-SONLU KLASİK GRUPLAR-

(GENEL LİNEER GRUP,SEMİLİNEER GRUP,ÖZEL LİNEER GRUP, PROJEKTİF GENEL LİNEER GRUP,PROJEKTİF SEMİLİNEER GRUP, PROJEKTİF ÖZEL LİNEER GRUP)

Yüksek Lisans Tezi

Didem İŞLEKEL ÖZTÜRK

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM I

1. Permütasyon Grupları.. 1
2. Sayma Prensibi.. 8
3. Tranzitiflik.. 13
4. Gruplar Teorisi Üzerine Uygulama.. 19
5. Pirimitiflik.. 21

BÖLÜM II

1. Sonlu Geometriler.. 28
2. Sonlu Cisimler.. 31
3. Sonlu Vektör Uzayları.. 33
4. Hiper Düzlem Ve Transveksiyonlar.. 39
5. Projektif uzaylar ve Projektif Gruplar 47

ÖNSÖZ

Basit grupların sınıflandırılması, gruplar teorisinin, önemli problemlerinden biridir. Örneğin: devresel olmayan sonlu basit grupların mertebelerinin çift olduğu, Feit ve Thomson tarafından 1963 yılında ispat edilmiştir.[*]

Bu çalışmada, permütasyon gruplarına dair tranzitiflik, primitiflik kavramları irdelenmiş, sonlu vektör uzaylarına ait otomorfilerin temel özellikleri dikkate alınarak; genel lineer grup, semilineer grup, özel lineer grup tanımları verilmiştir. Son olarak; projektif genel lineer, projektif semilineer, projektif özel lineer grupları incelenerek; hangi koşullar altında basit grup olabileceği hakkında genel bilgiler elde edilmiştir.

Çalışmamı yönlendiren, yardımlarını esirgemeyen sayın hocalarım, Prof. Dr. Belgin MAZLUMOĞLU, Prof. Dr. Erhan GÜZEL ve Prof. Dr. Hülya ŞENKON'a , teşekkür ederim.

Arş.Gör. Didem İşlekel ÖZTÜRK

BÖLÜM I

- 1 - PERMÜTASYON GRUPLARI

TANIM 1.1.1. X gibi sonlu bir kümeyi, kendi üzerine, (1-1) olarak resmeden bir tasvire; X'in bir permütasyonu denir. Bir α permütasyonu, $\alpha : X \to X$ şeklinde gösterilir. X kümesinin tüm permütasyonlarının oluşturduğu cümleye, S_X adı verilir ([2] Sayfa 1, § 1).

ÖNERME 1.1.1. S_X, X kümesi üzerinde, aşağıda tanımlanan "." ikili işlemine göre, bir gruptur. $\forall \alpha , \beta \in S_X, \forall x \in X ; (x) \alpha.\beta = ((x) \alpha) \beta$

İSPAT. $I_X : X \to X, I_X \in S_X \Rightarrow S_X \neq \phi$
$a \to a$

I $\forall \alpha, \beta \in S_X, \alpha\beta \in S_X$: α ve β, X kümesini kendi üzerine (1-1) olarak resmettiğinden, $\alpha\beta$ tasviri de X kümesini kendi üzerine, (1-1) olarak resmeder.

II $\forall \alpha, \beta ,\gamma \in S_X, \alpha (\beta \gamma) = (\alpha \beta) \gamma$: $x \in X$ alalım. $(x) \alpha = y \in X$, $(y) \beta = z \in X , (z) \gamma = m \in X$ olsun.

$$\left.\begin{array}{l} (x) \alpha (\beta \gamma) = (y) \beta \gamma = (z) \gamma = m \\ (x) (\alpha \beta) \gamma = ((x) \alpha \beta) \gamma = ((y) \beta) \gamma = (z) \gamma = m \end{array}\right] \Rightarrow$$

$\forall \alpha , \beta, \gamma \in S_X, \alpha (\beta \gamma) = (\alpha \beta) \gamma$

III $\forall \alpha \in S_X, I_x \alpha = \alpha : \forall x \in X, (x) I_x \alpha = ((x) I_x) \alpha = (x) \alpha \Rightarrow \forall \alpha \in S_X, I_x \alpha = \alpha$

IV $\forall \alpha \in S_X, \alpha^{-1} \alpha = I_x : \forall x \in X, (x) \alpha^{-1} \alpha = ((x) \alpha^{-1}) \alpha = x \Rightarrow \forall \alpha \in S_X, \alpha^{-1} \alpha = I_x$

$\Rightarrow$ S_X, bir gruptur.

NOT 1.1.1. S_X 'e X kümesi üzerinde tanımlanmış, simetrik grup denir. X={ 1,2,...n } alındığında, $S_X = S_n$ yazılır. Bir $\alpha \in S_n$'in fonksiyonel gösterilişi;

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2,\ldots n \\ i_1, & i_2 \ldots i_n \end{pmatrix} \text{ şeklindedir.}$$

$i_1, i_2 \ldots i_n$; 1,2,..., n sayılarının uygun bir dizilişidir. 1, 2, ..., n sayılarının, bu sıradaki, tüm farklı dizilişlerinin adedi, n! olduğuna göre; X kümesinin, birbirinden farklı permütasyonlarının sayısı, n! dir. Şu halde, $| S_n| = n!$ yazılır.

TANIM 1.1.2. Bir α permütasyonu, a rakamını (a) α 'ya, (a) α'yı (a) α^2 'ya, (a) α^2 'yı (a) α^3 'ya... götürür. Eğer uygun bir r değeri için, (a) α^{r-1} yı a'ya eşliyor ve a , (a) α , (a)α^2,...,(a) α^{r-1}'den farklı rakamları (varsa), kendilerine tekabül ettiriyorsa; α penmütasyonuna, r uzunluğunda bir devre denir. ([1] sayfa 23,- Tanım 1.3.1) a, (a) α = b, (a) α^2 = (b) α = c, ..., (a) α^{r-1} = u, (a) α^r = (u) α = α ise bu devre, α = (a, b, c, ..., u) şeklinde gösterilir.

En basit devreler, (a) α = a koşulunu gerçekleyen bir uzunluğundaki devrelerdir. Genellikle bunlar devre sayılmazlar.

TANIM 1.1.3. Hiçbir ortak rakamı bulunmayan devrelere , yabancı devreler denir.

TEOREM 1.1.1. Her permutasyon, bir takım yabancı devrelerin çarpımı biçiminde gösterilebilir.Bu gösteriliş devrelerin sırasından vazgeçildiği taktirde, tek türlü olarak belirlidir.

İSPAT : Bir $\alpha = \begin{pmatrix} 1\ 2 \ldots n \\ (1)\alpha\ (2)\alpha \ldots (n)\alpha \end{pmatrix}$ permutasyonu verilmiş olsun. 1'i ele alalım:

(1) α^o = 1, (1) α, (1) α^2 , ..., (1) α^k , rakamlarını düşünelim. Bunlar içinde birbirinden farklı olanların sayısı en fazla n olduğundan, $0 \le k < \iota$ ve (1) α^k = (1) α^ι olacak şekilde bir $k,\iota \in Z$ çifti vardır. Bu tekrarın ilk görüldüğü k, ι çiftinde k = o olmak zorundadır: k > o olsaydı, (1) α^k = (1) α^ι eşitliğinin her iki tarafına, α^{-k} permutasyonu uygulanarak, (1) α^o = (1) $\alpha^{\iota-k}$ $(o < \iota - k < k)$ elde edilirdi. Yani (k, ι) çiftinden önce (o, ι-k) çiftinde de tekrarlanma olurdu. İlk tekrarlanmanın meydana geldiği çift, (o, u) olsun. Şu halde, 1, (1) α , ...(1) α^{u-1} rakamları birbirinden farklı olmak zorundadır. Bu rakamların α permütasyonundaki resimleri ile, D_1 = (1, (1) α, ... (1) α^{u-1}) devresindeki resimleri aynıdır. 1,2, , n rakamları içinde, 1, (1) α ,... (1) α^{u-1} den farklı olanlar varsa, onları gözönüne alalım. Bunların içinden bir b rakamını seçelim. (b) α^o =b, (b) α, (b) α^2 rakamlarını düşünelim. Yukarıdaki yöntemle, D_2 = (b, (b) α, ...,(b) α^{m-1}) gibi öyle bir devre elde ederiz ki; devreye ait rakamların, α permütasyonundaki görüntüleri ile, D_2 devresindeki resimleri aynıdır. 1, 2, , n rakamları içinde, b, (b) α, ..., (b) α^{m-1} 'den farklı olanlar varsa işleme devam edilir. α'daki rakamlar sonlu sayıda olduğundan, uygun bir adımda 1,2, ,n rakamlarının hepsi tükenir. Sonuçta, D_1, D_2,...,D_v bir takım yabancı devreler olmak üzere $\alpha = D_1, D_2,\ldots D_v$ elde edilir.(1.1.1.)

α permütasyonunun, (1.1.1.) şeklendeki gösterilişi, Dj'lerin sırasından vazgeçildiği takdirde, tek türlüdür. α 'nın ikinci bir yabancı devrelere ayrılışı, $\alpha = D'_1, D'_2,\ldots D'_j$ olsun. 1 rakamını içeren devre D'_{i1} ise, $D'_{i1} = D_1$ olmak zorundadır. Aynı işlemi b rakamını içeren devri için yaparsak, $D'_{i2} = D_2$ bulunur. Bu şekilde devam edilerek, s = r elde edilir. Yani, D'_1, D'_2...,D'_s devreleri, D_1, D_2,... D_v devrelerinin uygun bir permütasyonudur.

NOT 1.1.2. $\widetilde{D'_1}$ ve $\widetilde{D'_2}$ iki yabancı devre ise, $\widetilde{D'_1}$ ve $\widetilde{D'_2}$' deki rakamları, $\widetilde{D'_2}$'de, $\widetilde{D'_1}$'deki rakamları sabit bıraktığından, D'_1, $D'_2 = D'_2\, D'_1$, dir.Yani yabancı devreler birbirleriyle komütatiftir. Şu halde, α permütasyonunun, (1.1.1.) gösterilişinde, D_1, D_2,...D_v devreleri, istenen sırada alınabilir.

NOT 1.1.3. I idantik permütasyonunun yabancı devrelere ayrılışı, I=(1)(2)...(n) şeklindedir.

$$\beta = \begin{pmatrix} u, (u)\beta,\ldots, (u)\beta^{r-2}, (u)\beta^{r-1} \\ (u)\beta, (u)\beta^2,\ldots, (u)\beta^{r-1}, u \end{pmatrix}$$ permütasyon verilmiş olsun.

Devre olarak ifade edersek; $\beta = (u, (u)\beta ,(u)\beta^{2},\ldots (u)\beta^{r-2}, (u)\beta^{r-1})$ yazarız.

$$\beta^{-1} = \begin{pmatrix} (u)\beta, (u)\beta^2,\ldots, (u)\beta^{r-1}, u \\ u, (u)\beta,\ldots,(u)\beta^{r-2},(u)\beta^{r-1} \end{pmatrix} =(u, (u)\, \beta^{r-1} , (u)\, \beta^{r-2} ,\ldots, (u)\ \beta)$$ şeklinde , β devresinin tersi tanımlanır.

Bir α permütasyonunun yabancı devrelere ayrılışı, $\alpha = (a_1, a_2,\ldots a_{k1}) (b_1, b_2,\ldots,b_{k2}) (c_1, c_2,\ldots c_{kr})$ şeklinde ise, bir gruptaki kuvvetlere ilişkin temel özelliklerden, $\alpha^{-1}= (c_1, c_2,\ldots,c_{kr})^{-1}\ldots(b_1, b_2,\ldots,b_{k2})^{-1} (a_1, a_2,\ldots,a_{k1})^{-1}$ dir.Yukarıda açıklanan bilgiler yardımıyla; $\alpha^{-1}= (c_1, c_{kr},\ldots,c_2)\ldots(b_1, b_{k2},\ldots,b_2).(a_1, a_{k-1},\ldots,a_2)$ elde edilir.([1] sayfa 26, § 3)

TANIM 1.1.4. Uzunluğu iki olan, yani (ij) şeklindeki bir devreye, bir transpozisyon denir. ([1] sayfa 27, § 3)

TEOREM 1.1.2. Her permütasyon, bir takım transpozisyonların çarpımı olarak gösterilebilir. Bu gösteriliş tek türlü değildir.

İSPAT . Teorem (1.1.1.)'den dolayı, her devrenin bir takım transpozisyonların çarpımı olarak yazılabileceğini göstermemiz yeterli olacaktır. Bir $(u_1, u_2,\ldots,u_r)$ devreleri verilmiş olsun. Permütasyonlar arsında tanımlanan, çarpma işlemine göre, $(u_1, u_2,u_3,\ldots,u_{r-1}, u_r) = (u_1\ u_r).(u_1\ u_{r-1})\ldots(u_1\ u_3) . (u_1\ u_2)$ elde edilir.

Bir permütasyonun, transpozisyonlar çarpımı biçiminde gösterilişi, tek türlü belirli değildir. Çünkü, $I = (ij)^2$ olarak ifade edilebileceğinden, bu çarpımın herhangi bir yerine yerleştirebiliriz.

TANIM 1.1.5. Çift sayıda transpozisyonun çarpımı olarak gösterilebilen her permütasyon, bir çift permütasyondur. Tek sayıda transpozisyonun çarpımı biçiminde gösterilebilen her permütasyon ise, bir tek permütasyondur.

SONUÇ 1.1.5. İki tek veya iki çift permütasyonun çarpımı bir çift permütasyondur.Biri çift, biri tek iki permütasyonun çarpımı, bir tek permütasyondur.

$\alpha , \beta \in S_X$ alalım :

a) α ,β **birer tek permütasyon olsun :** Her iki permütasyon da, tek sayıda transpozisyonun çarpımı biçiminde, yazılabilecektir.

$$\alpha = \underbrace{(..)\ldots(..)}_{2k+1 \text{ tane}} \quad , \quad \beta = \underbrace{(..)\ldots(..)}_{2\iota+1 \text{ tane}} \Rightarrow \alpha\ \beta = \underbrace{(..)\ldots(..)}_{2k+1}\ \underbrace{(..)\ldots(..)}_{2\iota+1}$$

$\alpha\ \beta$ permütasyonu, $2(k+ \iota +1)$ tane transpozisyonun çarpımı şeklinde gösterilebildigine göre, bir çift permütasyondur.

b) α ,β **birer çift permütasyon olsun :** Her iki permütasyon da, çift sayıda transpozisyon çarpımı şeklinde, gösterilebilecektir.

$$\alpha = \underbrace{(..)\ldots(..)}_{2k \text{ tane}} \quad , \quad \beta = \underbrace{(..)\ldots(..)}_{2\ell \text{ tane}} \Rightarrow \alpha\ \beta = \underbrace{(..)\ldots(..)}_{2k}\ \underbrace{(..)\ldots(..)}_{2\ell}$$

$\alpha\,\beta$ permütasyonu, $2(\iota+1)$ tane transposizyonun çarpımı şeklinde gösterilebildigine göre, bir çift permütasyondur.

c) α bir tek permütasyon, β bir çift permütasyon olsun : α , tek sayıda transposizyonun çarpımı, β da çift sayıda transposizyonun çarpımı şeklinde yazılabilecektir.$\alpha = \underbrace{(..)\ldots(..)}_{2k+1 \text{ tane}}$, $\beta = \underbrace{(..)\ldots(..)}_{2\ell \text{ tane}}$

NOT 1.1.4. $\alpha \in S_X$ verilmiş olsun.

$\alpha = \tau_1\ \tau_2,\ldots,\tau_k = \tau_1\ \tau_2,\ldots,\tau_\iota$ (τ_i'ler, τ_j'ler birer transposizyondur. $i = 1,2,\ldots,k$; $j = 1,2,..,\iota$) ise, $k \equiv \iota$ (mod 2) dir. Yani k, ι tamsayılarının her ikisi de ya tek ya da çift sayılardır.

SONUÇ 1.1.4. Bir permütasyon hem tek, hem de çift sayıda transposizyonun çarpımı şeklinde yazılamaz. ([1] sayfa 27, Teorem 1.3.15'nin sonucu)

NOT 1.1.5. Bir α permütasyonunun işaretini aşağıdaki şekilde belirleriz :
$\alpha = \tau_1\ \tau_2\ldots\tau_k$ (τ_i'ler birer transposizyondur. $i = 1, 2,\ldots,k$.)

$$\mathrm{Sgn}\ \alpha = \left\{\begin{array}{l} 1,\quad k \equiv 0 \pmod 2,\ \text{çift permütasyon} \\ -1,\quad k \equiv 1 \pmod 2,\ \text{tek permütasyon} \end{array}\right\}$$ ([2] sayfa 2,§ 1)

TANIM 1.1.6. Sx'in tüm çift permütasyonlarının oluşturduğu alt cümlesini, A_x ile gösteririz. ([2] sayfa 2,§ 1)

Sonuç (1.1.5)'den dolayı;A_x, çarpma işlemine göre kapalıdır. Sx sonlu bir grup olduğundan; A_x , Sx 'in bir alt grubudur. A_x'e, X üzerinde oluşmuş alterne grup denir.

TEOREM 1.1.3. T= { -1, 1 } çarpım grubu olmak üzere;

$\mathrm{Sgn} : S_X \to T$
$\alpha \to \mathrm{Sgn}(\alpha)$ tasviri, bir üzerine homomorfidir. Bu homomorfinin çekirdeği Alterne Gruptur.

İSPAT. I $\forall\, \alpha \in S_X$ için, Sgn (α) = { -1, 1 } olduğundan, Sgn fonksiyonu içindedir.

II $\forall\, k \in T$ için, $\exists\, \beta \in S_X \ni \mathrm{Sgn}(\beta) = k$
(i) k = -1 olsun : Sgn (β) = -1 olacak şekilde bir $\beta \in S_X$ bulacağız. β = (ij) gibi bir transpozisyon olarak alınabilir. Sgn ((ij)) = -1
(ii) k = 1 olsun : Sgn (β) = 1 olacak şekilde, bir $\beta \in S_X$ belirleyeceğiz. β = I olarak alınabilir. Sgn (I) = 1

I, II.

$\Rightarrow$ Sgn, üzerine bir homomorfidir.

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker\,Sgn} &= \{ \alpha \in S_X \mid \mathrm{Sgn}(\alpha) = 1 \} \\ &= \{ \alpha \in S_X \mid \alpha = \tau_1, \ldots \tau_k \ (\tau_i\text{' ler birer transpozisyon; } i= 1, \ldots k), \\ &\quad k \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ 2) \} \\ &= A_x\end{aligned}$$

$\alpha\ \beta = \underbrace{(..)...(..)}_{2k+1} \quad \underbrace{(..)...(..)}_{2\ell}$ $\alpha\ \beta$ permütasyonu, $2(k+\ell)+1$ tane transposizyonun çarpımı şeklinde ifade edilebildiğinden, bir tek permütasyondur.

TEOREM 1.1.4. A_x, S_n'in, mertebesi $\frac{n!}{2}$ olan, bir normal alt grubudur.

İSPAT. S_n'e ait tüm çift permütasyonları, $\propto_1, \propto_2, \ldots, \propto_S$ ile gösterelim. S_n'e ait bir γ transposizyonu ile ,bu permütasyonların herbirini, soldan çarpalım. $\gamma \propto_1, \ldots, \gamma \propto_2 \ldots, \gamma \propto_S$ çarpımları S_n'e ait tek permütasyonlardır. O halde,

$g : \alpha i \to \gamma\, \alpha i \quad (i = 1,...,S)$ tasviri,

A_x'i Sn - A_x içine resmeder.Üstelik bu tasvir örtendir. Çünkü: her $\beta \in S_n - A_x$ için, $\beta = \gamma \propto_i$ olacak şekilde bir $\propto_i \in S_n$ vardır.

$$\beta = \gamma \propto_i \Rightarrow \gamma^{-1} \beta = \gamma^{-1} \gamma \propto_i \Rightarrow \gamma^{-1} \beta = (\gamma^{-1} \gamma) \propto_i \Rightarrow \gamma \beta = I \propto_i$$

$\Rightarrow \gamma\ \beta = \propto_i$ elde edilir.

Ayrıca bu tasvir (1-1) dir. Yani, $i \neq j$ için $\gamma \propto_i \neq \gamma \propto_j$ dir.çünkü, $\gamma \propto_i = \gamma \propto_j$ olsa; kısaltma özelliğinden dolayı $\propto_i = \propto_j$ elde edilir ki, bu bir çelişkidir.

g tasviri, S_n'nin sonlu A_x alt cümlesini, S_n-A_x sonlu alt cümlesi üzerine, (1-1) olarak resmettiğinden, bu iki kümenin eleman sayıları aynıdır. $A_x \cap (S_n - A_x) = \phi$, $|A_x| = S(S_n - A_x)$ olduğuna göre, $|A_x| = \frac{n!}{2}$ bulunur.

$|S_n : A_x| = \dfrac{n!}{\frac{n!}{2}} = 2 \Rightarrow A_x \Delta S_n$ elde edilir. Demekki; S_n'deki tek ve çift permütasyonlar aynı sayıdadır.

TANIM 1.1.7. $\alpha, \pi \in S_X$ verilmiş olsun.

$\alpha = (a_1, a_2, ..., a_{ka})\ (b_1, b_2, \ldots, b_{kb}) \ldots (\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_{k\ell})$ için;

$\alpha = \pi^{-1} \alpha \pi = ((a_1)\pi, \ldots, (a_{ka})\pi)\ ((b_1)\pi, \ldots, (b_{kb})\pi) \ldots ((\iota_1)\pi, \ldots, (\ell_{k\ell})\pi)$

şeklinde tanımlanır.

([2] sayfa 3, § 1)

TEOREM 1.1.5. $\alpha, \beta \in S_X$ verilmiş olsun.

$\beta = \pi^{-1} \alpha \pi$ koşulunu sağlayan bir $\pi \in S_X$ varsa, " α ile β eşdeğerdir" denir ve $\alpha \sim \beta$ yazılır. " $\sim$ " bagıntısı, S_X'de bir eşdeğerlilik bağıntısıdır.

İSPAT. $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_{ka})\ (b_1, b_2, \ldots, b_{kb}) \ldots (\iota_1, \iota_2, \ldots, \iota_{kl})$ alalım.

1) $\alpha \sim \alpha$: $I^{-1}_x\ \alpha\ I_x = (\ (a_1)\ I_x \ldots, (a_{ka})I_x\ )(\ (b_1)I_x, \ldots, (b_{kb})I_x\ ) \ldots (\ (\iota_1)I_x, \ldots, (\iota_{k\ell})I_x\ )$

$= (a_1, \ldots, a_{ka})\ (b_1, \ldots, b_{kb}) \ldots (\ \iota_1, \ldots, \iota_{k\ell})$

$= \alpha$

2) $\alpha \sim \beta \ \Rightarrow\ \beta \sim \alpha$: $\alpha \sim \beta$ ise $\beta = \pi^{-1} \alpha \pi$ olacak şekilde bir $\pi \in S_X$ vardır.

$\beta = \pi^{-1} \alpha \pi \Rightarrow \pi \beta = (\pi^{-1} \alpha \pi\ ) = (\ \pi\ \pi^{-1}) \alpha \pi = \alpha \pi$

$\Rightarrow \pi \beta \pi^{-1} = (\alpha\ \pi\ )\ \pi^{-1} = \alpha\ (\ \pi\ \pi^{-1}) = \alpha$

$\Rightarrow \alpha = \pi \beta \pi^{-1} = (\pi^{-1})^{-1} \beta\ \pi^{-1} = \beta \pi^{-1}$

3) $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma \ \Rightarrow\ \alpha \sim \gamma$: $\alpha \sim \beta$ ise $\beta = \pi^{-1} \alpha\ \pi$ olacak şekilde bir $\pi \in S_X$ vardır. (*)

$\beta \sim \gamma$ ise $\gamma = r^{-1} \beta\ r$ olacak şekilde bir $r \in S_X$ vardır.(**)

(*)

$\gamma = r^{-1} \beta\ r = r^{-1} (\pi^{-1} \alpha\ \pi)\ r = r^{-1} \pi^{-1} \alpha\ \pi\ r = (\pi\ r\ )^{-1} \alpha\ (\pi\ r)$

TANIM 1.1.8. " $\sim$ " bağıntısının S_X 'de belirlediği sınıflara, eşlenik eleman sınıfları denir.

TANIM 1.1.9. Aynı sayıda ve herbiri aynı uzunlukta yabancı devrelerin çarpımı olarak gösterilen iki permütasyona aynı tipte denir.

TEOREM 1.1.6. $\alpha, \beta \in S_X$ verilsin. α ile β permütasyonlarının eşdeğer olabilmesi için gerek ve yeter koşul, α ile β 'nin aynı tipte olmasıdır.

İSPAT. 1°) Gereklilik : $\alpha \sim \beta$ ise $\beta = \pi^{-1} \alpha\ \pi$ olacak şekilde bir $\pi \in S_X$ vardır. α 'nın yabancı devrelere ayrılışı,

$\alpha = (a_1, \ldots, a_{ka})\ (b_1, \ldots, b_{kb}) \ldots (\ \iota_1, \ldots, \iota_{k\ell})$ olsun.

$\beta = \pi^{-1} \alpha\ \pi\ = (\ (a_1)\ \pi, \ldots, (a_{ka})\ \pi\ )\ \ (\ (b_1)\ \pi\ , \ldots, (b_{kb})\ \pi\ ) \ldots (\ (\ell_1)\ \pi, \ldots, (\ \ell_{k\ell}\ )\ \pi\ )$

$= (a'_1, \ldots, a'_{ka})(b'_1, \ldots, b'_{kb}) \ldots (\ \iota'_1, \ldots, \iota'_{k\ell}) \ldots (*)$

β ,α'nın içerdiği devrelerin sayısına ve uzunluğuna eşit, bir takım devrelerin çarpımı şeklinde elde edilmiştir. Bu çarpıma katılan devreler, birbirine yabancıdır. $(a_1, \ldots, a_{ka})$ ve $(\ell_1, \ldots, \ell_{kl})$ devrelerin yabancı olmadığını kabul edelim. bu durumda en az bir tane ortak eleman içereceklerdir. Yani $a'_j = \iota'_i$ olacak şekilde a_j, $\ell_i \in X$ çifti mevcuttur. $(i = 1, \ldots, k_\ell : j = 1, \ldots, k_a)$

(*)

$a'_j = \iota'_i \Rightarrow \exists\, a_j, \ell_i, (a_j)\pi = a_j,\ (\iota_i)\pi = \iota'_i$

$a'_j = \iota'_i \Rightarrow (a_j)\pi = (\iota_i)\pi \Rightarrow (a_j)\pi\ \pi^{-1} = (\ell_i)\pi\ \pi^{-1} \Rightarrow (a_j)I = (\ell_i)I \Rightarrow a_j = \iota_i$

$(j = 1,\ldots,k_a\,;\ i = 1,\ldots,k_\ell) \Rightarrow (a_1,\ldots,a_{ka}), (b_1,\ldots,b_{kb})$ devreleri yabancı değildir. Bu bir çelişkidir.

Şu halde, α ve β permütasyonları aynı tiptedir.

2°) Yeterlilik : α ve β permütasyonları aynı tipte olsun.

1) α, ℓ uzunluğunda bir devre ise ;

$\propto = (a_1, a_2 \ldots a_\ell)$, $\beta = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_\ell)$ yazılabilir.

$\beta = n^{-1} \propto n$ olacak şekilde bir $\pi \in S_X$ 'in varlığını araştıralım.

$\pi^{-1}\pi = ((a_1)\pi, (a_2)\pi, \ldots (a_\ell)\pi) = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_\ell)$

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1, a_2 \ldots a_\iota *** \\ \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots \tilde{a}_\iota *** \end{pmatrix}$$ olarak alınabilir.

2) α, en az iki yabancı devrelerin çarpımı ise ;

$\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_{\iota 1})(b_1, b_2, \ldots, b_{\iota 2}) \ldots (c_1, c_2, \ldots, c_{\iota r})\ \ (r \geq 2)$

$\beta = (\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_{\iota 1})(\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \ldots, \tilde{b}_{\iota 2}) \ldots (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \ldots, \tilde{c}_{\iota r})$ yazılabilir.

$\beta = \pi^{-1} \propto \pi$ olacak şekilde bir $\pi \in S_X$ 'in varlığını araştıralım ;

$\pi^{-1} \propto \pi = ((a_1)\pi, (a_2)\pi, \ldots, (a_{\iota 1})\pi)((b_1)\pi, (b_2)\pi, \ldots, (b_{\ell 2})\pi) \ldots ((c_1)\pi (c_2)\pi, \ldots, (c_{lr})\pi)$

$= (a'_1, a'_2, \ldots, a'_{\iota 1})(b'_1, b'_2, \ldots, b'_{\iota 2}), \ldots, (c'_1, c'_2, \ldots, c'_{\iota r})$

$$\Pi = \begin{pmatrix} a_1, a_2, \ldots, a_{\iota 1}, b_1, b_2, \ldots, b_{\iota 2}, \ldots, c_1, c_2, \ldots, c_{\iota r}, *\ **\\ a'_1, a'_2, \ldots, a'_{\iota 1}, b'_1, b'_2, \ldots, b'_{\iota 2}, \ldots, c'_1, c'_2, \ldots, c'_{\iota r}, *\ ** \end{pmatrix}$$ alınabilir.

$\Rightarrow$ α ile β eşdeğerdir.

TANIM 1.1.10. X boş kümeden farklı sonlu bir cümle, G sonlu bir grup ve $\dot{I}: G \to S_X$ bir grup homormorfisi olmak üzere (X, G, İ)'ye bir permütasyon grubu veya G'nin permütasyon gösterilişi denir. $\dot{I}(G) \leq S_X$ olduğundan, bir permütasyon grubu, S_X'in alt grubudur. ([2] sayfa 1§ 1)

-2- SAYMA PRENSİBİ.

U ve V, boş kümeden farklı, birer sonlu cümle olsun. $\phi \neq S \subseteq U \times V$, kümesini gözönüne alalım. Bu durumda şu sembolleri tanımlayabiliriz :

$$S(a,\bullet) := \{ (u,v) \in S \mid u = a \} \; ; a \in U$$

$$S(\bullet, b) := \{ (u,v) \in S \mid v = b \} \; ; b \in V$$

Farklı $a \in U$ ve $b \in V$'ler için, sırasıyla ; $S(a,\cdot)$, $S(\cdot, b)$ kümeleri, birbirine yabancıdır. O halde $\dot{\bigcup}_{a \in U} S(a,\cdot)$, $\dot{\bigcup}_{b \in V} S(\cdot, b)$ kümeleri, birer ayrık birleşimdir.

$$\left.\begin{aligned} \forall\ (u,v) \in S \text{ için}, (u,v) &\in S(u,\bullet) \\ (u,v) &\in S(\bullet, u) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} S &\subseteq \dot{\bigcup_{a \in U}} S(a,.) \\ S &\subseteq \dot{\bigcup_{b \in V}} S(.,b) \end{aligned}\right. \quad \ldots(*)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bigcup_{a \in U}} S(a,\cdot) &\subseteq S \\ \dot{\bigcup_{b \in V}} S(\cdot, b) &\subseteq S \end{aligned}\right\} \ldots(*)(*)$$

(*), (*) (*)'dan $\dot{\bigcup_{a \in U}} S(a,\bullet) = \dot{\bigcup_{b \in V}} S(\bullet, b) = S$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{a \in U} | S(a,\bullet) | = \sum_{b \in V} | S(\bullet, b) |$ (1.2.1.) elde edilir.

$\forall a \in U, \quad | S(a,\bullet) | = r$

$\forall b \in V, \quad | S(\bullet, b) | = s$

(1.2.1.)

$\Rightarrow \quad r\,|U| = s\,|V|$ sonucuna varılır. (1.2.2.)

<u>TANIM 1.2.1.</u> (X, G, İ) permütasyon grubu verilsin. $x, y, \in X$ olmak üzere $G(x \to y)$ ile G'nin x'i, y' ye götüren tüm elemanlarının cümlesi kastedilir. $G(x \to y) = \{ g \in G \mid y = (x)g \}$ şeklinde gösterilir. ([2] sayfa 4, § 2)

<u>TEOREM 1.2.1.</u> $x, y \in X$ olmak üzere ; $x \sim y \Leftrightarrow G(x \to y) \neq \phi$ şeklinde tanımlanan " ~ " bağıntısı, X üzerinde bir eşdeğerlik bağıntısıdır.

İSPAT. 1) $x \sim x : \forall x \in X$ için $I_G \in G$, $(x)\, I_G = x \Rightarrow G(x \to x) \neq \phi$

2) $x \sim y \Rightarrow y \sim x : x \sim y \Rightarrow \exists g \in G \ni y = (x)\, g$

$g : x \to y \Rightarrow g^{-1} : y \to x,\ g^{-1} \in G \Rightarrow G(y \to x) \neq \phi$

3) $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z :\ x \sim y \Rightarrow \exists g \in G \ni y = (x)\, g$

$y \sim z \Rightarrow \exists f \in G \ni z = (y)\, f$

$$x \xrightarrow{g} y \xrightarrow{f} z \Rightarrow x \xrightarrow{fg} z,\ fg \in G \Rightarrow G(x \to z) \neq \phi$$

$x \in X$'in belirledigi eşdeğerlik sınıfını $\overline{x}$ ile göstereceğiz ve $x\,G = \{\ y \in x \mid y = (x)g\ \}$ olmak üzere $\overline{x} = x\,G$ yazacağız.

TEOREM 1.2.2. $x, y \in x,\ x \sim y \Rightarrow |\, G(x \to x)\,| = |\, G(x \to y)\,|$ dir

İSPAT. $x \sim y \Rightarrow \exists g \in G,\ y = (x)\, g$ dir.

$$\begin{aligned} y : G(x \to x) &\to G(x \to y) \\ h &\to hg \end{aligned}$$ tasvirini gözönüne alalım.

y tasviri iyi tanımlıdır: $x\,(hg) = ((x)\, h)\, g = (x)\, g = y \Rightarrow hg \in G(x \to y)$

$\exists g^{-1}$

y injektiftir: $hg = h'_g \Rightarrow hg\, g^{-1} = h' g\, g^{-1}$

$h(g\, g^{-1}) = h'(g\, g^{-1})$

$h\, I_G = h'\, I_G$

$h = h'$

y sürjektiftir: $\forall k \in G(x \to y)$ için, $\exists u \in G(x \to x) \ni$

$k = (u)\, y,\ k = u\, g / g^{-1} \Rightarrow u = kg^{-1}$

$(x)\, u = (x)\, k\, g^{-1} = ((x)\, k)\, g^{-1} = x \Rightarrow k\, g^{-1} \in G(x \to x)$

$\Rightarrow y(k\, g^{-1}) = k$

$G(x \to x)$ kümesini, $G(x \to y)$ içine resmeden, y tasviri, bir bijeksiyondur. $G(x \to x)$ ve $G(x \to y)$ kümeleri, sonlu sayıda eleman içerdiğine göre ; bu şartlar altında, aynı sayıda elemana sahip iki cümledir.

$$|\, G(x \to x)\,| = |\, G(x \to y)\,|$$

$x \in X$ sabit bir nokta olmak üzere,

$A_x = \{\ (y, g) \in X \times G \mid y = (x)\, g\ \}$ cümlesini tanımlayabiliriz.

$A_x(y, \bullet) = \{\ (u, v) \in A_x \mid u = y,\ v \in G \ni y = (x)\, v\ \}$ olmak üzere, aşağıdaki f tasvirini gözönüne alalım;

$f : A_x(y, \bullet) \rightarrow G(x \rightarrow y)$

$$\begin{array}{lll} (y, g_1) \rightarrow & g_1 \ , & y = (x)\, g_1 \\ (y, g_2) \rightarrow & g_2 \ , & y = (x)\, g_2 \\ \vdots & & \vdots \\ (y, g_s) \rightarrow & g_s \ , & y = (x)\, g_s \end{array}$$

Açıkça görüldüğü gibi, f bir bijeksiyondur. Şu halde, $|A_x(y, \bullet)| = |G(x \rightarrow y)|$ dir. Öte yandan $|A_x(\bullet, g)| = 1$ dir. Çünkü tasvir tanımı gereğince ; $x \in X$'in, g tasviri altında ki görüntü sayısı tam bir tanedir.

Teorem 1.2.1 ve Teorem 1.2.2.'den dolayı ;

$$|G(x \rightarrow y)| = \left\{ \begin{array}{ll} 0 \ , & x \nsim y \\ |G(x \rightarrow x)| & x \sim y \end{array} \right\} \text{ olduğuna göre,}$$

$$|A_x(y, \bullet)| = \left\{ \begin{array}{ll} 0 \ , & x \nsim y \\ |G(x \rightarrow x)| & x \sim y \end{array} \right\} \text{ elde edilir.}$$

Bu durumda, $|A_x(y, \cdot)|$ ve $|A_x(\cdot, g)|$, sırasıyla, y ve g ye bağlı değildir. Çünkü $\forall y' \in G$ için, $|A_x(y', \bullet)| = |G(x \rightarrow x)|$ ve $\forall g \in G$ için, $|A_x(\bullet, g)| = 1$ dir.

1.2.1' i kullanarak;

$$\sum_{y \in x} |A_x(y, \bullet)| = \sum_{g \in G} |A_x(\bullet, g)| \text{ elde edilir. (1.2.3.)}$$

$$\sum_{g \in G} |A_x(\bullet, g)| = |G| \quad |A_x(\bullet, g)| \ , \ |A_x(\bullet, g)| = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{g \in G} |A_x(\bullet, g)| = |G|$$

$$\Rightarrow \sum_{y \in X} |A_x(y, \bullet)| = |G| \text{ yazılır.}$$

$y \in X$'i, xG üzerinde değiştirirsek, yani ; $y = (x)\, g$, $g \in G$ şartına uyan, X' e ait y elemanlarını gözönüne alırsak,

$$\sum_{y \in xG} |A_x(y,\bullet)| = |G|,$$

$|G| = |A_x(y,\bullet)|\ |xG| = |G(x \to y)|\ |xG|$ bulunur. (1.2.3.) bağıntısına, permütasyonlar grubu teorisinin temel bağıntısı denir.

TANIM 1.2.2. G (x → x) kümesine, x' in G içindeki stabizatörü denir. $G(x \to x) = G_x$ yazılır. xG' ye de, x' in G içindeki yörüngesi (orbiti) denir.

$$|G| = |G(x \to y)|\ |xG| = |G(x \to x)|\ |xG| = |G_x|\ |xG|$$

$$\Rightarrow \frac{|G|}{|G_x|} = |xG| \quad \text{elde edilir.} \qquad (1.2.4.)$$

TEOREM 1.2.3. G (x → x) bir gruptur.

İSPAT. $G(x \to x) = \{ g \in G \mid x = (x)g \} \subseteq G$

$\forall x \in x$ için, $x = (x)I \Rightarrow I \in G_x \Rightarrow G_x \neq \phi$

1) $\forall g_1, g_2 \in G_x$ için $g_1 g_2 \in G_x$:

$(x) g_1 g_2 = ((x) g_1) g_2 = (x) g_2 = x \Rightarrow g_1 g_2 \in G_x$

2) $\forall g \in G_x$ için $g^{-1} \in G_x$:

$(x) g^{-1} = x \Rightarrow g^{-1} \in G_x$

$$\overset{1),\,2)}{\Longrightarrow} G_x \subset G$$

a.g.

x, y ∈ X ise G (x → y) kümesi I birim permütasyonu içeremeyeceğinden, grup olamaz.

TANIM 1.2.3. (X, G, İ) bir permütasyon grubu ve G' nin X içindeki yörünge sayısı t olsun. (t∈ N) Herhangi bir g ∈ G için; $F(g) = \{ x \in X \mid x = xg \}$ şeklinde tanımlanan, bu cümlenin elemanlarına, g' nin X içindeki sabit noktaları denir. ([2] sayfa 5, § 2)

TEOREM 1.2.4.(BURNSİDE)

$$t|G| = \sum_{g \in G} |F(g)| \text{ dır.}$$

İSPAT. $E = \{ (x, g) \in X \times G \mid x = (x) g \}$ kümesini gözönüne alalım.

$E(x,\cdot) = \{ (u,v) \in E \mid u = x,\ v \in G \ni x = (x)v \}$

$E(\cdot,g) = \{ (u,v) \in E \mid v = g,\ u \in x \ni u = (u)g \}$

$\Rightarrow |E(x,\cdot)| = |G_x|$ ve $|E(\cdot,g)| = |F(g)|$ dir.

(1.2.1.)

$$\Longrightarrow \sum_{g\in G} |F(g)| = \sum_{g\in G} |E(\cdot, g)| = \sum_{x\in X} |E(x,\cdot)| = \sum_{x\in X} |G_x|$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \sum_{x\in x_i G} |G_x|$$

$x_1, x_2, \ldots, x_t$ noktaları, t yörüngelerinin tipik örnekleridir.

$x_i G = \{ x \in X \mid x = (x_i)g$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır.$\}$

$G_{x_i} = \{ h \in G \mid x_i = (x_i) h \}$ idi.

$x_i \in Gx_i$ dir; çünkü $x_i = (x_i)\, g$ koşulunu gerçekleyen, en azından $I_x \in G$ permütasyonu vardır.

Şimde de, $x \in x_i G$ için $G_{x_i} = g^{-1} G_x g$ $\quad (g \in G\ (x \to x_i))$ koşulunun gerçeklendiğini gösterelim;

$g^{-1} G_x g = \{ g^{-1} s g \mid s \in G_x,\ g \in G(x \to x_i) \}$

$h \in G_{x_i} \Rightarrow h \in g^{-1} G_x g$:

$h \in G_{x_i} \Rightarrow h = g^{-1} m g$ olacak şekilde bir $m \in G_x$' in varlığını araştıracağız.

$h = g^{-1} m g \ / g^{-1} \Rightarrow g\ / h g^{-1} = g^{-1} m \Rightarrow g h g^{-1} = m$

$(x)m = (x) g h g^{-1} = ((x) g) h g^{-1} = ((x_i) h) g^{-1} = (x_i) g^{-1} = x$

$\Rightarrow m = g h g^{-1} \in G_x$ alınabilir.O halde $h \in g^{-1} G_x g$ dir.

$\Rightarrow G_{x_i} \subset g^{-1} G_x g \ldots (*)$

$r \in g^{-1} G_x g \Rightarrow r \in G_{x_i}$:

$r \in g^{-1} G_x g \Rightarrow r = g^{-1} u g$ olacak şekilde bir $u \in G_x$ vardır.

$(x_i) r = (x_i) g^{-1} u g = ((x_i) g^{-1}) u g = ((x) u) g = (x) g = x_i \Rightarrow r \in G_{x_i}$ dir.

$\Rightarrow g^{-1} G_x g \subset G_{x_i} \ldots (*)(*)$

$$\xRightarrow{(*),\ (*)(*)} G_{x_i} = g^{-1} G_x g$$

$$\left.\begin{array}{l} |G| = |G(x_i \to x)|\ |x_i G| = |Gx_i|\ |x_i G| \\ |G| = |G(x \to x_i)|\ |x\ G| = |G_x|\ |x G| \\ x \in x_i G \Rightarrow x \sim x_i \Rightarrow XG = x_i G \Rightarrow |xG| = |x_i G| \end{array}\right\} \Rightarrow |Gx_i| = |G_x| \text{ elde edilir. } (*)(*)(*)$$

$\sum_{g \in G} |F(g)| = \sum_{i=1} \sum_{x \in x_i G} |G_x|$ bulunmuştu, o halde;

$$\sum_{g \in G}^{t} |F(g)| = \sum_{i=1}^{t} \sum_{x \in x_i G}^{t} |G_x| = \sum_{i=1}^{t} |x_i G|\,|G_x| \overset{(*)(*)(*)}{=} \sum_{i=1}^{t} |x_i G|\,|G_{xi}|$$

$$= \sum_{i=1}^{t} |G|$$

$= t\,|G|$ sonucuna varılır. ([1] sayfa 30, § 3)

ÖRNEK : $X = \{1,2,3\}$, derecesi üç olan $A_3 = \{ I, (123), (132)\}$ permütasyon grubu veriliyor.

$t.3 = |(F(I)| + |(F(123))| + |(F(132))|$

$t.3 = 3 + 0 + 0 \Rightarrow t = 1$

2' nin A_3 içindeki yörüngesini bulalım.

$2A_3 = \{2, 3, 1\} = \{1, 2, 3\} = X$

ÖRNEK : $V_4 = \{ I, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ $X = \{1, 2, 3, 4\}$ ([1] sayfa 33, § 3)

$t\,|V_4| = |F(I)| + |F((12)(34))| + |F((13)(24))| + |F((14)(23))|$

$t\ 4 = 4 + 0 + 0 + 0 \Rightarrow t = 1$

$1V_4 = 2V_4 = 3V_4 = 4V_4 = \{1, 2, 3, 4\} = X$

-3- TRANZİTİFLİK

TANIM 1.3.1. (X, G, İ) permütasyon grubu veriliyor. G' nin, X içinde, tam birtane yörüngesi varsa; (X, G, İ)' ye, bir tranzitif permütasyon grubu denir. ([2] sayfa 6, Tanım 1.3.1.)

X kümesinden keyfi bir x elemanını seçip, sabit tutalım. Eğer her $y \in X$ için, $y = (x)g$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, (X, G, İ) grubu tranzitiftir denir. Çünkü bu durumda, $xG = X$ olacaktır.

(X, G, İ) permütasyon grubunun tranzitif olması halinde, daha önce elde ettiğimiz sonuçları, tekrar değerlendirelim :

1.2.4' ün karşılığı : $\frac{|G|}{|Gx|} = |X|$

1.2.5' in karşılığı : $|G| = \sum_{g \in G} |F(g)|$

şeklinde elde edilir.

TANIM 1.3.2. (X, G, İ) bir tranzitif permütasyon grubu ve $x \in X$ olsun G_x kümesinin, X içindeki yörüngelerinin sayısına; (X, G, İ)grubunun rangı denir. Rang, r harfi ile temsil edilecektir. (X, G, İ) permütasyon grubunda, G, X üzerinde etki yapar. $G_x \leq G$ olduğundan, G_x de X üzerinde etki yapar. Dolayısı ile G_x' in, Xiçindeki yörüngelerinden bahsedebiliriz. $x\,G_x = \{ y \in X \mid y = (x)\,g \;,\; \exists\, g \in G_x \} = \{ x \}$ şu halde { x } bir yörüngedir. ([2] sayfa 6, Tanım 1.3.3.)

ÖNERME 1.3.1. Bir (X, G, İ) tranzitif permütasyon grubunda, $|X| \geq 2$ ise $r \geq 2$ dir.

İSPAT. $x \in X$ için { x } kümesinin kendisi bir yörüngedir. $|X| \geq 2$ ise, X'in x' den farklı en az bir tane y gibi elemanı vardır. Dolayısı ile G_x için, y' i içine alan bir yörünge bulunabilir. Çünkü, $I \in G_x$, $y = (y)\,I$ olduğundan, $y \in y\,G_x$ dir. Sonuç olarak, $r \geq 2$ elde edilir.

ÖNERME 1.3.2. (X, G, İ) tranzitif permütasyon grubunun rangı, x' in , X içindeki seçimine bağlı değildir.

İSPAT. r_x, bir $x \in X$ için G_x' in, X içindeki yörünge sayısı olsun. Teorem 1.2.4' den dolayı; $r_x\,|G_x| = \sum_{g \in G_x} |F(g)|$ dir.

(X, G, İ) permütasyon grubu tranzitif olduğundan, herhangi bir $x, y \in X$ için $\exists\, g \in G \ni (x)\,g = y$ dir. Bu durumda biliyoruz ki; $|G_x| = |G_y|$ dir.

Şimde de $\sum_{g \in G_x} F(g)$' nin x'e bağlı olmadığını göstereceğiz.

$$y : G_x \twoheadrightarrow G_y$$
$$h \twoheadrightarrow g^{-1} hg \text{ tasviri, bir bijeksiyondur.}$$

h' nin yabancı devrelere ayrılışında kaç devre varsa, g^{-1} hg de de o kadar yabancı devre vardır. Üstelik, bu yabancı devrelerin, karşılıklı olarak içerdiği elemanlar, aynı sayıdadır.

O halde ; $|F(h)| = |F(g^{-1}\,h\,g)|$ dır. y ' nın bijeksiyon olmasından dolayı, $\forall\, k \in Gy$ için $k = h^9$ yazabiliriz.

$$\sum_{h \in G_x} |F(h)| = \sum_{h^g \in G_y} |F(h^g)|$$

$$r_x\,|G_x| = r_y\,|G_y|$$

$$|G_x| = |G_y|$$

$$\Rightarrow \qquad r_x = r_y \text{ elde edilir.}$$

ÖNERME 1.3.3.(BURNSİDE) (X, G, İ) bir tranzitif permütasyon grubu olsun. Bu durumda r rangı için,

$$r\,|G| = \sum_{g \in G} |F(g)|^2 \text{ elde edilir.}$$

İSPAT. r, G_x' in X, içindeki yörüngelerinin sayısı olduğuna göre, Teorem 1.2.4' den dolayı; $r\,|G_x| = \sum |F(g)|$ yazabiliriz.
Önerme 1.3.2' de açıklandığı gibi, bu ifade x' in seçimine bağlı değildir.

(X, G, İ) bir tranzitif permütasyon grubu olduğuna göre, $x\,G = X$ ve $\frac{|G|}{|X|} = |G_x|$ dir. O halde;

$$r\,|G_x| = r\,\frac{|G|}{|X|} = \sum_{g \in G_x} |F(g)| \Rightarrow r\,|G| = |X| \left(\sum_{g \in G_x} |F(g)|\right) \text{ elde edilir.}$$

$\sum_{g \in G_x} |F(g)|$, x' in seçimine bağlı değildir.

$$r\,|G| = |X| \left(\sum_{g \in G_x} |F(g)|\right) = \sum_{x \in X} \sum_{g \in G_x} |F(g)|$$

$g \in G_x \Rightarrow (x)\,g = x,\ x \in F(g)$ ve $g \in G$ fakat $g \notin Gx \Rightarrow |F(g)| = 0$ dır. O halde $x \in X$ yerine, $g \in G$ yazmak mümkündür.

$$r\,|G| = \sum_{x \in X} \sum_{g \in G_x} |F(g)| = \sum_{g \in G} \sum_{g \in G_x} |F(g)| = \sum_{g \in G} \sum_{x \in F(g)} |F(g)| = \sum_{g \in G} |F(g)|^2$$

TANIM 1.3.4. (X, G, İ)bir permütasyon grubu , $1 \le k \in N$ ve $|X| \ge k$ olsun. $x_1,\ldots,x_k$ $y_1,\ldots,y_k$,kendi aralarında, birbirinden farklı X' e ait elemanlar olmak üzere, her $\{x_1,\ldots,x_k\}$ ve $\{y_1,\ldots,y_k\}$ takımına karşılık, $(x_i)\,g = y_i$, $(i = 1, \ ,k)$ koşulunu gerçekleyen, en az bir $g \in G$ varsa, (X, G, İ)' ye k- tranzitiftir denir.

k = 1 hali adi tranzitiflik kavramı ile çakışır.

k = 2 olması halinde, (X, G, İ) permütasyon grubu tranzitiftir. çünkü, $\forall\ \{x_1, x_2\}$ ve , $\{y_1, y_2\}$ için $(x_1)\,g = y_1$ ve $(x_2)\,g = y_2$ olacak şekilde en az bir $g \in G$ varsa $x_1 = x$, $y_1 = y$ olmakla, $\forall\ x, y \in X$ için $(x)\,g = y$ olacak şekilde en az bir $g \in G$ bulunmuş olur. ([2] sayfa 7, Tanım 1.3.5)

SONUÇ 1.3.1. (X, G, İ) k - tranzitif ve $k \ge 2$ olması için gerek ve yeter koşul;

1) (X, G, İ) tranzitif olmasıdır.

2) Her hangi bir $x \in X$ için, $X \setminus \{x\}$ ve G_x' i gözönüne alırsak, $(X \setminus \{x\}, G_x, İ)$ k-1 tranzitif olmasıdır.

1°) Gereklilik:

İSPAT. 1 °) Yukarıdaki açıklamalarda, bu sonucun nasıl elde edildiği ifade edilmiştir.

2 °) Bir $x \in X$ alalım;

$\forall \{ x_1, x_2,\dots,x_{k-1}, x \}$, $\{ y_1, y_2,\dots,y_{k-1}, x \}$ ($x_i \neq x_j$, $y_i \neq y_j$, $i \neq j$ için $i, j = 1,\dots,k$) için $(x_i)\,g = y_i$ ve $(x)\,g = x$ olacak şekilde enaz bir $g \in G$ vardır. Üstelik $(x)\,g = x$ koşulundan dolayı; bu, $g \in G_x$ dir. O halde $\forall \{ x_1,\dots,x_{k-1}\}$ $\{ y_1,\dots,y_{k-1} \}$ ($x_i , y_i \in X \setminus \{ x \}$), $i = 1,\dots,k-1$) için $(x_i)\,g = y_i$ olacak şekilde , en az bir $g \in G_x$ vardır. Demek ki ($X\setminus \{ x \}$, $G x$, İ) k-1 tranzitiftir.

2) Yeterlilik : 1°), 2°) koşullarının gerçeklenmesi halinde, $\forall$ $\{ x_1, x_2,\dots,x_k \}$, $\{ y_1, y_2,\dots y_k \}$ takımı için $(x_i)\,u = y_i$ olacak şekilde bir $u \in G'$ nın varlığını ortaya koyacağız.

(X, G, İ) tranzitif olduğundan , $x, x_1 \in X$ için, $\exists\, g \in G$; $(x_1)\,g = x$ ve $x, y_1 \in X$ için $\exists\, h \in G$, $(y_1)\,h = x$ dir

$\{ x_1,\dots,x_k\}$ 'i g ile dönüştürüsek ; $\{ (x_1)\,g,\dots(x_k)\,g \}$, $\forall\, i \neq j$ için $x_i\,g \neq x_j\,g$ $\{ y_1,\dots,y_k \}$' i, h ile dönüştürüsek ; $\{ (y_1)\,h,\dots,(y_k)\,h \}$, $\forall\, i \neq j$ için $y_ih \neq y_jh$ elde edilir.

$\{ (x_1)\,g,\dots,(x_k)\,g \} = \{ x\,(x_2)\,g,\dots,(x_k)\,g \}$ ve $\{ (y_1)\,h,\dots,(y_k)\,h \}= \{ x\,(y_2)\,h,\dots,(y_k)\,h \}$ çifti için $\exists\; t \in G_x$, $x_i\,g\,t = y_i\,h$ $(i = 1 ,\dots,k)$ $\Rightarrow$ $\forall\, i$ için $x_i\,g\,t\,h^{-1} = y_i$ ($i = 1,\dots,k$), $g\,t\,h^{-1} = u \in G$ dir. $(i = 2,\dots,k)$

SONUÇ 1.3.2. k = 2 için ;

(X, G) 2- tranzitif $\Leftrightarrow$ 1°) (X, G) tranzitiftir. 2°) ($X \setminus \{ x \}$, G_x) tranzitiftir.

k = 3 için ;

(X, G) 3- tranzitif $\Leftrightarrow$ 1°) (X, G) tranzitiftir. 2°) $x_1 \in X$, ($X \setminus \{ x_1 \}$, G_{x_1}) 2- tranzitiftir. 3°) ($x_1 \neq$) $x_2 \in X$, ($X \setminus \{ x_1, x_2 \}$, $G\,x_1\,x_2$) tranzitiftir.

Burada $G\,x_1\,x_2 = (G\,x_1\,)\,x_2$ şeklinde tanımlanır. $G\,x_2, x_1 = G\,x_1, x_2$ dir.

Yukarıdaki işleme matematik indüksiyonu ile devam edersek, $k > 3$ için ;

(X, G) k - tranzitif $\Leftrightarrow$ (X, G) tranzitiftir. ($X \setminus \{ x_1 \}$, G_{x_1}) k -1 - tranzitiftir.($X_1 \in X$)

.

.

.

($X \setminus \{ x_1,\dots,x_{k-1}\}$, $G\;x_1,\dots,x_{k-1}$) tranzitiftir.

$x_1, x_2,\dots,x_{k-1}$' in her hangi bir permütasyonu için ; $G\;x_1,\dots,x_{k-1}$ ' in anlamı değişmez.

SONUÇ 1.3.3. $k \geq 2$ olmak üzere , (X,G, İ) k- tranzitif ise Rang (X, G, İ) = r = 2 dir.

İSPAT. (X, G, İ) k- tranzitif $\Leftrightarrow$ 1°) (X, G, İ) tranzitif.
2°) $(X \setminus \{ x \}, G_{xi})$(k-ı) - tranzitif idi.

$k \geq 2$, $x \in X$ için ; $(X \setminus \{ x \}, G_{x,İ})$ (k-ı) tranzitif ise her durumda tranzitifdir. O halde G_x' in $(X \setminus \{ x \})$ içinde tam bir yörüngesi vardır. Yörünge $\{ X \setminus \{ x \} \}$ dir. Oysa , $\{ x \}$, G_x' in X içindeki bir yörüngesidir. O halde G_x' in X içinde tam iki tane yörüngesi vardır. Bunlardan başka yörünge yoktur.

Çünkü $y \in X \setminus \{ x \}$ için $y G_x = X \setminus \{ x \}$ dir. Sonuç olarak, Rang (X, G, İ) = 2 bulunur.

Bir permütasyon grubunun, tranzitif olması, rangının, iki olmasını gerektirmez. Gerçektende ;

$X = \{ 1.2.3 \}$ olmak üzere, (X, A_3) bir tranzitif permütasyon grubudur.

$A_3 = \{ I, (123), (132) \}$

$(A_3)_1 = \{ I \}$

$1(A_3)_1 = \{ 1 \}$

$2(A_3)_1 = \{ 2 \}$

$3(A_3)_1 = \{ 3 \}$

Şu halde $(A_3)_1$'in X içindeki yörüngelerinin sayısı üçtür. Demekki $r = \text{rang}(X, A_3) = 3$ dür.

Ancak bir permütasyon grubunun, çok katlı tranzitif olması halinde , rang, iki olarak elde edilir.

ÖNERME 1.3.4. (X, G) k- tranzitif bir permütasyon grubu ve $| X | = n$ olsun. Bu durumda, $n(n-1)\ldots(n-k+1) \mid | G |$ dir.

İSPAT. k- tranzitif tanımına göre , $n \geq k$ dır.

$k = 1$ olsun ;

(X, G) tranzitif ise, $\forall x \in X$ için, $xG = X$ idi. Permütasyon grupları teorisinin temel bağıntısına göre, $| G | = | x G | | G_X | = | X | \; | G_x | = n \; | G_x |$, olduğundan, $n \mid \; | G |$ dir.

$k \in N$ alalım ; ($k > 1$)

(X, G) k- tranzitif ise , (X, G) tranzitiftir. Öyleyse $x_1 \in X$ olmak üzere, $| G | = | X | \; | G_{x1} | = n \; | G_{x1} |$ dir.

(X, G) k- tranzitif ise, $(X \setminus \{ x_1 \}, G_{x1})$ k-1 - tranzitiftir. Dolayısı ile $(X \setminus \{ x_1 \}, G_{x1})$ tranzitiftir

Bu durumda ; $| G_{x1} | = | X- \{ x_1 \} | \; | G_{x1\,x2} | = (n-1) \; | G_{x1\,x2} |$,

$| G | = n \, | G_{x1} | = n\,(n-1) \, | G_{x1\,x2} |$ elde edilir.

Matematik indüksiyonla devam ederek , sonuç (1.3.2)' deki k tane bağıntıya göre ,

$| G | = n\,(n-1),\ldots,(n-k+1) \; | G_{x1,\ldots,x_k} |$ elde edilir. O halde $n\,(n-1)\ldots(n-k+1) \; | G_x |$ bulunur.

TANIM 1.3.5. 1°) (X, G) k- tranzitif bir permütasyon grubu olsun. $| G | = n\,(n-1)\ldots(n-k+1)$ yani $G_{x1\,x2,\ldots,xk} = 1_G$ ise, (X, G)' ye kesinlikle k - tranzitif bir permütasyon grubu denir.

2°) (X, G) permütasyon grubu, tranzitif ve $| G | = | X |$ ise ; (X, G)' ye bir regüler permütasyon grubudur denir.

$V_4 = \{ I, (12)(34), (13)(24), (14)(23) \}$, $X = \{ 1,2,3,4 \}$ olmak üzere ; (X, V_4), tranzitif bir permütasyon grubudur. Üstelik, $| V_4 | = | X | = 4$ olduğundan; V_4, bir regüler permütasyon grubudur.

ÖNERME 1.3.5. 1) S_n n - tranzitiftir.

2) $n \geq 3$ olmak üzere ; An (n-2) - tranzitiftir, fakat (n-1) tranzitif değildir.

İSPAT. 1) $| X | = n$ ve S_n' in elemanları, X' in kendi üzerine bijeksiyonları olduğu için, $\forall \{ x_1, x_2,\ldots,x_n \}$, $\{ y_1, \ldots, y_n \}$ sıralı ve birbirinden farklı eleman takımı için, $x_i \, g = y_i$ olacak şekilde , bir $g \in S_n$ sübstitüsyonu vardır.

2) 1°) n = 3 için, A_3 kümesini oluşturalım :

$A_3 = \{ I, (123), (132) \}$, tranzitiftir. Fakat 2 - tranzitif değildir. Çünkü; { 1, 2 } , { 3, 2 } eleman takımı için, (1) g = 3 ve (2) g = 2 olacak şekilde , bir $g \in A_3$ yoktur. O halde A_3 , n-2 = 3-2 = 1, 1 - tranzitif ve n -1 = 3-1 = 2, 2 - tranzitif olmadığından, n = 3 için önerme doğrudur

2°) $n \geq 4$ için ,

$3 \leq k \leq n-1$ için A_k , (k-2) tranzitif permütasyon grubu olsun. Bu durumda A_n' i gözönüne alalım ve $(A_n)_n$ düşünelim. $(A_n)_n$' deki sübstitüsyonlar en fazla , 1, ,(n -1) sayılarını değiştirebilir. n daima sabit kaldığından, $(A_n)_n$' deki sübstitüsyonların, yabancı devrelere ayrılışında, n görünmez. O halde;

$(A_n)_n = A_{n-1}$ yazılır. İndüksiyon hipotezi gereğince , $(A_n)_n = A_{n-1}$, (n - 3) - tranzitiftir. Şimdi de ; A_n permütasyon grubunun tranzitif oldugunu gösterelim :

$n \geq 3$ ve A_n bütün çift permütasyonlardan oluştuğuna göre, $\forall$ j, k için $(1,j,k) \in A_n$ dir. Yani An' de ,$\forall$ j için , 1'i , j' ye götüren bir permütasyon vardır. Demek ki şu sonuçlar elde edildi ;

i) $X = \{ 1, 2, \ldots, n \}$ için,
(X, A_n) tranzitif bir permütasyon grubudur.

ii) $(X \setminus \{ n \}, (A_n)_n)$, $(n-3)$ - tranzitif ise A_n, $(n-2)$ tranzitiftir.
A_n, $(n-1)$ tranzitif değildir :

$\{ 1, 2, \ldots, n-2, n-1 \}$, $\{ 1, 2, \ldots, n-2, n \}$ eleman takımını gözönüne alırsak;

$1 \to 1$
$2 \to 2$
eşlemesini sağlayan, $\tau = (n-1, n) \in S_n / A_n$,
$n-2 \to n-2$ bir tek sübstitüsyondur
$n-1 \to n$

-4- GRUPLAR TEORİSİNE UYGULAMA

G sonlu bir grup, $X = p(G)$ olmak üzere, G' nin X üzerindeki etkisi, iki şekilde incelenebilir :

i) $X \times G \to X$
$(K, g) \to K.g$ (kompleks çarpımı)
(X, G) , bir permütasyon grubudur.

ii) $X \times G \to X$
$(K, g) \to K^g = g^{-1} K g$ (kompleks çarpımı)
(X, G) bir permütasyon grubudur.

$H \subset G$ için , H' nin G içindeki sağ kalan sınıfları cümlesi; $\{ Hg \mid g \in G \}$dır. **i)**' yi gözönüne alacak olursak, $\{ Hg \mid g \in G \} = X$ bulunur. Böylece H' nın yörüngeleri cümlesi elde edilir.

Permütasyon grupları teorisinin, temel bağıntısına göre, $| G | = | x G | \; | Gx |$ idi. $G_x = \{ g \in G \mid H.g = H \}$ şeklinde tanımlanır. Öte yandan, $H.g = H$ ise, $g \in H$ olduğundan, $G_x = H$ bulunur.

Şu halde ; $| G | = | x G | \; | G_x | = | x G | \; | H | \Rightarrow \dfrac{| G |}{| H |} = | x G | = | HG | = | X |$ ve ,

$(G; H) = \dfrac{| G |}{| H |} = | X |$ dir. ([2] sayfa 9, § 4)

ÖNERME 1.4.1. G sonlu bir grup, $n \in N$ olsun. G' nin derecesi n olan, bir tranzitif permütasyon gösterilişin var olabilmesi için gerek ve yeterli koşul; G' nin indexi n olan, bir alt grubunun var olabilmesidir.

İSPAT. **1° Gereklilik** : İ; G' yi, Sx içine resmeden bir homomorfi, $|X| = n$ (X, G, İ) bir tarnzitif permütasyon grubu olsun.

$G' = İ(G) \leq S_X$ alalım. Bu durumda (X, G') tranzitiftir.

Her hangi bir $x \in X$ için ; permütasyon grupları teorisinin temel bağıntısını yazacak olursak;

$$|G'| = |xG'|\ |G'_x| \Rightarrow |G'| = |X|\ |G'_x| = n\,|G'_x| \Rightarrow \frac{|G'|}{|G'_x|} = [G' : G'_x] = n \text{ elde}$$

edilir. Demekki G'_x, G' nün, indexi n olan bir alt grubudur. Burdan;

$$İ : G \rightarrow G'$$
$$İ^{-1}(G'_x) \rightarrow G'_x$$ grup homomirfisi yardımıyla , $H = İ^{-1}(G'_x)$ dersek ; G' nin

indexi n olan bir alt grubu elde edilir.

2° Yeterlilik : H, G' nin n olan bir alt grubu ise , $G = \hat{\bigcup}_{i=1} H g_i$ yazılabilir. $g_1 = 1_G$ alalım; $X = \{H, Hg_2 \ldots Hg_n\}$ kümesini oluşturacak, (1.4.1)' de i) etkisi vasıtasıyla ; (X, G) permütasyon grubu elde edilir.

$\forall i$ için H, kompleksini, g, ile çarparak, H alt grubunu Hg_i' ye tekabül ettiren bir permütasyon vardır. O halde; (X, G), bir tranzitif permütasyon grubudur.

NOT 1.4.1. (X, G) herhangi bir permütasyon grubu olsun. $x \in X$ olmak üzere, G_x stabilazötürünü gözönüne alalım.

$$G_{xg} = G_{xh} \Leftrightarrow xg = xh, \ (g, h \in G) \text{ dir.}$$

İSPAT. **1°) Gereklilik :** $G_{xg} = G_{xh} \Rightarrow \exists\, r, s \in G_x \ni rg = sh \Rightarrow (r^{-1} r)g = (r^{-1} s)h$

$\Rightarrow g = (r^{-1} s)h$, $g'_x = r^{-1} \in G_x$ dersek, $g = g'_x h \Rightarrow xg = (x g'_x)h = xh$ elde edilir.

2°) Yeterlilik : $xg = xh \Rightarrow (xg)h^{-1} = x$, $x(gh^{-1}) = x \Rightarrow gh^{-1} \in G_x$ $\Rightarrow G_{xg} = G_{xh}$ bulunur.

-5- PRİMİTİFLİK

TANIM 1.5.1. (X, G) bir permütasyon grubu ve $B \subseteq X$ olsun. $\forall\, g \in G$ için $Bg = B$ veya $B g \sqcap B = \phi$ ise; B kümesine (X, G) permütasyon grubun bir bloğu denir. ([2] sayfa 11, Tanım - 1.5.1.)

ϕ, her $g \in G$ için kendi üzerine resmedilir. G' ye ait her eleman, X üzerinde bir bijeksiyon olduğundan, $\forall\, g \in G$ için $Xg = X$ dir.

$x_1 \in X$ olmak üzere , $\{ x_1 \}$ kümesini gözönüne alalım. $\forall\, g \in G$ için $\{ x_1 \}\, g = \{ x_1 \}$ veya $\{ x_1 \}g = \{ y_1 \}$ $(y_1 \neq x_1)$ dir.

Şu halde, her hangi bir (X, G) permütasyon grubunda , ϕ , X, $\{ x_1 \}$ $(x_1 \in X)$ kümeleri birer bloktur. Bu cümlelere, triviyal bloklar adı verilir.

TANIM 1.5.2. (X, G) permütasyon grubu verilmiş olsun. Eğer, (X, G) bir tranzitif permütasyon grubu ve (X, G)' nin triviyal blokları dışında, hiç bir bloğu yok ise , (X, G)' ye bir primitif permütasyon grubu denir. Aksi halde impiritiftir denir. ([2] sayfa 12, § 5)

Karenin simetrileri grubunu düşünelim ; Bu grubu $V_4 = \{$ I, (13) (24), (13) (24), (14) (23) (12) (34), (1234) , (1432) $\}$ şeklinde ifade ediyoruz. $X = \{ 1, 2, 3, 4 \}$ olmak üzere, 1 sırasıyla 1, 2, 3 ve 4 ile eşlendiğinden, (X, V_4)bir tranzitif permütasyon grubudur.

$B = \{ 1, 3 \} \subset X$ alalım ;

$\forall\, g \in G$ için $Bg = B$ veya $Bg = \{ 2, 4 \}$, $Bg \sqcap B = \phi$ elde edilir.

$B \neq \phi$ ve $1 < | B | < | X |$ olduğundan, B, (X, G) permütasyon grubunun triviyal olmayan bir bloğudur. (X, G) bir impiritif permütasyon grubudur.

LEMMA 1.5.1. (X, G) permütasyon grubu verilmiş olsun.

a) B ve B' , (X, G) permütasyon grubunun her hangi iki bloğu ise ; $B \sqcap B'$ de (X, G)' nin bir bloğudur.

b) B, (X, G) permütasyon grubunun bir bloğu ise, $\forall\, g \in G$ için Bg, (X, G) permütasyon grubunun bir bloğudur.

c) (X, G) tranzitif permütasyon grubu ve B, (X, G)' nin boş olmayan bir bloğu ise, $| B | \,\big|\, | X |$ dir.

İSPAT. **a)** $\forall\, g \in G$ için g, bir bijeksiyon olduğundan, arakesiti korur ; $(B \sqcap B')\, g = (B)\, g \sqcap (B')\, g$ dır

$$(B \sqcap B')g \sqcap (B \sqcap B') = (\underbrace{Bg \sqcap B}_{I}) \sqcap (\underbrace{B'g \sqcap B'}_{II})$$

_ I, II' den en az biri boş küme ise, yukarıda bahsedilen arakesit cümlesi de boş kümedir. Demekki $B \sqcap B$ bir bloktur.

_ I ve II' nin her ikisi de boş kümeden farklı olsun ;

B, B' birer blok ise, $Bg \sqcap B = B$ ve $B'g \sqcap B' = B'$ elde edilir. Şu halde $\forall\, g \in G$ için $(B \sqcap Bg) \sqcap (B \sqcap B') = (Bg \sqcap B) \sqcap B'g \sqcap B') = B \sqcap B'$ bulunur. Bu durumda da $B \sqcap B'$,bir bloktur.

b) B, (X,G) permütasyon grubunun bir bloğu, $g \in G$ olsun.

$\forall\, h \in G$ için, $(Bg)h \sqcap (Bg) = \subset$ diyelim.

$$\exists\, g^{-1}$$

$$\subset = (Bg)h \sqcap (Bg) \Rightarrow \subset g^{-1} = [\,(Bg)h \sqcap (Bg)\,]\, g^{-1}$$

$$\Rightarrow \subset g^{-1} = B(\underbrace{g h g^{-1}}_{\in G}) \sqcap B \Rightarrow \subset g^{-1} = \begin{Bmatrix} \phi \\ B \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \subset = \begin{Bmatrix} \phi \\ Bg \end{Bmatrix} \Rightarrow$$ Bg, (X, G) permütasyon grubunun bir bloğudur.

c) $G_B = \{\, g \in G \mid Bg = B \,\}$ cümlesini ele alalım;
$G_B \leq G$ dir :

$B1_G = B$ olduğundan, $G_B \neq \phi$

$g, h \in G_B$, $B(g h) = ((B)g)h = (B)h = B \Rightarrow g h \in G_B$

$g \in G_B \Rightarrow Bg = B \Rightarrow B = Bg^{-1} \Rightarrow g^{-1} \in G_B$

Böylece, grup olma aksiyomlarının, kolaylıkla sağlandığı görülür. Şimdi de G_B' in G içindeki kalan sınıflarını düşünelim.; $G = \biguplus_{i=1}^{k} G_B\, g_i$ olsun.

$B \neq \phi$ ise, en az bir $x \in B$ vardır. (X, G) tranzitif bir permütasyon grubu olduğundan ; $X = B\,G$ dir.

$X = B\,G = B \biguplus_{i=1}^{k} G_B\, g_i = \biguplus_{i=1}^{k} B\, G_B\, g_i = \biguplus_{i=1}^{k} B\, g_i$. Bu birleşimin ayrık olup olmadığını araştıralım.

$i \neq j$ için , $\subset = B\, g_i \sqcap B\, g_j$ alalım;

$\subset = B\, g_i \sqcap B\, g_j \Rightarrow \subset g^{-1}{}_j = B\, g_i\, g^{-1}{}_j \sqcap B$ dir.

B blok olduğundan , $\subset g^{-1}{}_j \neq \phi$ ise $\subset g^{-1}{}_j = B$ olmak zorundadır. $\subset g^{-1}{}_j = B\, g_i\, g^{-1} \sqcap B = B \Rightarrow g_i\, g^{-1} \in G_B \Rightarrow G_B\, g_i = G_B\, g_j$ elde edilir. Oysa $i \neq j$ olduğundan $G_B\, g_i \sqcap G_B\, g_j = \phi$ $G_B\, g_i \neq G_B\, g_j$ dir. O halde $\subset g^{-1}{}_j = \phi$, $\subset = \phi$ koşulu sağlanmalıdır.

$X = \biguplus_{i=1}^{k} B\, g_i$ ayrık bir birleşim ise, $|X| = \sum_{i=1}^{k} |B\, g_i|$ dir. $\forall_i$ için, g_i ,bir bijeksiyon ise,

$|B\, g_i| = |B|$ yazılır.

$$|X| = \sum_{i=1}^{k} |B| = k\,|B| \Rightarrow |B| \;\; |X| \text{ bulunur.}$$

LEMMA 1.5.2. $k \geq 2$ olmak üzere, (X, G) k- tranzitif bir permütasyon grubu ise, primitif bir permütasyon grubudur.

İSPAT. $|B| \geq 2$ oymak üzere; B' nin (X, G) penmütasyon grubunun bir bloğu olduğunu kabul edelim ;

$|B| \geq 2 \Rightarrow \exists\, x, y \in B$, $x \neq y$

$|X| = 2 \Rightarrow B = X$ dir.

$|X| > 2$ olsun ;

(X, G) k- tranzitif, $k \geq 2$ ise, en azından 2 _ tranzitiftir.
Bu durumda, $\forall\, x \neq z \in X$ için ;

$\{x, y\}$, $\{x, z\}$ çiftine karşılık, $x\,g = x$ ve $y\,g = z$ olacak şekilde bir $g \in G$ vardır.
$x \neq y$

$$x \in B,\ x\,g = x \Rightarrow x \in Bg \Rightarrow x \in Bg \sqcap B \Rightarrow Bg \sqcap B \neq \phi \xRightarrow{\text{B bir blok}} Bg = B \text{ olmak zorundadır.}$$

$$\left.\begin{array}{r} y \in B \Rightarrow y9 = z \in Bg \Rightarrow z \in B \Rightarrow X \subseteq B \\ B \subseteq X \end{array}\right\} \Rightarrow B = X \text{ dir.}$$

Şu halde (X, G) bir primitif permütasyon grubudur.

TEOREM 1.5.1. (X, G) bir tranzitif permütasyon grubu olsun, (X, G) permütasyon grubunun, primitif olabilmesi için, gerekli ve yeterli koşul, her hangi bir $x \in X$ için G_x stabilizatörünün G' nin bir maximal alt grubu olmasıdır.

1°) Gereklilik : G_x maximal bir alt grup olmasın. Bu durumda (X, G) permütasyon grubunun, primitif olmadığı gösterilecektir.

G_x, G' nin bir maximal alt grubu olmadığından, $G_x < H < G$ olacak şekilde bir $H < G$ vardır. ([5] sayfa 114, § 3+)

$x \in X$ olmak üzere, $B = X H$ alt kümesini ele alalım.

B bir bloktur :

$\forall g \in G$ için $Bg \sqcap B \neq \phi$ olsun.

Bu durumda, $y \in Bg \sqcap B$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır.

$y \in Bg \sqcap B \Rightarrow \quad y \in Bg, \; y \in B$

$y \in Bg \Rightarrow \quad y = ((x)h)g, \quad h \in H$ yazılır.

$y = ((x)h)g = xhg = xh', \quad h' \in H, \; \exists \; h'^{-1} \Rightarrow \quad xhgh'^{-1} = x \Rightarrow \quad hgh'^{-1} \in G_x \subseteq H$
$\Rightarrow \quad hgh'^{-1} \in H \Rightarrow \; g \in h^{-1} H h' \; \Rightarrow \; g \in h^{-1} H h' = H$

Demek ki $Bg \sqcap B \neq \phi$ koşulunu sağlayan, her $g \in G$, aynı zamanda H alt grubunun bir elemanıdır.

$g \in H \Rightarrow \; Bg = x Hg = x H = B$

$\Rightarrow \; \forall g \in G$ için $Bg \sqcap B \neq \phi$ ise $Bg = B$

$\Rightarrow$ B, (X, G) permütasyon grubunun bir bloğudur.

B, triviyal bir blok değildir :

$B = x H$ ise , $x \in B$ olduğundan, $B \neq \phi$ dır. Şimdi de $|B| \neq 1$ ve $|B| \neq |X|$ koşullarının gerçeklendiğini göstereceğiz.

$G_x < H \quad \exists \; h \in H \setminus Gx$

x, $xh \in xH$ olup, $x \neq xh$ dır. Aksi halde , $x = xh$, $h \in G_x$ elde edilir ki; bu çelişkidir. Şu halde $|B| \geq 2$ dir.

$H < G \Rightarrow \; \exists \; g \in G \setminus H$

$g \in G \setminus H$ için, $Bg \sqcap B = \phi$ olmalıdır. $B \subseteq X$, $Bg \subseteq X$ ve $Bg \sqcap B = \phi \Rightarrow \quad |B| + |Bg| \leq |X|$
$\Rightarrow \quad |B| \leq |X|$

$\Rightarrow$ B, (X, G) permütasyon grubunun triviyal olmayan bir bloğudur. O halde , (X, G) permütasyon grubu impiritiftir. Sonuç olarak. (X, G) permütasyon grubu primitif ise, G_x, G' nin bir maximal alt grubudur.

2°) Yeterlilik : (X, G) permütasyon grubu primitif olmasın. Bu durumda, G_x' in G' nin bir maximal alt grubu olmadığını , göstereceğiz. (X, G) primitif bir permütasyon grubu degilse;

$1 < |B| < |X|$ olacak şekilde bir B bloğu bulunabilir.

$H = G_B$ alalım ;
$x \in B$ olmak üzere;

$\forall g \in G_x$ için $xg = x$

$x \in B \sqcap Bg$, $B \sqcap Bg \neq \phi \Rightarrow Bg = B \Rightarrow g \in H$ dir.

Bu durumda, $G_x \subseteq H$ dır. Böylece, $G_x \leq H \leq G$ elde edilir .

$|B| > 1$ olduğundan, birinden farklı bir x, $y \in B$ çifti vardır. (X; G) permütasyon grubu tranzitif ise, $\exists\, g \in G$, $xg = y$ ve $g \in G_x$ dir. Öte yandan; $y \in Bg \sqcap B \Rightarrow Bg = B \Rightarrow g \in H$

$\Rightarrow G_x < H$ elde edilir.

$H = G$ olsa ;

(X, G) tranzitif bir permütasyon grubu olduğundan, $X = BG$ ve $H = G \Rightarrow B = BH = BG \Rightarrow B = X$ bulunur.

Halbuki , $|B| < |X|$ koşulu altında bu, mümkün değildir. Şu halde , $G_x < H < G$ dir. G_x; G' nin bir maximal alt grubu değildir. Sonuç olarak ; (X, G) permütasyon grubu, impritif ise, G_x, G' nin bir maximal alt grubudur.

TEOREM 1.5.2. (X, G) primitif bir permütasyon grubu, $1_G < N \trianglelefteq G$ olsun. Bu durumda, (X, N) bir tranzitif permütasyon grubudur.

İSPAT. $N \leq G$ olduğundan, N, X üzerinde etki eder. Dolayısı ile, (X, N) bir permütasyon grubudur. $x_i, \in X$, $x_i N$ bir yörünge olmak üzere, $X = \cup\, x_i N$ yazabiliriz. Yörüngelerden birine, $B = x N$ diyelim. Bu durumda B, (X, G) permütasyon grubunun bir bloğudur.

$\forall g \in G$ için, $Bg = x\,Ng = x\,g\,N = ((x)\,g)\,N = r\,N$, $r \in X$ ise, Bg bir yörüngedir. O halde, yörüngelerin özelliğinden, $Bg \sqcap B = \phi$ veya $Bg = B$ dır. Demek ki B, (X, G) permütasyon grubuna ait bir bloktur.

1°) $B = x\,N$, $x \in x\,N$ ise $x \in B$, $B \neq \phi$ dır.

$X = \cup\, x_i N$ yazılışında, $\forall i,j$ için $|x_i N| = |x_j N|$ dır.

x, y $\in$ X, x N ve y N yörüngelerini göz önüne alalım. (X, G) bir tranzitif permütasyon grubu ise, $x\,g = y$ olacak şekilde , bir $g \in G$ vardır. $y\,N = x\,g\,N \Rightarrow yN = (xN)\,g \Rightarrow |x\,N| = |y\,N|$ elde edilir.

2°) $|B| > 1$dir ;

$|B| = 1$ yani, $B = x\,N = \{x\}$ olsa; her $x, y \in X$ için, $|x\,N| = |y\,N|$ koşulundan , her $y \in X'$ e karşılık $|y\,N| = 1$ yazılırdı. Böylece ; $y \in X$ olmak üzere; $y\,N = \{y\}$ eşitliğinden, $N \leq \sqcap_{y \in X} G_y$ bulunurdu. Oysa ; her $y \in X$, sabit bırakan, sadece $1_G \in G$ dir.

$N \leq \sqcap_{y \in X} G_y$, $\sqcap_{y \in X} G_y = 1_G \Rightarrow N \leq 1_G$ elde edilirdi ki; bu, $N > 1_G$ şartı ile çelişir. Demek ki ;

$|B| > 1$ dir.

3°) $B = X$ dır :

(X, G) primitif bir permütasyon grubu ve $|B| > 1$ olduğundan, $B = X$ olmalıdır.

Şu halde, her $x \in X$ için oluşturabildiğimiz, x N yörüngesi, X kümesine eşittir. Yani (X, N) tranzitif bir permütasyon grubudur.

<u>ÖNERME 1.5.1.</u> (X, G) bir primitif permütasyon grubu ve herhangi bir $x \in X$ için, G_x, basit bir grup olsun. Bu durumda;
G basit bir gruptur veya G' nın N gibi bir normal regüler alt grubu vardır.

<u>İSPAT.</u> $1_G < N \trianglelefteq G$ olduğunu varsayalım ;

Açıkça görüldüğü gibi, (X, N),bir tranzitif permütasyon grubudur. $x \in X$ olmak üzere $Nx = N \sqcap Gx$ dir. Permütasyon Grupları Teorisinin Temel Bağıntısına göre, $|N| = |x\,N|\ |N\,x|$ yazılabilir. Teorem 1.5.2 gereğince, (X, N) bir tranzitif permütasyon grubudur. Şu halde $|x\,N| = |X|$ dir.

$|N| = |x\,N|\ |N\,x| = |X|\ |N\,x| \Rightarrow |X| = |N : Nx|$

Şimde de aşağıdaki özelliği irdeleyelim ;

(X, N) permütasyon grubunun regüler olabilmesi için gerek ve yeter koşul ; $N \sqcap G_x = 1_G$, $|Nx| = |N \sqcap G_x| = 1$ olmasıdır.

(X, N) regüler bir permütasyon grubu ise tarnzitiftir. ve $|N| = |X|$ dir. Bu durumda; $|Nx| = 1$ elde edilir.

$|Nx| = 1$ ise $|N| = |X|$ dir. Teorem 1.5.2. gereğince (X, N) tranzitif ve $|N| = |X|$ olduğundan, (X, N) bir regüler permütasyon grubudur.

O halde 1°) (X, N) gibi bir regüler alt grup vardır.

2°) Hiç bir regüler alt grup yoktur.

halleri incelenmelidir.

2°) koşuluna rağmen, $1_G < N \trianglelefteq G$ olsun.

(X, N) permütasyon grubu regüler değilse , $N \sqcap G_x \neq 1_G$ dir. $N \sqcap Gx \neq 1_G \Rightarrow 1_G < N \sqcap G_x \leq G_x$

Gx basit bir grup ise $N \sqcap G_x = G_x$ olmak zorundadır. Su halde $G_x \leq N$ dir.

$G_x \neq N$ dir:

(X, N) tranzitif bir permütasyon grubu ise , N' in X içinde tam bir tane yörüngesi vardır. Oysa biliyoruz ki, G_x' in X içinde en az iki yörüngesi vardır.

Demekki $G_x < N \trianglelefteq G$ dir. Teorem 1.5.1. gereğince G_x maximal bir alt grup olduğundan, $N = G$ şartı sağlanmalıdır.

O halde G, basit bir gruptur.

BÖLÜM II

-1- SONLU GEOMETRİ

TANIM 2.1.1. X ve L $\subset$ P(X), boş kümeden farklı, birer sonlu cümle olsun. ([2] Sayfa 19, Tanım 2.1.1.)

(i) X kümesinin birbirinden farklı, herhangi bir x_1, x_2 çifti, L' nin bir ℓ elemanına aitttir.

(ii) L cümlesinin birbirinden farklı, herhangi bir ℓ_1, ℓ_2 çifti kesinlikle, ortak bir $x \in X$ içerir.

(iii) X kümesinin birbirinden farklı, herhangi üçü, aynı $\ell \in L$' ye ait olmayan, en az dört elemanı vardır.

Koşullarının gerçeklenmesi halinde, (X,L) ikilisine; bir projektij düzlem, X' in elemanlarına; bu düzlemin noktaları, L' nin elemanlarına; bu düzlemin doğruları denir.

TANIM 2.1.2. (X,L) sonlu bir projektif düzlem ve $\pi \in S_x$ olsun. Her $\ell \in L$ için, $\ell\pi \in L$ ve tersine, $\ell\pi \in L$ için , $\ell \in L$ ise, π' ye, (X,L) prejktif düzleminin, bir kolinasyonu denir. ([2] Sayfa 20, Tanım 2.12.)

(X,L) Projektif düzleminin bütün kolineasyonları cümlesi, S_x grubunun bir alt grubudur.

$$K=\{\pi \in \pi \in S_x \mid \ell \in L \Leftrightarrow \ell\pi \in L \quad \forall \ell, \ell\Pi \in L \text{ için}\} \subset S_x$$

$\forall \Pi, \Pi' \in K$, $\forall \ell \in L$ için, kolineasyon tanımından , $\ell\Pi \in L$ ve $(\ell\Pi)\Pi' \in L$ ise, $\Pi.\Pi' \in K$ dır. S_x sonlu bir grup olduğundun, $K \leq S_x$ dir.

Bu gruba, (X,L) projektif düzleminin, kolineasyon grubu denir.

Kolineasyon tanımını irdeleyelim :
$\pi \in S_x$, (X,L) projektif düzleminin , bir kolineasyonu olsun. Şu halde ;

(1) $\forall \ell \in L$ için $\ell\Pi \in L$
ve
(2) $\forall \ell\Pi \in L$ için $\ell \in L$

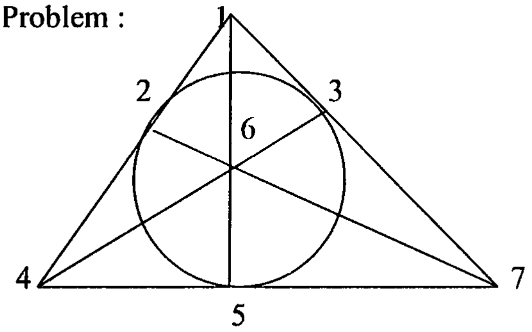
dir. Dikkat edilecek olursa, (1) koşulunun gerçeklenmesi halinde, (2) koşulu kendiliğinden sağlanmaktadır.

Gerçekten de :
S_x sonlu bir grup ise $\Pi \in S_x$ olmak üzere, $|\Pi| = m \in N$ dir.

$$\forall \ell \in L \text{ için } L\Pi \in L \overset{(1)}{\Rightarrow} \ell\Pi^2 \in L \overset{(1)}{\Rightarrow} \ldots\ldots \overset{(1)}{\Rightarrow} \ell\Pi^m \in L \Rightarrow \ell \in L \text{ dir.}$$

Şu halde (2) şartını, gözönüne almaya, gerek yoktur.

Problem :



$X = \{ 1,2,3,4,5,6,7 \}$
$L = \{ \{1,2,4\}, \{2,3,5\}, \{3,4,6\}, \{4,5,7\}, \{5,6,1\}, \{6,7,2\}, \{7,1,3\} \}$

sonlu cümleleri veriliyor.
Açıkça görüldüğü gibi, herhangi iki noktadan tam bir doğru geçerken, herhangi iki doğru tam bir noktada kesişiyor. $\{1,2,3,5\}$ ise, herhangi üçü doğrudaş olmayan noktaların oluşturduğu, X' in bir alt cümlesidir.

Şu halde, tanım 2.1.1. ' e göre, (X,L) ikilisi, 7 noktalı ve 7 doğrulu bir projektif düzlemdir.

Şimdi de, (X,L) projektif düzleminin, kolineasyon grubunun mertebesini belirleyelim:

$\Pi = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7) \in S_7$ ' yi ele alalım

$\{1\ 2\ 4\}\ \Pi = \{2\ 3\ 5\} \in L$, $\{2\ 3\ 5\}\ \Pi = \{3\ 4\ 6\} \in L$, $\{3\ 4\ 6\}\Pi = \{4, 5, 7\} \in L$, $\{4, 5, 7\}\Pi\ \{5,6,1\} \in k$
$\{5,6,1\}\ \Pi = \{6,7,2\} \in L$, $\{6,7,2\}\ \Pi = \{7,1,3\} \in L$
Π, (X,L) Projektif düzleminin bir kolineasyonudur.
Kolineasyon grubunu, G ile gösterirsek; (X,G) ikilisi, bir permütasyon grubudur ve tranzitifdir.

$$\left.\begin{array}{l} \Pi : 1 \to 2 \\ \Pi^2 : 1 \to 3 \\ \Pi^3 : 1 \to 4 \\ \Pi^4 : 1 \to 5 \\ \Pi^5 : 1 \to 6 \\ \Pi^6 : 1 \to 7 \\ \Pi^7 : 1 \to 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall\, x,y \in X \text{ için } \exists g \in G,\ x\,g = y \Rightarrow (X,G), \text{ Tranzitif bir permütasyon grubudur.}$$

$\sigma = (2\ 7\ 6)\ (4\ 3\ 5)$ ve $\rho = (2\ 4)\ (5\ 6) \in S_7$, (X,L) projektif düzleminin, birer kolineasyonudur.

Gerçekten de;
$\{2, 3, 5\}\ (2\ 7\ 6)\ (4\ 3\ 5) = \{4, 5, 7\} \in L$, $\{4, 5, 7\}\ (2\ 7\ 6)\ (4\ 3\ 5) = \{3, 4, 6\} \in L$
$\{3, 4, 6\}\ (2\ 7\ 6)\ (4\ 3\ 5) = \{5, 3, 2\} \in L$, $\{6, 7, 2\}\ (2\ 7\ 6)\ (4\ 3\ 5) = \{2, 6, 7\} \in L$
$\{7, 1, 3\}\ (2\ 7\ 6)\ (4\ 3\ 5) = \{6, 1, 5\} \in L$, $\{6, 1, 5\}\ (2\ 7\ 6)\ (4\ 3\ 5) = \{2, 1, 4\} \in L$
$\{2, 1, 4\}\ (2\ 7\ 6)\ (4\ 3\ 5) = \{7, 1, 3\} \in L$

$\{1, 2, 4\}\ (2\ 4)\ (5\ 6) = \{1, 4, 2\} \in L$, $\{5, 6, 1\}\ (2\ 4)\ (5\ 6) = \{1, 5, 6\} \in L$
$\{2, 3, 5\}\ (2\ 4)\ (5\ 6) = \{4, 3, 6\} \in L$, $\{6, 7, 2\}\ (2\ 4)\ (5\ 6) = \{5, 7, 4\} \in L$
$\{3, 4, 6\}\ (2\ 4)\ (5\ 6) = \{3, 2, 5\} \in L$, $\{1, 7, 3\}\ (2\ 4)\ (5\ 6) = \{1, 7, 3\} \in L$
$\{4, 5, 7\}\ (2\ 4)\ (5\ 6) = \{2, 6, 7\} \in L$
olduğundan, $\rho, \sigma \in G$ dir.

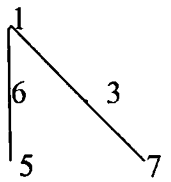
(X,G) permütasyon grubu, 2 - tranzitiftir:
(X,G) permütasyon grubu, tranzitif idi. Şu halde, $(X \setminus \{1\}, G_1)$ permütasyon grubunu, tranzitif olduğunu göstermek yeterlidir.

$\rho, \sigma \in G$ dir. Ayrıca,

$\sigma: 2 \to 7$
$\sigma^2: 2 \to 6$
$\rho: 2 \to 4$
$\sigma^\rho : (4\ 7\ 5)\ (2\ 3\ 6) : 2 \to 3$
$\sigma . \rho : (2\ 7\ 5)\ (3\ 6\ 4)$, $(\sigma\ \rho)^2 : 2 \to 5$

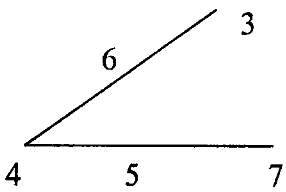
koşulları gerçekliğinden, her $x,y \in X \setminus \{1\}$ için $(x)\ g = y$ olacak şekilde bir $g \in G_1$ bulunabilir. Yani $(X \setminus \{1\}, G_1)$ tranzitif bir permütasyon grubudur. Dolayısı ile, (X,G) permütasyon grubu 2 - tranzitifdir. Önerme 1.3.4 gereğince, $|G| = 7.\ 6.\ |G_{12}|$ yazabiliriz.

G_{12} grubu, 1 ve 2 nolu noktaları sabit bırakmaktadır. 4 nolu nokta, 1 ve 2 nolu noktalarından geçen, doğrunun üzerinde bulunduğundan sabit kalır. O halde, G_{12} ' nin 3, 5, 6, 7 nolu noktaları üzerindeki etkileri önemlidir.

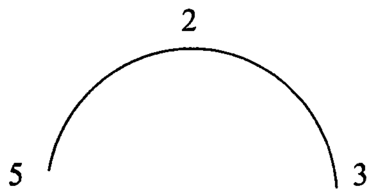


Doğrularını gözönüne alalım;

1 nolu nokta sabit kaldığından, G_{12}, $\{1, 3, 7\}$ kümesini ya kendi üzerine yada $\{1, 6, 5\}$ cümlesi üzerine eşlemek zorundadır. $\{1, 3, 7\}$, kendisiyle eşlenmiş olsaydı, 3, 7 nolu noktalar sabit kaldığından , 1, 2, 4, 3, 7 nolu noktalarının tamamı sabit kalacaktı. Hemen, 5 ve 6 nolu noktaların sabit kalacağı sonucuna varılır. Bu durumda, $G_{12} = I$ elde edilir. Oysa, $G_{12} \# I$ olmasını istiyoruz. Şu halde, 3 ve 7 nolu noktalar değişecektir. $(3\ 6)\ (5\ 7) \in G_{12}$ dir. 4nolu nokta sabit kaldığından,



doğruları düşünüldüğünde, aynı yorumla, $(3\ 7)\ (5\ 6) \in G_{12}$ bulunur.



$\Rightarrow$(3 5) transpozisyonu vardır. Aynı anda 2, 6, 7 noktalarını kendi üzerine götüremeyeceğinden, (6 7) transpozisyonu da vardır. Sonuç olarak; (3 5) (6 7) $\in G_{12}$ bulunur.

$G_{12} = \{ I, (3\ 7)(5\ 6), (3\ 6)(5\ 7), (3\ 5)(6\ 7) \}$ dir.

$|G| = 7.\ 6.\ |G_{12}| = 7.\ 6.\ 4 = 1\ 6\ 8$

-2- SONLU CİSİMLER

Z_P, p bir asal sayı ise, içinde tanımlanan " + " ve " . " işlemlerine göre cisimdir. $f(x) \in Z_P[x]$ indirgenemez bir polinom ve $r = d(f) \geq 2$ olsun. Bu durumda, $f(\alpha) = 0$ için $Z_P(\alpha)$ bir cisim genişlemesidir. $Z_P(\alpha)$, Z_P üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayının boyutu ise, $Z_P(\alpha) : Z_P$ cisim genişlemesinin derecesine eşittir. $[Z_P(\alpha) : Z_P] = r$ yazılır. $1, \alpha, \ldots, \alpha^{r-1}$ bir baz olmak üzere, her $k \in Z_P(\alpha)$ için; $k = k_0 + k_1\alpha + k_2\alpha^2 + \ldots + k_r\alpha^{r-1}$, $k_i \in Z_P$ tektürlü yazılır.
Dolayısı ile $|Z_P(\alpha)| = |Z_P|^r = p^r$ elde edilir.

Her sonlu cismin eleman sayısı, bir asal sayının kuvveti şeklinde ifade edilir:
F bir cisim ise birim eleman vardır.
F sonlu cisim olduğunda, Kar $F = p \in \mathbb{P}$ dir.

$Z_P \subset F$ ise $F : Z_P$ bir cisim genişlemesidir. Bu durumda ; F, Z_P cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. F cisminin, Z_P üzerinde bir tabanı var ve $|F| < \infty$ ise, bu taban sonlu sayıda vektörden oluşur. Bahsedilen vektör uzayının boyutu r olsun. O halde $|F| = p^r$ bulunur. ([4] Sayfa 182, §5)

SONLU CİSİMLERLE İLGİLİ BİLİNMESİ GEREKEN GENEL KURALLAR

(i) n elemanlı, sonlu bir cismin varolabilmesi için gerek ve yeter koşul; $n = p^r$ eşitliğinin gerçeklenmesidir. Bundan sonraki işlemlerimizde, GF (p) = Z_P (Galois alanı) ve GF (p^r), p^r mertebeli, sonlu bir cisim olarak alınacaktır.

(ii) F , p^r elemanlı sonlu bir cisim ise $F \cong GF(p^r)$ dir. Yani mertebesi p^r olan bütün cisimler, birbirine izomorftur.

(iii) GF (p^r) cismine ait çarpım grubu $Zp^r - 1$ toplamsal, devresel grubuna, izomorfdur. Çarpım grubunun, bir doğurayına, cismin bir primitif elemanı denir.

(iv) GF (p^r) cismine ait tüm otomorfilerin oluşturduğu grup, Z_r ' ye izomorftur. Bu grup $x \rightarrow x^p$ otomorfisi tarafından doğrulur. ([2] Sayfa 22, §2)

ÖNERME 2.2.1. F sonlu bir cisim, A;

$$\varphi m, c : F \rightarrow F$$
$$x \rightarrow x\,m + c\ ;\ m \in F^*,\ c \in F$$

şeklindeki, tüm afin transformasyonlarının cümlesi olsun. Bu durumda, (F,A) permütasyon grubu, 2-tranzitifdir.

İSPAT : $A = \{ \varphi_{m,c} : x \rightarrow x\,m + c \mid m \in F^*, c \in F\}$ cümlesinin her elemanının bir bijeksiyon olduğunu gösterelim :

1) $\forall x \in F$ için, $(x)\,\varphi_{m,c} = x\,m + c \in F$ $(m \in F^*, c \in F)$

2) $\forall y \in F$ için $\exists x \in F \ni (x)\,\varphi_{m,c} = y$

$$mx + c = y$$
$$m \in F^*,\ \exists m^{-1}$$
$$\Rightarrow mx = y - c \Rightarrow x = m^{-1}(y-c) \in F$$

Şu halde, $\varphi_{m,c}$ tasviri üzerinedir.

3) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow (x_1)\,\varphi_{m,c} \neq (x_1)\,\varphi_{m,c}$ dir.

$$m \in F^*,\ \exists m^{-1}$$

Aksi takdirde; $mx_1 + c = mx_2 + c \Rightarrow$; $mx_1 = mx_2 \Rightarrow m^{-1}mx_1 = m^{-1}mx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$!
$\varphi_{m,c}$ tasviri, (1-1) dir.

Sonuç olarak A kümesinin her elemanı, bir bijeksiyondur.

F sonlu bir cisim ise, $|F| \geq 2$ dir. En azından birim eleman ve sıfır eleman mevcuttur. $m = 1_F$, $c = 0_F$ için $\varphi_{1_F,0_F} \in A$ olduğundan, $A \neq \Phi$ dir. Şimdi de A cümlesinin, S_F grubunun, bir alt grubu olduğunu göstereceğiz.

A kümesi tasvirlerin çarpma işlemine göre kapalıdır. Her $\varphi_{m,c}$, $\varphi_{m',c'} \in A$ için, $\varphi_{m,c}\ \varphi_{m',c'}$ dır.

Bir $x \in F$ için, $(x)\,\varphi_{m,c}\ \varphi_{m',c'} = (xm + c)\,\varphi_{m',c'} = x\underbrace{mm'}_{m''} + \underbrace{cm' + c'}_{c''} = (x)\,\varphi_{m'',c''} \Rightarrow \varphi_{m,c}\,\varphi_{m',c'} = \varphi_{m'',c''}$;

$m, m' \in F^*$ ve $cm' + c' \in F \Rightarrow \varphi_{m'',c''} \in A$ dır.

Demek ki; (F,A) ikilisi, bir permütasyon grubudur. (F,A) permütasyon grubu, kesin 2- tranzitiftir.

Her $x \neq y \in F$ için; $\{0_F, 1_F\}$, $\{x, y\}$ ikililerine karşılık, $(0_F)\,\varphi = x$, $(1_F)\,\varphi = y$ olacak şekilde tam bir tane $\varphi \in A$ vardır.

$\varphi_{m,c} \in A$ olsun. Öyleki;
$(0_F)\,\varphi_{m,c} = x$, $(1_F)\,\varphi_{m,c} = y$ koşulları gerçeklensin.

$$\left.\begin{array}{l}(0_F)\,\varphi_{m,c} = x \\ \\ (1_F)\,\varphi_{m,c} = y\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = x \\ \\ m + c = y\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} c = x \\ \\ m = y - c\end{array}\right.$$

O halde, x,y verildiğinde, c ve m tek türlü belirlendiğine göre, $\varphi_{m,c}$ transformasyonu da tek türlü olarak belirlidir. (F,A) permütasyon grubu, kesin 2- tranzitiftir.

3- SONLU VEKTÖR UZAYLARI

$p \in IP$, $q = p^r$ olmak üzere, GF (q) sonlu cismi üzerinde kurulan, n - boyutlu bir vektör uzayını, V(n,q) sembolü ile göstereceğiz.
$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, V vektör uzayının bir bazı olsun. Bu durumda, V vektör uzayının her elemanı, $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$, $\alpha_I \in GF(q)$ şeklinde tek türlü yazılabilir. O halde;
$V = \underbrace{GF(q) \times GF(q) \times \ldots \times GF(q)}_{n \text{ tane}}$ ise $|V| = q^n$ dir. ([2] Sayfa 23, § 2)

TANIM 2.3.1. V = V(n,q) vektör uzayı ve $s : V \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow V$ bijeksiyonu verilmiş olsun. $\alpha \in$ Aut F olmak üzere ;

(i) $\forall\, x,y \in V$ için $(x+y)s = (x)\, s + (y)\, s$
(ii) $\forall\, \lambda \in F, \forall\, x \in V$ için $(\lambda x)\, s = (\lambda)\, \alpha\, (x)\, s$ koşulları sağlanırsa, (s,α) çiftine, V = V(n,q) vektör uzayının bir semilineer veya yarı lineer otomorfisi denir.

1) $\{ (s,\alpha) \mid s : V \rightarrowtail\!\!\twoheadrightarrow V,\ \alpha \in Au + F \}$ cümlesi, S_V ' nin bir alt grubudur.

2) $(s,\alpha) = (s', \alpha')$ $\quad s = s'$ ve $\alpha = \alpha'$ dır.

$(s,\alpha) = (s', \alpha')$ olsun. (s,α) ve (s',α') bir bijeksiyon ise $s = s'$ olmak zorundadır.

$$\left.\begin{array}{l} \forall x \in V,\ \forall \lambda \in F \text{ için } (\lambda x)\, s' = ((\lambda)\alpha')\, ((x)\, s') \\ \forall x \in V,\ \forall \lambda \in F \text{ için } (\lambda x)\, s = ((\lambda)\alpha)\, ((x)\, s) \\ \qquad s = s' \end{array}\right\} \quad ((\lambda)\alpha')\, ((x)s') = ((\lambda)\alpha)\, ((x)s)$$

$\Rightarrow \forall x \in V$ için, $((\lambda)\alpha - (\lambda)\alpha')\, s(x) = 0$
$Vs = V$ olduğundan, $((\lambda)\alpha - (\lambda)\alpha')v = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda)\alpha - (\lambda)\alpha' = 0_F$
$\Rightarrow \forall \alpha \in F$ için, $(\lambda)\alpha = (\lambda)\alpha' \ \Rightarrow\ \alpha = \alpha'$ bulunur. Demekki, s bijeksiyonu verildiğinde, eşi olan $\alpha \in$ Aut F, tek türlü olarak belirlidir.

3) $(s, 1_{Aut\, F})$, V vektör uzayı üzerinde, bir adi lineer otomorfidir.

4) V = V(n,q) vektör uzayının bir tabanı, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ ise; her $x \in V$ için,
$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$; $x_i \in F$ yazılabilir. ℓ gibi bir lineer otomorfi alınsın. $L = (\ell_{ij})$,

F cismi üzerinde tanımlı, n x n 'lik bir matris olmak üzere;

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ e_n \end{bmatrix} \ell = L \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ e_n \end{bmatrix} \quad \text{yazılır.}$$

([3] Sayfa 169, § 2)
$\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ ikinci bir taban, h, birinci tabanı, ikinci tabana eşleyen bir lineer otomorfi olsun.

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ e_n \end{bmatrix} h = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ e_n \end{bmatrix}$$; H = (hij), F cismi üzerinde tanımlı, nxn lik bir matristir.

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{bmatrix} \ell = \left[H \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ e_n \end{bmatrix} \right] \ell = HL \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ . \\ . \\ . \\ e_n \end{bmatrix} = HL\,H^{-1} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$

TANIM 2.3.2. V = V(n,g) vektör uzayının tüm semilineer atomorfilerinin oluşturduğu cümleyi, $\Gamma L(V) = \Gamma L(n,q)$ ile gösteririz. Bu cümle, S_v gurubunun bir alt gurubu olup, semilineer grup adını alır.

V = V(n,q) vektöruzayının, tüm lineer otomorfilerinin oluşturduğu cümleyi, GL(V)=GL (n,q) ile gösteririz. S_v gurubunun bir alt gurubudur ve genel lineer gurup olarak, adlandırılır.

V = V(n,q) vektör uzayının, determinantı bir olan, tüm otomorfillerinin meydana getirdiği, S_v' nin alt gurubuna, özel lineer alt grup denir. SL (V) = SL (n,q) ile gösterilir. ((2) Sayfa 24, § 3)

ÖNERME 2.3.1. Bir V = V(n,q) vektör uzayı için;

(i) $GL(V) \xrightarrow{i} \Gamma L(V) \xrightarrow{j} \mathrm{Aut}\,F$; $\dot{I} : GL(V) \to \Gamma L(V)$

$$s \to (s, 1_{\mathrm{Aut}\,F})$$

$$J: \Gamma L(V) \to \mathrm{Aut}\,F$$

$$(s,\alpha) \to \alpha$$

(ii) $SL(V) \xrightarrow{i} GL(V) \xrightarrow{j} F^*$; $\dot{I} : SL(V) \to GL(V)$

$s \to s$

$J: GL(V) \to F^*$

$s \to \det s$

eşlemeleri geçerlidir.

İSPAT : **(i)** $i : GL(V) \to \Gamma L(V)$

$S \to (s, 1_{\mathrm{Aut}\,F})$

1°) $\forall s \in GL(V)$ için, $(s)i = (s, 1_{\mathrm{Aut}\,F}) \in \Gamma L(V)$ dir :

s bir lineer otomorfi olduğundan, V vektör uzayının, bir bijeksiyonudur. Ayrıca, her $x,y \in V$ için $(x+y)s = (x)s + (y)s$; her $\lambda \in F$, $x \in V$ 'ye karşılık ise, $(\lambda x)s = \lambda (x)s = (\lambda)_{1\mathrm{Aut}\,F}(x)s$ koşulları gerçeklenmektedir. O halde ; $(s, 1_{\mathrm{Aut}\,F}) \in \Gamma L(V)$ dir.

2°) i tasviri bire - birdir :

$s_1, s_2 \in GL(V)$ için, $(s_1)i = (s_2)i$ ise; $s_1 = s_2$ dir. Çünkü $(s_1, 1_{\mathrm{Aut}\,F}) = (s_2, 1_{\mathrm{Aut}\,F}) \Rightarrow s_1 = s_2$ olmalıdır.

3°) i tasviri üzerindedir:

$\forall (\check{s}, 1_{\mathrm{Aut}\,F}) \in \Gamma L(V)$ için, $\exists x \in GL(V) \ni (x)\dot{I} = (\check{s}, 1_{\mathrm{Aut}\,F})$

$(x, 1_{\mathrm{Aut}\,F}) = (\check{s}, 1_{\mathrm{Aut}\,F})$

$\Rightarrow x = \check{s}$ alınabilir.

4°) $\forall s_1, s_2 \in GL(V)$ için, $(s_1, s_2)i = (s_1)i\,(s_2)i$. dir.

$s_1, s_2 \in GL(V)$, $(s_1 s_2)i. = (s_1 s_2, 1_{\mathrm{Aut}\,F})$

$$\left.\begin{array}{l}(s_1)i. = (s_1, 1_{\mathrm{Aut}\,F})\\ (s_2)i. = (s_2, 1_{\mathrm{Aut}\,F})\end{array}\right\} \Rightarrow \quad (s_1)i.\,(s_2)i. = (s_1, s_2, 1_{\mathrm{Aut}\,F})$$

$\Rightarrow (s_1.s_2)i. = (s_1)i\ (s_2)i$ elde edilir.

(ii) $j : \Gamma L(V) \to \mathrm{Aut}\,F$

$(s, \alpha) \to \alpha$

$\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$, V vektör uzayının bir bazı olmak üzere ;

$s: V \to V$

$\lambda_i v_i \to ((\lambda_i)\alpha)v_i$

$\lambda_1 v_1 \to ((\lambda_1)\alpha)v_1$; $\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i\right) s = \sum_{i=1}^{n} ((\lambda_i)\alpha)v_i$, alalım

. .

. .

1) **s , iyi tanımlıdır :**

$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n \quad , \; v = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n$

$u = v \;\Rightarrow\; (\lambda_1 - r_1)v_1 + (\lambda_2 - r_2)v_2 + \ldots + (\lambda_n - r_n)\, v_n = 0$

$\Rightarrow\; \lambda_1 = r_1 \,,\, \lambda_2 = r_2 \,, \ldots ,\, \lambda_n = r_n$

$\alpha \in \mathrm{Aut}\, F$

$\Rightarrow u\,(s) = v\,(s)$ dir.

2) **s, işlemleri korur mu?**

$u\,,\, v \in v_i \quad u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \;,\; v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$ alınsın.

$(u + V)\, s = (\, (\lambda_1 + r_1)v_1 + (\lambda_2 + r_2)v_2 + \ldots + (\lambda_n + r_n)v_n\,)s$

$= (\, (\lambda_1 + r_1)\alpha\,)v_1 + ((\lambda_2 + r_2)\alpha\,)v_2 + \ldots + ((\lambda_n + r_n)\alpha\,)\, v_n$

$= (\, (\lambda_1)\alpha + (r_1)\alpha\,)v_1 + (\, (\lambda_2)\alpha + (r_2)\alpha\,)v_2 + \ldots + ((\lambda_n)\alpha + (r_n)\alpha\,)\, v_n$

$= (\, (\lambda_1)\alpha\,)v_1 + (\, (r_1)\alpha\,)v_1 + (\, (\lambda_2)\alpha\,)v_2 + ((r_2)\alpha\,)v_2 + \ldots + ((\lambda_n)\alpha\,)v_n + ((r_n)\alpha\,)\, v_n$

$= (\, (\, (\lambda_1)\alpha\,)v_1 + (\, (\lambda_2)\alpha\,)v_2 + \ldots + ((\lambda_n)\alpha\,)v_n\,) + (\, (\, (r_1)\alpha\,)v_1 + ((r_2)\alpha\,)v_2 + \ldots + ((r_n)\alpha\,)\, v_n)$

$= (u)\, s + (v)\, s$

$\forall \lambda \in F \,,\, \forall v \in V$ için, $(\, (\lambda\, v)\,)\, s \overset{?}{=} \lambda\, (\, (v)s\,)$

$(\lambda\, v)s = (\lambda\, (\, r_1 v_1 + r_2 v_2 + \ldots + r_n v_n))s = (\, \lambda\, r_1 v_1 + \lambda\, r_2 v_2 + \ldots + \lambda\, r_n v_n)s$

$= ((\, \lambda\, r_1)\alpha\,)v_1 + \ldots + ((\, \lambda\, r_n)\alpha\,)v_n$

$= ((\, \lambda)\alpha(\, r_1)\alpha\,)v_1 + \ldots + ((\, \lambda)\alpha\, (r_n)\alpha\,)v_n$

$= (\lambda)\alpha\, [\, (\, (r_1)\alpha\,)v_1 + \ldots + (\, (r_n)\alpha\,)v_n\,]$

$= (\lambda)\, \alpha \quad (\, (v)s\,)$

$\alpha \neq 1_{\mathrm{Aut}\, F}$ için istenilen koşul gerçeklenmez. $\alpha = 1_{\mathrm{Aut}\, F}$ olmalıdır.

$\Rightarrow \forall \lambda \in F \,,\; \forall\, v \in V$ için , $(\, (\lambda\, v)\,)\, s = (\lambda)\alpha \;\, (\, (v)\,)\, s$ dir.

3) **s tasviri üzerinedir :**

$v = \sum y_i v_i \in v$ alalım. $\alpha \in \text{Aut } F$ olduğundan ; $\exists \lambda_i \in F \ni (\lambda_i)\alpha = y_i$ yazılabilir.
Şu halde ; her $v \in V$ için, $v = (\lambda_i)\alpha)v_i$ elde edilir.

4) **s tasviri , bire - birdir :**

$u, v \in V$ olmak üzere ; $(u)s = (v)s$ ise , $u = v$ dir.

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i , \quad v = \sum_{i=1}^{n} r_i v_i$$

$$(u)s = \sum_{i=1}^{n} ((\lambda_i)\alpha)v_i \quad , \quad (v)s = \sum_{i=1}^{n} ((r_i)\alpha)v_i$$

$$(u)s = (v)s \;\Rightarrow\; \forall i \text{ için } , (\lambda_i)\alpha = (r_i)\alpha \;\overset{\alpha \in \text{Au+F}}{\Rightarrow}\; \lambda_i = r_i \;\; ; \;\; i = 1,2,\ldots,n \;\Rightarrow$$

$u = v$ dir.

$\Rightarrow s \in r L(v)$ dir.

Açıkça görülebileceği gibi; tasviri, sürjektifdir.

Her $(s, \alpha), (s', \alpha') \in \Gamma L(V)$ için, $((s.\alpha)(s', \alpha'))j = ((ss', \alpha\alpha'))j = \alpha\alpha' = ((s, \alpha))j\,((s',\alpha'))j$ koşulu sağlanır.
j, bir üzerine homomorfidir.

$\text{Ker} j = \{(s, \alpha) \mid \alpha = 1_{\text{Aut }F}\} = \dot{\text{I}}\text{m} i \leq \Gamma L(V)$
$\text{Ker} j = \{(s, 1_{\text{Aut }F}) \mid s \in \Gamma L(V)\} = GL(V) \Delta \Gamma L(V)$

(ii) 1°) $i: SL(V) \rightarrow GL(V)$
$s \rightarrow s$
tasviri, monomorfidir.

2°) $j: GL(V) \rightarrow F^*$
$s \rightarrow \det s$
1) j tasviri üzerinedir:

$\forall y \in F^*$ için, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ 0 & 0 & \ldots & y \end{pmatrix}$ alırsak; $\det A = y$ dir. Oysaki her nxn' lik bir matris, bir lineer tasvir belirler. Demekki, $\det s = y$ olacak şekilde bir s lineer otomorfisi vardır.

2) j tasviri, bire - bir değildir:

Birbirinden farklı lineer otomorfilerin, gösteriliş matrislerinin determinantları, birbirine eşit olabilir.

$\forall$ s, s' $\in$ GL (V) için, (s, s') j = det (s, s') = (det s) (det s') = (s) j. (s') j

$\Rightarrow$ j, bir üzerine homomorfidir.

Ker j = { s | dets = 1} $\subseteq$ GL (V) dir. Oysaki, dets = 1 koşulunu gerçekleyen, her s $\in$ GL (V), aynı zamanda, SL (V) grubuna aittir. Demekki; Ker j = SL (V) Δ GL (V) dir.

Önermemizdeki eşlemeleri şu şekilde özetleyebiliriz:

1°) ΓL (V) grubu, (s,α) ikililerinden oluştuğuna göre; s $\in$ GL(V), $\alpha \in$ Aut F koşullarının gerçeklendiğini düşündüğümüzde, ΓL (V) = GL (V) x Aut F elde edilir.

$|\Gamma L (V)| = |GL(V)| \, |\text{Aut } F|$

2°) Aynı mantıkla hareket ederek;

$|GL (V)| = |SL (V)| \, |F^*|$ elde edilir.

GL (V) VE SL (V) GRUPLARININ YAPISI:

V = V (n, q) vektör uzayı verilmiş olsun. Dim_F V $\geq$ 1 olması halinde, GL (V) ve SL (V) grupları,V*=V-{0}üzerinde tranzitiftir. Her v_1, $v_2 \in$ V* için, (v_1) g = v_2 olacak şekilde,bir g $\in$GL(V) vardır: $v_1 \neq v_2$ ise, V = V (n, q) vektör uzayının, v_1 ile başlayan bir bazını ve v_2 ile başlayan başka bir bazını oluşturabiliriz. V vektör uzayının herhangi iki bazını, birbirine eşleyen tam bir tane g $\in$ GL (V) vardır ([3] Sayfa 176, §4). Şu halde, her v_1, $v_2 \in$ V için, (v_1) g = v_2 olacak şekilde bir g $\in$GL (V) bulunabilir.

$$v_1 \neq v_2$$

g $\in$ SL (V) olması için, detg = 1 olmalıdır. detg = $\mu \neq 1$ koşulunun gerçeklendiğini varsayalım. V vektör uzayının v_1 ile başlayan bir bazı; B_1 = { v_1, w_2, ... , z_1}, v_2 ile başlayan bir bazıda; B_2 = { v_2, w_2, ... , z_2} olsun o halde;

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_1 \end{bmatrix} g = \underset{G}{\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_1 \end{bmatrix} \text{ dır. } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \mu^{-1} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

alınsın.

Bu durumda;

$$\begin{bmatrix} v_2 \\ p^{-1} w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} v_2 \\ w_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_2 \end{bmatrix} = MG \begin{bmatrix} v_1 \\ w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_1 \end{bmatrix}, \det (MG) = (\det M) (\det G) = \mu^{-1} . \mu = 1 \text{ elde edilir.}$$

Matrisi MG olan bir ğ lineer otomofrisi için, (v_1) ğ = v_2 dir. Ayrıca, ğ $\in$ SL (V) olduğu açıktır.
Demekki, GL(V) ve SL (V) grupları, $V^* = V - \{0\}$ üzerinde tranzitiftir. ([2] Sayfa 26,§3)

-4- HİPER DÜZLEM VE TRANSVEKSİYONLAR

TANIM 2.4.1. $V = V(n, q)$ ve $n = \dim_F V \geq 2$ olsun.
$U \underset{F}{<} v$ gibi, öyle bir alt uzay vardır ki; $\dim U = n - 1$ dir. Bu durumda, $|U| = q^{n-1}$ olup, U, V vektör uzayının, maximal bir alt vektör uzayıdır. U alt vektör uzayına, V = V (n, q) vektör uzayının, bir hiper düzlemi denir. ([2] Sayfa 26, Tanım 2.4.1)

1°) Her nontriviyal lineer fonksiyonel bir hiper düzlem belirler :

$u: V \rightarrow F$ bir lineer fonksiyonel olsun.
u triviyal ise ; $\forall x \in V$ için $(x)u = 0$ dır.
u triviyal değil ise ; en az bir $x \in V$ için $(x)u \neq o$ dır.

$$U = \{ x \in V \mid (x)u = 0 \} \subset V$$

$U \neq \Phi$ dır : Çünkü, $(\theta_u) = 0$, $\theta \in V$ dir.

U bir alt vektör uzayıdır : $a, b \in U$ için, $((a - b))u = (a)u - (b)u = 0$ ise $a - b \in U$ dır.

U bir hiper düzlemdir : $B = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$, V vektör uzayının bir bazı olsun. $(vi)u = a_i \in F$ $(1 \leq i \leq n)$ alınsın. Her $x \in V$ için, $x = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n$ eşitliği yazılabilir.
$(x)u = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n$ elde edilir. u, triviyal olmadığından, bir $a_i \in F - \{0\}$ vardır. O halde, $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = 0$ lineer denklemi, n - 1 parametreye bağlı olarak çözülebilir.

$a_1 \neq 0$ olsun :

$$\left.\begin{array}{r} x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 (-a_2/a_1) + \ldots + x_n(-a_n/a_1) \\ x = x_1v_1 + \ldots + x_nv_n \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$x = x_2 \underbrace{(v_2 - (a_2/a_1)v_1)}_{W_2} + \ldots + x_n \underbrace{(v_n - (a_n/a_1)v_n)}_{W_n}$$

$(v_2 - (a_2/a_1)v_1)\, u = (v_2)u - (a_2/a_1)(v_1)u = 0, \ldots, (v_n - (a_n/a_1)v_1)u = (v_n)u - (a_n/a_1)(v_1)u = 0$ ise ;

$w_1, w_2, \ldots, w_n \in U$

$y_2w_2 + \ldots + y_nw_n = 0 \Rightarrow y_2(v_2 - (a_2/a_1)v_1) + \ldots + y_n(v_n - (a_n/a_1)v_n) = \theta$

$\Rightarrow a_1y_2v_2 + \ldots + a_1y_nv_n - (y_2a_2 + \ldots + y_na_n)v_1 = \theta$

$a_1 \neq 0$

$\Rightarrow \forall i$ için ; $a_1y_i = 0 \Rightarrow y_i = 0$, $w_1, w_2, \ldots, w_n$ lineer bağımsızdır.

$U = < w_2, \ldots, w_n > \Rightarrow \dim U = n - 1$ dir.

$\Rightarrow$ U bir hiper düzlemdir.

2°) Her Hiper Düzlem Bir Lineer Fonksiyonel Belirler :

$U <_F V$ bir hiper düzlem olsun. Şu halde , $\dim_F U = n - 1$ dir. $B_1 = \{ v_1, \ldots, v_{n-1} \}$, U alt vektör uzayının bir bazı ise, $B_2 = \{ v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, v_n \}$ kümesi de, V vektör uzayının bir bazıdır.
$V = V(n, q)$; F cismi üzerinde, F ; kendi üzerinde vektör uzayı olduğundan ,

$$\begin{aligned} u : V &\rightarrow F \\ v_i &\rightarrow 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, n-1 \\ v_n &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanabilen, tam bir tane u lineer fonksiyoneli vardır.

Bu durumda ; $\forall x \in U$ için, $x = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n$ olduğundan,
$(x)u = x_1(v_1)u + \ldots + x_{n-1}(v_{n-1})u = 0$ elde edilir.
O halde ; $U \subseteq \{ x \in V \mid (x)u = 0\}$
(1) ' den $S = \{ x \in V \mid (x)u = 0 \} \subset V$ bir hiper düzlemdir. S ile U alt vektör uzaylarının boyutları aynı olduğundan $U = \{ x \in V \mid (x)u = 0\}$ bulunur.

Sonuç olarak, U hiper düzlemi verildiği zaman, u lineer foksiyoneli elde edilebilir. Bunun tersi de doğrudur. İlerleyen konularda, her $x \in V$ için, $(x)u$ değeri yerine (x,u) sembolü kullanılacaktır.

3°) Bir U hiper düzlemi verildiğinde, $x \in V$ için $(x,u) = \lambda\,(x,v)$ olacak şekilde bir $\lambda \in F^*$ vardır :

$B = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$,V vektör uzayının bir bazı olsun. $(v_i , u) = a_i$, $(v_i ,v) = b_i$, $(1 \leq i \leq n$, $a_i, b_i \in F)$ kabul edilsin. Her $x \in v$ için ;
$x = x_1v_1 + x_2v_2 + \ldots + x_nv_n$ yazılabilir.
$(x,u) = 0 \Leftrightarrow (x)u = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = 0$
$(x,v) = 0 \Leftrightarrow (x)v = x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_nb_n = 0$

Yukarıdaki denklemler aynı hiper düzleme ait olduğundan çözüm kümeleri aynıdır. Karşılıklı katsayılar birbirleriyle orantılı olmalıdır.

$a_1 = \lambda\, b_1$, $a_2 = \lambda\, b_2, \ldots , a_n = \lambda\, b_n$ alacak şekilde bir $\lambda \in F^*$ vardır.
Her $x \in V$ için , $(x,u) = (x)u = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = \lambda\,(x_1b_1 + \ldots + x_nb_n) =$

$\lambda\,(x)v = \lambda\,(x,v)$ dir. Yani; her $x \in V$ için, $(x,u) = \lambda\,(x,v)$ koşulunu gerçekleyen, bir $\lambda \in F^*$ bulunmaktadır. Açıkça görüleceği gibi ;

$\lambda v : V \to F$ tasviri, bir lineer fonksiyoneldir.
$x \to \lambda\,((x)\,v)$

Demek ki ; bir $x \in V'$ ye karşılık, keyfi $\lambda \in F^*$ için , $(x)u = \lambda\,(\,(x)\,v\,) = (x)\,(\lambda\,v)$ olduğundan, $u = \lambda\,v$ dir.

Aynı hiper düzlemi belirleyen, iki lineer fonksiyonelden biri, diğerinin, $\lambda \in F^*$ katıdır.

<u>4°) U bir hiper düzlem ise; bir $\ell \in GL(v)$ için, $(u)\,\ell$ hiper düzleminin, denklemi :</u>

ℓ bir otomorfi olduğundan, bu tasvir altında, boyutlar, korunacaktır. Şu halde ; $(U)\ell$ alt vektör uzayı, $V = V(n,q)$ vektör uzayının, bir hiper düzlemidir.

U hiper düzleminin, bir denklemi ; $(x,u) = 0$ olsun.

$(U)\ell$ hiper düzleminin bir denklemi ise, $(x\ell^{-1}\,,\,u) = 0$ bağıntısıyla verilir :

$$(U)\ell = \{\, x \in V \mid x = (y)\ell \;;\; y \in u\,,\,(y,u) = 0 \,\}$$

$$= \{\, x \in V \mid x\ell^{-1} = y\,;\,(x\ell^{-1},u) = 0 \,\}$$

$$= \{\, x \in V \mid (x\ell^{-1}\,,\,u) = 0 \,\}$$

$v : \ell^{-1} u$ diyelim. $V \xrightarrow{\ell^{-1}} V \xrightarrow{u} F$ ise ; v , bir lineer fonksiyoneldir.

Oysa, bir $x \in V$ için ; $((x)\ell^{-1})u = (x)\,(l^{-1}u) = (x)v$ dir.

Sonuç olarak ;

$(U)\ell = \{\, x \in V \mid (x,\,\ell^{-1}u) = 0 \,\}$ elde edilir. $(u)\ell$ hiper düzleminin, bir denklemi ; $(x,\,\ell^{-1}u) = 0$ dır.

([2] Sayfa 26, § 4)

<u>TANIM 2.4.2</u>

$1 \neq \tau \in GL\,(V)$ ve U, V vektör uzayının bir hiper düzlemi olsun.

Eğer , (i) Her $x \in U$ için, $(x)\,\tau = x$, (ii) Her $x \in V\,/\,U$ için, $(x)\tau - x \in U$ koşulları sağlanıyorsa, τ otomorfisine; V vektör uzayının , U hiper düzlemine göre, bir transveksiyonu denir. Transveksiyon, U hiper düzlemini sabit bırakan, V* vektör uzayının, elemanları üzerinde etkin, bir permütasyondur.

([2] Sayfa 26, §4)

<u>LEMMA 2.4.1.</u> Bir transveksiyon, tek bir hiper düzlem belirler.

İSPAT. τ transveksiyonu, U ve U' gibi, birbirinden farklı, iki hiper düzlem belirlesin. Bu taktirde, $U' \setminus U$ kümesine ait, bir v elemanı vardır. v, U vektör uzayının elemanları ile, lineer bağımsızdır. O halde ; $U \oplus F_v = V$ yazabiliriz.

Oysa, $x \in U$ için, $(x)\tau = x$; $v \in U'$ ve τ , U' hiper düzlemini belirlediğine göre, $(v)\tau = v$ dir. Yani, her $x \in V$ için $(x)\tau = x$ koşulu sağlanmalıdır. ki ; bu sonuç bizi, $\tau = 1$ eşitliğine götürür. Fakat, $\tau \neq 1$ olmalıdır. τ transveksiyonu, tek bir hiper düzlem , belirlemelidir.

LEMMA 2.4.2. τ , denklemi $(x,u) = 0$ olan, bir v hiper düzlemine göre, bir transveksiyon olsun. Bu durumda ; her $x \in V$ için, $(x)\tau = x - (x,u)a$ olacak şekilde, sabit bir $0 \neq a \in U$ bulunabilir.

İSPAT. $1 \neq \tau \in GL(V)$, her $x \in U$ için $(x)\tau = x$ ve bir $b \in V / U$ için, $(b)\tau \neq b$ dir.$b \notin U$ olduğundan, $(b)u \neq 0$ koşulu gerçeklenecektir.

$c = (b,u)^{-1}\, b \in V$ ' yi gözönüne alalım :

$$(c,u) = ((b,u)^{-1}\, b)u = (b,u)^{-1}\,(b,u) = 1$$

$\alpha = c - (c)\tau$ diyelim.

$(c,u) \neq 0 \Rightarrow c \notin U \Rightarrow (c)\tau - c \in U \Rightarrow c - (c)\tau \in U \Rightarrow a \in U \quad a \neq 0$ dır : $a = 0$ olsa,

$$(c)\tau = c\,, \quad \Rightarrow \quad ((b,u)^{-1}.\, b)\tau = (b,u)^{-1}\, .\, b$$

$$\Rightarrow \underbrace{(b,u)^{-1}}_{\in F^*}(b)\tau = \underbrace{(b,u)^{-1}}_{\in F^*} .\, b \Rightarrow (b)\tau = b$$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Herhangi bir $x \in V$ için, $x-(x, u)\, c \in V'$ yi irdeleyelim:;

$$\begin{aligned}(x - (x, u)\, c, u) &= (x - (x, u)\, c)\, u = (x)\, u-(x, u)\, (c)\, u\\ &= (x, u) - (x, u).1\\ &= 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad x - (x, u)\, c \in U$

$\Rightarrow \quad (x - (x, u)\, c)\tau = x - (x, u)\, c$

Oysa; $(x -(x, u)\, c\,)\tau = (x)\tau - (x, u)\,(c)\tau$ dır.

Şu halde, $\quad (x)\tau = x - (x, u)\, c + (x, u)\,(c)\tau$

$\qquad = x - (x, u)\,(c - (c)\tau)$

$\qquad = x - (x, u)\, a$ elde edilir.

Demekki her transveksiyon, belirlediği hiper düzlemin, sıfırdan farklı bir elemanı ile ilişkili olduğu, bir lineer fonksiyonelin, cinsinden yazılabilir.

Dim $U \geq 2$, $0 \neq a \neq b \in U$ olmak üzere, lineer bağımsız, a,b vektörleri verilsin. u lineer fonksiyoneli ile b vektörünün belirlediği, transveksiyonu, τu, b sembolü ile gösteririz. b, τu, b transveksiyonunun, doğrultusunu ortaya koyar.

Yukarıdaki şartlar altında, τu, a ve τu, b transveksiyonları, birbirinden farklıdır.

LEMMA 2.4.3. $\tau u, a$ ve $\tau v, b$ transveksiyonları verilsin.

$\tau u, a = \tau v, b \Leftrightarrow \exists\, \lambda \in F^*$; $u = \lambda\, v$ ve $a = \lambda\, b$ dir.

İSPAT. 1°) Gereklilik; $\tau u, a = \tau v, b$ olsun.

$\forall\, x \in V$ için $x - (x, u)\, a = x - (x, v)\, b \Rightarrow (x, u)\, a = (x, v)\, b$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{c} b \neq 0 \\ (x, u) = 0 \Rightarrow (x, v) = 0 \\ a \neq 0 \\ (x, v) = 0 \Rightarrow (x, u) = 0 \end{array}\right\} \text{elde edilir.}$$

O halde öyle bir w hiper düzlemi vardır ki; denklemleri, $(x, u) = 0$ ve $(x, v) = 0$ dır. Demek ki; $u = \lambda\, v$ olacak şekilde bir $\lambda \in F^*$ vardır.

$\exists\lambda^{-1}$

$u = \lambda\, v \Rightarrow v = \lambda^{-1} u \Rightarrow v = \tilde{\lambda} u,\ \tilde{\lambda}\ E\ F^*$

$$\left.\begin{array}{l} (x,u)\, a = (x, \lambda u)\, b = (x,u)\, \lambda\, b \\ \\ w \text{ bir hiper düzlem} \Rightarrow \exists y \in \backslash W\ ;\ (y,u) \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (y,u)\, a = (y,u)\, \lambda b$$

$\Rightarrow a = \lambda\, b$

2°) Yeterlilik : $v = \lambda\, u$ ve $a = \lambda\, b$ olacak şekilde bir $\lambda \in F^*$ varolsun. $\forall\, x \in V$ için,

$(x)\, \tau_{u,a} = x - (x,u)a = x - (x,u)\lambda b = x - (x, \lambda\, u)\, b$

$= x - (x,v)\, b$

$= (x)\, \tau_{u,b}$

$\Rightarrow\ \tau\, u, a = \tau\, u, b$

TRANSVEKSİYONLARIN GENEL ÖZELLİKLERİ

Bir $\tau u, a$ transveksiyonu için;

(i) $(\tau\, u, a)^{-1} = \tau\, u, -a$

(ii) $a + b \neq 0$ olmak üzere; $\tau\, u, a\ .\ \tau\, u, b = \tau_{u,a+b}$

koşulları sağlanmaktadır.

İSPAT. **(i)** $\tau\, u, a\ .\ \tau\, u, -a : x \rightarrow \underbrace{x - (x, u)\, a}_{y} \rightarrow y - (y,u)\, (-a) = y + (y,u)\, a$

$= x - (x,u)\, a + (\, x - (x,u)\, a, u\,)\, \underset{0}{a} = x - (x,u)\, a + (x - (x,u)\, a)\, u\, a$

$= x - (x,u)\, a + (x)\, u\, a - \underbrace{(x,u)\, \overbrace{(a)\, u}^{0}\, a}_{0} = x - (x)\, u\, a + (x)\, u\, a = x$

$\Rightarrow\ (\tau\, u, a)^{-1} = \tau\, u\, , -a$ dir.

(ii) $\tau\, u\, , a\ .\ \tau\, u\, , b :\ x\ \rightarrow\ \underbrace{x - (x, u)\, a}_{y}\ \rightarrow\ y - (y, u)\, b$

$= \ (x - (x, u)\, a) - (x - (x, u)\, a, u)\, b = x - (x) u\, a - (x - (x) u\, a) u\, b$
$= \ x - (x) u\, a - (x) u\, b + \underbrace{(x)\, u\, (a)\, u\, b}_{0} = x - (x) u\, (a + b) = x - (x, u)\, a + b$

$= (x)\ \tau_{a+b}$

$\Rightarrow \ \tau_{u,a} . \tau_{u,b} = \tau_{a+b}$ dir.

ÖNERME 2.4.1. Bütün tranveksiyonların oluşturduğu cümle, GL(V) grubunda, bir eşlenik eleman sınıfı belirler. Bu sınıf, tek türlüdür.

İSPAT. $\tau = \tau_{u,a}$ transveksiyonu verilmiş olsun. Bu transveksiyonun, bir $h \in GL(V)$ ile dönüştürülmüşünü, bulalım :

$\tau^h = h^{-1}\, \tau_{u,a}\, h$ idi. Her $x \in V$ için, $(x)\, \tau^h = (x)\, h^{-1}\, \tau_{u,a}\, h$

$(x)\, \tau^h = (x)\, h^{-1}\, \tau_{u,a}\, h = (((x)\, h^{-1})\, \tau_{u,a})\, h = [(x)\, h^{-1} - ((x)\, h^{-1}, u)\, a]\, h$
$= (x)\, (h^{-1}\, h) - ((x)\, h^{-1}, u)\, (a\, h)$
$= x - (x, h^{-1}\, u)\, a\, h$
$= (x)\, \tau_{h^{-1}u, ah}$

$\tau^h = \tau_{h^{-1}u, ah}$ dır.

Yani; bir transveksiyonun,GL(V) grubundaki herhangi bir eşleniği, yine bir transveksiyondur.

Şimdi de transveksiyonların meydana getirdiği cümlenin, GL(V) grubunda, tam bir tane eşlenik eleman sınıfı belirlediğini göstereceğiz.

$\tau = \tau_{u,a}$, $\tau' = \tau'_{u',a'}$ herhangi iki transveksiyon olmak üzere; τ transveksiyonundan, τ' transveksiyonuna, eşlenik alma işlemi ile geçilebilir:

τ transveksiyonunun belirlediği hiper düzlem φ, denklemi , $(x, u) = 0$

τ' transveksiyonunun belirlediği hiper düzlem φ', denklemi , $(x, u') = 0$ olsun.

$f \in V \setminus U$ ve $f' \in V \setminus U'$ alalım. Öyleki; $(f, u) = 1$ ve $(f', u') = 1$ koşulları gerçeklensin. U alt vektör uzayının bir tabanı, $\{a, b, \dots, e\}$, U' alt vektör uzayının bir tabanı da $\{a', b', \dots, e'\}$ ise; $\{a, b, \dots, e, f\}$, $\{a', b', \dots, e', f'\}$ cümleleri, V vektör uzayı için, birer tabandır. Çünkü; $f \notin \varphi$, $f' \notin \varphi'$ olduğundan, f; a, b, ... , e vektörleri ile f'; a', b', ... , e' vektörleri lineer bağımsızdır. Oysa biz biliyoruz ki; bir tabandan diğerine, tam bir tane, lineer otomorfi ile geçilebilir. Bu lineer otomorfi, $g \in GL(V)$ olsun. O halde, $(a)\, g = a'$, $(b)\, g = b'$,..., $(e)\, g = e'$ eşitlikleri gerçeklenmelidir. Yani, $(U)\, g = U'$ dır. Diğer taraftan;

$\tau^g = \tau^g_{u,a} = \tau_{g^{-1}u, ag} = \tau_{g^{-1}u, a'}$ ve τ' transveksiyonlarının doğrultularının aynı olduğu sonucuna varırız.

$(U)\, g = U'$ ise ; U' hiper düzleminin bir denklemi de $(x, g^{-1}u) = 0$ eşitliği ile verilebilir. Öyleyse , her $x \in V$ için, $(x, g^{-1}u) = \lambda\, (x,u')$ koşulunu gerçekleyen, bir $\lambda \in F^*$ vardır.Özel olarak, $x = f'$ alırsak ;

$(f', g^{-1}\, u) = \lambda\, (f',u') \ \Rightarrow \ (f', g^{-1}\, u) = \lambda \ \Rightarrow \ (f' g^{-1}, u) = \lambda$

$\Rightarrow \quad (f,u) = \lambda \ \Rightarrow \ 1 = \lambda \ \Rightarrow (x, g^{-1}u) = (x, u') \ \Rightarrow \forall x \in V$ için,

$(x)\, g^{-1}\, u = (x)\, u' \Rightarrow g^{-1}\, u = u' \ \Rightarrow \tau^g = \tau_{g^{-1}, a'} = \tau_{u', a'} = \tau'$

NOT 2.4.1 $\quad$ $\mathrm{Dim}_F V \geq 3$ olsun. $V = V(n,q)$ vektör uzayının, $\{a, b, \ldots, f\}$ ve $\{a', b', \ldots, f'\}$ gibi, iki bazını seçelim.

Bu tabanları birbirine götüren, tam bir tane $h \in GL(V)$ vardır. ([3] Sayfa 177, § 6)

$\det h \neq 1$ olsun.

$$\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ . \\ . \\ . \\ f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ . \\ . \\ . \\ f \end{bmatrix} h = \begin{pmatrix} & & \\ & G & \\ & & \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ . \\ . \\ . \\ f \end{bmatrix} \quad ; \quad M = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ 0 \ \mu^{-1} & \ldots & 0 \\ . \ . & & . \\ . \ . & & . \\ . \ . & & . \\ 0 \ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \text{ alırsak ;}$$

$$\begin{pmatrix} a' \\ \mu^{-1} b' \\ . \\ . \\ . \\ f' \end{pmatrix} = MG \begin{pmatrix} a \\ b \\ . \\ . \\ . \\ f \end{pmatrix} \quad ; \ \det(MG) = 1 \text{ dir.}$$

MG matrisinin belirlediği, özel lineer otomorfiye, $\hbar$ dersek ; (a) $\hbar$ = a', (f) $\hbar$ = f' koşulları sağlanmaktadır. Demek ki $\dim_F V \geq 3$ olması halinde, eşlenik alma işlemi, özel lineer otomorfilerle gerçekleştirilebilir.

LEMMA 2.4.4. $\quad$ $V = V(n,q)$ vektör uzayının , herhangi bir skaler transformasyonu ; $\lambda \in F^*$ olmak üzere, $s\lambda : V \twoheadrightarrow V$ şeklinde tanımlanabilir.

$\lambda \rightarrow \lambda x$

$$\text{Matrisi ise } \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & \lambda \end{pmatrix} \text{ formundadır.}$$

GL(V) grubunun merkezi, GL(V) içindeki, bütün skaler transformasyonlardan ibarettir.

İSPAT. $\quad$ Bir $g \in Z(GL(V))$ alalım. Her $h \in GL(V)$ için, $hg = gh$ olduğundan ; $g^{-1}hg = h$ elde edilir. O halde tüm $\tau \in GL(V)$ transveksiyonları için $g^{-1} \tau g = \tau$ eşitliği sağlanmalıdır. $\theta \neq x \in V$ olmak üzere, bir $\tau = \tau_{u,x}$ transveksiyonunu, gözönüne alalım. x vektörünü içine alan hiper düzlem, V vektör uzayına ait, x vektörü dahil, n-1 baz elemanından oluşan, alt uzaydır. Bu hiper düzlemi tanımlayan, lineer fonksiyonel ;

$$\begin{array}{l} u : V \to F \\ \quad x \to 0 \\ \quad V_2 \to 0 \\ \quad \ \cdot \qquad \cdot \\ \quad \ \cdot \qquad \cdot \\ \quad V_{n-1} \to 0 \\ \quad V_n \to 1 \end{array}$$

şeklindedir. Demekki doğrultusu x vektörü olan, bir transveksiyon herzaman vardır.

$\tau_{u,x} = \tau^{g}_{u,x} = g^{-1}\, \tau_{u,x}\, g = \tau_{g^{-1}u,xg} \Rightarrow xg = \lambda_x x$ olacak şekilde, tek türlü belirli, bir $\lambda_x \in F^*$ vardır.
Sonuç olarak ;
$g : V^* \to F$ tekabülünü elde etmiş olduk.
$\quad x \to \lambda_x x$

$\mathrm{Dim}_F\, V \geq 2$ olduğundan ; $\theta \neq x, y \in V$ vektör çifti vardır ki , $x + y \neq \theta$ dır.

$$(x + y)g = \lambda_{x+y}\,(x + y)$$
$$\Rightarrow \quad (x)\,g + (y)g = \lambda_{x+y}\, x + \lambda_{x+y}\, y$$
$$\Rightarrow \quad \lambda_x\, x + \lambda_y\, y = \lambda_{x+y}\, x + \lambda_{x+y}\, y$$

(i) x ve y vektörleri lineer bağımsız olsun :
Bu durumda ; $\lambda x = \lambda y$ dir.

(ii) x ve y vektörleri lineer bağımlı olsun :
DimF v ≥ 2 ise , hem x vektörü, hem de y vektörü ile lineer bağımsız, bir $z \in V - \{\theta\}$ vardır. Öyleyse (i)' den dolayı ; $\lambda_x = \lambda_z$ ve $\lambda_y = \lambda_z$; $\lambda_x = \lambda_y$ elde edilir. Her $x \neq \theta$ için, λ_x sabittir. $x = \theta$ için , $(\theta)g = 0$ olduğundan, her $x \in V$ için, $(x)g = \lambda_x x$ eşitliğinde , λ_x sabittir. Dolayısı ile, g, matrisi

$$\begin{pmatrix} \lambda & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & & \lambda \end{pmatrix}$$

olan, bir skaler transformasyondur.

Tersine ; g , GL(V) grubuna ait, bir skaler transformasyon ise ; matrisi,

$$\begin{pmatrix} \lambda & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & & \lambda \end{pmatrix}$$

$\lambda \in F^*$ şeklindedir.

Her $h \in GL(V)$ için ; $hg = gh$ olduğundan, $g \in z\,(GL(V))$ dir.

- 5 - PROJEKTİF UZAYLAR VE PROJEKTİF GRUPLAR

TANIM 2.5.1. V, F cismi üzerinde tanımlı, bir vektör uzayı olsun. $x,y \in V^*$ için, $x \sim y \Leftrightarrow x\lambda = y$ $\exists \lambda \in F^*$ şeklinde belirlenen, "~" bağıntısı, bir eşdeğerlik bağıntısıdır:

(i) Refleksiftir : $\lambda = 1 \in F^*$ için, her $x \in V^*$ 'a karşılık ; $(x)1 = x$ dir.

(ii) Simetri : $x \sim y$ ise, $x\lambda = y$ olacak şekilde bir $\lambda \in F^*$ vardır.

$$\exists \lambda^{-1}$$

$$x\lambda = y \Rightarrow x = y\lambda^{-1}, \lambda^{-1} \in F^* \Rightarrow y \sim x$$

(iii) Tranzitiflik :
$$\left.\begin{array}{l} x \sim y \Rightarrow \exists \lambda \in F^* \ni x\lambda = y \\ y \sim z \Rightarrow \exists \mu \in F^* \ni y\mu = z \end{array}\right\} \Rightarrow x\lambda\mu = z \Rightarrow x \sim z$$

" ~ " bağıntısının, V^* vektör uzayında belirlediği, bir eşdeğerlik sınıfı, $[x] = \{ x\lambda \mid \lambda \in F^* \}$ şeklindedir. F^* grubunun, eleman sayısı ile bir $[x]$ sınıfının eleman sayısı, birbirine eşittir.

$PG(V) := \{ [x] \mid x \in V^* \}$ cümlesi, F cismi üzerinde bir projektif uzay adını alır. ([2] Sayfa 33, §5) $\dim_F v = n$ ise, $\dim_F PG(V) = n-1$ dir.

$$f : V^* \to > PG(V)$$
$$x \to [x]$$
tasvirini gözönüne alalım :

$U \underset{F}{\leq} V$ bir alt uzay ise ; $f(U^*) = [U]$, PG(V) projektif uzayının , bir alt uzayıdır.

(Yani, PG(V) ' na ait, bir alt cümlenin, bir alt uzay olabilmesi için , bu alt cümlenin, V vektör uzayına ait bir vektör uzayının, f tasviri altındaki, resmi olması gerekir.)

$U_1, U_2 \underset{F}{\leq} V$, $U_1 \neq U_2 \Rightarrow \exists x \in U1 \setminus U2 \Rightarrow x \neq \theta$; x vektörü U2 uzayının taban vektörleri ile lineer bağımsızdır.

$f(x) = [x] \in [U_2]$ olsaydı, $[x] = [y]$ koşulunu gerçekleyen bir $y \in U_2$, bulunabilirdi. Bu da bizi x, y vektörlerinin lineer bağımlı olduğu sonucuna götürürdü ki, çelişkidir.

$U = \{ U \mid \theta \neq U \leq V \}$ ve $[U] = \{ [U] \mid \theta \neq U \underset{F}{\leq} V \}$ dersek ;

$$f' : v \to [v]$$
$$U \to [U]$$
tasviri bijektiftir.

Tanım olarak , $\dim_F U = k$ ise $\dim_F [U] = k-1$ dir.

$\Gamma L(V)$ grubunun, $PG(V)$ projektif uzayı üzerindeki etkisi :

$(s,\lambda) \in \Gamma L(V)$ ise, $\lambda \in Au + F$, $s \in GL(V)$ idi. Öyle ki,
Her $x, y \in V$, her $\lambda \in F$ için,
$(\lambda ,x)s = (\lambda)\alpha\,(x)s$
$(x + y)s = (x)s + (y)s$
koşulları gerçeklenmektedir.

$g \in \Gamma L(V)$, $[x] \in PG(V)$ olmak üzere,
$[x]\hat{g} = [(x)g]$ şeklinde alırsak ;
$x \neq \theta$ için, $(x)g \neq \theta$ dır. $PG(V) x\, \Gamma L(V) \to PG(V)$
$([x], g) \to [x]\hat{g} = [(x)g]$ tasviri, tamamen belirli ve iyi tanımlıdır :

$$[x] = [y] \Rightarrow \exists \lambda \in F^* \ni \lambda_x = y \quad \left.\begin{array}{l} (\lambda x)g = (y)g \\ (\lambda x)g = \underbrace{(\lambda)\alpha}_{\mu \in F^*}\ (x)g \end{array}\right\} \quad \mu\,(x)g = (y)g$$

$[(x)g] = [(y)g]$ $[x]\hat{g}$ dır.

Diğer taraftan ,

$([x]\hat{g})\hat{h} = [(x)g]\hat{h} = [((x)g)h] = [(x)gh] = [x]\widehat{gh}$

$[x]\hat{I} = [(x)I] = [x]$ dir.

O halde ; $\hat{g}$ ile, $\Gamma(V)$, $PG(V)$ projektif uzayı üzerinde etki yapar. g bir otomorfi olduğundan, tersi vardır.

$([x]\hat{g})\hat{g}^{-1} = [x]\widehat{gg^{-1}} = [x]\hat{I} = [x]$ elde edilir.

Buradan , $\hat{g} : PG(V) \to PG(V)$
$[x] \to [x]\hat{g}$ bijeksiyondur. Yani, $PG(V)$ projektif uzayının, bir permütasyonudur. Bu permütasyon grubunu, $S_{PG(V)}$ ile göstereceğiz. ([2] Sayfa34, § 5)

<u>ÖNERME 2.5.1</u> $Z(GL(V)) = S_C(V)$ diyelim ;

Her $x \in V^*$ için, $[x]\hat{g} = [x] \Leftrightarrow g \in S_C(V)$

<u>İSPAT.</u> 1) $\Leftarrow$ $g \in S_C(V)$ ise g bir skaler otomorfidir.

Her $x \in V^*$ için, $(x)g = \lambda x$, $\lambda \in F^*$ ise ; $[(x)g] = [\lambda x] = [x] = [x]\hat{g}$ dir.

2) Her $x \in V^*$ için, $[x]\hat{g} = [x]$ olsun.

Her $x \in V^*$ için, $[(x)g]$ ise, $\exists\, \lambda_x \in F^*$, $(x)g = \lambda_x x$ ve bir $y \in V^*$ için, $(y)g = \lambda_y y$ olacak şekilde bir $\lambda_y \in F^*$ vardır. Şu halde, $\lambda_x = \lambda_y$ bulunur. g, bir skaler otomorfidir. $g \in S_C(V)$ dir.

SONUÇ 2.5.2.

1) $\mathrm{Ker} f = S_C(V)$ dir :
$g \in \mathrm{Ker} f$ alalım. Her $x \in V^*$ için $(x)g = x$ olduğundan, $[(x)g] = [x]$, $[x]\hat{g} = [x]$ elde edilir. Önerme 2.5.1 ' den dolayı, $g \in S_C(V)$ dir.

$g \in S_C(V)$ ise ; her $x \in V^*$ için, $(x)g = \lambda x$ olacak şekildi, bir $\lambda \in F^*$ vardır. Bu durumda,$[(x)] = [x]$ $[x]\hat{g} = [x]$ elde edilir. Yani, $g \in \mathrm{Ker}\, f$ dir.

2) $S_C(V) \leq \Gamma L(V)$ dir.

3) $g : GL(V) \to S_{PG(V)}$, öyle ki ; $g = f|_{GL(V)}$ için.
$\mathrm{Ker}\, j = S_C(V)$ dir.

4) $h : SL(V) \to S_{PG(V)}$, öyle ki ; $h = f|_{SL(V)}$ için,
$\mathrm{Ker}\, h = S_C(V) \cap SL(V) = Z(SL(V))$ dir. ([5] sayfa 103, § 33)

TANIM 2.5.2.

1) Projektif Semilineer Grup : $P\Gamma L(V) = \Gamma L(V) / S_C(V)$

2) Projektif Genellineer Grup : $PGL(V) = GL(V) = GL(V) / S_C(V)$

3) Projektif Özellineer Grup : $PGL(V) = SL(V) / (SL(V) \cap SC(V))$ dir.

$g \in \Gamma L(V)$ için ; $g\, S_C(V) = [g] \in P\Gamma L(V)$

$g \in GL(V)$ için ; $g\, S_C(V) = [g] \in PGL(V)$

$g \in SL(V)$ için ; $g\, S_C(V) = g\,(S_C(V) \cap SL(V)) = [g] \in PSL(V)$ alınacaktır.

$f'' : \Gamma L(V) / S_C(V) \to S_{PG(V)}$, $g' : GL(V) / S_C(V) \to S_{PG(V)}$

$[g] \to \hat{g}$ $[g] \to \hat{g}$

$h : SL(V) / (Z(SL(V))) \to S_{PG(V)}$
$[g] \to \hat{g}$
injeksiyonları tanımlanabilir.

Öyle ki , her $x \in V^*$ için , $[x]\hat{g} = [x][g] = [(x)g]$ koşulu gerçeklenir.
([2] sayfa 35 , §5)

ÖNERME 2.5.2. PGL(n,q) ve PSL(n, q) grupları ; PG(n-1, q) üzerinde, 2-tranzitif etki yapar.

İSPAT. 1) PGL (n, q) grubu, 2- tranzitiftir:

Her $\{[x],[y]\}$, $\{[x'],[y']\}$; $[x] \neq [y]$, $[x'] \neq [y'] \in PG(n-1,q)$ için, $x, x', y, y' \in V^*$ ve $\{x,y\}$, $\{x', y'\}$ kümeleri, lineer bağımsızdır. Amsi halde, sınıflar birbirine eşit olurdu. O halde; x, y ve x', y', V vektör uzayının, iki bazına tamamlanabilir. Biliyoruz ki, bu bazları birbirine tekabül ettiren, tam bir tane, $q \in GL(V)$ vardır. Öyleki;

$$(x)g = x' , (y)g = y' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} [(x)g] = [x'] \\ \\ [(y)g] = [y'] \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} [x][g] = [x'] \\ \\ [y][g] = [y'] \end{array} \right.$$

$g \in PGL(V)$ elde edilir. PGL (n, q) grubu, PG (n-1, q) uzayı üzerinde, 2- tranzitifdir.

2) PSL (n, q) grubu, 2 tranzitifdir:
Yukarıdaki işlemleri tekrerlayarak, bir $[g] \in PGL(V)$ elde edilir. g bir otomorfi olduğundan, $\det g \in F^*$ dır. $\det g = \mu \neq 1$ ise, $x \in V'$ nin, uygun bir katı alınır. Böylelikle, $\det g \in F^*$ dır. $\det g = \mu \neq 1$ ise, $x \in V'$ nin, , uygun bir katı alınır. Böylelikle, $\det \hat{g} = 1$ koşulunu gerçekleyen, bir $[\hat{g}] \in PSL(V)$ bulunur. PSL(V) grubu, PG (n-1, q) uzayı üzerinde , 2-tranzitiftir.

Projektif uzaylara Ait Çeşitli Sonuçlar

ÖNERME 2.5.3. [U], PG (n,q) uzayının, r-1 boyutlu bir alt uzayı olsun. PG(n,q) projektif uzayının, [U] uzayını içine alan, bütün r boyutlu alt uzaylarının sayısı : $(q^{n-r+1} - 1)/(q-1)$ dir.

İSPAT. PG(n,q) projektif uzayı, n - boyutlu ise $V = V(n+1, q)$ ve $\dim_F U = r$ dir. Aradığımız, $U < W$ üst uzayları için ; $\dim_F W = r + 1$ olmalıdır. Bu durumda ; $|V| = q^{n+1}$, $|U| = q^r$ ve $|V \setminus U| = q^{n+1} - q^r$ dir. $|V \setminus U|$, U uzayına ait olmayan, eleman sayısını vermektedir.

Şimdi , $\dim_F W = r + 1$ olan, herhangi bir, W uzayını ele alalım. U uzayına kattığımızda, W üst uzayını verecek eleman sayısı, $|W \setminus U| = q^{r+1} - q^r$ dir. O halde ; $U \setminus W_i$ koşulunu gerçekleyen , birbirinden farklı , W_i alt uzaylarının sayısı :

$$(q^{n+1} - q^r)/(q^{r+1} - q^r) = |V \setminus U| / |W \setminus U| = (q^{n-r+1} - 1)/(q-1) \text{ dir.}$$

ÖNERME 2.5.4. O_r (n,q) ile PG(n,q) projektif uzayının, r - boyutlu bütün alt uzaylarının sayısını gösterelim.

$$O_r(n,q) = \prod_{i=0}^{r} (q^{n-i+1} - 1)/(q^{i+1} - 1) \quad \text{dir.}$$

İSPAT. $S = \{ ([U],[W]) \mid [U] < [W], \dim [U] = r-1, \dim [W] = r \}$

$S([U],.)$, $S(.,[W])$ cümlelerini göz önüne alalım.
Bu durumda ,

$$S = \mathring{\bigcup_{[U]}} S([U],.) = \mathring{\bigcup_{[W]}} S(.,[W])$$

$$|S| = \sum_{[U]} |S([U],.)| = \sum_{[W]} |S(.,[W])| \quad \text{dır.}$$

$|S([U],.)|$: = , [U] alt uzaylarını içine alan, [W] üst uzaylarının sayısı

$|S(.,[W])|$: = , r ' de , r-1 boyutlu , alt uzaylarının sayısı

$$\Rightarrow \quad |S| = \sum_{[U]} (q^{n-r+1} - 1)/(q-1) = \sum_{[W]} O_{r-1}(r,q)$$

Her iki toplamdaki terimler sabittir.

[U] alt uzaylarının sayısı : = O_{r-1} (r,q)

[W] alt uzaylarının sayısı : = O_r (n,q)

$$|S| = O_{r-1}(n,q)\,(q^{n-r+1} - 1)/(q-1) = O_r(n,q)\ O_{r-1}(r,q) \quad (*)$$

$|V| = q^{n+1}$, $|V^*| = q^{n+1} - 1$ dir. Her elemanın, $|F^*| = q - 1$ kadar katı olacağından, V ' nin bir boyutlu alt uzaylarının sayısı ; $(q^{n+1} - 1)/(q-1)$ dir.

Bu da . PG (n,q) projektif uzayındaki sıfır boyutların sayısını verecektir. $O_0 = (q^{n+1} - 1)/(q-1)$ olarak elde edilir.

r = 1 için , (*) $\Rightarrow O_0(n,q)\,(q^n - 1)/(q-1) = O1(n,q)\ O_0(r,q)$

$\Rightarrow ((q^{n+1} - 1)/(q - 1))((q^n-1)/(q-1) = O1(n,q)((q^{r+1} - 1)/(q - 1))$

$\Rightarrow$ O1 (n,q) = $((q^{n+1} - 1)/(q - 1)) . ((q^n - 1)/(q^2 - 1))$ bulunur. Verilen formülle, uyum içersindedir.

O halde matematik indüksiyonla devam edelim ;

<u>İddia</u> : $0 \leq s \leq n - 1$ için doğru olsun.

$$O_S = O_S(n,q) = \ = \prod_{i=0}^{s} (q^{n-i+1} - 1)/(q^{i+1} - 1) \text{ olsun.}$$

(*) formülünü ele alalım.

$$O_S(n,q) = (q^{n-s} - 1)/(q - 1) = O_{S+1}(n,q)\, O_S(s+1, q)$$

$$O_S(s+1, q) = \prod_{i=0}^{s} ((q^{s-i+2} - 1)/(q^{i+1} - 1)) = ((q^{s+2} - 1)/(q-1)).((q^{s+1} - 1)/(q^2 - 1)) \ldots ((q^2-1)/(q^{s+1}-1))$$

$$= (q^{s+2} - 1)/(q - 1)$$

$$\Rightarrow O_{S+1}(n,q) = O_S(n,q)((q^{n-s} - 1)/(q - 1))((q - 1)/(q^{S+2}-1))$$

$$\Rightarrow O_{S+1}(n,q) = \left(\prod_{i=0}^{s} (q^{n-i+1} - 1)/(q^{i+1} - 1)\right)((q^{n-s} - 1)/(q^{s+2} - 1) = \prod_{i=0}^{s} (q^{n-i+1} - 1)/(q^{i+1} - 1)$$

$\Rightarrow$ İddia , $s + 1$ için doğrudur.

GF(q) sonlu cismi üzerinde, PG(n,q) , n-boyutlu , projektif uzayını ele alalım. Demek ki , $\dim_V = n + 1$ dir. Bu durumda , $\{ v_1, v_2, \ldots, v_{n+1} \}$, herhangi bir baz olmak üzere ;

$$V(n+1, q) = \left\{ [y_0, y_1, \ldots, y_n] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \\ \\ v_{n+1} \end{pmatrix} \quad \middle| \ y_i \in GF(q) \right\}$$

PG(n,q) = $\{ [y_0, y_1, \ldots, y_n]] \mid y_i \in GF(q)$, hepsi birden sıfır değildir. } yazılır.

Şimdi, PG(n,q) projektif uzayının, eleman sayısını belirleyelim :

$x = y_0v_1 + \ldots + y_nv_{n+1}$, $y_0 \neq 0$ ise , $y_0^{-1}x = !_{Fv1} + \ldots + y'v_{n+1}$ olur. $y_0^{-1}x \in [\,x\,]$ elde edilir. Uzayın noktalarını, bu yöntemle sınıflandıracağız.

$[\,1, y_1, y_2, \ldots, y_n\,]$ formundaki elemanlar ,		q^n	tanedir.
$[\,0, 1, y_1, y_2, \ldots, y_n\,]$ "	" ,	q^{n-1}	tanedir.
. .	. .		
. .	. .		
. .	. .		
$[\,0, 0, \ldots, 0, 1, y_n\,]$ "	" ,	q	tanedir.
$[\,0, 0, \ldots, 0, 1\,]$ "	" ,	1	tanedir.

O halde projektif uzayın eleman sayısı , $|\,PG(n,q)\,| = q_n + q_{n-1} + \ldots + q + 1 = (q^{n+1}) / (q - 1)$ dir.

n - 1 için, $|\,PG(1, q)\,| = (q^2 - 1) / (q - 1) = q + 1$ bulunur. PG (1,q) uzayının, [1, z] , $z \in GF(q)$ formunda, q tane ve [0, 1] formunda da, bir tane elemanı vardır.

PG(1, q) projektif uzayı ile, GF(q) U { ∞ } arasında, bir bijeksiyon kurulabilir.

$PG\,(1, q) \rightarrow GF\,(q)\ U\ \{\,\infty\,\}$

[x0, x1] $\rightarrow x_1 / x_0$ tasvirini ele alırsak ;

$x_0 \neq 0$ ise [x0, x1] = [1, x_1/x_0] ; $x_1/x_0 = z \in GF(q)$

$x_0 = 0$ ise [x0, x1] = [0, x1] = [0 ,1] yazılabilir.

TANIM 2.5.3. (X, G) ve (Y, H) gibi, iki tranzitif permütasyon grubu verilsin.

(i) $Y \subseteq X$; $X = \{x\}$ Ů Y Ů Y'

(ii) (Y, G_x) permütasyon grubunu ele alırsak , (Y, G_x) ~ (Y, H) sağlansın.

Yukarıdaki koşulların gerçeklenmesi halinde, (X, G) permütasyon grubu, (Y, H) permütasyon grubunun , bir genişlemesidir denir.

(X, G) genişlemesinin rangı : = rang (X, G) = 2 + (G_x'in, Y ' üzerindeki yörünge sayısı) şeklinde tanımlanır.

Çünkü ; G_x, x noktasını sabit bırakır. Bu durumda, {x } bir yörüngedir. (Y, G_x) ~ (Y, H) ve (Y, H) tranzitif olduğundan, (Y, G_x) tranzitiftir. Her $y \in Y$ için, $yG_x = Y$ ise, Y de bir yörüngedir. Diğerleri , G_x ' in Y ' üzerindeki orbitlerinin sayısıdır.

Rang (X, G) = 2 $\Leftrightarrow$ Y ' = Φ $\Leftrightarrow$ X = { x } $\cup$ Y $\Rightarrow$ (X, G) permütasyon grubuna, (Y, H) ' nın rang2 genişlemesi denir.

(Y,H), k-tranzitif bir permütasyon grubu ve (X, G) , (Y, H) permütasyon grubunun , iki genişlemesi ise , (X, G) , (k+1) tranzitiftir. ([2] Sayfa 38, § 6)

ÖNERME 2.5.5. (PG(1, q) , PGL(2, q)) permütasyon grubu, GF(q) sonlu cismi üzerindeki, tüm afin transformasyonlar grubunun, bir rang 2 genişlemesidir.

İSPAT. Sözü edilen afin transformasyonlar : $\varphi_{m,c} : GF(q) \rightarrow GF(q)$

$$x \rightarrow mx + c$$

$m \in GF(q)^*$, $c \in GF(q)$, şeklinde tanımlanır.

X = PG(1, q), G = PGL (2, q) alalım. (X, G) permütasyon grubu, 2-tranzitiftir.

Y : = { [1, u] | u $\in$ GF(q)* } olsun. x : = [0, 1] = ∞ , X = {x}$\mathring{\cup}$ Y yazılabilir. G_x grubunu teşkil edelim ;

GL(2, q) grubunu ele alırsak, elemanları,

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} 2 \times 2$$

matrisleri ile gösterilebilir. Öyle ki determinantları sıfırdan farklıdır.

Buna göre, PGL(2, q) projektif uzayının elemanları da ,

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$ şeklindeki sınıflardır.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$; a, b, c, d $\in$ GF(q) olmak üzere, G_x ' in bir elemanı ise,

$$[\,0, 1\,] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [\,0, 1\,]$$ koşulu sağlanırdı. Oysa ki ;

[x] [g] = [(x) g] ' den, $[\,0, 1\,] \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = [\,c, d\,]$ ise, [c, d] = [0, 1] elde edilir.

$[c, d] = [0, 1] \Leftrightarrow (c, d) = \lambda(0, 1), \lambda \in GF(q)^* \Rightarrow c = 0, d \neq 0$ dır. $d = 0$ olsa ;

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 0$$ bulunurdu.

$$\left.\begin{matrix} \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad \neq 0 \\ d \neq 0 \end{matrix}\right\} a \neq 0 \text{ dır.}$$

Matrisi 1/a ile çarpıp, $d/a = d$, $b/a = b$ dersek ; $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ' nin Gx ' e ait olabilmesi için,
$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ şeklinde ifade edilmesi gerekir.

x ' in , diğer elemanları üzerindeki etkisi, $[1, u] \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = [1, b+ud]$ biçimindedir.

$Z := GF(q)$, $H := \{ \varphi_{m,c} : GF(q) \to F(q) ; x \to mx + c \}$

(Z, H) permütasyon grubunun 2- tranzitif olduğunu biliyoruz. (Z, H) permütasyon grubunun, (Y, G_x) grubuna eşdeğer olduğunu göstereceğiz.

$Z \times H \to Z$

$(u, \varphi_{d,b}) \to du + b$, $d \in GF(q)^*$, $b \in GF(q)$

$Y \times G_x \to Y$

$$\left([1, u] \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}\right) \to [1, b + ud]$$

$\rho : Z \to Y$

, aşikar olarak bir bijeksiyondur.

$u \mapsto [1, u]$

$f : H \to G_x$

$\varphi_{d,b} \to \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ bir izomorfidir.

$$\begin{tikzcd} Z \times H \arrow[r] \arrow[d, "(\rho, f)"'] & Z \arrow[d] \\ Y \times G_x \arrow[r] & Y \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} (u, \varphi_{d,b}) \arrow[rr] \arrow[d] & \text{komütatif} & ud + b \arrow[d] \\ \left([1, u], \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \right) \arrow[rr] & & [1, ud + b] \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow (Y, G_x) \sim (Z, H) \Rightarrow (Y, G_x)$, 2 - tranzitiftir.

$\Rightarrow (x, G)$, (Z, H) permütasyon grubunun rang - 2 genişlemesidir.

O halde ; PGL (2, q) , PG(1,q) üzerinde, 3-tranzitifdir.

<u>ÖNERME 2.5.6.</u> V = V (n,q) vektör uzayı verilmiş olsun. $\mathrm{Dim}_F\ V \geq 3$ ise, PSL (n,q) basittir.

<u>İSPAT</u>. SL(V) grubunun merkezi, skaler transformasyonlar grubunun, bir alt grubudur. Öte yandan, $PSL(n,q) = \dfrac{SL(n,q)}{Z(SL(n,q))}$ idi. $N \trianglelefteq PSL(n,q)$ alırsak ; PSL(n,q) / N bölüm grubunda , bahsedebiliriz.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr] & & & \\ Z \arrow[r, "i"] & SL(n,q) \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr] & PSL(n,q) \arrow[d] & \text{tam bir dizidir.} \\ & & PSL(n,q) / N & \end{tikzcd}$$

θ , φ ve $\theta\,\varphi$ tasvirleri üzerinedir. Üstelik, $\theta\,\varphi$ bir epimorfidir. $N = \mathrm{Ker}\,(\theta\,\varphi)$ diyelim :

$g \in \mathrm{Ker}\,(\theta\,\varphi) \Rightarrow g\theta \to (g\theta)\,N = N \Rightarrow (g)\theta \in N \Rightarrow g \in (N)\theta^{-1}$

$g \in (N)\theta^{-1} \Rightarrow (g)\theta \in N \Rightarrow (g)\theta N = N \Rightarrow g \in \mathrm{Ker}\,\theta\,\varphi$

$\Rightarrow \tilde{N} = \theta^{-1}(N) \Rightarrow (\tilde{N})\theta = N$ elde edilir.

O halde şunlar geçerlidir :

θ bir epimorfi olduğundan $N \trianglelefteq SL(V)$ dir. $N \trianglelefteq SL(V)$ ise,

1°) $\tilde{N} \leq Z(SL(V)$ veya 2°) $\tilde{N} = SL(V)$ dir. ([2] Sayfa 31, Teorem 2.4.8)

1°) $N = (\tilde{N})\theta$ ve bir inliksiyon olduğundan, $Z = \mathrm{Ker}\,\theta$

$N = (\tilde{N})\theta < (Z)\,\theta = 1$ PSL(n,q) bulunur.

2°) $\tilde{N} = SL(V) \Rightarrow N = (\tilde{N})\theta = PSL(n,q)$ olur.

θ üzerine

Şu halde, PSL(n,q) grubu basittir.

FAYDALANILAN ESERLER

[1] H.ŞENKON,Soyut Cebir Dersleri Cilt II,İstanbul Üniversitesi Yayınları ; No : 222,1993.

[2] N.BİGGS, Finite Groups Of Automorphisms, Cambridge ,London; Mathematical Society, Lecture Note Series 6, 1971.

[3] S.AKIN ,Lineer Cebir, İstanbul Teknik Üniversitesi Yayınları ; No:1331,1986.

[4] S.LANG, Algebra, Colombia University; New York, 1965.

[5] W.LEDERMANN, İntroduction To The Theory Of Finite Groups ; New Yok, 1953.

[6] J.L. ALPERIN, B. BELL, Groups and Representations ; Springen - Verlag, New York, Berlin, 1995.

[*] W.FEIT and J.G: THOMPSON, Pacific Journal Of Mathematics.