T.C.
MİMAR SİNAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

85405

LİNEER OLMAYAN HİPERBOLİK DENKLEMLERİN GLOBAL ÇÖZÜMLERİNİN OLMAMASI HAKKINDA

GÜLAY SEÇİM

DOKTORA TEZİ

DANIŞMANLAR

Prof.Dr. Gülseren AYDIN   Prof.Dr. Mehmet Hamidoğlu TAGİYEV

MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

İSTANBUL, 1999

ÖNSÖZ

Tezimin yönlendirilmesinde, bilgileri ve önerileri ile rehberlik eden hocalarım Sayın Prof.Dr. Gülseren AYDIN ve Sayın Prof.Dr. Mehmet Hamidoğlu TAGİYEV'e ve tezin oluşumundaki katkılarından dolayı hocam Sayın Prof.Dr. Varga KALANTA-ROV'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Gülay SEÇİM

Haziran, 1999

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....II

ÖZET.....V

SUMMARY.....VIII

BÖLÜM 1: GİRİŞ.....1

BÖLÜM 2: ÖN BİLGİLER

2.1 Normlu Uzay, İççarpım ve Hilbert Uzayı.....4

2.2 L_p Uzayı.....7

2.3 Sobolev Uzayı.....9

2.4 Operatörler.....10

BÖLÜM 3: LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMLERİ

3.1 $Pu_{tt} = -A(t)u + F(u(t))$ Biçimindeki Lineer Olmayan Soyut Dalga Denkleminin Global Çözümlerinin Olmaması.....15

3.2 Dinamik Sınır Koşullu Kuazilineer Hiperbolik Denklemin Global Çözümlerinin Olmaması.....17

3.3 Dinamik Sınır Koşullu Kuazilineer Hiperbolik Denklemin Çözümlerinin Patlaması.....23

3.4 n=1 İçin Denklemin Çözümlerinin Patlama Zamanı ve Kararlılık Analizi.....29

3.4.1 Bir Eksplisit Şema.....30

BÖLÜM 4: LİNEER DİSSİPATİF TERİM İÇEREN LİNEER OLMAYAN EVOLUSYON DENKLEMLERİ

4.1 Otonom Olmayan Soyut Evolusyon Denklemi..34

4.2 Lineer Dissipatif Terim İçeren Evolusyon Denkleminin Global Çözümlerinin Olmaması...36

4.3 Lineer Olmayan Evolusyon Denkleminin Global Çözümlerinin Olmaması...42

4.4 n=1 İçin Denklemin Çözümlerinin Patlama Zamanı ve Kararlılık Analizi..48

4.4.1 Bir Eksplisit Şema..49

BÖLÜM 5: DİSSİPATİF TERİM İÇEREN LİNEER OLMAYAN SOYUT DALGA DENKLEMLERİ

5.1 Soyut Dalga Denklemi..53

5.2 Dissipatif Terim İçeren Kuazilineer Dalga Denklemi.............................55

SONUÇLAR VE ÖNERİLER..64

KAYNAKLAR..65

ÖZGEÇMİŞ..69

ÖZET

LİNEER OLMAYAN HİPERBOLİK DENKLEMLERİN GLOBAL ÇÖZÜMLERİNİN OLMAMASI HAKKINDA

Bu çalışmada; sınır koşullarında veya denklemin kendisinde, dissipatif terim bulunduran hiperbolik denklemle verilmiş bir sınıf başlangıç-sınır değer probleminin global çözümlerinin yokluğu problemi ele alınmıştır. İncelenen problemlerin her birinde global çözümlerin yokluğu; H.A. Levine[24] tarafından önerilen konkavlık metodu veya V.K. Kalantarov ve O.A. Ladyzhenskaya[15] tarafından bu yöntemin geliştirilmiş şekli olan genelleştirilmiş konkavlık metodu kullanılarak, ispatlanmıştır.

Bu metodlarda, sınır koşullarının özelliklerini de yansıtan ve belli bir norma göre çözümü temsil eden bir fonksiyonel yazarak, bu fonksiyonelin Levine veya Kalantarov-Ladyzhenskaya lemmasının hipotezlerini sağladığı gösterilir. Bu lemmaların sonucunda sonlu t zamanında bu fonksiyonellerin ve dolayısıyla çözümün normunun patladığı bulunur.

Birinci bölümde; bu konuda günümüze kadar yapılmış olan çalışmalar hakkında kısa bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde; tezde kullanılan ve teze temel teşkil eden bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ;

$$Gu_{tt} - a\Delta u + cu = bf(u)$$

denklemi, uygun başlangıç koşulları ve dinamik sınır koşulu ile birlikte global çözümlerinin yokluğu, Kalantarov-Ladyzhenskaya lemması ile incelenmiştir. Bu denklemin özel bir hali olan

$$u_{tt} - \Delta u = f(u)$$

denklemi, başlangıç koşulları ile birlikte sınırın bir parçasında Dirichlet ve diğer parçasında dinamik sınır koşulu olması durumunda, başlangıç-sınır değer probleminin global çözümlerinin yokluğu araştırılmış ve bir sayısal örnek verilmiştir.

Dördüncü bölümde;

$$Pu_{tt} + Q(t)u_t + A(t,u) = F(t,u), \qquad t \in J = [0,\infty)$$

evolusyon denkleminde

$$A(u) = -div\left(|Du|^{p-2} Du\right),$$

uygun başlangıç koşulları ve $u(x,t) = 0$ sınır koşulu ve

$$A(u) = 2b\Delta^2 u + b\Delta(|\nabla u|^2 \Delta u) - b\sum_{i=1}^{n} \partial_i ((\Delta u)^2 \partial_i u)$$

ve uygun başlangıç koşulları ile birlikte $u(x,t) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ sınır koşulları alınarak, sonlu bir $[0,T)$ aralığında global çözümlerinin yokluğu Levine lemması kullanılarak araştırılmıştır. İkinci probleme bir sayısal örnek verilmiştir.

Beşinci bölümde; a herhangi bir sabit olmak üzere, dissipatif terim içeren kuazi lineer

$$u_{tt} - \nabla\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) + au_t = |u|^{p-2} u + |u|^{l-2} u$$

dalga denklemi ile birlikte, uygun başlangıç koşulları ve $u(x,t) = 0$ sınır koşulu alınarak, başlangıç- sınır değer problemi incelenmiştir. $v(t) = e^{-mt} u(t)$ dönüşümü ile denklem, katsayılardaki operatörlerin zamana bağlı olduğu

$$\begin{aligned} v_{tt} + (2m+a)v_t + (m^2 + am)v - e^{(p-2)mt} \nabla(|\nabla v|^{p-2} \nabla v) \\ = e^{-mt}\left(e^{(p-1)mt} |v|^{p-2} v + e^{(l-1)mt} |v|^{l-2} v\right) \end{aligned}$$

denklemine dönüştürülmüştür. v için uygun başlangıç koşulları ve $v(x,t) = 0$ sınır koşulu ile oluşturulan bu sınır-değer probleminin global çözümlerinin yokluğu Kalantarov-Ladyzhenskaya lemması kullanılarak araştırılmıştır.

Bütün problemlerde ispatlar enerji integrali kullanılarak yapılmıştır. Önceki problemlerde başlangıç enerjisi negatiftir. Bu problemde ise başlangıç enerjisinin pozitif olması önemlidir.

Son olarak; elde edilen sonuçlar tartışılmış ve bu konuda daha sonra yapılması düşünülen çalışmalar hakkında önerilerde bulunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Global çözümlerin yokluğu, konkavlık metodu, genelleşmiş konkavlık metodu, çözümün patlaması.

SUMMARY

NONEXISTENCE OF GLOBAL SOLUTIONS OF NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS

In this study, the nonexistence of the global solutions to some class of initial-boundary value problems with dissipative terms in the boundary conditions and dissipative terms in the equations are investigated for some hyperbolic equations. The nonexistence of global solutions in each of the problems which have been investigated has been proved through the use of concavity method which put forward by H. A. Levine[24] and by the use of generalized concavity method, which is the improved version of the above mentioned method by V.Kalantarov and O. A. Ladyzhenskaya[15].

In these methods one writes down a functional which reflects the properties of dissipative boundary conditions and represents the norm of the solution in some sense, then proves that this functional satisfies the hypotheses of Levine Lemma or Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemma. Hence from the conclusion of these lemmas one concludes that in finite time t, these functionals and hence the norm of the solutions blow up.

In the first chapter, the historical development of the studies in this area is informed.

In the second chapter, preliminary facts and fundemental definitions used in the thesis are presented.

In the third chapter, using Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemma, the nonexistence of the global solutions of

$$Gu_{tt} - a\Delta u + cu = bf(u)$$

with suitable initial conditions and a dissipative boundary condition are investigated. In this chapter the nonexistence of the global solutions of

$$u_{tt} - \Delta u = f(u)$$

with a Dirichlet boundary condition in a certain part of the boundary and dissipative boundary condition in the other part of boundary and a numerical example is also investigated.

In the fourth chapter,using Levine Lemma, the nonexistence of the global solutions of the evolution equations

$$Pu_{tt} + Q(t)u_t + A(t,u) = F(t,u), \qquad t \in J = [0,\infty)$$

where

$$A(u) = -div\left(|Du|^{p-2}\, Du\right)$$

with suitable initial conditions and with $u(x,t) = 0$, $t \in [0,T)$ on the boundary is studied.Similarly taking

$$A(u) = 2b\Delta^2 u + b\Delta(|\nabla u|^2 \Delta u) - b\sum_{i=1}^{n} \partial_i((\Delta u)^2 \partial_i u)$$

with suitable initial conditions and with $u(x,t) = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial n} = 0$ on the boundary in the finite time $[0,T)$ interval. A numerical example is given to the second case.

In the fifth chapter, a quasilinear wave equation is treated with dissipative term in the equation

$$u_{tt} - \nabla\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) + au_t = |u|^{p-2} u + |u|^{l-2} u$$

where a is any arbitrary constant, with suitable initial conditions and $u(x,t) = 0$ boundary condition, by taking $v(t) = e^{-mt} u(t)$, the equation is transformed into

$$v_{tt} + (2m + a)v_t + (m^2 + am)v - e^{(p-2)mt} \nabla(|\nabla v|^{p-2} \nabla v)$$
$$= e^{-mt}\left(e^{(p-1)mt} |v|^{p-2} v + e^{(l-1)mt} |v|^{l-2} v\right)$$

where coefficient operators are functions of time. The nonexistence of the global solutions of the above equation with suitable initial conditions and $v(x,t)=0$ on the boundary, is investigated by Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemma.

The nonexistence proofs of the problems in this chapter are obtained by using a suitable energy integral. For the problems of the previous chapter the initial energy was negative but in this problem, it is important that, initial energy is positive.

Finally some new directions in this field are suggested and some propositions concerning these equations and related problems are laid down.

Key Words: Nonexistence of global solutions, concavity method, generalized concavity method, blow up.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde, lineer olmayan hiperbolik denklemle verilmiş başlangıç-sınır değer problemlerinin global çözümlerinin yokluğu ve çözümlerin patlaması konusunda, bugüne kadar yapılan çalışmalar hakkında kısa bir bilgi verilmiştir.

1960' lı yıllardan günümüze kadar, bazı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemler için, başlangıç ve başlangıç-sınır değer problemlerinin yerel çözümlerinin global yokluğu ile ilgili pekçok çalışma vardır.

S.Kaplan[19], H.Fujita[12], R.T.Glassey[14] ve M.Ball[6] çalışmalarında, L Laplace operatörü veya kendine eş, düzgün bir eliptik operatör olmak üzere, ikinci mertebeden

$$u_t + Lu = f(u)$$

$$u_{tt} + Lu = f(u)$$

biçiminde parabolik ve hiperbolik denklemleri ele almışlar ve bu denklemler için başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümlerinin patlamasını sağlayan koşulları incelemişlerdir. Kullandıkları yöntemde, L eliptik operatörünün ilk özdeğerinin pozitifliğini yada Green fonksiyonunun pozitifliğini esas almışlardır.

H.A.Levine[23],[24] deki makalelerinde *konkavlık metodu* adıyla bilinen bir yöntem geliştirmiş ve

$$Pu_{tt} + Au = F(u)$$

T.C. YÜ
DOKÜ

biçimindeki diferansiyel-operatör denklemler için, Cauchy probleminin global çözümlerinin olmaması koşullarını elde etmiştir.

Burada; P ve A lineer, simetrik bir operatör olmak üzere; P nin pozitif, A nın negatif olmayan bir operatör ve F nin de belirli koşulları sağlayan lineer olmayan bir potansiyel operatör olması esastır.

Bu yöntemle, daha önce incelenmiş bir çok denklem için, global çözümlerin yokluğu hakkında sonuçlar elde edildiği gibi, pek çok yeni denklem de incelenebilmiştir.

R.J.Knops[22], H.A.Levine[25], B.Straughan[41] ve H.A.Levine, L.E Payne[27] nin çalışmalarındaki global yokluk teoremleri; lineer olmayan sınır koşullu lineer parabolik ve hiperbolik denklemler için, sürekli ortam mekaniğindeki çeşitli denklemler ve denklem sistemleri için, dissipatif terim içeren ikinci mertebeden diferansiyel-operatör denklemler ve esas parçası lineer olmayan diferansiyel-operatör denklemler için, H.A. Levine' in konkavlık metodu kullanılarak ispat edilmiştir.

Konkavlık metodunun temel fikri, problemin lokal çözümünün varlığı koşulu altında tanımlanan, denklemi ve sınır koşullarını temsil eden bir pozitif $\Psi(u(t))$ fonksiyonelinin inşa edilebilmesidir.

V.K.Kalantarov , O.A.Ladyzhenskaya[15] çalışmasında bu yöntemi geliştirmişler ve *genelleştirilmiş konkavlık metodu* adıyla bilinen bir lemma vermişlerdir.

Daha sonra; V.K.Kalantarov[16],[17], B.Palais[35], S.KTuritsyn[45] çalışmalarında genelleştirilmiş konkavlık metodunu kullanarak, çeşitli lineer olmayan evolusyon denklemleri için, çözümlerin global davranışlarını incelemişlerdir.

G. Todorova[44] makalesinde $u_t|u_t|^{m-1}$ biçiminde lineer olmayan sönüm terimi ve $|u|^{p-1}u$ biçiminde bir kaynak terimi bulunduran lineer olmayan bir dalga denklemi ele alarak, bu denklemin $1 < p \le m$ için, başlangıç değerleri ile birlikte global varlık teoremini ispat etmiş ve $1 < m < p$ için de, çözümlerin patlama anını hesaplamıştır.

V.K. Kalantarov[18] çalışmasında

$$Pu_{tt} + Qu_t + Au = B(u,u_t) + F(t,u)$$

biçimindeki ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel-operatör denklemlerin bir sınıfı için, Cauchy problemini gözönüne alarak, çözümlerin global yokluğu için gerekli koşulları vermiş ve lineer olmayan dalga denklemlerine ait birkaç uygulama örneklemiştir.

H.A. Levine , P. Pucci ve J. Serrin[28] yaptıkları ortak çalışmada

$$Pu_{tt} + Q(t)u_t + A(t,u) = F(t,u), \qquad t \in J = [0,\infty)$$

biçimindeki soyut evolusyon denklemi için başlangıç değer probleminin çözümlerinin süreksizliği problemini ele almış ve $Eu(0) < 0$ olacak şekilde bir $u(t)$ çözümünün var olamayacağını ispat etmişlerdir.

Daha sonra yeniden, H. A. Levine ve J. Serrin[29] yaptıkları çalışmada, dissipatif terim içeren kuazilineer evolusyon denklemler için global yokluk teoremlerini,

$$(P(u_t))_t + Q(t,u_t) + A(u(t)) = F(u(t)), \qquad t \in J = [0,\infty)$$

şeklindeki soyut evolusyon denklemi için ele almışlardır.

Son olarak; P. Pucci ve J. Serrin[37] makalelerinde soyut evolusyon denklemleri için

$$Pu_{tt} + Q(t)u_t + A(t,u) = F(t,u), \qquad t \in J = [0,\infty)$$

biçimindeki başlangıç değer probleminin, çözümlerinin süreksizliği problemini ele almışlar ve başlangıç enerjisi pozitif olduğu zaman, çözümlerin süreksizliği veya patlaması ile ilgilenmişlerdir.

BÖLÜM 2

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde sonraki bölümlerde gerekli olacak bazı tanımlar, eşitsizlikler ve lemmalar verilecektir.

2.1 Normlu uzay, İççarpım ve Hilbert Uzayı

Tanım 2.1.1 Bir X vektör uzayından, negatif olmayan sayılara tanımlanan ve aşağıdaki koşulları sağlayan $\|.\|$ fonksiyonuna *norm* denir;

$\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in R$ için

N1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

X vektör uzayına, üzerinde tanımlanan norm fonksiyonu ile *normlu uzay* denir ve $(X, \|.\|)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.2 $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve (x_n) bu normlu uzayda bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ $\ni n, m \geq N$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ oluyorsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 2.1.3 $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve (x_n) bu normlu uzayda bir dizi olsun. Eğer

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$$

olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı varsa (x_n) dizisine *yakınsaktır* denir ve $x_n \to x$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.4 Bir normlu uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya *tam uzay* denir. Eğer $(X, \|\cdot\|)$ uzayı tam ise o zaman bu uzaya, *Banach uzayı* denir.

Tanım 2.1.5 X normlu bir uzay ve $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ X üzerinde tanımlanmış iki norm olsun. Eğer c_1, c_2 pozitif sayıları $\forall x \in X$ için

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$$

eşitsizliği sağlayacak şekilde bulunabilirse, bu iki norma *denk normlar* denir.

Bir normlu uzay üzerinde

$$d(x,y) = \|x-y\|$$

eşitliği ile bir metrik tanımlanabilir. Dolayısıyla her normlu uzay bir metrik uzay olur.

Tanım 2.1.6 *H*, *R* gerçel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $H \times H \to R$'ye tanımlanan ve aşağıdaki koşulları sağlayan $(,)$ fonksiyonuna *iççarpım* denir; $\forall\, x,y,z \in H$ ve $\forall\, \alpha, \beta \in R$ için

I1) $(x,y) = (y,x)$,

I2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$,

I3) $(x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

H, üzerinde tanımlanan iççarpım fonksiyonu ile bir *iççarpım uzayı* olur. *H* üzerinde tanımlanan iççarpım,

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

biçiminde bir norm ve

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{(x-y, x-y)}$$

biçiminde bir metrik tanımlar. Dolayısıyla her iççarpım uzayı, bir normlu uzay ve bir metrik uzay olur.

Tanım 2.1.7 *H* uzayı yukarıda tanımlanan normla bir Banach uzayı oluyorsa, *H* uzayına *Hilbert uzayı* denir.

T.C. YÜKSEK... DOKÜMAN...

Diğer bir deyişle tam, iççarpımlı uzaya *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 2.1.8 X bir metrik uzay ve $M \subset X$, X in bir alt kümesi olsun. M kümesini ihtiva eden bütün kapalı kümelerin arakesitine M nin *kapanışı* denir ve $\overline{M}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.9 X bir vektör uzayı ve $M \subset X$, X in bir altuzayı olsun. $\overline{M} = X$ oluyorsa M ye X in *yoğun altuzayı* denir.

Tanım 2.1.10 $G \subset R^n$ bir küme olsun ve $\overline{G}$ ile G nin kapanışı gösterilsin. Ω, R^n de bir bölge olsun. $\overline{G} \subset \Omega$ ve $\overline{G}$ kompakt ise $G \subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir.

Bir $f(x)$ fonksiyonunun Ω deki desteği

$$supp\, f = \overline{\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}}$$

ile tanımlanır ve $supp\, f$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.11 Eğer $suppf \subset\subset \Omega$ ise f fonksiyonuna *kompakt destekli fonksiyon* denir.

Tanım 2.1.12 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ n-bileşenli bir vektör olsun. Eğer her $i = 1,2,...,n$ için α_i ler negatif olmayan tamsayılar ise bu tür vektörlere *çoklu-indis* denir. Bir çoklu-indisin boyu $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ şeklinde tanımlanır.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ bir çoklu-indis ve $|\alpha|$ bu çoklu-indisin boyu olmak üzere

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

ifadesinden u nun x_1 e göre $\alpha_1, ..., x_n$ ye göre α_n inci mertebeden kısmi türevleri anlaşılacaktır. $D^{(0,...,0)} u = u$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.13 Ω, R^n de bir bölge olsun. Negatif olmayan her m tamsayısı için $|\alpha| \leq m$ olmak üzere, tüm α. mertebeden sürekli türevleri olan fonksiyonlar uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilsin. $C^0(\Omega) = C(\Omega)$ olur.

Ω, R^n de sınırlı bir bölge olmak üzere $C^m(\overline{\Omega})$ uzayı

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\le m} \max\left|D^\alpha f(x)\right|$$

formülü ile tanımlanan norma göre Banach uzayıdır.

$C^\infty(\Omega)$ keyfi mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonların uzayını ve $C_0^\infty(\Omega)$ ise keyfi mertebeden sürekli türevlere sahip, desteği kompakt fonksiyonların uzayını gösterir.

2.2 L_p Uzayı

Tanım 2.2.1 Ω, R^n de bir bölge ve p pozitif bir reel sayı olsun. $L_p(\Omega)$, Ω bölgesinde tanımlı, ölçülebilir ve $1 \le p < \infty$ olmak üzere p inci kuvveti Lebesque anlamında integre edilebilir fonksiyonlar uzayını gösterir.

Bu uzayda norm

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde tanımlanır ve bu norm ile $L_p(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2.2 (L_∞ Uzayı) Ω da ölçülebilen bir f fonksiyonu için, hemen hemen her yerde $|f(x)| \le K$ olacak şekilde sabit bir K sayısı bulunabilirse, f fonksiyonuna *hemen hemen her yerde sınırlı* denir. Böyle K ların en büyük alt sınırına da $|f|$ nin Ω daki *esas (essential) supremumu* adı verilir.

$L_\infty(\Omega)$ uzayı, Ω üzerinde ölçülebilen ve hemen hemen sınırlı fonksiyonların uzayıdır. Bu uzayda norm

$$\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = ess\sup_{x\in\Omega} |f(x)|$$

ile tanımlanır. Bu normla $L_\infty(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.2.3 *X* ve *Y* normlu uzaylar olsun.

Eğer

i) *X*, *Y* nin bir alt uzayı,

ii) $\forall x \in X$ için X den Y ye $Ix = x$ şeklinde tanımlı olan I birim operatörü sürekli ise,

X uzayı Y uzayına gömülür denir ve $X \to Y$ şeklinde gösterilir.

I lineer olduğundan (*ii*) koşulu

$$\|Ix\|_Y \le M\|x\|_X \qquad \forall x \in X$$

olacak şekilde bir $M > 0$ sabitinin varlığına denktir.

Teorem 2.2.4 $vol(\Omega) = \int_{\Omega} 1\, dx$ ve $1 \le p \le q \le \infty$ olsun. Eğer $f \in L_q(\Omega)$ ise $f \in L_p(\Omega)$ dır ve

$$\|f\|_p \le vol(\Omega)^{(1/p)-(1/q)} \|f\|_q$$

olur. Diğer bir deyişle

$$L_q(\Omega) \to L_p(\Omega)$$

gömülür.

Tanım 2.2.5 $-\infty \le a < b \le \infty$ olmak üzere, tanım bölgesi (a,b) aralığı olan ve bir X Banach uzayında değerler alan fonksiyonlar için de süreklilik, ölçülebilirlik ve Lebesque anlamında integrallenebilme kavramları, $X = R$ olması durumundakine, benzer şekilde tanımlanır. Bu anlamda

$p(1 \le p < \infty)$ inci kuvveti integrallenebilir fonksiyonlarının $f:(a,b) \to X$ uzayı $L_p(a,b;X)$ ile gösterilir ve bu uzayda norm

$$\|f\|_{L_p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(t)\|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanır.

Benzer şekilde $C^k\left([a,b);X\right)$ uzayı ve normu tanımlanabilir.

2.3 Sobolev Uzayı

Tanım 2.3.1 $\Omega \subset R^n$ de bir bölge olsun. Eğer her $\Omega' \subset\subset \Omega$ için $f(.) \in L_p(\Omega')$ ise, f fonksiyonuna Ω da lokal integrallenebilir fonksiyon denir ve $L_{p,loc}(\Omega)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2 $u, v \in L_{1,loc}(\Omega)$ olsun. Eğer $\forall \eta \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega u(x)\, D^\alpha \eta(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v(x)\, \eta(x)\, dx$$

eşitliği sağlanırsa, o zaman v fonksiyonuna u fonksiyonunun $|\alpha|$. *mertebeden* D^α *basamaklı zayıf türevi* denir.

Tanım 2.3.3 $\Omega \subset R^n$ sınırlı bir bölge, m negatif olmayan bir tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olsun.

$$W^{m,p}(\Omega) \equiv \{ f \in L_p(\Omega) : D^\alpha f \in L_p(\Omega), 0 \le |\alpha| \le m \}$$

şeklinde tanımlı olan uzaya *Sobolev uzayı* denir. Burada D^α zayıf türev anlamındadır.

Bu uzayda $1 \le p < \infty$ için norm

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha f\|^p_{L_p(\Omega)} \Big)^{\frac{1}{p}}$$

şeklinde, $p = \infty$ için norm

$$\|f\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{0 \le |\alpha| \le m} \|D^\alpha f\|_{L_\infty(\Omega)}$$

şeklinde tanımlanır ve $W^{m,p}(\Omega)$ uzayı tanımlanan bu normlar ile bir Banach uzayı olur.

$C_0^\infty(\Omega)$ uzayının $W^{m,p}(\Omega)$ uzayındaki kapanışı ise $W_0^{m,p}$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.4 $p = 2$ iken $W^{m,2}(\Omega)$ uzayı bir Hilbert uzayıdır ve $H^m(\Omega)$ ile gösterilir. Bu uzayda iççarpım

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{|\alpha| \le m} D^\alpha u(x)\, D^\alpha v(x)\, dx$$

ile tanımlanır. $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ ile gösterilir ve bu uzayda norm

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial u}{\partial x_i})^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanır. $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ ile gösterilir ve

$$H_0^m(\Omega) = \left\{ f \in H^m(\Omega) : D^\alpha f\Big|_{\partial\Omega} = 0,\ |\alpha| \le m-1 \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

2.4 Operatörler

Tanım 2.4.1 X ve Y iki vektör uzayı olsun. $A : D_A \subset X \to Y$ dönüşümü X deki bir x elemanını Y de bir tek elemana götürüyorsa, A'ya *operatör* denir. D_A'ya A *operatörünün tanım kümesi* denir.

Tanım 2.4.2 $A : D_A \subset X \to Y$ operatörüne aşağıdaki koşulları sağladığı takdirde *lineer operatör* denir;

i) $D_A \subset X$, X'in bir alt uzayıdır,

ii) $\forall x, y \in D_A$ ve $\alpha, \beta \in R$ için

$$A(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, A(x) + \beta\, A(y)$$

Tanım 2.4.3 Bir H Hilbert uzayında tanımlı A operatörü $\forall x, y \in D_A$ için

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

eşitliğini sağlıyorsa, A operatörüne *simetrik operatör* denir.

Tanım 2.4.4 $A : D_A \subset X \to Y$ operatörü, bir $K \ge 0$ sayısı ve $\forall x \in D_A$ için

$$\|A\,x\| \le K\,\|x\|$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, A operatörüne *sınırlı operatör* denir.

Tanım 2.4.5 *A, H* Hilbert uzayında tanımlı lineer, simetrik bir operatör olsun. $\forall x \in D_A \subset H$ için

$$(Ax,x) \geq 0$$

ise A operatörüne *negatif olmayan operatör* denir.

Tanım 2.4.6 A negatif olmayan bir operatör olsun.

$$(Ax,x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

ise A operatörüne *pozitif operatör* denir.

Tanım 2.4.7 A, H Hilbert uzayında tanımlı bir lineer operatör ve $\forall x(\neq 0) \in D_A$ için

$$(Ax,x) > 0$$

ise A operatörüne *pozitif belirli operatör* denir.

Tanım 2.4.8 X ve Y Banach uzayları ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{\|h\|_X \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_Y}{\|h\|_X} = 0$$

olacak şekilde bir $A : X \to Y$ lineer sınırlı operatörü varsa f ye $x \in X$ noktasında *türevlenebilirdir* denir. A operatörüne f'nin $x \in X$ noktasında *Fréchet türevi* denir ve $f'(x)$ ile gösterilir.

Tanım 2.4.9 X Banach uzayı, X^* onun dual uzayı ve $A : X \to X^*$ bir operatör olsun. Eğer $\forall x \in X$ için

$$\mathcal{A}'(x) = Ax,$$

olacak şekilde bir $\mathcal{A} : X \to R^1$ fonksiyoneli varsa $\mathcal{A}$ fonksiyoneline A *operatörünün potansiyeli* denir.

Aşağıda; bundan sonraki bölümlerde ele alınan başlangıç-sınır değer problemleri için, lokal çözümlerinin varlığı altında, çözümlerinin global yokluğunu ispat ederken kullanılmış olan Levine Lemması ve Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemması ispatları ile birlikte verilmiştir:

H. A. Levine Lemması

$\Psi(t)$ iki kez türevlenebilen ve $t > 0$, $\alpha > 0$ için

$$\Psi''(t)\Psi(t) - (1+\alpha)\left[\Psi'(t)\right]^2 \geq 0$$

eşitsizliğini gerçekleyen pozitif bir fonksiyon olsun.

Eğer $\Psi(0) > 0$ ve $\Psi'(0) > 0$ ise, bu durumda öyle bir

$$t_1 \leq \frac{\Psi(0)}{\alpha\Psi'(0)}$$

zamanı vardır ki $t \to t_1$ için $\Psi(t) \to +\infty$ olur.

İspat. $\Phi(t) = \Psi^{-\alpha}(t)$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$\Phi(t)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevi

$$\Phi'(t) = -\alpha\Psi^{-\alpha-1}(t)\Psi'(t)$$

$$\Phi''(t) = \alpha(\alpha+1)\Psi^{-\alpha-2}(t)\Psi'^2(t) - \alpha\Psi^{-\alpha-1}(t)\Psi''(t)$$

$$= -\alpha\Psi^{-\alpha-2}(t)\left[\Psi''(t)\Psi(t) - (1+\alpha)\Psi'^2(t)\right] \qquad (2.1)$$

dir.

$\Phi(t)$ fonksiyonunun her noktadaki $\Phi'(t)$ türevi, negatif olduğundan $\Phi(t)$ azalan bir fonksiyondur. $\Phi(t)$ fonksiyonunun $(0, \Phi(0))$ noktasındaki teğet doğrusunun denklemi

$$\Phi(t) - \Phi(0) = \Phi'(0)t$$

$$\Phi(t) = \Psi^{-\alpha}(0) - \alpha\Psi^{-\alpha-1}(0)\Psi'(0)\,t$$

olup buradan, bu teğetin t eksenini kestiği nokta olarak

$$t_0 = \frac{\Psi(0)}{\alpha\Psi'(0)}$$

elde edilir.

(2.1) den $\Phi''(t)$ negatif olduğundan $\Phi(t)$ fonksiyonu konkavdır, yani $\Phi(t)$ fonksiyonu her noktada teğetin altında kalır.Teğet doğrusu t eksenini t_0 noktasında keser. Bu nedenle $\Phi(t)$ fonksiyonunun grafiği de t eksenini bir $t_1 < t_0$ noktasında keser.

O halde $t \to t_1^-$ iken $\Phi(t) \to 0$ yakınsar.Böylece

$$\lim_{t \to t_1^-} \Psi(t) = \infty$$

olur.

Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemması

$\Psi(t)$ iki kez türevlenebilen ve $\alpha > 0,\ C_1, C_2 \geq 0,\ t > 0$ için

$$\Psi''(t)\Psi(t) - (1+\alpha)\left[\Psi'(t)\right]^2 \geq -2C_1\Psi'(t)\Psi(t) - C_2\left[\Psi(t)\right]^2 \tag{2.2}$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun.

Eğer

$$\Psi(0) > 0, \Psi'(0) > -\gamma_2\alpha^{-1}\Psi(0) \text{ ve } C_1 + C_2 > 0$$

ise, bu takdirde

$$\gamma_1 = -C_1 + \sqrt{C_1^2 + \alpha C_2}, \qquad \gamma_2 = -C_1 - \sqrt{C_1^2 + \alpha C_2}$$

olmak üzere

$$t \to t_1 \leq t_2 = \frac{1}{2\sqrt{C_1^2 + \alpha C_2}} \ln \frac{\gamma_1\Psi(0) + \alpha\Psi'(0)}{\gamma_2\Psi(0) + \alpha\Psi'(0)}$$

için

$$\Psi(t) \to +\infty$$

olur.

İspat. $\Phi(t) = \Psi^{-\alpha}(t)$ fonksiyonu tanımlanarak

$\Phi(t)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevi

$$\Phi'(t) = -\alpha\frac{\Psi'(t)}{\Psi^{1+\alpha}(t)}, \qquad \Phi''(t) = -\alpha\frac{\Psi''(t)\Psi(t) - (1+\alpha)\left[\Psi'(t)\right]^2}{\Psi^{2+\alpha}(t)}$$

olarak bulunur.

Bu ifadeler *(2.2)* eşitsizliğinde yerlerine yazılırsa ikinci basamaktan bir

$$\Phi''(t) + 2C_1\Phi'(t) - \alpha C_2\Phi(t) \equiv f(t) \leq 0 \tag{2.3}$$

sabit katsayılı diferansiyel denklemi elde edilir. $C_1 + C_2 > 0$ olması durumunda bu denklemin çözümü

$$\Phi(t) = \beta_1 e^{\gamma_1 t} + \beta_2 e^{\gamma_2 t} + (\gamma_2 - \gamma_1)^{-1}\int_0^t f(\tau)\left[e^{\gamma_2(t-\tau)} - e^{\gamma_1(t-\tau)}\right]d\tau \tag{2.4}$$

olur.

β_1 ve β_2 sayıları

$$\beta_1 + \beta_2 = \Phi(0)$$

$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = \Phi'(0)$$

cebirsel denklem sisteminin çözümleri olmak üzere; bu sistemin çözümünden

$$\beta_1 = -(\gamma_1 - \gamma_2)^{-1}\left[\alpha\Psi'(0) + \gamma_2\Psi(0)\right]\Psi^{-1-\alpha}(0) < 0$$

$$\beta_2 = (\gamma_1 - \gamma_2)^{-1}\left[\alpha\Psi'(0) + \gamma_1\Psi(0)\right]\Psi^{-1-\alpha}(0) > 0$$

elde edilir.

Diğer taraftan *(2.4)* eşitliğinden

$$0 \le \Phi(t) \le \beta_1 e^{\gamma_1 t} + \beta_2 e^{\gamma_2 t}$$

bulunur. t ye göre

$$\beta_1 e^{\gamma_1 t} + \beta_2 e^{\gamma_2 t} = 0$$

cebirsel denkleminin

$$t_2 = (\gamma_1 - \gamma_2)^{-1}\ln\left[-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right]$$

gibi pozitif sonlu bir çözümü vardır.

O halde $t_1 \le t_2$ için, $t \to t_1$ iken $\Phi(t) \to 0$ yakınsar, yani

$$\lim_{t \to t_1^-} \Psi(t) = +\infty$$

olur.

Eğer $\alpha > 0$, $C_1, C_2 = 0$ ise *(2.3)* denklemi

$$\Phi''(t) \le 0$$

olur. İki kez integrasyonla

$$\Phi'(t) - \Phi'(0) \le 0, \qquad \Phi(t) - \Phi(0) - \Phi'(0)t \le 0$$

bulunur ve

$$0 \le \Phi(t) \le \Phi(0) + \Phi'(0)t$$

eşitsizliğinden

$$t_2 = -\frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)}$$

elde edilir.

Bir $t_1 \le t_2$ sayısı için $t \to t_1$ iken $\Psi(t) \to +\infty$ olur.

BÖLÜM 3

LİNEER OLMAYAN DALGA DENKLEMLERİ

3.1 $Pu_{tt} = -A(t)u + F(u(t))$ Biçimindeki Lineer Olmayan Soyut Dalga Denkleminin Global Çözümlerinin Olmaması

H bir reel Hilbert uzayı ve $D \subseteq H$, *H*' nin bir lineer yoğun altuzayı olsun. (,) ile *H*'nin iççarpımı ve $\|\cdot\|$ ile de *H*'nin normu gösterilsin.

Aşağıdaki soyut Cauchy problemi ele alınsın:

$$Pu_{tt} = -A(t)u(t) + F(u(t)), \qquad t \in [0,T) \tag{3.1}$$
$$u(0) = u_0, \qquad u_t(0) = v_0$$

Tanım 3.1.1 $u:[0,T) \to H$ bir fonksiyon olsun. Eğer her t için $u(t)$ ve $\|\cdot\|_D$ normuna göre *u*' nun kuvvetli türevi olan $u_t(t)$, *D*' ye ait ise ve u_{tt} varsa, D_P'de değerler alıyor ve *H*' nin normuna göre kuvvetli sürekliyse ve $Pu_{tt} = -A(t)u + F(u(t))$ denklemi klasik anlamda sağlanıyorsa, o zaman *u* fonksiyonuna, bu denklemin bir çözümüdür denir.

Teorem 3.1.2 $u:[0,T) \to H$ fonksiyonu *(3.1)* probleminin çözümü olsun. *P, A* ve *F* operatörleri sırasıyla aşağıdaki koşulları gerçeklesin:

PI) $P:D_P \to H$ $D \subset D_P \subset H$ altuzayında tanımlı lineer, simetrik operatör,

PII) $\forall x \in D_P, x \neq 0$ için $(Px,x) > 0$.

AI) $A(t):D \to H$ lineer, simetrik operatör, AII) $\forall\, x \in D$ için $(x, A(t)x) \geq 0$,

AIII) $v:[0,\infty)\rightarrow H$ kuvvetli sürekli türevlenebilirse ve eğer $\forall\, t \geq 0$ için $v(t)$ ve $\dfrac{dv(t)}{dt} \in D$ ise o zaman, $(v(t), A(t)v(t))$ sürekli türevlenebilirdir ve $\forall\, t \geq 0$ için

$$Q_A(v,v)(t) := (d/dt)(v(t), A(t)v(t)) - 2(dv(t)/dt,\, A(t)v(t)) \leq 0 .$$

FI) $F: D \rightarrow H$ sürekli türevlenebilsin, yani F_x Frechét türevi, H üzerinde simetrik, sınırlı, lineer bir operatör olsun ve $x \rightarrow F_x$ dönüşümü, D' den $L(H)$'ye kuvvetli sürekli olsun.

FII) $\mathcal{G}(x) = \int_0^1 (F(\rho x), x)\, d\rho$ fonksiyoneli, F nin potansiyeli olsun. $\mathcal{G}: D \rightarrow R$ skaler değerli ve $\mathcal{G}_x$ Frechét türevi aşağıdaki şekilde davranan bir fonksiyonel olmak üzere; $\forall\, x, y \in D$ için

$$\mathcal{G}_x\, y = \left(F(x), y\right)$$

$\alpha > 0$ sabiti ve $\forall x \in D$ için

$$\left(x, F(x)\right) \geq 2(2\alpha+1)\mathcal{G}(x) \qquad (3.2)$$

eşitsizliğini gerçeklesin.

Bu koşullar altında aşağıdaki ifadeler sağlanır:

(A) Eğer

$$\beta_0 \equiv 2\left\{\mathcal{G}(u_0) - \frac{1}{2}\left[(u_0, A(0)u_0) + (v_0, Pv_0)\right]\right\} > 0$$

ise

$$T \leq T_{\beta_0} = \alpha^{-1}\left\{\left[\beta_0 (u_0, Pu_0) + (u_0, Pv_0)^2\right]^{1/2} + (u_0, Pv_0)\right\}^{-1} (u_0, Pu_0)$$

olmak üzere u çözümü sadece sınırlı $[0, T)$ aralığında vardır ve

$$\lim_{t \rightarrow T^-} (u(t), Pu(t)) = \infty$$

olur.

(B) Eğer

$$\mathcal{G}(u_0) = \frac{1}{2}\left[(u_0, A(0)u_0) + (v_0, Pv_0)\right]$$

ve

$$\frac{(u_0, Pv_0)}{(u_0, Pu_0)} = \lambda > 0$$

ise

$$T \leq (2\alpha\lambda)^{-1}$$

olmak üzere u çözümü sadece sınırlı $[0,T)$ aralığında vardır ve

$$\lim_{t\to T^-}(u(t), Pu(t)) = \infty$$

olur. Howard A. Levine[24].

3.2 Dinamik Sınır Koşullu Kuazilineer Hiperbolik Denklemin Global Çözümlerinin Yokluğu

Aşağıdaki çalışmada, sınır koşulunda dissipatif terim içeren ifade bulunduğu için, kuazilineer hiperbolik denklemin çözümlerinin global yokluğu, Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemması kullanılarak ispatlanmıştır.

$\Omega \subset R^n$ de sınırlı ve yeterince düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip bir bölge ve G pozitif lineer simetrik operatörü $D \subset H$, Hilbert uzayının bir lineer yoğun altuzayında tanımlanmış olsun.

Bu takdirde

$$Gu_{tt} - a\Delta u + cu = bf(u), \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T) \tag{3.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x) \;\; x \in \Omega \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)u_t = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T) \tag{3.5}$$

ile verilen başlangıç-sınır değer problemi gözönüne alınsın. $P = G$ ve t ye bağlı olmayan A lineer operatörü de $A = -a\Delta + cI$ alınırsa G, A ve f üzerindeki koşullar Teorem 3.1.2 ile aynı olur.

Burada; T>0 keyfi bir reel sayı, a,b ve c negatif olmayan sayılar, ν dış normal vektör, $\beta(x)$ Ω bölgesinde tanımlı negatif olmayan düzgün bir fonksiyondur.

Bu takdirde *(3.3)-(3.5)* başlangıç-sınır değer probleminin çözümlerinin global yokluğu hakkında aşağıdaki teorem ispat edilebilir:

Teorem 3.2.1 *u, H* üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, *(3.3)-(3.5)* probleminin klasik bir çözümü olsun.

$u_0(x)$, $u_1(x)$ yeterince düzgün iki fonksiyon olmak üzere ;

$$i)\ (u_0, Gu_0) + a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)} > 0,$$

$$ii)\ \frac{1}{2}\left[(u_1, Gu_1) + a\|\nabla u_0\|^2 + c\|u_0\|^2\right] - bF(u_0) \leq 0,$$

$$iii)\ 2(u_0, Gu_1) + a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)} > -\gamma_2\alpha^{-1}\left[(u_0, Gu_0) + a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right].$$

koşullarını sağlasın.

Bu durumda

$$\gamma_{1,2} = -(\alpha+1) \mp \sqrt{(\alpha+1)^2 + \alpha(\alpha+2)}$$

olmak üzere

$$t_1 \leq t_2 = \left[2\sqrt{(\alpha+1)^2 + \alpha(\alpha+2)}\right]^{-1} \times$$

$$\ln \frac{\gamma_1\left[(u_0, Gu_0) + a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right] + \alpha\left[2(u_0, Gu_1) + a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]}{\gamma_2\left[(u_0, Gu_0) + a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right] + \alpha\left[2(u_0, Gu_1) + a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]}$$

için

$$\lim_{t \to t_1}\left\{(u, Gu) + a\int_0^t \beta(x)\|u(s)\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\, ds\right\} = \infty$$

olur.

İspat. $\Psi(t)$ iki kez türevlenebilen ve $\alpha > 0$, $C_1, C_2 \geq 0$, $t > 0$ için

$$\Psi''(t)\Psi(t) - (1+\alpha)[\Psi'(t)]^2 \geq -2C_1\Psi'(t)\Psi(t) - C_2[\Psi(t)]^2 \qquad (3.6)$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir fonksiyon olmak üzere

$$\Psi(t) = (u(t), Gu(t)) + a\int_0^t \beta(x)\|u(s)\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\, ds + a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \qquad (3.7)$$

şeklinde tanımlansın. *G* operatörünün simetrik olması da kullanılarak Ψ fonksiyonunun iki kez türevi alınırsa

$$\Psi'(t) = 2(u_t(t), Gu(t)) + a\beta(x)\|u\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

$$\Psi'(t)=2(u_t(t),\ Gu(t))+2a\int_0^t \beta(x)(u(s),u_s(s))_{L_2(\partial\Omega)}\,ds+a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \qquad (3.8)$$

ve

$$\Psi''(t)=2(u_t(t),\ Gu_t(t))+2(u(t),\ Gu_{tt}(t))+2a\beta(x)(u(t),u_t(t))_{L_2(\partial\Omega)} \qquad (3.9)$$

elde edilir. *(3.3)* denklemi u ile skaler çarpılırsa

$$(u,\ Gu_{tt})=a(u,\Delta u)-c(u,u)+b(u,f(u)) \qquad (3.10)$$

eşitliği elde edilir. Green-Gauss teoremi ve sınır koşulu kullanılarak

$$\int_\Omega u(x,t)\,\Delta u(x,t)\,dx=\int_{\partial\Omega} u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}dx-\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2\,dx$$

$$=-\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2\,dx-\int_{\partial\Omega}\beta(x)\,u(x,t)\,u_t(x,t)\,dx \qquad (3.11)$$

olur. *(3.10)* ifadesinde yerine yazılırsa

$$(u,Gu_{tt})=-a\|\nabla u\|^2-a\beta(x)(u,u_t)_{L_2(\partial\Omega)}-c\|u\|^2+b(u,f(u)) \qquad (3.12)$$

eşitliği elde olunur. *(3.12), (3.9)* da yerine yazılır ve gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$\Psi''(t)=2(u_t(t),Gu_t(t))-2a\|\nabla u\|^2-2c\|u\|^2+2b(u,\ f(u)) \qquad (3.13)$$

bulunur. $\Psi''(t)$ yi alttan kısıtlamak amacıyla $(u,f(u))\geq 2(2\alpha+1)F(u)$ eşitsizliği kullanılarak

$$\Psi''(t)\geq 2(u_t(t),\ Gu_t(t))-2a\|\nabla u\|^2-2c\|u\|^2+4b(2\alpha+1)\,F(u) \qquad (3.14)$$

elde edilir. *(3.3)* denklemi u_t ile skaler çarpılırsa

$$(u_t,Gu_{tt})=a(u_t,\Delta u)-c(u_t,u)+b(u_t,f(u)) \qquad (3.15)$$

ve eşitliğin sağ tarafındaki ilk terime Green-Gauss teoremi uygulanırsa

$$\int_\Omega u_t(x,t)\,\Delta u(x,t)\,dx=\int_{\partial\Omega} u_t(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial\nu}dx-\int_\Omega\nabla u_t\nabla u\ dx$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\nabla u(x,t)|^2\,dx-\int_{\partial\Omega}\beta(x)|u_t(x,t)|^2\ dx \qquad (3.16)$$

olur ve buradan

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(u_t,Gu_t)+\frac{1}{2}a\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}c\|u\|^2-bF(u)\right]=-a\beta(x)\|u_t\|^2_{L_2(\partial\Omega)} \qquad (3.17)$$

elde edilir.

O halde *(3.3)* denklemi için enerji integrali

$$E(t) := \frac{1}{2}(u_t, Gu_t) + \frac{1}{2}a\|\nabla u\|^2 + \frac{1}{2}c\|u\|^2 - bF(u) \qquad (3.18)$$

olarak tanımlanır. *(3.17)* eşitliği enerji integrali cinsinden yazılıp integre edilirse

$$\frac{d}{dt}E(t) = -a\beta(x)\|u_t\|^2_{L_2(\partial\Omega)}$$

$$E(t) = E(0) - a\int_o^t \beta(x)\|u_s\|^2_{L_2(\partial\Omega)} ds \qquad (3.19)$$

bulunur. *(3.14)* eşitsizliği enerji integrali türünden yeniden düzenlenirse

$$\Psi''(t) \geq 4(2\alpha+1)\left[-\frac{1}{2}(u_t, Gu_t) - \frac{1}{2}a\|\nabla u\|^2 - \frac{1}{2}c\|u\|^2 + bF(u)\right]$$

$$+ 4(\alpha+1)(u_t, Gu_t) + 4a\alpha\|\nabla u\|^2 + 4c\alpha\|u\|^2$$

$$\Psi''(t) \geq -4(2\alpha+1)E(t) + 4(\alpha+1)(u_t, Gu_t) + 4a\alpha\|\nabla u\|^2 + 4c\alpha\|u\|^2 \qquad (3.20)$$

şeklini alır. Burada *(3.19)* eşitliği de kullanılarak

$$\Psi''(t) \geq -4(2\alpha+1)E(0) + 4a(2\alpha+1)\int_o^t \beta(x)\|u_s\|^2_{L_2(\partial\Omega)} ds$$

$$+ 4(\alpha+1)(u_t, Gu_t) + 4a\alpha\|\nabla u\|^2 + 4c\alpha\|u\|^2 \qquad (3.21)$$

$\Psi''(t)$ için bir kısıtlama elde edilmiş olur.

t=0 anındaki $E(0)$ başlangıç enerji integrali teorem 3.2.1 in (ii) koşulundan negatiftir. *(3.21)* eşitsizliğinden $-4(2\alpha+1)E(0)$ ve uygun pozitif terimler atılırsa, $\Psi''(t)$ fonksiyonu

$$\Psi''(t) \geq 4(\alpha+1)\left[(u_t, Gu_t) + a\int_o^t \beta(x)\|u_s\|^2_{L_2(\partial\Omega)} ds\right] \qquad (3.22)$$

şeklinde daha da küçük bir ifade ile kısıtlanmış olur. $\Psi(t)$ fonksiyonu pozitif olduğundan

$$\Psi''(t) \geq 4(\alpha+1)\left[(u_t, Gu_t) + a\int_o^t \beta(x)\|u_s\|^2_{L_2(\partial\Omega)} ds\right] - \Psi(t) \qquad (3.23)$$

eşitsizliği yazılabilir ve

$$X(t) = \Psi''(t)\Psi(t) - (1+\alpha)[\Psi'(t)]^2 \qquad (3.24)$$

eşitliğinin bir alt sınırını elde etmek için *(3.7)*, *(3.8)* ve *(3.23)* ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$X(t)\geq 4(\alpha+1)\left[(u_t,\,Gu_t)+a\int_o^t\beta(x)\|u_s\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]\left[(u,\,Gu)+a\int_0^t\beta(x)\|u(s)\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds\right.$$

$$\left.+a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]-[\Psi(t)]^2-4(1+\alpha)\left[(u_t,\,Gu)+a\int_0^t\beta(x)(u,u_s)_{L_2(\partial\Omega)}ds\right.$$

$$\left.+\frac{a}{2}\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]^2 \tag{3.25}$$

$$X(t)\geq 4(\alpha+1)\left[(u_t,\,Gu_t)+a\int_o^t\beta(x)\|u_s\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]\left[(u,\,Gu)+a\int_0^t\beta(x)\|u(s)\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]$$

$$-\Psi^2-4(1+\alpha)\left[(u_t,\,Gu)+a\int_0^t\beta(x)(u,u_s)_{L_2(\partial\Omega)}ds+\frac{a}{2}\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]^2 \tag{3.26}$$

$$X(t)\geq 4(\alpha+1)\left[(u_t,\,Gu_t)+a\int_o^t\beta(x)\|u_s\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]\left[(u,\,Gu)+a\int_0^t\beta(x)\|u(s)\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]$$

$$-\Psi^2-4(1+\alpha)\left[(u_t,\,Gu)+a\int_0^t\beta(x)(u,u_s)_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]^2-(1+\alpha)\left[a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]^2$$

$$-4(1+\alpha)\left[(u_t,\,Gu)+a\int_0^t\beta(x)(u,u_s)_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]\left[a\,\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right] \tag{3.27}$$

$$X(t)\geq 4(\alpha+1)\left\{\left[(u_t,\,Gu_t)+a\int_o^t\beta(x)\|u_s\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]\left[(u,\,Gu)+a\int_0^t\beta(x)\|u(s)\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]\right.$$

$$\left.-\left[(u_t,\,Gu)+a\int_0^t\beta(x)(u,u_s)_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]^2\right\}-(1+\alpha)\left[a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]^2-\Psi^2 \tag{3.28}$$

$$-2(1+\alpha)\left[2(u_t,\,Gu)+2a\int_0^t\beta(x)(u,u_s)_{L_2(\partial\Omega)}ds+a\,\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]\left[a\,\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. *(3.28)* eşitsizliğinde $\{...\}$ içindeki ifade

$$S^2=\left\{\left[(u_t,\,Gu_t)+a\int_o^t\beta(x)\|u_s\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]\left[(u,\,Gu)+a\int_0^t\beta(x)\|u(s)\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]\right.$$

$$\left.-\left[(u_t,\,Gu)+a\int_0^t\beta(x)(u,u_s)_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]^2\right\} \tag{3.29}$$

ile gösterilir ve S^2 ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left[(u_t, Gu_t)+a\int_o^t \beta(x)\|u_s\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]\left[(u, Gu)+a\int_0^t \beta(x)\|u(s)\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]$$

$$-\left[(u_t, Gu)+a\int_0^t \beta(x)(u,u_s)_{L_2(\partial\Omega)}ds\right]^2 \geq 0$$

olduğundan $S^2 \geq 0$ olduğu açıkça görülür.

Buradan

$$X(t) \geq -2(1+\alpha)\left[2(u_t, Gu)+2a\int_0^t \beta(x)(u,u_s)_{L_2(\partial\Omega)}ds + a\,\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]\times$$

$$\left[a\,\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]-(1+\alpha)\left[a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]^2-\Psi^2 \qquad (3.30)$$

ve son olarak

$$X(t) \geq -2(1+\alpha)\left[(u, Gu)+a\int_0^t \beta(x)\|u(s)\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds + a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]\Psi'(t)$$

$$-(1+\alpha)\left[(u, Gu)+a\int_0^t \beta(x)\|u(s)\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds + a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]^2-\Psi^2 \qquad (3.31)$$

elde edilir. Lemmaya göre

$$\Psi''(t)\Psi(t)-(1+\alpha)[\Psi'(t)]^2 \geq -2(1+\alpha)\Psi'(t)\Psi(t)-(2+\alpha)[\Psi(t)]^2$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

Burada $C_1 = 1+\alpha$, $C_2 = 2+\alpha$ olarak alınırsa $\Psi(t)$ fonksiyonunun *(3.6)* eşitsizliğini sağladığı gösterilmiş olur. Böylece K.L. Lemmasına göre teorem ispatlanmış olup

$$t_1 \leq t_2 = \left[2\sqrt{(\alpha+1)^2+\alpha(\alpha+2)}\right]^{-1}\times$$

$$\ln\frac{\gamma_1\left[(u_0, Gu_0)+a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]+\alpha\left[2(u_0, Gu_1)+a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]}{\gamma_2\left[(u_0, Gu_0)+a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]+\alpha\left[2(u_0, Gu_1)+a\beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\partial\Omega)}\right]}$$

için

$$\lim_{t\to t_1}\left\{(u, Gu)+a\int_0^t \beta(x)\|u(s)\|^2_{L_2(\partial\Omega)}ds\right\} = \infty$$

olur.

3.3 Dinamik Sınır Koşullu Kuazilineer Hiperbolik Denklemin Çözümlerinin Patlaması

Aşağıdaki çalışmada, yeterince düzgün, parçalı Γ sınıra sahip bir bölge üzerinde tanımlı, ikinci mertebeden hiperbolik bir denklemle verilmiş, başlangıç-sınır değer problemi ele alınmıştır. Problem; sınırın bir parçasında Dirichlet koşulu, diğer parçasında ise dissipatif terim içeren dinamik sınır koşulu içermektedir. Çözümlerin global yokluğu ve patlama zamanı Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemması kullanılarak ispatlanmıştır.

$\Omega \subset R^n$ de sınırlı ve yeterince düzgün, parçalı $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ sınırına sahip bir bölge olmak üzere $G=I$, $a=b=1$ ve $c=0$ alınırsa *(3.3)-(3.5)* problemi

$$u_{tt} - \Delta u = f(u), \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T) \tag{3.32}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \; u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega \tag{3.33}$$

$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \Gamma_0 \times [0,T) \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} + \beta(x) u_t = 0, \qquad (x,t) \in \Gamma_1 \times [0,T) \tag{3.35}$$

başlangıç-sınır değer problemine indirgenmiş olur.

Bu takdirde *(3.32)-(3.35)* probleminin global çözümlerinin olmaması ve patlaması hakkında aşağıdaki teorem ispat edilebilir:

Teorem 3.3.1 $u : \Omega \times [0,T) \to H$ tanımlı bir fonksiyon olmak üzere *(3.32)-(3.35)* probleminin klasik bir çözümü olsun.

$\beta(x) \geq 0$ ve $u_0(x)$, $u_1(x)$ yeterince düzgün iki fonksiyon olmak üzere ;

i) $\|u_0\|^2 + \beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} > 0$,

ii) $\frac{1}{2}\|u_1\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2 - F(u_0) \leq 0$,

$$iii)\ \ 2(u_0, u_1) + \beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} > -\gamma_2 \alpha^{-1}\left[\|u_0\|^2 + \beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right].$$

koşullarını sağlasın.

Bu durumda

$$\gamma_1 = -C_1 + \sqrt{C_1^2 + \alpha C_2}\,, \qquad \gamma_2 = C_1 - \sqrt{C_1^2 + \alpha C_2}$$

olmak üzere

$$t_1 \le t_2 = \frac{1}{2\sqrt{C_1^2 + \alpha C_2}} \ln \frac{\gamma_1 \Psi(0) + \alpha \Psi'(0)}{\gamma_2 \Psi(0) + \alpha \Psi'(0)}$$

için

$$\lim_{t \to t_1}\left\{\|u\|^2 + \int_0^t \beta(x)\|u(s)\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\,ds\right\} = \infty$$

olur.

İspat. $\Psi(t)$ fonksiyonu

$$\Psi(t) = \|u(t)\|^2 + \int_0^t \beta(x)\|u(s)\|^2_{L_2(\Gamma_0 \cup \Gamma_1)}\,ds + \beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\Gamma_0 \cup \Gamma_1)} \qquad (3.36)$$

şeklinde tanımlansın. Sınır koşulundan

$$u(x,t)\big|_{\Gamma_0} = 0 \ \text{ ve dolayısıyla } \ u_0(x)\big|_{\Gamma_0} = 0$$

olduğundan

$$\Psi(t) = \|u(t)\|^2 + \int_0^t \beta(x)\|u(s)\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\,ds + \beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \qquad (3.37)$$

olur. Ψ fonksiyonunun iki kez türevi alınırsa

$$\Psi'(t) = 2(u, u_t) + \beta(x)\|u\|^2_{L_2(\Gamma_1)}$$

$$= 2(u_t, u) + 2\int_0^t \beta(x)(u(s), u_s(s))_{L_2(\Gamma_1)}\,ds + \beta(x)\|u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \qquad (3.38)$$

ve

$$\Psi''(t) = 2\|u_t\|^2 + 2(u, u_{tt}) + 2\beta(x)(u, u_t)_{L_2(\Gamma_1)} \qquad (3.39)$$

elde edilir. *(3.32)* denklemi *u* ile skaler çarpılırsa

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU DOKÜMANTASYON MERKEZİ

$$(u,u_{tt})=(u,\Delta u)+(u,f(u)) \tag{3.40}$$

eşitliği elde edilir. Green-Gauss teoremi ve sınır koşulu kullanılarak

$$\int_{\Omega} u(x,t)\,\Delta u(x,t)\,dx = \int_{\Gamma_0\cup\Gamma_1} u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}dx - \int_{\Omega}|\nabla u(x,t)|^2\,dx$$

$$= -\int_{\Omega}|\nabla u(x,t)|^2\,dx - \int_{\Gamma_1}\beta(x)\,u(x,t)\,u_t(x,t)\,dx \tag{3.41}$$

olur. *(3.40)* ifadesinde yerine yazılırsa

$$(u,u_{tt})=(u,f(u))-\|\nabla u\|^2-\beta(x)(u,u_t)_{L_2(\Gamma_1)} \tag{3.42}$$

eşitliği elde olunur. Elde edilen *(3.42)* ifadesi *(3.39)* eşitliğinde yerine yazılıp gerekli kısaltmalar yapılırsa

$$\Psi''(t)=2\|u_t\|^2-2\|\nabla u\|^2+2(u,\,f(u)) \tag{3.43}$$

bulunur. $\Psi''(t)$ yi alttan kısıtlamak amacıyla $(u,f(u))\geq 2(2\alpha+1)\,F(u)$ eşitsizliği kullanılarak

$$\Psi''(t)\geq 2\|u_t\|^2-2\|\nabla u\|^2+4(2\alpha+1)\,F(u) \tag{3.44}$$

elde edilir. *(3.32)* denklemi u_t ile skaler çarpılırsa

$$(u_t,u_{tt})=(u_t,\Delta u)+(u_t,f(u)) \tag{3.45}$$

ve eşitliğin sağ tarafındaki ilk terime Green-Gauss teoremi uygulanırsa

$$\int_{\Omega} u_t(x,t)\,\Delta u(x,t)\,dx = \int_{\Gamma_0\cup\Gamma_1} u_t(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial \nu}dx - \int_{\Omega}\nabla u_t\nabla u\;dx$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}|\nabla u(x,t)|^2\,dx - \int_{\Gamma_1}\beta(x)|u_t(x,t)|^2 dx \tag{3.46}$$

olur ve buradan

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-F(u)\right]=-\beta(x)\|u_t\|^2_{L_2(\Gamma_1)} \tag{3.47}$$

elde edilir.

O halde *(3.32)* denklemi için enerji integrali

$$E(t):=\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2-F(u) \tag{3.48}$$

olarak tanımlanır. *(3.47)* ifadesi enerji integrali cinsinden yazılıp integre edilirse

$$\frac{d}{dt}E(t)=-\beta(x)\|u_t\|^2_{L_2(\Gamma_1)}$$

$$E(t) = E(0) - \int_o^t \beta(x) \| u_s \|^2_{L_2(\Gamma_1)} ds \tag{3.49}$$

bulunur. *(3.44)* eşitsizliği enerji integrali türünden yeniden düzenlenirse

$$\Psi''(t) \geq 4(2\alpha+1)\left[-\frac{1}{2}\|u_t\|^2 - \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2 + F(u) \right]$$

$$+ 4(\alpha+1)\| u_t \|^2 + 4\alpha \|\nabla u\|^2$$

$$= -4(2\alpha+1)E(t) + 4(\alpha+1)\| u_t \|^2 + 4\alpha \|\nabla u\|^2 \tag{3.50}$$

şeklini alır.

Burada *(3.49)* eşitliği de kullanılarak

$$\Psi''(t) \geq -4(2\alpha+1)\, E(0) + 4(2\alpha+1) \int_o^t \beta(x) \| u_s \|^2_{L_2(\Gamma_1)} ds$$

$$+ 4(\alpha+1)\| u_t \|^2 + 4\alpha \|\nabla u\|^2 \tag{3.51}$$

$\Psi''(t)$ için bir kısıtlama elde edilmiş olur.

t=0 anındaki $E(0)$ başlangıç enerji integrali teorem *(3.3.1)* in (*ii*) koşulundan negatiftir. *(3.51)* eşitsizliğinden $-4(2\alpha+1)E(0)$ ve uygun pozitif terimler atılırsa $\Psi''(t)$ fonksiyonu

$$\Psi''(t) \geq 4(\alpha+1)\left[\| u_t \|^2 + \int_o^t \beta(x) \| u_s \|^2_{L_2(\Gamma_1)} ds \right] \tag{3.52}$$

şeklinde daha da küçük bir ifade ile kısıtlanmış olur.

$\Psi(t)$ fonksiyonu pozitif olduğundan

$$\Psi''(t) \geq 4(\alpha+1)\left[\| u_t \|^2 + \int_o^t \beta(x) \| u_s \|^2_{L_2(\Gamma_1)} ds \right] - \Psi(t) \tag{3.53}$$

eşitsizliği yazılabilir.

$$X(t) = \Psi''(t)\Psi(t) - (1+\alpha)[\Psi'(t)]^2 \tag{3.54}$$

eşitliğinin bir alt sınırını elde etmek için *(3.37)*, *(3.38)* ve *(3.53)* ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$X(t) \geq 4(\alpha+1)\left[\|u_t\|^2 + \int_o^t \beta(x)\|u_s\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 ds\right]\left[\|u\|^2 + \int_0^t \beta(x)\|u(s)\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 ds + \beta(x)\|u_0\|_{L_2(\Gamma_1)}^2\right]$$

$$-[\Psi(t)]^2 - 4(1+\alpha)\left[(u_t, u) + \int_0^t \beta(x)(u,u_s)_{L_2(\Gamma_1)} ds + \frac{1}{2}\beta(x)\|u_0\|_{L_2(\Gamma_1)}^2\right] \qquad (3.55)$$

$$X(t) \geq 4(\alpha+1)\left[\|u_t\|^2 + \int_o^t \beta(x)\|u_s\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 ds\right]\left[\|u\|^2 + \int_0^t \beta(x)\|u(s)\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 ds\right]$$

$$-\Psi^2 - 4(1+\alpha)\left[(u_t, u) + \int_0^t \beta(x)(u,u_s)_{L_2(\Gamma_1)} ds + \frac{1}{2}\beta(x)\|u_0\|_{L_2(\Gamma_1)}^2\right] \qquad (3.56)$$

$$X(t) \geq 4(\alpha+1)\left[\|u_t\|^2 + \int_o^t \beta(x)\|u_s\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 ds\right]\left[\|u\|^2 + \int_0^t \beta(x)\|u(s)\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 ds\right]$$

$$-\Psi^2 - 4(1+\alpha)\left[(u_t, u) + \int_0^t \beta(x)(u,u_s)_{L_2(\Gamma_1)} ds\right]^2 - (1+\alpha)\left[\beta(x)\|u_0\|_{L_2(\Gamma_1)}^2\right]^2$$

$$-4(1+\alpha)\left[(u_t,u) + \int_0^t \beta(x)(u,u_s)_{L_2(\Gamma_1)} ds\right]\left[\beta(x)\|u_0\|_{L_2(\Gamma_1)}^2\right] \qquad (3.57)$$

ve

$$X(t) \geq 4(\alpha+1)\left\{\left[\|u_t\|^2 + \int_o^t \beta(x)\|u_s\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 ds\right]\left[\|u\|^2 + \int_0^t \beta(x)\|u(s)\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 ds\right]\right.$$

$$\left.-\left[(u_t,u) + \int_0^t \beta(x)(u,u_s)_{L_2(\Gamma_1)} ds\right]^2\right\} - (1+\alpha)\left[\beta(x)\|u_0\|_{L_2(\Gamma_1)}^2\right]^2 - \Psi^2$$

$$-2(1+\alpha)\left[2(u_t,u) + 2\int_0^t \beta(x)(u,u_s)_{L_2(\Gamma_1)} ds + \beta(x)\|u_0\|_{L_2(\Gamma_1)}^2\right]\left[\beta(x)\|u_0\|_{L_2(\Gamma_1)}^2\right] \qquad (3.58)$$

eşitsizlikleri elde edilir. *(3.58)* eşitsizliğinde $\{...\}$ içindeki ifade

$$S^2 = \left\{\left[\|u_t\|^2 + \int_o^t \beta(x)\|u_s\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 ds\right]\left[\|u\|^2 + \int_0^t \beta(x)\|u(s)\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 ds\right]\right.$$

$$\left.-\left[(u_t, u) + \int_0^t \beta(x)(u,u_s)_{L_2(\Gamma_1)} ds\right]^2\right\} \qquad (3.59)$$

ile gösterilir ve S^2 ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa $S^2 \geq 0$ olduğu açıkça görülebilir. Buradan

$$X(t) \geq -2(1+\alpha)\left[2(u_t, u) + 2\int_0^t \beta(x)(u,u_s)_{L_2(\Gamma_1)}\, ds + \beta(x)\| u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right]$$

$$\left[\beta(x)\| u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right] - (1+\alpha)\left[\beta(x)\| u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right]^2 - \Psi^2 \qquad (3.60)$$

ve son olarak

$$X(t) \geq -2(1+\alpha)\left[\|u(t)\|^2 + \int_0^t \beta(x)\| u(s)\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\, ds + \beta(x)\| u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right]\Psi'(t)$$

$$-(1+\alpha)\left[\|u(t)\|^2 + \int_0^t \beta(x)\| u(s)\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\, ds + \beta(x)\| u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right]^2 - \Psi^2 \qquad (3.61)$$

şeklinde elde edilir.

Lemmaya göre

$$\Psi''(t)\Psi(t) - (1+\alpha)[\Psi'(t)]^2 \geq -2(1+\alpha)\Psi'(t)\Psi(t) - (2+\alpha)[\Psi(t)]^2$$

eşitsizliği elde edilmiş olur.

Burada $C_1 = 1+\alpha$, $C_2 = 2+\alpha$ olduğu düşünülerek $C_1, C_2 \geq 0$ sayıları belirlenmiş olur ki; bu da $\Psi(t)$ fonksiyonunun *(3.6)* eşitsizliğini gerçeklediğini göstermektedir. Böylece K.L. Lemmasının tüm koşulları sağlandığından teorem ispatlanmıştır.

Teoremin hipotezindeki t_2 patlama anı ise

$$t_1 \leq t_2 = \frac{1}{2\sqrt{(\alpha+1)^2 + \alpha(\alpha+2)}} \times$$
$$\ln\frac{\gamma_1\left[\| u_0\|^2 + \beta(x)\| u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right] + \alpha\left[2(u_0,u_1) + \beta(x)\| u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right]}{\gamma_2\left[\| u_0\|^2 + \beta(x)\| u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right] + \alpha\left[2(u_0,u_1) + \beta(x)\| u_0\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\right]}$$

için

$$\lim_{t\to t_1}\left\{\| u\|^2 + \int_0^t \beta(x)\| u(s)\|^2_{L_2(\Gamma_1)}\, ds\right\} = \infty$$

olur.

3.4 n=1 İçin Denklemin Çözümlerinin Patlama Zamanı ve Kararlılık Analizi

(3.32) –(3.35) problemine örnek olarak bir mekan boyutlu halde, $\Omega \subset R$ de $[0,1]$ aralığı olmak üzere

$$u_{tt} - u_{xx} = u^3 \qquad (t,x) \in (0,T) \times [0,1] \qquad (3.62)$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x) \quad x \in [0,1] \qquad (3.63)$$

$$u(t,x) = 0 \qquad t \in (0,T), \; x = 0 \qquad (3.64)$$

$$\frac{du}{dx} + \beta(x) u_t = 0 \qquad t \in (0,T), \quad x = 1 \qquad (3.65)$$

başlangıç –sınır değer problemi ele alınmış olsun.

Burada

$$f(u) = u^3 \; , \; F(u) = \frac{1}{4} u^4 \qquad (3.66)$$

olduğundan $\alpha = \frac{1}{2}$ sayısı ve her $u \in R^1$ için

$$f(u).u \geq 2(2\alpha + 1) F(u)$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca $u_0(x) = a \sin \pi x$, $u_1(x) = a\pi$, $\beta(x) = 1$ ve $a = 3\pi \geq 2\sqrt{2}\,\pi$ olarak seçilecek olursa *(3.62)-(3.65)* başlangıç-sınır değer problemi için $u_0(x)$, $u_1(x)$ başlangıç fonksiyonları teorem 3.3.1 in hipotezindeki koşulları aşağıdaki şekilde sağlar:

i) $\int_0^1 a^2 \sin^2 \pi x dx = \dfrac{a^2}{2} > 0,$

ii) $\dfrac{1}{2} \int_0^1 a^2 \pi^2 dx + \dfrac{1}{2} \int_0^1 a^2 \pi^2 \cos^2 \pi x dx - \dfrac{1}{4} \int_0^1 a^4 \sin^4 \pi x dx \cong -0.0938 \pi^2 < 0,$

iii) $2 \int_0^1 a^2 \pi \sin \pi x dx > -\alpha^{-1} \gamma_2 . (\int_0^1 a^2 \sin^2 \pi x dx).$

Bu durumda

$$\gamma_{1,2} = -C_1 \mp \sqrt{C_1^2 + \alpha C_2} \quad , \quad C_1 = \alpha + 1 \ , \ C_2 = \alpha + 2 \, .$$

$$\gamma_{1,2} = -\frac{3}{2} \mp \sqrt{\frac{14}{4}} \qquad (3.67)$$

olmak üzere

$$t_0 \le t_2 = \left[2\sqrt{(\alpha+1)^2 + \alpha(\alpha+2)} \right]^{-1} . \ln \left\{ \left[\gamma_1 \int_0^1 a^2 \sin^2 \pi x dx + 2\alpha \int_0^1 a^2 \pi \sin \pi x dx \right] \right.$$

$$\left. \div \left[\gamma_2 \int_0^1 a^2 \sin^2 \pi x dx + 2\alpha \int_0^1 a^2 \pi \sin \pi x dx \right] \right\} \cong 0.5181 \qquad (3.68)$$

için

$$\lim_{t \to t_0} \left[\int_0^1 u^2 dx + \int_0^t \int_0^1 |u(s)|^2 dx ds \right] = \infty$$

olur.

Bu çalışmada *(3.62)-(3.65)* başlangıç sınır değer problemi sayısal yöntemle çözülerek patlama zamanı bulunmuştur. Lineer olmayan hiperbolik tipten denklemlerin çözümünde eksplisit sonlu fark yöntemi kullanılır. Bu çalışmada çözümlerin patlama zamanlarını hesaplamak için aşağıdaki gibi bir sonlu fark şeması geliştirilmiştir.

3.4.1 Bir Eksplisit Şema

u_{tt} ikinci zaman türevinin sonlu fark eşdeğeri

$$u_{ttj}^n = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2} \qquad (3.69)$$

x in ikinci basamaktan türevinin merkezi fark eşdeğeri

$$u_{xxj}^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \qquad (3.70)$$

olduğundan bir mekan boyutlu halde *(3.62)* kuazilineer hiperbolik denklemin sonlu fark benzeri

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta t)^2} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = (u_j^n)^3 \qquad (3.71)$$

veya

$$u_j^{n+1} = 2u_j^n - u_j^{n-1} + \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\left(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n\right)$$
$$+ (\Delta t)^2 (u_j^n)^3 \qquad n = 1,2,..., \quad j = 1,2,..,N-1 \tag{3.72}$$

olur.

(3.63) ve *(3.64)* deki sınır koşullarının sonlu fark benzerleri,

$$u_0^{n+1} = 0 \qquad n = 1,2,..., \tag{3.73}$$

$$u_N^{n+1} = \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(u_{N-1}^n - u_N^n\right) + u_N^n \qquad n = 1,2,..., \tag{3.74}$$

ve *(3.65)* deki başlangıç koşullarının sonlu fark benzerleri de,

$j = 0,1,2,...,N$ için

$$u_j^0 = u_0(x_j) = 3\pi \sin \pi\, j\Delta x \tag{3.75}$$

$$u_1(x_j) = 3\pi^2 \tag{3.76}$$

$$u_j^1 = u_j^0 + u_1(x_j)\Delta t \tag{3.77}$$

haline gelirler.

Bu şemaya, bir adım ileri "Crude-Euler" yöntemi denir. Herhangi bir adımda bilinmeyen fonksiyonun değeri, bir adım önceki değerler yardımıyla, herhangi bir denklem sistemi çözmek zorunda kalınmadan hesaplanabildiğinden, eksplisit bir şemadır.

Bu sistemin sayısal kararlılığını Courant-Levi-Fredrichs ölçütüne göre araştırmak için Askar [3] de yapıldığı gibi, u_j^n üzerindeki

$$\varepsilon_j^n = \hat{\varepsilon}^n e^{iqx_j}$$

hatası gözönüne alınarak,

u_j^{n-1} üzerindeki ε_j^{n-1} ve u_j^{n+1} üzerindeki ε_j^{n+1} hataları hesaplanarak bu hatanın gelişimi incelenir.

Böylece

$$u_j^{n-1} + \hat{\varepsilon}^{n-1} e^{iqx_j}, \qquad u_j^n + \hat{\varepsilon}^n e^{iqx_j}, \quad u_j^{n+1} + \hat{\varepsilon}^{n+1} e^{iqx_j} \tag{3.78}$$

ifadeleri (*3.72*) de yerlerine yazılacak olursa

$$\hat{\varepsilon}^{n+1} = 2\hat{\varepsilon}^{n} - \hat{\varepsilon}^{n-1} + \frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\left[e^{iq\Delta x} - 2 + e^{-iq\Delta x}\right]\hat{\varepsilon}^{n}$$

$$+ 3(\Delta t)^2 (u_j^n)^2 \hat{\varepsilon}^{n} + O\left((\Delta t)^2 (\hat{\varepsilon}^{n})^2\right) \qquad (3.79)$$

elde edilir.

$\dfrac{\hat{\varepsilon}^{n+1}}{\hat{\varepsilon}^{n}}$ oranına g hata büyüme oranı denir ve $\dfrac{\hat{\varepsilon}^{n-1}}{\hat{\varepsilon}^{n}} = \dfrac{1}{g}$ olur. Kompleks üstel fonksiyon için Euler formüllerinin kullanılmasıyla

$$g + \frac{1}{g} = 2 - 4\frac{(\Delta t)^2}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{q\Delta x}{2} + 3(\Delta t)^2 (u_j^n)^2 \qquad (3.80)$$

bulunur. g'ye göre ikinci dereceden olan *(3.80)* denkleminin pozitif olan iki kökünden biri birden küçük diğeri de mekan adımlarının zaman adımlarına göre çok küçük kalmaması halinde $\Delta t < (\Delta x)^2$ için $\Delta x = 10^{-1}$ seçilerek,

$$|g| < 1 + O(\Delta t) \qquad (3.81)$$

olur ki sayısal şema Richtmyer ve Morton [38] ve Strikwerda [42] göre kararlıdır.

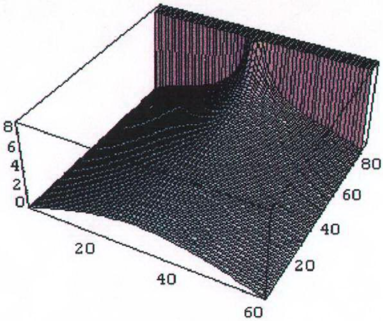
Yukarıdaki *(3.72)* açık şema örnek probleme, çeşitli $\Delta x = \dfrac{1}{N}$ mekan ve Δt zaman adımları uygulanılarak aşağıdaki tablo elde edildi.

N	Δ t = .0001	Δ t = .001	Δ t = .01
24	.00591331	.00592168	.059133
34	.00591755	.00592172	.059207
44	.00591925		.059192
55		.00592175	
60	.00592041	.00592175	.059204
85	.00592109	.00592176	
105			
125	.00592145		

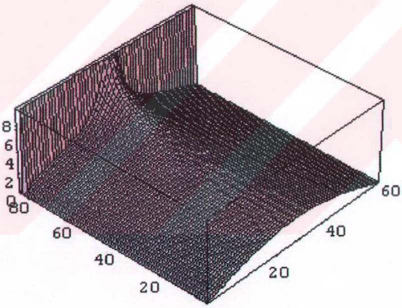
TABLO-1

Tablo-1 den de anlaşılacağı üzere patlama zamanının T= 0.0059 civarında olduğu görülmektedir. T anı için elde edilmiş olan bu sayısal değer *(3.68)* de verilen sınıra uygundur.

(3.62) denkleminin, sınır koşullarına uygun olarak seçilen başlangıç fonksiyonları ile birlikte, çözümlerinin patlama zamanına ait grafikleri aşağıda verilmiştir.



GRAFİK-1



GRAFİK-2

$N = 60$, $\Delta t = .0001$, sağ taraf fonksiyonu u^3 ve başlangıç fonksiyonları da $u_0(x) = 3\pi^2 \sin \pi x$, $u_1(x) = a\pi$ alınarak hesaplamalar yapılmıştır. 100 000. adıma kadar işlemlere devam edilmiş olup, 5000. adımdan itibaren her 500 adımda bir veriler alınarak grafikler çizilmiştir.

BÖLÜM 4

LİNEER DİSSİPATİF TERİM İÇEREN LİNEER OLMAYAN EVOLUSYON DENKLEMLERİ

4.1 Otonom Olmayan Soyut Evolusyon Denklemi

X bir Banach uzayı ve X' onun dual uzayı olsun. X Banach uzayında $\langle x', x\rangle_X$ ile x ve x' nin doğal ikilisi gösterilsin. Eğer $x \in X$ ve $x' \in X'$ ise $\langle x', x\rangle_X = x'(x)$ dir.

V bir Hilbert uzayı ve $P: V \to V'$ tanımlanmış bir lineer operatör olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlasın:

PI) $\forall\, v, w \in V$ için $\langle Pv, w\rangle_V = \langle Pw, v\rangle_V$,

PII) $\forall\, v \in V$ için $\langle Pv, v\rangle_V \geq 0$.

Bu bölümde,

$$Pu_{tt} + Q(t)u_t + A(t,u) = F(t,u), \qquad t \in J = [0,\infty) \qquad (4.1)$$

şeklinde bir lineer disipatif terim içeren evolution denklemi ile çalışılmıştır.

(4.1) denklemindeki P lineer operatörü V den V' ye tanımlı ve $Q(t)$ lineer disipatif operatörü de, Hilbert uzayına uygun bir Y uzayından Y' dual uzayına tanımlı, simetrik ve negatif olmayan operatörler olsunlar. Q operatörü için bunlara ilave olarak $Q \in C(J \to B(Y, Y'))$ olsun, yani her $v, w \in Y$ için $\langle Q(.)v, w\rangle_Y : J \to R$ ye sürekli demektir.

Son olarak; A ve F operatörleri de W, X Banach uzayı ve W', X' onların dual uzayları olmak üzere

$$A: J \times W \to W', \quad F: J \times X \to X'$$

olsun.

Ayrıca, sabit bir t için, A ve F operatörleri

$$\mathcal{A} : J \times W \to R, \quad \mathcal{F} : J \times X \to R$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{F}$ fonksiyonellerinin u ya göre Frechét türevleri olmak üzere; $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{F}$ potansiyelleri var olsun.

Verilen V, W, X ve Y uzaylarının kapalı, trivial olmayan bir G alt uzayının var olduğu farz edilsin. K da

$$K = \{\varphi : J \to G \mid \varphi \in C(J \to W) \cap C(J \to X) \cap C^1(J \to V) \cap AC(J \to Y)\}$$

olsun.

(a) $u \in K$;

(b) Dağılım özdeşliği: $\forall t \in J$ ve $\forall \varphi \in K$ için ,

$$\langle Pu_t(\tau), \varphi(\tau)\rangle_V \Big|_0^t = \int_0^t \{\langle Pu_t(\tau), \varphi_t(\tau)\rangle_V - \langle Q(\tau)u_t(\tau), \varphi(\tau)\rangle_Y$$

$$- \langle A(\tau, u(\tau)), \varphi(\tau)\rangle_W + \langle F(\tau, u(\tau)), \varphi(\tau)\rangle_X \} d\tau ,$$

(c) Enerji korunumu:

$$E u(t) - E u(0) \leq - \int_0^t \{\langle Q(\tau)u_t(\tau), u_t(\tau)\rangle_Y - \mathcal{A}_t(\tau, u(\tau)) + \mathcal{F}_t(\tau, u(\tau))\} d\tau$$

ise u ya *(4.1)* in bir kuvvetli çözümüdür, denir.

Burada $E u(t)$, u nun toplam enerjisi olmak üzere

$$E u(t) = \frac{1}{2} \langle P u_t(t), u_t(t)\rangle_V + \mathcal{A}(t, u(t)) - \mathcal{F}(t, u(t)), \quad t \in J \qquad (4.2)$$

dır.

Teorem 4.1.1 q bir sabit ve $q > 2$ olsun.

$\forall (t,u) \in J \times G$ için $\mathcal{A}(t,u) < \mathcal{F}(t,u)$ iken

$$\langle A(t,u), u\rangle_W - \langle F(t,u), u\rangle_X \leq q\{\mathcal{A}(t,u) - \mathcal{F}(t,u)\} \qquad (4.3)$$

ve

$$\mathcal{A}_t(t,u) - \mathcal{F}_t(t,u) \leq 0 \qquad (4.4)$$

koşulları sağlansın.

Bu takdirde *(4.1)* denkleminin J üzerinde $E u(0) < 0$ olacak şekilde bir u çözümü yoktur. Howard A. Levine [28] , Patrizia Pucci [37].

4.2 Lineer Dissipatif Terim İçeren Evolusyon Denkleminin Global Çözümlerinin Olmaması

Bu çalışmada üçüncü bölümden farklı olmak üzere; lineer dissipatif terim içeren, lineer olmayan bir evolusyon denklemi ele alınmıştır. Yukarıda ele alınan *(4.1)* soyut evolusyon denklemi $t \in J = [0,\infty)$ aralığında incelenmiş olup, bu aralık üzerinde $Eu(0) < 0$ olacak şekilde bir u çözümünün olmadığı ispatlanmıştır [28]. Aşağıda ise sonlu bir $t \in [0,T)$ aralığında ele alınmış olan *(4.5)* evolusyon denkleminin başlangıç-sınır koşulları ve $Eu(0) < 0$ negatif başlangıç enerji integrali ile birlikte, çözümlerinin global yokluğu H.A. Levine Lemması ile incelenecektir.

$\Omega \subset R^n$ de sınırlı ve yeterince düzgün Γ sınırına sahip bir bölge olmak üzere, $P=I$, $Q=aI$ ve lineer olmayan A ve F operatörleri de t den bağımsız olarak $A(u) = div\left(|Du|^{p-2} Du\right)$ ve $F(t,u) = F(u)$ şeklinde alınacak olursa *(4.1)* denklemi

$$u_{tt} + au_t - div\left(|Du|^{p-2} Du\right) = F(u), \qquad x \in \Omega,\ t \in [0,T) \tag{4.5}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \tag{4.6}$$

$$u(x,t) = 0\ , \qquad x \in \Gamma,\ t \in [0,T) \tag{4.7}$$

başlangıç-sınır değer problemine indirgenmiş olur.

Burada $a > 0$ ve $p > 2$ olmak üzere *(4.1)* soyut evolusyon denklemine uygun olan uzaylar $V = Y = X = L_2(\Omega)$ ve $W = W_0^{1,p}(\Omega)$ olarak seçilecek olursa V, W, X ve Y uzaylarının trivial olmayan G alt uzayı $G = L_2(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ şeklinde belirlenir. K da

$$K = \left\{\varphi : [0,T) \to G \mid \varphi \in C(J \to W_0^{1,p}(\Omega)) \cap C(J \to L_2(\Omega)) \cap C^1(J \to L_2(\Omega))\right\}$$

olsun.

$W_0^{1,p}(\Omega)$, $W^{1,p}(\Omega)$ uzayının kapalı lineer bir alt uzayı olmak üzere bu uzaydaki $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ normu $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \left(\|Du\|_{L_p(\Omega)}^p\right)^{1/p}$ ile tanımlanmıştır.

Ayrıca aşağıda, Teorem 4.2.1 in ispatı sırasındaki işlemlerde $L_2(\Omega)$ uzayındaki iççarpım $\langle u,v\rangle_{V,X,Y} = (u,v)_{L_2(\Omega)}$ ile gösterilmiştir.

Bu takdirde *(4.5)-(4.7)* başlangıç-sınır değer probleminin global çözümlerinin olmaması hakkında aşağıdaki teorem ispat edilebilir:

Teorem 3.3.1 *u (4.5)-(4.7)* probleminin kuvvetli bir çözümü olsun, yani

(a) $u \in K$;

(b) $\forall t \in [0,T)$ ve $\forall \varphi \in K$ için ,

$$(u_t(s),\varphi(s))_{L_2(\Omega)}\Big|_0^t = \int_0^t \Big\{(u_t(s),\varphi_t(s))_{L_2(\Omega)} - (au_t(s),\varphi(s))_{L_2(\Omega)} + \langle Au(s),\varphi(s)\rangle_{W_0^{1,p}} + (Fu(s),\varphi(s))_{L_2(\Omega)}\Big\}ds$$

(c) $E\,u(t) - E\,u(0) = -a\int_0^t \| u_s(s)\|^2_{L_2(\Omega)} ds$

olsun.

Eğer

i) $(u_0,u_1)_{L_2(\Omega)} > 0$,

ii) $d_0 : \mathfrak{I}(u_0) > \frac{1}{2}\left[\|u_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{2}{p}\|Du_0\|^p_{L_p(\Omega)}\right]$,

iii) $\beta_0 \equiv 2\left\{\mathfrak{I}(u_0) - \frac{1}{2}\left[\|u_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{2}{p}\|Du_0\|^p_{L_p(\Omega)}\right]\right\} > 0$,

iv) $2 < p \leq 4\alpha + 2$.

ise

$$0 < T \leq \alpha^{-2}\beta_0^{-1}\left\{\left[\left(\frac{a}{2}\|u_0\|^2_{L_2} - \alpha(u_0,u_1)_{L_2}\right)^2 + \alpha^2\beta_0\|u_0\|^2_{L_2}\right]^{1/2} + \left(\frac{a}{2}\|u_0\|^2_{L_2} - \alpha(u_0,u_1)_{L_2}\right)\right\}$$

olmak üzere *u* çözümü sadece sınırlı $[0,T)$ aralığında vardır ve

$$\lim_{t\to T^-}\left\{\| u\|^2_{L_2(\Omega)} + a\int_0^t \| u(s)\|^2_{L_2(\Omega)} ds\right\} = +\infty$$

olur.

İspat. a, T_0, β, τ sabitleri pozitif sayılar olmak üzere *(4.5)* in $u(t)$ çözümüne uygun $\Psi(t)$ fonksiyonu, $t \in [0, T_0/a]$ için

$$\Psi(t) = \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + a\int_0^t \| u(s)\|^2_{L_2(\Omega)}\, ds + (T_0 - at)\| u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta(t+\tau)^2 \qquad (4.8)$$

şeklinde seçilmiş olsun. Ψ fonksiyonunun türevi alınarak

$$\Psi'(t) = 2(u, u_t)_{L_2(\Omega)} + a\| u\|^2_{L_2(\Omega)} - a\| u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\beta(t+\tau)$$

$$= 2(u_t, u)_{L_2(\Omega)} + 2a\int_0^t (u(s), u_s(s))_{L_2(\Omega)}\, ds + 2\beta(t+\tau) \qquad (4.9)$$

elde edilir. (b) koşulu yardımıyla $\varphi = u \in K$ alınarak

$$(u_t, u)_{L_2(\Omega)}\Big|_0^t = \int_0^t \Big\{ \|u_s(s)\|^2_{L_2(\Omega)} - a(u_s(s), u(s))_{L_2(\Omega)}$$

$$+ \langle div(|Du|^{p-2} Du), u\rangle_{W_0^{1,p}} + (F(u(s)), u(s))_{L_2(\Omega)} \Big\} ds \qquad (4.10)$$

eşitliği bulunur. Elde edilen *(4.10), (4.9)* eşitliğinde yerine yazılıp türevi alınırsa

$$\Psi''(t) = 2\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + 2(u, F(u))_{L_2(\Omega)} - 2\| Du\|^p_{L_p(\Omega)} + 2\beta \qquad (4.11)$$

olur. *(4.8), (4.9)* ve *(4.11)* eşitlikleri $\Psi(t)\Psi''(t) - (1+\alpha)[\Psi'(t)]^2$ ifadesinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılacak olursa

$$\Psi\Psi'' - (1+\alpha)\Psi'^2 = \left[\|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + a\int_0^t \| u(s)\|^2_{L_2(\Omega)}\, ds + (T_0 - at)\| u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta(t+\tau)^2 \right]$$

$$\left[\left(2\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\beta\right) + \left(2(u, F(u))_{L_2(\Omega)} - 2\|Du\|^p_{L_p(\Omega)}\right) \right]$$

$$-4(1+\alpha)\left[(u_t, u)_{L_2(\Omega)} + a\int_0^t (u(s), u_s(s))_{L_2(\Omega)}\, ds + \beta(t+\tau) \right]^2 \qquad (4.12)$$

$$\Psi\Psi'' - (1+\alpha)\Psi'^2 \geq \left[\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + a\int_0^t \| u\|^2_{L_2(\Omega)}\, ds + \beta(t+\tau)^2 \right] \left[2\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\beta \right]$$

$$+2\left[\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + a\int_0^t \| u\|^2_{L_2(\Omega)}\, ds + (T_0 - at)\| u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta(t+\tau)^2 \right] \left[(u, F(u))_{L_2(\Omega)} - \|Du\|^p_{L_p(\Omega)} \right]$$

$$-4(1+\alpha)\left[(u_t, u)_{L_2(\Omega)} + a\int_0^t (u, u_s)_{L_2(\Omega)}\, ds + \beta(t+\tau) \right]^2 \qquad (4.13)$$

ve

$$\Psi\Psi'' - (1+\alpha)\Psi'^2 \geq 4(1+\alpha)\left\{\left[\|u\|_{L_2}^2 + a\int_0^t \|u\|_{L_2}^2\,ds + \beta(t+\tau)^2\right]\left[\|u_t\|_{L_2}^2 + a\int_0^t \|u_s\|_{L_2}^2\,ds + \beta\right]\right.$$

$$\left. - \left[(u_t,u)_{L_2} + a\int_0^t (u,u_s)_{L_2}\,ds + \beta(t+\tau)\right]^2\right\} + 2\Psi\left\{(u,F(u))_{L_2} - \|Du\|_{L_p}^p - \right.$$

$$\left. -(2\alpha+1)\left[\|u_t\|_{L_2}^2 + \beta\right] - 2a(\alpha+1)\int_0^t \|u_s\|_{L_2}^2\,ds\right\} \qquad (4.14)$$

eşitsizlikleri elde edilir. *(4.14)* eşitsizliğinde $\{...\}$ içindeki ifade

$$S^2 = \left\{\left[\|u\|_{L_2}^2 + a\int_0^t \|u\|_{L_2}^2\,ds + \beta(t+\tau)^2\right]\left[\|u_t\|_{L_2}^2 + a\int_0^t \|u_s\|_{L_2}^2\,ds + \beta\right]\right.$$

$$\left. - \left[(u_t,u)_{L_2} + a\int_0^t (u,u_s)_{L_2}\,ds + \beta(t+\tau)\right]^2\right\} \qquad (4.15)$$

ile gösterilir ve S^2 ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa $S^2 \geq 0$ olduğu açıkça görülebilir. Buradan

$$\Psi\Psi'' - (1+\alpha)\Psi'^2 \geq 2\Psi\left\{(u,F(u))_{L_2} - \|Du\|_{L_p}^p\right.$$

$$\left. -(2\alpha+1)\left[\|u_t\|_{L_2}^2 + \beta\right] - 2a(\alpha+1)\int_0^t \|u_s\|_{L_2}^2\,ds\right\} \qquad (4.16)$$

şeklinde belirlenmiş olur. *(4.16)* eşitsizliğinde $\{...\}$ içindeki ifade

$$H(t) = (u,F(u))_{L_2} - \|Du\|_{L_p}^p - (2\alpha+1)\left[\|u_t\|_{L_2}^2 + \beta\right] - 2a(\alpha+1)\int_0^t \|u_s\|_{L_2}^2\,ds \qquad (4.17)$$

ile gösterilsin.

$\Psi(t)$ pozitif bir fonksiyon olduğundan

$$\Psi(t)\Psi''(t) - (1+\alpha)\left[\Psi'(t)\right]^2 \geq 2\Psi(t)H(t) \qquad (4.18)$$

eşitsizliğinin pozitif olduğunu göstermek için $H(t) \geq 0$ göstermek yeterlidir.

(4.5) denklemine ait $Eu(t)$ enerji integralini tanımlamak için denklem u_t ile skaler çarpılırsa

$$(u_{tt},u_t)_{L_2} - \langle div(|Du|^{p-2}Du),\, u_t\rangle_{W_0^{1,p}} + a(u_t,u_t)_{L_2} = (F(u),\, u_t)_{L_2}$$

olur ve buradan

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|_{L_2}^2+\frac{1}{p}\|Du\|_{L_p}^p-\mathcal{J}(u)\right]=-a\|u_t\|_{L_2}^2 \qquad (4.19)$$

elde edilir.

O halde *(4.5)* denklemi için enerji integrali

$$Eu(t):=\frac{1}{2}\|u_t\|_{L_2}^2+\frac{1}{p}\|Du\|_{L_p}^p-\mathcal{J}(u) \qquad (4.20)$$

olarak tanımlanır. *(4.19)* eşitliği enerji integrali cinsinden yazılıp integre edilirse

$$\frac{d}{dt}Eu(t)=-a\|u_t\|_{L_2(\Omega)}^2$$

$$Eu(t)-Eu(0)=-a\int_0^t\|u_s\|_{L_2(\Omega)}^2\,ds \qquad (4.21)$$

bulunur.

$H(t)$ yi alttan kısıtlamak amacıyla *(4.17)* eşitliğinde $(u,F(u))\geq 2(2\alpha+1)\mathcal{J}(u)$ ifadesi kullanılarak

$$H(t)\geq 2(2\alpha+1)\mathcal{J}(u)-\|Du\|_{L_p}^p-(2\alpha+1)\left[\|u_t\|_{L_2}^2+\beta\right]-2a(\alpha+1)\int_0^t\|u_s\|_{L_2}^2\,ds$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizlik enerji integrali türünden yeniden düzenlenirse

$$H(t)\geq 2(2\alpha+1)\left[-\frac{1}{2}\|u_t\|_{L_2}^2-\frac{1}{p}\|Du\|_{L_p}^p+\mathcal{J}(u)\right]+\left(\frac{4\alpha+2}{p}-1\right)\|Du\|_{L_p}^p$$

$$-(2\alpha+1)\beta-2a(\alpha+1)\int_0^t\|u_s\|_{L_2}^2\,ds \qquad (4.22)$$

ve

$$H(t)\geq -2(2\alpha+1)Eu(t)+\left(\frac{4\alpha+2}{p}-1\right)\|Du\|_{L_p}^p-(2\alpha+1)\beta-2a(\alpha+1)\int_0^t\|u_s\|_{L_2}^2\,ds \qquad (4.23)$$

bulunur. Teorem 4.2.1 in (iv) koşulu ve (*4.21*) eşitliği gereğince

$$H(t)\geq -2(2\alpha+1)Eu(0)-(2\alpha+1)\beta \qquad (4.24)$$

ve

$$H(t)\geq 2(2\alpha+1)\left\{\mathcal{J}(u_0)-\frac{1}{2}\left[\|u_1\|_{L_2}^2+\frac{2}{p}\|Du_0\|_{L_p}^p\right]-\frac{\beta}{2}\right\} \qquad (4.25)$$

elde edilir. Teorem 4.2.1 in (iii) koşulundan

$$\beta\equiv\beta_0\equiv 2\left\{\mathcal{J}(u_0)-\frac{1}{2}\left[\|u_1\|_{L_2}^2+\frac{2}{p}\|Du_0\|_{L_p}^p\right]\right\}$$

olarak seçilirse $H(t) \geq 0$ olduğu gösterilmiş olur.

Böylece $[0,T_0/a]$ aralığında

$$\left[\Psi^{-\alpha}(t)\right]'' = -\alpha\Psi^{-\alpha-2}\left[\Psi\Psi'' - (1+\alpha)\Psi'^2\right] \leq 0 \qquad (4.26)$$

olur. Ayrıca, eğer τ , T_0 ve a sabitleri de

$$\Psi'(0) = 2(u_0,\, u_1) + 2\beta_0\tau > 0\,,\ \ (\Psi^{-\alpha})'(0) \leq 0 \quad \text{ve} \quad \Psi(0)/\alpha\Psi'(0) \leq T_0/a$$

olacak şekilde seçilirse, $\Psi^{-\alpha}$ fonksiyonu $[0,T_0/a)$ aralığında $T \leq \Psi(0)/\alpha\Psi'(0)$ noktasında bir sıfıra sahip olur. Dolayısıyla $t \to T^-$ iken $\Psi(t) \to \infty$ olur.

$\Psi(0) \leq (T_0/a)\alpha\Psi'(0)$ olduğundan

$$\|u_0\|_{L_2}^2 + \beta_0\tau^2 \leq 2\frac{T_0}{a}\left\{\alpha\left[(u_0,u_1)_{L_2} + \beta_0\tau\right] - \frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2\right\} \qquad (4.27)$$

elde edilir.

Burada; τ büyüklüğü, $\{...\}$ içindeki ifadeyi pozitif kılacak şekilde, yeterince büyük seçilecek olursa

$$T_0 \equiv \frac{a}{2}\frac{\|u_0\|_{L_2}^2 + \beta_0\tau^2}{\alpha\left[(u_0,u_1)_{L_2} + \beta_0\tau\right] - \frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2}$$

olur. T_0 için bir en uygun seçim, τ yu minimize ederek

$$\alpha^{-2}\beta_0^{-1}\left\{\left[\left(\frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2 - \alpha(u_0,u_1)_{L_2}\right)^2 + \alpha^2\beta_0\|u_0\|_{L_2}^2\right]^{1/2} + \left(\frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2 - \alpha(u_0,u_1)_{L_2}\right)\right\}$$

şeklinde belirlenmiş olur.

Böylece T anı için

$$0 \leq T \leq \alpha^{-2}\beta_0^{-1}\left\{\left[\left(\frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2 - \alpha(u_0,u_1)_{L_2}\right)^2 + \alpha^2\beta_0\|u_0\|_{L_2}^2\right]^{1/2} + \left(\frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2 - \alpha(u_0,u_1)_{L_2}\right)\right\}$$

olmak üzere, u çözümü sadece sınırlı $[0,T)$ aralığında vardır ve

$$\lim_{t\to T^-}\left\{\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + a\int_0^t \|u(s)\|_{L_2(\Omega)}^2 ds\right\} = +\infty$$

olur.

4.3 Lineer Olmayan Evolusyon Denkleminin Global Çözümlerinin Olmaması

Bu bölümde ise, sonlu bir $t \in [0,T)$ aralığında ele alınan, lineer dissipatif terim içeren ve t zamanına bağlı olmayan dördüncü mertebeden hiperbolik denklemin başlangıç-sınır koşulları ile birlikte global çözümlerinin olmaması ve çözümün patlaması konkavlık metodu kullanılarak incelenmiş olup, bir boyutlu halde sayısal yöntemle patlama zamanı bulunmuştur.

$\Omega \subset R^n$ de sınırlı ve yeterince düzgün Γ sınırına sahip bir bölge olmak üzere

$$u_{tt} + au_t + 2b\Delta^2 u + b\Delta(|\nabla u|^2 \Delta u) - b\sum_{i=1}^{n} \partial_i((\Delta u)^2 \partial_i u) = F(u),$$

$$(x,t) \in \Omega \times [0,T) \qquad (4.28)$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega \qquad (4.29)$$

$$u(x,t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \qquad (x,t) \in \Gamma \times [0,T) \qquad (4.30)$$

başlangıç-sınır değer problemi ele alınsın.

Burada $T > 0$ keyfi bir sayı, a ve b negatif olmayan sayılar, n dışnormal ve $\partial_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ dir.

$L_2(\Omega)$ uzayı $(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$ iççarpımı ile bir Hilbert uzayıdır.

$u \in \Omega \times [0,T) \to H = L_2(\Omega)$ tanımlanmış bir fonksiyon olsun. $L_2(\Omega)$ uzayında tanımlı olan $A(u) = 2b\Delta^2 u + b\Delta(|\nabla u|^2 \Delta u) - b\sum_{i=1}^{n} \partial_i((\Delta u)^2 \partial_i u)$ operatörünün u ve u_t ile iççarpımları sırasıyla

$$(A(u),\, u)_{L_2(\Omega)} = 2b\|\Delta u\|^2_{L_2(\Omega)} + 2b((\nabla u)^2, (\Delta u)^2)_{L_2(\Omega)} \qquad (4.31)$$

$$(A(u),\, u_t)_{L_2(\Omega)} = b\frac{d}{dt}\|\Delta u\|^2_{L_2(\Omega)} + b\frac{d}{dt}((\nabla u)^2, (\Delta u)^2)_{L_2(\Omega)} \qquad (4.32)$$

olur.

Bu takdirde *(4.28)-(4.30)* başlangıç-sınır değer probleminin global çözümlerinin olmaması hakkında aşağıdaki teorem ispat edilebilir:

Teorem 3.3.1 u *(4.28)-(4.30)* probleminin lokal klasik bir çözümü olsun. $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ başlangıç fonksiyonları

i) $(u_0,u_1)_{L_2(\Omega)} > 0$,

ii) $d_0 : \Im(u_0) > \frac{1}{2}\left[\|u_1\|^2_{L_2(\Omega)} + 2b\left(\|\Delta u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + ((\nabla u_0)^2,(\Delta u_0)^2)_{L_2(\Omega)}\right)\right]$,

iii) $\beta_0 \equiv 2\left\{\Im(u_0) - \frac{1}{2}\left[\|u_1\|^2_{L_2(\Omega)} + 2b\left(\|\Delta u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + ((\nabla u_0)^2,(\Delta u_0)^2)_{L_2(\Omega)}\right)\right]\right\} > 0.$

koşullarını sağlasın.

Bu durumda

$$0 < T \leqq \alpha^{-1}\beta_0^{-1}\left\{\left[\left(\frac{a}{2}\|u_0\|^2_{L_2} - \alpha(u_0,u_1)_{L_2}\right)^2 + \alpha^2\beta_0\|u_0\|^2_{L_2}\right]^{1/2} + \left(\frac{a}{2}\|u_0\|^2_{L_2} - \alpha(u_0,u_1)_{L_2}\right)\right\}$$

için

$$\lim_{t\to T^-}\left\{\|u\|^2_{L_2(\Omega)} + a\int_0^t \|u(s)\|^2_{L_2(\Omega)}ds\right\} = +\infty$$

olur.

İspat. a, T_0, β, τ sabitleri pozitif sayılar olmak üzere *(4.28)* in $u(t)$ çözümüne uygun $\Psi(t)$ fonksiyonu, $t \in [0,T_0]$ için

$$\Psi(t) = \|u(t)\|^2_{L_2(\Omega)} + a\int_0^t \|u(s)\|^2_{L_2(\Omega)}ds + a(T_0 - t)\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta(t+\tau)^2 \qquad (4.33)$$

şeklinde seçilmiş olsun. Ψ fonksiyonunun iki kez türevi alınarak

$$\Psi'(t) = 2(u,u_t)_{L_2(\Omega)} + a\|u\|^2_{L_2(\Omega)} - a\|u_0\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\beta(t+\tau)$$

$$= 2(u_t,u)_{L_2(\Omega)} + 2a\int_0^t (u(s),u_s(s))_{L_2(\Omega)}ds + 2\beta(t+\tau) \qquad (4.34)$$

$$\Psi''(t) = 2(u_{tt},u)_{L_2} + 2\|u_t\|^2_{L_2} + 2a(u,u_t)_{L_2} + 2\beta$$

$$= 2\|u_t\|^2_{L_2} + 2(u_{tt} + a u_t, u)_{L_2} + 2\beta \qquad (4.35)$$

elde edilir. *(4.31)* eşitliği de kullanılarak *(4.28)* denklemi u ile skaler çarpılırsa

$$(u_{tt}+au_t,u)_{L_2}=(F(u),u)_{L_2}-2b\|\Delta u\|_{L_2}^2-2b((\nabla u)^2,(\Delta u)^2)_{L_2} \qquad (4.36)$$

eşitliği elde edilir. Elde edilen eşitlik *(4.35)* ifadesinde yerine yazılırsa

$$\Psi''(t)=2\|u_t\|_{L_2}^2+2(u,F(u))_{L_2}-4b\|\Delta u\|_{L_2}^2-4b((\nabla u)^2,(\Delta u)^2)_{L_2}+2\beta \qquad (4.37)$$

olur. *(4.33)*, *(4.34)* ve *(4.37)* eşitlikleri $\Psi(t)\Psi''(t)-(1+\alpha)[\Psi'(t)]^2$ ifadesinde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılacak olursa;

$$\begin{aligned}\Psi\Psi''-(1+\alpha)\Psi'^2=&\left[\|u(t)\|_{L_2}^2+a\int_0^t\|u(s)\|_{L_2}^2\,ds+a(T_0-t)\|u_0\|_{L_2}^2+\beta(t+\tau)^2\right]\\&\left[\left(2\|u_t\|_{L_2}^2+2\beta\right)+\left(2(u,F(u))_{L_2}-4b\|\Delta u\|_{L_2}^2-4b((\nabla u)^2,(\Delta u)^2)_{L_2}\right)\right]\\&-4(1+\alpha)\left[(u_t,u)_{L_2}+a\int_0^t(u(s),u_s(s))_{L_2}\,ds+\beta(t+\tau)\right]^2\end{aligned} \qquad (4.38)$$

$$\begin{aligned}\Psi\Psi''-(1+\alpha)\Psi'^2\geq&\left[\|u\|_{L_2}^2+a\int_0^t\|u\|_{L_2}^2\,ds+\beta(t+\tau)^2\right]\left[2\|u_t\|_{L_2}^2+2\beta\right]\\&+2\Psi\left[(u,F(u))_{L_2}-2b\|\Delta u\|_{L_2}^2-2b((\nabla u)^2,(\Delta u)^2)_{L_2}\right]\\&-4(1+\alpha)\left[(u_t,u)_{L_2}+a\int_0^t(u,u_s)_{L_2}\,ds+\beta(t+\tau)\right]^2\end{aligned} \qquad (4.39)$$

ve

$$\begin{aligned}\Psi\Psi''-(1+\alpha)\Psi'^2\geq4(1+\alpha)&\left\{\left[\|u\|_{L_2}^2+a\int_0^t\|u\|_{L_2}^2\,ds+\beta(t+\tau)^2\right]\left[\|u_t\|_{L_2}^2+a\int_0^t\|u_s\|_{L_2}^2\,ds+\beta\right]\right.\\&\left.-\left[(u_t,u)_{L_2}+a\int_0^t(u,u_s)_{L_2}\,ds+\beta(t+\tau)\right]^2\right\}+2\Psi\left\{(u,F(u))_{L_2}-2b\|\Delta u\|_{L_2}^2\right.\\&\left.-2b((\nabla u)^2,(\Delta u)^2)_{L_2}-(2\alpha+1)\left[\|u_t\|_{L_2}^2+\beta\right]-2a(\alpha+1)\int_0^t\|u_s\|_{L_2}^2\,ds\right\}\end{aligned} \qquad (4.40)$$

eşitsizlikleri elde edilir. Son eşitsizlikteki $\{...\}$ içindeki ifade

$$\begin{aligned}S^2=&\left\{\left[\|u\|_{L_2}^2+a\int_0^t\|u\|_{L_2}^2\,ds+\beta(t+\tau)^2\right]\left[\|u_t\|_{L_2}^2+a\int_0^t\|u_s\|_{L_2}^2\,ds+\beta\right]\right.\\&\left.-\left[(u_t,u)_{L_2}+a\int_0^t(u,u_s)_{L_2}\,ds+\beta(t+\tau)\right]^2\right\}\end{aligned}$$

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

ile gösterilir ve S^2 ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa $S^2 \geq 0$ olduğu açıkça görülebilir.

Buradan

$$\Psi\Psi'' - (1+\alpha)\Psi'^2 \geq 2\Psi\Big\{(u, F(u))_{L_2} - 2b\|\Delta u\|^2_{L_2} - 2b((\nabla u)^2, (\Delta u)^2)_{L_2}$$

$$-(2\alpha+1)\Big[\|u_t\|^2_{L_2} + \beta\Big] - 2a(\alpha+1)\int_0^t \|u_s\|^2_{L_2} ds\Big\} \qquad (4.41)$$

şeklinde belirlenmiş olur. *(4.41)* eşitsizliğinde $\{...\}$ içindeki ifade

$$H(t) = (u, F(u))_{L_2} - 2b\|\Delta u\|^2_{L_2} - 2b((\nabla u)^2, (\Delta u)^2)_{L_2}$$

$$-(2\alpha+1)\Big[\|u_t\|^2_{L_2} + \beta\Big] - 2a(\alpha+1)\int_0^t \|u_s\|^2_{L_2} ds \qquad (4.42)$$

ile gösterilsin.

$\Psi(t)$ pozitif bir fonksiyon olduğundan

$$\Psi(t)\Psi''(t) - (1+\alpha)[\Psi'(t)]^2 \geq 2\Psi(t)H(t) \qquad (4.43)$$

eşitsizliğinin pozitif olduğunu göstermek için $H(t) \geq 0$ göstermek yeterlidir.

(4.28) denklemine ait $Eu(t)$ enerji integralini tanımlamak için denklem u_t ile skaler çarpılırsa

$$(u_{tt}, u_t)_{L_2} - (A(u), u_t)_{L_2} + a(u_t, u_t)_{L_2} = (F(u), u_t)_{L_2}$$

olur ve buradan *(4.32)* eşitliği de kullanılarak

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L_2} + b\|\Delta u\|^2_{L_2} + b((\nabla u)^2, (\Delta u)^2)_{L_2} - \Im(u)\right] = -a\|u_t\|^2_{L_2} \qquad (4.44)$$

elde edilir.

O halde *(4.5)* denklemi için enerji integrali

$$Eu(t) := \frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L_2} + b\|\Delta u\|^2_{L_2} + b((\nabla u)^2, (\Delta u)^2)_{L_2} - \Im(u) \qquad (4.45)$$

olarak tanımlanır.

(4.44) eşitliği enerji integrali cinsinden yazılıp integre edilirse

$$\frac{d}{dt}Eu(t) = -a\|u_t\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$Eu(t) - Eu(0) = -a\int_0^t \|u_s\|^2_{L_2(\Omega)} ds \qquad (4.46)$$

bulunur.

$H(t)$ yi alttan kısıtlamak amacıyla, *(4.42)* eşitliğinde $(u,F(u)) \geq 2(2\alpha+1)\mathfrak{I}(u)$ ifadesi kullanılarak

$$H(t) \geq 2(2\alpha+1)\mathfrak{I}(u) - 2b\|\Delta u\|_{L_2}^2 - 2b((\nabla u)^2, (\Delta u)^2)_{L_2}$$

$$-(2\alpha+1)\left[\|u_t\|_{L_2}^2 + \beta\right] - 2a(\alpha+1)\int_0^t \|u_s\|_{L_2}^2 ds$$

elde edilir. Elde edilen eşitsizlik enerji integrali türünden yeniden düzenlenirse

$$H(t) \geq 2(2\alpha+1)\left[-\frac{1}{2}\|u_t\|_{L_2}^2 - b\|\Delta u\|_{L_2}^2 - b((\nabla u)^2,(\Delta u)^2)_{L_2} + \mathfrak{I}(u)\right] + 4\alpha b\|\Delta u\|_{L_2}^2$$

$$+4\alpha b((\nabla u)^2,(\Delta u)^2)_{L_2} - (2\alpha+1)\beta - 2a(\alpha+1)\int_0^t \|u_s\|_{L_2}^2 ds \qquad (4.47)$$

ve

$$H(t) \geq -2(2\alpha+1)Eu(t) + 4\alpha b\|\Delta u\|_{L_2}^2 + 4\alpha b((\nabla u)^2,(\Delta u)^2)_{L_2}$$

$$-(2\alpha+1)\beta - 2a(\alpha+1)\int_0^t \|u_s\|_{L_2}^2 ds \qquad (4.48)$$

bulunur. *(4.46)* eşitliğinden

$$H(t) \geq -2(2\alpha+1)Eu(0) - (2\alpha+1)\beta \qquad (4.49)$$

ve

$$H(t) \geq 2(2\alpha+1)\left\{\mathfrak{I}(u_0) - \frac{1}{2}\left[\|u_1\|_{L_2}^2 + 2b\left(\|\Delta u_0\|_{L_2}^2 + ((\nabla u_0)^2,(\Delta u_0)^2)_{L_2}\right)\right] - \frac{\beta}{2}\right\} \qquad (4.50)$$

elde edilir. Teorem 4.3.1 in (*ii*) ve (*iii*) koşulundan

$$\beta \equiv \beta_0 \equiv 2\left\{\mathfrak{I}(u_0) - \frac{1}{2}\left[\|u_1\|_{L_2}^2 + 2b\left(\|\Delta u_0\|_{L_2}^2 + ((\nabla u_0)^2,(\Delta u_0)^2)_{L_2}\right)\right]\right\} \qquad (4.51)$$

olarak seçilirse $H(t) \geq 0$ olduğu gösterilmiş olur.

Böylece $[0,T_0]$ aralığında

$$\left[\Psi^{-\alpha}(t)\right]'' = -\alpha\Psi^{-\alpha-2}\left[\Psi\Psi'' - (1+\alpha)\Psi'^2\right] \leq 0 \qquad (4.52)$$

olur.

Ayrıca, eğer τ ve T_0 sabitleri de

$\Psi'(0) = 2(u_0, u_1) + 2\beta_0\tau > 0$, $(\Psi^{-\alpha})'(0) \leq 0$ ve $\Psi(0)/\alpha\Psi'(0) \leq T_0$

olacak şekilde seçilirse $\Psi^{-\alpha}$ fonksiyonu, $[0,T_0)$ aralığında $T \leq \Psi(0)/\alpha\Psi'(0)$ noktasında bir sıfıra sahip olur. Dolayısıyla $t \to T^-$ iken $\Psi(t) \to \infty$ olur.

Böylece $\Psi(0) \leq \alpha\Psi'(0)T_0$ olduğundan

$$\|u_0\|_{L_2}^2 + \beta_0\tau^2 \leq 2T_0\left\{\alpha\left[(u_0,u_1)_{L_2} + \beta_0\tau\right] - \frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2\right\} \tag{4.53}$$

elde edilir.

Burada; τ büyüklüğü, $\{...\}$ içindeki ifade pozitif olacak şekilde, yeterince büyük seçilirse

$$T_0 \equiv \frac{1}{2}\frac{\|u_0\|_{L_2}^2 + \beta_0\tau^2}{\alpha\left[(u_0,u_1)_{L_2} + \beta_0\tau\right] - \frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2} \tag{4.54}$$

olur.

T_0 için bir en uygun seçim, τ yu minimize ederek

$$\alpha^{-1}\beta_0^{-1}\left\{\left[\left(\frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2 - \alpha(u_0,u_1)_{L_2}\right)^2 + \alpha^2\beta_0\|u_0\|_{L_2}^2\right]^{1/2} + \left(\frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2 - \alpha(u_0,u_1)_{L_2}\right)\right\}$$

şeklinde belirlenmiş olur.

Böylece T anı için

$$0 \leq T \leq \alpha^{-1}\beta_0^{-1}\left\{\left[\left(\frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2 - \alpha(u_0,u_1)_{L_2}\right)^2 + \alpha^2\beta_0\|u_0\|_{L_2}^2\right]^{1/2} + \left(\frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2 - \alpha(u_0,u_1)_{L_2}\right)\right\}$$

kısıtlaması elde edilmiş olup

$$\lim_{t \to T^-}\left\{\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + a\int_0^t \|u(s)\|_{L_2(\Omega)}^2 ds\right\} = +\infty$$

olur.

4.4 *n=1* İçin Denklemin Çözümlerinin Patlama Zamanı ve Kararlılık Analizi

n=1 alındığında *(4.28)* denklemi dalga ve selin etkisinde bulunan bir dayanağın veya desteğin davranışını temsil eden bir model oluşturmaktadır. Bu denklemin periyodik çözümleri Sung Ming-Guang [31] tarafından incelenmiş olup, burada ise 4.3 teki başlangıç-sınır değer probleminin, $n=1$ için teorem 4.3.1 in koşullarının sağlandığı gösterilmiş ve sayısal bir yöntemle patlama zamanı bulunmuş ve grafiği verilmiştir.

(4.28) –(4.30) problemine örnek olarak, bir mekan boyutlu halde, $\Omega \subset R$ de $[0,\pi]$ aralığı ve $a,b=1$ olmak üzere

$$u_{tt}+au_t+2u_{xxxx}+(u_x^2u_{xx})_{xx}-(u_{xx}^2u_x)_x=100u^3, \quad (t,x)\in[0,T)\times[0,\pi] \quad (4.55)$$

$$u(0,x)=u_0(x), \quad u_t(0,x)=u_1(x), \quad x\in[0,\pi] \quad (4.56)$$

$$u(t,x)=0, \quad \frac{du}{dx}=0, \quad t\in[0,T), x=0,\ x=\pi \quad (4.57)$$

başlangıç–sınır değer problemi ele alınmış olsun.

Burada

$$F(u)=100u^3\ ,\ \mathcal{F}(u)=\frac{100}{4}u^4 \quad (4.58)$$

olduğundan $\alpha=\frac{1}{2}$ sayısı ve her $u\in R^1$ için

$$F(u).u\geq 2(2\alpha+1)\mathcal{F}(u)$$

eşitsizliği sağlanır.

Ayrıca $u_0(x)=\sin^2 x$, $u_1(x)=0.1$ olarak seçilecek olursa *(4.55)-(4.57)* başlangıç-sınır değer problemi için $u_0(x)$, $u_1(x)$ başlangıç fonksiyonları teorem 4.3.1 in hipotezindeki koşulları aşağıdaki şekilde sağlar:

i) $\int_0^\pi 0.1\sin^2 x dx=\frac{0.1}{2}\pi>0$,

$$ii)\ 25\int_0^{\pi}\mathcal{J}(u_0)\,dx \ge \frac{1}{2}\int_0^{\pi}|u_1|^2\,dx + \int_0^{\pi}|u_{0xx}|^2\,dx + \int_0^{\pi}|u_{0x}|^2|u_{0xx}|^2\,dx\,,$$

$$iii)\ 2\left\{\mathcal{J}(u_0) - \frac{1}{2}|u_1|^2 - \int_0^{\pi}|u_{0xx}|^2\,dx - \int_0^{\pi}|u_{0x}|^2|u_{0xx}|^2\,dx\right\} \cong 8.6618\pi > 0\,.$$

Burada, τ büyüklüğü için $\alpha\left[(u_0,u_1)_{L_2} + \beta_0\tau\right] - \frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2$ ifadesini pozitif yapan değer olarak $\tau > 0.037$ sayısı seçilecek olursa

$$T_0 \equiv \frac{1}{2}\,\frac{\|u_0\|_{L_2}^2 + \beta_0\tau^2}{\alpha\left[(u_0,u_1)_{L_2} + \beta_0\tau\right] - \frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2} \cong 3.6696 \qquad (4.59)$$

değeri elde edilir. T_0 için en uygun seçim, τ yu minimize ederek

$$\alpha^{-1}\beta_0^{-1}\left\{\left[\left(\frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2 - \alpha(u_0,u_1)_{L_2}\right)^2 + \alpha^2\beta_0\|u_0\|_{L_2}^2\right]^{1/2} + \left(\frac{a}{2}\|u_0\|_{L_2}^2 - \alpha(u_0,u_1)_{L_2}\right)\right\}$$

şeklinde hesaplanır.

Böylece T zamanı için $0 \le T \le 2.45346$ olmak üzere

$$\lim_{t\to T^-}\left\{\int_0^{\pi}|u|^2\,dx + \int_0^{t}\int_0^{\pi}|u(s)|^2\,dx\,ds\right\} = +\infty$$

olur.

Son olarak *(4.55)-(4.57)* probleminin çözümü için, sayısal yöntemlerden biri olan eksplisit sonlu farklar yöntemi kullanılarak patlama zamanı bulunmuş ve çözümlerin patlama zamanlarını hesaplamak için, aşağıdaki gibi bir sonlu fark şeması geliştirilmiştir.

4.4.1 Bir Eksplisit Şema

$u(x,t)$ fonksiyonunun zamana göre türevlerinin sonlu fark eşdeğerleri

$$u_{tj}^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}\,, \qquad u_{ttj}^n = \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{(\Delta t)^2}$$

ve x in sırasıyla dördüncü basamaktan türevlerine kadar sonlu fark eşdeğerleri

$$u_{xj}^n = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}\,, \qquad u_{xxj}^n = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

$$u^n_{xxxj} = \frac{u^n_{j+2} - 3u^n_{j+1} + 3u^n_j - u^n_{j-1}}{(\Delta x)^3}, \qquad u^n_{xxxxj} = \frac{u^n_{j+2} - 4u^n_{j+1} + 6u^n_j - 4u^n_{j-1} + u^n_{j-2}}{(\Delta x)^4}$$

olduğundan bir boyutlu halde *(4.55)* haline gelen lineer olmayan hiperbolik denklemin sonlu fark benzeri

$$u^{n+1}_j = 2u^n_j - u^{n-1}_j - (\Delta t)^2 \left\{ \frac{u^n_j - u^{n-1}_j}{\Delta t} - \left(\frac{u^n_{j+2} - 4u^n_{j+1} + 6u^n_j - 4u^n_{j-1} + u^n_{j-2}}{(\Delta x)^4} \right) \times \right.$$
$$\left[2 + \left(\frac{u^n_{j+1} - u^n_j}{\Delta x} \right)^2 \right] - \left(\frac{u^n_{j+1} - 2u^n_j + u^n_{j-1}}{(\Delta x)^2} \right) \left[\left(\frac{u^n_{j+1} - 2u^n_j + u^n_{j-1}}{(\Delta x)^2} \right)^2 + \right.$$
$$\left. \left. 4 \frac{u^n_{j+1} - u^n_j}{\Delta x} \times \frac{u^n_{j+2} - 3u^n_{j+1} + 3u^n_j - u^n_{j-1}}{(\Delta x)^3} \right] + 100(u^n_j)^3 \right\} \qquad (4.60)$$

$$j = 2, \ldots, N-2, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

olur.

(4.57) deki sınır koşullarının sonlu fark benzerleri,

$$u^{n+1}_0 = 0, \quad u^{n+1}_N = 0$$

$$u^{n+1}_1 = u^{n+1}_2, \quad u^{n+1}_{N-1} = u^{n+1}_N \qquad n = 1, 2, \ldots, \qquad (4.61)$$

ve *(4.56)* deki başlangıç koşullarının sonlu fark benzerleri de,

$$u^0_j = u_0(x_j) = \sin^2 j\Delta x, \qquad u_1(x_j) = 0.1 \qquad (4.62)$$

$$u^1_j = u^0_j + u_1(x_j)\Delta t = u^0_j + 0.1 \times \Delta t \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, N \qquad (4.63)$$

haline gelirler.

Bu şemaya bir adım ileri "Crude-Euler" yöntemi denir. Herhangi bir adımda bilinmeyen fonksiyonun değeri, bir adım önceki değerler yardımıyla, herhangi bir denklem sistemi çözmek zorunda kalınmadan hesaplanabildiğinden, eksplisit bir şemadır.

Bu sistemin sayısal kararlılığını Courant-Levi-Fredrichs ölçütüne göre araştırmak için Askar [3] de yapıldığı gibi, u^n_j üzerindeki

$$\varepsilon^n_j = \hat{\varepsilon}^n e^{iqx_j}$$

hatası gözönüne alınarak,

u_j^{n-1} üzerindeki ε_j^{n-1} ve u_j^{n+1} üzerindeki ε_j^{n+1} hataları hesaplanarak bu hatanın gelişimi incelenir. Böylece

$$u_j^{n-1}+\hat{\varepsilon}^{n-1}e^{iqx_j}, \qquad u_j^{n}+\hat{\varepsilon}^{n}e^{iqx_j}, \quad u_j^{n+1}+\hat{\varepsilon}^{n+1}e^{iqx_j} \tag{4.64}$$

ifadeleri (4.*60*) de yerlerine yazılacak olursa

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}^{n+1} &= (\Delta t-1)\,\hat{\varepsilon}^{n-1}+\Bigg[2-2\Delta t\Bigg(\frac{1}{2}-\frac{\Delta t}{(\Delta x)^4}(\cos 2q\Delta x-4\cos q\Delta x+3)(2+u_x^2)\\
&-2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^3}(\cos 2q\Delta x+i\sin 2q\Delta x-4\cos q\Delta x-2i\sin q\Delta x+3)(u_x u_{xx})+\\
&-2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{q\Delta x}{2}(3u_{xx}^2+4u_x u_{xxx})-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\cos q\Delta x+i\sin q\Delta x-1)\\
&\times(u_x u_{xxx}+2u_x u_{xxxx})-150\Delta t(u_j^n)^2\Bigg)\Bigg]\hat{\varepsilon}^n+O((\Delta t)^2(\hat{\varepsilon}^n)^2)\end{aligned} \tag{4.65}$$

elde edilir.

$\dfrac{\hat{\varepsilon}^{n+1}}{\hat{\varepsilon}^n}$ oranına g hata büyüme oranı denir ve $\dfrac{\hat{\varepsilon}^{n-1}}{\hat{\varepsilon}^n}=\dfrac{1}{g}$ olur. Kompleks üstel fonksiyon için Euler formüllerinin kullanılmasıyla

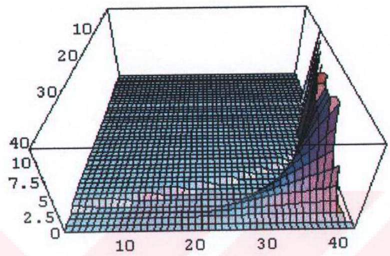
$$\begin{aligned}g &= (\Delta t-1)\frac{1}{g}+\Bigg[2-2\Delta t\Bigg(\frac{1}{2}-\frac{\Delta t}{(\Delta x)^4}(\cos 2q\Delta x-4\cos q\Delta x+3)(2+u_x^2)\\
&-2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^3}(\cos 2q\Delta x+i\sin 2q\Delta x-4\cos q\Delta x-2i\sin q\Delta x+3)(u_x u_{xx})+\\
&-2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\sin^2\frac{q\Delta x}{2}(3u_{xx}^2+4u_x u_{xxx})-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\cos q\Delta x+i\sin q\Delta x-1)\\
&\times(u_x u_{xxx}+2u_x u_{xxxx})-150\Delta t(u_j^n)^2\Bigg)\Bigg]\end{aligned} \tag{4.66}$$

bulunur. g'ye göre ikinci dereceden olan *(4.66)* denkleminin pozitif olan iki kökünden biri birden küçük, diğeri de mekan adımlarının zaman adımlarına göre çok küçük kalmaması halinde $\Delta t<(\Delta x)^4$ için $\Delta x=10^{-1}$ seçilirse

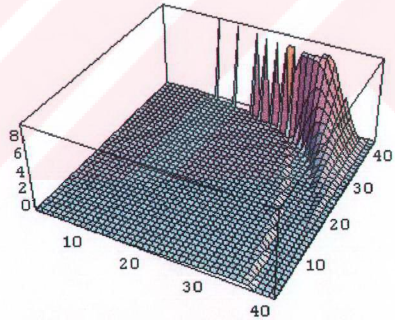
$$|g|<1+O(\Delta t) \tag{4.67}$$

olur ki sayısal şema Richtmyer ve Morton [38] ve Strikwerda [42] göre kararlıdır.

(4.55) denkleminin, sınır koşullarına uygun olarak seçilen başlangıç fonksiyonları ile birlikte, çözümlerinin patlama zamanına ait grafikleri aşağıda verilmiştir.



GRAFİK-1



GRAFİK-2

$N=40$, $\Delta t=.000001$, sağ taraf fonksiyonu u^3 ve başlangıç fonksiyonları da $u_0(x)=\sin^2 x$, $u_1(x)=0.1$ alınarak hesaplamalar yapılmıştır. 60 000. adıma kadar işlemlere devam edilmiş olup her 300 adımda bir veriler alınarak grafikler çizilmiştir.

BÖLÜM 5

DİSSİPATİF TERİM İÇEREN LİNEER OLMAYAN SOYUT DALGA DENKLEMLERİ

5.1 Soyut Dalga Denklemi

H bir reel Hilbert uzayı ve D, H nin bir lineer yoğun altuzayı ve $u(t)$, tanım bölgesi $[0,T)$ ve değer bölgesi D olan vektör değerli bir fonksiyon olsun.

Bu uzayda aşağıdaki Cauchy problemi gözönüne alınsın.

$$Pu_{tt} + Qu_t + Au = B(u,u_t) + F(t,u) \tag{5.1}$$

$$u(0) = u_0 \;, \quad u_t(0) = u_1 \tag{5.2}$$

Burada P pozitif belirli bir operatör, A ve Q negatif olmayan operatörler olmak üzere P,Q ve A operatörleri D üzerinde tanımlı simetrik lineer operatörler, $B(.,.)$ $D\times D$ üzerinde ve $F(.,.)$ de $[0,T)\times D$ üzerinde tanımlı lineer olmayan operatörlerdir. Sabit bir t için $F(t,u)$ operatörü lineer olmayan bir $G(t,u)$ fonksiyonelinin Frechét diferansiyeli olsun:

$$\frac{d}{d\tau}G(t,\, u(\tau)) = (F(t,u(\tau)),u_\tau(\tau)) \tag{5.3}$$

Ayrıca $G(t,u)$ fonksiyoneli t ye düzgün bağlı olsun. Böylece $u(t)\in C^1(0,T;D)$ için

$$\frac{d}{dt}G(t,\, u(t)) = (F(t,\, u(t)),\, u_t(t)) + G_t(t,\, u(t)) \tag{5.4}$$

eşitliği elde edilir.

$u(t)$, *(5.1)-(5.2)* başlangıç değer probleminin kuvvetli bir çözümü olsun, yani *(5.1)* deki tüm terimler $L_2(0,T;H)$ nin elemanı ve $u(.)$, $u_t(.)\in C(0,T;H)$ dir.

Teorem 5.1.1 *P, Q, A, B* ve *F* operatörleri yukarıdaki anlamda seçilmiş operatörler olmak üzere $u(t)$, *(5.1)* denkleminin kuvvetli bir çözümü olsun.

Bundan başka $\alpha > 0$ için

$$(F(t,u),u) \geq 2(2\alpha+1)G(t,u), \qquad \forall u \in D \tag{5.5}$$

$M_1 > 0$ için

$$G_t(t,u) \geq M_1 G(t,u), \qquad \forall u \in D \tag{5.6}$$

bir $d_1 \in (0,2\alpha]$, $d_2 \in (0, 2\alpha)$ ve $M_2 > 0$ için

$$|(B(u,v),u)| \leq d_1(Au,u) + d_2(Pv,v) + M_2(Pu,u), \quad \forall u,v \in D \tag{5.7}$$

ve

$$|(B(u,v),v)| \leq \frac{1}{2}M_1\left[(Au,u)+(Pv,v)\right], \qquad \forall u,v \in D \tag{5.8}$$

eşitsizlikleri sağlansın.

Başlangıç elemanları da aşağıdaki koşulları gerçeklesin:

i) $(Pu_0,u_0)+(Qu_0,u_0) > 0$,

ii) $2(Pu_1,u_0)+2(Qu_0,u_0) > -\gamma_2\alpha_0^{-1}\left[(Pu_0,u_0)+(Qu_0,u_0)\right]$,

iii) $-\frac{1}{2}(Pu_1,u_1)-\frac{1}{2}(Au_0,u_0)+G(0,u(0)) \geq 0$.

Bu durumda

$$\alpha_0 = \alpha - \frac{d_2}{2}, \quad \gamma_{1,2} = -(1+\alpha_0) \mp \sqrt{(1+\alpha_0)^2+\alpha_0(2M_2+1+\alpha_0)}$$

olmak üzere

$$t_1 \leq \frac{1}{2\sqrt{(1+\alpha_0)^2+\alpha_0(2M_2+1+\alpha_0)}} \times$$

$$\ln\frac{\gamma_1\left[(Pu_0,u_0)+(Qu_0,u_0)\right]+\alpha_0\left[(Pu_1,u_0)+(Qu_1,u_0)\right]}{\gamma_2\left[(Pu_0,u_0)+(Qu_0,u_0)\right]+\alpha_0\left[(Pu_1,u_0)+(Qu_1,u_0)\right]}$$

için

$$\lim_{t\to t_1}\left\{(Pu(t),u(t))+\int_0^t (Qu(s),u(s))ds\right\} = \infty$$

olur. Varga Kalantarov[17].

5.2 Dissipatif Terim İçeren Kuazilineer Dalga Denklemi

Bu kısımda, $|u|^{p-2}u+|u|^{l-2}u$ biçiminde bir kaynak terimi bulunduran, lineer olmayan bir dalga denkleminin global çözümlerinin olmaması K.L. Lemması kullanılarak ispatlanmıştır.

$\Omega\subset R^n$ de sınırlı ve yeterince düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip bir bölge ve $p,l>2$ olmak üzere

$$u_{tt}-\nabla\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)+au_t=|u|^{p-2}u+|u|^{l-2}u,\quad (x,t)\in\Omega\times[0,T) \qquad (5.9)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\qquad u_t(x,0)=u_1(x),\qquad x\in\Omega \qquad (5.10)$$

$$u(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T) \qquad (5.11)$$

başlangıç- sınır değer problemi gözönüne alınsın.

$u(t)$ *(5.9)* denkleminin bir çözümü olsun, o zaman

$v(t)=e^{-mt}u(t)$ fonksiyonu

$$v_{tt}+(2m+a)v_t+(m^2+am)v-e^{(p-2)mt}\nabla(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)$$
$$=e^{-mt}\left(e^{(p-1)mt}|v|^{p-2}v+e^{(l-1)mt}|v|^{l-2}v\right)$$

denklemini gerçekler.

Bu takdirde *(5.9)-(5.11)* başlangıç-sınır değer problemi

$$v_{tt}+(2m+a)v_t+(m^2+am)v-e^{(p-2)mt}\nabla(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)$$
$$=e^{-mt}\left(e^{(p-1)mt}|v|^{p-2}v+e^{(l-1)mt}|v|^{l-2}v\right),\qquad (x,t)\in\Omega\times[0,T) \qquad (5.12)$$

$$v(x,0)=v_0(x),\qquad v_t(x,0)=v_1(x),\qquad x\in\Omega \qquad (5.13)$$

$$v(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\partial\Omega\times[0,T) \qquad (5.14)$$

(5.12)-(5.14) başlangıç-sınır değer problemine dönüşmüş olur. (5.12) denkleminden de açıkça görüldüğü üzere, denklemin sol tarafındaki en son terim dejenere edilmiş Laplace operatörü ile t ye bağlı üstel bir fonksiyonun çarpımını ve sağ tarafındaki terim ise (t,v) ikilisine bağlı lineer olmayan bir $F(t,v)$ fonksiyonunu içermektedir.

(5.9) denklemindeki

$$F(u)=|u|^{p-2}u+|u|^{l-2}u$$

fonksiyonu $v(t)=e^{-mt}u(t)$ dönüşümü ile

$$F(e^{mt}v)=e^{(p-1)mt}|v|^{p-2}v+e^{(l-1)mt}|v|^{l-2}v$$

halini alır.

(5.12) denkleminin sağ tarafındaki ifade ise $F(e^{mt}v)$ türünden

$$\widetilde{F}(t,v)=e^{-mt}F(e^{mt}v) \qquad (5.15)$$

şeklinde yazılabilir.

(5.5) eşitsizliği $\widetilde{F}$ ve $\widetilde{G}$ cinsinden ifade edilmek istenirse;

$$\left(\widetilde{F}(t,v),v\right)=\left(e^{-mt}F(e^{mt}v),v\right)=e^{-2mt}\left(F(e^{mt}v),\,e^{mt}v\right)\geq e^{-2mt}2(2\alpha+1)G(e^{mt}v)$$

şeklinde bulunur. Yani

$$\widetilde{G}(t,v)=e^{-2mt}G(e^{mt}v) \qquad (5.16)$$

olmak üzere

$$\left(\widetilde{F}(t,v),v\right)\geq 2(2\alpha+1)\widetilde{G}(t,v) \qquad (5.17)$$

eşitsizliği elde edilir ki bu da *(5.5)* eşitsizliğinin hâlâ korunduğunu göstermektedir.

$G(t,u)$ fonksiyoneli için geçerli olan *(5.3)* ve *(5.4)* eşitlikleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}\widetilde{G}(t,v(\tau))=\frac{\partial}{\partial\tau}\left(e^{-2mt}G(e^{mt}v(\tau))\right)&=e^{-2mt}\left(F(e^{mt}v(\tau)),\,e^{mt}v_\tau\right)\\&=e^{-mt}\left(F(e^{mt}v(\tau)),\,v_\tau\right)\\&=\left(e^{-mt}F(e^{mt}v(\tau)),\,v_\tau\right)\\&=\left(\widetilde{F}(t,v),\,v_\tau\right)\end{aligned} \qquad (5.18)$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\widetilde{G}(t,v(t))&=\frac{d}{dt}\left(e^{-2mt}G(e^{mt}v)\right)=-2me^{-2mt}G(e^{mt}v)+e^{-2mt}G_t(e^{mt}v)\\&=-2me^{-2mt}G(e^{mt}v)+e^{-2mt}\left(F(e^{mt}v),(me^{mt}v+e^{mt}v_t)\right)\\&=-2me^{-2mt}G(e^{mt}v)+me^{-mt}\left(F(e^{mt}v),v\right)+e^{-mt}\left(F(e^{mt}v),v_t\right)\\&=\widetilde{G}_t(t,v)+\left(\widetilde{F}(t,v),v_t\right)\end{aligned} \qquad (5.19)$$

biçimine gelir.

(5.6) eşitsizliği de

$$\widetilde{G}_t(t,v(\tau)) = -2me^{-2mt}G(e^{mt}v) + e^{-2mt}G_t(e^{mt}v)$$

$$= -2me^{-2mt}G(e^{mt}v) + e^{-2mt}\left(F(e^{mt}v),\ me^{mt}v\right)$$

$$= -2me^{-2mt}G(e^{mt}v) + m\left(e^{-mt}F(e^{mt}v), v\right)$$

$$\geq -2m\widetilde{G}(t,v) + m2(2\alpha+1)\widetilde{G}(t,v)$$

$$\widetilde{G}_t(t,v(\tau)) \geq 4\alpha m\widetilde{G}(t,v) \qquad (5.20)$$

şeklinde belirlenmiş olur. Burada $m \geq \dfrac{M_1}{4\alpha}$ alınırsa *(5.6)* koşulunun sağlandığı görülür.

Bu halde *(5.12)-(5.14)* başlangıç-sınır değer probleminin global çözümlerinin olmaması ile ilgili aşağıdaki teorem ispat edilebilir:

Teorem 5.2.1 $u(t)$ fonksiyonu *(5.12)* denkleminin kuvvetli lokal bir çözümü olsun. Aşağıdaki koşullar sağlansın:

i) $\|v_0\|^2 + (2m+a)\|v_0\|^2 \geq 0,$

ii) $-\dfrac{1}{2}\left[\|v_1\|^2 + \left(m^2+am\right)\|v_0\|^2 + \dfrac{2}{p}\displaystyle\int_\Omega |\nabla u_0|^p\,dx\right] + \dfrac{1}{p}\displaystyle\int_\Omega |v_0|^p\,dx + \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_\Omega |v_0|^l\,dx \geq 0,$

iii) $2(v_0,v_1) + (2m+a)\|v_0\|^2 \geq -\gamma_2\alpha^{-1}\left[\|v_0\|^2 + (2m+a)\|v_0\|^2\right],$

iv) $m \geq \max\left\{0,\ -a,\ -\dfrac{a}{2(\alpha+1)}\right\}, p \geq \max\{2, -4\alpha+2,\ 4\alpha+2\},\ l > \max\{2,p\}.$

Bu durumda

$$\gamma_{1,2} = -(1+\alpha) \mp \sqrt{(1+\alpha)^2 + \alpha(2+\alpha)}$$

olmak üzere

$$t_1 \leq \frac{1}{2\sqrt{(1+\alpha)^2+\alpha(2+\alpha)}} \times \ln\frac{\gamma_1\left[\|v_0\|^2 + (2m+a)\|v_0\|^2\right] + \alpha\left[(v_1,v_0) + (2m+a)\|v_0\|^2\right]}{\gamma_2\left[\|v_0\|^2 + (2m+a)\|v_0\|^2\right] + \alpha\left[(v_1,v_0) + (2m+a)\|v_0\|^2\right]}$$

için

$$\lim_{t\to t_1}\left\{\|v(t)\|^2 + (2m+a)\int_0^t \|v(s)\|^2\,ds\right\} = \infty$$

olur.

İspat. $\hat{\Psi}(t)$ fonksiyonu

$$\hat{\Psi}(t) = \|v(t)\|^2 + (2m+a)\int_0^t \| v(s)\|^2 \, ds + (2m+a)\| v_0\|^2 \tag{5.21}$$

şeklinde tanımlansın. $\hat{\Psi}$ fonksiyonunun iki kez türevi alınarak

$$\hat{\Psi}'(t) = 2(v, v_t) + (2m+a)\| v(t)\|^2 \tag{5.22}$$

$$= 2(v_t, v) + 2(2m+a)\int_0^t (v(s), v_s(s))\, ds + (2m+a)\|v_0\|^2$$

ve

$$\hat{\Psi}''(t) = 2\|v_t\|^2 + 2(v, v_{tt}) + 2(2m+a)(v, v_t) \tag{5.23}$$

$$= 2\|v_t\|^2 + 2(v_{tt} + (2m+a)v_t, v)$$

elde edilir. *(5.12)* denklemi v ile skaler çarpılırsa

$$(v_{tt} + (2m+a)v_t, v) = -(m^2+am)\|v\|^2 + e^{(p-2)mt}(\nabla(|\nabla v|^{p-2}\nabla v), v)$$

$$+ e^{(p-2)mt}(|v|^{p-2}v, v) + e^{(l-2)mt}(|v|^{l-2}v, v) \tag{5.24}$$

eşitliği elde edilir. Green-Gauss teoremi ve sınır koşulu kullanılarak

$$\int_\Omega \nabla\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) v\, dx = \int_{\partial\Omega} v\, |\nabla v|^{p-2}\nabla v\, dx - \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}(\nabla v)^2\, dx$$

$$= -\int_\Omega |\nabla v(x,t)|^p\, dx$$

olur ve *(5.24)* ifadesinde yerine yazılırsa

$$(v_{tt} + (2m+a)v_t, v) = -(m^2+am)\|v\|^2 - e^{(p-2)mt}\int_\Omega |\nabla v(x,t)|^p\, dx$$

$$+ e^{(p-2)mt}\int_\Omega |v|^p\, dx + e^{(l-2)mt}\int_\Omega |v|^l\, dx \tag{5.25}$$

eşitliği elde olunur. Elde edilen *(5.25)* ifadesi *(5.23)* eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\hat{\Psi}''(t) = 2\|v_t\|^2 - 2(m^2+am)\|v\|^2 - 2e^{(p-2)mt}\int_\Omega |\nabla v|^p\, dx$$

$$+ 2\left[e^{(p-2)mt}\int_\Omega |v|^p\, dx + e^{(l-2)mt}\int_\Omega |v|^l\, dx\right] \tag{5.26}$$

bulunur.

$\hat{\Psi}''(t)$ yi alttan kısıtlamak amacıyla $(\widetilde{F}(t,v), v) \geq 2(2\alpha+1)\widetilde{G}(t,v)$ eşitsizliği ve

$$\widetilde{G}(t,v)=e^{-2mt}\left[\frac{e^{pmt}}{p}\int_{\Omega}|v|^{p}dx+\frac{e^{lmt}}{l}\int_{\Omega}|v|^{l}dx\right] \tag{5.27}$$

kullanılarak

$$\hat{\Psi}''(t)\geq 2\|v_t\|^2-2(m^2+am)\|v\|^2-2e^{(p-2)mt}\int_{\Omega}|\nabla v|^{p}dx$$

$$+4(2\alpha+1)e^{-2mt}\left[\frac{e^{pmt}}{p}\int_{\Omega}|v|^{p}dx+\frac{e^{lmt}}{l}\int_{\Omega}|v|^{l}dx\right] \tag{5.28}$$

elde edilir. *(5.12)* denklemi v_t ile skaler çarpılırsa

$$(v_{tt},v_t)+(2m+a)(v_t,v_t)+(m^2+am)(v,v_t)-e^{(p-2)mt}(\nabla(|\nabla v|^{p-2}\nabla v),v_t)$$

$$=e^{-mt}\left(e^{(p-1)mt}(|v|^{p-2}v,v_t)+e^{(l-1)mt}(|v|^{l-2}v,v_t)\right) \tag{5.29}$$

ve eşitliğin sol tarafındaki son terime Green-Gauss teoremi uygulanırsa

$$\int_{\Omega}\nabla\left(|\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)v_t\,dx=\int_{\partial\Omega}v_t\,|\nabla v|^{p-2}\nabla v\,dx-\int_{\Omega}|\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla v_t\,dx$$

$$=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{p}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}dx\right) \tag{5.30}$$

olur ve (5.19) eşitliği kullanılarak

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_t\|^2+(2m+a)\|v_t\|^2+(\frac{m^2+am}{2})\frac{d}{dt}\|v\|^2+\frac{d}{dt}\left[\frac{e^{(p-2)mt}}{p}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}dx\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\left[\frac{e^{(p-2)mt}}{p}\int_{\Omega}|v|^{p}dx+\frac{e^{(l-2)mt}}{l}\int_{\Omega}|v|^{l}dx\right]$$

$$-\left[(m-\frac{2m}{p})e^{(p-2)mt}\int_{\Omega}|v|^{p}dx+(m-\frac{2m}{l})e^{(l-2)mt}\int_{\Omega}|v|^{l}dx\right] \tag{5.31}$$

ve

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|v_t\|^2+(\frac{m^2+am}{2})\|v\|^2+\frac{e^{(p-2)mt}}{p}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}dx-\left(\frac{e^{(p-2)mt}}{p}\int_{\Omega}|v|^{p}dx+\frac{e^{(l-2)mt}}{l}\int_{\Omega}|v|^{l}dx\right)\right]$$

$$=-(2m+a)\|v_t\|^2-\left[\frac{(p-2)m}{p}e^{(p-2)mt}\int_{\Omega}|v|^{p}dx+\frac{(l-2)m}{l}e^{(l-2)mt}\int_{\Omega}|v|^{l}dx\right]$$

$$-\frac{(p-2)m}{p}e^{(p-2)mt}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}dx \tag{5.32}$$

elde edilir. Bu halde *(5.12)* denklemi için enerji integrali

$$E(t):=-\frac{1}{2}\|v_t\|^2-(\frac{m^2+am}{2})\|v\|^2-\frac{e^{(p-2)mt}}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx$$

$$+\frac{e^{(p-2)mt}}{p}\int_\Omega|v|^p\,dx+\frac{e^{(l-2)mt}}{l}\int_\Omega|v|^l\,dx \tag{5.33}$$

olarak tanımlanır. (5.20) eşitsizliği de kullanılarak *(5.32)* ifadesi enerji integrali cinsinden yeniden yazılırsa

$$\frac{d}{dt}(-E(t))\le-(2m+a)\|v_t\|^2-4\alpha m\left[\frac{e^{(p-2)mt}}{p}\int_\Omega|v|^p\,dx+\frac{e^{(l-2)mt}}{l}\int_\Omega|v|^l\,dx\right]$$

$$-\frac{(p-2)m}{p}e^{(p-2)mt}\int_\Omega|\nabla u|^p\,dx \tag{5.34}$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\frac{d}{dt}E(t)\ge4\alpha mE(t)+(2m\alpha+2m+a)\|v_t\|^2+2\alpha m(m^2+am)\|v\|^2$$

$$+(\frac{4\alpha m+(p-2)m}{p})e^{(p-2)mt}\int_\Omega|\nabla v|^p dx \tag{5.35}$$

elde edilir. Teorem 5.2.1 in (iv) ve (v) koşulundan

$$\frac{d}{dt}E(t)\ge4\alpha mE(t)+(2m+a)\|v_t\|^2 \tag{5.36}$$

olur ve integre edilerek

$$E(t)\ge E(0)\,e^{4\alpha mt}+(2m+a)\int_0^t\|v_s\|^2ds \tag{5.37}$$

bulunur.

Enerji integralinin başlangıçtaki değeri daha önceki çalışmalarda negatif olmasına karşın burada teorem *5.2.1* in *(ii)* koşulundan pozitiftir. *(5.37)* eşitsizliğinden

$$E(t)\ge(2m+a)\int_0^t\|v_s\|^2ds \tag{5.38}$$

şeklini alır.

(5.28) ifadesi enerji integrali cinsinden düzenlenirse

$$\hat{\Psi}''(t)\ge4(2\alpha+1)E(t)+4(\alpha+1)\|v_t\|^2+4\alpha(m^2+am)\|v\|^2$$

$$+(\frac{4}{p}(2\alpha+1)-2)\,e^{(p-2)mt}\int_\Omega|\nabla v|^p\,dx \tag{5.39}$$

elde edilir. Burada *(5.38)* eşitsizliği de kullanılarak

$$\hat{\Psi}''(t) \geq 4(2\alpha+1)(2m+a)\int_o^t \| u_s \|^2 ds + 4(\alpha+1)\|v_t\|^2 \qquad (5.40)$$

$\hat{\Psi}''(t)$ için bir kısıtlama elde edilmiş olur.

(5.40) eşitsizliğinden uygun pozitif terimler atılırsa $\hat{\Psi}''(t)$ fonksiyonu

$$\hat{\Psi}''(t) \geq 4(\alpha+1)\left[\| v_t \|^2 + (2m+a)\int_o^t \|v_s\|^2 ds\right] \qquad (5.41)$$

şeklinde daha küçük bir ifade ile kısıtlanmış olur. $\hat{\Psi}(t)$ fonksiyonu pozitif olduğundan sağ taraf daha da küçültülerek

$$\hat{\Psi}''(t) \geq 4(\alpha+1)\left[\| v_t \|^2 + (2m+a)\int_o^t \|v_s\|^2 ds\right] - \hat{\Psi}(t) \qquad (5.42)$$

eşitsizliği yazılabilir.

(5.21), (5.22) ve *(5.42)* ifadeleri

$$X(t) = \hat{\Psi}''(t)\hat{\Psi}(t) - (1+\alpha)\left[\hat{\Psi}'(t)\right]^2 \qquad (5.43)$$

eşitliğinin bir alt sınırını elde etmek üzere yerlerine yazılırsa

$$X(t) \geq 4(\alpha+1)\left[\| v_t \|^2 + (2m+a)\int_o^t \|v_s\|^2 ds\right]\left[\| v \|^2 + (2m+a)\int_0^t \|v(s)\|^2 ds + (2m+a)\| v_0 \|^2\right]$$

$$-\left[\Psi(t)\right]^2 - 4(1+\alpha)\left[(v_t, v) + (2m+a)\int_0^t (v, v_s) ds + \frac{1}{2}(2m+a)\| v_0 \|^2\right]^2 \qquad (5.44)$$

$$X(t) \geq 4(\alpha+1)\left\{\left[\| v_t \|^2 + (2m+a)\int_o^t \|v_s\|^2 ds\right]\left[\| v \|^2 + (2m+a)\int_0^t \|v(s)\|^2 ds + (2m+a)\| v_0 \|^2\right]\right.$$

$$\left. - \left[(v_t, v) + (2m+a)\int_0^t (v, v_s) ds + \frac{1}{2}(2m+a)\| v_0 \|^2\right]^2\right\} - \Psi^2 \qquad (5.45)$$

ve

$$X(t) \geq 4(\alpha+1)\left\{\left[\| v_t \|^2 + (2m+a)\int_o^t \|v_s\|^2 ds\right]\left[\| v \|^2 + (2m+a)\int_0^t \|v(s)\|^2 ds\right]\right.$$

$$\left. - \left[(v_t, v) + (2m+a)\int_0^t (v, v_s) ds\right]^2\right\} + 4(1+\alpha)\left[\| v_t \|^2 + (2m+a)\int_o^t \|v_s\|^2 ds\right] \times$$

$$\left[(2m+a)\|v_0\|^2\right]-4(1+\alpha)\left[(v_t,v)+(2m+a)\int_0^t(v,v_s)\,ds\right]\left[(2m+a)\|v_0\|^2\right]$$

$$-(1+\alpha)\left[(2m+a)\|v_0\|^2\right]^2-\Psi^2 \qquad (5.46)$$

$$X(t)\geq 4(\alpha+1)\left\{\left[\|v_t\|^2+(2m+a)\int_o^t\|v_s\|^2ds\right]\left[\|v\|^2+(2m+a)\int_0^t\|v(s)\|^2\,ds\right]\right.$$

$$\left.-\left[(v_t,v)+(2m+a)\int_0^t(v,\,v_s)\,ds\right]^2\right\}-4(1+\alpha)\left[(v_t,v)+(2m+a)\int_0^t(v,v_s)\,ds\right]\times$$

$$\left[(2m+a)\|v_0\|^2\right]-(1+\alpha)\left[(2m+a)\|v_0\|^2\right]^2-\Psi^2 \qquad (5.47)$$

eşitsizlikleri elde edilir. *(5.47)* eşitsizliğinde $\{...\}$ içindeki ifade

$$S^2=\left\{\left[\|v_t\|^2+(2m+a)\int_o^t\|v_s\|^2ds\right]\left[\|v\|^2+(2m+a)\int_0^t\|v(s)\|^2\,ds\right]\right.$$

$$\left.-\left[(v_t,v)+(2m+a)\int_0^t(v,\,v_s)\,ds\right]^2\right\} \qquad (5.48)$$

ile gösterilir ve S^2 ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa, $S^2\geq 0$ olduğu açıkça görülebilir. Buradan

$$X(t)\geq -2(1+\alpha)\left[2(v_t,v)+2(2m+a)\int_0^t(v,v_s)\,ds+(2m+a)\|u_0\|^2\right]$$

$$\left[(2m+a)\|v_0\|^2\right]-(1+\alpha)\left[(2m+a)\|v_0\|^2\right]^2-\Psi^2 \qquad (5.49)$$

$$X(t)\geq -2(1+\alpha)\left[\|v(t)\|^2+(2m+a)\int_0^t\|v(s)\|^2\,ds+(2m+a)\|v_0\|^2\right]\Psi'(t)$$

$$-(1+\alpha)\left[\|v(t)\|^2+(2m+a)\int_0^t\|v(s)\|^2\,ds+(2m+a)\|v_0\|^2\right]^2-\Psi^2 \qquad (5.50)$$

ve son olarak

$$\hat{\Psi}''(t)\hat{\Psi}(t)-(1+\alpha)\left[\hat{\Psi}'(t)\right]^2\geq -2(1+\alpha)\hat{\Psi}'(t)\hat{\Psi}(t)-(2+\alpha)\left[\hat{\Psi}(t)\right]^2 \qquad (5.51)$$

eşitsizliği elde edilir.

Böylece $C_1=1+\alpha$, $C_2=2+\alpha$ olmak üzere $\hat{\Psi}(t)$ fonksiyonunun

$$\hat{\Psi}''(t)\hat{\Psi}(t)-(1+\alpha)\left[\hat{\Psi}'(t)\right]^2 \geq -2C_1\Psi'(t)\hat{\Psi}(t)-C_2\left[\hat{\Psi}(t)\right]^2$$

eşitsizliğini sağladığı gösterilmiş olur.

K.L. Lemmasının tüm koşulları sağlandığından

$$t_1 \leq \frac{1}{2\sqrt{(1+\alpha)^2+\alpha(2+\alpha)}}\times$$
$$\ln\frac{\gamma_1\left[\|v_0\|^2+(2m+a)\|v_0\|^2\right]+\alpha\left[(v_1,v_0)+(2m+a)\|v_0\|^2\right]}{\gamma_2\left[\|v_0\|^2+(2m+a)\|v_0\|^2\right]+\alpha\left[(v_1,v_0)+(2m+a)\|v_0\|^2\right]}$$

için

$$\lim_{t\to t_1}\left\{\|v(t)\|^2+(2m+a)\int_0^t\|v(s)\|^2\,ds\right\}=\infty$$

olur.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu tezde; sonlu bir $[0,T)$ aralığında lineer olmayan hiperbolik denklemler ile verilmiş, denklemin kendisinde veya sınır koşullarında dissipatif terim bulunduran, başlangıç-sınır değer problemlerinin global çözümlerinin olmaması ele alınmıştır.

Bu problemlerin hepsinde global çözümlerin yokluğu, enerji integrali yardımıyla Levine veya Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmaları kullanılarak, ispatlanmıştır.

Varılan son nokta; lineer dissipatif terim içeren kuazilineer dalga denkleminin katsayılarındaki operatörlerin zamana bağlı olması durumunda, Dirichlet sınır koşulu ile verilmiş başlangıç-sınır değer probleminin, global çözümlerinin yokluğunun incelenmesi olmuştur.

Daha sonra, lineer olmayan dissipatif terim içeren, lineer olmayan evolusyon denklemleri için, katsayılar zamana bağlı iken uygun başlangıç ve çeşitli sınır koşulları ile birlikte, global çözümlerinin olmaması incelenebilir.

Lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem sistemiyle verilmiş, bir sınıf başlangıç-sınır değer problemlerinin global çözümlerinin olmaması da araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Adams R.A., Sobolev Spaces, Academics Press , New york, 1978.

[2] Aliyev F., Lineer Olmayan Bazı Hiperbolik Denklemlerin Global Çözümlerinin Olmaması, X. Dif. Denk. Semp., İst., 1996.

[3] Aşkar A., Çakmak A.S., Expilicit Integration Method for the TimeDependent Schrodinger Equation for Collision Problems, Journal of Chemical Physics 68(6), 1978, 2794-2798.

[4] Aydın G., Kuazilineer Hiperbolik Denklem için Bir Başlangıç-Sınır Değer Probleminin Global Çözümünün Olmaması Hakkında, V. Ulusal Mat. Semp. Bildiri Kitabı, 1993, Magosa, 15-25.

[5] Aydın G., Seçim G., Nonexistence of Global Solutions of a Quasilinear Hyperbolic Equation with Dynamic Boundary Condition, M.S.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Dergisi, (basımda).

[6] Ball M., Remarks on Blow-up and Nonexitence Theorems for Nonlinear Evolution Equations, Quart. J. Math. Oxford, 28(2), 1977, 473-486.

[7] Bayrak V., Can M., Global Nonexistence of Solutions of the Quasilinear Hyperbolic Equation of the Vibrations of a Riser, Math. And Computational App., 2(1), 1997, 45-52.

[8] Bayrak V., Can M., Aliyev F., Nonexistence of Global Solutions of a Quasilinear Hyperbolic Equation, Math. Inequalities and App., 1(3), 1998, 367-374.

[9] Bayrak V., Can M., Nonexistence of Global Solutions of a Quasilinear Bi-Hyperbolic Equation with Dynamical Boundary Conditions, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 3, 1999, 1-10.

[10] Can M., Park S.R., Aliyev F., Nonexistence of Global Solutions of some Quasilinear Hyperbolic Equation, Journal of Math. Analysis and Applications, 213, 1997, 540-553.

[11] Friedman A., Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[12] Fujita H., On the Blowing up of Solutions of the Cauchy Problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Faculty Sci, Univ., Tokyo, 13, 1969, 109-124.

[13] Ganzha V.G., Vorozhtsov E.V., Numerical Solutions for Partial Differential Equations, Crc Press, New York, 1996.

[14] Glassey R.T., Blow up Theorems of Nonlinear Wave Equations, Math. Z. 132, 1973, 183-203.

[15] Kalantarov V.K., Ladyzhenskaya O.A., The Occurence of Collapse for Quasilinear Equations of Parabolic and Hyperbolic Type, J. Soviet Math., 10, 1978, 53-70, Translated from Zap. Nauch. Sem. LOMI, 69, 1977, 77-102.

[16] Kalantarov V.K., Collapse of the Solutions of Parabolic and Hyperbolic Equations with Nonlinear Boundary Conditions, J. Soviet Math., 27, 1984, 2601-2606, Translated from Zap. Nauch. Sem. LOMI, 127, 1983, 75-83.

[17] Kalantarov V.K., On the Global Behavior of Solutions of the Cauchy Problem for Second Order Differential-Operatör Equations, Izv. A.N., Az.SSR, Ser. Fiz. Tech. Mat. Nauk., 7, 1987, 36-43.

[18] Kalantarov V.K., Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations, Turbulence Modeling and Vortex Dynamics, Proceedings Ist., 1996, Springer-Verlag, 169-181.

[19] Kaplan S., On the Growth of Solutions of Quasilinear Parabolic Equations, Comm. Pure Appl. Math., 16, 1963, 305-330.

[20] Keller J.B., On Solutions of Nonlinear Wave Equations, Comm. Pure Appl. Math., 10, 1957, 523-530.

[21] Kırane M., Nonexistence of Global Solutions of Some Quasilinear Hyperbolic Equation with Dynamic Boundary Condition, Math. Nachr., 176, 1995, 139-147.

[22] Knops R.J., Levine H.A., Payne L.E., Nonexistence, Instability and Growth Theorems for Solutions of a Class of Abstract Nonlinear Equations with Applications to Nonlinear Elastodynamics, Arch. Rational Mech. Anal., 55, 1974, 52-72.

[23] Levine H.A., Some Nonexistence and Instability Theorems for Formally Parabolic Equations of the Form $Pu_t = -Au + F(u)$, Arch. Rational Mech. Anal., 51, 1973, 371-386.

[24] Levine H.A., Instability and Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations of the Form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$, Trans. Am. Math. Soc.,192, 1974,1-21.

[25] Levine H.A., Some Additional Remarks on the Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations, SIAM J. Math. Anal., 5, 1974, 138-146.

[26] Levine H.A., A Note on a Nonexistence Theorem for Some Nonlinear Wave Equations, SIAM J. Math. Anal., 5, 1974, 644-648.

[27] Levine H.A., Payne L.E., Nonexistence Theorems for the Heat Equations with Nonlinear Boundary Conditions and for Porous Medium Equation Backward in Time, J. Diff. Eq., 16, 1974, 319-334.

[28] Levine H.A., Pucci P., Serrin J., Some Remarks on Global Nonexistence for Nonautonomous Abstract Evolution Equations, Comtemporary Math., 208, 1997, 253-263.

[29] Levine H.A., Serrin J., Global Nonexistence Theorems for Quasilinear Evolution Equations with Dissipation, Arch. Rational Mech. Anal., 137, 1997, 341-361.

[30] Levine H.A., Park S.R., Serrin J., Global Existence and Global Nonexistence of Solutions of the Cauchy Problem for a Nonlinearly Damped Wave Equations, Journal of Math. Analysis and Applications, 228, 1998, 181-203.

[31] Ming-Guang S., Behaviour of a Post-Buckling Riser Vibrating due to Effect of Waves and Current, J. Nonlinear Mechanics, 27(3), 1992, 437-445.

[32] Malek J., Necar J., Weak and Measure Valued Solutions to Evolutionary PDEs, Chapman and Hall, London, 1996.

[33] Oden J. T., Applied Functional Analysis, Prentice-Hall, New Jersey, 1979.

[34] Ohta M., Blow up of Solutions of Dissipative Nonlinear Wave Equations, Hokkaido Mathematical Journal, 26, 1997, 115-124.

[35] Palais B., Blow up for Nonlinear Equations Using a Comparison Principle in Fourier Spaces, Comm. Pure Appl. Math., 151, 1988, 163-196.

[36] Pao, C.V., Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, Plenum Press, New York, 1994, p.257-286.

[37] Pucci P., Serrin J., Global Nonexistence for Abstract Evolution Equations with Positive İnitial Energy, Journal of Differential Equations, 150, 1998, 203-214.

[38] Richtmyer R.D., Morton K.W., Difference Methods for Initial Value Problems, Wiley- Interscience, New York, 1967.

[39] Seçim G., Aydın G., Lineer Olmayan bir Hiperbolik Denklemin Global Çözümlerinin Olmaması, XI. Dif. Denklemler Semp., Trabzon, 1997.

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ

[40] Seçim G., Aydın G., Nonexistence of Global Solutions of a Quasilinear Hyperbolic Equation with Dynamic Boundary Condition, XI. Ulusal Mat. Semp., Isparta, 1998

[41] Straughan B., Further Global Nonexistence the Theorems for Abstract Nonlineer Wave Equations, Proc. Amer. Math. Soc., 48, 1975, 381-390.

[42] Strikwerda John C., Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations, University of Wisconsin-Madison, 1989.

[43] Svatopluk Fucik, Solvability of Nonlinear Equations and Boundary Value Problems, London-England D. Reidel Publishing Company, 1980.

[44] Todorova G., Georgiev V., Existence of a Solution of the Wave Equation with Nonlinear Damping and Source Terms, Journal of Diff. Equations, 109, 1994, 295-308.

[45] Turitsyn S. K., On a Toda Lattice Model with a Transversal Degree of Freedom, Sufficient Criterion of Blow-up in the Continuum Limit, Physics Letter A 173, 1993, 267-269.

[46] Walter W., Differential and Integral Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[47] Zauderer E., Partial Differential Equations of Applied Mathematics, John Wiley, New York, 1989.

ÖZGEÇMİŞ

1967 yılında Sakarya'da doğdu. 1986 yılında Kadıköy Kazım İşmen Lisesi'nden, 1990 yılında Mimar Sinan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl Mimar Sinan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Yüksek Lisans Programı'na kabul edildi. 1992 yılında bu programı tamamladı. 1993 yılında Mimar Sinan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde doktora öğrenimine başladı. 1993 yılının Ocak ayında Mimar Sinan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atanmış olup, halen bu göreve devam etmektedir.