MİMAR SİNAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

$GL_{p,q}(1|1)$ KUANTUM SÜPER GRUBUNUN ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

Araş. Gör. Sultan ÇELİK

Danışman: Prof. Dr. Belgin MAZLUMOĞLU

ARALIK 1995

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, tezimi yöneten sayın hocam Prof. Dr. Belgin MAZLUMOĞLU'na, çalışmalarım esnasında beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Metin ARIK'a ve özveriyle yardım eden eşim sayın Yard. Doç. Dr. Salih ÇELİK'e teşekkür ederim.

İçindekiler

ÖZET

Bu çalışmada, $GL_{p,q}(1|1)$ kuantum süper grubunun özellikleri incelenmiştir. Bir $T \in GL_{p,q}(1|1)$ süper matrisi gözönüne alınmış ve T nin matris elemanları arasında sağlanan bazı komutasyon bağıntılarını içeren lemmalar verilmiş ve ispatlanmıştır. T nin süper tersi ve süper determinantı, yeni bir yaklaşımla elde edilmiştir. Sonra, eğer $T \in GL_{p,q}(1|1)$ ise $T^n \in GL_{p^n,q^n}(1|1)$ olduğu açık olarak gösterilmiştir. Bu sonuç kullanılarak, bir T kuantum süper matrisi, matris elemanları komutatif olmayan başka bir M matrisinin üstel formu olarak yazılmış ve M nin matris elemanları, T nin matris elemanları cinsinden ifade edilmiştir. Böylece, M nin matris elemanlarının sağladığı (h_1, h_2)-deforme komutasyon bağıntıları elde edilmiştir. T nin matris elemanlarını M nin matris elemanları cinsinden ifade etmek için ise, M nin n-inci kuvveti M^n nin matris elemanları açık olarak hesaplanmıştır. Bu arada, süper determinant ve süper iz arasında klasik ve q-deforme durumda sağlanan bağıntının (p, q)-deforme durumda da sağlandığı gösterilmiştir.

Sonra, $GL(1|1)$ süper grubunu (p, q)-deforme eden bir R-matrisi kullanılarak, iki kuantum süper matrisin toplamının hangi şartlar altında bir kuantum süper matris olacağı araştırılmıştır. Ayrıca, bu kuantum R-matrisi üstel formda ifade edilerek, M (üstel) matrisinin matris elemanları arasında sağlanan (h_1, h_2)-komutasyon bağıntıları, yeni bulunan bir r-matrisi ile tekrar elde edilmiştir. Elde edilen bu bağıntılar, daha önce elde edilen bağıntılara denktir.

Son olarak, iki deformasyon parametreli kuantum özel lineer gruplar gözönüne alınmış ve $GL_{p,q}(1|1)$ süper grubunun alt grubu olan üniter $SU_{p,q}(1|1)$ süper grubundaki bir matrisin matris elemanları ile süper yaratma ve yok etme operatörleri (fiziksel olarak, (p, q)-deforme süper osilatörler) arasında bir bire-bir tekabül olduğu gösterilmiştir.

THE PROPERTIES OF THE SUPERGROUP $GL_{p,q}(1|1)$

SUMMARY

Quantum groups are not really groups, they are a generalization of the concept of classical groups. More precisely, a quantum group is a deformation of a group that, for particular values of the deformation parameter, coincides with the group. Quantum groups appeared first as quantum algebras, i.e. as one parameter deformations of the universal enveloping algebras of Lie algebras [1].

Other approaches to quantum groups, in which the objects may be called quantum matrix groups and Hopf algebras in duality to the quantum algebras, are developed in Ref.s [2-4].

The general framework of quantum groups aside, the special treatment of quantum groups in their basic matrix representation with non commuting entries show very interesting properties. For the quantum group $GL_q(2)$ this was described in Ref.s 5 and 6 and also for $GL_{p,q}(2)$ in [7].

The simplest supergroup is the group 2x2 supermatrices with two even and two odd matrix elements, i.e. $GL(1|1)$. Even matrix elements commute with everything and odd matrix elements anti-commute among themselves. The deformation of the supergroup of 2x2 matrices, i.e. the quantum supergroup $GL_q(1|1)$ can be found in [6,8,9]. Two parameter deformation of $GL(1|1)$ was given in [10,11].

In this work, the properties of the quantum supergroup $GL_{p,q}(1|1)$ are studied. To achieve this, an element T of $GL_{p,q}(1|1)$ is considered and some lemmas claiming certain commutation relations between the matrix elements of T are proved. The super-inverse and super-determinant of T are computed with a new approach. Besides it is proved that if $T \in GL_{p,q}(1|1)$ then $T^n \in GL_{p^n,q^n}(1|1)$ necessarily. Using this result an arbitrary quantum super

matrix T is written as the exponential of another matrix M whose elements are not commutative and the elements of M are derived in terms of those of T. Therefore, (h_1, h_2)-deformed commutation relations satisfied between the matrix elements of M are obtained. While computing the elements of T in terms of elements of M, the elements of M^n are computed. Also, it is shown that the relation, which is satisfied between the superdeterminant and supertrace in the classic and q-deformed cases, is satisfied in the (p, q)-deformed case, too.

Latter on, by means of using a matrix R which (p, q) deforms the supergroup $GL(1|1)$; the conditions, under which the sum of two supermatrices is again a supermatrix, are studied. Also; a formula, giving the commutation relations between the elements of the exponential matrix M, is derived by expressing the quantum R-matrix in exponential form.

Finally, two-deformation parameter quantum special linear supergroups are studied and it is shown that there is a one-to-one correspondence between the elements of unitary supergroup $SU_{p,q}(1|1)$, which is a subgroup of the supergroup $GL_{p,q}(1|1)$ and the super creation and super annihilation operators.

1 BÖLÜM : GİRİŞ

Kuantum grupları, grup kavramının bir genelleştirilmesidir. Daha tam olarak, bir kuantum grubu, bir grubun deformasyonudur öyleki deformasyon parametresinin özel değer(ler)i için o, grup ile özdeşleşir. Kuantum grubu terminolojisi, ilk kez 1986 da V. Drinfeld [1] tarafından kullanılmıştır. Daha sonra bir çok yazar bu konuya değişik yorumlar getirmiştir [2-4].

$\mathcal{C}^2$ vektör uzayının singüler olmayan lineer transformasyonları bir grup formundadır ve bu gruba, $\mathcal{C}$ üzerindeki 2-inci dereceden genel lineer grup denir ve $GL(2,\mathcal{C})$ ile gösterilir. Şüphesiz bu grup, matris elemanları kompleks ve determinantı sıfırdan farklı olan 2x2-matrislerin grubuna izomorfiktir. 2x2-matrislerin grubu, matris elemanlarının c-sayılar oldukları ve keyfi bir $q \in \mathcal{C}$ parametresine bağlı olarak aşikar olmayan bir takım komutasyon bağıntılarını sağladıkları kabul edilerek deforme edilebilir [4-6]. $GL(2,\mathcal{C})$ nin bu deformasyonu $GL_q(2,\mathcal{C})$ ile gösterilir. Eğer 2x2-tipindeki bir $A \in GL_q(2,\mathcal{C})$ matrisi

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

olarak alınırsa A nın matris elemanları

$$\begin{gathered} ab = qba, \quad bd = qdb, \\ ac = qca, \quad cd = qdc, \\ bc = cb, \quad ad - da = (q - q^{-1})bc \end{gathered} \tag{1.2}$$

şeklindeki q-komutasyon bağıntılarını sağlarlar. Bu şekildeki A matrisinin *kuantum determinantı*, bilinen anlamda tanımlanamaz. Onun tanımlanması (1.2) bağıntıları kullanılarak yapılır. Eğer A nın kuantum determinantı $D_q(A)$ ile gösterilirse

$$\begin{aligned} D_q(A) &= ad - qbc \\ &= da - q^{-1}bc \end{aligned} \tag{1.3}$$

olur. $D_q(A)$ nın, A matrisinin bütün matris elemanları ile komutatif olduğu kolayca gösterilebilir.

İlginç iki özellik de; eğer $A \in GL_q(2,\mathcal{C})$ ise $A^{-1} \in GL_{q^{-1}}(2,\mathcal{C})$ ve n, bir tam sayı yani $n \in \mathcal{Z}$ olmak üzere $A^n \in GL_{q^n}(2,\mathcal{C})$ olmasıdır. Birincisinin ispatı (1.2) ve (1.3) bağıntıları ile direkt cebirsel işlemlerden çıkar. İkincisinin ispatı [5] ve [6] da bulunabilir. Bunlara ek olarak, eğer $A, B \in GL_q(2, \mathcal{C})$ ise, $A = (a_{ij})$ ve $B = (b_{ij})$ olmak üzere $AB \in GL_q(2, \mathcal{C})$ olması ancak

$$a_{ij} b_{kl} = b_{kl} a_{ij}$$

olması halinde yani A ve B matrislerinin matris elemanlarının komutatif olması halinde mümkündür.

$GL_q(2, \mathcal{C})$ kuantum grubu, klasik $GL(2, \mathcal{C})$ lineer grubunun "tek" parametreli deformasyonudur. Şüphesiz $GL(2, \mathcal{C})$ grubunun çok parametreli deformasyonu da yapılmıştır. Örneğin $GL(2, \mathcal{C})$ grubunun "iki" parametreli deformasyonu Schirrmacher ve arkadaşları [7] tarafından elde edilmiştir.

Kuantum grupları teorisi, Matematik ve Fizik' te bir çok uygulama alanı bulmuştur. Örneğin "Düğüm Teori" ve "Örgü Teori" bunlardan ikisidir. Bu gelişmeler altındaki cebirsel yapı, süper grupların teorisine genişletilmiştir [6,8-12]. En basit süper grup, matris elemanlarının ikisi **çift** ve ikisi de **tek** olan 2x2-tipindeki süper matrislerin grubudur. Bu grup $GL(1|1)$ ile gösterilir. $GL(1|1)$ süper grubunun tek parametreli deformasyonu [6,9] da yapılmıştır. Bu grubun tek parametreli deformasyonu (ki ona $GL(1|1)$ süper grubunun q-deformasyonu denir) $GL_q(1|1)$ ile gösterilir. Bu grup hakkında özet bilgiler aşağıda verilmiştir. $T \in GL(1|1)$ olsun. Bu takdirde T süper matrisi

$$T = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

şeklindedir. Burada a ve d (latin harfleri) T nin çift olan matris elemanlarıdır ki bunlar T nin diğer bütün matris elemanları ile komutatiftir; β ve γ (yunan harfleri) T nin tek olan matris elemanlarıdır ve bu elemanlar kendi aralarında anti-komutatif ve T nin diğer matris elemanları (yani a ve d) ile komutatiftir.

Corrigan ve arkadaşları [6] ile Schwenk ve arkadaşları [9] göstermişlerdir ki eğer $T \in GL_q(1|1)$ ise, T nin matris elemanları $q \in \mathcal{C} - \{0\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a\beta = q\beta a, &\quad d\beta = q\beta d, \\ a\gamma = q\gamma a, &\quad d\gamma = q\gamma d, \\ \beta\gamma + \gamma\beta = 0, &\quad \beta^2 = 0 = \gamma^2, \end{aligned} \tag{1.5}$$

$$ad - da = (q - q^{-1})\gamma\beta$$

şeklindeki q-(anti-) komutasyon bağıntılarını sağlar. $q = 1$ halinde her şeyin klasik duruma dönüştüğü açıktır. (1.4) deki T matrisinin "kuantum süper determinantı" ve "kuantum süper tersi", direkt hesaplarla,

$$\begin{aligned} sD_q(T) &= ad^{-1} - \beta d^{-1}\gamma d^{-1} \\ &= d^{-1}a - q^{-2}\beta d^{-1}\gamma d^{-1} \end{aligned} \tag{1.6}$$

ve

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} + a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1} & -a^{-1}\beta d^{-1} \\ -d^{-1}\gamma a^{-1} & d^{-1} + d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

olarak elde edilmiştir [9]. Burada T nin a ve d matris elemanlarının terslerinin mevcut oldukları kabul edilmiştir. Ayrıca, [9] da $GL_q(1|1)$ kuantum süper grubundaki herhangi bir matrisin matris elemanlarının komutatif olmayan başka bir (ki o seçilecek) matrisin üstel formu olarak yazılabileceği gösterilmiştir:

$$M = \begin{pmatrix} x & \mu \\ \nu & y \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

olsun. Bu takdirde, bir $T \in GL_q(1|1)$ matrisi

$$T = e^{\theta M} \quad \text{ve} \quad q = e^{\theta} \tag{1.9}$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikten; M nin matris elemanları T nin matris elemanları cinsinden,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{\theta}\left[\ln a + \beta f_q(a,d)\gamma\right], \quad \mu = \frac{1}{\theta}\beta g_q(a,d), \\ y &= \frac{1}{\theta}\left[\ln d + \gamma f_q(d,a)\beta\right], \quad \nu = \frac{1}{\theta}\gamma g_q(d,a) \end{aligned} \tag{1.10}$$

olarak ifade edilebilir. Burada f_q ve g_q,

$$\begin{aligned} \beta f_q(a,d)\gamma &= \beta\Big[\frac{\ln(qa)}{(q-q^{-1})a(qa-d)} + \frac{\ln d}{(d-qa)(d-q^{-1}a)} \\ &\quad + \frac{\ln(q^{-1}a)}{(q^{-1}-q)a(q^{-1}a-d)}\Big]\gamma, \end{aligned} \tag{1.11a}$$

$$\beta g_q(a,d)\gamma = \beta\frac{\ln(qa) - \ln d}{qa - d} \tag{1.11b}$$

şeklindeki fonksiyonları göstermektedir. (1.8) deki M matrisinin matris elemanları aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$$[x,\mu]=\mu,\quad [y,\mu]=\mu,\quad \mu^2=0,$$
$$[x,\nu]=\nu,\quad [y,\nu]=\nu,\quad \nu^2=0, \tag{1.12}$$
$$xy-yx=0,\quad \mu\nu+\nu\mu=0.$$

Bu bağıntılar, (1.5) bağıntıları kullanılarak kolayca kontrol edilebilir. Burada $[u,v]$,

$$[u,v]=uv-vu$$

şeklindeki Lie parantezini göstermektedir. (Not olarak, (1.12) bağıntıları elde edilirken, [9] da deformasyon parametresi olarak q^{-1} seçildiğinden, oradaki bağıntılar, (1.12) deki bağıntıların "-" işaretlisi olarak görünmektedir. Örneğin, [9] da $[x,\mu]=-\mu$ şeklindedir.)

Şüphesiz, (1.9) da verilen eşitlikten, T nin matris elemanları M nin matris elemanları cinsinde de çözülebilir ve onlar

$$a=e^{\theta x}-\frac{\mu\nu}{(x-y+1)(x-y-1)}\left\{\left(\frac{1+q^2}{2}-\frac{q^2-1}{2}(x-y)\right)e^{\theta x}-qe^{\theta y}\right\},$$
$$d=e^{\theta y}-\frac{\nu\mu}{(x-y+1)(x-y-1)}\left\{\left(\frac{1+q^2}{2}+\frac{q^2-1}{2}(x-y)\right)e^{\theta y}-qe^{\theta x}\right\},$$
$$\beta=\frac{\mu}{x-y+1}(qe^{\theta x}-e^{\theta y}),\quad \gamma=\frac{\nu}{1-(x-y)}(qe^{\theta y}-e^{\theta x}) \tag{1.13}$$

şeklindedir [9].

Bu çalışma, $GL(1|1)$ süper grubunun iki parametreli deformasyonu üzerine olacaktır. Çalışma, aşağıdaki şekilde düzenlenmiştir:

Bölüm 2 de $GL(1|1)$ süper grubunun iki parametreli deformasyonu yapılmıştır ki bu, [10-12] de de vardır. $GL(1|1)$ grubunun iki parametreli (ki onlar p ve q dur) deformasyonu $GL_{p,q}(1|1)$ ile gösterilmiştir. $GL_{p,q}(1|1)$ kuantum süper grubundaki bir T matrisinin süper tersi ve süper determinantı, [9] da yapılandan farklı bir metod kullanılarak iki parametreli durum için elde edilmiştir [13]. Sonra, ileriki bölümlerde sıkça kullanılacak olan, T nin matris elemanları arasında sağlanan bazı bağıntılar, keyfi bir n tam sayısı için verilmiş ve ispatlanmıştır. Bu Bölüm' de son olarak, bir $T \in GL_{p,q}(1|1)$ matrisinin n-inci kuvvetinin matris elemanları elde edilmiş ve eğer $T \in GL_{p,q}(1|1)$ ise, $T^n \in GL_{p^n,q^n}(1|1)$ olduğu açık olarak gösterilmiştir.

Bölüm 3 de $GL_{p,q}(1|1)$ kuantum süper grubunun üstel parametrizasyonu verilmiştir.

Bölüm 4, $GL_{p,q}(1|1)$ grubundaki bir matrisin matris elemanlarının bir R-matrisi ile elde edilmesine ve bu R-matrisi kullanılarak $GL_{p,q}(1|1)$ grubundaki herhangi iki matrisin toplamının ne zaman $GL_{p,q}(1|1)$ grubuna ait olacağı, $GL_q(2,\mathcal{C})$ grubu için Majid [14] tarafından verilen metoda benzer bir metodla araştırılmasına ayrılmıştır. Ayrıca bu Bölüm' de, Kesim 3.1, değişik bir yaklaşımla ele alınmıştır.

Bölüm 5 de süperdeterminantı 1 olan süper 2x2 matrislerin oluşturduğu üniter $SU_{p,q}(1|1)$ grubu ele alınmış ve bu gruba ait bir matrisin matris elemanları arasında sağlanan bağıntılarla (p,q) süper osilatörleri (fiziksel olarak) arasındaki bağıntılar elde edilmiştir.

2 BÖLÜM : $GL_{p,q}(1|1)$ SÜPER GRUBU

Bu bölümde, önce $GL_{p,q}(1|1)$ kuantum süper grubundaki bir 2x2 süper matrisin matris elemanlarının sağladığı (p,q)-(anti-) komutasyon bağıntıları yani klasik $GL(1|1)$ süper grubunun (p,q) deformasyonu, Manin [8] yapısı kullanılarak verilecektir. $GL_{p,q}(1|1)$ grubundaki bir süper matrisin süper-tersi ve süper determinantı, bazı yeni tanımlamalarla elde edilecektir. Bu bölüm, [12] de yapılan çalışma doğrultusunda hazırlanmıştır.

2.1 $GL(1|1)$ Süper Grubunun İki Parametreli Deformasyonu

Bu kesimde, elemanları 2x2-tipindeki süper matrisler olan $GL(1|1)$ süper grubunun iki parametreli deformasyonu, Manin [8] yapısı kullanılarak elde edilecektir.

İki boyutlu bir süper düzlem gözönüne alınsın ve bu düzlem $R[1|1]$ ile gösterilsin. Bu süper düzlemin elemanları $U = (x,\xi)^t$ şeklindedir. Burada ^{t}, adi matris transpozesini göstermektedir. U süper vektörünün ξ bileşeni tek yani ξ, bir Grassmannian elemandır. Manin, $R[1|1]$ süper düzlemini aşağıdaki şekilde deforme etmiştir:

$$U = \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} \in R_p[1|1] \iff x\xi - p\xi x = 0, \quad \xi^2 = 0. \tag{2.1.1}$$

Bu kuantum süper düzlemin $R_q^*[1|1]$ ile gösterilen duali için

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} \eta \\ y \end{pmatrix} \in R_q^*[1|1] \iff \eta y - q^{-1} y\eta = 0, \quad \eta^2 = 0 \tag{2.1.2}$$

yazılır. Şimdi T, 2x2-tipinde bir süper matris yani

$$T = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} \tag{2.1.3}$$

olsun. T nin bütün matris elemanlarının sağladığı deforme edilmiş komutasyon bağıntıları elde edilecek. Bu nedenle, T nin a ve d matris elemanlarının $R_p[1|1]$

ve $R_q^*[1|1]$ süper düzlemlerinin (bütün) koordinatları ile komutatif ve β ile γ nın da x ve y ile komutatif, ξ ve η ile de anti-komutatif oldukları yani

$$[u,x]=[u,y]=[u,\xi]=[u,\eta]=0, \quad u\in\{a,d\}$$

$$[v,x]=[v,y]=0, \quad [v,\xi]_+=[v,\eta]_+=0, \quad v\in\{\beta,\gamma\} \tag{2.1.4}$$

bağıntılarının sağlandığı kabul edilecek. Burada $[,]_+$, anti Lie parantezini göstermektedir. Yani

$$[X,Y]_+=XY+YX$$

dir. Bu kabuller altında

$$T: R_p[1|1] \longrightarrow R_p[1|1],$$

$$T: R_q^*[1|1] \longrightarrow R_q^*[1|1] \tag{2.1.5}$$

endomorfizimleri, T nin matris elemanları üzerine aşağıdaki (p,q)-(anti-) komutasyon bağıntılarını yükler:

$$\begin{gathered} a\beta=q\beta a, \quad d\beta=q\beta d, \\ a\gamma=p\gamma a, \quad d\gamma=p\gamma d, \\ \beta\gamma+pq^{-1}\gamma\beta=0, \quad \beta^2=0=\gamma^2, \\ ad-da=(p-q^{-1})\gamma\beta. \end{gathered} \tag{2.1.6}$$

Burada $p,q\in\mathcal{C}-\{0\}$ ve $pq\pm1\neq0$ olduğu kabul edilmiştir. Not olarak, $p=q$ halinde T nin matris elemanlarının bir parametreli deformasyonu elde edilir ki onlar, [6] ve [9] da verilmiştir (Bölüm 1 deki (1.5) bağıntıları). Üstelik, $p=q=1$ halinde her şey klasik duruma döner.

$GL_{p,q}(1|1)$ kuantum süper grubundaki herhangi iki matrisin çarpımı genelde $GL_{p,q}(1|1)$ grubuna ait değildir. Eğer $T_1\in GL_{p,q}(1|1)$ ve $T_2\in GL_{p,q}(1|1)$ ve T_1 matrisinin matris elemanları ile T_2 nin matris elemanları (anti-) komutatif (yani çift elemanlar, diğer bütün elemanlarla komutatif ve tek elemanlar, kendi aralarında anti-komutatif) ise bu takdirde, $T_1T_2\in GL_{p,q}(1|1)$ olur. Bunu göstermek oldukça kolaydır. Gerçekten, eğer $T=T_1T_2$ alınırsa, T nin matris elemanları

$$T^i{}_j=(T_1)^i{}_k(T_2)^k{}_j$$

şeklinde olup, örneğin

$$\begin{aligned}
T^1{}_1T^1{}_2 &= \left[(T_1)^1{}_k(T_2)^k{}_1\right]\left[(T_1)^1{}_k(T_2)^k{}_2\right] \\
&= (T_1)^1{}_1(T_1)^1{}_1(T_2)^1{}_1(T_2)^1{}_2 + (T_1)^1{}_2(T_1)^1{}_1(T_2)^2{}_1(T_2)^1{}_2 \\
&\quad +(T_1)^1{}_1(T_1)^1{}_2(T_2)^1{}_1(T_2)^2{}_2 + (T_1)^1{}_2(T_1)^1{}_2(T_2)^2{}_1(T_2)^2{}_2 \\
&= q(T_1)^1{}_1(T_2)^1{}_2(T_1)^1{}_1(T_2)^1{}_1 + (T_1)^1{}_2(T_1)^1{}_1(T_2)^2{}_1(T_2)^1{}_2 \\
&\quad +q(T_1)^1{}_2(T_1)^1{}_1\left[(T_2)^2{}_2(T_2)^1{}_1 + (p-q^{-1})(T_2)^2{}_1(T_2)^1{}_2\right] \\
&= q\left[(T_1)^1{}_1(T_2)^1{}_2 + (T_1)^1{}_2(T_2)^2{}_2\right](T_1)^1{}_1(T_2)^1{}_1 \\
&\quad +q(T_1)^1{}_2(T_2)^2{}_1(T_1)^1{}_1(T_2)^1{}_2 \\
&= qT^1{}_2T^1{}_1
\end{aligned}$$

dir. Diğerleri, benzer şekilde gösterilebilir.

Yukarıda elde edilen (2.1.6) bağıntıları, uygun bir R-matrisi ile, süper tensör çarpım kurallarından faydalanılarak da bulunabilir. Bu son söylenen Bölüm 4 de işlenecektir.

Şüphesiz, (2.1.6) bağıntılarının bu şekli tek değildir. Örneğin, $p \to q$ ve $q \to p$ dönüşümleri yapılırsa, [10] daki ilgili bağıntılar elde edilir.

Şimdi (2.1.3) ile verilen T süper matrisinin a ve d matris elemanlarının invertibil oldukları kabul edilsin. Bu takdirde,

$$\begin{gathered}
a^{-1}\beta = q^{-1}\beta a^{-1}, \quad d^{-1}\beta = q^{-1}\beta d^{-1}, \\
a^{-1}\gamma = p^{-1}\gamma a^{-1}, \quad d^{-1}\gamma = p^{-1}\gamma d^{-1}, \\
ad^{-1} - \beta d^{-1}\gamma d^{-1} = d^{-1}a - d^{-1}\beta d^{-1}\gamma, \\
a^{-1}d^{-1} - d^{-1}a^{-1} = (q-p^{-1})d^{-1}\gamma a^{-1}a^{-1}\beta d^{-1}
\end{gathered} \tag{2.1.7}$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılar, T matrisinin süper tersi ve süper determinantı hesaplanırken kullanılacaktır.

Bu kesimde son olarak aşağıdaki iki lemma ispat edilecektir.

Lemma 1 *Herhangi bir n tam sayısı için*

$$(a-\beta d^{-1}\gamma)^n = a^n - \frac{q^n - p^{-n}}{q-p^{-1}}\beta a^{n-1}d^{-1}\gamma \tag{2.1.8}$$

bağıntısı sağlanır.

İspat. Tümevarım metodu ile yapılacaktır.

(1) (2.1.8) denklemi $n = 1$ için doğrudur.

(2) (2.1.8) denkleminin $n = k$ için doğru olduğu kabul edilsin.

(3) (2.1.8) denkleminin $n = k + 1$ halinde doğru olduğunu göstermek için

$$\Delta = a - \beta d^{-1}\gamma \tag{2.1.9}$$

alınsın. Bu takdirde,

$$\Delta^{k+1} = \Delta^k \Delta$$

olduğundan

$$a\Delta^k = a^{k+1} - q\frac{q^k - p^{-k}}{q - p^{-1}}\beta a^k d^{-1}\gamma,$$

$$\beta d^{-1}\gamma\Delta^k = p^{-k}\beta a^k d^{-1}\gamma$$

eşitlikleri

$$\Delta^{k+1} = a^{k+1} - \frac{q^{k+1} - p^{-(k+1)}}{q - p^{-1}}\beta a^k d^{-1}\gamma$$

olduğunu verir. Bu ise, lemmanın ispatını tamamlar. Not olarak, eğer f, a ve d nin

$$f(a,d) = a^n d^m, \quad m, n \in \mathcal{Z}$$

şeklinde bir fonksiyonu ise, f nin β ve γ ile çarpımı halinde a^n ve d^m argümanları komutatif elemanlar olarak davranırlar. Yani,

$$\beta a^n d^m = \beta d^m a^n, \quad \gamma a^n d^m = \gamma d^m a^n$$

dir.

Lemma 2 *Herhangi bir n tam sayısı için*

(a) $a^n d = d a^n + (p^n - q^{-n})\gamma a^{n-1}\beta,$

(b) $a d^n = d^n a + (p^n - q^{-n})\gamma d^{n-1}\beta$ *ve*

(c) *(a) ve (b) nin birleştirilmiş şekli olarak*

$$a^n d^m = d^m a^n + (p^n - q^{-n})\frac{p^m - q^{-m}}{p - q^{-1}}\,\gamma a^{n-1} d^{m-1}\beta \tag{2.1.10}$$

olur.

İspat. Bu lemmanın ispatı da tümevarım metodu ile yapılacak.

(a) **(1)** Denklem, $n = 1$ için (2.1.6) daki son bağıntıyla özdeşleşir.

(2) Denklem, $n = k$ için doğru olsun.

(3) Açık olarak, (2.1.6) daki son bağıntıdan

$$\begin{aligned} a^{k+1}d &= a^k \left\{ da + (p - q^{-1})\gamma\beta \right\} \\ &= da^{k+1} + (p^{k+1} - q^{-k-1})\gamma a^k \beta \end{aligned}$$

elde edilir.

(b) Bunun ispatı, (a) kısmına benzer şekilde yapılabilir.

(c) Bunun ispatı, iki katlı bir tümevarım ile yapılacak. İlk olarak $m = 1$ alınacak ve n üzerinde tümevarım kullanılacak. Sonra, sabit n ile m üzerinde bir tümevarım yapılacak.

(i) $m = 1$ olsun. Bu halde (2.1.10) denklemi lemmanın (a) kısmındaki denklem ile özdeşleşir.

(ii) (2.1.10) denkleminin $m = k$ ve bütün n' ler için doğru olduğu kabul edilsin.

(iii) $m = k + 1$ için (2.1.10) denklemi

$$\begin{aligned} a^n d^{k+1} &= \left\{ d^k a^n + \frac{p^n - q^{-n}}{p - q^{-1}}(p^k - q^{-k})\gamma a^{n-1} d^{k-1}\beta \right\} d \\ &= d^k \left\{ da^n + (p^n - q^{-n})\gamma a^{n-1}\beta \right\} \\ &\quad + \frac{p^n - q^{-n}}{pq - 1}(p^k - q^{-k})\gamma a^{n-1} d^k \beta \\ &= d^{k+1}a^n + (p^n - q^{-n}) \left\{ d^k \gamma a^{n-1} + \frac{p^k - q^{-k}}{pq - 1}\gamma a^{n-1} d^k \right\} \beta \\ &= d^{k+1}a^n + (p^n - q^{-n}) \frac{p^{k+1} - q^{-k-1}}{p - q^{-1}} \gamma a^{n-1} d^k \beta \end{aligned}$$

şeklini alır ki bu istenilendir.

2.2 Bir Süper Matrisin Süper Tersi ve Determinantı

Bir T 2x2 süper matrisinin süper tersi, normal yollarla bulunamaz. Bir takım incelemeler yapmak gerekir. Şimdi Δ_1 ve Δ_2,

$$\Delta_1 = ad - p^{-1}\beta\gamma \tag{2.2.1}$$

$$\Delta_2 = da - q^{-1}\gamma\beta \tag{2.2.2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu halde, $T \in GL_{p,q}(1|1)$ matrisinin sağ tersi,

$$TT_R^{-1} = I$$

dan

$$T_R^{-1} = \begin{pmatrix} d\Delta_1^{-1} & -q^{-1}\beta\Delta_2^{-1} \\ -p^{-1}\gamma\Delta_1^{-1} & a\Delta_2^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.2.3}$$

olarak bulunur. Δ_1 ve Δ_2 ile T nin matris elemanları arasında sağlanan bağıntılar aşağıdadır:

$$\begin{gathered} \Delta_1 d = d\Delta_1, \qquad \Delta_2 a = a\Delta_2, \\ \Delta_k\beta = q^2\beta\Delta_k, \qquad \Delta_k\gamma = p^2\gamma\Delta_k, \qquad k = 1,2 \\ \beta\Delta_2^{-1} = qa^{-1}\beta d^{-1}, \qquad \gamma\Delta_1^{-1} = pd^{-1}\gamma a^{-1}. \end{gathered} \tag{2.2.4}$$

Bunların doğruluğu, (2.1.6) ve (2.1.7) bağıntıları kullanılarak kontrol edilebilir. Gerçekten, örneğin, (2.1.6) dan

$$\begin{aligned} \Delta_1\beta &= ad\beta \\ &= q^2\beta ad \\ &= q^2\beta\Delta_1 \end{aligned}$$

ve (2.1.7) den

$$\begin{aligned} \gamma\Delta_1^{-1} &= \gamma d^{-1}a^{-1} \\ &= pd^{-1}\gamma a^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Diğerleri de benzer şekilde yapılabilir. Ayrıca

$$\begin{gathered} a\Delta_2^{-1} = d^{-1} + d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}, \\ d\Delta_1^{-1} = a^{-1} + a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1} \end{gathered} \tag{2.2.5}$$

olduklarını göstermek oldukça kolaydır: Örneğin,

$$\begin{aligned} a\Delta_2^{-1} &= a\left(da - q^{-1}\gamma\beta\right)^{-1} \\ &= a\left\{a^{-1}d^{-1} + q^{-1}a^{-1}d^{-1}\gamma\beta a^{-1}d^{-1}\right\} \\ &= d^{-1} + q^{-1}d^{-1}\gamma\beta a^{-1}d^{-1} \\ &= d^{-1} + d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \end{aligned}$$

olur.

T_R^{-1} yi iki matrisin çarpımı şeklinde yazmak yani (2.2.3) deki matrisi ikiye ayırmak için (2.2.3) deki matris

$$T_R^{-1} = \begin{pmatrix} d^{-1}(d^2\Delta_1^{-1}) & -q^{-1}\beta\Delta_2^{-1} \\ -p^{-1}\gamma\Delta_1^{-1} & a^{-1}(a^2\Delta_2^{-1}) \end{pmatrix} \tag{2.2.6}$$

olarak yazılsın. Bu matristeki, $a^2\Delta_2^{-1}$ ve $d^2\Delta_1^{-1}$ nın, T nin bütün matris elemanları ile komutatif olduğu kolayca gösterilebilir. Dolayısıyla onlar, birer sayı olarak düşünülüp dışarı çıkarılabilir. Bu yapıldığında (2.2.6) dan

$$T_R^{-1} = \begin{pmatrix} d^{-1} & -a^{-1}\beta a^{-1} \\ -d^{-1}\gamma d^{-1} & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^2\Delta_1^{-1} & 0 \\ 0 & a^2\Delta_2^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.2.7}$$

elde edilir. O halde T nin kuantum süper determinantı

$$sD_{p,q}(T) = a^2\Delta_2^{-1} = \Delta_2^{-1}a^2 \tag{2.2.8a}$$

olarak tanımlanabilir.Buradaki $a^2\Delta_2^{-1}$ ifadesi açık olarak yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} sD_{p,q}(T) &= ad^{-1} - \beta d^{-1}\gamma d^{-1} \\ &= d^{-1}a - d^{-1}\beta d^{-1}\gamma \end{aligned} \tag{2.2.8b}$$

elde edilir. Bu determinant, tek deformasyon parametreli durum için [9] da elde edilenle aynıdır.

Benzer düşünceyle, T nin sol tersi T_L^{-1} de

$$T_L^{-1}T = I$$

den

$$T_L^{-1} = \begin{pmatrix} \Delta_1^{-1}d & -q\Delta_1^{-1}\beta \\ -p\Delta_2^{-1}\gamma & \Delta_2^{-1}a \end{pmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Burada, (2.2.4) bağıntıları kullanıldığında ise,

$$T_R^{-1} = T^{-1} = T_L^{-1}$$

olduğu görülür.

Not olarak, $T \in GL_{p,q}(1|1)$ matrisinin süper tersi, (2.1.3) deki T matrisinin, Crout redaksiyonu kullanılarak

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ \gamma & d - \gamma a^{-1}\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.2.9}$$

şeklinde yazılmasıyla da elde edilebilir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 \\ \gamma & d - \gamma a^{-1}\beta \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -d^{-1}\gamma a^{-1} & d^{-1} + d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ -p^{-1}\gamma\Delta_1^{-1} & a\Delta_2^{-1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{pmatrix} 1 & a^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

olduklarından

$$\begin{aligned} T^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & a^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 \\ \gamma & d - \gamma a^{-1}\beta \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} a^{-1} + a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1} & -a^{-1}\beta d^{-1} \\ -d^{-1}\gamma a^{-1} & d^{-1} + d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \end{pmatrix} \\ &= T_R^{-1} \end{aligned}$$

çıkar. Bu durumda süper determinant

$$sD_{p,q}(T) = a(d - \gamma a^{-1}\beta)^{-1}$$

şeklindedir ki bu açılıp düzenlendiğinde (2.2.8) ile aynı olur.

Şimdi (2.2.6) daki T^{-1} matrisi için

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} a' & \beta' \\ \gamma' & d' \end{pmatrix}$$

yazılırsa, T^{-1} matrisinin matris elemanları

$$a'\beta' = q^{-1}\beta' a', \quad d'\beta' = q^{-1}\beta' d',$$
$$a'\gamma' = p^{-1}\gamma' a', \quad d'\gamma' = p^{-1}\gamma' d',$$
$$\beta'^2 = 0 = \gamma'^2, \quad \beta'\gamma' + p^{-1}q\gamma'\beta' = 0$$
$$a'd' - d'a' = (p^{-1} - q)\gamma'\beta'$$

bağıntılarını sağlar. Gerçekten, örneğin

$$\begin{aligned} a'\beta' &= (d\Delta_1^{-1})(-q^{-1}\beta\Delta_2^{-1}) \\ &= -q^{-1}a^{-1}(qa^{-1}\beta d^{-1}) \\ &= q^{-1}(-a^{-1}\beta d^{-1})a^{-1} \\ &= q^{-1}\beta' a' \end{aligned}$$

olur. Burada, son eşitlik yazılırken, (2.2.5) deki ikinci ifade kullanılmıştır. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} [a', d'] &= a^{-1}d^{-1} + d^{-1}a^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} + a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1}d^{-1} - d^{-1}a^{-1} \\ &\quad -d^{-1}a^{-1}\beta d^{-1}\gamma a^{-1} - d^{-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1}a^{-1} \\ &= [a^{-1}, d^{-1}] + 2(p^{-1} - q)\gamma'\beta' \\ &= (q - p^{-1})\gamma'\beta' + 2(p^{-1} - q)\gamma'\beta' \\ &= -(q - p^{-1})\gamma'\beta' \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, üçüncü eşitlikteki birinci ifade yazılırken, (2.1.7) deki son bağıntı kullanılmıştır. Diğer bağıntıların sağlandığı da aynı şekilde gösterilebilir. O halde $T^{-1} \in GL_{p^{-1},q^{-1}}(1|1)$ dir.

Schirrmacher ve arkadaşları [7] tarafından tanımlanan, iki deformasyon parametreli $GL_{p,q}(2)$ kuantum genel lineer grubundaki bir matrisin determinantı, $GL_{p,q}(2)$ grubundaki bir matrisin matris elemanları ile komutatif değildir. Bununla birlikte $GL_{p,q}(1|1)$ kuantum süper grubundaki bir süper matrisin ilginç bir özelliği, süper determinantının iki deformasyon parametreli durumda da T nin matris elemanları ile komutatif olmasıdır. T nin bu özelliği, özel lineer süper grupları tanımlamaya imkan verir. Bu son söylenen, Bölüm 5 de incelenecektir.

Bu kesim, aşağıda verilecek olan lemma ile bitirilecek. Önce, bir takım hazırlıklara ihtiyaç vardır.

Yukarıda gösterildi ki, bir $T \in GL_{p,q}(1|1)$ matrisinin süper determinantı, (2.2.2) ile

$$sD_{p,q}(T) = a^2 \Delta_2^{-1}$$

şeklindedir ((2.2.8a) denklemi). Şüphesiz, T^{-1} süper matrisinin süper determinantı da tanımlanabilir ve o

$$sD_{p,q}(T^{-1}) = d^2 \Delta_1^{-1} \tag{2.2.10}$$

şeklindedir. Diğer taraftan, (2.2.8a) ile

$$\{sD_{p,q}(T)\}^{-1} = d^2 \Delta_1^{-1} \tag{2.2.11}$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Gerçekten,

$$a^{-1}d = da^{-1} + (1-pq)a^{-1}\gamma a^{-1}\beta$$

olduğundan, (2.2.8a) dan, a ile Δ_2^{-1} nin komutatifliği kullanılarak

$$\begin{aligned} \{sD_{p,q}(T)\}^{-1} &= (a^2\Delta_2^{-1})^{-1} \\ &= a^{-2}\Delta_2 \end{aligned}$$

yazılır. Böylece,

$$\begin{aligned} \{sD_{p,q}(T)\}^{-1} &= a^{-2}(da - q^{-1}\gamma\beta) \\ &= a^{-2}(ad - p\gamma\beta) \\ &= da^{-1} - pqa^{-1}\gamma a^{-1}\beta \\ &= da^{-1} + qa^{-1}\beta\gamma a^{-1} \\ &= d^2\Delta_1^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla, (2.2.10) ile

$$sD_{p,q}(T^{-1}) = \{sD_{p,q}(T)\}^{-1} \tag{2.2.12}$$

olduğu görülür.

Lemma 1 *Herhangi bir n tam sayısı için*

$$\{sD_{p,q}(T)\}^n = a^n d^{-n} - p\frac{p^{-n} - q^n}{p - q^{-1}} a^{n-1}\gamma d^{-n-1}\beta \tag{2.2.13}$$

olur.

İspat. a ile Δ_2^{-1} komutatif olduğundan, (2.2.8) denklemi kullanılarak

$$\{sD_{p,q}(T)\}^n = a^{2n}\Delta_2^{-n} \tag{2.2.14}$$

olduğu hemen yazılır. Diğer taraftan, gerekli hesaplamalar yapıldığında, herhangi bir n tam sayısı için

$$\begin{aligned} \Delta_2^n &= d^n a^n - \frac{1}{q}\frac{p^n - q^{-n}}{p - q^{-1}}\gamma a^{n-1}\beta d^{n-1} \\ &= a^n d^n - p\frac{p^n - q^{-n}}{p - q^{-1}} a^{n-1}\gamma d^{n-1}\beta \end{aligned} \tag{2.2.15}$$

yazılır. Buradaki ilk ifadenin ispatı, tümevarım metodu ile kolayca yapılabilir. İkinci eşitlik, (2.2.10) da $n = m$ alınarak elde edilmiştir. Sonuç olarak (2.2.15) de n yerine $-n$ yazıp a^{2n} ile çarpmakla

$$a^{2n}\Delta_2^{-n} = a^n d^{-n} - p\frac{p^{-n} - q^n}{p - q^{-1}} a^{n-1}\gamma d^{-(n+1)}\beta$$

elde edilir ki bu, (2.2.13) ile aynıdır. Böylece, (2.2.14) gözönüne alındığında lemma, ispatlanmış olur.

Sonraki bölümde ispat edilecek ki, bir $T \in GL_{p,q}(1|1)$ matrisinin n-inci kuvveti T^n nin süper determinantı ile T nin süper determinantının n-inci kuvveti aynıdır.

Yukarıda verilen lemmanın alternatif bir ispatı aşağıdadır: d^{-1} ile (2.1.9) daki Δ komutatif olduğundan

$$\begin{aligned} \{sD_{p,q}(T)\}^n &= \left\{\left(a - \beta d^{-1}\gamma\right) d^{-1}\right\}^n \\ &= \left(a - \beta d^{-1}\gamma\right)^n d^{-n} \\ &= \left(a^n - \frac{q^n - p^{-n}}{q - p^{-1}}\beta a^{n-1} d^{-1}\gamma\right) d^{-n} \\ &= a^n d^{-n} - p\frac{p^n - q^{-n}}{p - q^{-1}} a^{n-1}\beta d^{-n-1}\gamma \end{aligned}$$

yazılır. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında, bu eşitlikteki son ifadenin (2.2.13) ile aynı olduğu görülür.

2.3 T^n Matrisinin Özellikleri

Bu kesimde, bir $T \in GL_{p,q}(1|1)$ süper matrisinin n-inci kuvveti T^n nin matris elemanları açık olarak elde edilecek ve eğer $T \in GL_{p,q}(1|1)$ ise, $T^n \in GL_{p^n,q^n}(1|1)$ olduğu açık olarak ortaya konacaktır. Bu durum, Bölüm 3 deki incelemelerde oldukça faydalı olacaktır.

$$T^n = \begin{pmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{pmatrix} \tag{2.3.1}$$

olsun. Ayrıca, $< N >_{pq}$ ile F_n ve G_n fonksiyonları, sırasıyla,

$$< N >_{pq} = \frac{1-(pq)^{-N}}{1-(pq)^{-1}}$$

olmak üzere

$$F_n(a, q^{-1}d)\beta\gamma = \sum_{k=0}^{n-2} < n-k-1 >_{pq} a^{n-k-2}(q^{-1}d)^k \beta\gamma, \tag{2.3.2}$$

ve

$$G_n(a, q^{-1}d)\beta = \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}(q^{-1}d)^k \beta \tag{2.3.3}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde:

Lemma 1 *Eğer $T \in GL_{p,q}(1|1)$ ise, (2.3.1) deki T^n matrisinin matris elemanları*

$$\begin{aligned} A_n &= a^n + F_n(a, q^{-1}d)\beta\gamma, \quad & B_n &= G_n(a, q^{-1}d)\beta, \\ D_n &= d^n + F_n(d, p^{-1}a)\gamma\beta, \quad & C_n &= G_n(d, p^{-1}a)\gamma \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

olur.

İspat. Burada ispat, sadece A_n ve B_n için tümevarım metodu ile yapılacaktır. Diğerlerinin ispatı benzer tarzda yapılabilir.

(1) $n = 1$ için $A_1 = a$ ve $B_1 = \beta$ olur.

(2) (2.3.4) deki ilk iki ifade, $n = k$ için doğru olsun.

(3) Not olarak, her T matrisi için

$$T^{m+1} = T^m T$$

yazılabilir. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
A_{k+1} &= A_k A_1 + B_k C_1 \\
&= a^{k+1} + \sum_{j=0}^{k-2} < k-j-1 >_{pq} a^{k-j-2} (q^{-1}d)^j \beta\gamma a \\
&\quad + \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1} (q^{-1}d)^j \beta\gamma \\
&= a^{k+1} + \sum_{j=0}^{k-2} \left(\frac{1-(pq)^{j-k+1}}{pq-1} + 1 \right) a^{k-j-1} (q^{-1}d)^j \beta\gamma \\
&\quad + (q^{-1}d)^{k-1} \beta\gamma \\
&= a^{k+1} + \sum_{j=0}^{k-2} < k-j >_{pq} a^{k-j-1} (q^{-1}d)^j \beta\gamma + (q^{-1}d)^{k-1} \beta\gamma \\
&= a^{k+1} + \sum_{j=0}^{k-1} < k-j >_{pq} a^{k-j-1} (q^{-1}d)^j \beta\gamma \\
&= a^{k+1} + F_{k+1}(a, q^{-1}d) \beta\gamma
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
B_{k+1} &= A_k B_1 + B_k D_1 \\
&= a^k \beta + \sum_{j=0}^{k-1} a^{k-j-1} (q^{-1}d)^{j+1} \beta \\
&= \left[a^k + \sum_{j=1}^{k} a^{k-j} (q^{-1}d)^j \right] \beta = \sum_{j=0}^{k} a^{k-j} (q^{-1}d)^j \beta \\
&= G_{k+1}(a, q^{-1}d) \beta
\end{aligned}
$$

bulunur.

Şimdi, aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 2 *Eğer $T \in GL_{p,q}(1|1)$ ise, $T^n \in GL_{p^n,q^n}(1|1)$ olur. Yani, T^n nin matris elemanları*

$$
\begin{aligned}
&A_n B_n = q^n B_n A_n, \quad D_n B_n = q^n B_n D_n, \\
&A_n C_n = p^n C_n A_n, \quad D_n C_n = p^n C_n D_n, \qquad (2.3.5) \\
&B_n^2 = 0 = C_n^2, \quad q^n B_n C_n + p^n C_n B_n = 0
\end{aligned}
$$

komutasyon bağıntılarını sağlar. Üstelik,

$$[A_n, D_n] = (p^n - q^{-n})C_n B_n \tag{2.3.6}$$

bağıntısı da sağlanır.

İspat. (2.3.5) bağıntılarının sağlandığı, (2.1.6) bağıntıları kullanılarak kolayca gösterilebilir. Burada sadece (2.3.5) deki son bağıntı ile (2.3.6) bağıntısının gerçeklendiği gösterilecektir.

(2.3.4) den

$$\begin{aligned}
B_n C_n &= G_n(a, q^{-1}d)\beta G_n(d, p^{-1}a)\gamma \\
&= q^{1-n} G_n(a, q^{-1}d) G_n(d, p^{-1}a)\beta\gamma \\
&= -pq^{-n} G_n(d, p^{-1}a) G_n(a, q^{-1}d)\gamma\beta \\
&= -q^{-n}p^n G_n(d, p^{-1}a)\gamma G_n(a, q^{-1}d)\beta \\
&= -q^{-n}p^n C_n B_n
\end{aligned}$$

olur.

(2.3.6) bağıntısının doğruluğu, yine

$$T^{k+1} = TT^k = T^k T \tag{2.3.7}$$

olduğu gerçeği kullanılarak tümevarımla yapılacaktır.

(1) $n = 1$ için (2.3.6) denklemi (2.1.6) daki son denkleme dönüşür.

(2) (2.3.6) denklemi $n = k$ için doğru olsun.

(3) Bir defa, (2.3.7) eşitliğinden

$$A_{k+1} = A_1 A_k + B_1 C_k, \quad C_{k+1} = C_1 A_k + D_1 C_k,$$

$$B_{k+1} = A_1 B_k + B_1 D_k, \quad D_{k+1} = D_1 D_k + C_1 B_k \tag{2.3.8}$$

yazılır. Önce, bazı hesaplamalar yapılacak.

$$Q_n = p^n - q^{-n}$$

olsun. Bu takdirde,

$$dA_k = pqA_kd + (1-pq)da^k - pqQ_k\gamma a^{k-1}\beta$$

ve

$$aD_k = pqD_ka + (1-pq)d^ka + Q_k\gamma d^{k-1}\beta$$

olur. Gerçekten, (2.3.4) deki birinci bağıntı ile

$$\begin{aligned}
dA_k &= da^k + dF_n(a, q^{-1}d)\beta\gamma \\
&= a^kd - Q_k\gamma a^{k-1}\beta + pqF_n(a, q^{-1}d)\beta\gamma d \\
&= (1-pq)a^kd + pq\left(a^k + F_n(a, q^{-1}d)\beta\gamma\right)d - Q_k\gamma a^{k-1}\beta \\
&= (1-pq)a^kd + pqA_kd - Q_k\gamma a^{k-1}\beta
\end{aligned}$$

bulunur. Burada, ikinci eşitlikteki ilk iki ifade yazılırken, Kesim 2.1 deki Lemma 2 nin (a) kısmı kullanılmıştır. Diğeri de benzer şekilde yapılabilir. Şimdi, (2.3.8) ile

$$A_{k+1}D_{k+1} = A_1A_kD_1D_k + B_1C_kD_1D_k + A_1A_kC_1B_k$$

olup, eğer

$$\begin{aligned}
X_1 &= A_1A_kD_1D_k \\
X_2 &= B_1C_kD_1D_k \\
X_3 &= A_1A_kC_1B_k
\end{aligned}$$

alınırsa, $\lambda = pq$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
X_1 &= A_1\{\lambda^{-1}D_1A_k + Q_k\gamma a^{k-1}\beta + (1-\lambda^{-1})da^k\}D_k \\
&= \lambda^{-1}A_1D_1A_kD_k + K_1 \\
&= \lambda^{-1}\left(D_1A_1 + (p-q^{-1})C_1B_1\right)(D_kA_k + Q_kC_kB_k) + K_1 \\
&= \lambda^{-1}D_1A_1D_kA_k + \lambda^{-1}K_2 + K_1 \\
&= D_1D_kA_1A_k + \lambda^{-1}(K_3 + K_2) + K_1
\end{aligned}$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned}
K_1 &= pQ_k\gamma a^k\beta d^k + (1-\lambda^{-1})ada^kD_k \\
&= q^{k-1}Q_k\gamma\beta a^kd^k + (1-\lambda^{-1})a^{k+1}dD_k, \\
K_2 &= q^{-1}(\lambda-1)\gamma\beta a^kd^k + Q_kadC_kB_k
\end{aligned}$$

ve

$$K_3 = pq^kQ_k\gamma\beta a^kd^k + (1-\lambda)d^{k+1}aA_k$$

dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} K &= K_1 + \lambda^{-1}(K_2+K_3) \\ &= \left(2q^{k-1}Q_k - p^{-1}q^{-2} + q^{-1}\right)\gamma\beta a^kd^k + \lambda^{-1}Q_kadC_kB_k \\ &\quad +(1-\lambda^{-1})\left(a^{k+1}dD_k - d^{k+1}aA_k\right) \end{aligned}$$

olur. Şimdi de

$$K' = (1-\lambda^{-1})\left(a^{k+1}dD_k - d^{k+1}aA_k\right)$$

olsun. (2.3.4) ile

$$\begin{aligned} K' &= (1-\lambda^{-1})\left\{\left[a^{k+1}, d^{k+1}\right] + a^{k+1}dF_n(d,p^{-1}a)\gamma\beta \right. \\ &\quad \left. -d^{k+1}aF_n(a,q^{-1}d)\beta\gamma\right\} \end{aligned}$$

yazılır. Burada,

$$L_1 = a^{k+1}dF_n(d,p^{-1}a)\gamma\beta$$

ve

$$L_2 = d^{k+1}aF_n(a,q^{-1}d)\beta\gamma$$

denirse,

$$\begin{aligned} L_1 &= a^{k+1}\sum_{j=0}^{k-2}\frac{1-\lambda^{j-k+1}}{1-\lambda^{-1}}d^{k-j-1}(p^{-1}a)^j\gamma\beta \\ &= \frac{a^{k+1}}{1-\lambda^{-1}}\sum_{j=0}^{k-2}(1-\lambda^{j-k+1})d^{k-j-1}(p^{-1}a)^j\gamma\beta \\ &= \frac{a^{k+1}}{1-\lambda^{-1}}\left\{\left(\sum_{j=0}^{k-1}d^{k-j-1}(p^{-1}a)^j - p^{1-k}a^{k-1}\right)\gamma\beta\right. \\ &\quad \left. -\lambda^{1-k}\left(\sum_{j=0}^{k-1}d^{k-j-1}(qa)^j - q^{k-1}a^{k-1}\right)\gamma\beta\right\} \\ &= \frac{1}{1-\lambda^{-1}}\left\{a^{k+1}C_k\beta - p^{1-k}a^{2k}\gamma\beta + qp^{-k}a^{k+1}B_k\gamma\right. \\ &\quad \left. +p^{1-k}a^{2k}\gamma\beta\right\} \\ &= \frac{1}{1-\lambda^{-1}}\left\{a^{k+1}C_k\beta + qp^{-k}a^{k+1}B_k\gamma\right\} \\ &= \frac{1}{1-\lambda^{-1}}\left\{A_1A_kC_kB_1 + qp^{-k}A_1A_kB_kC_1\right\} \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, gerekli hesaplamalar yapıldığında, L_2 de

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{1-\lambda^{-1}}\{d^{k+1}B_k\gamma + pq^{-k}d^{k+1}C_k\beta\} \\ &= \frac{1}{1-\lambda^{-1}}\{D_1D_kB_kC_1 + pq^{-k}D_1D_kC_kB_1\} \end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde K', (2.1.10) ile

$$\begin{aligned} K' &= (1-\lambda^{-1})\{[a^{k+1}, d^{k+1}] + L_1 - L_2\} \\ &= (1-\lambda^{-1})\left\{q^{2k}\frac{(p^{k+1}-q^{-k-1})^2}{p-q^{-1}}C_1B_1A_kD_k + L_1 - L_2\right\} \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Böylece, gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned} K &= \left(2q^{k-1}Q_k - p^{-1}q^{-2} + q^{-1}\right)C_1B_1A_kD_k + \lambda^{-1}Q_kA_1D_1C_kB_k + K' \\ &= \left(p^{2k+1}q^k - q^{-k-1}\right)C_1A_kB_1D_k + \left(p^{k+1} - pq^{-k}\right)C_kA_1B_kD_1 \\ &\quad + p^{k+1}\left(C_kA_1A_kB_1 - C_1A_kA_1B_k + D_kC_1B_kD_1 - D_1C_kB_1D_k\right) \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak, X_2 ve X_3 de, sırasıyla,

$$\begin{aligned} X_2 &= B_1C_kD_1D_k \\ &= \lambda^{-k-1}D_1D_kB_1C_k \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} X_3 &= A_1A_kC_1B_k \\ &= \lambda^{k+1}C_1B_kA_1A_k \end{aligned}$$

olduklarından, $\lambda = pq$ ile

$$\begin{aligned} [A_{k+1}, D_{k+1}] &= \left(\lambda^{k+1}-1\right)\left\{C_1B_kA_1A_k - \lambda^{-k-1}D_1D_kB_1C_k\right\} + K \\ &= \left(p^{k+1} - q^{-k-1}\right)C_{k+1}B_{k+1} + K - L \end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$L = \left(p^{k+1} - q^{-k-1}\right)\left\{pqC_kA_1B_kD_1 + C_1A_kB_1D_k\right\}$$

dir. O halde,

$$K - L = 0$$

olduğunu göstermek gerekmektedir. Gerçekten

$$K - L = -p^{k+1}C_1A_k\left(B_1D_k + A_1B_k\right) + p^{2k+1}q^kC_1A_kB_1D_k$$

$$
\begin{aligned}
& +p^{k+1} C_k A_1 \left(A_k B_1 + B_k D_1\right) - p^{k+2} q C_k A_1 B_k D_1 \\
& +p^{k+1} D_k C_1 \left(A_k B_1 + B_k D_1\right) - p^{k+1} D_k C_1 A_k B_1 \\
& -p^{k+1} D_1 C_k \left(A_1 B_k + B_1 D_k\right) + p^{k+1} D_1 C_k A_1 B_k \\
= \; & p^{k+1} \left(p^k q^k C_1 A_k B_1 D_k - D_k C_1 A_k B_1\right) \\
& +p^{k+1} \left(D_1 C_k A_1 B_k - pq C_k A_1 B_k D_1\right) \\
= \; & p^{2k+1} q^{2k} \left(C_1 B_1 A_k D_k - C_1 B_1 D_k A_k\right) \\
& +p^{k+2} q^2 \left(C_k B_k D_1 A_1 - C_k B_k A_1 D_1\right) \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

Şimdi, T^n nin süper determinantı ile T nin süper determinantının n-inci kuvvetinin aynı olduğu gösterilecek. Bunun için, önce T^n nin süper determinantı hesaplanacak. (2.3.1) deki T^n matrisi, Crout redaksiyonu kullanılarak

$$
T^n = \begin{pmatrix} A_n & 0 \\ C_n & D_n - C_n A_n^{-1} B_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & A_n^{-1} B_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.3.9}
$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla, T^n nin süper determinantı, Kesim 2.2 de not edildiği gibi

$$
\begin{aligned}
sD_{p,q}(T^n) &= A_n \left(D_n - C_n A_n^{-1} B_n\right)^{-1} \\
&= \left(A_n - B_n D_n^{-1} C_n\right) D_n^{-1}
\end{aligned} \tag{2.3.10}
$$

şeklindedir. Dolayısıyla, aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3 *Eğer $T \in GL_{p,q}(1|1)$ ise, T nin n-inci kuvveti T^n nin süper determinantı*

$$
sD_{p,q}(T^n) = a^n d^{-n} - p \, \frac{p^{-n} - q^n}{p - q^{-1}} a^{n-1} \gamma d^{-n-1} \beta \tag{2.3.11}
$$

olur.

İspat. (2.3.10) denkleminde

$$
D_n^{-1} = d^{-n} - F_n(d, p^{-1} a) d^{-n} \gamma \beta d^{-n}
$$

ve

$$
B_n D_n^{-1} C_n = B_n d^{-n} C_n
$$

olduklarından,

$$\begin{aligned}
sD_{p,q}(T^n) &= \left(A_n - B_n D_n^{-1} C_n\right) D_n^{-1} \\
&= \left\{a^n + F_n(a, q^{-1}d)\beta\gamma - G_n(a, q^{-1}d)\beta d^{-n} G_n(d, p^{-1}a)\gamma\right\} \\
&\quad \times \left\{d^{-n} - F_n(d, p^{-1}a) d^{-n}\gamma\beta d^{-n}\right\} \\
&= a^n d^{-n} - G_n(a, q^{-1}d)\beta d^{-n} G_n(d, p^{-1}a)\gamma d^{-n} \\
&\quad + F_n(a, q^{-1}d)\beta\gamma d^{-n} - a^n F_n(d, p^{-1}a) d^{-n}\gamma\beta d^{-n} \\
&= a^n d^{-n} + \frac{1}{1-\lambda^{-1}}\left\{\Phi_1 - \Phi_2\right\} d^{-n} \\
&= a^n d^{-n} + \frac{1-\lambda^{-n}}{1-\lambda^{-1}} \frac{(\lambda+1)a^n - pa^{n-1}d - qa^{n+1}d^{-1}}{(a-q^{-1}d)(a-pd)}\beta\gamma d^{-1} \\
&= a^n d^{-n} + q\frac{\lambda^{-n}-1}{1-\lambda^{-1}} a^{n-1} d^{-1}\beta\gamma d^{-n} \\
&= a^n d^{-n} - p\frac{p^{-n}-q^n}{p-q^{-1}} a^{n-1}\gamma d^{-n-1}\beta
\end{aligned}$$

bulunur. Burada,

$$\Phi_1 = \frac{\lambda(1-\lambda^{-1-n})a^n - (\lambda-1)p^{-n}a^{2n}d^{-n} + p(\lambda^{-n}-1)a^{n-1}d}{(a-q^{-1}d)(a-pd)}\beta\gamma$$

ve

$$\Phi_2 = \frac{(1-\lambda)p^{-n}a^{2n}d^{-n} + q(1-\lambda^{-n})a^{n+1}d^{-1} + (\lambda^{1-n}-1)a^n}{(a-q^{-1}d)(a-pd)}\beta\gamma$$

dir. O halde:

Önerme 4 *Herhangi bir n tam sayısı için*

$$\{sD_{p,q}(T)\}^n = sD_{p,q}(T^n) \qquad (2.3.12)$$

olur.

3 BÖLÜM : $GL_{p,q}(1|1)$ SÜPER GRUBUNUN ÜSTEL TEMSİLİ

Bu bölümde, bir $T \in GL_{p,q}(1|1)$ matrisi, matris elemanları komutatif olmayan başka bir M matrisinin üstel formu olarak yazılacak ve önce M nin matris elemanları T ninkiler cinsinden ifade edilecek ve M nin matris elemanları arasında sağlanan deforme edilmiş komutasyon bağıntıları elde edilecektir. Daha sonra da T nin matris elemanları M ninkiler cinsinden ifade edilecek ve (2.1.6) bağıntılarının gerçeklendiği gösterilecektir.

Ayrıca, klasik durumda ve q-deforme durumda süper determinant ve süper iz arasında sağlanan bağıntının (p,q)-deforme durumda da sağlandığı gösterilecektir.

3.1 M nin Matris Elemanlarının Elde Edilmesi

Eğer $T \in GL_q(1|1)$ ise $T^n \in GL_{q^n}(1|1)$ olduğu [9] da gösterilmiştir. Bu gerektirme önerir ki $GL_q(1|1)$ grubundaki herhangi bir eleman, matris elemanları komutatif olmayan bir matrisin üstel formu olarak yazılabilir. Kesim 2.3 de eğer $T \in GL_{p,q}(1|1)$ ise $T^n \in GL_{p^n,q^n}(1|1)$ olduğu gösterilmişti (Önerme 2). Dolayısıyla, $GL_{p,q}(1|1)$ kuantum süper grubundaki herhangi bir matris de elemanları komutatif olmayan bir matrisin üstel formu olarak yazılabilir. Bu son söylenen, aşağıdaki lemma ile verilmiştir.

Lemma 1 *Bir $T \in GL_{p,q}(1|1)$ süper matrisi*

$$M = \begin{pmatrix} x & \mu \\ \nu & y \end{pmatrix} \tag{3.1.1}$$

olmak üzere

$$T = e^{hM}, \quad h = \frac{1}{2}\ln(pq) \tag{3.1.2}$$

şeklinde ifade edilsin. Bu takdirde, M nin matris elemanları, T nin matris elemanları cinsinden çözülebilir ve onlar, bazı f ve g fonksiyonları için

$$x = \frac{1}{h}\left\{\ln a + f_q(a,d,p)\beta\gamma\right\}, \quad \mu = \frac{1}{h}g(a,q^{-1}d)\beta,$$
$$y = \frac{1}{h}\left\{\ln d + f_p(d,a,q)\gamma\beta\right\}, \quad \nu = \frac{1}{h}g(d,p^{-1}a)\gamma \tag{3.1.3}$$

şeklindedir.

İspat. Eğer bir $T \in GL_{p,q}(1|1)$ süper matrisi, (3.1.1) deki M matrisi ile, (3.1.2) deki gibi yazılabiliyorsa, buradan

$$M = \frac{1}{h}\ln T \tag{3.1.4}$$

yazılabilir. Burada, T nin logaritması, bir kuvvet serisi olarak,

$$\ln T = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(T-I)^n \tag{3.1.5}$$

şeklinde tanımlanmıştır ve I, 2x2-tipindeki birim matristir. O halde ilk olarak, $(T-I)^n$ nin matris elemanları elde edilmelidir.

$$(T-I)^n = \begin{pmatrix} \tilde{A}_n & \tilde{B}_n \\ \tilde{C}_n & \tilde{D}_n \end{pmatrix} \tag{3.1.6}$$

olsun. Gerekli hesaplamalar yapıldığında $(T-I)^n$ nin matris elemanlarının

$$\tilde{A}_n = (a-1)^n + \sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{n-j-2}(a-1)^k(p^{-1}q^{-1}a-1)^{n-k-j-2}(q^{-1}d-1)^j\beta\gamma,$$

$$\tilde{D}_n = (d-1)^n + \sum_{j=0}^{n-2}\sum_{k=0}^{n-j-2}(d-1)^k(p^{-1}q^{-1}d-1)^{n-k-j-2}(p^{-1}a-1)^j\beta\gamma, \tag{3.1.7}$$

$$\tilde{B}_n = \sum_{j=0}^{n-1}(a-1)^{n-j-1}(q^{-1}d-1)^j\beta, \quad \tilde{C}_n = \sum_{j=0}^{n-1}(d-1)^{n-j-1}(p^{-1}a-1)^j\gamma$$

şeklinde olduğu görülebilir. Bunların ispatı, Kesim 2.3 de T^n nin matris elemanları için yapılan ispata çok benzerdir. O nedenle bunlar, ispat edilmeyecektir.

Şimdi M nin matris elemanları açık olarak elde edilebilir. Önce, denklemleri basitleştirmek için f ve g fonksiyonları

$$\begin{aligned} f_q(a,d,p)\beta\gamma &= \frac{q^2}{q-p^{-1}}\left(\frac{\ln a}{a(qa-d)} - \frac{\ln(p^{-1}q^{-1}a)}{a(p^{-1}a-d)}\right)\beta\gamma \\ &\quad + q^2\frac{\ln(q^{-1}d)}{(p^{-1}a-d)(qa-d)}\beta\gamma \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

ve

$$g(a,q^{-1}d)\beta = \frac{\ln a - \ln(q^{-1}d)}{a - q^{-1}d}\beta \tag{3.1.9}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde, (3.1.4) denklemi kullanılarak M nin matris elemanları T nin matris elemanları cinsinden çözülebilir. Örneğin, μ elemanı için

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{1}{h}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\tilde{B}_n \\
&= \frac{1}{h}(a-q^{-1}d)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left[(a-1)^n-(q^{-1}d-1)^n\right]\beta \\
&= \frac{1}{h}\frac{\ln a-\ln(q^{-1}d)}{a-q^{-1}d}\beta \\
&= \frac{1}{h}g(a,q^{-1}d)\beta
\end{aligned}$$

elde edilir.

Not olarak, a ve d, β ve γ ile çarpım durumundayken komutatif elemanlar olarak davrandıklarından, (3.1.8) ve (3.1.9) denklemlerinde argümanların sırası önemli değildir. (Örneğin $qa-d$ nin paydada olmasının hiç bir sakıncası yoktur.)

(3.1.2) deki temsil tek değildir. Kesim 4.3 de bu temsil tekrar ele alınacaktır fakat, (3.1.2) deki temsilin başka şekil(ler)de de ifade edilebileceği bu çalışmada ele alınmayacaktır. Daha sonra, Bölüm 4 de gösterilecek ki M nin matris elemanlarının sağladığı komutasyon bağıntıları, bir R-matrisinin üstel formu ile de elde edilebilir.

Şimdi, (3.1.1) deki M matrisinin matris elemanları arasında sağlanan komutasyon bağıntıları elde edilecektir. Ama önce, aşağıdaki lemmaya ihtiyaç vardır.

Lemma 2 *Eğer f_q, (3.1.8) deki gibi tanımlanmışsa,*

$$f_p(d,a,q)\gamma\beta - f_q(a,d,p)\beta\gamma = \frac{\ln(pq)}{1-pq}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \tag{3.1.10}$$

olur.

İspat. Bu lemmanın ispatı kolaydır fakat bir takım cebirsel işlem yapmak gerekmektedir. (3.1.8) den, gerekli hesaplar yapıldığında,

$$f_p(d,a,q)\gamma\beta = p^2 \frac{\ln a - \ln d}{(a-pd)(a-q^{-1}d)}\gamma\beta + U \tag{3.1.11a}$$

olduğu bulunur. Burada

$$U = \frac{p^2 q}{(1-pq)d}\left(\frac{\ln q}{a-q^{-1}d} + \frac{\ln p}{a-pd}\right)\gamma\beta \tag{3.1.12a}$$

dır. Benzer şekilde,

$$V = \frac{p^2 q}{(1-pq)a}\left(p\frac{\ln p}{a-pd} + q^{-1}\frac{\ln q}{a-q^{-1}d}\right)\gamma\beta \tag{3.1.12b}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} f_q(a,d,p)\beta\gamma &= pq\frac{\ln d - \ln a}{(a-pd)(a-q^{-1}d)}\beta\gamma + V \\ &= p^2\frac{\ln a - \ln d}{(a-pd)(a-q^{-1}d)}\gamma\beta + V \end{aligned} \tag{3.1.11b}$$

olduğu görülebilir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} U - V &= \left[f_p(d,a,q) + pq^{-1} f_q(a,d,p)\right]\gamma\beta \\ &= \frac{\ln(pq)}{1-pq}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 3 *Eğer bir* $T \in GL_{p,q}(1|1)$ *süper matrisi* (3.1.2) *şeklinde yazılmışsa,* (3.1.1) *deki* M *matrisinin matris elemanları,*

$$\begin{gathered} [x,\mu] = \frac{\ln q^2}{\ln(pq)}\mu, \quad [y,\mu] = \frac{\ln q^2}{\ln(pq)}\mu, \quad \mu^2 = 0, \\ [x,\nu] = \frac{\ln p^2}{\ln(pq)}\nu, \quad [y,\nu] = \frac{\ln p^2}{\ln(pq)}\nu, \quad \nu^2 = 0 \\ xy - yx = 0, \quad \mu\nu + \nu\mu = 0 \end{gathered} \tag{3.1.13}$$

şeklindeki komutasyon bağıntılarını sağlar.

İspat. Bu önerme, (2.1.6) bağıntıları kullanılarak ispat edilecektir. $\beta^2 = 0$ olduğundan, (3.1.3) deki ilk iki denklem ile

$$\begin{aligned} [x,\mu] &= \frac{1}{h^2}[\ln a, g(a,q^{-1}d)\beta] \\ &= \frac{\ln q}{\ln(pq)}\frac{2}{h}g(a,q^{-1}d)\beta \\ &= \frac{\ln q^2}{\ln(pq)}\mu \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
[x, \nu] &= \frac{1}{h^2}[\ln a, g(d, p^{-1}a)\gamma] \\
&= \frac{\ln p}{\ln(pq)} \frac{2}{h} g(d, p^{-1}a)\gamma \\
&= \frac{\ln p^2}{\ln(pq)} \nu
\end{aligned}
$$

çıkar. Burada, sırasıyla,

$$
[\ln a, \beta] = \ln q \ \beta \quad \text{ve} \quad [\ln a, \gamma] = \ln p \ \gamma \tag{3.1.14a}
$$

oldukları kullanılmıştır. y için sağlanan iki bağıntı ise,

$$
[\ln d, \beta] = \ln q \ \beta \quad \text{ve} \quad [\ln d, \gamma] = \ln p \ \gamma \tag{3.1.14b}
$$

oldukları kullanılarak kontrol edilebilir.

$$
[\mu, \nu]_+ = 0
$$

olduğu çok açıktır. Son olarak, $[x, y] = 0$ olduğu gösterilecektir. Bir defa, (3.1.3) denklemlerinden,

$$
[x, y] = \frac{1}{h^2}\left\{ [\ln a, \ln d] + [\ln a, f_p(d, a, q)\gamma\beta] - [\ln d, f_q(a, d, p)\beta\gamma] \right\}
$$

yazılır. Şimdi burada,

$$
\begin{aligned}
X &= [\ln a, \ln d] \\
Y &= [\ln a, f_p(d, a, q)\gamma\beta] \\
Z &= [\ln d, f_q(a, d, p)\beta\gamma]
\end{aligned}
$$

olsun. Bu takdirde, (3.1.14) bağıntıları kullanılarak

$$
\begin{aligned}
Y &= [\ln a, f_p(d, a, q)\gamma\beta] \\
&= f_p(d, a, q)\{ [\ln a, \gamma]\beta + \gamma[\ln a, \beta] \} \\
&= 2h f_p(d, a, q)\gamma\beta
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
Z &= [\ln d, f_q(a, d, p)\beta\gamma] \\
&= f_q(a, d, p)\{ [\ln d, \gamma]\beta + \gamma[\ln d, \beta] \} \\
&= 2h f_q(a, d, p)\beta\gamma
\end{aligned}
$$

oldukları kolayca gösterilebilir. Fakat X' i hesaplamak oldukça fazla işlem gerektirmektedir. Bununla birlikte, gerekli düzenlemeler yapılıp, (2.1.10) bağıntısı kullanıldığında,

$$\begin{aligned} X &= [\ln a, \ln d] \\ &= \frac{\ln^2(pq)}{pq-1}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Sonuç olarak, $2h = \ln(pq)$ olduğundan, (3.1.10) ile

$$[x, y] = \frac{1}{h^2}(X + Y - Z) = 0$$

bulunur.

Eğer q ve p deformasyon parametreleri, sırasıyla,

$$q = e^{h_1} \quad \text{ve} \quad p = e^{h_2} \tag{3.1.15}$$

şeklinde tanımlanırsa, (3.1.13) cebiri

$$\begin{gathered} [x, \mu] = \frac{2h_1}{h_1 + h_2}\mu, \quad [y, \mu] = \frac{2h_1}{h_1 + h_2}\mu, \quad \mu^2 = 0, \\ [x, \nu] = \frac{2h_2}{h_1 + h_2}\nu, \quad [y, \nu] = \frac{2h_2}{h_1 + h_2}\nu, \quad \nu^2 = 0, \\ xy - yx = 0, \quad \mu\nu + \nu\mu = 0 \end{gathered} \tag{3.1.16}$$

haline gelir.

Eğer (3.1.16) denklemlerinde $h_1 = h_2$ alınırsa, bu kesimde, buraya kadar yapılanlar [9] daki ilgili kavramlarla özdeşleşir. Yalnız, [9] da deformasyon parametresi olarak q^{-1} alındığından, oradaki bağıntılar, "-" işaretli olarak görünmektedir.

(3.1.1) deki M matrisinin süper izi

$$strM = x - y \tag{3.1.13}$$

olarak tanımlanır. $strM$ nin (3.1.16) cebirinin merkezi elemanı olduğu kolayca gösterilebilir. Yani $strM$, M nin bütün matris elemanları ile komutatiftir. Kesim 3.4 de $strM$ ile $sD_{p,q}(T)$ arasındaki bağıntı elde edilecektir.

3.2 M^n Matrisinin Hesabı

Bu kesimde, bir $T \in GL_{p,q}(1|1)$ süper matrisinin matris elemalarını elde etmek için (3.1.1) ile verilen M matrisinin n-inci kuvveti M^n matrisinin matris elemanları elde edilecektir. M^n nin matris elemanlarını basitleştirmek için önce bir τ transformasyonu

$$\tau : \tau(x, y, \mu, \nu, h_1, h_2) \mapsto (y, x, \nu, \mu, h_2, h_1) \tag{3.2.1}$$

olarak tanımlansın. Bu halde, kolayca gösterilebilir ki (3.1.16) bağıntıları τ transformasyonu altında korunur. Örneğin,

$$[x, \mu]^\tau = (\frac{h_1}{h}\mu)^\tau \implies [y, \nu] = \frac{h_2}{h}\nu$$

dır. Dolayısıyla τ, iyi tanımlıdır. Şimdi

$$\phi = \frac{h_1}{h} \quad \text{ve} \quad \varphi = \frac{h_2}{h} \tag{3.2.2}$$

olsun. (3.1.16) cebiri, $\mathcal{M}_{h_1,h_2}$ ile gösterilsin. Bu takdirde:

Lemma 1 *Eğer $M \in \mathcal{M}_{h_1,h_2}$ ise,*

$$x^n\mu = \mu(x + \phi)^n, \quad y^n\mu = \mu(y + \phi)^n,$$

$$x^n\nu = \nu(x + \varphi)^n, \quad y^n\nu = \nu(y + \varphi)^n \tag{3.2.3}$$

bağıntıları sağlanır.

İspat. Bir defa, (3.1.16) daki ilk bağıntı, (3.2.2) deki ilk ifade kullanılarak,

$$x\mu = \mu(x + \phi) \tag{3.2.4a}$$

şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla, bu eşitliğin her iki tarafını x^{n-1} ile çarpıp bunu, eşitliğin ikinci tarafına ardışık olarak uygulamakla

$$\begin{aligned} x^n\mu &= x^{n-1}\mu(x + \phi) \\ &= x^{n-2}\mu(x + \phi)^2 \\ &\vdots \\ &= \mu(x + \phi)^n \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$y\nu = \nu(y+\varphi) \tag{3.2.4b}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} y^n\nu &= y^{n-1}\nu(y+\varphi) \\ &= y^{n-2}\nu(y+\varphi)^2 \\ \vdots \\ &= \nu(y+\varphi)^n \end{aligned}$$

bulunur. Diğer ikisi de aynı tarzda gösterilebilir.

Not olarak, (3.2.4a) bağıntısı

$$\mu x = (x-\phi)\mu \tag{3.2.4c}$$

olarak yazılırsa,

$$\mu x^n = (x-\phi)^n\mu$$

elde edilir. Bu durum, diğerleri için de geçerlidir. O halde, eğer $M \in \mathcal{M}_{h_1,h_2}$ ise, (3.2.3) bağıntıları

$$\begin{aligned} \mu x^n = (x-\phi)^n\mu, &\quad \mu y^n = (y-\phi)^n\mu, \\ \nu x^n = (x-\varphi)^n\nu, &\quad \nu y^n = (y-\varphi)^n\nu \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

şeklinde de verilebilir.

Lemma 2 *Eğer $M \in \mathcal{M}_{h_1,h_2}$ ise,*

$$\begin{aligned} F_n &= F_n(x,y,\phi,\varphi) \\ &= \frac{x^n}{2(x-y-\varphi)} - \frac{(x+\phi+\varphi)^n}{2(x-y+\phi)} - \frac{(y+\varphi)^n}{(x-y+\phi)(x-y-\varphi)} \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

ve

$$\begin{aligned} G_n &= G_n(x,y,\phi) \\ &= \frac{(x+\phi)^n - y^n}{x-y+\phi} \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

olmak üzere M matrisinin n-inci kuvveti M^n,

$$M^n = \begin{pmatrix} x^n - \mu\nu F_n & \mu G_n \\ \nu G_n^{\tau} & y^n - \nu\mu F_n^{\tau} \end{pmatrix} \tag{3.2.8}$$

şeklindedir.

İspat. n üzerinden tümevarım ile yapılacaktır.

$$X_n = x^n - \mu\nu F_n \quad \text{ve} \quad \Omega_n = \mu G_n \tag{3.2.9}$$

olsun. İspat, sadece bunlar için yapılacaktır. Diğerleri benzer şekilde gösterilebilir. Aşikar olarak, $n = 1$ için

$$F_1 = 0 \quad \text{ve} \quad G_1 = 1 \tag{3.2.10}$$

dir. Dolayısıyla,

(1) $n = 1$ halinde, istenilenler açıktır.

(2) (3.2.9) daki matris elemanları, $n = k$ için doğru olsun.

(3) Yine, (2.3.7) deki gerçek kullanılacaktır. Buna göre,

$$X_{k+1} = X_k x + \Omega_k \nu$$

yazılabilir. Yani

$$X_{k+1} = x^{k+1} - \mu\nu F_k x + \mu G_k \nu$$

dir. Burada, (3.2.3) deki son iki bağıntıya göre

$$G_k \nu = \nu \frac{(x+\phi+\varphi)^k - (y+\varphi)^k}{x-y+\phi}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned}
-\nu F_k x + G_k \nu &= \nu \Big[-\frac{x^{k+1}}{2(x-y-\varphi)} + \frac{2(x+\phi+\varphi)^k + x(x+\phi+\varphi)^k}{2(x-y+\phi)} \\
&\quad + \frac{x(y+\varphi)^k - (x-y-\varphi)(y+\varphi)^k}{(x-y+\phi)(x-y-\varphi)} \Big] \\
&= \nu \Big[-\frac{x^{k+1}}{2(x-y-\varphi)} + \frac{(x+\phi+\varphi)^{k+1}}{2(x-y+\phi)} \\
&\quad + \frac{(y+\varphi)^{k+1}}{(x-y+\phi)(x-y-\varphi)} \Big] \\
&= -\nu F_{k+1}
\end{aligned}$$

olduğu bulunur. Burada, ikinci eşitlikteki ikinci terim düzenlenirken, (3.2.2) ifadeleri kullanılmıştır. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
X_{k+1} &= x^{k+1} - \mu\nu F_k x + \mu G_k \nu \\
&= x^{k+1} - \mu\nu F_{k+1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
\Omega_{k+1} &= X_k\mu + \Omega_k y \\
&= x^k\mu + \mu G_k y \\
&= \mu\left[(x+\phi)^k + G_k y\right] \\
&= \mu\left[(x+\phi)^k + \frac{(x+\phi)^k y - y^{k+1}}{x-y+\phi}\right] \\
&= \mu\frac{(x+\phi)^{k+1} - y^{k+1}}{x-y+\phi} \\
&= \mu G_{k+1}
\end{aligned}$$

bulunur. Geriye kalanlar da aynı şekilde ispat edilebilir.

Bu kesimde son olarak, aşağıdaki lemma ve önerme ispat edilecektir.

Lemma 3 *Eğer $T \in GL_{p,q}(1|1)$ ve $T = e^{hM}$ ise, T nin matris elemanları, M nin matris elemanları cinsinden*

$$\begin{aligned}
a &= e^{hx} - \frac{\mu\nu}{(x-y+\phi)(x-y-\varphi)}\left\{\left(\frac{\phi+pq\varphi}{2} - \frac{pq-1}{2}(x-y)\right)e^{hx} - pe^{hy}\right\}, \\
d &= e^{hy} - \frac{\nu\mu}{(x-y+\phi)(x-y-\varphi)}\left\{\left(\frac{\varphi+pq\phi}{2} + \frac{pq-1}{2}(x-y)\right)e^{hy} - qe^{hx}\right\}, \\
\beta &= \frac{\mu}{x-y+\phi}\left(qe^{hx} - e^{hy}\right), \qquad (3.2.11) \\
\gamma &= \frac{\nu}{\varphi-(x-y)}\left(pe^{hy} - e^{hx}\right)
\end{aligned}$$

olarak ifade edilebilir.

İspat. Eğer $T \in GL_{p,q}(1|1)$ süper matrisi, (3.1.2) deki gibi yazılabiliyorsa, bu takdirde T matrisi, bir kuvvet serisi olarak

$$T = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}M^n$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla, örneğin a elemanı

$$\begin{aligned}
a &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}\left(x^n - \mu\nu F_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(hx)^n}{n!} - \mu\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} F_n \\
&= e^{hx} - \frac{\mu\nu}{(x-y+\phi)(x-y-\varphi)} \times \\
&\quad \left\{ \left(\frac{\phi + pq\varphi}{2} - \frac{pq-1}{2}(x-y) \right) e^{hx} - pe^{hy} \right\}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\beta &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \mu G_n \\
&= \frac{\mu}{x-y+\phi} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{[h(x+\phi)]^n}{n!} - \frac{(hy)^n}{n!} \right) \\
&= \frac{\mu}{x-y+\phi}\left(qe^{hx} - e^{hy}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. γ ve d matris elemanları da aynı usül ile hesaplanabilir.

Önerme 4 *Eğer* $M \in \mathcal{M}_{h_1,h_2}$ *ise,* $T = e^{hM} \in GL_{p,q}(1|1)$ *olur.*

İspat. Bunun için, (2.1.6) (p,q)-(anti-) komutasyon bağıntılarının gerçeklendiği gösterilecek. Örnek olması bakımından burada sadece $a\beta = q\beta a$, $d\gamma = p\gamma d$ ve $[a,d] = (p - q^{-1})\gamma\beta$ bağıntılarının sağlandığı kontrol edilecektir.

$$\begin{aligned}
a\beta &= e^{hx} \frac{\mu}{x-y+\phi}\left(qe^{hx} - e^{hy}\right) \\
&= \frac{\mu}{x-y+\phi}\left(qe^{hx} - e^{hy}\right) e^{h_1 + hx} \\
&= q\beta a
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
d\gamma &= e^{hy} \frac{\nu}{\varphi - (x-y)}\left(pe^{hy} - e^{hx}\right) \\
&= \frac{\nu}{\varphi - (x-y)}\left(pe^{hy} - e^{hx}\right) e^{h_2 + hy} \\
&= p\gamma d
\end{aligned}$$

olur.

Son olarak, (2.1.6) daki son bağıntının gerçeklendiği gösterilecektir. Denklemleri kısaltmak için

$$W = (x-y+\phi)(x-y-\varphi),$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_1 &= \frac{\phi + pq\varphi}{2} - \frac{pq-1}{2}(x-y) \quad \text{ve} \\
\Gamma_2 &= \frac{\varphi + pq\phi}{2} + \frac{pq-1}{2}(x-y)
\end{aligned}
$$

alınırsa,

$$
\begin{aligned}
ad &= e^{h(x+y)} - \frac{1}{W}\{e^{hx}\nu\mu\left(\Gamma_2 e^{hy} - qe^{hx}\right) + \mu\nu\left(\Gamma_1 e^{hx} - pe^{hy}\right)e^{hy}\} \\
&= e^{h(x+y)} - \frac{\nu\mu}{W}\{\Gamma_2 pq e^{h(x+y)} - q^2 pe^{2hx} - \Gamma_1 e^{h(x+y)} + pe^{2hy}\} \\
&= e^{h(x+y)} - \frac{\nu\mu}{W}\{\frac{p^2q^2-1}{2}(x-y+\phi)e^{h(x+y)} - q^2pe^{2hx} + pe^{2hy}\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
da &= e^{h(x+y)} - \frac{1}{W}\{e^{hy}\mu\nu\left(\Gamma_1 e^{hx} - pe^{hy}\right) + \nu\mu\left(\Gamma_2 e^{hy} - qe^{hx}\right)e^{hx}\} \\
&= e^{h(x+y)} - \frac{\mu\nu}{W}\{\Gamma_1 pq e^{h(x+y)} - p^2 qe^{2hy} - \Gamma_2 e^{h(x+y)} + qe^{2hx}\} \\
&= e^{h(x+y)} - \frac{\mu\nu}{W}\{-\frac{p^2q^2-1}{2}(x-y-\varphi)e^{h(x+y)} - p^2qe^{2hy} + qe^{2hx}\}
\end{aligned}
$$

olduklarından

$$
[a,d] = \frac{(1-pq)\mu\nu}{W}\{qe^{2hx} + pe^{2hy} - (1+pq)e^{h(x+y)}\}
$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\gamma\beta$ hesaplandığında

$$
\begin{aligned}
\gamma\beta &= -\frac{\nu}{x-y-\varphi}\left(pe^{hy} - e^{hx}\right)\frac{\mu}{x-y+\phi}\left(qe^{hx} - e^{hy}\right) \\
&= \frac{\mu\nu}{W}\left(pqe^{hy} - qe^{hx}\right)\left(qe^{hx} - e^{hy}\right) \\
&= \frac{q\mu\nu}{W}\{(1+pq)e^{h(x+y)} - qe^{2hx} - pe^{2hy}\}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. O halde,

$$
[a,d] = -(q^{-1} - p)\gamma\beta
$$

dır.

3.3 Süper Determinant ve Süper İz Arasındaki Bağıntı

Bölüm 2 de bir $T \in GL_{p,q}(1|1)$ matrisinin süper determinantı

$$sD_{p,q}(T) = ad^{-1} - \beta d^{-1}\gamma d^{-1}$$

olarak elde edilmişti. Ayrıca (3.1.1) deki M matrisinin süper izi

$$strM = x - y$$

idi. Klasik durumda

$$sD(T) = e^{strM}$$

olduğu ve q-deforme durumda da

$$sD_q(T) = e^{\theta strM}, \quad q = e^{\theta}$$

olduğu bilinmektedir. Bu kesimde ise,

$$sD_{p,q}(T) = e^{h\ strM}, \qquad h = \frac{h_1 + h_2}{2} \tag{3.3.1}$$

olduğu gösterilecektir.

$$d^{-1} = e^{-hy} + \frac{\nu\mu}{(x-y+\phi)(x-y-\varphi)}\left\{\frac{\varphi + pq\phi}{2} + \frac{pq-1}{2}(x-y) - qe^{h(x-y)}\right\}$$

olduğundan,

$$ad^{-1} = e^{h(x-y)} + \frac{\nu\mu}{(x-y+\phi)(x-y-\varphi)}\left\{(1+pq)e^{h(x-y)} - qe^{2h(x-y)} - p\right\}$$

ve

$$\beta d^{-1}\gamma d^{-1} = \frac{\mu\nu}{(x-y+\phi)(x-y-\varphi)}\left\{qe^{2h(x-y)} - (1+pq)e^{h(x-y)} + p\right\}$$

olduklarını yazmak kolaydır. Dolayısıyla, gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$\begin{aligned} sD_{p,q}(T) &= e^{h(x-y)} \\ &= e^{h\ strM} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Alternatif bir ispat aşağıda verilmiştir: Bir defa (3.1.10) denkleminden

$$h\ strM = \ln a - \ln d - \frac{\ln(pq)}{1-pq}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \tag{3.3.2}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned}
\ln(a-\beta d^{-1}\gamma) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(-1+a-\beta d^{-1}\gamma)^{n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^{n-k}(a-\beta d^{-1}\gamma)^{k} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^{n-k}a^{k} - \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sum_{k=0}^{n}\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}(-1)^{n-k}\frac{q^{k}-p^{-k}}{q-p^{-1}}\beta a^{k-1}d^{-1}\gamma \\
&= \ln a-\frac{\ln(pq)}{q-p^{-1}}\beta a^{-1}d^{-1}\gamma \\
&= \ln a-\frac{\ln(pq)}{1-pq}\gamma a^{-1}\beta d^{-1} \qquad (3.3.3)
\end{aligned}$$

dir. Burada, üçüncü eşitlik yazılırken, (2.1.8) bağıntısı kullanılmıştır. Böylece (3.3.2) ve (3.3.3) denklemleri karşılaştırıldığında

$$\ln sD_{p,q}(T) = h\ strM \qquad (3.3.4)$$

olduğu görülür. Burada $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$, Binom katsayılarını göstermektedir.

4 BÖLÜM : R-MATRİS YAKLAŞIMI

Bu bölümde, Kesim 2.1 de elde edilen, bir $T \in GL_{p,q}(1|1)$ süper matrisinin matris elemanlarının sağladığı (p,q)-(anti-) komutasyon bağıntıları bir R-matrisi ile, uygun tanımlanacak bir tensör çarpım kullanılarak elde edilecektir.

Ayrıca, T ve T' iki kuantum süper matris yani $T, T' \in GL_{p,q}(1|1)$ iken bunların toplamı olan $T + T'$ matrisinin bir kuantum süper matris olması için T ve T' matrislerinin elemanları üzerine yüklenmesi gereken bağıntılar elde edilecek ve son olarak, Kesim 3.1 de tanımlanan üstel form tekrar ele alınacaktır.

4.1 $GL(1|1)$ Grubunun R-matrisi İle Deformasyonu

Bu kesimde, Kesim 2.1 de verilen (2.1.6) (p,q)-(anti-) komutasyon bağıntıları bir R-matrisi ile elde edilecektir. Bu kesim, orijinal olmayıp, takip eden kesimlerde kullanılacağı için verilmiştir.

T, 2x2-tipinde bir süper matris yani

$$T = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix}$$

olsun. Önce, süper matrislerin tensör çarpımları tanımlanacaktır. Bilindiği gibi, $GL(n)$ grubundaki iki matrisin tensör çarpımı, tensör-matris çarpım kuralı ile elde edilmektedir. Bu durum, süper matrisler için (tamamen) aynı değildir.

Eğer A ve B iki süper matris ise, bunların (süper) tensör-matris çarpımları aşağıdaki gibi yapılır:

$A = (A^i{}_j)$ ve $B = (B^i{}_j)$ olsun. Bu takdirde, $A \otimes B$ nin matris elemanları

$$(A \otimes B)^{ij}{}_{kl} = (-1)^{k(j+l)} A^i{}_k B^j{}_l \tag{4.1.1}$$

dir. Burada $(-1)^{k(j+l)}$, B nin **tek** matris elemanları için dikkate alınır.

Şimdi,

$$T_1 = T \otimes I \tag{4.1.2a}$$

olsun. Bu T_1 matrisinin matris elemanları

$$\begin{aligned}(T_1)^{ij}{}_{kl} &= (-1)^{k(j+l)} T^i{}_k \delta^j{}_l \\ &= T^i{}_k \delta^j{}_l \end{aligned} \tag{4.1.3a}$$

şeklindedir. Benzer şekilde, eğer

$$T_2 = I \otimes T \tag{4.1.2b}$$

denirse, T_2 nin matris elemanları

$$(T_2)^{ij}{}_{kl} = (-1)^{i(j+l)} T^j{}_l \delta^i{}_k \tag{4.1.3b}$$

olarak tanımlanır. (4.1.3) tanımlamaları altında (4.1.2) deki T_1 ve T_2 matrislerinin açık şekli [15]

$$T_1 = T \otimes I = \begin{pmatrix} a & 0 & \beta & 0 \\ 0 & a & 0 & \beta \\ \gamma & 0 & d & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & d \end{pmatrix}, \tag{4.1.4a}$$

$$T_2 = I \otimes T = \begin{pmatrix} a & \beta & 0 & 0 \\ \gamma & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & -\beta \\ 0 & 0 & -\gamma & d \end{pmatrix} \tag{4.1.4b}$$

olarak yazılabilir. Burada, 4x4-tipindeki bir N matrisi

$$N = \begin{pmatrix} N^{11}{}_{11} & N^{11}{}_{12} & N^{11}{}_{21} & N^{11}{}_{22} \\ N^{12}{}_{11} & N^{12}{}_{12} & N^{12}{}_{21} & N^{12}{}_{22} \\ N^{21}{}_{11} & N^{21}{}_{12} & N^{21}{}_{21} & N^{21}{}_{22} \\ N^{22}{}_{11} & N^{22}{}_{12} & N^{22}{}_{21} & N^{22}{}_{22} \end{pmatrix} \tag{4.1.5}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Buna göre, örneğin T_2 nin $(T_2)^{12}{}_{11}$ ve $(T_2)^{21}{}_{22}$ matris elemanları, sırasıyla,

$$\begin{aligned}(T_2)^{12}{}_{11} &= (-1)^{1(2+1)} T^2{}_1 \delta^1{}_1 \\ &= (-1)(-\gamma) = \gamma\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(T_2)^{21}{}_{22} &= (-1)^{2(1+2)} T^1{}_2 \delta^2{}_2 \\ &= (+1)(-\beta) = -\beta\end{aligned}$$

dır. Diğer matris elemanları da benzer şekilde elde edilebilir.

Şimdi

$$R = \begin{pmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q^{-1} - p & 0 \\ 0 & 0 & pq^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{4.1.6}$$

matrisi ile

$$RT_1T_2 = T_2T_1R \tag{4.1.7}$$

denklemi, (2.1.6) bağıntılarını verir. Bunu göstermek oldukça kolaydır. Fakat çok fazla sıkıcı işlem yapmak gerekmektedir. Buna benzer bir bağıntı, sonraki kesimde iki kuantum süper matris için verilecek ve orada ispat, ayrıntılı olarak yapılacaktır.

4.2 İki Süper Matrisin Toplamının durumu

Kesim 2.1 de not edildi ki, eğer $T \in GL_{p,q}(1|1)$ ve $T' \in GL_{p,q}(1|1)$ olmak üzere, T matrisinin matris elemanları ile T' nün matris elemanları (anti-) komutatif ise, TT' ve $T'T$ çarpım matrisleri de $GL_{p,q}(1|1)$ kuantum süper grubuna aittir. Bu kesimde ise, T ve T' iki kuantum süper matris iken, $T + T'$ nün ne zaman kuantum süper matris olacağı sorusuna cevap aranacaktır.

T ve T', iki süper matris olsun. T' matrisi

$$T' = \begin{pmatrix} a' & \beta' \\ \gamma' & d' \end{pmatrix}$$

olarak alınsın. Bu takdirde,

$$T'' = T + T' = \begin{pmatrix} a'' & \beta'' \\ \gamma'' & d'' \end{pmatrix} \tag{4.2.1}$$

matrisinin matris elemanlarının ne zaman (2.1.6) ile verilen (p,q)-(anti-) komutasyon bağıntılarını sağlayacağı araştırılacak. Önce, bir takım tanımlamalara ihtiyaç vardır.

P, 4x4-tipinde bir süper permütasyon matrisi yani

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.2.2}$$

olsun. Bir R' matrisi, (4.1.6) daki R-matrisi ile

$$R' = R^{-1} - (q - p^{-1})P \qquad (4.2.3)$$

şeklinde tanımlansın. Bu halde:

Önerme 1 *Eğer*

$$R'T_2{T_1}' = {T_1}'T_2R^{-1} \qquad (4.2.4)$$

bağıntısı sağlanırsa, $T'' \in GL_{p,q}(1|1)$ *olur. Burada* ${T_1}'$ *ve* T_2*,* (4.1.2) *ve* (4.1.3) *de tanımlandığı gibidir.*

İspat. Eğer

$$T_1' = T' \otimes I \qquad (4.2.5)$$

ise, (4.1.3a) dan, T_1' matrisi açık olarak,

$$T_1' = \begin{pmatrix} a' & 0 & \beta' & 0 \\ 0 & a' & 0 & \beta' \\ \gamma' & 0 & d' & 0 \\ 0 & \gamma' & 0 & d' \end{pmatrix} \qquad (4.2.6)$$

şeklinde yazılır. Dolayısıyla, (4.1.4b) ile

$$T_2T_1' = \begin{pmatrix} aa' & \beta a' & a\beta' & \beta\beta' \\ \gamma a' & da' & \gamma\beta' & d\beta' \\ a\gamma' & -\beta\gamma' & ad' & -\beta d' \\ -\gamma\gamma' & d\gamma' & -\gamma d' & dd' \end{pmatrix} \qquad (4.2.7a)$$

ve

$$T_1'T_2 = \begin{pmatrix} a'a & a'\beta & \beta'a & -\beta'\beta \\ a'\gamma & a'd & -\beta'\gamma & \beta'd \\ \gamma'a & \gamma'\beta & d'a & -d'\beta \\ \gamma'\gamma & \gamma'd & -d'\gamma & d'd \end{pmatrix} \qquad (4.2.7b)$$

oldukları yazılır. Böylece, (4.2.3) den

$$R' = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p^{-1} - q & qp^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} \qquad (4.2.8)$$

olup, $\lambda = q - p^{-1}$ olmak üzere

$$R'T_2T_1' =$$

$$\begin{pmatrix} p^{-1}aa' & p^{-1}\beta a' & p^{-1}a\beta' & p^{-1}\beta\beta' \\ \gamma a' & da' & \gamma\beta' & d\beta' \\ -\lambda\gamma a' + qp^{-1}a\gamma' & -\lambda da' - qp^{-1}\beta\gamma' & -\lambda\gamma\beta' + qp^{-1}ad' & -\lambda d\beta' - qp^{-1}\beta d' \\ -q\gamma\gamma' & qd\gamma' & -q\gamma d' & qdd' \end{pmatrix}$$
$$(4.2.9a)$$

ve

$$T_1'T_2R^{-1} = \begin{pmatrix} qa'a & a'\beta & \lambda a'\beta + qp^{-1}\beta' a & -p^{-1}\beta'\beta \\ qa'\gamma & a'd & \lambda a'd - qp^{-1}\beta'\gamma & p^{-1}\beta' d \\ q\gamma' a & \gamma'\beta & \lambda\gamma'\beta + qp^{-1}d'a & -p^{-1}d'\beta \\ q\gamma'\gamma & \gamma' d & \lambda\gamma' d - qp^{-1}d'\gamma & p^{-1}d'd \end{pmatrix} \qquad (4.2.9b)$$

elde edilir. Buna göre, (4.2.4) denklemi, aşağıdaki bağıntıları verir:

$$aa' = pqa'a, \quad a\gamma' = p\gamma' a + (p - q^{-1})\gamma a',$$

$$a\beta' = q\beta' a + (pq - 1)a'\beta, \quad ad' = d'a + (p - q^{-1})(\gamma\beta' + \gamma'\beta),$$

$$\beta a' = pa'\beta, \quad \beta\gamma' = -pq^{-1}\gamma'\beta + (q^{-1} - p)da',$$

$$\beta\beta' = -\beta'\beta, \quad \beta d' = q^{-1}d'\beta + (p - q^{-1})d\beta', \qquad (4.2.10)$$

$$\gamma a' = qa'\gamma, \quad \gamma\beta' = -qp^{-1}\beta'\gamma + (q - p^{-1})a'd,$$

$$\gamma\gamma' = -\gamma'\gamma, \quad \gamma d' = p^{-1}d'\gamma + q^{-1}(p^{-1} - q)\gamma' d,$$

$$da' = a'd, \quad d\gamma' = q^{-1}\gamma' d,$$

$$d\beta' = p^{-1}\beta' d, \quad dd' = (qp)^{-1}d'd.$$

Şimdi, $T'' \in GL_{p,q}(1|1)$ olduğunu göstermek kolaydır. Gerçekten, örneğin (2.1.6) daki üçüncü bağıntıdan,

$$\begin{aligned} a''\gamma'' &= a\gamma + a\gamma' + a'\gamma + a'\gamma' \\ &= p\gamma a + p\gamma' a + (p - q^{-1})\gamma a' + q^{-1}\gamma a' + p\gamma' a' \\ &= p\gamma'' a'' \end{aligned}$$

dir. Yine (2.1.6) daki son bağıntı kullanılarak,

$$\begin{aligned} [a'', d''] &= ad - da + a'd' - d'a' + ad' - d'a \\ &= (p - q^{-1})\gamma\beta + (p - q^{-1})\gamma'\beta' + (p - q^{-1})(\gamma\beta' + \gamma'\beta) \\ &= (p - q^{-1})\gamma''\beta'' \end{aligned}$$

elde edilir. Geriye kalanlar da benzer şekilde gösterilebilir.

Eğer bu bağıntılarda $p = q$ alınırsa, $T'' \in GL_q(1|1)$ olduğu görülür. $p = q = 1$ olması halinde ise, her şey klasik duruma döner. (4.2.4) bağıntısının bir benzeri, tek deformasyon parametreli durumda, $GL_q(2)$ kuantum grubu için Majid [14] tarafından verilmiştir.

4.3 Üstel Form İçin r-Matrisi

Hatırlanacağı gibi, Kesim 3.1 de bir $T \in GL_{p,q}(1|1)$ matrisi, elemanları komutatif olmayan bir M matrisi (denk. (3.1.2)) ile $h_1 = \ln q$ ve $h_2 = \ln p$ olmak üzere

$$T = e^{hM}, \quad h = \frac{h_1 + h_2}{2}$$

şeklinde yazılmıştı ve M nin matris elemanları arasında sağlanan

$$[x, \mu] = \frac{2h_1}{h_1 + h_2}\mu, \quad [y, \mu] = \frac{2h_1}{h_1 + h_2}\mu, \quad \mu^2 = 0,$$
$$[x, \nu] = \frac{2h_2}{h_1 + h_2}\nu, \quad [y, \nu] = \frac{2h_2}{h_1 + h_2}\nu, \quad \nu^2 = 0,$$
$$xy - yx = 0, \quad \mu\nu + \nu\mu = 0$$

(h_1, h_2)-komutasyon bağıntıları elde edilmişti.

Bu kesimde ise, M nin matris elemanlarının sağladığı bu komutasyon bağıntıları (4.1.6) da verilen R-matrisi kullanılarak bir r-matrisi ile elde edilecektir.

Kesim 4.2 de uygun bir tensör matris çarpımı ile

$$RT_1T_2 = T_2T_1R$$

denkleminin (2.1.6) bağıntılarına denk olduğu not edilmişti.

Şimdi, $T \in GL_{p,q}(1|1)$ matrisi,

$$M = \begin{pmatrix} x & \mu \\ \nu & y \end{pmatrix}$$

olmak üzere, yine

$$T = e^{hM}, \quad h = \frac{h_1 + h_2}{2} \tag{4.3.1}$$

olarak ifade edilsin.

Madem ki $T \in GL_{p,q}(1|1)$ matrisi, (4.3.1) şeklinde yazıldı. O halde, akla şu soru gelebilir. Acaba, M nin matris elemanlarının sağladığı (3.1.16) komutasyon bağıntıları, (4.1.6) daki R-matrisi, başka bir matrisin üstel formu olarak yazılarak ve (4.1.7) bağıntısı üzerine belli şartlar yüklenerek elde edilemez mi?

Bu sorunun cevabı "evet" şeklinde olmalıdır. Gerçekten, eğer (4.1.6) daki R-matrisi

$$R = e^r \tag{4.3.2}$$

şeklinde yazılırsa, gerekli hesaplamalar yapıldığında 4x4-tipindeki r-matrisi

$$r = \begin{pmatrix} -h_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(h_1+h_2) & 0 \\ 0 & 0 & -(h_1-h_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 \end{pmatrix} \tag{4.3.3}$$

olarak bulunur.

Şimdi, (4.3.1) deki T matrisi

$$T = I + hM + \cdots \tag{4.3.4}$$

şeklinde yazılır ve $O(h^2)$ ihmal edilirse, aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 1 *Eğer* $e^{hM} = T \in GL_{p,q}(1|1)$ *ise,* (4.1.7) *denklemi,*

$$[M_1, M_2] = \frac{1}{h}[M_1 + M_2, r] \tag{4.3.5}$$

şeklini alır.

İspat. (4.3.4) ifadesi, (4.1.2a) da kullanılırsa,

$$T_1 = I \otimes I + h(M \otimes I) \tag{4.3.6a}$$

yazılabilir. Benzer şekilde, (4.1.2b) ile

$$T_2 = I \otimes I + h(I \otimes M) \tag{4.3.6b}$$

olur. Şimdi,

$$M_1 = M \otimes I \quad \text{ve} \quad M_2 = I \otimes M \tag{4.3.7}$$

olsun. Bu takdirde, (4.1.7) denklemi, (4.3.2) ile

$$h[M_1, M_2] = [M_1 + M_2, r] - h(rM_1M_2 - M_2M_1r) \tag{4.3.8}$$

şeklini alır. Burada, 4x4-tipindeki $rM_1M_2 - M_2M_1r$ matrisi açık olarak (yani matris elemanlarıyla) yazılırsa,

$$rM_1M_2 - M_2M_1r =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & h_1x\mu & h_2\mu x-(h_1-h_2)x\mu & (h_2-h_1)\mu^2 \\ h_2\nu x & (h_1+h_2)\nu\mu & -(h_1-h_2)\nu\mu & -h_1y\mu \\ -h_2\nu x & (h_1-h_2)\nu\mu & (h_1-h_2)[y,x]+(h_1+h_2)\mu\nu & -h_1y\mu \\ (h_1-h_2)\nu^2 & -h_2\nu y & h_1y\nu-(h_1-h_2)\nu y & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.9}$$

olduğu görülür. Dikkat edilirse, bu matrisin matris elemanlarının hepsinde h_1, h_2 veya her ikisi birden görünmektedir. Öyleyse, bu matris ihmal edilebilir. Çünki $O(h^2)$ ihmal edilmiştir. Sonuç olarak,

$$[M_1, M_2] = \frac{1}{h}[M_1 + M_2, r]$$

olur ve bu, lemmanın ispatını tamamlar.

Önerme 2 *Eğer $T = e^{hM} \in GL_{p,q}(1|1)$ ise, $M \in \mathcal{M}_{h_1,h_2}$ olur.*

İspat. Eğer $e^{hM} = T \in GL_{p,q}(1|1)$ ise, önceki lemmaya göre, (4.3.5) denklemi sağlanır. Şimdi, (4.1.4) deki T_1 ve T_2 matrisleri, (4.3.7) deki M_1 ve M_2 matrislerine uyarlanırsa, gerekli hesaplamalar yapıldığında

$$[M_1, M_2] = \begin{pmatrix} 0 & [x,\mu] & [\mu,x] & -2\mu^2 \\ [x,\nu] & [x,y] & -[\mu,\nu]_+ & [\mu,y] \\ [\nu,x] & [\nu,\mu]_+ & [y,x] & [\mu,y] \\ 2\nu^2 & [\nu,y] & [\nu,y] & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.9a}$$

ve

$$[M_1 + M_2, r] = \begin{pmatrix} 0 & h_1\mu & -h_1\mu & 0 \\ h_2\nu & 0 & 0 & -h_1\mu \\ -h_2\nu & 0 & 0 & -h_1\mu \\ 0 & -h_2\nu & -h_2\nu & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3.9b}$$

oldukları bulunur. Bunlar, (4.3.5) denklemine götürüldüğünde ise, (3.1.16) bağıntıları çıkar. Yani $M \in \mathcal{M}_{h_1,h_2}$ dir.

5 BÖLÜM : ÖZEL SÜPER GRUPLAR

Bölüm 2 de gösterildi ki (p, q)-deforme bir T süper matrisinin süper determinantı, T nin bütün matris elemanları ile komutatiftir. Dolayısıyla, T nin süper determinantı $sD_{p,q}(T)$, bir sayı olarak düşünülebilir.

Bu bölümde, bir $T \in GL_{p,q}(1|1)$ matrisinin süper determinantı birimleştirilerek, özel süper gruplar elde edilecek.

5.1 Özel Lineer $SL_{p,q}(1|1)$ Süper Grubu

Klasik durumda, $GL(n)$ genel lineer grubundan, onun alt grupları olan $SL(n)$, $SU(n)$, vb. özel lineer gruplarını elde etmek için $GL(n)$ grubundaki matrislerin determinantları 1 yapılır. Bu, q-deforme durumda da geçerlidir. Yani $GL_q(n)$ kuantum grubundan, onun alt grupları olan $SL_q(n)$, $SU_q(n)$, vb. özel lineer kuantum grupları tanımlanabilir. Fakat (p, q)-deforme durumunda $GL_{p,q}(n)$ grubundaki bir matrisin kuantum determinantı, matris elemanları ile komutatif olmadığından, birimleştirilemez ve dolayısıyla $SL_{p,q}(n)$, $SU_{p,q}(n)$, vb. kuantum alt grupları tanımlanamaz. Daha doğrusu, $SL_{p,q}(n)$, $SU_{p,q}(n)$, vb. kuantum alt grupları yoktur. Bu durum, süper gruplar için geçerli değildir.

Hatırlanacağı üzere $T = \begin{pmatrix} a & \beta \\ \gamma & d \end{pmatrix} \in GL_{p,q}(1|1)$ süper matrisinin kuantum süper determinantı

$$sD_{p,q}(T) = ad^{-1} - \beta d^{-1} \gamma d^{-1}$$

şeklinde elde edilmişti ve bunun, T nin bütün matris elemanları ile komutatif olduğu not edilmişti. Dolayısıyla,

$$sD_{p,q}(T) = 1$$

alınabilir ve bu durumda, $SL_{p,q}(1|1)$ ile gösterilen $GL_{p,q}(1|1)$ kuantum süper grubunun özel lineer (alt) grubu elde edilir.

5.2 Üniter Kuantum $SU_{p,q}(1|1)$ Süper Grubu

Önce, üniter kuantum $U_{p,q}(1|1)$ süper grubu tanımlanacaktır. $T \in GL_{p,q}(1|1)$ olsun. Bu takdirde, eğer

$$T^{+} = (T^{\star})^{t}$$

olmak üzere

$$TT^{+} = I \tag{5.2.1}$$

ifadesi sağlanıyorsa, $T \in U_{p,q}(1|1)$ olur. Burada I, 2x2-tipindeki birim matris; T^{t}, T nin adi matris transpozesi ve $T^{\star}$, T nin matris elemanlarının hermityen eşleniğini göstermektedir. Eğer (5.2.1) ifadesine ek olarak,

$$sD_{p,q}(T) = ad^{-1} - \beta d^{-1}\gamma d^{-1} = 1 \tag{5.2.2}$$

alınırsa bu takdirde, T matrisleri, $U_{p,q}(1|1)$ grubunun alt grubu olan $SU_{p,q}(1|1)$ üniter kuantum süper grubunu oluşturur.

Şimdi, (2.2.7) deki matris, (5.2.2) ile

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} d^{-1} & -a^{-1}\beta a^{-1} \\ -d^{-1}\gamma d^{-1} & a^{-1} \end{pmatrix} \tag{5.2.3}$$

şeklini alır. Bunun, (5.2.1) de kullanılmasıyla da $T \in SU_{p,q}(1|1)$ matrisi

$$T = \begin{pmatrix} a & \beta \\ -(a^{\star})^{-1}\beta^{\star}(a^{\star})^{-1} & (a^{\star})^{-1} \end{pmatrix} \tag{5.2.4}$$

olarak elde edilir. Bu matrisin matris elemanlarının

$$\begin{gathered} a\beta = q\beta a, \quad a\beta^{\star} = p\beta^{\star}a, \\ a^{\star}\beta^{\star} = p^{-1}\beta^{\star}a^{\star}, \quad a^{\star}\beta = q^{-1}\beta a^{\star}, \\ \beta^{2} = 0 = \beta^{\star 2}, \quad \beta\beta^{\star} + pq\beta^{\star}\beta = 0 \end{gathered} \tag{5.2.5}$$

şeklindeki komutasyon bağıntılarını sağladığı (2.1.6) bağıntıları kullanılarak gösterilebilir. Ayrıca, (2.2.8) ifadeleri, (5.2.2) ile

$$aa^{\star} + \beta\beta^{\star} = 1, \tag{5.2.6}$$

$$a^{\star}a - \beta^{\star}\beta = 1 \tag{5.2.7}$$

bağıntılarına denktir.

Eğer (5.2.5) deki birinci ve üçüncü bağıntı birlikte düşünülürse, q deformasyon parametresinin p deformasyon parametresine

$$\overline{q} = p \quad (\text{veya} \quad pq \in \mathcal{R}) \tag{5.2.8}$$

şeklinde bağlı olduğu görülür. Burada $\overline{q}$, q nun kompleks eşleniğini göstermektedir.

Şimdi, [16] veya [17] dekine benzer bazı cebirsel işlemler yapılacaktır. Eğer (5.2.6) ve (5.2.7) denklemlerinden $\beta\beta^\star$ yok edilirse,

$$aa^\star - pqa^\star a = 1 - pq \tag{5.2.9}$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\beta\beta^\star + \beta^\star\beta = (pq-1)(1-a^\star a) \tag{5.2.10}$$

olduğu görülebilir. Eğer (5.2.4) deki T matrisinin matris elemanları, yeni elemanlara transfer edilirse, (5.2.9) ve (5.2.10) denklemleri, fiziksel olarak, (p,q)-deforme süper osilatörler olarak yorumlanabilir. Burada, olayın fiziksel yönüne girilmeyecek, sadece bu yorumlamanın doğru olduğunun gösterilmesi ile yetinilecektir. Bunun için önce, $\star$ işlemi

$$(a^\star)^+ = a \tag{5.2.11}$$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde, eğer (5.2.9) daki a operatörü, bir başka A operatörüne [13]

$$a \longrightarrow \sqrt{1-pq}\; A \tag{5.2.12a}$$

şeklinde dönüştürülürse,

$$a^\star \longrightarrow \sqrt{1-pq}\; A^+ \tag{5.2.12b}$$

elde edilir. Burada, $0 < pq < 1$ olduğu kabul edilmiştir. (5.2.12) dönüşümleri altında (5.2.9) ifadesi

$$AA^+ - pqA^+A = 1 \tag{5.2.13}$$

şeklini alır. Burada A, fiziksel olarak 1-boyutlu *bosonik* bir (p,q)-osilatördür. Gerçekten, (5.2.12) deki dönüşümler yerine

$$a \longrightarrow \sqrt{1-pq}\; p^{N/2}\; A, \tag{5.2.14a}$$

$$a^{\star} \longrightarrow \sqrt{1-pq}\; A^{+}\; p^{N/2} \tag{5.2.14b}$$

dönüşümleri alınırsa, (5.2.13) denklemi

$$AA^{+} - qA^{+}A = p^{-N} \tag{5.2.15}$$

şekline gelir ki bu, [18] deki (15b) bağıntısıyla aynı olur. Burada N, sayı operatörünü göstermektedir ve $N^{+} = N$ dir. Ayrıca, eğer $\mathbf{i}^2 = -1$ ve $B^2 = 0 = B^{+^2}$ olmak üzere

$$\beta \longrightarrow \mathbf{i}\sqrt{pq-1}\; B, \tag{5.2.16a}$$

$$\beta^{\star} \longrightarrow -\mathbf{i}\sqrt{pq-1}\; B^{+} \tag{5.2.16b}$$

dönüşümleri yapılırsa, (5.2.10) denklemi

$$BB^{+} + B^{+}B = 1 + (pq-1)A^{+}A \tag{5.2.17}$$

haline gelir. O halde B, bir 1-boyutlu *fermiyonik* (p,q)-osilatördür.

Sonuç olarak, aşağıdaki kuantum süper osilatör cebiri elde edilir:

$$\begin{gathered} AB = qBA, \qquad AB^{+} = pB^{+}A, \\ A^{+}B^{+} = p^{-1}B^{+}A^{+}, \qquad A^{+}B = q^{-1}BA^{+}, \\ AA^{+} - pqA^{+}A = 1, \\ BB^{+} + B^{+}B = 1 + (pq-1)A^{+}A. \end{gathered} \tag{5.2.18}$$

Not olarak, $p = q$ halinde bu cebir, [19] daki q-deforme süper osilatör cebirini verir. Daha ayrıntılı bir inceleme, [13] de bulunabilir.

SONUÇ

Daha önce, Schwenk ve arkadaşları [9], tek deformasyon parametreli $GL_q(1|1)$ kuantum süper grubunun özelliklerini incelemişlerdi. Bu çalışmada ise iki deformasyon parametreli $GL_{p,q}(1|1)$ kuantum süper grubunun özellikleri incelenmiştir. $GL_{p,q}(1|1)$ süper grubundaki bir süper matrisin kuantum süper tersi ve kuantum süper determinantı, iki deformasyon parametreli durum için [9] da yapılandan farklı bir metod ile elde edilmiştir. $GL_{p,q}(1|1)$ süper grubundaki bir süper matrisin n-inci kuvvetinin matris elemanları elde edilmiş ve eğer $T \in GL_{p,q}(1|1)$ ise $T^n \in GL_{p^n,q^n}(1|1)$ olduğu açık olarak gösterilmiştir. Sonra T süper kuantum matrisi, matris elemanları komutatif olmayan başka bir matrisin üstel formu olarak yazılmış ve üstel matrisin matris elemanlarının sağladığı komutasyon bağıntıları elde edilmiştir. (Şüphesiz, ele alınan temsil tek değildir. Yani (3.1.2) denklemi başka şekil(ler)de de ifade edilebilir ve o zaman da M nin matris elemanları arasında sağlanan başka komutasyon bağıntıları elde edilebilir.) Bunlar yapılırken, T nin matris elemanları üstel matrisin matris elemanları cinsinden ve üstel M matrisinin matris elemanları da T nin matris elemanları cinsinden ifade edilmiştir.

$GL_{p,q}(1|1)$ süper grubundaki iki süper matrisin toplamının da bir süper matris olması için sağlanması gereken bağıntılar ortaya konmuştur. Bu, yeni bulunan bir R'-matrisi ile yapılmıştır.

Son olarak, üniter kuantum $SU_{p,q}(1|1)$ süper grubu gözönüne alınmış ve bu gruptaki bir matrisin matris elemanlarının, yeni transformasyonlarla, fiziksel olarak (p, q)-deforme süper osilatörler olarak bilinen operatörler ile özdeş oldukları gösterilmiştir.

$GL_q(1|1)$ kuantum süper grubundaki "dual" matrislerin özellikleri [20] de incelenmiştir. Fakat o çalışmada, dual matrislerin üniterlik özelliklerine değinilmemiştir. Yapılacak bir çalışmada bu durum ele alınabilir ve $p = q$ için Bölüm 5 tekrar gözden geçirilebilir. Yine, bu çalışmada ele alınan üstel temsil de dual matrisler için düşünülebilir. Eğer bu mümkün olursa, bazı yeni tanımlamalara ihtiyaç duyulacaktır. Eğer bu söylenenler gerçeklenirse, ilginç bir çalışma olabilir.

KAYNAKLAR

[1] Drinfeld, V., *Quantum groups*, Proc. ICM, Berkeley (1986), 798-820.

[2] Woronowicz, S.L., *Compact matrix pseudogroups*, Commun. Math. Phys. **111** (1987), 613-665.

[3] Faddeev, L., Reshetikhin, N. and Takhtajan, L., *Quantisation of Lie groups and Lie algebras*, Preprint LOMI (1987).

[4] Manin, Yu I., *Quantum groups and noncommutative geometry*, Montreal Univ. Preprint CRM-1561 (1988).

[5] Vokos, S., Zumino, B. and Wess, J., *Analysis of the basic matrix representation of* $GL_q(2,\mathcal{C})$, Z. Phys. C **48** (1990), 65-74.

[6] Corrigan, E., Fairlie, B., Fletcher, P. and Sasaki, R., *Some aspects of quantum groups and supergroups*, J. Math. Phys. **31** (1990), 776-780.

[7] Schirrmacher, A., Wess, J. and Zumino, B., *The two parameter deformation of* $GL(2)$*, its differential calculus, and Lie algebra*, Z. Phys. C **49** (1991), 317-324.

[8] Manin, Yu.I., *Multiparametric quantum deformations of the general lineer supergroup*, Commun. Math. Phys. **123** (1989), 163-175.

[9] Schwenk, J., Schmidke, B. and Vokos, S., *Properties of 2x2 quantum matrices in* Z_2*-graded spaces*, Z. Phys. C **46** (1990), 643-646.

[10] Dabrowski,L. and Wang,L., *Two parametric quantum deformation of* $GL(1|1)$, Phys. Lett. B **266** (1991), 51-54.

[11] Chakrabarti, R. and Jagannathan, R., *On the representations of* $GL_{p,q}(2)$, $GL_{p,q}(1|1)$ *and noncommutative spaces*, J. Phys. A **24** (1991), 5683-5701.

[12] Çelik, S. and Çelik, S., *The properties of the quantum supergroup* $GL_{p,q}(1|1)$, Preprint M.S.U.M.B. -95/3 (1995).

[13] Çelik, S. and Çelik, S., *On the quantum supergroup* $SU_{p,q}(1|1)$ *and quantum oscillators*, Tr. J. Phys. de yayınlanacak)

[14] Majid, S., *On the addition of quantum matrices*, J. Math. Phys. **35** (1994), 2617-2632.

[15] Schmidke, B., Vokos, S. and Zumino, B., *Differential geometry of the quantum supergroup $GL_q(1|1)$*, Z. Phys. C **48** (1990), 249-255.

[16] Arık, M. and Çelik, Salih, *Quantum groups, quantum projective spaces and q-oscillators*, Z. Phys C **59** (1993), 99-103.

[17] Çelik, Salih, *On the determination of the relation between the matrix elements of $CP_q(n)$ and covariant q-oscillators*, Tr. J. of Math. **19** (1995), 83-89.

[18] Chakrabarti, R. and Jagannathan, R., *A (p,q) oscillator realization of two parameter quantum algebras*, J. Phys. A **24** (1991), L711-L718.

[19] Chaichian, M., Kulish, P. and Lukierski, J., *Supercovariant systems of q oscillators and q supersymmetric hamiltonians*, Phys. Lett. B **262** (1991), 43-48.

[20] Çelik, S. and Çelik, S., *Quantum properties of dual matrices in $GL_q(1|1)$*, Balkan Phys. Lett. **3(3)** (1995), 188-192.

ÖZGEÇMİŞ

1965 yılında Uşak-Eşme' de doğdu. İlk, Orta ve Lise tahsilini Denizli' de tamamladıktan sonra, 1982 de Atatürk Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' ne girdi ve buradan 1986 da üniversite birincisi olarak mezun oldu. 1987 de Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü' ne Araştırma görevlisi olarak girdi. Aynı üniversitede Yüksek Lisans' ını tamamladı. 1992 de Mimar Sinan Üniversitesi' nde Doktora öğrenimine başladı. Halen Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü' nde çalışmaktadır.