incelenmiştir. Elastisite modülü (E) arttıkça kritik dalga hızı (C_{kr}) artmaktadır. Ayrıca damar kalınlığı arttıkça kritik dalga hızının (C_{kr}) arttığı burada da görülmektedir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada damar içindeki kan akışı incelenmiştir. Bunun için, içinden akışkan geçen elastik, silindirik borular için dalga yayılım problemi ele alınmış, silindirik boru (damar) ile akışkanın (kanın) etkileşimi incelenmiş, çarpınma analizi yapılmıştır.

Çarpınma analizi, kalp damar sistemi hastalıkları için önemli bir problemdir. Kalp damar sistemi hastalıklarının tespiti ve tedavisinde, akış değerlerinin bilinmesi oldukça önemlidir. Bu yüzden önce akışkanın hız değerleri değiştirilerek akışkan hızı (U_1) ile sistemin öz frekansları (ω) arasındaki ilişki belirlenmiştir.

Daha sonra kanın elastik yapıda kararsız titreşimlere sebep olduğu çarpınma hızı (U_{kr}) ve bu çarpınma hızına karşılık gelen kritik dalga hızı (C_{kr}) bulunmuştur. Damar titreşimleri, akışkanın (kanın) kinetik enerjisi ile beslenmektedir. Akışkan hızı belirli bir sınırın üstüne çıktığında kararsız titreşimler oluşur. Bu kararsız titreşimler damar yapısının bozulmasına, deformasyonuna sebep olmaktadır. Kararsız titreşimlere sebep olan bu hız çarpınma hızıdır.

Damar kalınlığı (h) değişimine göre çarpınma hızı (U_{kr}) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi incelenmiştir. Elde edilen sonuçlardan, damar kalınlığı (h) arttıkça, çarpınma hızı (U_{kr}) ve kritik dalga hızının (C_{kr}) arttığı görülmüştür. Ayrıca farklı damar kalınlıklarında (h), dalga sayısı (k) ile çarpınma hızı (U_{kr}) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimleri incelenmiştir. Dalga sayısı (k) arttıkça çarpınma hızının (U_{kr}) ve kritik dalga hızının (C_{kr}) azaldığı ve belirli bir değere yakınsadıkları görülmüştür.

Ayrıca damar malzemesinin Poisson oranı ($\bar{\nu}$) ve elastisite modülü (E) değiştirilip, bu değişimine göre çarpınma hızı (U_{kr}) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) değişimi incelenmiştir. Poisson oranı ($\bar{\nu}$) arttıkça, çarpınma hızı (U_{kr}) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) azalmaktadır. Ayrıca damar malzemesinin elastisite modülü (E) arttıkça, çarpınma hızı (U_{kr}) ve kritik dalga hızı (C_{kr}) artmaktadır.

Elde edilen bu sonuçlar biyomüendislik açısından önemlidir. Damar malzemesinin özelliklerine bağlı olarak, çarpınma hızı ve kritik dalga hızındaki değişimler dikkate alınıp fizyolojik bakımdan ne gibi değişiklikler olduğu incelenebilir.

Modelleme yapılırken kan sıkıştırılmayan, viskoz, Newtonyen bir akışkan olarak ele alınmıştır. Ayrıca hücresel kısmın hareketi dikkate alınmayarak plazma ile birlikte düşünülmüştür. Kan gerçekte sıkıştırılmayan, Newtonyen olmayan bir akışkandır. Bu yüzden bundan sonraki çalışmalarda kan Newtonyen olmayan akışkan olarak ele alınabilir. Ayrıca hücresel kısmın hareketi dikkate alınarak akışkan parçacıklı olarak incelenebilir.

Tek tabakalı olarak ele alınan damar ise lineer, elastik malzeme olarak kabul edilmiştir. Gerçekte atardamarlar üç tabakadan oluşmaktadır. Modellemenin daha gerçekçi olması için damar tabakalı, viskoelastik ve lifli olarak incelenebilir. Ayrıca damarın içinde bulunduğu dış ortamın damara etkileri dikkate alınabilir.

Ayrıca bu çalışma deneysel çalışmalarla desteklenebilir. Teorik sonuçlar deneysel sonuçlarla karşılaştırılarak, elde edilen sonuçlar kalp damar sistemi hastalıklarının teşhis ve tedavisinde yol gösterici olabilir.

KAYNAKLAR

- [1]. Young, T., 1808, Hydraulic investigations, subservient to an intended croonian lecture on the motion of blood, *Philosophical Transactions of the Royal Society (London)*, 98:164-186.
- [2]. Young, T., 1809, On the function of the heart and arteries, The Croonian Lecture, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 99, 1-31.
- [3]. Moens, A. I., 1877, *Over de voortplantingssnelheid van den pols [On the speed of propagation of the pulse]*, Ph.D. thesis, in Dutch, Leiden, The Netherlands: S.C. Van Doesburgh.
- [4]. Moens, A. I., 1878, Die Pulscurve [The Pulse Curve] (in German), Leiden, The Netherlands: E.J. Brill.
- [5]. Korteweg, D. J., 1878, Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in elastischen röhren (on the velocity of propagation of sound in elastic pipes), *Annalen der Physik und Chemie*. 5: 525–542.
- [6]. Frank, O., 1899, Die grundform des arteriellen pulses, *Erste Abhandlung, Mathematische Analyse, Z. Biol.*, 3, 483-526.
- [7]. Witzig, K., 1914, *Über erzwungene wellenbewegungen zaber, inkompressibler Flüssigkeiten in elastischen Rohren*. PhD theses, University of Bern.
- [8]. Womersley, J.R., 1955, Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin walled elastic tube-I: The linear approximation for long waves, *Philosophical Magazine*, (seri 7), 46, 199-219.
- [9]. Womersley, J. R., 1957, An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries. *Technical report, Wright Air Development Centre-TR*, 56-614.
- [10]. Klip, W., 1962, Velocity and damping of pulse wave. *Martinus Nijhoff*, The Hague, Netherlands.
- [11]. Gerrard, J. H., 1985, An experimental test of the theory of waves in fluid-filled deformable tubes. *J.Fluid Mech.*, 156: 321-347.
- [12]. Atabek, H.B. and Lew, H. S., 1966, Wave propagation through a viscous incompressible fluid contained in an initially stressed elastic tube. *Biophysical Journal*, 6: 481-503.
- [13]. Mirsky, I., 1967, Wave propagation in a viscous fluid contained in an orthotropic elastic tube. *Biophysical Journal*. 7: 165-186.
- [14]. Mirsky, L., 1968, Pulse velocities in initially stressed cylindrical rubber tubes, *Bull. Math. Biophysics*, 30, 299-308.

- [15]. Klip, W., Loon, P. V., and Klip, D. A., 1968, Formulas for phase velocity and damping of longitudinal waves in thick-walled, viscoelastic tubes. *Journal of applied Physics*, 38: 3745-3755
- [16]. Cox, R.H., 1968, Wave propagation through a Newtonian fluid contained within a thick walled, viscoelastic tube, *Biophysical Journal*, Volume 8, 691-709.
- [17]. Cox, R.H., 1969, Wave propagation through a Newtonian fluid contained within a thick walled viscoelastic tube: The influence of wall compressibility. *J. Biomech.*, Volume 3, 317-335.
- [18]. Cox, R. H., 1969, Comparison of linearized wave propagation models for arterial blood flow analysis. *Journal of Biomechanics*, 2:251–265.
- [19]. Rudinger, G., 1970, Shock waves in mathematical model of the aorta. *J. Appl. Mechanics*. 37 (1): 34-37.
- [20]. Anliker, M., Rockwell, R. L. and Ogden, E., 1971, Nonlinear analysis of flow pulses and shock waves in arteries. *Z. Angew, Math. Phys.* 22(2): 217-246.
- [21]. Hoogstraten, H. W. and Smith, C. H., 1978, A mathematical theory of shock-wave formation in arterial blood flow, *Acta Mechanica*, 30, 145-155.
- [22]. Rachev, A.I., 1980, Effect of transmural pressure and muscular activity on pulse waves in arteries, *Journal .Biomechanics Engineering, ASME*, Vol. 102, 119-123.
- [23]. Nag, S. K. and Jana, R. N., 1981, Oscillating two-phase flow in an elastic tube, *Acta Mechanica*, 41, 121-128.
- [24]. Hashizume, Y., 1985, Nonlinear pressure waves in a fluid-filled elastic tube, *Journal of the Physical Society of Japan*, 54(9): 3305-3312.
- [25]. Yomosa, S., 1987, Solitary waves in large blood vessels, *Journal of the Physical Society of Japan*, 56(2): 506-520.
- [26]. Demiray, H., Erbay, H.A., and Erbay, S., 1987, Pulse waves in prestressed arteries, *Bulletin of Mathematical Biology*, 49, 289-305.
- [27]. Demiray, H., Erbay, H.A., and Erbay, S., 1987, Effect of prestress on pulse waves in arteries, *ZAMM*, 67, 473-485.
- [28]. Demiray, H., 1996, Solitary waves in prestressed elastic tube. *Bullentin of Mathematical Biology*, 58(5): 939-955.
- [29]. Demiray, H., 1997, Nonlinear wave modulation in a prestressed thin elastic tube filled with an inviscid fluid. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 59(2):165-181.
- [30]. Demiray, H., 1998, Nonlinear wave modulation in a fluid-filled thick elastic tube. *International Journal of Engineering Science*. 36(10): 1061-1082.

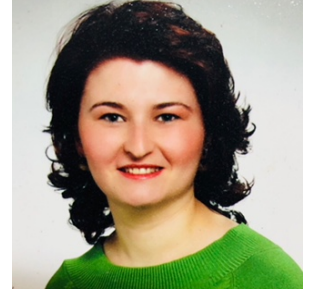
- [31]. Demiray, H., 1999, Dressed solitary waves in fluid-filled elastic tubes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 34(1): 185-196.
- [32]. Demiray, H., 2001a, Solitary waves in fluid-filled elastic tubes: weakly dispersive case. *International Journal of Engineering Science*. 39(4): 439-451.
- [33]. Demiray, H., 2001b, Solitary waves in elastic tube filled with a layered fluid. *International Journal of Engineering Science*. 39(6): 629-639.
- [34]. Demiray, H., 2001c, Localized travelling waves in a prestressed thick elastic tube. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 36(7): 1085-1095.
- [35]. Demiray, H., 2001d, Modulation of non-linear waves in a viscous fluid contained in an elastic tube. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 36(4): 649-661.
- [36]. Demiray, H., 2002, Modulation of nonlinear waves in a viscous fluid contained in a tapered elastic tube. *International Journal of Engineering Science*. 40(17): 1897-1918.
- [37]. Demiray, H., 2003a, Nonlinear wave modulation in a fluid-filled linearly tapered elastic tube. *European Journal of Mechanics*. 22(4): 603-615.
- [38]. Demiray, H., 2003b, Contributions of higher order terms to nonlinear waves in fluid-filled elastic tubes: strongly dispersive case. *International Journal of Engineering Science*. 41(12): 1387-1403.
- [39]. Demiray, H., 2004a, Solitary waves in a tapered prestressed fluid-filled elastic tube. *Z. Angew. Math. Phys.* 55(2): 282-294.
- [40]. Demiray, H., 2004b, The effect of a bump on wave propagation in a fluid-filled elastic tube. *International Journal of Engineering Science*. 42(2): 203-215.
- [41]. Demiray, H., 2004c, On the existence of some evolution equations in fluid-filled elastic tubes and their progressive wave solutions. *International Journal of Engineering Science*. 42(15-16): 1693-1706.
- [42]. Demiray, H., 2007a, Solitary waves in a fluid-filled thin elastic tube with variable cross-section. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 12(5): 735-744.
- [43]. Demiray, H., 2007b, Waves in fluid-filled elastic tubes with a stenosis: variable coefficients KdV equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 202(2): 328-338.
- [44]. Demiray, H., 2007c, The effect of a bump in an elastic tube on wave propagation in a viscous fluid of variable viscosity. *Applied Mathematics and Computation*. 187(2): 1574-1583.
- [45]. Demiray, H., 2008a, Weakly nonlinear waves in a fluid with variable viscosity contained in a prestressed thin elastic tube. *Chaos, Solitons and Fractals*. 36(2): 196-202.

- [46]. Demiray, H., 2008b, Non-linear waves in a fluid-filled inhomogenous elastic tube with variable radius. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 43(4): 241-245.
- [47]. Demiray, H., 2008c, Weakly non-linear waves in a fluid-filled elastic tube with variable prestretch. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 43(9): 887-891.
- [48]. Demiray, H., 2008d, Nonlinear waves in an elastic tube with variable prestretch filled with a fluid of variable viscosity. *International Journal of Engineering Science*. 46(10): 949-957.
- [49]. Demiray, H., 2009a, Head-on-collision of nonlinear waves in a fluid of variable viscosity contained in an elastic tube. *Chaos, Solitons and Fractals*. 41(4): 1578-1586.
- [50]. Demiray, H., 2009b, Waves in an elastic tube filled with a heterogeneous fluid of variable viscosity. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 44(6): 590-595.
- [51]. Demiray, H., 2009c, Variable coefficient modified KdV equation in fluid-filled elastic tubes with stenosis: solitary waves. *Chaos, Solitons and Fractals*. 42(1): 358-364.
- [52]. Demiray, H., 2009d, Forced KdV equation in a fluid-filled elastic tube with variable initial stretches. *Chaos, Solitons and Fractals*. 42(3): 1388-1395.
- [53]. Akgün, G. and Demiray, H., 1999, Non-linear wave modulation in a prestressed viscoelastic thin tube filled with an inviscid fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 34(3): 571-588.
- [54]. Akgün, G. and Demiray, H., 2000, Modulation of non-linear axial and transverse waves in a fluid-filled thin elastic tube. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 35(4): 597-611.
- [55]. Akgün, G. and Demiray, H., 2001, Interactions of nonlinear acoustic waves in a fluid-filled elastic tube. *International Journal of Engineering Science*. 39(5): 563- 581.
- [56]. Antar, N. and Demiray, H., 1999a, Weakly nonlinear waves in a prestressed thin elastic tube containing a viscous fluid. *International Journal of Engineering Science*. 37(14): 1859-1876.
- [57]. Antar, N. and Demiray, H., 1999b, Non-linear wave modulation in a prestressed fluid field thin elastic tube. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 34: 123-138.
- [58]. Antar, N. and Demiray, H., 2000, The boundary layer approximation and non-linear waves in elastic tubes. *International Journal of Engineering Science*. 38(13): 1441-1457.
- [59]. Bakirtas, I. and Demiray, H., 2004a, Modulation of nonlinear waves near the marginal state of instability in fluid-filled elastic tubes. *Applied Mathematics and Computation*. 149(1): 83-101.

- [60]. Bakirtas, I. and Demiray, H., 2004b, Amplitude modulation of nonlinear waves in a fluid-filled tapered elastic tube. *Applied Mathematics and Computation*. 154(3): 747-767.
- [61]. Bakirtas, I. and Demiray, H., 2005, Weakly non-linear waves in a tapered elastic tube filled with an inviscid fluid. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 40(6): 785-793.
- [62]. Mairesse, G.H., Lacroix, D., Klug, D., France, P. L., Kouakam, C. and Kacet, S., 2003, The Usefulness of Surface 12-Lead Electrocardiogram to Predict Intra-Atrial Conduction Block After Successful Atrial Flutter Ablation, *Journal of Electrocardiology*, Vol.36 No.3.
- [63]. Khana, I. A., Nair, C. K., Singhb, N., Gowda, R. M., Nair, R.C., 2004, Acute ventricular rate control in atrial fibrillation and atrial flutter, *International Journal of Cardiology*, 97, 7 – 13.
- [64]. Finsterer, J., Stöllberger, C., 2008, Atrial fibrillation/flutter in myopathies, *International Journal of Cardiology* 128,304–310.
- [65]. Ravelli, F., Mase, M., Disertori, M., 2008, Mechanical modulation of atrial flutter cycle length, *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, 97, 417–434.
- [66]. Naccarelli, G.V., Johnston, S. S., Dalal, M., Lin, J. and Patel, P., 2011, Rates and Implications for Hospitalization of Patients 65 Years of Age With Atrial Fibrillation/Flutter, *American Journal of Cardiology*.
- [67]. Bakırtaş, İ., 2003, *İçi Akışkanla Dolu Yarıçapı Değişken Elastik Tüplerde Nonlineer Dalga Yayılımı*, Doktora Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [68]. Mortazavinia Z., Goshtasbi Rad E., Emdad H., Sharifkazemi M. B., Zare A., Mehdizadeh A. R., 2012, Study of Pulsatile Non-Newtonian Blood Flow Through Abdominal Aorta and Renal Arteries Incorporating Fluid-Structure Interaction, *J Biomed Phys. Eng.*, 2(3).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Betül UYSAL
Doğum Yeri	Erzurum
Doğum Tarihi	01.09.1976
Uyruğu	<input checked="" type="checkbox"/> T.C. <input type="checkbox"/> Diğer:
Telefon	0 212 8663700-44116
E-Posta Adresi	ubetul@istanbul.edu.tr
Web Adresi	



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Atatürk Üniversitesi
Fakülte	Mühendislik Fakültesi
Bölümü	Makine Mühendisliği
Mezuniyet Yılı	26.09.1996

Yüksek Lisans	
Üniversite	Mersin Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Programı	Makine Mühendisliği Programı

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Makine Mühendisliği Anabilim Dalı
Programı	Makine Mühendisliği Programı