MİMAR SİNAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VARYASYONLAR HESABININ SİNGÜLERİTE PROBLEMLERİ

DOKTORA TEZİ

Araş. Gör. Sezai Makas

Danışmanı: Prof. Dr. Belgin MAZLUMOĞLU

Bölümü : MATEMATİK
Programı : MATEMATİK

HAZİRAN 1996

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın özünü oluşturan, varyasyonlar hesabının singülerite problemleri incelenmiş ve ayrıca ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerin bir çözümünün pozitif olabilmesi için koşullar araştırılmıştır.

Bilhasa, Mühendislik ve Uygulamalı Matematikte, geniş uygulama alanı bulunan, varyasyonlar hesabının diferansiyel denklemlere uygulanışı gösterilmiştir. Çalışmanın bu konuda araştırma yapmak isteyenlere yardımcı olacağını ümit ederim.

Bu çalışmalarım süresince bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, kendilerinden çok şey öğrendiğim ve öğreneceğim çok değerli hocalarım Sn. Prof. Dr. Belgin MAZLUMOĞLU ve Sn. Prof. Dr. Mehmet TAGİYEV HAMİDOĞLU'na samimi teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmalarım sırasında bilgilerinden yararlandığım değerli hocalarım Sn. Prof. Dr. Asaf GÜNHAN ve Prof. Dr Talat TUNCER'de çok teşekkür ederim.

İçindekiler

ÖZET

Bu çalışmada, klasik varyasyonlar hesabının dejenere olmuş problemleri ele alınmış ve bu problemlerin genel teorisini oluşturan gerek ve yeter şartlar araştırılmıştır. Klasik varyasyonlar hesabında dejenere olmuş problemler denince, geleneksel olarak, güçlendirilmiş Legendre şartının bozulması, dolaysıyla ortaya çıkan parça-parça sürekli türevlenebilir fonksiyonların, verilen varyasyon problemine minimum veya maksimum vermesi probleminin araştırılması anlaşılır.

Bu tezde Legendre şartının sonlu sayıda bozulduğu durumlar incelenmiş, singüler kuadratik fonksiyonelin pozitiflik koşulları ortaya çıkarılmıştır. Ayrıca, en büyük veya en küçük değeri, süreksiz fonksiyonlar üzerinde alan, varyasyon problemleri ilk defa ele alınmış, bu problemler için 1. mertebeden gerek şart teorisi kurulmuştur.

Varyasyon hesabında önemli rol oynayan, 2.mertebeden gerek ve yeter şartların önemli kısmı olan, eşlenik nokta kavramı özel durumlarda genelleştirilmiş ve singülar kuadratik fonksiyonelin pozitifliği problemine uygulanmıştır.

İkinci mertebeden Diferansiyel denklemlerin çözümünün pozitifliği daha önce Legendre ve Jacobi tarafından incelenmiş. Bu çalışmada ise başka bir metodla, ikinci mertebeden diferansiyel denklemin bir çözümünün pozitif olması için bir teorem ispat edilecektir.

Bu tezdeki teorik araştırmalar çok sayıda somut örneklerle açıklanmış ve uygulama nitelikli problemler çözülmüştür.

SUMMARY

In this study the dejenerate problems of classıcal variational calculus are handed. The necessary and sufficient conditions of the general theory of these problems are searched.

Traditionally when dejenerate problems of classical variational calculus are said it is understood that searching the piecewise continuous differentiable functions which arise by the deformation of Legendre conditions given maximum or minimum value to the given variational problems.

In this study the Legendre conditions which are deformed at finite number of times are searched; and also conditions of positivity of singular quadratic functionals are to come to light. On the other hand the variational problems which take the maximum value or minimum value over the space of discontinuous functions are handed. At the first time and also for this problem theory of necessary condition is established for one degree.

Second degree necessary and sufficient conditions play an important role in the theory of variational calculus. Conjugate point concept which is an important part of the second degree necessary and sufficient conditions is generalized for special conditions and also applied problem of positivity of singular quadratic functionals.

In this work the theoretic researches are explained by a number of concrete examples and some problems are solved for application.

BÖLÜM 1: GİRİŞ

Kılasik Varyasyon Hesabının temel problemi aşağıdaki gibi

$$J(y(x))=\int_a^b L(x,y(x),y'(x))dx \rightarrow \inf \qquad (1.1)$$

$$y(a)=y_0, \quad y(b)=y_1 \qquad (1.2)$$

şeklinde ifade edilmektedir.

Varyasyon hesabı ile uğraşılmaya ilk başlandığı sıralarda y=y(x) fonksiyonun $[a,b]$ aralığında en azından C^1 sınıfından olduğu kabul edilirdi ve ekstremumu aranırken bu fonksiyonla , hem de türevleri yakın olan fonksiyonlar karşılaştırılırdı. Bir başka deyişle, $\hat{y}(x)\in C^1[a,b]$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Eğer $y(a)=y(b)=0$ ve

$$\|y(x)\|_1=\max\left\{\max_{x\in[a,b]}|y(x)|,\ \max_{x\in[a,b]}|y'(x)|\right\}<\varepsilon$$

olduğunda

$$J(y(x)+\hat{y}(x))\geq J(\hat{y}(x))$$

oluyorsa $\hat{y}(x)$ fonksiyonu (1.1)-(1.2) problemine zayıf minimum veriyor denir [1-2].

$C^1[a,b]$ sınıfından olan $\hat{y}(x)$ fonksiyonunun (1.1)-(1.2) problemine zayıf minimum vermesi için ilk gerek şart Euler ve Lagrange tarafından verilmiştir ve

$$-\frac{d}{dx}L_{y'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))+L_y(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))=0 \qquad (1.3)$$

gibi ifade edilmektedir [1-3].

İntegral altındaki $L(t,y,y')$ fonksiyonu (aşağıda onu integrand diye adlandıracağız) belli özelliğe sahip olursa $\hat{y}(x)$ fonksiyonu hakkında çok önemli olan Hilbert toeremi geçerlidir.

TEOREM 1: Eğer $c\in(a,b)$ noktasının belli bir civarında

$$L_{y'y'}(c,y(c),y'(c))\neq 0$$

olursa $y=\hat{y}(x)$ fonksiyonunun x=c noktasının civarında 2. mertebeden sürekli türevi vardır. Bu teoremin ispatı [4], sayfa 30 da bulunabilir.

Varyasyon hesabında

$$L_{y'y'}\neq 0 \tag{1.4}$$

eşitsizliği Legendre şartı adı altında bilinmektedir [1-2].

Varyasyon hesabında zayıf minimumun yanısıra, güçlü minimum kavramı da önemli rol oynamaktadır. Varyasyon Hesabında güçlü minimum problemi ilk defa Weirstrass tarafından incelenmiştir [2],[4]. Güçlü minimumun tanımı aşağıdaki gibidir. Belli bir $\varepsilon>0$ için eğer

$$\|y(x)\|_0=\max_{x\in[a,b]}|y(x)|<\varepsilon \quad \text{ve} \quad y(a)=y(b)=0$$

şartlarını sağlayan herhangi $y(x)\in PC^1[a,b]$ fonksiyonu için

$$J(y(x)+\hat{y}(x))\geq J(y(x))$$

olursa $\hat{y}(x)$, (1.1)-(1.2) problemine güçlü minimum verir denir.

$y=\hat{y}(x)$ fonksiyonunun (1.1)-(1.2) problemine güçlü minimum vermesi için Weierstrass şartını sağlaması gerekir.

TEOREM 2 (Weierstrass): Eğer $y(x)\in PC^1[a,b]$ fonksiyonu (1.1)-(1.2) fonksiyonuna güçlü minimum verirse ,

$\forall\dot{x}\in(a,b)$ *ve* $\forall p\in R$ için

$$E(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x),P)=L(x,\hat{y}(x),P)-L(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))-$$

$$-(P,\hat{y}'(x))L_{y'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))\geq 0 \tag{1.5}$$

olmalıdır [5].

Euler-Lagrange denklemi , Weierstrass ve Legendre şartları tabiatı ile yerel şartlardır.

Varyasyon hesabında bu yerel şartlarla yanısıra global şartlar da mevcuttur. Bu şartlar ilk defa Jacobi tarafından verilmiştir ve aşağıdaki gibi ifade edilmektedir [5-7].

(1.1)-(1.2) probleminin 2. varyasyası

$$J(y(x)) = \int_a^b \left[L_{y'y'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))y^2(x) + (\hat{L}_{yy}(x) - \frac{d}{dx}\hat{L}_{yy'}(x))y'^2(x) \right] dx \quad (1.6)$$

şeklinde ifade edilir.

(1.6) kuadratik fonksiyonelinin Euler denklemi olan

$$-\frac{d}{dx}(\hat{L}_{y'y'}(x)y'(x)) + (\hat{L}_{yy}(x) - \frac{d}{dx}\hat{L}_{yy'}(x))y(x) = 0 \quad (1.7)$$

denklemine Jacobi denklemi denir [1],[6].

Her $x \in [a,b]$, $\hat{L}_{y'y'}(x) \neq 0$ olduğunu kabul ederek (1.7) denkleminin y(a)=0, $y'(a) = 1$ başlangıç şartını sağlayan çözümünü $\bar{y}(x)$ile gösterelim. $\bar{y}(c) = 0$, $c \neq a$ noktasına x = c noktası ile ***eşlenik nokta*** denir.

$y = \hat{y}(x)$ fonksiyonu (1.1)-(1.2) problemine zayıf minimum verirse, (a,b) aralığında x = c noktası ile eşlenik nokta yoktur.

Varyasyon hesabında bir problem araştırılırken geleneksel olarak $\hat{L}_{y'y'}(x) \neq 0$ şartı kabul ediliyor ve sonrada Jacobi denkleminin incelenmesine geçiliyor. $\hat{L}_{y'y'}(x) \neq 0$ şartı (1.7) diferansiyel denkleminin varlık ve teklik teoremlerine uygulaması olarak sağlanıyor. Fakat $\hat{L}_{y'y'}(x) \neq 0$ şartının dejenere olduğu problemler de karşımıza sık sık çıkmaktadır. Hilbert teoremine göre $\hat{L}_{y'y'}(x) \neq 0$ şartı bozulduğunda $\hat{y}(x) \in C^2$ olmasına gerek yoktur. Böyle problemler Kuantum mekaniğinde, Astronomide, Uzay Teknolojisinde sık sık karşımıza çıktığı için onların da incelenmesi güncel problem olarak ilgi çekmektedir.

Biz aşağıda bu problemleri dejenere olmuş problem diye adlandıracağız. Bu problemler ilk defa M.Morse [8], Leighton [9], Hestenes [2], M.Tagiyev [10], gibi matematikçiler tarafından incelenmiştir.

M. Tagiyev $\hat{L}_{y'y'}(x) \neq 0$ şartının belli parçalarda dejenere olduğu durumları incelemiş ve bu problemlerin teorisini kurmuştur [10].

Bu tezde, yukarıda adı geçen matematikçilerin araştırmalarının belli bir ölçüde devamı olmakla birlikte, birkaç yeni problem de ele alınmıştır.

Çalışma, aşağıdaki gibi düzenlenmiştir :

1. bölüm'de yapılacak olan çalışma hakında bilgi verilmektedir.

2. bölüm'de bir takım ön bilgiler verilmiş ve Weierestrass -Erdmann şartı yeni bir şekilde ispatlanmıştır.

3. bölüm'de (1.1)-(1.2) problemi ilk defa olarak süreksiz fonksiyonlar sınıfında tanımlanmış ve bu yeni tanımlanmış fonksiyonelin 1. varyasyonu hesaplanmıştır. Süreksiz $y = \hat{y}(x)$ fonksiyonunun minimum vermesi için 1. mertebeden gerek şart alınmıştır. Bu şart klasik Euler - Lagrange şartının bir genellemesi gibi düşünülebilir. Üçüncü bölümün sonunda pratik önemi olan bir örnek çözülmüş ve sonuç diğer bir çözümle kıyaslanmıştır.

4. bölümde Singular Kuadratik fonksiyonellerin pozitifliği incelenmiştir. Eşlenik noktanın olmaması durumunda klasik teorinin benzeri olan bir teorem ispatlanmış ve teorem birkaç klasik örnek üzerinde uygulanmıştır.

5. bölümde dejenere olmuş kuadratik fonksiyonelin minimum değerini hesaplamaya olanak sağlayan formül verilmiştir. Bu formülün önemi problemi çözmeden, yani ekstramali açık şekilde bulmadan, minimum değeri direkt bulabilmesindedir. Bölümün sonunda teoremi yansıtan örnekler verilmiştir.

6. bölümde 2. mertebeden diferansiyel denkemlerin çözümlerinin pozitifliği incelenmiş ve bir teorem verilmiştir. Varyasyon Hesabında 2. mertebeden gerek ve yeter şartlar açısından bu türlü teoremlerin büyük önemi vardır.

BÖLÜM 2: VARYASYONLAR HESABI VE DİFERANSİYEL DENKLEMLERDEN ÖN BİLGİLER

Bu bölümde varyasyon hesabından bazı ön bilgiler verilecektir. Bu bilgiler ilerideki bölümlerde kullanılacaktır. Bu bilgiler sırasıyla Euler Denklemi, Weierstrass-Erdmann şartları, Weierstrass'ın E fonksiyonu, Zayıf minimum, Güçlü Minimum ve Mutlak Minimumdur. Daha sonra diferansiyel denklemlerden bazi ön bilgiler verilecektir. Bu bilgiler de kendine ek (self-adjoint), Bessel Denklemi, Legendre Denklemi ve Laguerre Denklemidir.

2.1. VARYASYON HESABINDAN ÖN BİLGİLER

Burada varyasyon hesabın temel problemi için Euler denkleminin ve Weierstrass-Erdman şartlarının farklı bir ispatı verilecektir. Diğer ispatlar [1],[5] nolu kaynaklarda görülebilir.

Varyasyon hesabın

$$J(y)=\int_a^b L(x,y(x),y'(x))dx \tag{2.1.1}$$

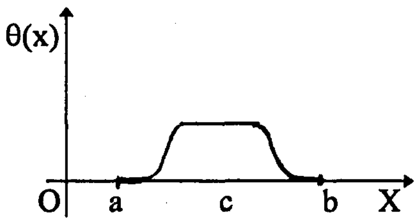
$$y(a)=y_0\,,\quad y(b)=y_1 \tag{2.1.2}$$

temel problemi ele alınacaktır. $y=\hat{y}(x)$ fonksiyonu parça-parça sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun, yani $y(x)\in PC^1[a,b]$ dir. $y=\hat{y}(x)$ fonksiyonunun x=c noktasında türevinin sürekli olmadığını, fakat $y=\hat{y}'(c-0)$ ve $y=\hat{y}'(c+0)$ sağ ve sol sonlu türevinin olduğu varsayılsın. J(y) fonksiyonelinin $y=\hat{y}(x)$ üzerindeki değeri olarak

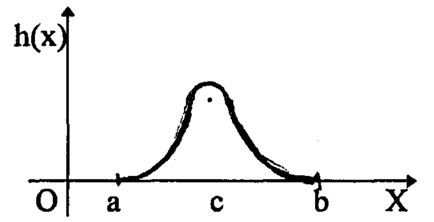
$$J(\hat{y})=\int_a^{c-0} L(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))dx+\int_{c+0}^b L(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))dx \tag{2.1.3}$$

toplamı kabul olarak edilsin.

Şimdi de $y=\hat{y}(x)$ fonksiyonu üzerinde J(y) fonksiyonelinin varyasyonu hesaplanacaktır. $y=\hat{y}(x)$ fonksiyonunun varyasyonunu yazmak için hem fonksiyonun değerini hemde kırılma noktası olan c noktasının küçük değişimleri ele alınacaktır. Bunun için önce $\theta(x)$ ve $h(x)$ gibi iki özel varyasyon tanımlansın, $\forall\varepsilon > 0$ sayıları ele alınsın, c noktasının yakın civarında $\theta(x)$=sabit olan ve türevlenebilir, a ve b noktalarının civarında ise sıfır olan $\theta(x)$ fonksiyonu ele alınsın.



Şekil 1a



Şekil 1b

$\theta(x)$ fonksiyonunun grafiği şekil1a'da olduğu gibidir. $h(x) \in C^1[a,b]$, a ve b noktalarının civarında ise sıfır olan, $h(x)$ fonksiyonun grafiği Şekil 1b'deki gibidir. Şimdi de α sayılarını $|\alpha.\theta(x)| < \varepsilon$ olacak biçimde kabul ederek birbirlerine α parametresi ile bağlı

$$y(x,\alpha) = \hat{y}(x - \alpha\,\theta(x)) + \alpha\,h(x) \tag{2.1.4}$$

$y(x,\alpha)$ fonksiyonlar ailesi ele alınsın. $h(x) \in C^1[a,b]$ olduğu için $y(x,\alpha)$ ailesinin fonksiyonel özelliği $\hat{y}(x)$ fonksiyonları gibi dir. Yani her $y(x,\alpha)$ fonksiyonuna bu fonksiyonun türevinin sürekli olmadığı bir $\xi(\alpha)$ noktası karşılık gelir.

$\xi(\alpha)$ noktasının

$$\xi(\alpha) - \alpha\theta(\xi(\alpha)) = c \tag{2.1.5}$$

şartını sağlaması gerektiği ise açıktır. Buradan $\theta(x)$ fonksiyonun c'nin küçük bir civarında sabit olduğu gözönünde bulundurulursa (2.1.5) ifadesi

$$\xi(\alpha) = c + \alpha\theta(c) \tag{2.1.6}$$

şeklinde yazılır.

Yukarıdaki $|\alpha\,\theta(x)| < \varepsilon$ şartını sağlayan α'lar için $\varphi(\alpha) = J(y(x,\alpha))$ fonksiyonu tanımlansın ve bu fonksiyonun $\alpha = 0$ noktasındaki türevi hesaplanacaktır. Burada $\varphi'(0)$ ifadesi $J(y(x,\alpha))$ fonksiyonelin $\hat{y}(x)$ fonksiyonu üzerinde 1. varyasyonu olacaktır. Buradan da (2.1.3) e göre $\varphi(\alpha)$ fonksiyoneli

$$\varphi(\alpha)=J(y(x,\alpha))=\int_a^{\xi(\alpha)_-} L(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha))dx+\int_{\xi(\alpha)_+}^{b} L(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha))dx \quad (2.1.7)$$

şeklinde yazılır. (2.1.7) nin sağ tarafında ki integraller sırasıyla $\varphi_1(\alpha)$ ve $\varphi_2(\alpha)$ ile gösterilsin, buradan

$$\varphi_1(\alpha)=\int_a^{\xi(\alpha)_-} L(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha))dx \qquad (2.1.8)$$

$$\varphi_2(\alpha)=\int_{\xi(\alpha)_+}^{b} L(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha))dx \qquad (2.1.9)$$

olur. (2.1.7) deki $\varphi(\alpha)$ nın türevi, toplamın türevi

$$\varphi'(\alpha)=\varphi_1'(\alpha)+\varphi_2'(\alpha) \qquad (2.1.10)$$

şeklinde yazılır. Burada (2.1.8) ve (2.1.9)'un türevleri ayrı ayrı alınır (2.1.10) da yerine yazılırsa $\varphi(\alpha)$ nın türevi hesap edilmiş olur. Bunun için önce (2.1.8)'in α'ya göre türevi

$$\varphi_1'(\alpha)=\int_a^{\xi(\alpha)_-}\left[L_y(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha))\frac{\partial y}{\partial\alpha}+L_{y'}(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha))\frac{\partial y'}{\partial\alpha}\right]dx+$$

$$+L[\xi(\alpha),y(\xi(\alpha),\alpha),y'(\xi(\alpha),\alpha)]\frac{d\xi}{d\alpha}=$$

$$=\int_a^{\xi(\alpha)_-}\left[L_y(x,\alpha)-\frac{d}{dx}L_{y'}(x,\alpha)\right]\frac{\partial y}{\partial\alpha}dx+L_{y'}(x,y(x,\alpha),y'(x,\alpha))\frac{\partial y}{\partial\alpha}\bigg|_a^{\xi(\alpha)}+$$

$$+L[\xi(\alpha),y(\xi(\alpha),\alpha),y'(\xi(\alpha),\alpha)]\frac{d\xi}{d\alpha}. \qquad (2.1.11)$$

şeklindedir.

Burada (2.1.11) ifadesinde $L_y(x,\alpha) = L_y(x,(x,\alpha),y'(x,\alpha))$ ... vb.ve (2.1.4) deki

$$y(x,\alpha) = \hat{y}(x - \alpha\,\theta(x)) + \alpha\,h(x)$$

ifadesinin α‘ya göre türevi alınarak

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \hat{y}'[x - \alpha\,\theta(x)][-\theta(x)] + \alpha h(x), \qquad (2.1.12)$$

ve (2.1.6) daki $\xi(\alpha) = c + \alpha\theta(c)$ ifadeden de benzer şekilde α’ya göre türev alınarak

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = \theta(c) \qquad (7.13)$$

ifadeleri elde edilir. Ayrıca (2.1.4) ifadesinde $\xi(\alpha)$ yerine yazılırsa

$$\mathrm{y}[\xi(\alpha),\alpha] = \hat{\mathrm{y}}[\xi(\alpha) - \alpha\theta(\mathrm{x})] + \alpha\,\mathrm{h}[\xi(\alpha)] = \hat{y}[c + \alpha.\theta(c) - \alpha.\theta(x)] + \alpha.h[\xi(\alpha)] \qquad (2.1.14)$$

elde edilir ve (2.1.14) de α’ya göre türev alınarak

$$\frac{\partial y[\xi(\alpha),\alpha]}{\partial \alpha} = \hat{y}[\xi(\alpha) - \alpha\theta(x)] + h[\xi(\alpha)] =$$

$$= \hat{y}'[c + \alpha\theta(c) - \alpha\theta(x)][-\theta(x)] + h[c + \alpha\theta(c)] \qquad (2.1.15)$$

olduğu görülür. α = 0 olduğunda

$$\left.\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=0} = \hat{y}'[c-0][-\theta(c)] + h(c), \qquad \left.y(\xi(\alpha),\alpha)\right|_{\alpha=0} = \hat{y}(c)$$

dir. L_y ve $L_{y'}$ ifadeleri α=0 için

$$L_{y'}[\xi(\alpha), y(\xi(\alpha),\alpha), y'(\xi(\alpha),\alpha)]\Big|_{\alpha=0} = L_{y'}[c-0, \hat{y}(c-0), \hat{y}'(c-0)] = \hat{L}_{y'}(c-0)$$

$$L_{y}[\xi(\alpha), y(\xi(\alpha),\alpha), y'(\xi(\alpha),\alpha)]\Big|_{\alpha=0} = L_{y}[c-0, \hat{y}(c-0), \hat{y}'(c-0)] = \hat{L}_{y}(c-0)$$

dir. Böylece elde edilen ifadeler (2.1.11) de yerine yazılırsa

$$\varphi_1'(0) = \int_a^{c-0}\left[\hat{L}_y(x) - \frac{d}{dx}L_{y'}(x)\right]dx + \hat{L}_{y'}(c-0)[\hat{y}'(c-0)(-\theta(c)) + h(c)] + \theta(c)\hat{L}(c-0) =$$

$$= \int_a^{c-0}\left[\hat{L}_y(x) - \frac{d}{dx}L_{y'}(x)\right]dx + \left[\hat{L}(c-0) - \hat{y}'(c-0)\hat{L}_{y'}(c-0)\right]\theta(c) + \hat{L}_{y'}(c-0)h(c) \qquad (2.1.16)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\varphi_2'(0)$da

$$\varphi_2'(0) = \int_{c+0}^{b}\left[\hat{L}_y(x) - \frac{d}{dx}L_{y'}(x)\right]dx - \hat{L}_{y'}(c+0)h(c) -$$

$$-\left[\hat{L}(c+0) - \hat{y}'(c+0)\hat{L}_{y'}(c+0)\right]\theta(c) \qquad (2.1.17)$$

şeklinde elde edilir. (2.1.16), (2.1.17) ifadelerinde $\hat{L}(c+0) = L[c+0, \hat{y}(c+0), \hat{y}'(c+0)]$ yazılarak elde edilen ifadeler (2.1.10) yerine yazılırsa sonuçda

$$\varphi'(0) = \int_a^{c-0}\left[\hat{L}_y(x) - \frac{d}{dx}L_{y'}(x)\right]dx + \int_{c+0}^{b}\left[\hat{L}_y(x) - \frac{d}{dx}L_{y'}(x)\right]dx +$$

$$+\left[-\hat{L}(x) + \hat{y}'(x)\hat{L}_{y'}(x)\right]\theta(x)\Big|_{c-0}^{c+0} - \hat{L}_{y'}(x)h(x)\Big|_{c-0}^{c+0} .$$

ifadesi elde edilir.

Eğer $y = \hat{y}(x)$fonksiyonu varyasyon probleminin çözümü ise, h(x) ve $\theta(x)$ fonksiyonları keyfi oldukları için

1) $\hat{L}_{y(x)} - \frac{d}{dt} L_{y'}(x) = 0, \quad x \neq c$.

2) $L_{y'}[c-0, \hat{y}(c-0), \hat{y}'(c-0)] = L_{y'}[c+0, \hat{y}(c+0), \hat{y}'(c+0)]$.

3) $-\hat{L}[c-0, \hat{y}(c-0), \hat{y}'(c-0)] + y'(c-0)\hat{L}_{y'}(c-0) =$

$= L[c+0, \hat{y}(c+0), \hat{y}'(c+0)] + \hat{y}'(c+0)\hat{L}_{y'}(c+0)$.

bağıntıları elde edilir. Burada 1) şartına Euler denklemi, 2) ve 3) şartlarına ise Weierstrass-Erdmann şartları denir.

2.2. WEİERSTRASS'IN E FONKSİYONU

$S \subset R^n$ kümesi dışbükey bir küme (konveks küme) olsun, yani $\forall x, y \in S$ için $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in S. \quad f: S \to R \tag{2.2.1}$$

ise S'de tanımlanmış gerçel değerli bir fonksiyon olsun. O zaman Aşağıdaki fonksiyonu $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere

$$\varphi(\lambda) = (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y) - f((1-\lambda)x + \lambda y), \quad x, y \in S \tag{2.2.2}$$

olarak oluşturulur.

Tanım 1: Eğer $\forall \lambda,\ 0 \leq \lambda \leq 1$ için $\varphi(\lambda) \geq 0$ ise f fonksiyonuna S de konveks fonksiyon denir. Geometrik olarak bu tanım aşağıdaki şekilde yazılır.

Herhangi bir $f: S \to R$ fonksiyonu ile

$$epi\, f = \{(\alpha, x) / \alpha \geq f(x),\ x \in S\} \subset R \times R^n \tag{2.2.3}$$

kümesini birleştirelim ve bu kümeye f fonksiyonunun grafik üstü kümesi diyelim, o zaman bir $f: S \to R$ fonksiyonunun konveksliği $epi\, f \subset R \times R^n$ kümesinin konveksliği ile denktir.

Aşağıdaki önermede fonksiyonun konveks olması için matematik de çok az rastlanan basit bir kriter verilmektedir.

Önerme 1: $f \in C^1(R^n)$ fonksiyonunun, $S \subset R^n$ konveks kümesinde konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

$$E(x,y) = f(y) - f(x) - \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)f_{x_i}(x) \qquad (2.2.4)$$

fonksiyonunun $\forall x, y \in S$ için negatif olmamasıdır. yani

$$E(x,y) \geq 0 \qquad (2.2.5)$$

olmasıdır. Böylece (2.2.4) ifadesinde tanımlanan $E(x,y): R^n \times R^n \to R$ fonksiyonuna Weierstrass'ın E-fonksiyonu denir.

İspat: f fonksiyonu S'de konveks bir fonksiyon olsun, o zaman (2.2.2) den λ=0 için

$$\varphi(\lambda) = (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) - f((1-\lambda)x + \lambda y) \geq 0$$

$$\varphi(0) = f(x) - f(x) = 0 \qquad (2.2.6)$$

dir. Dolayısıyla $\varphi(\lambda) \geq \varphi(0)$ dir. Yani λ=0 noktası $\varphi:[0,1] \to R$ fonksiyonunun minimum noktası olur. O zaman

$$\varphi'(0) \geq 0 \qquad (2.27)$$

olmalıdır. Burada (2.2.5) ve (2.2.7) den

$$\varphi'(0) = E(x,y) \geq 0 \qquad (2.2.8)$$

çıkar. Burdan (2.2.2) ve (2.2.4) den $\varphi(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki biçimde yazılabili

$$\varphi(\lambda) = (1-\lambda)E[x + \lambda(y-x), x] + \lambda E[x + \lambda(y-x), y] \qquad (2.2.9)$$

olur. (2.2.8) ve (2.2.9) özdeşliklerinden $E(x,y) \geq 0$ olursa, $\varphi(\lambda) \geq 0$ olacağı ve dolaysıyla f'in konveks olacağı açıktır.

Sonuç olarak $f \in C^1(R^n)$ olsun ve

$$H(x,y)=\sum_{i=1}^{n} y_i f_{x_i}(x)-f(y) \qquad (2.2.10)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. O zaman $f:S \to R$ konveks olması için gerek ve yeter şart (2.2.10) dan

$$H(x,y) \le H(x,x), \ \forall x,y \in S \qquad (2.2.11)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Gerçekten, (2.2.4) ve (2.2.10) dan

$$E(x,y)=H(x,x)-H(x,y) \qquad (2.2.12)$$

biçiminde yazılırsa sonucun doğru olacağı açıktır.

1.3. VARYASYON HESABINDA ZAYIF, GÜÇLÜ VE MUTLAK MİNİMUM

Varyasyon hesabının temel problemini

$$J(y)=\int_a^b [L(x,y(x),y'(x)]dx \to \inf \qquad (1.3.1)$$

$$y(a)=y_0\,, \ y(b)=y_1 \qquad (1.3.2)$$

ele alarak (1.3.1) ve (1.3.2) probleminde, y=y(x) fonksiyonlarının [a,b] aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar olduğu kabul edilir. Yani $y(x) =\in AC[a,b]$ dir. L(x,y,z) fonksiyonu üzerinde ilave şartlar konmazsa (1.3.1) ve (1.3.2) probleminin, genelde çözümünün varlığını söylemek imkansızdır. Aşağıdaki örnekte ekstremal, yani Euler denklemini sağlayan bir fonksiyon olmasına rağmen, bu fonksiyon problemin güçlü Minimumu değildir [2],[4],[8].

Örnek1: $J(y)=\int_0^1 y'^3 dx$, $y(0)=0$, $y(1)=1$ bu fonksiyonelin Euler denklemi

$\frac{d}{dx}(3y'^2)=0 \Rightarrow y'=$sabit dir. Sınır şartlarını da sağlayan ekstremal çözüm $\hat{y}(x)=x$

dir. $\hat{y}(x) = x$ fonksiyonu bu probleme zayıf Minimum verir. Gerçekten, $h(0) = h(1) = 0$,$h(x) \in C^1[0,1]$ olsun. Bu taktirde fonksiyonel

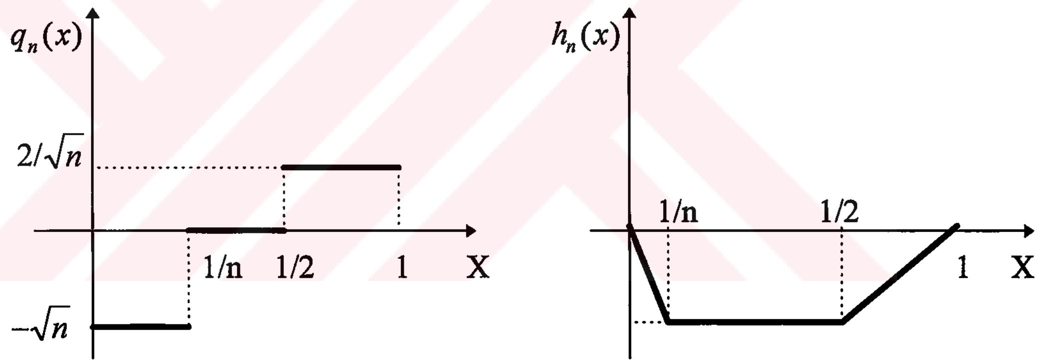
$$J(\hat{y}(x) + h(x)) = \int_0^1 (1 + h')^3 dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 h'(x)dx + \int_0^1 h'^2 (3 + h'(x))dx =$$

$$= J(\hat{y}(x)) + \int_0^1 h'^2 (3 + h'(x))dx. \qquad (2.3.3)$$

dir. Eğer $\|h(x)\|_1 < 3$ ise $h'(x) + 3 > 0$ ve

$$J(\hat{y}(x) + h(x)) > J(\hat{y}(x))$$

alınır, fakat $\hat{y}(x) = x$ fonksiyonu problemin güçlü minimumu değil. Gerçekten, bunu göstermek için grafikleri aşağıdaki $q_n(x)$ ve h(x) şeklinde olan iki fonksiyon seçelim:



Şekil 2a Şekil 2b

$$q_n(x) = \begin{cases} -\sqrt{n} & , x \in [0, 1/n) \\ 0 & , x \in [1/n, 1/2] \\ \dfrac{2}{\sqrt{n}} & , x \in (1/2, 1] \end{cases} \quad , \qquad h_n(x) = \int_0^x q_n(t)dt \, , \, n \geq 2$$

şeklinde seçilirse, $h_n(0) = h_n(1) = 0$ ve $\|h_n(.)\|_0 \to 0$, $n \to \infty$ olur. Burada $q_n(x)$ fonksiyonu (2.3.3) de yerine konursa

$$J(q_n(x)) = 1+3\int_0^1 q_n^2(x)dx + \int_0^1 q_n^3(x)dx = 1+\int_0^{1/n}(3n+n^{3/2})dx + \int_{1/2}^1 (\frac{12}{n}+\frac{8}{n\sqrt{n}})dx =$$

$$= -\sqrt{n} + O(1) \to -\infty \ , (n \to \infty)$$

elde edilir. Bu son ifade $\min J(y) = -\infty$ olduğunu gösterir.

Bu problemde güçlü minimum olmaması integral altındaki

$$L(x,y,z) = z^3$$

fonksiyonunun konveks olmamasına bağlıdır.

Varyasyon hesabında mutlak minimum'un varlığı problemi ilk defa L.Tonelli tarafından çözülmüştür. Aşağıda bu teorem ifade edilmiştir.

Teorem 1 (L.Tonelli): Yukarıdaki (2.3.1) ve (2.3.2) probleminde aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

1) $\exists \alpha > 0, \exists p > 1, \ \beta \in R$ olmak üzere,

$$L(x,y,z) \geq \alpha |z|^p + \beta \ , \quad \forall (x,y) \in G.$$

2) $\forall (x,y) \in G$ için $z \to L_z(x,y,z)$ fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında artan fonksiyondur.

3) Burada 1) ve 2) şartları altında (1) ve (2) problemine mutlak minimum veren bir $\hat{y}(x) = x$ fonksiyonu vardır [3].

2.4 SİNGÜLER NOKTASI OLAN DİFERANSİYEL DENKLEMLER HAKINDA ÖN BİLGİLER

Bu kısım da kendine ek (self-adjoint) operatör denklemler hakkında 2 teorem ve daha sonrada Bessel, Legendre ve Laguerre denklemleri hakkında kısa bilgiler verilecektir.

Teorem 2: $a \le t \le b$ aralığında $a_0(t) \ne 0$ olmak üzere

$$a_0(t)y'' + a_1(t)y' + a_2(t)y = 0$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemi a_0, a_1, a_2 katsatyıları [a,b] aralığında sürekli olsun. Bu takdirde yukarıdaki denklemden

$$P(t) = \exp\left[\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right], \qquad Q(t) = \frac{a_2(t)}{a_0(t)}\exp\left[\int \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt\right]$$

olmak üzere ,

$$\frac{d}{dt}[P(t)y'] + Q(t)y = 0$$

şeklinde kendine ek (self adjoint) operatör denklemi elde edilir.

Teorem 3 (Abel formülü): Eğer $a \le t \le b$ aralığında

$$\frac{d}{dt}[P(t)y'] + Q(t)y = 0$$

diferansiyel denkleminin herhangi iki çözümü f ve g ise , [a,b] aralığında $\forall$t için

$$P(t)[f(t)g'(t) - f'(t)g(t)] = c$$

dir. Burada c bir sabittir. Bu teorem 2 ve 3 nin ispatı [12] de bulunabilir.

2.4.1. Bessel Denklemi (1784-1846) : α bir parametre olmak üzere

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

şeklinde ki değişken katsayılı ikinci mertebeden diferansiyel denkleme α indisli Bessel denklemi denir [11],[12]. x=0 noktası bu denklemin düzgün tekil noktasıdır. Bu halde denklemin çözümü Frebenius yöntemine göre

$$J_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!(\alpha+k)!}(\frac{x}{2})^{\alpha+2}$$

şeklindedir. Bu fonksiyona α indisli birinci tür Bessel fonksiyonu denir ve $J_\alpha(x)$ ile gösterilir. $J_\alpha(x)$ nın belirttiği seri x'in her değeri için mutlak yakınsaktır.

α'nın tam sayı olmaması durumunda Bessel fonksiyonunun $J_\alpha(x)$ ve $J_{-\alpha}(x)$ şeklin de iki çözümü vardır, ve bu çözümler birbirlerinden bağımsızdır. O zaman A ve B sabitler olmak üzere Bessel denkleminin çözümü

$$Y(x) = A\,J_\alpha(x) + B\,J_{-\alpha}(x)$$

şeklindedir.

α'nın tam sayı olması durumunda $J_\alpha(x)$ ve $J_{-\alpha}(x)$ çözümleri birbirlerinden bağımsız değillerdir

α=0 olması durumunda ise $J_\alpha(x)$ ve $J_{-\alpha}(x)$ çözümleri özdeştir.

n pozitif bir tam sayı olmak üzere $\pm\frac{(n+1)}{2}$ indisli Bessel fonksiyonlarının genel şekli için

$$J_\alpha(x) = (\frac{\pi}{2x})^{\frac{1}{2}} J_{\frac{(n+1)}{2}}(x) = (-1)^\alpha x^\alpha \frac{d^\alpha}{(xdx)^\alpha}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$J_\alpha(x) = (\frac{\pi}{2x})^{\frac{1}{2}} J_{\frac{(n+1)}{2}}(x) = (-1)^{n+1} x^\alpha \frac{d^\alpha}{(xdx)^\alpha}\left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

formülleri elde edilir. Bu formüllerden α=1/2 , α=-1/2 ve α=3/2 için

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\ , \quad J_{-\frac{1}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}\ , J_{\frac{3}{2}}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\sin x}{x}-\cos x\right)$$

ifadeleri elde edilir [11].

2.4.2. LEGENDRE DENKLEMİ (1752-1833) : α bir parametre olmak üzere

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$$

şeklindeki değişken katsayılı ikinci mertebeden diferansiyel denkleme α indisli Legendre denklemi denir [12]. Legendre denkleminin α=2 için bir polinom çözümü

$$P_\alpha=\frac{1.3}{2}u_2(x)=\frac{3x^2-1}{2},$$

şeklindedir[12].

2.4.3. LAGUERRE DENKLEMİ (1834-1886) : α bir parametre olmak üzere

$$xy''+(1-x)y'+\alpha y=0 \qquad (2.4.3.1)$$

şeklinde ki değişken katsayılı ikinci mertebeden diferansiyel denkleme α indisli Laguerre denklemi denir [12].

(2.4.3.1) denklemi

$$L_\alpha(x)=e^x\frac{d^\alpha}{dx^\alpha}\left(x^\alpha e^{-x}\right)$$

ile gösterilen bir $L_\alpha(x)$ polinom çözüme sahiptir. α=2 için $L_\alpha(x)$ polinomu

$$L_2(x)=-x+1$$

dir.

BÖLÜM 3: İNTEGRAL FONKSİYONELİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA TANIMLANMASI

Bu bölümde, integral fonksiyonelin süreksiz fonksiyonlar sınıfında tanımlanacak ve bir kaç örnek üzerinde açıklamalar yapılacaktır. Daha sonra da J_d fonksiyonelinin 1.varyasyonu hesaplanacak ve ekstremum için gerekli koşullar bulunacaktır.

3.1 İNTEGRAL FONKSİYONELİN SÜREKSİZ FONKSİYONLAR SINIFINDA TANIMLANMASI

Varyasyon hesabın

$$J(y(x)) = \int_a^b L(x,y,y')dx \to \inf \tag{3.1.1}$$

$$x(a)=A, \quad x(b)=B \tag{3.1.2}$$

problemini ele alalım. Varyasyon hesabında geleneksel olarak $y = y(x)$ fonksiyonunun $y'(x)$ türevi [a,b] aralığında sürekli olarak kabul edilir. Fakat bu kabullenme problemin mahiyyetine (özüne) bağlı olmayabilir ve (3.1.1) integrali en küçük değerini C^1 sınıfından olmayan fonksiyonlardan alabilir[13-15].

Örnek 1: (Hilbert)

$$J(y(x)) = \int_0^1 x^{2/3} y'^2 dx \to inf,$$

$$y(0)=0, \quad y(1)=1.$$

problemini düşünelim. Bu fonksiyonel için Euler denkleminin 1.integrali

$$x^{2/3} y' = \text{sabit}$$

şeklindedir. Bu denklemden sınır şartlarını da sağlayan $\hat{y}(x) = x^{2/3}$ çözümü bulunur. $\hat{y}(x) = x^{2/3}$ fonksiyonu $C^1[0,1]$ sınıfından değildir ve J(x) fonksiyoneline minimum değer verir. Gerçekten, eğer *y(x)*, $AC[0,1]$ den herhangi fonksiyon ve *y(0)=y(1)=0* ise $\hat{y}(x)$'in varyasyonu

$$J(\hat{y}(x)+y(x))=\int_0^1 x^{2/3}\left[\hat{y}'^2(x)+2\hat{y}'(x)y(x)+y^2(x)\right]dx=$$

$$=J(\hat{y}(x))+\frac{2}{3}\int_0^1 y'(x)dx+J(y(x))=$$

$$=J(\hat{y}(x))+\frac{2}{3}y(x)\Big|_0^1+J(y(x))\geq J(\hat{y}(x))$$

şeklinde yazılır.

Örnek 2: (Minimal dönel yüzey problemi) 0X ekseninin üst bölgesinde $A(a,a_1)$ ve $B(b,b_1)$ noktalarının verildiğini düşünelim. 0X ekseni etrafında dönerken en küçük alana sahip bir yüzey oluşturan ve $A(a,a_1)$ $B(b,b_1)$ noktalarını birleştiren eğrinin bulunması problemi aşağıdaki şekilde verilir.

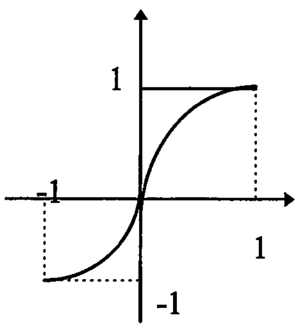
$$J(y(x))=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx, \quad y(a)=a_1\ ,y(b)=b_1\ .$$

Bu problemin C^1 sınıfından olan çözümünün yanısıra, $a_1+b_1>\ell$, (ℓ - A ve B noktaları arasındaki mesafedir) olduğunda AabB kırık çizgisi gibi C^1'den olmayan ve probleme minimum veren bir çözümü de vardır.

Örnek 3: (Weierstrass)

$$J(y)=\int_{-1}^1 x^2y'^2dx\rightarrow \inf,$$

$$y(-1)=-1\ ,\ y(1)=1$$



Şekil 3

problemini göz önüne alalım. J(y) fonksiyonelinin en büyük alt sınırı (infimumu) sıfırdır. Gerçekten,

$$y_n(x) = \frac{\arctan nx}{\arctan n}$$

dizisini ele alırsak

$$J(y_n(x)) = \frac{\frac{1}{n^2}}{\arctan^2 n} \int_{-1}^{1} \frac{x^2 dx}{(x^2 + \frac{1}{n^2})^2} < \frac{1}{n^2 \arctan^2 n} < \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{2}{n \arctan n} \to 0$$

olduğunu görürüz. Böylece inf J(y)=0 olur. Sıfır değerini J(y) fonksiyoneli

$$y(x) = \begin{cases} -1 & -1 \le x \le 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

fonksiyonu üzerinde alabilir. Bu fonksiyon süreksiz bir fonksiyondur ve $y(0^+) - y(0^-) = 2$ dir. Yukarıdaki örnekler klasik varyasyon hesabındaki $y(x) \in C^1[a,b]$ şartının bir çok problemlerde doğal olmadığını göstermektedir ve varyasyon hesabının temel probleminde bir çok değişiklikler yapma gereğini ortaya koyar. Bu bölümde varyasyon hesabının temel problemi süreksiz y(x) fonksiyonlar sınıfında ele alındı [13-14]. Bunun için önce

$$J(y(x)) = \int_a^b L(x,y,y')dx$$

integrali y(x) fonksiyonunun süreksiz olduğu durumda tanımlansın.

Yukarıda $L(x,y,y')$ integrantının y' 'ne göre belli bir artışı olduğu zaman Tonelli'ye ait varlık teoremini hatırlattık. Eğer bir varyasyon probleminin çözümü süreksiz fonksiyon ise Tonelli teoreminin şartlarından en az birinin sağlanmadığı söz konusu olabilir dolayısıyla $L(x,y,y')$ integrantının y''ne göre artışının zayıf olduğu durumları ele alınmalıdır. Aşağıdaki yazılan şartlar bu düşünceden ortaya çıkmıştır.

A) $L(x,y,z)$ fonksiyonu, değişkenleri C^4 sınıfından olan bir fonksiyon ve

$$\lim_{z\to\infty} \frac{L(x,y,z)}{z} = m(x,y) \qquad (3.1.3)$$

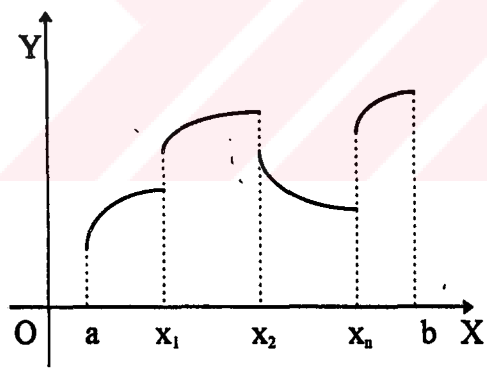
dir. Burada ise $\dfrac{L(x,y,z)}{z}$ fonksiyonunun m(x,y) fonksiyonuna (x,y)' ye göre düzgün yakınsadığı varsayılır. m(x,y) fonksiyonu düzgün yakınsak bir fonksiyonun limiti olduğu için sürekli bir fonksiyon olacaktır.

Şimdi [a,b] aralığında tanımlanmış, parça-parça sürekli y(x) fonksiyonu ele alınacaktır, yani y(x)$\in$PC[a,b]. y(x) fonksiyonunun süreksizlik noktalarını $x_1, x_2, \dots, x_n$ ile gösterilsin ve $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ olsun. $[a,x_1),(x_1,x_2),\dots,(x_n,b]$ aralıklarında y(x) fonksiyonunun sürekli türevleri olduğunu varsayılsın. *y(x)* fonksiyonunun grafiği (Şekil 4a,4b) de gösterilmiştir.

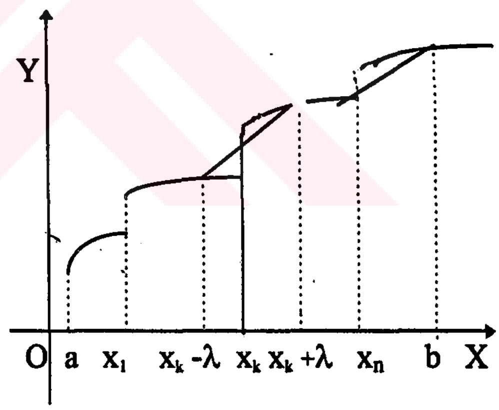
Probleme göre y(x) fonksiyonunu soldan veya sağdan sürekli kabul edilecektir. Hesapları basitleştirmek için (genelliği bozmadan)

$$y(x_k+0)-y(x_k-0)>0 \tag{3.1.4}$$

olduğu kabul edilebilir.



Şekil 4a



Şekil 4b

λ>0 herhangi bir sayı olmak üzere yeni bir y(x,λ) fonksiyonlar ailesi

$$y(x,\lambda)=\begin{cases} y(x) & ,a\le x\le x_1-\lambda,\ \ x_1+\lambda<x_2-\lambda,\dots,x_n+\lambda\le x\le b \\ \dfrac{1}{2\lambda}\left[(x-x_1+\lambda)y(x_1+\varepsilon)-(x-x_1-\lambda)y(x_1-\lambda)\right] & ,\ x_1-\lambda\le x\le x_1+\lambda \\ \dfrac{1}{2\lambda}\left[(x-x_n+\lambda)y(x_n+\lambda)-(x-x_n-\lambda)y(x_n-\lambda)\right] & ,x_n-\lambda\le x\le x_n+\lambda \end{cases} \tag{3.1.5}$$

şeklinde tanımlanır. $y(x,\lambda)$ parça-parça türevlenebilir bir fonksiyondur. Burada $y(x,\lambda) \in PC^1[a,b]$ fonksiyonu üzerinde $J(y(x))$ fonksiyonelinin değerini

$$J(y(x,\lambda)) = \int_{a}^{x_1-\lambda} L(x,y(x),y'(x))dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\lambda} L(x,y(x),y'(x))dx + \ldots +$$

$$+ \int_{x_k+\lambda}^{x_{k+1}-\lambda} L(x,y(x),y'(x))dx + \ldots + \int_{x_n+\lambda}^{b} L(x,y(x),y'(x))dx +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{x_i-\lambda}^{x_i+\lambda} L(x,y(x,\lambda),y'(x,\lambda))\,\mathrm{dx} \qquad (3.1.6)$$

şeklinde elde edilir.

$J(y(x,\lambda))$ ifadesi λ'ya bağlı bir fonksiyondur. $\lambda \to 0$ için bu fonksiyonun limiti, y(x) süreksiz fonksiyon üzerinde, $J(y(x))$ fonksiyonelinin değeri olarak kabul edilecektir. Önce bu limitin varlığı ispat edilir. Bunun için (3.1.6) daki $\sum$ toplam sembolü altındaki integralın limitinin varlığını ispat etmek yeterlidir.

$\forall \varepsilon > 0$ iç in $\exists\, N > 0$ varki $Z > N$ olduğunda

$$\left| \frac{L(x,y,z)}{z} - m(x,y) \right| < \varepsilon$$

olur veya

$$\left| L(x,y,z) - z\, m(x,y) \right| < \varepsilon z \qquad (3.1.7)$$

dir. Buradan

$$y = y(x,\lambda) \quad ve \quad z = y'(x,\lambda) \qquad (3.1.8)$$

olduğu kabul edilir ve (3.1.8) deki ifade (3.1.7) de yerine konur

$$\left| L(x,y(x,\lambda),y'(x,\lambda)) - y'(x,y(x,\lambda) m(x,y(x,\lambda)) \right| < \varepsilon y'(x,\lambda) \qquad (3.1.9)$$

olarak elde edilir. Böylece (3.1.9)'un sol tarafında ki ifadenin integralı alınır ve (3.1.5) i hatırlanırsa

$$\left|\int_{x_i-\lambda}^{x_i+\lambda}\left[L(x,y(x,\lambda),y'(x,\lambda))-y'(x,\lambda)m(x,y(x,\lambda))\right]dx\right|=$$

$$=\left|\int_{x_i-\lambda}^{x_i+\lambda} L\left(x,\frac{1}{2\lambda}((x-x_i+\lambda)y(x_i+\lambda)-(x-x_i-\lambda)y(x_i-\lambda)),\frac{1}{2\lambda}(y(x_i+\lambda)-y(x_i-\lambda))\right)dx\right|\leq$$

$$\leq\varepsilon\frac{1}{2\lambda}.2\lambda.\left[y(x_i+\lambda)-y(x_i-\lambda)\right]=\varepsilon\left(y(x_i+\lambda)-y(x_i-\lambda)\right) \qquad (3.1.10)$$

şeklinde elde edilir. Burada λ yeteri kadar küçük ise $y(x_i+\lambda)-y(x_i-\lambda)$ farkı sınırlı bir ifade olur, yani

$$\left|y(x_i+\lambda)-y(x_i-\lambda)\right|\leq K_1 \qquad (3.1.11)$$

dir. (3.1.11) deki ifade (3.1.10) da yerine konulursa

$$\left|\int_{x_i-\lambda}^{x_i+\lambda}\left[L(x,y(x,\lambda),y'(x,\lambda))-y'(x,\lambda)m(x,y(x,\lambda))\right]dx\right|\leq K_1\varepsilon \qquad (3.1.12)$$

olduğu görülür. Burada (3.1.12) deki $\int_{x_i-\lambda}^{x_i+\lambda} y'(x,\lambda)m(x,y(x,\lambda))dx$ integralinde $z=y(x,\lambda)$ yerine konursa ve m(x,y) fonksiyonu surekli olduğu için kapalı sınırlı bir bölgede sınırlı olacaktır. Buradan $y(x_i-\lambda,\lambda)=y(x_i-\lambda)$, $y(x_i+\lambda,\lambda)=y(x_i+\lambda)$ olduğu hatırlanırsa yeni değişkenlerle bu integral

$$\int_{x_i-\lambda}^{x_i+\lambda} y'(x,\lambda)m(x,y(x,\lambda))dx=\int_{y(x_i-\lambda)}^{y(x_i+\lambda)} m(x,z)dz \qquad (3.1.13)$$

şeklinde yazılır. (6.13) deki ifade (6.12) de yerine yazılırsa

$$\left| \int_{x_i-\lambda}^{x_i+\lambda} L(x, y(x,\lambda), y'(x,\lambda))dx - \int_{y(x_i-\lambda)}^{y(x_i+\lambda)} m(x,z)dz \right| \leq K_1 z \tag{3.1.14}$$

olduğu görülür. Şimdi de (3.1.13) deki ifadenin sağ tarafındaki $\int_{y(x_i-\lambda)}^{y(x_i+\lambda)} m(x,z)dz$ integrali incelenir. Bu inceleme yapılmadan önce, $y(x_i+0) = \lim_{\lambda \downarrow 0} y(x_i+\lambda)$, $y(x_i-0) = \lim_{\lambda \uparrow 0} y(x_i-\lambda)$ olduğu göz önünde bulundurularak yukardaki integral için

$$\left| \int_{y(x_i-\lambda)}^{y(x_i+\lambda)} m(x,z)dz - \int_{y(x_i-0)}^{y(x_i+0)} m(x_i,z)dz \right| \leq \left| \int_{y(x_i-\lambda)}^{y(x_i+0)} m(x,z)dz \right| + \left| \int_{y(x_i+0)}^{y(x_i+\lambda)} m(x,z)dz \right| +$$

$$+ \left| \int_{y(x_i-0)}^{y(x_i+0)} \left[m(x,z) - m(x_i,z) \right] dz \right| \tag{3.1.15}$$

eşitsizliği yazılır. $\forall \lambda > 0$ için λ yeteri kadar küçük seçilirse ve *m(x,z)* ' nin sürekli olduğu gözönüne tutularak (3.1.15) deki $[m(x,z) - m(x_i,z)]$ ifadesi

$$\left| m(x,z) - m(x_i,z) \right| \leq \varepsilon \tag{3.1.16}$$

olur. Burada (3.1.15) deki ifadenin sağ yanında ki integraller için (3.1.16)' yı da göz önüne alarak

$$\left| \int_{y(x_i-\lambda)}^{y(x_i-0)} m(x,z)dz \right| \leq K_2 z \quad , \quad \left| \int_{y(x_i+0)}^{y(x_i+\lambda)} m(x,z)dz \right| \leq K_3 z \tag{3.1.17}$$

$$\left| \int_{y(x_i-0)}^{y(x_i+0)} \left[m(x,z) - m(x_i,z) \right] dz \right| \leq \varepsilon \left[y(x_i+0) - y(x_i-0) \right] \tag{3.1.18}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu (3.1.17) ve (3.1.18) eşitsizlikleri (3.1.15) de yerine yazılırsa, (3.1.15) deki eşitsizlik

$$\left| \int_{y(x_i-\lambda)}^{y(x_i+\lambda)} m(x,z)dz - \int_{y(x_i-0)}^{y(x_i+0)} m(x_i,z)dz \right| \le K_4 z \tag{3.1.19}$$

şeklini alır. Sonuncu eşitsizlik (3.1.14)' ile ele alınarak

$$\left| \int_{x_i-\lambda}^{x_i+\lambda} L\big(x,y(x,\lambda),y'(x,\lambda)\big)dx - \int_{y(x_i-0)}^{y(x_i+0)} m(x_i,z)dz \right| \le K_5\varepsilon \tag{3.1.20}$$

elde edilir. Burada (3.1.20) eşitsizliğinin sol tarfındaki birinci ifadenin $\lambda \to 0$ limiti

$$\lim_{\lambda\to 0} \int_{x_i-\lambda}^{x_i+\lambda} L\big(x,y(x,\lambda),y'(x,\lambda)\big)dx = \int_{y(x_i-0)}^{y(x_i+0)} m(x_i,z)dz \tag{3.1.21}$$

olur. Bölece limitin varlığı ispat edilmiş oldu. Buradan

$$\lim_{\lambda\to 0} J\big(y(x,\lambda)\big) = \int_{a}^{x_1-0} L(x,y,y')dx + \int_{x_1+0}^{x_2-0} L(x,y,y')dx + \int_{x_2+0}^{x_3-0} L(x,y,y')dx + \ldots +$$

$$+ \int_{x_n+0}^{b} L(x,y,y')dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{y(x_i-0)}^{y(x_i+0)} m(x_i,z)dx \tag{3.1.22}$$

şeklinde olur. Son ifadeyi , yani eşitliğin sağ tarafını, y(x) süreksiz fonksiyon üzerinde J(y) nin değeri olarak kabul edeceğiz.

3.2 J_d FONKSİYONELİNİN BİRİNCİ VARYASYONU VE EKSTREMUM İÇİN GEREK KOŞUL

Bu bölümde [a,b] aralığında süreksiz fonksiyonlar üzerinde tanımlanan ve Bölüm 3.1'de verilen J_d fonksiyonelinin 1. varyasyonunu hesaplayacağız. Sonra da süreksiz y(x) fonksiyonunun infimum değer vermesi için gerek şartları arayacağız. Bu şartlar klasik varyasyon hesabında olduğu gibi y(x) fonksiyonunu ve onun süreksizlik noktalarını belirlemek için gereken denklemleri ortaya çıkaracaktır. Hesaplamaları basitleştirmek için (işin özünü sağlamak şartıyla) ele alacağımız y(x) fonksiyonunun bir tek süreksizlik noktası olduğunu varsayalım. Ayrıca J_d fonksiyonelinin parametrik olmayan şeklinden parametrik şekline geçerek varyasyonunu hesaplayacağız. Varyasyon problemlerinin parametrik olmayan şeklinden parametrik şekline geçilmesi varyasyon hesabında sık sık rastlanan bir yöntemdir [13-14],[16]. Parametrik biçimde yazılmış varyasyon problemlerinin üstünlüğü yalnız y=y(x) şeklindeki fonksiyonları değil genel olarak x=x(t), y=y(t) eğrilerinin de ele alınabilinmesindendir. Geometrik problemler açısından varyasyon problemlerinin parametrik şekilde yazılması daha kolaydır. Bu nedenle, x değişkenini bir t parametresinin türevlenebilir ve monoton artan bir fonksiyonu olarak kabul edelim. x değişkeni a'dan b'ye kadar değiştiğinde t'nin α' dan β' ya kadar değiştiğini ve $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$ olduğunu varsayalım. Ayrıca $\forall t \in [\alpha,\beta]$ için $\dot{x}(t) > 0$ olduğunu da kabul edeceğiz. Dolaysıyla,

$$x=x(t),\ y=y(t),\ \alpha \le t \le \beta \qquad (3.2.1)$$
$$\dot{x}(t) > 0$$

parametrik eğrilerini ele alacağız.

y=y(x) fonksiyonunun süreksizlik noktası $x = \bar{x}$ olsun. Bu noktanın parametresinin, $t = \bar{t}$ değerine karşılık geldiğini varsayalım. Bu takdirde, $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$ değerleri için $y(\alpha) = y_0$, $y(\beta) = y_1$ olacaktır. Böylece, (Bölüm 3.1) de tanımlanan J_d fonksiyoneli aşağıdaki şekilde yazılmış olur:

$$J_d = \int_{\alpha}^{\bar{t}-0} L\Big(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\Big)\dot{x}dt + \int_{\bar{t}+0}^{\beta} L\Big(x(t), y(t), \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\Big)\dot{x}dt + \int_{y(\bar{x}-0)}^{y(\bar{x}+0)} m(\bar{x}, y)dy \qquad (3.2.1)$$

dir. Burada

$$y(\bar{x}+0) = y_+,\ y(\bar{x}-0) = y_- \qquad (3.2.3)$$

olduğunu kabul edelim.

Şimdi de

$$\begin{cases} x = \hat{x}(t) \\ y = \hat{y}(t) \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta$$

eğrisinin varyasyonu ele alınır. Bunun için $\varepsilon_0 > 0$ küçük bir sayı olmak üzere $|\lambda| \le \varepsilon_0$ olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned} x(t,\lambda) &= \hat{x}(t) + \lambda\varphi(t), \quad \varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0 \\ x(t,\lambda) &= \hat{y}(t) + \lambda\psi(t), \quad \psi(\alpha) = \psi(\beta) = 0 \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

eğriler ailesini ele alınarak J_d fonksiyonelinin değeri bu eğriler boyunca,

$$\begin{aligned} J\big(x(t), y(t), y(t,\lambda)\big) = \int_{\alpha}^{\bar{t}-0} L\Big(x(t,\lambda), y(t,\lambda), \frac{\dot{y}(t,\lambda)}{\dot{x}(t,\lambda)}\Big)\dot{x}(t,\lambda)dt + \\ + \int_{\bar{t}+0}^{\beta} L\Big(x(t,\lambda), y(t,\lambda), \frac{\dot{y}(t,\lambda)}{\dot{x}(t,\lambda)}\Big)\dot{x}(t,\lambda)dt + \int_{y_-}^{y_+} m(\bar{x} + \lambda\varphi(\bar{t})+, y(t) + \lambda\psi(t))dy \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

şeklinde hesaplanır. (5.5) denkleminde λ=0 olduğunda $J(x(t,0), y(t,0)) = J_d$ olur.

Burada $J(x(t,0), y(t,0)) = J_d$ ifadesi λ' ya bağlı bir fonksiyondur.

Tanım: $\frac{d}{d\lambda} J(x(t,\lambda), y(t,\lambda))\Big|_{\lambda=0}$ ifadesine fonksiyonelin 1. varyasyonu denir.

Şimdi de 1. varyasyonu hesaplamak için. için (5.4) den λ ya göre türev alarak

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} x(t,\lambda) = \varphi(t), \quad \frac{\partial}{\partial\lambda} x(t,\lambda) = \psi(t) \tag{3.2.6}$$

elde edilir.

(3.2.5) eşitliğinin sağ tarafı λ ya bağlı bir fonksiyondur. İntegrandların ve onların L_x, L_y, $L_{y'}$ türevlerinin sürekli olduğu hatırlanırsa, bu fonksiyonun türevinin mevcut olduğu görülür. Bu türev, integrand'ın λ' ya göre türevi alınmakla

$$\frac{d}{d\lambda}J(x(t,\lambda),y(t,\lambda)) = \frac{d}{d\lambda}\int_{\alpha}^{\bar{t}-0} L(x(t,\lambda),y(t,\lambda),\frac{\dot{y}(t,\lambda)}{\dot{x}(t,\lambda)})\dot{x}(t,\lambda)dt +$$

$$+\frac{d}{d\lambda}\int_{\bar{t}+0}^{\beta} L(x(t,\lambda),y(t,\lambda),\frac{\dot{y}(t,\lambda)}{\dot{x}(t,\lambda)})\dot{x}(t,\lambda)dt + \frac{d}{d\lambda}\int_{y_-}^{y_+} m(\bar{x}+\lambda\varphi(\bar{t}),y(t)+\lambda\psi(t))dy$$

$$= \int_{\alpha}^{\bar{t}-0}\Big\{L_x(x(t,\lambda),y(t,\lambda),\frac{\dot{y}(t,\lambda)}{\dot{x}(t,\lambda)})\varphi(t) + L_y(x(t,\lambda),y(t,\lambda),\frac{\dot{y}(t,\lambda)}{\dot{x}(t,\lambda)})\psi(t) +$$

$$+ L_{y'}(x(t,\lambda),y(t,\lambda),\frac{\dot{y}(t,\lambda)}{\dot{x}(t,\lambda)}).\frac{\dot{\psi}(t)(\dot{x}(t)+\lambda\dot{\varphi}(t)) - \dot{\varphi}(\dot{y}(t)+\lambda\dot{\psi}(t))}{(\dot{x}(t)+\lambda\dot{\varphi}(t))^2}\Big\}[\dot{x}(t)+\lambda\dot{\varphi}(t)]dt$$

$$+ \int_{\bar{t}+0}^{\beta}\Big\{L_x(x(t,\lambda),y(t,\lambda),\frac{\dot{y}(t,\lambda)}{\dot{x}(t,\lambda)})\varphi(t)dt + L_y(x(t,\lambda),y(t,\lambda),\frac{\dot{y}(t,\lambda)}{\dot{x}(t,\lambda)})\psi(t) +$$

$$+ L_{y'}(x(t,\lambda),y(t,\lambda),\frac{\dot{y}(t,\lambda)}{\dot{x}(t,\lambda)})\frac{\dot{\psi}(t)(\dot{x}+\lambda\dot{\varphi}(t)) - \dot{\varphi}(t)(y(t)-\lambda\dot{\psi}(t))}{(\dot{x}(t)+\lambda\dot{\varphi}(t))^2}\Big\}[\dot{x}(t)+\lambda\dot{\varphi}(t)]dt$$

$$+ \int_{y_-}^{y_+}\Big[m_x(\bar{x}+\lambda\varphi(\bar{t})),y(t)+\lambda\psi(t))\varphi(\bar{t}) + m_y(\bar{x}+\lambda\varphi(\bar{t})),y(t)+\lambda\psi(t))\psi(\bar{t})\Big]dy. \quad (3.2.7)$$

elde edilir [13-14]. Burada elde edilen son ifade de λ=0 yerine konarak ve sonra da (3.2.4) den $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0$, $\psi(\alpha)=\psi(\beta)=0$, olduğu gözönüne alınarak sağ taraftaki integraller kısmi integrallenir, ve herhangi bir f(t) fonksiyonunun sağ vel sol limitleri için

$$\lim_{\substack{t\to\bar{t} \\ t<\bar{t}}} f(\bar{t}-0) = f_- \ , \quad \lim_{\substack{t\to\bar{t} \\ t>\bar{t}}} f(\bar{t}+0) = f_+$$

kabul edilir. Bu takdirde,

$$\delta J_d = \frac{d}{d\lambda} J(x(t,\lambda), y(t,\lambda))\Big|_{\lambda=0} = \int_{\alpha}^{\bar{t}-0} \Big\{ \hat{L}_x(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\dot{\hat{x}}(t)})\dot{\hat{x}}(t)\varphi(t) +$$

$$+L_y(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\dot{\hat{x}}(t)})\dot{\hat{x}}(t)\psi(t) + L_{y'}(x(t), \hat{y}(t), \frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\dot{\hat{x}}(t)})L_{y'}(x(t), \hat{y}(t), \frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\dot{\hat{x}}(t)})\left[\dot{\psi}(t) - \dot{\hat{y}}'(t)\dot{\varphi}(t)\right]\Big\}dt$$

$$+ \int_{\alpha}^{\bar{t}-0} L(x(t), y(t), \frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\dot{\hat{x}}(t)})\dot{\varphi}(t) + \int_{\bar{t}+0}^{\beta} \hat{L}(x(t), y(t), \frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\dot{\hat{x}}(t)})\dot{\varphi}(t) +$$

$$+ \int_{\bar{t}+0}^{\beta} \Big\{ L_x(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\dot{\hat{x}}(t)})\dot{\hat{x}}(t)\varphi(t) + L_y(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\dot{\hat{x}}(t)})\dot{\hat{x}}(t)\psi(t)dt +$$

$$+L_{y'}(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\dot{\hat{x}}(t)})\left[\dot{\psi}(t) - \dot{\hat{y}}'(t)\dot{\varphi}(t)\right]\Big\}dt +$$

$$+ \int_{y_-}^{y_+} \left[m_x(\bar{x} + \lambda\varphi(\bar{t})), y(t) + \lambda\psi(t))\varphi(\bar{t}) + m_y(\bar{x} + \lambda\varphi(\bar{t})), y(t) + \lambda\psi(t))\psi(\bar{t}) \right] dy$$

$$= \int_{\alpha}^{\bar{t}-0} \left[\hat{L}_x(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\dot{\hat{x}}(t)})\dot{\hat{x}}(t)\varphi(t) + \hat{L}_y(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\dot{\hat{x}}(t)})\dot{\hat{x}}(t)\psi(t) \right] dt +$$

$$+ \int_{\bar{t}+0}^{\beta} \left[\hat{L}_x(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\dot{\hat{x}}(t)})\dot{\hat{x}}(t)\varphi(t) + \hat{L}_y(\hat{x}(t), \hat{y}(t), \frac{\dot{\hat{y}}(t)}{\dot{\hat{x}}(t)})\dot{\hat{x}}(t)\psi(t) \right] dt$$

$$+\int_{\alpha}^{\bar{t}-0}\hat{L}_{y'}(t)\dot{\psi}(t)dt+\int_{\alpha}^{\bar{t}-0}-y'\hat{L}_{y'}(t)\dot{\varphi}(t)dt+\int_{\alpha}^{\bar{t}-0}\hat{L}(t)\dot{\varphi}(t)dt+\int_{\bar{t}+0}^{\beta}\hat{L}_{y'}(t)\dot{\psi}(t)dt+$$

$$+\int_{\bar{t}+0}^{\beta}-y'\hat{L}_{y'}(t)\dot{\varphi}(t)dt+\int_{\bar{t}+0}^{\beta}\hat{L}(t)\dot{\varphi}(t)dt+\psi_{+}m(\bar{x},y_{+})-\psi_{-}m(\bar{x},y_{-})+\psi(\bar{t})\int_{y_{-}}^{y_{+}}m_{x}(\bar{x},y_{+})dy$$

$$=\int_{\alpha}^{\bar{t}-0}\left[\hat{L}_{x}(t)\dot{\hat{x}}(t)\varphi(t)+\hat{L}_{y}(t)\dot{\hat{x}}(t)\psi(t)\right]dt+\int_{\bar{t}+0}^{\beta}\left[\hat{L}_{x}(t)\dot{\hat{x}}(t)\varphi(t)+\hat{L}_{y}(t)\dot{\hat{x}}(t)\psi(t)\right]+$$

$$+\hat{L}_{y'}(t)\psi(t)\Big|_{\alpha}^{\bar{t}-0}-\int_{\alpha}^{\bar{t}-0}\psi(t)\frac{d}{dt}(\hat{L}_{y'}(t))dt+(-y'\hat{L}_{y'}(t))\varphi(t)\Big|_{\alpha}^{\bar{t}-0}+\int_{\alpha}^{\bar{t}-0}\varphi(t)\frac{d}{dt}(y'\hat{L}_{y'}(t))dt+$$

$$+\hat{L}(t)\varphi(t)\Big|_{\alpha}^{\bar{t}-0}-\int_{\alpha}^{\bar{t}-0}\varphi(t)\frac{d}{dt}(\hat{L}(t))dt+\hat{L}_{y'}(t)\psi(t)\Big|_{\bar{t}+0}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\bar{t}-0}\psi(t)\frac{d}{dt}(\hat{L}_{y'}(t))dt+$$

$$+(-y'\hat{L}_{y'}(t))\varphi(t)\Big|_{\bar{t}+0}^{\beta}+\int_{\bar{t}+0}^{\beta}\varphi(t)\frac{d}{dt}(y'\hat{L}_{y'}(t))dt+(\hat{L}(t)\varphi(t))\Big|_{\bar{t}+0}^{\beta}-$$

$$-\int_{\bar{t}+0}^{\beta}\varphi(t)\frac{d}{dt}(\hat{L}(t))dt+\psi_{+}m(\bar{x},y_{+})-\psi_{-}m(\bar{x},y_{+})+\int_{y_{-}}^{y_{+}}m_{x}(\bar{x},y)dy=$$

$$=\int_{\alpha}^{\bar{t}-0}\left[\left\{\hat{L}_{x}(t)\dot{x}(t)-\frac{d}{dt}(\hat{L}(t)-y'\hat{L}_{y'}(t))\right\}\varphi(t)+\left\{\hat{L}_{y}(t)\dot{x}(t)-\frac{d}{dt}(\hat{L}_{y'}(t))\right\}\psi(t)\right]dt+$$

$$+\int_{\bar{t}+0}^{\beta}\left[\left\{\hat{L}_{x}(t)\dot{x}(t)-\frac{d}{dt}(\hat{L}(t)-y'\hat{L}_{y'}(t))\right\}\varphi(t)+\left\{\hat{L}_{y}(t)\dot{x}(t)-\frac{d}{dt}(\hat{L}_{y'}(t))\right\}\psi(t)\right]dt+$$

$$+(-\hat{L}_{y'}(t)+m(\bar{x},y_{+}))\psi_{+}+\left\{(L(t)-y'\hat{L}_{y'}(t))_{-}-\int_{\delta}^{y_{-}} m_{x}(\bar{x},y)dy+\right.$$

$$+\int_{\delta}^{y_{+}} m_{x}(\bar{x},y)dy+(L(t)-y'\hat{L}_{y'}(t))_{+}\,dt \tag{3.2.8}$$

elde edilir. (5.8) ifadesi J_d fonksiyonelinin birinci varyasyonunu ifade etmektedir.

Burada da

$$J_d=\int_a^b L(x,y(x),y'(x))dx \to \inf \qquad y(a)=y_0\,, \qquad y(b)=y_1 \tag{3.2.9}$$

varyasyon problemi ele alınır ve $x=\bar{x}$ noktasında süreksiz olan $y=\hat{y}(x)$ fonksiyonunun bu problemin çözümü olduğu varsayılır. $y=\hat{y}(x)$ fonksiyonu üzerinde J_d fonksiyonelinin 1. varyasyonu (3.2.8) formülü ile ifade edildiğinden ve $\varphi(t)$, $\psi(t)$, φ_{+}, ψ_{-} ifadeleri keyfi oldukları için (3.2.8)' de aşağıdaki gerek şartları alınır.

1) $$\hat{L}_{y'}(\bar{x},\hat{y}(\bar{x}-0),\dot{\hat{y}}(x-0))=m(\bar{x},y(\bar{x}-0)).$$

$$\hat{L}_{y'}(\bar{x},\hat{y}(x+0),\dot{\hat{y}}(x+0))=m(\bar{x},y(\bar{x}+0)).$$

2) $$\hat{L}_{y'}(\bar{x},\hat{y}(x-0),\dot{\hat{y}}(x-0))-\hat{y}(\bar{x}-0)\hat{L}_{y'}(\bar{x},\hat{y}(\bar{x}-0),\dot{\hat{y}}(x-0))-\int_{\delta}^{y_{-}} m_{x}(\bar{x},y)dy=$$

$$=\hat{L}(\bar{x},\hat{y}(x+0),\dot{\hat{y}}(x+0))-y'(\bar{x}+0)\hat{L}_{y'}(\bar{x},\hat{y}(\bar{x}+0),\dot{\hat{y}}(\bar{x}+0))-\int_{\delta}^{y_{+}} m_{x}(\bar{x},y)dy$$

burada δ, $y_{-}<\delta<y_{+}$ aralığında herhangi bir noktadır.

3) $$\begin{cases}\hat{L}_{x}(t)\dot{x}(t)-\dfrac{d}{dt}(\hat{L}(t)-y'\hat{L}_{y'}(t))=0\\[2ex] \hat{L}_{y}(t)\dot{x}(t)-\dfrac{d}{dt}\hat{L}_{y'}(t)=0 \qquad , \qquad t\in[\alpha,\bar{t})\cup(\bar{t},\beta]\end{cases}$$

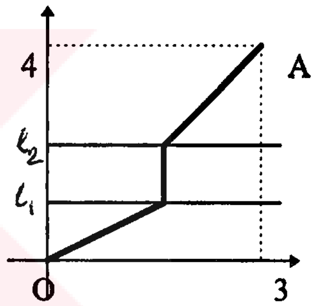
(3.2.8) denklemini $t \neq \bar{t}$ için bir denklemle ifade edebiliriz ve bu denklem için $x \neq \bar{x}$ Euler denklemini alırız:

$$L_y(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)) - \frac{d}{dx} L_y(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)) = 0 \qquad (3.2.10)$$

(3.2.8) denklemleri $y = \hat{y}(x)$ fonksiyonunu bu fonksiyonun düzgün olduğu $[a,\bar{x})$ ve $(\bar{x},b]$ aralıklarında belirler. 1) ve 2) şartları ise süreksizlik noktası olan $x = \bar{x}$ noktasını belirlemeye imkan veriyor.

Yukarıda geliştirdiğimiz teoriyi aşağıda bir örnekle açıklayalım.

Soru : Koordinat başlangıcı O noktasından A noktasına bir yol yapılacaktır. A noktasının koordinatları x=3, y=4 olsun bu Yol yanda ki şekilde gösterildiği gibi nehrin üzerinden nehre dik bir köprü ile geçecektir. Bu köprüyü nehrin hangi noktasında yapmalıyız ki O noktasından A noktasına yapılan yolun uzunluğu en kısa olsun. (Nehir kıyılarının OX eksenine paralel olduğunu varsayalım).



Şekil 5a

Çözüm: Yukarıda ki problem matematiksel olarak aşağıdaki biçimde

$$J_d = \int_0^3 \sqrt{1+y'^2}\, dx \to \inf \qquad (3.2.11)$$

$$y(0)=0, \ y(3)=4, \ y(x) \in PC[0,3] \qquad (3.2.12)$$

yazılır. Burada $y(\tau - 0) = 1, y(\tau + 0) = 2$, y(x) fonksiyonunun bir süreksizlik noktası vardır .Önce (3.2.1) ve (3.2.2) probleminin yukarıda söz konusu olan teoremin şartlarını sağladığını ispatlayalım.

Biz bu örnekte $L(x,y,z) = \sqrt{1+z^2}$ ve

$$\lim_{z\to+\infty} \frac{L(x,y,z)}{z} = \lim_{z\to+\infty} \frac{\sqrt{1+z^2}}{z} = 1$$

olduğu elde edilir. Böylece m(x,y)=1 olur. $y=\hat{y}(x)$ fonksiyonu problemin çözümü, ve $x=\tau$ noktasının $\hat{y}(x)$ fonksiyonunun süreksizlik noktası olsun o zaman $x\neq\tau$ için $\hat{y}(x)$ fonksiyonu (3.2.10) dan

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)'=0$$

Euler denkleminin çözümü olacaktır. Buradan $\hat{y}(x)$ fonksiyonunun ekstremal eğrisi

$$\hat{y}(x)=\begin{cases} a_1x+b_1 & 0\le x<\tau \\ a_2x+b_2 & \tau<x\le 3 \end{cases} \tag{3.2.13}$$

şeklinde olduğu ortaya çıkar. Buradan

$$L_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

ifadesini parametrik

$$L_{y'}=\frac{\frac{\dot{x}}{\dot{y}}}{\sqrt{1+(\frac{\dot{x}}{\dot{y}})^2}}=\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \tag{3.2.14}$$

şekilde yazarız. Bu halde 1) den

$$(L_{y'})_-=m(\tau,y_-)\equiv 1\ ,\ (L_{y'})_+=m(\tau,y_+)\equiv 1 \tag{3.2.15}$$

olduğu için (3.2.14) ve (3.2.15) den

$\dfrac{\dot{y}_-}{\sqrt{\dot{x}_-^2+\dot{y}_-^2}}=1$ ve $\dfrac{\dot{y}_-}{\sqrt{\dot{x}_+^2+\dot{y}_-^+}}=1$ çıkar. Buradan $\dot{x}_+=\dot{x}_-=0$ olduğundan ve

$(L-y'L_{y'})_-=(L-y'L_{y'})_+$ şartından ise

$$\sqrt{1+\hat{y}_-'^2}-\frac{\hat{y}_-'^2}{\sqrt{1+\hat{y}_-'^2}}=\sqrt{1+\hat{y}_+'^2}-\frac{\hat{y}_+'^2}{\sqrt{1+\hat{y}_+'^2}}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{1+\hat{y}_-'^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\hat{y}_+'^2}}\Leftrightarrow\hat{y}_+'=\hat{y}_-'$$

alırız. (3.2.12) deki $\hat{y}(0)=0$ şartından $\hat{y}(x)=a_1x$, $0 \le x < \tau$, ve $\hat{y}(3)=4$ şartından ise $\hat{y}(x)=a_2x(x-3)+4$, $\tau < x \le 3$ çıkar.

$\hat{y}'_+ = \hat{y}'(\tau+0) = \hat{y}(\tau-0) = \hat{y}'_-$ şartından ise $a_1 = a_2 = a$ alırız.

Diğer yandan

$$y(\tau-0)=1, y(\tau+0)=2$$

şartından

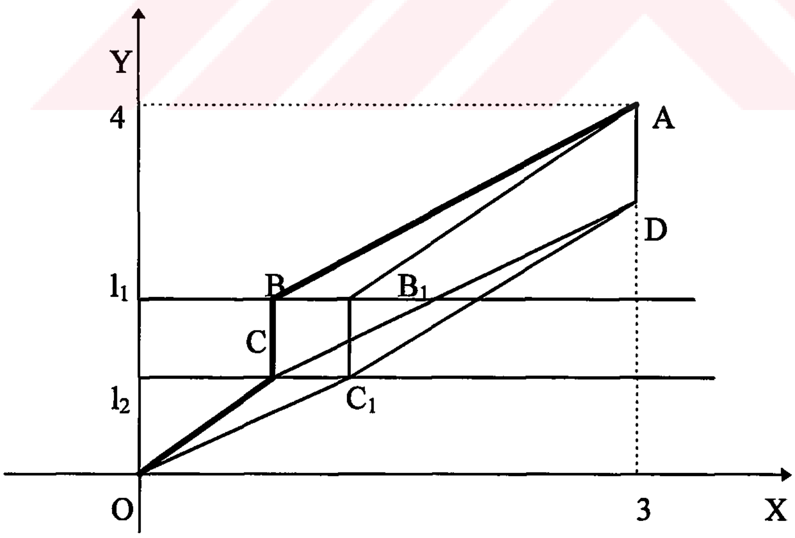
$$\begin{cases} a\tau = 1 \\ a(\tau-3)+4=2 \end{cases}$$

olduğundan ve buradan $\tau = 1$, $a = 1$ olur. Böylece (3.2.13) deki extremal eğri

$$\hat{y}(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ x+1 & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

şeklinde bulunur.

Çözülen örneğin aşağıda geometrik yorumu verilmiştir.



Şekil 5b

Yukarıda ki şekildeki gibi A noktasından düşey olarak $|AD|=1$ kadar D noktasına inelim. OD doğrusunun O'ya yakın kıyı ile kesiştiği nokta C olsun, Köprü C noktasına inşa edilmelidir. Gerçekten, köprü C noktasında inşa edilirse körünün l_2 sahilindeki ucu B noktası ve AB//CD olur. ABCD paralel kenarından

$|AB| = |CD|$ olur. Eğer köprü herhangi C_1 noktasında B_1C_1 şeklinde inşa edilseydi yolun uzunluğu

$$|OC_1| + |C_1B_1| + |B_1A|$$

olurdu C_1 ve D doktalarını birleştirelim, o zaman

$$|OC_1| + |C_1B_1| + |B_1A| = |OC_1| + |C_1B_1| + |C_1D| >$$

$$> |OC| + |CB| + |CD| = |OC| + |BC| + |BA|$$

olduğu için OCBA en kısa yol olur.

BÖLÜM 4 : SİNGÜLER KUADRATİK FONKSİYONELİN POZİTİFLİĞİ

Varyasyon problemleri araştırılırken

$$J(y(x)) = \int_a^b (P(x)y'^2 + Q(x)y^2)\,dx\,. \qquad (4.1)$$

şeklindeki veya diğer şekillerdeki kuadratik fonksiyonelle karşılaşılır. Bu fonksiyonelin incelenmesinde, ekstremal problemde ikinci mertebeden gerek ve yeter şartların araştırılması açısından büyük önem vardır [1],[2],[5]. Tarihsel olarak, (4.1) kuadratik fonksiyoneli araştırılırken P(x) ve Q(x) fonksiyonlarının $C^1[a,b]$ sınıfından olması ve ayrıca $x\in[a,b]$ için P(x)>0 şartının sağlanması ilk şart olarak kabul edilmektedir [2],[5]. $x\in[a,b]$ için P(x)>0 şartı, Varyasyon Hesabında Legendre şartı olarak tanımlanmaktadır ve bu şart önceden kabul edildikten sonra ikinci mertebeden gerek ve yeter şartların araştırılması başlar [1],[2],[5],[20] . Fakat çeşitli hallerde, özellikle de fizikten doğan problemleri araştırırken P(x), fonksiyonunun [a,b] aralığının bazı noktalarında sıfıra çevrildiği durumlara da sık sık rastlanabilir [17-19].

Böyle durumlar olurken kuadratik (4.1) fonksiyoneli singüler fonksiyonel adını taşır ve bu haller Leighton [18], Martin [1], Hestenes [2] ve Tagiyev [10] tarafından incelenmiştir. Burada (4.1) fonksiyonelinde P(x) fonksiyonunun [a,b] aralığının sol ucunda sıfıra çevrildiği durum incelenecektir, yani sol ucu singüler olan fonksiyonel araştırılacaktır [20-21].

Bu araştırma yukarıda adları geçen matematikçilerin yaptıkları araştırmalardan hem metod yönünden hemde yalnız P(x)'in değil Q(x)'in de [a,b] aralığında belli bir anlamda singüler olduğu halleri kapsamasıyla farklıdır.

Böylece (4.1) fonksiyonelinde $x\in(a,b]$ için $P(x)\in C^1[a,b]$, P(a)=0, P(x) > 0, olduğunu, Q(x) in ise yalnız (a,b] aralığında türevlenebilir olduğu kabul edilir. Örneğin aşağıda incelenecek olan

$$J(y) = \int_0^1 \left(xy'^2 - \frac{x^2-\frac{1}{4}}{x}y^2\right)dx$$

fonksiyonelinde $P(x)=x$, $Q(x)=-\dfrac{4x^2-1}{4x}$ ve $a=0, b=1$ dir.

(4.1) fonksiyonelinin tanım bölgesi olarak

$$D(J)=\left\{y(x)\in C^1[a,b] \mid y(a)=y(b)=0,\ \int_a^b (P(x)y'^2+Q(x)y^2)dx<\infty\right\}. \tag{4.2}$$

kümesi ele alınır.

(4.1) fonksiyoneli geleneksel olarak

$$-\frac{d}{dx}(P(x)y')+Q(x)y=0 \tag{4.3}$$

kendine ek (self adjoint) denklemi ile bağlıdır (bak Bölüm 2). (4.3) denklemine Klasik Varyasyon Hesabında olduğu gibi (4.1) fonksiyonelinin Euler-Jacobi denklemi denir. (4.3) denkleminde $P(a)=0$ olduğu için bu denklem singüler denklemdir ve genelde bu denklem için $u(a)=u_0$, $u'(a)=u_1$, başlangıç şartını koymak imkansızdır. Fakat bu denklem için singüler $x=a$ ucunda çeşitli sınırproblemleri ele alınabilir. (4.3) denkleminin $x=b$ noktasında singülerlığı olmadığından herhangi bir $\delta>0$ için $[\delta,b]$ aralığında $u(b)=u_0$, $u'(b)=u_1$ şartını sağlayan bir çözüm bulunacaktır. Eğer bu çözüm $(\delta,b]$ aralığında sıfıra çevrilmezse bu çözüme $(\delta,b]$ de eşlenik nokta sağlamayan çözüm denir.

Teorem 1: Eğer (4.3) denkleminin $(a,b]$ aralığında eşlenik nokta sağlamayan çözümü

$$\lim_{x\to a}\left|P(x).\frac{u'(x)}{u(x)}\right|<\infty, \tag{4.4}$$

şartını sağlarsa (4.1) fonksiyoneli (4.2) deki D(J) tanım kümesinde pozitiftir.

İspat: $x\in(a,b)$ ve $y(x)\in D(J)$ için

$$\varphi(x)=\int_x^b P(t)\left(y'-\frac{u'(t)}{u(t)}y\right)^2 dt \tag{4.5}$$

fonksiyonu gözönüne alınır. Bu integral kısmi integrallenirse,

$$\varphi(x)=\int_x^b P(t)\left(y'^2-2yy'\frac{u'(t)}{u(t)}+\frac{u'^2(t)}{u^2(t)}y^2\right)dt$$

$$=\int_x^b P(t)y'^2(t)dt+\int_x^b P(t)\frac{u'^2(t)}{u^2(t)}y^2dt-\int_x^b P(t)\frac{u'(t)}{u(t)}dy^2$$

$$=-P(t)\frac{u'(t)}{u(t)}y^2(t)\Big|_x^b+\int_x^b y^2(t)\left(\frac{P(t)u'(t)}{u(t)}\right)'dt+\int_x^b \left(p(t)y'^2(t)+P(t)\frac{u'^2(t)}{u(t)}y^2(t)\right)dt$$

$$=-P(t)\frac{u'(t)}{u(t)}y^2(t)\Big|_x^b+\int_x^b P(t)y'^2dt+\int_x^b\left[\frac{(P(t)u'(t))'-P(t)u'^2(t)}{u^2(t)}+\frac{P(t)u'^2}{u^2(t)}\right]y^2(t)dt$$

$$=-P(t)\frac{u'(t)}{u(t)}y^2(t)\Big|_x^b+\int_x^b P(t)y'^2(t)dt+\int_x^b\frac{(P(t)u'(t))'}{u^2(t)}y^2(t)dt$$

$$=P(x)\frac{u'(x)}{u(x)}y^2(x)+\int_x^b\left(P(t)y'^2(t)+Q(t)y^2(t)\right)dt \tag{4.6}$$

olduğu görülür. Yukarıda $u(x)$ fonksiyonunun (4.3) denklemin çözümü olmasından ve $y(b)=0$ şartından faydalanıldı. (4.4) şartına göre

$$\lim_{x\to a}\left|P(x).\frac{u'(x)}{u(x)}\right|y^2(x)=0 \tag{4.7}$$

olur. Böylece (4.6) da $x\to a$ için limite geçilirse, $y(x)\in D(J)$ olduğundan,

$$\int_a^b\left(P(x)y'^2+Q(x)y^2\right)dx=\int_a^b P(x)\left(y'-\frac{u'(x)}{u(x)}y\right)^2dx. \tag{4.8}$$

bulunur. Burada ikinci integraldeki her iki integrand da pozitif olduğundan $J(y)$ fonksiyonelinin pozitifliği çıkar.

Örnek 1 :

$$J(y)=\int_0^1\left(xy'^2-\frac{x^2-\frac{1}{4}}{x}y^2\right)dx$$

fonksiyonelinin (4.2) deki D(J) tanım kümesinde pozitif olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Fonksiyonelde P(x)=x, ve $Q(x)=\dfrac{4x^2-1}{4x}$ dir.

$$D(J)=\left\{y(x)\in C^1[0,1],\ y(0)=y(1)=0,\ \int_0^1(P(x)y'^2+Q(x)y^2)dx<\infty\right\}$$

kümesi ele alınır.

Fonksiyonele Euler-Jacobi denklemi uygulandığında,

$$-(P(x)y')'+Q(x)y=0$$

den

$$(xy')'+\frac{x^2-\frac{1}{4}}{x}y=0$$

veya bu denklem düzenlenirse

$$x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$$

elde edilir ki bu denklem ikinci mertebeden $\alpha=\dfrac{1}{2}$ indisli bir Bessel denklemidir (Bak Bölüm 2). Bu denklemin (0,1] de eşlenik nokta sağlamayan çözümü ,

$$J_{\frac{1}{2}}(x)=u(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{Sin}x}{\sqrt{x}}$$

dir. Bu çözüm teorem 1'e uygulandığında

$$u'(x)=-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{Sin}x+\frac{\mathrm{Cos}x}{\sqrt{x}}\ ,$$

$$x\frac{u'(x)}{u(x)}=-\frac{1}{2}+\frac{xCosx}{Sinx}$$

olduklarından (4.4) şartı sağlanır, yani

$$\lim_{x\to a}\left|P(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right|=\lim_{x\to 0}\left|-\frac{1}{2}+\frac{xCosx}{Sinx}\right|=\frac{1}{2}<\infty$$

dır. Ayrıca, $x\in(0,1)$ ve $y(x)\in D(J)$ için

$$\varphi(x)=\int_x^b (P(x)(y'-\frac{u'(x)}{u(x)}y)^2dx=\int_x^1 x\left(y'-(-\frac{1}{2x}+\frac{\cos x}{\sin x})y\right)^2dx$$

$$=\int_x^1 xy'^2dx-\int_x^1 x(-\frac{1}{2x}+\frac{\cos x}{\sin x})2yy'dx+\int_x^1 x(-\frac{1}{2x}+\frac{\cos x}{\sin x})^2y^2dx$$

$$=-\int_x^1(-\frac{1}{2}+\frac{x\cos x}{\sin x})dy^2+\int_x^1 xy'^2dx+\int_x^1 x(-\frac{1}{2x}+\frac{\cos x}{\sin x})^2y^2dx$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{x\cos x}{\sin x})y^2(x)\Big|_x^1+\int_x^1(-\frac{1}{2}+\frac{x\cos x}{\sin x})'y^2(x)dx+\int_x^1 xy'^2dx+$$

$$+\int_x^1 x(-\frac{1}{2x}+\frac{\cos x}{\sin x})^2y^2dx$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{x\cos x}{\sin x})y^2(x)\Big|_x^1+\int_x^1\frac{(\cos x\sin x-x}{\sin^2 x}y^2(x)dx+\int_x^1 xy'^2dx+$$

$$+\int_x^1 x(-\frac{1}{2x}+\frac{\cos x}{\sin x})^2y^2dx$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{x\cos x}{\sin x})y^2(x)\Big|_x^1+\int_x^1(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{x}{\sin^2 x}+\frac{1}{4x}-\frac{\cos x}{\sin x}+x\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x})dx+\int_x^1 xy'^2dx$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{x\cos x}{\sin x})y^2(x)\Big|_x^1+\int_x^1(\frac{1}{4x}+x\frac{(\cos^2 x-1)}{\sin^2 x})dx+\int_x^1 xy'^2dx$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{x\cos x}{\sin x})y^2(x)\Big|_x^1+\int_x^1(\frac{1}{4x}-x)dx+\int_x^1 xy'^2dx$$

$$=(\frac{1}{2}-x\frac{\cos x}{\sin x})y^2(x)\Big|_x^1+\int_x^1(xy'^2-\frac{4x^2-1}{4x})dx$$

olup burada y(b)=0 olduğundan ve $x \to 0$ için limite geçilirse

$$\varphi(x)=\int_x^1(xy'^2-\frac{4x^2-1}{4x})dx$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^1\left(xy'^2-\frac{x^2-\frac{1}{4}}{x}y^2\right)dx=\int_0^1 x\left[y'+(\tfrac{1}{2x}-\mathrm{ctg}x)y\right]^2dx \geq 0$$

J(y) fonksiyonelinin pozitif olduğu elde edilmiş olur.

Örnek 2 :

$$J(y)=\int_0^1\left(xy'^2-\frac{x^2-\frac{9}{4}}{x}y^2\right)dx$$

fonksiyonelinin (4.2) deki D(J) tanım kümesinde pozitif olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Fonksiyonel de $P(x)=x$, $Q(x)=\dfrac{4x^2-9}{4x}$, a=0 b=1 ve tanım bölgesi olarak

$$D(J)=\left\{y(x)\in C^1[0,1],\ y(0)=y(1)=0,\ \int_a^b(P(x)y'^2+Q(x)y^2)dx<\infty\right\}$$

kümesi ele alınır.

Fonksiyonele Euler-Jacobi denklemi uygulandığında,

$$-(P(x)y')' + Q(x)y = 0$$

$$-(xy')' + \frac{4x^2-9}{4x}y = 0$$

veya bu denklem düzenlenirse

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{9}{4})y = 0$$

elde edilir ki bu denklem ikinci mertebeden $\alpha = \frac{3}{2}$ indisli bir Bessel denklemidir (Bak Bölüm 2). Bu denklemin (0,1] de eşlenik nokta sağlamayan çözümü

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(\frac{\text{Sin}x}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{\cos x}{x^{\frac{1}{2}}})$$

dir. Bu çözüm teorem 1'e uygulandığın da

$$u'(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}\cos x - \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\sin x}{x^3} - \frac{-x^{\frac{1}{2}}\sin x - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\cos x}{x}$$

$$u'(x) = \frac{2x^{\frac{3}{2}}\cos x - 3x^{\frac{1}{2}}\sin x + 2x^{\frac{5}{2}}\sin x + x^{\frac{3}{2}}\cos x}{2x^3},$$

$$x\frac{u'(x)}{u(x)} = x\frac{2x^{\frac{3}{2}}\cos x - 3x^{\frac{1}{2}}\sin x + 2x^{\frac{5}{2}}\sin x + x^{\frac{3}{2}}\cos x}{2x^3}\,\frac{x^2}{x^{\frac{1}{2}}\sin x - x^{\frac{3}{2}}\cos x}$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}\cos x - 3x^{\frac{1}{2}}\sin x + 2x^{\frac{5}{2}}\sin x + x^{\frac{3}{2}}\cos x}{2(x^{\frac{1}{2}}\sin x - x^{\frac{3}{2}}\cos x)}$$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{x^{\frac{5}{2}}\sin x}{2(x^{\frac{1}{2}}\sin x-x^{3/2}\cos x)}$$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{\sin x}{\dfrac{\sin x}{x^2}-\dfrac{\cos x}{x}}$$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{x^2\sin x}{\sin x-\cos x}$$

olduklarından (4.4) şartı sağlanır, yani

$$\lim_{x\to a}\left|x\frac{u'(x)}{u(x)}\right|=\lim_{x\to 0}\left|-\frac{3}{2}+\frac{x^2\sin x}{\sin x-\cos x}\right|=\left|-\frac{3}{2}+3\right|=\frac{3}{2}<\infty$$

dir. Ayrıca, $x\in(0,1)$ ve $y(x)\in D(J)$ için örnek 1 deki $\varphi(x)$'in hesaplanmasındaki işlemler burada da benzer şekilde yapılarak

$$\varphi(x)=\int_0^1\left(xy'^2-\frac{x^2-\frac{9}{4}}{x}y^2\right)dx$$

elde edilir. Buradan

$$\int_0^1\left(xy'^2-\frac{x^2-\frac{9}{4}}{x}y^2\right)dx=\int_0^1 x\left(y+\frac{3}{2x}+-\frac{x\sin x}{\sin x-x\cos x}\right)^2dx\geq 0$$

J(y) fonksiyonelinin pozitif olduğu görülür.

Örnek 3 :

$$J(y)=\int_0^1\left[(1-x^2)y'^2-6y^2\right]dx$$

Fonksiyonelinin (4.2) deki D(J) tanım kümesinde pozitif olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Fonksiyonel de $P(x)=(1-x)^2$, $Q(x)=-6$, $a=0$ ve $b=1$ ve tanım bölgesi olarak

$$D(J)=\left\{y(x)\in C^1[0,1],\ y(0)=y(1)=0,\ \int_a^b \left(P(x)y'^2+Q(x)y^2\right)dx<\infty\right\}$$

kümesi ele alınır.

$J(y)$ fonksiyoneline Euler-Jacobi denklemi uygulandığında,

$$-\left(P(x)y'\right)'+Q(x)y=0$$

$$-\left((1-x^2)y'\right)'-6y=0$$

veya bu denklem açık yazılırsa

$$(1-x^2)y''-2xy'+6y=0$$

elde edilir ki bu denklem ikinci mertebeden $\alpha=2$ indisli bir Legendre denklemidir (Bak Bölüm 2). Bu denklemin (0,1] de eşlenik nokta sağlamayan çözümü

$$P_2(x)=u(x)=\frac{3x^2-1}{2}$$

dir. Bu çözüm benzer şekilde teoreme 1'e uygulandığında

$$u'(x)=3x$$

$$\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{6x}{3x^2-1}$$

$$(1-x^2)\frac{u'(x)}{u(x)}=(1-x^2)\frac{6x}{3x^2-1}=\frac{6x-6x^3}{3x^2-1}$$

(4.4) şartı sağlanır, yani

$$\lim_{x\to b}\left|P(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right|=\lim_{x\to 1}\left|\frac{6x-6x^3}{3x^2-1}\right|=0<\infty$$

dır. Ayrıca, $x\in(0,1)$ ve $y(x)\in D(J)$ için

$$\varphi(x)=\int_0^x (P(x)(y'-\frac{u'(x)}{u(x)}y)^2 dx=\int_0^x (1-x^2)(y'-\frac{6x}{3x^2-1}y)^2 dx\,dx$$

$$=\int_0^x (1-x^2)y'^2 dx-\int_0^x (1-x^2)\frac{6x}{3x^2-1}2yy'dx+\int_0^x (1-x^2)(\frac{6x}{3x^2-1})^2 y^2 dx$$

$$=-\int_0^x (1-x^2)\frac{6x}{3x^2-1}dy^2+\int_0^x (1-x^2)y'^2 dx+\int_0^x (1-x^2)(\frac{6x}{3x^2-1})^2 y^2 dx$$

$$=-(1-x^2)\frac{6x}{3x^2-1}y^2(x)\Big|_0^x+\int_0^x (\frac{6x-6x^3}{3x^2-1})' y^2(x)dx+$$

$$+\int_0^x (1-x^2)y'^2 dx+\int_0^x (1-x^2)(\frac{6x}{3x^2-1})^2 y^2 dx$$

$$=-(1-x^2)\frac{6x}{3x^2-1}y^2(x)\Big|_0^x+\int_0^x \frac{-18x^4-6+36x^2-36x^4}{(3x^2-1)^2}y^2 dx+\int_0^x (1-x^2)y'^2 dx$$

$$=-(1-x^2)\frac{6x}{3x^2-1}y^2(x)\Big|_0^x+\int_0^x [(1-x^2)y'^2-6y^2]dx$$

y(a)=0 olduğundan ve $x\to 1$ için limite geçilirse

$$\varphi(x)=\int_0^1 [(1-x^2)y'^2-6y^2]dx$$

elde edilir . Buradan da

$$\int_0^1 [(1-x^2)y'^2-6y^2]dx=\int_0^x (1-x^2)(y'-\frac{6x}{3x^2-1}y)^2 dx\geq 0$$

J(y) fonksiyonelinin pozitif olduğu çıkar.

Örnek 4 :

$$J(y)=\int_0^1 (xe^{-x}y'^2 - e^{-x}y^2)dx$$

fonksiyonelin (4.2) deki D(J) tanım kümesinde pozitif olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Fonksiyonel de $P(x)=xe^{-x}$, $Q(x)=-xe^{-x}$, a=0 ,b=1 ve tanım bölgesi olarak

$$D(J)=\left\{y(x)\in C^1[0,1],\ y(0)=y(1)=0,\ \int_a^b (P(x)y'^2+Q(x)y^2)dx<\infty\right\}$$

kümesi ele alınır.

Fonksiyonele Euler-Jacobi denklemi uygulandığında

$$-(P(x)y')'+Q(x)y=0$$

$$-(xe^{-x}y')'-xe^{-x}y=0$$

veya bu denklem düzenlenir ve e^{-x} ile bölünürse

$$xy''+(1-x)y'+y=0.$$

elde edilir ki bu denklem ikinci mertebeden $\alpha=1$ indisli bir Laguerre denklemidir (Bak: Bölüm 2). Bu denklemin (0,1] de eşlenik nokta sağlamayan çözümü

$$L_1(x)=u(x)=-x+1$$

ele alınarak bu çözüm teorem 1'e uygulandığında

$$u'(x)=-1$$

$$\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{-1}{-x+1}=\frac{1}{x-1}$$

$$P(x)\frac{u'(x)}{u(x)}=xe^{-x}\frac{1}{x-1}$$

olduğundan (4.4) şartı sağlanır, yani

$$\lim_{x\to a}\left|P(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right| = \lim_{x\to 0}\left|\frac{xe^{-x}}{x-1}\right| = 0 < \infty$$

dir. Ayrıca $x\in(0,1)$ ve $y(x)\in D(J)$ için

$$\varphi(x) = \int_x^1 (P(x)(y' - \frac{u'(x)}{u(x)}y)^2\,dx = \int_x^1 xe^{-x}(y' - \frac{1}{x-1}y)^2\,dx$$

$$= \int_x^1 xe^{-x}y'^2\,dx - \int_x^1 xe^{-x}\frac{1}{x-1}2yy'dx + \int_x^1 xe^{-x}\frac{1}{(x-1)^2}y^2dx$$

$$= -\int_x^1 xe^{-x}\frac{1}{x-1}dy^2 + \int_x^1 xe^{-x}y'^2\,dx + \int_x^1 xe^{-x}\frac{1}{(x-1)^2}y^2dx$$

$$= -\frac{xe^{-x}}{x-1}y^2(x)\Big|_x^1 + \int_x^1 \frac{(e^{-x} - xe^{-x})(x-1) - xe^{-x}}{(x-1)^2}y^2(x)dx$$

$$= -\frac{xe^{-x}}{x-1}y^2(x)\Big|_x^1 + \int_x^1 \frac{-e^{-x}(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}y^2(x)dx + \int_0^x xe^{-x}y'^2(x)dx$$

$$= -\frac{xe^{-x}}{x-1}y^2(x)\Big|_x^1 + \int_x^1 (xe^{-x}y'^2 - e^{-x}y^2)dx$$

$y(b) = 0$ olduğundan, $x\to 0$ için limite geçilirse

$$\varphi(x) = \int_0^1 (xe^{-x}y'^2 - e^{-x}y^2)dx$$

çıkar. Buradan

$$\int_0^1 (xe^{-x}y'^2 - e^{-x}y^2)dx = \int_x^1 xe^{-x}(y' - \frac{1}{x-1}y)^2dx \geq 0$$

$J(y)$ Fonksiyonelin pozitif olduğu görülür.

BÖLÜM 5: DEJENERE OLMUŞ KUADRATİK FONKSİYONELİN MİNİMUM DEĞERİNİN HESAPLANMASI

Klasik varyasyon hesabının aşağıdaki problemini ele alalım ,

$$K(x(.)) = \int_0^T \left(A(t)\dot{x}^2(t) + 2C(t)x(t)\dot{x}(t) + B(t)x^2\right)dt \to \inf \tag{5.1}$$

$$x(0)=0, \qquad x(T)=\xi \tag{5.2}$$

Burada A(t), B(t) ve C(t) fonksiyonları $C^2[0,T]$ sınıfındandir.

Bu problemde güçlendirilmiş Legendre şartının sağlandığını, yani $\forall t \in [0,T]$ için $A(t) > 0$ olduğunu kabul edelim. Yukarıdaki (5.1)-(5.2) probleminin araştırılmasında (5.1) fonksiyoneli ile bağlı

$$-\frac{d}{dt}\left[A(t)\dot{x}(t) + C(t)x(t)\right] + C(t)\dot{x} + B(t)x(t) = 0 \tag{5.3}$$

denkleminin çok büyük bir özellik taşıdığı bilinmektedir [1],[15]. Varyasyon hesabında (5.3) denklemine Euler-Jacobi denklemi denir. Eğer bu (5.3) denklemin $h(0)=0$, $\dot{h}(0)=1$ şartlarını sağlayan çözümü (0,T] aralığında herhangi bir noktada sıfır olmazsa (5.1) fonksiyonelinin pozitifliğini söylemek mümkündür [2], [5]. Euler-Jacobi denkleminin $h(0)=0$, $\dot{h}(0)=1$ şartını sağlayan h(t) çözümünün sıfırlarına, yani $h(\tau)=0$ olan τ noktasına t=0 noktası ile ***eşlenik*** nokta denir. Böylece, eğer (0,T] aralığında eşlenik nokta yoksa, (5.1) fonksiyoneli pozitif değer alır [22-24].

Biz (5.3) denkleminin $h(0)=0$, $\dot{h}(0)=1$ çözümünün $h(T)=0$ olduğu hali araştıracağız ve bu halde (5.1) fonksiyonelinin minimumunun $x(T)=\xi$ ile bağlı olduğunu göstereceğiz. Genel ekstermal problemlerde olduğu gibi (5.1) fonksiyonelinin minimum değerini S ile gösterelim. Aşikardır ki bu minumum değer ξ ile bağlıdır ve

$$S=S(\xi) \tag{5.4}$$

şeklinde yazılır. Böylece ,

$$S(\xi)=\min K(x(.)) \tag{5.5a}$$

$$x(0)=0,\ \ x(T)=\xi \tag{5.5b}$$

olur.

Teorem 1: (5.1) denkleminin h(0)=0, $\dot{h}(0)=1$ şartını sağlayan çözümü yalnız T noktasında sıfıra çevrilirse, yani $h(t)\neq 0,\ t\in(0,T),\ h(T)=0$ ise

$$S(\xi)=\begin{cases} 0 & \text{eğer} \quad \xi=0 \\ -\infty & \text{eğer} \quad \xi\neq 0 \end{cases} \tag{5.6}$$

dir.

İspat. Teoremin ispatını iki kısımmda inceleyeceğiz.

1. eğer $\xi=0$ ise $S(\xi)=0$ olduğunu gösterelim. Gerçekten teoremde adı geçen h(t) fonksiyonu üzerinde K(x(.)) fonksiyonelinin değerini hesaplarsak

$$K(h(t))=\int_0^T\left(A(t)\dot{h}^2(t)+2C(t)h(t)\dot{h}(t)+B(t)h^2(t)\right)dt$$

$$=A(t)\dot{h}(t)\,h(t)\Big|_0^T+Ch^2(t)\Big|_0^T+\int_0^T\Big[-\frac{d}{dt}\left(A(t)\dot{h}(t)+Ch(t)\right)+C(t)\dot{h}(t)+B(t)x(t)\Big]x(t)dt=0$$

olur.

Integral altındaki ifadenin sıfırlığı h(t) fonksiyonunun (5.3) denklemini sağlamasından çıkıyor. $K(x(.))\geq 0$ olduğunu da gözönünde tutarak [2], [21-22]. S(0)=0 olduğunu kanıtlamış oluruz.

2. $\xi\neq 0$ olsun $\varepsilon>0$ olmak üzere $x_\varepsilon(t)=\dfrac{\xi}{h(T-\varepsilon)}h(t)$ fonksiyonlar ailesini kuralım. Buradan aşikardır ki

$$x_\varepsilon(0)=\frac{\xi}{h(T-\varepsilon)}h(0)=0,$$

$$x_\varepsilon(T-\varepsilon)=\frac{\xi}{h(T-\varepsilon)}h(T-\varepsilon)=\xi$$

olur.

(5.1) denklemi homojen ve lineer denklem olduğu için $x_\varepsilon(t)$ fonksiyonları bu denklemin çözümüdürler. Şimdi aşağıdaki

$$Z_\varepsilon(t)=\begin{cases} x_\varepsilon(t) & \text{eğer} \quad 0 \le t \le T-\varepsilon \\ \xi & \text{eğer} \quad T-\varepsilon \le t \le T \end{cases} \tag{5.7}$$

fonksiyon ailesini ele alalım. Bu fonksiyon içinde $Z_\varepsilon(0)=0$, $Z_\varepsilon(T)=\xi$ olduğu aşikardır ve $Z_\varepsilon(t)$ fonksiyonları da (5.1) denkleminin çözümüdürler.

$T-\varepsilon \le t \le T$ aralığında $\dot{Z}_\varepsilon(t)=0$ ve

$\dot{x}_\varepsilon(t) = \dfrac{\xi}{h(T-\varepsilon)}\dot{h}(t)$, $\quad x_\varepsilon(T-\varepsilon)=\xi \quad$ olduğundan (5.7) de ki fonksiyon üzerinde (4.1) deki fonksiyenelin yani $K(Z_\varepsilon(t))$ değerini hesaplarsak

$$K(Z_\varepsilon(t))= \int_0^{T-\varepsilon}\left(A(t)\dot{x}_\varepsilon^2(t) + 2C(t)x_\varepsilon(t)\dot{x}_\varepsilon(t) + B(t)x_\varepsilon^2(t)\right)dt + \int_{T-\varepsilon}^{T}\xi^2 B(t)dt$$

$$= \int_0^{T-\varepsilon}(A(t)\dot{x}_\varepsilon(t)d\dot{x}_\varepsilon(t) + \int_0^{T-\varepsilon} C(t)dx_\varepsilon^2(t) + \int_0^{T-\varepsilon} B(t)x_\varepsilon^2(t)dt + \int_{T-\varepsilon}^{T}\xi^2 B(t)dt$$

$$=A(t)\dot{x}_\varepsilon(t)x_\varepsilon(t)\Big|_0^{T-\varepsilon} + \int_0^{T-\varepsilon} -\frac{d}{dt}\left(A(t)\dot{x}_\varepsilon(t)\right)x_\varepsilon(t)dt + C(t)x_\varepsilon^2(t)\Big|_0^{T-\varepsilon} +$$

$$+ \int_0^{T-\varepsilon} -\dot{C}(t)x_\varepsilon^2(t)dt + \int_0^{T-\varepsilon} B(t)x_\varepsilon^2(t)dt + \int_{T-\varepsilon}^{T}\xi^2 B(t)dt$$

$$=\left(A(t)x_\varepsilon(t)\dot{x}_\varepsilon(t)+C(t)x_\varepsilon^2(t)\right)\Big|_0^{T-\varepsilon} + \int_0^{T-\varepsilon}\Big[-\frac{d}{dt}\left(A(t)\dot{x}_\varepsilon(t) + C(t)x_\varepsilon\right) + C(t)\dot{x}_\varepsilon(t)+$$

$$+B(t)x_\varepsilon(t)\Big]x_\varepsilon(t)dt + \int_{T-\varepsilon}^{T}\xi^2 B(t)dt$$

$$=A(T-\varepsilon)\dot{x}_\varepsilon(T-\varepsilon)x_\varepsilon(T-\varepsilon)+C(T-\varepsilon)x_\varepsilon^2(T-\varepsilon)+\xi^2\int_{T-\varepsilon}^{T}B(t)dt \tag{5.8}$$

olur. Burada dördüncü eşitlikteki integral altındaki ifadenin değerinin sıfır olduğu (5.3) denklemıinden görülebilir. Buradan $x_\varepsilon(T-\varepsilon)$ ve $\dot{x}_\varepsilon(T-\varepsilon)$ (5.8) de değerlerini yerine yazarsak

$$K(Z_\varepsilon(t)) = A(T\text{-}\varepsilon).\xi\frac{\xi}{h(T-\varepsilon)}\dot{h}(T-\varepsilon) + C(T\text{-}\varepsilon)\xi^2 + \xi^2\int_{T-\varepsilon}^{T} B(t)dt$$

$$= \xi^2\Big[\, A(T\text{-}\varepsilon)\,\frac{\dot{h}(T-\varepsilon)}{h(T-\varepsilon)} + C(T\text{-}\varepsilon) + \int_{T-\varepsilon}^{T} B(t)dt\Big] \qquad (5.9)$$

çıkar. Diferansiyel hesabın ortalama değer teoremine göre

$$h(T) - h(T-\varepsilon) = \varepsilon\dot{h}(\theta_1) \qquad T-\varepsilon \le \theta_1 \le T$$

$$\dot{h}(T) - h(T-\varepsilon) = \varepsilon\ddot{h}(\theta_2) \qquad T-\varepsilon \le \theta_2 \le T$$

olduğundan,

$$h(T-\varepsilon) = h(T) - \varepsilon\dot{h}(\theta_1) \qquad T-\varepsilon \le \theta_1 \le T \qquad (5.10a)$$

$$\dot{h}(T-\varepsilon) = \dot{h}(T) - \varepsilon\ddot{h}(\theta_2) \qquad T-\varepsilon \le \theta_2 \le T \qquad (5.10b)$$

(5.10a) ve (5.10b) ifadelerini (5.9) da yerine yazarsak

$$K(Z_\varepsilon(t)) = \xi^2\Big[A(T\text{-}\varepsilon)\,\frac{\dot{h}(T) - \varepsilon\ddot{h}(\theta_2)}{h(T) - \varepsilon\dot{h}(\theta_1)} + C(T-\varepsilon) + \int_{T-\varepsilon}^{T} B(t)dt\Big] \qquad (5.11)$$

çıkar. Burada h(T)=0 ve $\int_{T-\varepsilon}^{T} B(t)dt$ sonlu bir terim olduğundan (5.11) denklemi

$$K(Z_\varepsilon(t)) = \xi^2\Big[-\frac{1}{\varepsilon}A(T\text{-}\varepsilon)\,\frac{\dot{h}(T)}{\dot{h}(\theta_1)} + A(T-\varepsilon)\frac{\ddot{h}(\theta_2)}{\dot{h}(\theta_1)} + C(T-\varepsilon) + O(1)\Big] \qquad (5.12)$$

olup, $\varepsilon \to 0$ giderken $\frac{\dot{h}(T)}{\dot{h}(\theta_1)} \to 1$, $\frac{\ddot{h}(\theta_2)}{\dot{h}(\theta_1)} \to \frac{\ddot{h}(T)}{\dot{h}(T)}$,v.s olduğu için (5.12) de parantez içindeki ifadenin limiti $-\infty$ dur. Böylece $\dot{h}(T) \neq 0$ ve teklik teoremine göre $\dot{h}(T) = 0$ olsaydı, h(t)=0 den $\varepsilon \to 0$, $K(Z_\varepsilon(t)) \to -\infty$ dır. Bu ise $S(\xi) = -\infty$ olduğunu gösterir. Böylece teorem ispat edilmiş oldu.

Örnek 1: $\int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2)dt$, x(0) =0, x(π)=1

fonksiyonelinin minimum değerini hesaplayınız.

Çözüm: Kuadratik Fonksiyonele (5.3) denklemi uygulandığın da

$$-\frac{d}{dt}\left[A(t)\dot{x}(t) + C(t)x(t)\right] + C(t)\dot{x}(t) + B(t)x(t) = 0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{dt}(2\dot{x}) - 2x = 0 \quad \Rightarrow \ddot{x} + x = 0$$

şeklinde ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$$

dir ve $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ başlangıç şartları altında

$$x(t) = \sin t$$

olur. Bu denklem için $t=\pi$ noktasının eşlenik nokta olduğu görülmektedir [23-25]. Çözüm iki aşamada gösterilecektir,

1) x(t) fonksiyonu üzerinde K(x(t)) fonksiyonelinin değeri hesaplanır:

$$K(x(t)) = \int_0^\pi \left[A(t)\dot{x}^2(t) + 2C(t)x(t)\dot{x}(t)B(t)x^2(t)\right]dt$$

$$= \int_0^\pi (\dot{x}^2 - x^2)dt = \int_0^\pi (\dot{x}\dot{x} - x^2)dt = \int_0^\pi \dot{x}dx - \int_0^\pi x^2 dt$$

$$= \dot{x}(t)x(t)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi (-\frac{d}{dt}\dot{x} - x)xdt.$$

integral altındaki ifadenin sıfır olması x(t) fonksiyonunun (5.3) denklemini sağlamasından görülür. Buradan $K(X(t))\geq 0$ olduğu çıkar.

2) $\varepsilon>0$ olmak üzere bir

$$X_\varepsilon(t)=\begin{cases} \dfrac{\sin t}{\sin\varepsilon} & 0\leq t\leq \pi-\varepsilon \\ 1 & \pi-\varepsilon\leq t\leq \pi \end{cases}$$

fonksiyon ailesi kurulum. Bu halde

$$\dot{x}_\varepsilon(t)=\begin{cases} \dfrac{\cos t}{\sin\varepsilon} & 0\leq t\leq \pi-\varepsilon \\ 0 & \pi-\varepsilon\leq t\leq \pi \end{cases}$$

olup, bu fonksiyon $K(X_\varepsilon)$' ye uygulanırsa

$$K(X_\varepsilon)=\int_0^\pi \left(\dot{X}_\varepsilon^2(t)-X_\varepsilon^2(t)\right)dt$$

$$K(X_\varepsilon)=\int_0^{\pi-\varepsilon}\left(\dot{X}_\varepsilon^2(t)-X_\varepsilon^2(t)\right)dt+\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\left(\dot{X}_\varepsilon^2(t)-X_\varepsilon^2(t)\right)dt$$

$$=\int_0^{\pi-\varepsilon}\left(\frac{\cos^2 t}{\sin^2\varepsilon}-\frac{\sin^2 t}{\sin^2\varepsilon}\right)dt+\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}-\frac{\sin^2 t}{\sin^2\varepsilon}dt$$

$$=\int_0^{\pi-\varepsilon}\frac{\cos 2t}{\sin^2\varepsilon}dt-\frac{1}{\sin^2\varepsilon}\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt$$

elde edilir. Son integraller de trigonometrik özdeşlikler kullanılırsa,

$$=\frac{\sin 2t}{2\sin^2\varepsilon}\Bigg|_0^{\pi-\varepsilon}-\frac{1}{\sin^2\varepsilon}\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right)\Bigg|_{\pi-\varepsilon}^{\pi}$$

$$=\frac{-\cos\varepsilon}{2\sin\varepsilon}-\frac{\varepsilon}{2\sin^2\varepsilon}$$

elde edilir. Buradan $\varepsilon \to 0$ için limite geçilirse

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-\cos\varepsilon}{2\sin\varepsilon}\to -\infty \quad , \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{2\sin^2\varepsilon}\to \infty$$

$K(X_\varepsilon) = -\infty$ olur.

Örnek 2: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}^2-4x^2)dt$, $x(0)=0$, $x(\frac{\pi}{2})=1$

fonksiyonelinin minimum değerini hesaplayınız.

Çözüm: Kuadratik Fonksiyonele (5.3) denklemi uygulandığında

$$-\frac{d}{dt}[A(t)\dot{x}(t)+C(t)x(t)]+C(t)\dot{x}(t)+B(t)x(t)=0 \Rightarrow$$

$$-\frac{d}{dt}(2\dot{x})-8x=0 \quad \Rightarrow \ddot{x}+4x=0$$

şeklinde ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklemin çözümü

$$x(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t$$

dir ve $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1$ başlangıç şartları altında çözümü

$$x(t)=\sin 2t$$

olur. Bu denklem için $t=\pi/2$ noktasının eşlenik nokta olduğu görülmektedir. Bu Çözüm iki aşamada gösterilir,

1) $x(t)$ fonksiyonu üzerinde $K(x(t))$ fonksiyonelinin değeri hesaplanır,

$$K(x(t))=\int_0^{\pi}\left[A(t)\dot{x}^2(t)2+C(t)x(t)\dot{x}(t)B(t)x^2(t)\right]dt$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}^2-4x^2)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\dot{x}\dot{x}-4x^2)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dot{x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}4x^2dt$$

$$=\dot{x}(t)x(t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-\frac{d}{dt}\dot{x}-4x)xdt$$

integral altındaki ifadenin sıfır olması x(t) fonksiyonunun Euler-Jacobi denklemini sağlamasından çıkıyor. Buradan K(X(t))≥0 olduğu çıkar.

2) ε>0 olmak üzere bir

$$X_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2t}{\sin 2\varepsilon} & 0\le t\le \frac{\pi}{2}-\varepsilon\\[2ex] 1 & \frac{\pi}{2}-\varepsilon\le t\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

fonksiyon ailesini kuralım. Bu halde

$$\dot{X}_\varepsilon(t)=\begin{cases}\dfrac{2\cos 2t}{\sin 2\varepsilon} & 0\le t\le \frac{\pi}{2}-\varepsilon\\[2ex] 0 & \frac{\pi}{2}-\varepsilon\le t\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

olup bu fonksiyonu K(X$_\varepsilon$)' ye uygularsak

$$K(X_\varepsilon)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\dot{X}_\varepsilon^2(t)-4X_\varepsilon^2(t)\right)dt$$

$$K(X_\varepsilon)=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\left(\dot{X}_\varepsilon^2(t)-4X_\varepsilon^2(t)\right)dt+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dot{X}_\varepsilon^2(t)-4X_\varepsilon^2(t)\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\left(\frac{4\cos^2 2t}{\sin^2 2\varepsilon}-\frac{4\sin^2 2t}{\sin^2 2\varepsilon}\right)dt+\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}-4\frac{\sin^2 2t}{\sin^2 2\varepsilon}dt$$

$$=\frac{4}{\sin^2 2t}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}\cos 4t\,dt-4\int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 4t}{2}dt\right)$$

$$=\frac{1}{\sin 2\varepsilon}\left(\sin 4t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}-\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\sin 4t\right)\Big|_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\right)$$

$$=\frac{-\cos 2\varepsilon}{\sin 2\varepsilon}-\frac{2\varepsilon}{\sin^2 2\varepsilon}$$

elde edilir. Buradan $\varepsilon \to 0$ için limite geçilirse

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\frac{-\cos 2\varepsilon}{\sin\varepsilon}\to -\infty \quad , \quad \lim_{\varepsilon \to 0}\frac{2\varepsilon}{\sin^2 2\varepsilon}\to \infty$$

$K(X_\varepsilon)=-\infty$ olur.

BÖLÜM 6: İKİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMİN ÇÖZÜMÜNÜN POZİTİFLİĞİ

Bu bölümde iknici mertebeden diferansiyel denklemin çözümünün pozitifliği incelenecektir. Aşağıda ki

$$P(x)y'' + P'(x)y' - Q(x)y = 0 \tag{6.1}$$

$$y(0) = 0 \; , \; y'(0) = 1 \tag{6.2}$$

şeklindeki ikinci mertebeden diferansiyel denklem göz önüne alınır. Bu denklemde P(x), Q(x) $C^1[0,T]$ sınıfındandır. Burada (6.1) denkleminin (6.2) başlangıç şartı altında [0,T] aralığında ne zaman pozitif bir çözümü olacağı ele alınacaktır.

(6.1) denklemi özel bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemin kendine eşleniği (self adjoint)

$$-\frac{d}{dt}\left(P(x)y'(x)\right) + Q(x)y(x) = 0 \tag{6.3}$$

şeklindedir. (6.2) denklemi aşağıdaki gibi bir K(y) kuadratik fonksiyoneli ile

$$K(y) = \int_0^T (P(x)y'^2 + Q(x)y^2)dx \tag{6.4}$$

bağlı olup tanım kümesi de $D(K) = y(x) \in PC^1[0,T]$, $y(0) = y(T) = 0$ dir.

Diferansiyel denklemin çözümünüm pozitifliğini araştırmacılar aşağıda verilen düz mesele ile incelemişlerdir. Düz mesele ile Legendre ve Jacobi ilgilenmiştir [1-3]. Burada ise diferansiyel denklemin çözümünün pozitifliği aşağıda verilen ters mesele ile incelenecektir.

Düz mesele: Eğer Jacobi denkleminin (0,T) aralığında sıfıra çevrilmeyen bir çözümü varsa o zaman K(y) kuadratik fonksiyoneli D(K) tanım bölgesinde her zaman pozitif bir çözüme sahiptir [1],[3],[26-29].

Ters Mesele: K(y) kuadratik fonksiyoneli D(K) tanım bölgesinde pozitif olduğu takdirde, K(y) fonksiyoneline bağlı olarak elde edilen (6.1) diferansiyel denklemin pozitif bir çözümü olup olmadığı arştırılacaktır.

İncelemeye başlamadan önce aşağıdaki önerme ispat edilecektir.

Lemma 1: $\varphi[0,a] \to R$ türetilebilir bir fonksiyon olsun ve $\varphi'(+0) < 0$ ise, öyle bir $\lambda_0 \in (0,a]$ vardır ki $\varphi(\lambda_0) < \varphi(0)$ dir.

İspat: φ türetilebilir bir fonksiyon olduğu için

$$\varphi(\lambda) - \varphi(0) = \varphi'(+0)\lambda + \psi(\lambda) \qquad (6.5)$$

şeklinde yazabilir. Burada $\psi(\lambda)$ fonksiyonu

$$\lim_{\lambda \to +0} \frac{|\psi(\lambda)|}{\lambda} = 0$$

özelliğine sahiptir, yani $\psi(\lambda) = 0(\lambda)$ dir. Bu özelliğe göre $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ var ki $\lambda < \delta$ olduğunda

$$\frac{|\psi(\lambda)|}{\lambda} < \varepsilon$$

olur. (λ>0 olduğu için $|\lambda| = \lambda$ olur). ε 'nu $\varepsilon = \frac{|\varphi'(+0)|}{2}$ gibi seçersek ve $\lambda < \delta$ için

$$\frac{|\psi(\lambda)|}{\lambda} < \frac{|\varphi'(+0)|}{2}$$

olur. (6.5) den $\varphi'(+0) = -|\varphi'(+0)|$ olduğu için $(\varphi'(+0) < 0)$ dir. Bu ifadeler (6.5) de yazılırsa

$$\varphi(\lambda) - \varphi(0) = \lambda\left[\varphi'(+0)\lambda + \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\right] = \lambda\left[-|\varphi'(+0)|\lambda + \frac{\psi(\lambda)}{\lambda}\right] < \lambda\left[-|\varphi'(+0)|\lambda + \frac{|\varphi'(+0)|}{2}\right] <$$

$$= \lambda\left[-\frac{|\varphi'(+0)|}{2}\right] < 0$$

elde edilir. Böylece

$$\varphi(\lambda)-\varphi(0)<0$$

veya

$$\varphi(\lambda)<\varphi(0),\ \lambda<\delta$$

dir. Buradan $\exists\lambda_0$ var ki

$$\varphi(\lambda_0)<\varphi(0)$$

dir.

Teorem 1: Eğer K(y) kuadratik fonksiyoneli *D(K)* tanım bölgesinde pozitif ise (6.4) deki K(y) fonksiyonelinden Euler-Jacobi denklemi yardımıyla elde edilen,

$$P(x)y''+P'(y)''-Q(x)y=0$$

(6.1) şeklindeki ikinci mertebeden diferansiyel denklemin $(0,T)$ aralığında. $y_0(x)>0$ şeklinde pozitif bir çözümü vardır.

İSPAT: Teoremin ispatını bir kaç parçaya ayıralım:

1) Yukarıdaki (6.1) denklemi ele alınır. (6.1) denklemi ikinci mertebeden lineer homojen bir diferansiyel denklemdir. Bu diferansiyel denklem için aşağıdaki Cauchy başlangıç

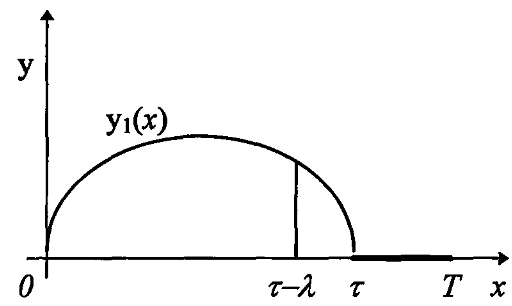
$$y_0(0)=0\,,\qquad y_0'(0)=1$$

(6.2) şartlarını koyalım. (6.2) başlangıç şartını sağlayan bütün $(0,T)$ aralığında denklemin tek bir çözümü vardır. (Cauchy teoreminin lineer denklemlere uygulanmasından bu çıkar. Yani çözüm bütün $(0,T)$ aralığında sağlanır).

2) Gösterelim ki (0,T) aralığında bu çözüm pozitiftir. Böylece teoremde hükmedilen pozitif çözümüm varlığını göstermiş oluruz. Tersini düşünelim, eğer bu $y_0(x)$, $(0,T)$ aralığında pozitif değilse $\exists$ x_1 ve x_2 $\in(a,b)$ var ki, $y_0(x_1)>0$, $y_0(x_2)<0$ ise Cauchy'nin aralık değer teoremine göre $\exists$ $\tau\in(x_1,x_2)$ var ki $y_0(\tau)=0$ dir ve Fonksiyonumuz

$$y_1(x)=\begin{cases} y_0(x) & 0\le x\le\tau \\ 0 & \tau\le x\le T\end{cases}\tag{6.6}$$

şeklinde ifade edilir. (6.6) ifadesi aşağıda şekil 6 da gösterilmiştir.



Şekil 6

3) Kuadratik fonksiyonelin $y_1(x)$ üzerindeki değerini yani, $K(y_1(x)) = 0$ olduğunu gösterelim. Gerçekten de ,

$$K(y_1(x)) = \int_0^T \left(P(x) y_0'^2(x) + Q(x) y_0^2(x) \right) dx$$

$$= \int_0^\tau \left(P(x) y_0'^2(x) + Q(x) y_0^2(x) \right) dx + \int_\tau^T \left(P(x)\, 0 + Q(x)\, 0 \right) dx$$

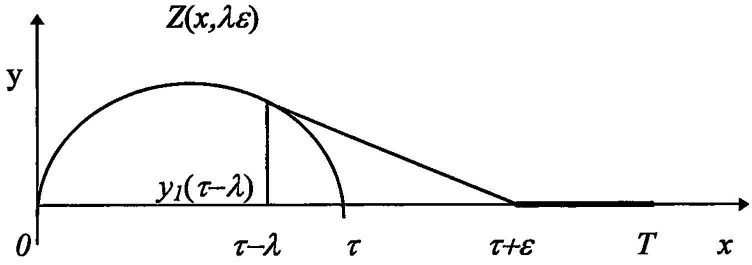
$$= \int_0^\tau P(x) y_0'(x) dy_0(x) + \int_0^\tau Q(x) y_0^2(x) dx =$$

$$= P(x) y_0'(x) y_0(x) \Big|_0^\tau + \int_0^\tau -\frac{d}{dx}\left(P(x) y_0'(x) \right) y_0(x) dx + \int_0^\tau Q(x) y_0^2(x) dx =$$

$$= \int_0^\tau y_0(x) \left[-\frac{d}{dx}\left(P(x) y_0(x) \right) + Q(x) y_0(x) \right] dx = 0$$

dir. Son integral altında ki ifadenin sıfır olduğu (6.3) denkleminden görülür. Böylece $y_1(x)$ fonksiyonu (6.1) denkleminin çözümüdür.

4) Yeni bir fonksiyon kuralım. $\lambda > 0$ *ve* $\varepsilon > 0$ olmak üzere $0 < \tau - \lambda < \tau$ ve $\tau < \tau + \varepsilon < T$ olacak biçimde seçilen ve şekil 7 de görülen



Şekil 7

$$Z(x,\lambda,\varepsilon)=\begin{cases} y_0(x) & 0\le x\le \tau-\lambda \\ \dfrac{y_0(\tau-\lambda)}{\varepsilon+\lambda}(\tau+\varepsilon-x) & \tau-\lambda\le x\le \tau+\varepsilon \\ 0 & \tau+\varepsilon\le x\le T \end{cases} \tag{6.7}$$

$Z(x,\lambda,\varepsilon)$ fonksiyonu kurulur.

5) Kuadratik fonksiyonelin $Z(x,\lambda)$ üzerinde ki değeri hesaplanır. İşlemlerin kısa olması için $Z(x,\lambda,\varepsilon)$ yerine $Z(x,\lambda)$ alınır,

$$\varphi(\lambda)=K\big(Z(x,\lambda)\big)=\int_0^T\big(P(x)Z'^2(x,\lambda)+Q(x)Z^2(x,\lambda)\big)dx \tag{6.8}$$

dir. Önce $\varphi(0)$ hesaplanır, bunun için (6.7) de $\lambda=0$ için

$$Z(x,0)=\begin{cases} y_1(x) & 0\le x\le \tau \\ 0 & \tau\le x\le T \end{cases} \tag{6.9}$$

fonksiyonu elde edilir. Buradan

$$\varphi(0)=K(Z_0)=\int_0^\tau P(x)y_0'^2(x)+Q(x)y_0^2dx=0$$

dir. $\varphi(0)=0$ olduğu görülür. Şimdi de $\varphi(0)$ ve$\varphi(\lambda)$' nın farkına bakalım:

$$\varphi(\lambda)-\varphi(0)=\int_0^{\tau-\lambda}\left[P(x)y_0'^2(x)+Q(x)y_0^2(x)\right]dx+\int_{\tau-\lambda}^{\tau+\varepsilon}\left[P(x)Z'^2(t,\lambda)+Q(x)Z^2(t,\lambda)\right]dx-$$

$$-\int_0^{\tau-\lambda}\left[P(x)y_0'^2(x)+Q(x)y_0^2\right]dx-\int_{\tau-\lambda}^{\tau}\left[P(x)y_0'^2+Q(x)y_0^2(x)\right]dx$$

$$=\int_{\tau-\lambda}^{\tau+\varepsilon}\left[P(x)Z'^2(t,\lambda)+Q(x)Z^2(t,\lambda)\right]dx-\int_{\tau-\lambda}^{\tau}\left[P(x)y_0'^2+Q(x)y_0^2(x)\right]dx \qquad (6.10)$$

dir.

6) Önce (6.10) daki $\int_{\tau-\lambda}^{\tau+\varepsilon}\left(P(x)Z'^2(x,\lambda)+Q(x)Z^2(x,\lambda)\right)dx$ integrali değerlendirilir, sonrada Diferansiyel hesabının ortalama değer teoremine göre ;

$$\left|Z(\tau-\gamma,\lambda)\right|=\left|y_1(\tau-\lambda)-y_1(\tau)\right|=\left|\lambda\cdot y_1'(\theta_1)\right| \qquad \tau-\lambda\le\theta_1<\tau \qquad (6.11)$$

$$\left|Z'(x,\lambda)\right|=\left|\frac{y_0(\tau-\lambda)}{\lambda+\varepsilon}\right|=\left|\frac{y_1(\tau-\lambda)}{\lambda+\varepsilon}\right|=\frac{\left|\lambda\cdot y_1'(\theta_1)\right|}{\lambda+\varepsilon}=\frac{\lambda}{\lambda+\varepsilon}\cdot\left|y_1'(\theta_1)\right| \qquad (6.12)$$

dir.

7) Şimdi de İntegral hesabının ortalama değer teoremine göre ;

$$\int_{\tau-\lambda}^{\tau+\varepsilon}\left(P(x)Z'^2(x,\lambda)+Q(x)Z^2(x,y)\right)dx=\frac{y_0^2(\tau-\lambda)}{(\varepsilon+\lambda)^2}\int_{\tau-\lambda}^{\tau+\varepsilon}P(x)dx+\int_{\tau-\lambda}^{\tau+\varepsilon}Q(x)Z^2(x,\lambda)dx$$

$$=P(\theta_2)\cdot\frac{y_0^2(\tau-\lambda)}{(\varepsilon+\lambda)^2}\cdot(\varepsilon+\lambda)+\int_{\tau-\lambda}^{\tau+\varepsilon}Q(x)Z^2(x,\lambda)dx=$$

$$=P(\theta_2)\cdot\frac{\lambda^2\cdot y_1'^2(\theta_1)}{\lambda+\varepsilon}+\int_{\tau-\lambda}^{\tau+\varepsilon}Q(x)Z^2(x,\lambda)dx \qquad (6.13)$$

dir. (6.13) deki birinci ve ikinci ifadelerde $y_0(\tau-\lambda)=y_1(\tau-\lambda)$ ve (6.11),(6.12)'u kullanıldı.

7.1) Burada da (6.13) deki integral ifadesi hesaplanır:

$$\left|\int_{\tau-\lambda}^{\tau+\varepsilon} Q(x)Z^2(x,\lambda)dx\right| \le \int_{\tau-\lambda}^{\tau+\varepsilon} |Q(x)|\cdot Z^2(x,\lambda)dx \le Z^2(\tau-\lambda,\lambda)\cdot \int_{\tau-\lambda}^{\tau+\varepsilon} |Q(x)|dx \le$$

$$=\lambda^2 y_1'^2(\theta_1)M_0(\lambda) = M(\lambda) \qquad (6.14)$$

dir. (6.14) de $M_0(\lambda) = \int_{\tau-\lambda}^{\tau+\varepsilon} |Q(x)|dx$ ve (6.11), (6.12) kullanıldı. Buradan aşikardır ki (6.14)'u , λ'ya bölüp, λ→0 için limite geçilirse,

$$\lim_{x\to 0}\frac{M(\lambda)}{\lambda} = 0$$

dir. Yani (6.14) den

$$M(x) = 0(x) \Rightarrow \int_{\tau-\lambda}^{\tau+\lambda} Q(x)Z^2(x,\lambda)dx = 0(\lambda) \qquad (6.15)$$

elde edilir.

8) Şimdi de (6.10) daki $\int_{\tau-\lambda}^{\tau}\left[P(x)y_0'^2(x) + Q(x)y_0^2(x)\right]dx$ integralini değerlendirirken *7)* deki işlemleri benzer şekilde yapılarak

$$\int_{\tau-\lambda}^{\tau}\left[P(x)y_0'^2 + Q(x)y_0^2\right]dx = P(\theta_3)y_0'^2(\theta_3)\lambda + \int_{\tau-\lambda}^{\tau} Q(x)y_0^2dx \qquad \tau-\lambda \le \theta_3 \le \tau \qquad (6.16)$$

dir.

8.1) Burada da (6.16) daki integral ifadesi 7.1) deki gibi değerlendirilir:

$$\left|\int_{\tau-\lambda}^{\tau} Q(x)y_0^2(x)dx\right| \le y_0^2(\tau-\lambda)\int_{\tau-\lambda}^{\tau}|Q(x)|dx = y_1^2(\tau-\lambda)\int_{\tau-\lambda}^{\tau}|Q(x)|dx =$$

$$= \lambda^2\cdot y_1'^2(\theta_1)\cdot K_0 = N(\lambda) \qquad (6.17)$$

dir. (6.17) de $N_0(\lambda) = \int_{\tau-\lambda}^{\tau}|Q(x)|dx$ ve (6.11), (6.12) kullanıldı. Buradan aşikardir ki (6.17)'yi λ ya bölüp λ→0 için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to 0}\frac{N(\lambda)}{\lambda}=0$$

dir. Yani (6.14) den

$$N(\lambda)=0(\lambda)\Rightarrow\int_{\tau-\lambda}^{\tau}Q(x)y_0^2(x)dx=0(\lambda) \tag{6.18}$$

elde edilir.

9) Böylece (6.13), (6.15), (6.16), (6.17), (6.18) ifadeleri (6.10) da yerine yazılırsa

$$\varphi(\lambda)-\varphi(0)=-P(\theta_3)\cdot y_0'^2(\theta_3)\cdot\lambda+0(\lambda) \tag{6.19}$$

elde edilir. (6.19)'u λ ya bölüp $\lambda\to+0$ için limite geçilirse,

$$\lim_{\lambda\to+0}\frac{\varphi(\lambda)-\varphi(0)}{\lambda}-P(\theta_3)y_0'^2(\theta_3)+\frac{0(\lambda)}{\lambda} \tag{6.20}$$

$$\varphi'(+0)=-P(\tau)y_0'^2(\tau)<0 \tag{6.21}$$

dir. Çünkü $P(\tau)>0$ dir.

10) Lemma 1 'e göre $\exists\ \lambda_0$ var ki

$$\varphi(\lambda_0)<\varphi(0)=0$$

Yani öyle bir $Z(\lambda,\lambda_0)$ kurulur ki $K(Z(x,\lambda_0)<0$ olur. Bu ise şarta tersdir. Çünkü $K(y(x))>0$ kabul edilmişti. Buradan teorem ispat edilmiş olur.

SONUÇ

Bu çalışmada klasik varyasyon hesabının dejenere olmuş problemleri incelenmiş, bu problemlerin genel teorisini oluşturan gerek ve yeter şartlar elde edilmiştir. Klasik varyasyon hesabında dejenere olmuş problemler denince, güçlendirilmiş Legendre şartının bozulması, dolayısıyla ortaya çıkan parça-parça sürekli türevlenebilir fonksiyonların, verilen varyasyon problemine minimum veya maksimum vermesi problemi araştırılmasıdır.

Bu çalışmada ise Legendre şartının sonlu sayıda bozulduğu durumlar incelenmiş, singüler kuadratik fonksiyonelin pozitiflik koşulları elde edilmiştir.

En büyük veya en küçük değerini, süreksiz fonksiyonlar üzerinde alan varyasyon problemler ilk defa ele alınmış, bu problemler için 1. mertebeden gerek şart teorisi kurulmuştur.

Eşlenik nokta kavramı özel durumlarda genelleştirilmiş ve singüler kuadratik fonksiyonelin pozitifliği problemine uygulanmıştır.

İkinci mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünün pozitifliği daha önce Legendre ve Jacobi tarafından düz mesele ile incelenmiştir. Bu çalışmada ise ikinci mertebeden diferansiyel denklemin bir çözümünün pozitifliği ters mesele ile incelenmiş ve ikinci mertebeden diferansiyel denklemin bir çözümünün pozitif olması için bir teorem ispatlanmıştır.

En büyük ve en küçük değerini, süreksiz fonksiyonlar üzerinde alan varyasyon problemleri ilk defa incelendiğinden, ileride yapılacak bir çalışmada değişik metodlarla gerek şart teorisi elde edilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Gelfand, I. M., and Fomin, S. V., *Calculus of Variations*. Prentice Hall. Englewood Chiff. New Jersey, (1963).

[2] Hestenes, M.R, *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*. John Wiley and Sons, New York, (1966).

[3] Bliss, G.A, *Lectures on the Calculus of Variations*, The University of Chicago Press, Chicago ,(1946).

[4] Bolza, O., *Lectures on the Calculus of Variations, Dover Publications*, New York, (1961).

[5] Leitmann, G., *The Calculus of Variations and Optimal Control Plenum* ,Press York and London (1983).

[6] Reid, *Analogues of the Jacobi Condition for the Problem of Mayer in the Calculus of Variation,* Annals of Math.Vol.35,pp 836-848,(1934).

[7] Graves, L.M., *On The Weierstrass Condition for the Problem of Bolza in the Calculus* of Variations, Anals of Math. Vol.33, 747-752,(1932).

[8] Morse, M., *Singular Quadratik Functionals*, Math.Anal. 201, pp 315-340,(1973).

[9] Leighton, W., *Boundary For the Solutions of a Second Order Linear Differantial Equation,* Proc.Nat.Acad.Sci. USA,V.35 N4,(1949).

[10] Tagiyev, M.H, *Necessary and Sufficient Condition for Strong Extremum in Dejenerated Problems of the Calculus of Variations*, Russian Service of Math, V.,34,7, (1979).

[11] Watson, G.N., *Theory of Bessel Functions*, Cambridge, (1922).

[12] Sheple, L.Roos., *Differantial Equations,* Third Edition, John Wiley and Sons, New York, (1980).

[13] Lavden, D.F., *Discontinuous Solutions of Variational Problems*, Journal Australian Math.Soc., Vol .,1, pp 27-37 ,(19 5).

[14] Graves, *Discontinuous Solutions of Space Problem in Calculus of Variationals*, Amer. J.of Math., Vol.,52, pp 1-28,(1930).

[15] Tikhomirov, V.M., *Fundamental Principles of the Theory of Extremal Problems*, John Wiley and Sons, New York ,(1986).

[16] Lawden, D.F., *Minimal Racket Trajectories*, J.of Amer.Rocket Soc.,Vol.,23, pp 360-367, (1953).

[17] Leighton,W., *Principal Quadratic Functionals*, Trans. Amer. Math.Soc.,Vol., 67,pp 252-274 (1955).

[18] Leighton,W.,Martin,A.D., *Quadratic Functionals with a Singular End Point*, Trans. Amer. Math. Soc., Vol.78, pp 98-128 (1955).

[19] Morse, M., Leighton, W., *Singular Quadratik Functionals*, Tran. Amer. Math. Soc., Vol.40, pp 252-286,(1936).

[20] Bell,D.J., and Jacobson,D.H, *Singular Optimal Control Problems*, Academic Press, New York (1975).

[21] Kemble,E.C., *Note on the Sturm-Liouville Eigenvalue-Eigenfunction Problem with singular End-Points*. Proc. Nat. Acad. Scs., Vol 19, 710-714 (1933).

[22] Reid, *The Theory of the Second Variations Calculus*, Amer. Journal of Math.V.57 , pp 573-586, (1935).

[23] Lighton, W., *Principal Quadratic Functionals and Self -Adjoint Second-Order Diff. Equations*. Proc.Nat.Acad.Sci., Usa, V.35., N4, (1949).

[24] Lighton, W., *On Self-Adjoint Diff. Equations of Second Order*. The Journal of The London Math. Society, V.27, N1, pp.37-53, (1952).

[25] Akhiezer, N.I., *The Calculus of Variations*. Blaisdell Pabliching Company, New York, (1962).

[26] Erla, L.H., Haiyan Wong., *On The Existence of Positive Solutions of Ordinary Diff. Equations,* Proceedings of the AMS, Vol.120, N=3, pp743-748, (1994).

[27] Rider, *A note on Discontinuous Solutions in the Calculus of Variations*, Bull. Amer. math. Soc., Vol. 23, pp 237-240, (1917).

[28] Makas, S., *Diferansiyel Denklemin Çözümünün Pozitifliği Hakkında*, IX. Diferansiyel Denklemler Sempozyumu, Sakarya Üniversitesi, Preprint (1995).

[29] Hartman, P., Winter, Aurel, Oscilotory and Non-oscilotory Linear Differantial Equations. A.J.of Math., V.71, pp 627-649 (1949).

ÖZGEÇMİŞ

1965 yılında Rize-Çayeli'nde doğdu. İlk ve orta tahsilini Rize'de, lise Tahsilini ise İstanbul'da yaptı. 1985 yılında Mimar Sinan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne girdi ve buradan 1989 yılında mezun oldu. 1990 da Mimar Sinan Üniversitesi Matematik Bölümüne Araştırma görevlisi olarak girdi. Aynı yıl aynı Üniversite'de Yüksek Lisans'a başladı ve 1992 yılında Yüksek Lisans öğrenimini tamamladı. 1992 yılında Mimar Sinan Üniversitesin'de Doktora öğrenimine başladı. Halen Mimar Sinan Üniversitesi Matematik Bölümündeki görevine devam etmektedir.