T.C
MİMAR SİNAN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HİLBERT UZAYLARINDA KUADRATİK FORMUN İNCELENMESİ

GÜLAY İ. TELSİZ

Yüksek Lisans Tezi

DANIŞMAN
Prof. Dr. Mehmet Hamidoğlu TAGİYEV

MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK PROGRAMI

İSTANBUL, 1999

ÖZET

HİLBERT UZAYLARINDA KUADRATİK FORMUN İNCELENMESİ

Kuadratik formların incelendiği bu çalışmada; birinci bölümde sonlu boyutlu uzayda, ikinci bölümde ise sonsuz boyutlu Hilbert uzayında kuadratik formlar için tanım ve teoremlere yer verilerek konuya giriş yapılmıştır.

Üçüncü bölümde, kuadratik formlara örnek olarak Kuadratik integral fonksiyoneller incelenmiştir.

Dördüncü ve beşinci bölümde, kuadratik formların temel özellikleri ve bazı özel kuadratik formlar; wls-sürekli, sonlu indeksli ve sonlu sıfırlıklı, tekil olmayan ve pozitif belirli kuadratik formlar, Legendre formları, açıklanmıştır.

Son bölümde ise, varyasyonlar hesabında önem taşıyan örnek bir kuadratik form incelenmiştir.

SUMMARY

INVESTIGATION OF QUADRATIC FORM IN HILBERT SPACES

In this study, quadratic forms are investigated.

Introduction is given with definitions and theorems for quadratic forms in finite dimensional spaces and in infinite dimensional Hilbert spaces in the first and second chapters.

In the third chapter, as an example to quadratic forms, quadratic integral functionals are examined.

Fourth and fifth chapters cover the fundemental properties of quadratic forms and some special cases: quadratic form of finite index and nullity, wls-continuous, nonsingular and positive definite quadratic forms and Legendre forms.

An example to the quadratic forms which is important in Calculus of Variations is given in the last chapter.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

SONLU BOYUTLU UZAYLARDA BİLİNEER VE KUADRATİK FORMLAR

1.1. Tanımlar

E ,sonlu boyutlu reel bir lineer (vektör) uzay, B ise ExE uzayından reel sayılara tanımlı *bilineer* bir fonksiyon olsun (B : ExE $\rightarrow$ R). Yani, her $x \in$ E , x = sbt. için B(x , y) : E $\rightarrow$ R fonksiyonu lineer ve her $y \in$ E , y = sbt. için B(x , y) : E $\rightarrow$ R fonksiyonu lineer olsun.

Tanım 1.1.1: *(Simetrik bilineer form)*: B bir bilineer form olmak üzere, her $x , y \in$ E için;

$$B(x , y) = B(y , x)$$

ise, B fonksiyonuna *simetrik bilineer form* denir.

Tanım 1.1.2: *(Kuadratik Form)*: Q(x , y) bir simetrik bilineer form olmak üzere Q(x) = Q(x , x) eşitliğiyle tanımlanan Q(x) : E $\rightarrow$ R fonksiyona, Q(x . y) formunun doğurduğu *kuadratik form* denir.

Her Q(x) kuadratik formu ise:

$$Q(x , y) = \frac{1}{2} [Q(x + y) - Q(x) - Q(y)] \qquad (1.1)$$

eşitlitliği ile belirlenen bir bilineer form doğurur.

Kuadratik formlar için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir ([8]);

$$Q(x - y) = Q(x) - 2Q(x , y) + Q(y) \qquad (1.2)$$

$$Q(x+y) - Q(x - y) = 2 [Q(x) + Q(y)] . \qquad (1.3)$$

dim E = n < ∞ olmak üzere; S = { x_1 ,..., x_n }, E uzayının sıralı bir tabanı olsun. Bu durumda, $x=\sum_i \xi^i x_i$, $y=\sum_j \eta^j x_j$ ve a_{ij} = B(x_i , x_j) olmak üzere B simetrik bilineer formu ve Q kuadratik formu:

$$B(x\,,y)=\sum_{i,j} a_{ij}\xi^i\eta^j\;,\;Q(x)=\sum_{i,j} a_{ij}\xi^i\xi^j \tag{1.4}$$

biçiminde yazılabilir ve B simetrik olduğundan A= (a_{ij}) matrisi de simetrik olur.

Tanım 1.1.3: *(Dejenere olmayan form):* dim E= n olmak üzere her Q : ExE → R simetrik bilineer formu:

$$E_0 = \{ x_0 \in E : Q(x_0\,, y) = 0\,, \forall\, y \in E \}$$

olarak tanımlanan bir sıfır uzayı doğurur. E_0 = {0} ise Q formuna *dejenere olmayan* simetrik bilineer form denir.

Tanım 1.1.4: *(Simetrik bilineer formun rangı):* dim E - dim E_0 farkına Q simetrik bilineer formunun *rangı* denir.

Sonuç: Bir bilineer formun dejenere olmaması için gerek ve yeter şart rangının , E uzayının boyutuna eşit olmasıdır.

Tanım 1.1.5: *(Pozitif form):* Her $x \neq 0$ için Q(x) = Q(x , x) > 0 ise Q simetrik bilineer formuna *pozitif* denir.

Pozitif bilineer fonksiyon Schwarz eşitsizliğini sağlar;

$$Q(x\,,y)^2 \le Q(x)\,Q(y) \qquad (\forall x,y \in E) \tag{1.5}$$

Eşitlik hali yalnız ve yalnız x ve y lineer bağımlı olduğunda geçerlidir. Pozitif belirli her simetrik bilineer form, dejenere olmayan formdur ([8]).

Tanım 1.1.6: *(Negatif olmayan (nonnegatif) form):* Her $x \in$ E için Q(x) ≥ 0 fakat bazı $x \neq 0$ vektörleri için Q(x) = 0 ise Q simetrik bilineer formuna *negatif olmayan (nonnegatif)* denir. Bu durumda Schwarz eşitsizliği yine sağlanır fakat eşitlik hali x ve y lineer bağımlı olmadığında da geçerli olabilir. Nonnegatif bir form her zaman dejeneredir. Gerçekten de, $x_0 \neq 0$ için Q(x_0) = 0 ise Schwarz eşitsizliğinden;

$$Q(x_0\,, y) \le Q(x)\,Q(y) = 0$$

ve buradan da her $y \in$ E için $Q(x_0 , y) = 0$ elde edilir. Yani Q formu dejeneredir.

"*negatif*" ve "*pozitif olmayan (nonpozitif)*" kavramları ise , benzer şekilde, eşitsizliklerin yönü değiştirilerek tanımlanır.

Tanım 1.1.7: *(Belirsiz form):* $Q(x)$ fonksiyonu E üzerinde hem pozitif hem de negatif değerler alıyorsa Q bilineer formuna *belirsiz* denir. Belirsiz bir form dejenere veya dejenere olmayan olabilir.

Tanım 1.1.8: *(Dik (orthogonal) vektörler)*: x ve y gibi iki vektörün iç çarpımı, (x , y) biçiminde gösterilmek üzere ($x,y \in$ E);

1) $(x , y) = 0$ ise, x ve y vektörleri birbirine *diktir* veya *orthogonaldir* denir.

2) B $\subseteq$ E olmak üzere her $y \in$B için $(x , y) = 0$ ise, x vektörü B altkümesine *diktir* veya *orthogonaldir* denir.

3) B,C $\subseteq$ E olmak üzere her $x \in$B ve her $y \in$C için $(x , y) = 0$ ise, B altkümesi C altkümesine *diktir* veya *orthogonaldir* denir.

Tanım 1.1.9: *(Orthogonal tümler)*: E uzayının bir B altkümesine dik (orthogonal) olan bütün vektörlerin kümesine, B altkümesinin *orthogonal tümleri* denir.

Tanım 1.1.10: *(Q-orthogonal vektörler)*: $x,y \in$ E olmak üzere;

1) $Q(x , y) = 0$ ise, x ve y vektörleri birbirine *Q-orthogonaldir* denir.

2) B $\subseteq$ E olmak üzere her $y \in$B için $Q(x,y) = 0$ ise, x vektörü B altkümesine *Q-orthogonaldir* denir.

3) B,C $\subseteq$ H olmak üzere her $x \in$B ve her $y \in$C için $Q(x,y) = 0$ ise, B altkümesi C altkümesine *Q-orthogonaldir* denir.

1.2. E Uzayının Parçalanışı

Q , n boyutlu E lineer uzayında tanımlı dejenere olmayan belirsiz bir bilineer form olsun. Bu kısımda E uzayının, Q formunun pozitif olduğu E^+ ve Q formunun negatif olduğu E^- alt uzaylarına parçalanabileceği gösterilecektir.

Q bilineer formu belirsiz olduğundan, E uzayının, Q nun pozitif olduğu bir öz alt kümesi vardır (Örneğin $Q(a) > 0$ eşitsizliğini sağlayan bütün a vektörlerinin doğurduğu alt uzay). E^+, Q nun pozitif olduğu maksimum boyutlu alt uzay ve E^-, E^+ alt uzayının Q-orthogonal tümleyeni olsun. E^+ pozitif olduğundan $E^+ \cap E^-$ sadece sıfır vektöründen oluşur ve aşağıdaki eşitlik sağlanır;

$$\dim E^+ + \dim E^- = \dim E .$$

O halde E uzayı, E^+ ve E^- alt uzaylarının doğrudan toplamdır;

$$E = E^+ \oplus E^- . \tag{1.6}$$

$z \neq 0$ ve $z \in E^-$ olmak üzere, E_1 alt uzayı , E^+ ve z vektörünün doğurduğu alt uzay olsun. Bu alt uzayın her elemanı aşağıdaki biçimde yazılabilir;

$$x = y + \lambda z \qquad (y \in E^+).$$

O halde,

$$Q(x) = Q(y + \lambda z) = Q(y + \lambda z \, , y + \lambda z)$$

olur ve buradan

$$Q(x) = Q(y) + \lambda^2 Q(z)$$

elde edilir. $Q(y) > 0$ olduğundan, eğer $Q(z) > 0$ ise, $Q(x) > 0$ olur. Yani Q, E_1 alt uzayında pozitif olur. Fakat bu sonuç E^+ nın maksimumluğu ile çelişir. O halde her $z \in E^-$ için $Q(z) \leq 0$ olmalıdır. Yani Q , E^- alt uzayı üzerinde nonpozitiftir. Ayrıca; $z_1 , z \in E^-$ olmak üzere Schwarz eşitsizliği kullanılırsa,;

$$Q(z_1 , z)^2 \leq Q(z_1)\, Q(z)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, $Q(z_1) = 0$ olsun, bu durumda her $z \in E^-$ için $Q(z_1 , z) = 0$ olur. Aynı zamanda $z_1 \in E^-$ olduğundan her $y \in E^+$ için $Q(z_1 , y) = 0$ dır. Yani, her $x \in E$ için $Q(z_1 , x) = 0$ dir ve buradan $z_1 = 0$ bulunur. O halde E^- alt uzayı negatiftir.

1.3. Dejenere Halde Parçalanış

Bu kısımda Q bilineer formunun dejenere olduğu hal ele alınacaktır. E_1 alt uzayı E_0 alt uzayının tümleyeni olsun;

$$E = E_0 \oplus E_1 .$$

Bu durumda Q bilineer formu, E_1 alt uzayı üzerinde dejenere olmayan formdur. Gerçekten de, belirli bir $x_1 \in E_1$ ve her $y_1 \in E_1$ için $Q(x_1 , y_1) = 0$ olsun. E , E_0 ve E_1 alt uzaylarının doğrudan toplamı olduğundan, herhangi bir $y \in E$ vektörü;

$$y = y_0 + y_1 \qquad y_0 \in E_0 ,\ y_1 \in E_1$$

biçiminde yazılabilir. Buradan;

$$Q(x_1 , y) = Q(x_1 , y_0) + Q(x_1 , y_1) = 0$$

eşitliği elde edilir. Yani, $x_1 \in E_0$ ve dolayısıyla $x_1 \in E_0 \cap E_1$ dir. O halde $x_1 = 0$ dır.

O halde, Bölüm 1.2 gözönüne alınırsa, E_1 alt uzayının, Q formunu pozitif olduğu E^+ ve Q nun negatif olduğu E^- alt uzaylarının doğrudan toplamı biçiminde yazılabileceği görülür. Böylece E uzayı , E_0, E^+ ve E^- alt uzaylarına parçalanmış olur;

$$E = E_0 \oplus E^+ \oplus E^- . \qquad (1.7)$$

1.4. Bilineer Formun İndeksi

E uzayının sonsuz sayıda farklı parçalanışı vardır. Fakat E^+ ve E^- alt uzaylarının boyutu, Q bilineer formu ile tek türlü belirlidir.

Q bilineer formu E_1^+ ve E_2^+ uzaylarında pozitif , E_1^- ve E_2^- uzaylarında negatif olmak üzere, E uzayının iki farklı parçalanışı aşağıdaki gibi olsun;

$$E = E_0 \oplus E_1^+ \oplus E_1^- \qquad (1.8)$$

$$E = E_0 \oplus E_2^+ \oplus E_2^- \qquad (1.9)$$

Bu durumda ;

$$E_2^- \cap (E_0 \oplus E_1^+) = 0$$

olur ve buradan;

$$\dim E_2^- + \dim E_0 + \dim E_1^+ \leq n \qquad (1.10)$$

eşitsizliği bulunur. Ayrıca, *(1.8)* parçalanışı gözönüne alınırsa;

$$\dim E_1^- + \dim E_0 + \dim E_1^+ = n \qquad (1.11)$$

eşitliği elde edilir. O halde *(1.10)* ve *(1.11)* den;

$$\dim E_2^- \leq \dim E_1^-$$

bulunur, aynı işlemler E_2^- ve E_1^- uzaylarının yerleri değiştirilerek tekrarlanırsa;

$$\dim E_2^- \geq \dim E_1^-$$

ve dolayısıyla;

$$\dim E_2^- = \dim E_1^-$$

eşitliği elde edilir. Görüldüğü gibi E^- uzayının boyutu değişmez, Q bilineer formu ile tek türlü belirlidir.

Tanım 1.4.1: *(Bilineer formunun indeksi)*: Q formunun belirlediği E^- uzayının boyutuna, Q bilineer formunun *indeksi* denir.

BÖLÜM 2

SONSUZ BOYUTLU UZAYLARDA (HİLBERT UZAYINDA) BİLİNEER VE KUADRATİK FORMLAR

2.1. Tanımlar ve Ön Bilgiler

Bu çalışmada H, reel Hilbert uzayını gösterecektir. Öncelikle, diğer bölümlerde kullanılacak olan bir takım temel kavramlar ve özellikler kısaca hatırlatılacaktır. x , $y \in$ H olmak üzere x ve y vektörlerinin iç çarpımı (x,y) biçiminde, x vektörünün uzunluğu ise $|x| = (x,x)^{1/2}$ şeklinde gösterilecektir.

Tanım 2.1.1: *(Kuvvetli (strong) yakınsaklık)*: Bir $\{ x_q \}$ dizisi için ($x_q \in$ H),

$$\lim_{q\to\infty} | x_q - x_0 | = 0 \qquad (2.1)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in$H vektörü varsa, $\{ x_q \}$ dizisi x_0 vektörüne *kuvvetli yakınsaktır* denir ve $x_q \Rightarrow x_0$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.1.2: *(Zayıf (weak) yakınsaklık)*: Her $y \in$H vektörü için,

$$\lim_{q\to\infty} (x_q , y) = (x_0 , y) \qquad (2.2)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in$H vektörü varsa, $\{ x_q \}$ dizisi x_0 vektörüne *zayıf yakınsaktır* denir ve $x_q \to x_0$ biçiminde gösterilir.

Lemma 2.1.1: Kuvvetli yakınsak her dizi zayıf yakınsaktır , yani $x_q \Rightarrow x_0$ ise $x_q \to x_0$ dır.

İspat:İç çarpımın özellikleri ve *Schwarz eşitsizliği* ($|(x,y)| \leq |x|\,|y|$) kullanılarak,

$$|(x_q , y) - (x_0 , y)| = |(x_q - x_0 , y)| \leq | x_q - x_0 |\,| y |$$

eşitsizliği elde edilir. $x_q \Rightarrow x_0$ ise $| x_q - x_0 | \to 0$ olacağından eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yaklaşır, dolayısıyla $|(x_q , y) - (x_0 , y)| \to 0$, yani $x_q \to x_0$ dır.

($\{a_q\}$ sayı dizisinin bir a_0 sayısına yakınsaması $a_q \to a_0$ şeklinde gösterilecektir.)

Bu tezde, kapalılık, kuvvetli yakınsaklık anlamında düşünülecektir. Yani, $B \subseteq H$ olmak üzere, B kümesinden alınan her güçlü yakınsak dizi, B nin bir elemanına yakınsıyorsa ($x_q \Rightarrow x_0$ için $x_0 \in B$ ise), B kümesine H uzayının *kapalı* altkümesi denilecektir.

$f(x)$, H uzayından reel sayılara tanımlanan bir fonksiyon olsun (f: H→R).

Tanım 2.1.3: *(Süreklilik)*:$\{x_q\}$ dizisi bir x_0 vektörüne güçlü yakınsadığında, $\{f(x_q)\}$ sayı dizisi de $f(x_0)$ sayısına yakınsıyorsa, yani $x_q \Rightarrow x_0$ için $f(x_q) \rightarrow f(x_0)$ ise, $f(x)$ fonksiyonuna *sürekli* denir.

Tanım 2.1.4: *(Zayıf (weak) süreklilik)*: $\{x_q\}$ dizisi bir x_0 vektörüne zayıf yakınsadığında, $\{f(x_q)\}$ sayı dizisi de $f(x_0)$ sayısına yakınsıyorsa , yani $x_q \rightarrow x_0$ için, $f(x_q) \rightarrow f(x_0)$ ise, $f(x)$ fonksiyonuna *zayıf sürekli* denir ve kısaca "w-sürekli" olarak adlandırılır.

Lemma 2.1.2 : Zayıf sürekli her fonksiyon süreklidir.

İspat : $x_q \Rightarrow x_0$ için $x_q \rightarrow x_0$ olduğundan (bkz.*Lemma 2.1*), eğer $f(x)$ fonksiyonu zayıf sürekli ise $x_q \rightarrow x_0$ için $f(x_q) \rightarrow f(x_0)$ dır ve dolayısıyla $f(x)$ fonksiyonu süreklidir.

Lemma 2.1.3 : $\{x_q\}$ dizisi bir x_0 vektörüne zayıf ve $\{y_q\}$ dizisi bir y_0 vektörüne kuvvetli yakınsıyorsa (x_q , y_q) iç çarpımı (x , y) iç çarpımına yakınsar.

İspat: İç çarpım işleminin ve normun özellikleri kullanılarak;

$$| (x_q , y_q) - (x , y) | = | (x_q , y_q - y) + (x_q - x , y) | \leq | x_q | \, | y_q - y | + | (x_q - x , y) |$$

elde edilir. $x_q \rightarrow x_0$ ve $y_q \Rightarrow y_0$ olduğundan buradan;

$$| (x_q , y_q) - (x , y) | \rightarrow 0$$

yani $(x_q , y_q) \rightarrow (x , y)$ bulunur.

Tanım 2.1.5: *(Zayıf yakınsaklığa bağlı alttan yarı süreklilik)*: $\{ x_q \}$ dizisi bir x_0 vektörüne zayıf yakınsadığında, yani $x_q \rightarrow x_0$ için,

$$\lim_{q \to \infty} \inf f(x_q) \geq f(x_0) \qquad (2.3)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, $f(x)$ fonksiyonuna *zayıf yakınsaklığa bağlı alttan yarı sürekli* denir ve kısaca "wls-sürekli" olarak adlandırılır.

Kapalı bir H uzayından alınan her zayıf yakınsak dizi, aynı zamanda kuvvetli yakınsak ise H uzayı sonlu boyutludur ([10]).

$L_1(x)$, $L_2(x)$,... , $L_k(x)$; k tane lineer form olsun. Bu durumda ; B kümesi

$B = \{ x : L_i(x) = 0 \ (i = 1,2,...,k) \} = \bigcap_{i=1}^{k} Ker\, L_i(x)$ olmak üzere, eğer $\bigcap_{i=1}^{k} Ker\, L_i(x)$,

$Ker\, L(x)$ nin alt kümesi ise, L lineer formu;

$$L(x) = h_1 L_1(x) + ... + h_k L_k(x) \tag{2.4}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca $L_1(x)$, ... ,$L_k(x)$ lineer formları lineer bağımsız ise h_1 ,..., h_k çarpanları tek türlü belirlidir ([11]).

Riesz Teoremi :Her $L(x)$ lineer formu için $L(x) = (y,x)$ eşitliğini sağlayan tek türlü belirli $y \in H$ vektörü vardır ([10]).

$\mathcal{L}$ (H) , H uzayından H uzayına tanımlanan lineer operatörlerin kümesini göstermek üzere, her $T \in \mathcal{L}(H)$ için;

$$| Tx | \leq M \, | x | \tag{2.5}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $M > 0$ sayısı vardır. Bu şartı sağlayan en küçük M sayısına T operatörünün *normu* denir ve $|T|$ biçiminde gösterilir ([19]).

Tanım 2.1.6: *(Tam sürekli veya Kompakt operatör)*: Eğer $T \in \mathcal{L}$ (H) lineer operatörü her zayıf yakınsak diziyi kuvvetli yakınsak diziye götürüyorsa , yani $x_q \rightarrow x_0$ için $Tx_q \Rightarrow Tx_0$ ise, T operatörüne *tam sürekli* veya *kompakt operatör* denir.

$B(x,y)$ fonksiyonu, H x H uzayından reel sayılara tanımlı bir bilineer form olsun; *(bkz.* Bölüm 1.1*)*.

Teorem 2.1.1: Her $B(x,y)$ bilineer formu için,

$$B(x,y) = (Tx , y) = (x , T^* y) \tag{2.6}$$

eşitliklerini sağlayan tek türlü belirli T, T* lineer dönüşüm çifti vardır.

İspat: B(x,y), herhangi bir bilineer form olsun. Eğer x değişkeni sabit tutulursa B(x,y) sadece y değişkenine bağlı lineer bir fonksiyon olur ve *Riesz teoremi* gereği,

$$B(x,y) = L(y) = (z, y)$$

eşitliğini sağlayan tek türlü belirli $z \in H$ vektörü vardır.

z vektörü ise x değişkenine bağlı olarak değiştiğinden, $T : H \to H$ ve $Tx = z$ olmak üzere bir T lineer dönüşümü vardır. Yani,

$$B(x,y) = (Tx, y)$$

dir. Eğer y değişkeni sabit tutulursa, aynı biçimde $B(x,y) = (x, T^* y)$ elde edilir.

Her $x, y \in H$ için $B(x,y) = (T_1 x, y)$ ve $B(x,y) = (T_2 x, y)$ olsun. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$(T_1 x, y) - (T_2 x, y) = 0$$

ve buradan da, iç çarpımın özellikleri kullanılarak, her $x,y \in H$ için;

$$(T_1 x - T_2 x, y) = 0$$

elde edilir. $y = T_1 x - T_2 x$ olarak seçilirse,

$$(T_1 x - T_2 x, T_1 x - T_2 x) = |T_1 x - T_2 x| = 0$$

çıkar. O halde, $T_1 x - T_2 x = 0$ dir ve buradan her $x \in H$ için, $T_1 x = T_2 x$,yani $T_1 = T_2$ bulunur. T* dönüşümünün tekliği de aynı biçimde gösterilebilir.

T* dönüşümüne, T nin *ek operatörü* denir. Eğer T = T* ise, T dönüşümüne *kendine eş operatör* denir.

Lemma 2.1.4: Her B(x,y) bilineer fonksiyonu için,

$$|B(x,y)| \leq M\,|x|\,|y| \qquad (2.7)$$

eşitsizliğini sağlayan bir M sayısı vardır.

İspat: B(x,y) bilineer olduğundan (*Teorem 2.1.1*) gereği $B(x,y) = (Tx,y)$ eşitliğini sağlayan tek türlü belirli T lineer dönüşümü vardır. Buradan, Schwarz eşitsizliği ve *(2.5)* eşitsizliği kullanılarak,

$$|B(x,y)| = |(Tx,y)| \leq |Tx|\,|y| \leq M\,|x|\,|y|$$

elde edilir.

Lemma 2.1.4: $\{ x_q \}$ dizisi bir x_0 vektörüne kuvvetli yakınsıyor ve $\{ y_q \}$ dizisi bir y_0 vektörüne zayıf yakınsıyorsa; $\{B(x_q , y_q)\}$ sayı dizisi de $B(x_0 , y_0)$ sayısına yakınsar, yani $x_q \Rightarrow x_0$ ve $y_q \to y$ ise $B(x_q , y_q) \to B(x_0 , y_0)$ dir.

İspat: (*Teorem 2.1.1*) kullanılarak,

$$| B(x_q , y_q) - B(x_0 , y_0)| = |(Tx_q , y_q) - (Tx_0 , y_0)|$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafına (Tx_q , y_0) terimini ekleyip çıkartmakla,

$$| B(x_q , y_q) - B(x_0 , y_0)| = | (Tx_q , y_q) - (Tx_q , y_0) - (Tx_0 , y_0) + (Tx_q , y_0) |$$

ve normun özellikleri kullanılarak,

$$| B(x_q , y_q) - B(x_0 , y_0)| \leq |(Tx_q , y_q) - (Tx_q , y_0)| + | (Tx_q , y_0) - (Tx_0 , y_0) |$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin $q \to \infty$ için limiti alınırsa, $x_q \Rightarrow x_0$ olur ve T lineer, dolayısıyla sürekli olduğundan $Tx_q \to Tx_0$,yani $| (Tx_q , y_0) - (Tx_0 , y_0) | \Rightarrow 0$ dır. Ayrıca ; $y_q \to y$ olduğundan $|(Tx_q , y_q) - (Tx_q , y_0)| \to 0$ olup eşitsizliğin sağ tarafı sıfıra yaklaşır.

Dolayısıyla $| B(x_q , y_q) - B(x_0 , y_0)| \to 0$, yani $B(x_q , y_q) \to B(x_0 , y_0)$ dir.

Tanım 2.1.7:(Tam sürekli bilineer fonksiyon): $\{ x_q \}$ dizisi x_0 vektörüne zayıf, $\{ y_q \}$ dizisi y_0 vektörüne zayıf yakınsıyor iken $\{B(x_q , y_q)\}$ sayı dizisi de $B(x_0 , y_0)$ sayısına yakınsıyorsa, yani $x_q \to x_0$ ve $y_q \to y$ için $B(x_q , y_q) \to B(x_0 , y_0)$ ise $B (x , y)$ bilineer formuna *tam sürekli* denir.

Sonuç: $B(x,y) = (Tx,y)$ olmak üzere, T lineer dönüşümü tam sürekli ise $B(x,y)$ de tam sürekli olur.

Teorem 2.1.2: $B(x,y) = B(y,x)$ olmak üzere, $B(x,y)$ bilineer formunun tam sürekli olması için gerek ve yeter şart $B (x) = B(x,x)$ formunun H uzayı üzerinde zayıf sürekli olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: Tam sürekliliğin tanımından, $x_q \to x_0$ ise $B(x_q , x_q) \to B(x_0 , x_0)$ dır ve (*Tanım 2.1.4*) 'e göre $B(x) = B(x,x)$ zayıf süreklidir.

$\Leftarrow$: $B(x) = B(x,x)$ zayıf sürekli ise $x_q \to x_0$ için $B(x_q) \to B(x_0)$ dır ve buradan,

$$2 B(x,y) = B(x+y) - B(x) - B(y)$$

eşitliği kullanılırsa, $x_q \to x_0$ ve $y_q \to y$ için $B(x_q+y_q) \to B(x_0+ y_0)$, $B(x_q) \to B (x_0)$, $B(y_q) \to B (y_0)$ olacağından $B(x_q , y_q) \to B(x_0 , y_0)$ bulunur.

Tanım 2.1.8: *(Kuadratik form)*: Q(x,y), H uzayında tanımlı bir simetrik bilineer form olmak üzere $x = y$ yazılırsa, tek değişkene bağlı Q(x,x) fonksiyonu elde edilir. Bu fonksiyona, Q(x,y) bilineer formunun doğurduğu *kuadratik form* denir ve Q(x) = Q(x,x) biçiminde gösterilir. Kuadratik formlar için aşağıdaki temel özdeşlik geçerlidir;

$$Q(ax + by) = a^2 Q(x) + 2ab\, Q(x,y) + b^2 Q(y)\,. \qquad (2.8)$$

Her Q(x) kuadratik formu için, Q(x) = (Tx , x) eşitliğini sağlayan kendine eş lineer bir T dönüşümü vardır ([10]).

BÖLÜM 3

KUADRATİK İNTEGRAL FONKSİYONELLER

3.1. Kuadratik İntegral Fonksiyoneller

Bu bölümde, H uzayı, $(t : x^1 ,..., x^p)$ - uzayında hemen hemen sürekli ve $a \leq t \leq$ b aralığında, türevinin karesi integrallenebilen p tane reel değerli fonksiyon tarafından belirlenen;

$$x \quad : \quad x^j(t) \qquad\qquad (a \leq t \leq b \,, j = 1,...,p)$$

fonksiyonlarının toplamıdır ($\dot{x}(t) \in L_2[a \,, b]$).

Bu uzayda iç çarpım işlemi aşağıdaki biçimde tanımlanacaktır;

$$\left(x\,,y\right) = x^j(a)\,y^j(a) + \int_b^a \dot{x}^j(t)\,\dot{y}^j(t)\,dt \qquad (3.1)$$

Bu durumda, $|\,x\,| = (\,x\,.\,x)^{1/2}$ biçiminde tanımlanan x in normu için aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$|\,x\,|^2 = x^j(a)\,x^j(a) + \int_b^a \dot{x}^j(t)\,\dot{x}^j(t)\,dt \qquad (3.2)$$

Lemma 3.1.1: $x_q \Rightarrow x_0$ olması için gerek ve yeter koşul $x_q^j(a) \to x_0^j(a)$ ve ikinci basamaktan $\dot{x}_q^j(t) \to \dot{x}_0^j(t)$ olmasıdır. Benzer şekilde $x_q \to x_0$ olması için gerek ve yeter koşul $x_q^j(a) \to x_0^j(a)$ ve karesi Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların sınıfında ($L_2[a \,, b]$) zayıf anlamda $\dot{x}_q^j(t) \to \dot{x}_0^j(t)$ olmasıdır. Ayrıca $a \leq t \leq$ b aralığında $x_q^j(t) \to x_0^j(t)$ düzgün yakınsaktır ([10]).

Teorem 3.1.1 : $P_{jk}(t) = P_{kj}(t)$ $(j \,, k = 1,...,r)$ integrallenebilen fonksiyonlar ve $Q_{jk}(t)$, $a \leq t \leq$ b aralığında karesi integrallenabilen fonksiyon ve

$$H(x) = A_{jk}x^j(a)x^k(a) + 2B_{jk}x^j(a)x^k(b) + C_{jk}x^j(b)x^k(b) \qquad (3.3)$$

olmak üzere;

$$K(x) = H(x) + \int_a^b (P_{jk}x^j x^k + 2Q_{jk}x^j \dot{x}^k)\,dt \qquad (3.4)$$

biçiminde tanımlanan $K(x)$ kuadratik formu H uzayında w-sürekli bir formdur.

İspat : *(Lemma 3.1.1)* gereği $x_q \to x_0$ ise $x_q^j(a) \to x_0^j(a)$ ve $\dot{x}_q^j(t) \to \dot{x}_0^j(t)$ dir. Ayrıca $a \le t \le$ b aralığında $x_q^j(t) \to x_0^j(t)$ düzgün yakınsaktır. O halde buradan;

$$H(x_q) + \int_a^b (P_{jk}x_q^j x_q^k + 2Q_{jk}x_q^j \dot{x}_q^k)\,dt \to H(x_0) + \int_a^b (P_{jk}x_0^j x_0^k + 2Q_{jk}x_0^j \dot{x}_0^k)\,dt$$

yani $K(x_q) \to K(x_0)$ bulunur.

Teorem 3.1.2 : $A_{jk}(s,t) = A_{kj}(t,s)$ fonksiyonları ,s ve t değişkenlerine göre integrallenebilir fonksiyonlar, $B_{jk}(s,t) = B_{kj}(t,s)$ fonksiyonları ,s ve t değişkenlerine göre karesi integrallenebilir fonksiyonlar ve $C_{jk}(s,t) = C_{kj}(t,s)$ fonksiyonları, s ve t değişkenlerine göre temel sınırlı fonksiyonlar olmak üzere, $\Omega(s,t,x,\dot{x},y,\dot{y})$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın;

$$\Omega = A_{jk}(s,t)x^j y^k + B_{jk}(s,t)(x^j \dot{y}^k + y^j \dot{x}^k) + C_{jk}(s,t)\dot{x}^j \dot{y}^k \;.$$

Bu durumda,

$$K(x,y) = \int_a^b \int_a^b \Omega[s,t,x(s),\dot{x}(s),y(t),\dot{y}(t)]\,ds\,dt \qquad (3.5)$$

biçiminde tanımlanan $K(x,y)$ simetrik bilineer formu tam süreklidir.

İspat: $x_q \to x_0$ ve $y_q \to y$ ise *(Lemma 3.1.1)* kullanılarak, $K(x_q, y_q) \to K(x_0, y_0)$ bulunur. Yani $K(x,y)$ tam süreklidir.

Teorem 3.1.3 : $R_{jk}(t) = R_{kj}(t)$ (j , k = 1,...,r) $a \le t \le$ b aralığında temel sınırlı fonksiyonlar ve $K(x)$, H uzayında w-sürekli bir kuadratik form olmak üzere,

$$J(x) = K(x) + \int_a^b R_{jk}(t)\dot{x}^j(t)\dot{x}^k(t)\,dt \qquad (3.6)$$

kuadratik formunun H uzayında wls-sürekli olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki eşitsizliğin tüm $a \leq t \leq$ b aralığında ve her $(\pi) \neq (0)$ kümesi için sağlanmasıdır ([10]);

$$R_{jk}(t)\,\pi^j\,\pi^k \geq 0\,. \tag{3.7}$$

(3.7) eşitsizliği, *Legendre şartı* olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.4: $R_{jk}(t) = R_{kj}(t)$ temel sınırlı ve $a \leq t \leq$ b aralığında integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere, $D(x)$ kuadratik formu aşağıdaki biçimde tanımlansın;

$$D(x) = x^J(a)\,x^J(a) + \int_a^b R_{jk}(t)\,\dot{x}^j(t)\,\dot{x}^k(t)\,dt \tag{3.8}$$

Bu durumda,

$$D(x) \geq h\,|x|^2$$

eşitsizliğinin pozitif bir $h < 1$ değeri ile sağlanması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki eşitliğin tüm $a \leq t \leq$ b aralığında ve her $(\pi) \neq (0)$ kümesi için sağlanmasıdır ([10]);

$$R_{jk}(t)\,\pi^j\,\pi^k \geq h\,\pi^j\,\pi^j \tag{3.9}$$

(3.9) eşitsizliği *Legendre'nin güçlendirilmiş şartı* olarak adlandırılır.

İleride bahsedilecek olan H uzayındaki lineer formlar aşağıdaki tiptedir;

$$L(x) = a_k x^k(a) + b_k x^k(b) + \int_a^b [\,A_k(t)\,x^k(t) + B_k(t)\,\dot{x}^k(t)\,]\,dt \tag{3.10}$$

Burada; $A_1(t),\ldots,A_r(t)$, $a \leq t \leq$ b aralığında integre edilebilir fonksiyonlar ve $B_1(t),\ldots,B_r(t)$, $a \leq t \leq$ b aralığında karesi integrallenebilir fonksiyonlardır.

Bu tipteki lineer formlar için aşağıdaki teoremler geçerlidir;

Teorem 3.1.5: y , H uzayının aşağıdaki *(3.11)* koşullarıyla tanımlanan bir fonksiyonu olmak üzere, *(3.10)* lineer formunun, $L(x) = (y,x)$ biçimindeki gösterimi tek türlü belirlidir,

$$\begin{aligned} y^k(a) &= a_k + b_k + \int_a^b A_k(s)\,ds\,, \\ \dot{y}^k(t) &= B_k(t) + \int_t^b A_k(s)\,ds + b_k\,. \end{aligned} \tag{3.11}$$

İspat : *(3.1)* deki norm tanımı kullanılır ve *(3.12)* eşitlikleri $L(x) = (y,x)$ denkleminde yerine konursa, bu koşulları sağlayan y fonksiyonunu eşitliği sağladığı görülebilir.

Teorem 3.1.6: B kümesi, H uzayındaki $x^j(a) = x^j(b) = 0$ şartını sağlayan fonksiyonların kümesi olmak üzere, *(3.10)* lineer formunun B kümesi üzerinde sıfıra özdeş olması için gerek ve yeter koşul tüm $a \leq t \leq$ b aralığında:

$$B_k(t) = \int_a^t A_k(s)\,ds + c_k \qquad (k = 1,...r) \tag{3.12}$$

eşitliğini sağlayan c_k sabitlerinin olmasıdır.

$2q$ fonksiyonu, *(3.3)* eşitliğinin sağ tarafını göstermek üzere ve

$$2\omega = P_{jk}x^j x^k + 2Q_{jk}x^j \dot{x}^k + R_{jk}\dot{x}^j \dot{x}^k$$

olmak üzere,

$$J(x) = 2q[x(a), x(b)] + \int_a^b 2\omega(t, x, \dot{x})\,dt \tag{3.13}$$

biçiminde gösterilir. Bu formun belirlediği bilineer form ise, $q_{ka}(x)$ ve $q_{kb}(x)$ fonksiyonları $2q[x(a),x(b)]$ fonksiyonunun sırasıyla $x^k(a)$, $x^k(b)$ değişkenlerine göre türevleri olmak üzere;

$$J(x,y) = q_{ka}(x)y^k(a) + q_{kb}(x)y^k(b) + \int_a^b (\omega_{x^k} y^k + \omega_{\dot{x}^k}\dot{y}^k)\,dt \tag{3.14}$$

biçimindedir. Bölüm 2'de her $z \in$ H için $J(x,z) = (y,z)$ eşitliğini sağlayan kendine ek bir y = Tx lineer dönüşümünün olduğu gösterilmişti. Buradan aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1.7 : $y \in$ H fonksiyonu,

$$\begin{aligned} y^k(a) &= q_{ka}(x) + q_{kb}(x) + \int_a^b \omega_{x^k}[s, x(s), \dot{x}(s)]\,ds \\ \dot{y}^k(t) &= \omega_{\dot{x}^k}[t, x(t), \dot{x}(t)] + \int_t^b \omega_{x^k}[s, x(s), \dot{x}(s)]\,ds + g_{kb}(x) \end{aligned} \tag{3.15}$$

koşullarıyla tanımlanan bir fonksiyonu olmak üzere, her $x \in$ H fonksiyonu için, *(3.14)* eşitliği ile tanımlanan $J(x , y)$ bilineer formunun $J(x,z)=(y,z)$ biçimindeki gösterimi tek türlü belirlidir.

İspat : *(Teorem 3.1.5)*'de $L(z)=J(x,z)$ eşitliği kullanılarak görülebilir.

3.2. Q-Orthogonal ve Q-Transversal Vektörler

Bu bölümdeki sonuçlar, H uzayı tam uzay olmadığı durumlarda da geçerlidir. "*pozitif*" , "*negatif olmayan (nonnegatif)*" , "*negatif*" ve "*pozitif olmayan (nonpozitif)*" kavramları Bölüm 1'deki biçimde tanımlanacaktır.

Tanım 3.2.1: *(Q-transversal vektör):* B, H uzayının lineer bir alt uzayı olsun. Eğer bir x vektörü B alt uzayına Q-orthogonal ve $x \in$ B ise, x vektörüne B alt uzayının *Q-transversal vektörü* denir. B alt uzayının Q-transversal vektörlerinin kümesi B_0 sembolü ile gösterilecektir;

$$B_0 = \{\, x : x \in B \text{ ve } Q(x , y) = 0 , \forall y \in B \,\}.$$

Lemma 3.2.1: B, H uzayının lineer bir alt uzayı olmak üzere, B uzayının Q-transversal vektörlerinin kümesi olan B_0 , B nin lineer bir alt uzayıdır. B kapalı ise B_0 alt uzayı da kapalıdır. Ayrıca, B_0 alt uzayı üzerinde $Q(x) = 0$ dır.

İspat: *(Tanım 3.2.1)* gereği, her $x , y \in B_0$ için; $x , y \in B$ ve $Q(x , z) = 0$, $Q(y , z) = 0$ $(\forall z \in B)$ dır. B lineer olduğundan , her $\lambda,\mu \in R$ için $\lambda x + \mu y \in B$ olur ve $Q(\lambda x + \mu y , z) = \lambda\, Q(x , z) + \mu\, Q(y , z) = 0$ olduğundan $\lambda x + \mu y \in B_0$ dır. O halde, B_0 alt uzayı, B uzayının lineer bir alt uzayıdır.

B kapalı ise B_0 alt uzayı da kapalıdır; gerçekten de, $x_q \in B_0$ olmak üzere $x_q \Rightarrow x_0$ olsun. $x_q \in B_0$ ise $x_q \in B$ ve her $y \in B$ için $Q(x_q , y) = 0$ dır. $x_q \in B$ ve B kapalı olduğundan, $x_q \Rightarrow x_0$ için $x_0 \in B$ dir. Ayrıca Q bilineer olduğundan *(Lemma 2.1.4)* gereği $x_q \Rightarrow x_0$ ise $Q(x_q , y) \to Q(x_0 , y)$ dir. Bununla birlikte, $x_q \in B_0$ için $Q(x_q , y) = 0$ olduğundan $Q(x_0 , y) = 0$ ve dolayısıyla $x_0 \in B_0$ dır.

$x \in B_0$ ise her $y \in B$ için $Q(x , y) = 0$ dır. $x \in B_0$ ise aynı zamanda $x \in B$ olduğundan $y = x$ için $Q(x) = Q(x , x) = 0$ olur.

Teorem 3.2.1: Q(x), H uzayının bir B alt uzayında negatif olmayan (nonnegatif) kuadratik form ise, bir $x \in$ B vektörünün, B nin Q-transversal vektörü olması için gerek ve yeter koşul Q(x) = 0 olmasıdır.

İspat : $\Rightarrow$: $x \in B_0$ ise *(Lemma 3.2.1)* gereği Q(x) = 0 dır.

$\Leftarrow$: $x \in$ B ve Q(x) = 0 olsun. $y \in$ B olmak üzere $z = x + t\,y \in$ B vektörü gözönüne alınırsa, Q(x) negatif olmayan form olduğundan;

$$Q(z) = Q(x + t\,y) \geq 0$$

olur ve buradan her $t \in$ R için;

$$Q(x + t\,y) = Q(x) + 2\,t\,Q(x\,,y) + t^2\,Q(y) \geq 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her $t \in$ R için geçerli olabilmesi için Q(x , y) = 0, yani $x \in B_0$ olmalıdır.

Teorem 3.2.2: $L_1(x),\ldots,L_m(x)$ m tane lineer form olmak üzere, H uzayının $L_i(x) = 0$ (i = 1,...,m) şartını sağlayan x elemanlarının kümesi C ile gösterilsin. Eğer y vektörü, C kümesine Q-orthogonal ise her $x \in$ H için;

$$Q(y\,,x) + h_i\,L_i(x) = 0 \qquad (3.16)$$

olacak biçimde h_1 ,..., h_m çarpanları vardır. $L_1(x)$,..., $L_m(x)$ lineer bağımsız ise bu çarpanlar tek türlü belirlidir.

İspat: Bu sonuç, *(2.4)* eşitliğinde L(x) = −Q(y ,x) koymakla elde edilebilir.

Teorem 3.2.3: B, H uzayının sonlu boyutlu bir lineer alt uzayı ve C, B alt uzayının Q-orthogonal tümleyeni olsun. H_0,B_0,C_0 kümeleri sırasıyla H,B,C uzaylarının Q-transversal vektörlerinin kümesi olmak üzere, aşağıdaki sonuçlar geçerlidir:

(1) Bir z vektörünün C_0 kümesinin elemanı olması için gerek ve yeter şart bu vektörün, $x \in H_0$ ve $y \in B_0$ olmak üzere, $z = x + y$ biçiminde yazılabilmesidir.

(2) Bir L(x) lineer formunun B_0 üzerindeki değeri sıfır ise, B alt uzayı üzerinde L(x) = Q(y , x) olacak biçimde, B_0 kümesine orthogonal (dik) olan tek türlü belirli bir $y \in$ B vektörü vardır.

(3) B_0 kümesine Q-orthogonal olan her $x \in$ H vektörü için, $z = x - y \in$ C olacak biçimde, B_0 kümesine orthogonal olan tek türlü belirli bir $y \in$ B vektörü vardır.

(4) B* kümesi, B_0 ile ortak her elemanı kendisine Q-orthogonal olan, H uzayının lineer bir alt uzayı olsun. Eğer B* uzayının boyutu, B uzayının boyutundan büyükse, B

alt uzayına Q-orthogonal olup B nin elemanı olmayan, sıfırdan farklı bir $x \in B^*$ vektörü vardır.

İspat: (2): B alt uzayından, B_0 alt uzayına orthogonal olan ve lineer bağımsız vektörlerden oluşan maksimal bir $y_1, \ldots, y_m$ kümesi seçelim. Bir $x \in B$ vektörünün B_0 uzayının elemanı olması için gerek ve yeter şart $Q(y_i\,, x) = 0$ (i = 1,...,m) olmasıdır. O halde: eğer B_0 üzerinde $L(x) \equiv 0$ ise, $y = y_\alpha b_\alpha$ olmak üzere, her $x \in B$ için:

$$L(x) = b_\alpha Q(y_\alpha\,, x) = Q(y\,, x)$$

eşitliğini sağlayan tek türlü belirli b_α çarpanları vardır.

(3): $L(\bar{x}) = Q(x, \bar{x})$ olmak üzere y vektörü, (2) de tanımlandığı gibi seçilirse, her $\bar{x} \in B$ vektörü için, $Q(x - y, \bar{x}) = 0$ olur, dolayısıyla $z = x - y \in C$ dir.

(4): B_1, B_0 ile B^* kümelerinin kesişim kümesi olsun. B alt uzayından, B_1 alt uzayına Q-orthogonal olan ve lineer bağımsız vektörlerden oluşan maksimal bir $y_1, \ldots, y_m$ kümesi seçelim. B^* alt uzayının boyutu, B uzayının boyutundan büyükse; B^* alt uzayından, B_1 alt uzayına orthogonal olan lineer bağımsız $x_1, \ldots, x_{m+1}$ vektörleri seçilebilir. Bu durumda; hepsi birden sıfır olmayan $a_1, \ldots, a_{m+1}$ sayılarını,

$$Q(y_\beta, x_\alpha)\, a_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m+1;\ \ \beta = 1, \ldots, m)$$

eşitliğini sağlacak biçimde seçersek, $x = x_\alpha a_\alpha$ vektörü (4) önermesindeki şartları sağlar.

(1): C^*, B_0 alt uzayının Q-orthogonal tümleyeni olsun. (3) önermesi gereği, $y \in B$ ve $z \in C$ olmak üzere $x = y + z$ biçimindeki x vektörleri C^* alt uzayının elemanıdır. O halde, C_0; C alt uzayının Q-transversal vektörlerinin ve dolayısıyla C^* alt uzayının Q-transversal vektörlerinin kümesidir. Bununla birlikte, B_0 ve H_0 , C_0 ın alt kümesidir. D ; C^* alt uzayının orthogonal tümleyeni olmak üzere, D de, B_0 alt uzayına Q-orthogonal olan hiçbir $x \neq 0$ elemanı yoktur. O halde (4) önermesi gereği, D nin boyutu B_0 alt uzayının boyutunu aşamaz ve "$x_1, \ldots, x_r$" , D alt uzayının bir tabanı olmak üzere:

$$|Q(x_\alpha\,, y_\alpha)| \neq 0 \qquad (\alpha\,, \beta = 1, \ldots, r)$$

koşulunu sağlayan, $y_1, \ldots, y_r \in B_0$ vektörleri bulunabilir. $z \in C_0$ için , b_β sabitleri:

$$Q(x_\alpha\,, y_\alpha)\, b_\beta = Q(x_\alpha\,, z)$$

olacak biçimde seçilsin. Bu durumda, $x = z - y_\beta b_\beta$ vektörü C_0 alt uzayının elemanıdır ve $x_1, \ldots, x_r$ kümesine ve C alt uzayına Q-orthogonaldir. Dolayısıyla H uzayına Q-orthogonaldir. Buradan, $x \in H_0$ ve $y = y_\beta b_\beta \in B_0$ sonucu çıkar.

3.3. İllüstrasyonlar

İllüstrasyonI: $J(x)$ kuadratik formu *(3.13)* eşitliği ile tanımlansın. B kümesi, H uzayının $t = a$ ve $t = b$ için sıfır değerini alan fonksiyonlarının kümesi olmak üzere, *(Teorem 3.1.6)* gözönüne alınırsa, aşağıdaki sonuç elde edilir;

Bir $x \in$ H fonksiyonunun B kümesine J-orthogonal olması için gerek ve yeter koşul tüm $a \le t \le b$ aralığında:

$$\omega_{\dot{x}^k} = \int_a^t \omega_{x^k}\, dt + c_k, \qquad (k=1,\dots,p) \qquad (3.17)$$

eşitliğini sağlayan c_k sabitlerinin olmasıdır. Bu eşitlik, Euler denkleminin integral biçimidir ve çözümlerine *ekstremal* denir. Verilen bir x ekstremali için, *(3.17)* denkleminin sağ tarafı $\xi_k(t)$ ile gösterilecek olursa;

$$\xi_k(t) = \int_a^t \omega_{x^k}\, dt + c_k \qquad (3.18)$$

Bu gösterim diğer uygulamalarda kolaylık sağlayacaktır.

İllüstrasyonII: Bölüm 3.1'de tanımlanan B kümesi;

$$\mathrm{L}_\alpha(x) = a_{\alpha k} x^k(a) + b_{\alpha k} \dot{x}^k(b) = 0, \qquad (\alpha = 1,\dots,m) \qquad (3.19)$$

biçimindeki m lineer denklemi sağlayan $x \in$ H fonksiyonlarının kümesi olmak üzere $J\,(x)$ kuadratik formu *(3.13)* eşitliği ile tanımlansın. Bir $x \in$ B fonsiyonunun, B nin J-transversal vektörü olması için gerek ve yeter koşul *(3.17)* eşitliğini c_k sabitleriyle sağlaması ve bununla birlikte, $\xi_k(t)$; *(3.18)* eşitliğindeki gibi tanımlanmak ve q_{ka} , q_{kb} değerleri; $q\,[x\,(a)\,,\,x\,(b)]$ fonksiyonunun $x^k(a)$, $x^k(b)$ ye göre kısmi türevleri olmak üzere;

$$\begin{aligned} -\xi_k(a) + q_{ka} + h_\alpha a_{\alpha k} &= 0 \\ \xi_k(b) + q_{kb} + h_\alpha b_{\alpha k} &= 0 \end{aligned} \qquad (3.20)$$

eşitlikleri ile tanımlanan *transversallik şartlarını* gerçeklemesidir. *(Lemma 3.2.2)* gereği, her $y \in$ H vektörü için;

$$J(x,y) + h_\alpha \mathrm{L}_\alpha(y) = 0$$

olur. *İllüstrasyon I* gözönüne alınırsa, *(3.17)* eşitliğinin tüm $a \le x \le b$ aralığında sağlandığı görülür. Dolayısıyla buradan;

... son iki ... (3.20) ... $\| a_{\alpha k}\ b_{\alpha k} \|$ ... m

ise h_α çarpanları tektir.

İllüstrasyonIII: $A_{\alpha k}$, $a \le x \le b$ aralığında integrallenebilir ve $B_{\alpha k}$, aynı aralıkta karesi integrallenebilir fonksiyonlar olmak üzere, Bölüm 3.1'de tanımlanan B kümesi ;

$$\mathrm{L}_\alpha(x) = \int_a^b \{ A_{\alpha k}(t)\, x^k(t) + B_{\alpha k}(t)\, \dot{x}^k(t) \}\, dt = 0, \qquad (\alpha = 1, \ldots, m) \qquad (3.21)$$

koşularını sağlayan ve $t = a$, $t = b$ için sıfıra özdeş $x \in$ H fonksiyonlarının kümesi olsun, *(Teorem 3.2.2)* ve *(Teorem 3.1.6)* 'dan görülür ki; bir x fonksiyonunun B kümesine J-orthogonal olması için gerek ve yeter şart,

$$\Omega = \omega + h_\alpha (A_{\alpha k} x^k + B_{\alpha k} \dot{x}^k)$$

olmak üzere, tüm $a \le t \le b$ aralığında;

$$\Omega_{\dot{x}^k} = \int_a^t \Omega_{x^k}\, dt + c_k \qquad (3.22)$$

eşitliğini sağlayan c_k sabitleri ve h_α çarpanlarının olmasıdır. $\mathrm{L}_1(x), \ldots, \mathrm{L}_m(x)$ lineer bağımsız ise, yani, tüm $a \le t \le b$ aralığında;

$$\rho_\alpha \beta_{\alpha k} = \int_a^t \rho_\alpha A_{\alpha k}\, dt + d_k \qquad (3.23)$$

transversallik şartını sağlayan ρ_α çarpanları ve d_k sabitleri yoksa, h_α çarpanları tek türlü belirlidir. Varyasyon hesabında bu "normal hal" olarak adlandırılır.

BÖLÜM 4

KUADRATİK FORMLARIN TEMEL ÖZELLİKLERİ

4.1. H Uzayının Parçalanışı

Teorem 4.1.1 : H uzayı, bu uzayda tanımlı bir $Q(x)$ kuadratik form ile tek türlü belirli olarak, aşağıdaki özellikleri taşıyan H^+, H^- ve H_0 lineer alt uzaylarının doğrudan toplamı biçiminde gösterilebilir;

1) H^+, H^- ve H_0 alt uzayları birbirlerine dik (orthogonal) ve Q-orthogonaldir.

2) $Q(x)$ kuadratik formu; H^- alt uzayında negatif, H_0 alt uzayında sıfır ve H^+ alt uzayında pozitiftir.

İspat : Her $Q(x)$ kuadratik formu için, $Q(x) = (Tx , x)$ eşitliğini sağlayan kendine eş lineer bir T dönüşümü vardır (*bkz.*Bölüm 2). T dönüşümü, her x , $y \in$ H için aşağıdaki özellikleri gerçekleyen T^+, T^- kendine eş lineer dönüşümleri ile tek türlü belirli olarak, $T = T^+ - T^-$ biçiminde gösterilebilir ([2]);

$$P(x) = (T^+ x , x) \geq 0 , \qquad N(x) = (T^- x , x) \geq 0 \tag{4.1}$$

$$(T^- x, T^+ x) = 0 \tag{4.2}$$

ve

$$Q(x) = P(x) - N(x) , \qquad Q(x , y) = P(x , y) - N(x , y) . \tag{4.3}$$

$\mathcal{P}$, H uzayının P-transversal vektörlerinin kümesi olsun; $\mathcal{P} = \{ x : \; T^+ x = 0 \}$. H^+ ise $\mathcal{P}$ kümesinin orthogonal tümleyeni olarak tanımlansın. Benzer şekilde H^- kümesi, H uzayının N-transversal vektörlerinin kümesi olan $\mathcal{N} = \{ x : \; T^- x = 0 \}$ kümesinin orthogonal tümleyeni olarak tanımlansın. *(4.2)* eşitliği kullanılarak, her $x \in$ H için, $T^+ T^- x = 0$ ve $T^- T^+ x = 0$ eşitlikleri elde edilir. O halde $T^- x \in \mathcal{P}$ ve $T^+ x \in \mathcal{N}$ dir. Buradan, $x \in H^+$ ve $x \neq 0$ için;

$$N(x) = (T^- x , x) = 0 , \qquad Q(x) = P(x) > 0 \tag{4.4}$$

ve benzer şekilde $x \in H^-$ ve $x \neq 0$ için;

$$P(x) = (T^+x, x) = 0, \qquad Q(x) = -N(x) < 0 \qquad (4.5)$$

elde edilir. H^+ alt uzayında $N(x) = 0$ ve H uzayında $N(x) \geq 0$ olduğuna göre, *(Lemma 2.2.1)* gereğince $x \in N$ olması için yeter koşul $x \in H^+$ olmasıdır, dolayısıyla H^+ alt uzayı H^- kümesine diktir. Ayrıca, $x \in H^+$ ve $y \in H^-$ ise $T^-x = 0$ ve $T^+y = 0$ ve dolayısıyla;

$$Q(x, y) = (x, T^+y) - (T^-x, y) = 0$$

olur. Bu nedenle H^+ ve H^- birbirine Q-orthogonaldir. H_0, P ve N kümelerinin kesişimi olsun. Bu durumda $x \in H_0$ ise $T^-x = T^+x = 0$ ve dolayısıyla $Tx = 0$ olur. Yani x, H uzayının Q-transversal vektörüdür. Bu nedenle H_0 alt uzayı, H^+ ve H^- alt uzaylarına Q-orthogonal ve dik (orthogonal) olur. P, H^- ve H_0 alt uzaylarının doğrudan toplamı ve H uzayı da H^+ ve P alt uzaylarının doğrudan toplamı olduğundan, buradan H uzayının H^+, H_0 ve H^- alt uzaylarının doğrudan toplamı olduğu bulunmuş olur.

Basit bir örnek olarak, $H = R^3$ ve $Q(x) = x_1^2 - x_2^2$ olsun. Bu durumda;

$$Tx = [1 \ -1 \ 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ ve } T = T^+ - T^- \text{ olmak üzere, } T^+x = [1 \ 0 \ 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, T^-x = [0 \ 1 \ 0]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

dönüşümleri için *(4.1)*, *(4.2)*, *(4.3)* koşulları sağlanır;

$$P(x) = (T^+x, x) = x_1^2 \geq 0, \quad N(x) = (T^-x, x) = x_2^2 \geq 0, \quad (T^-x, T^+x) = 0.$$

Buradan; $P = \{ x : x_1 = 0 \}$ ve $H^+ = \{ x : x_2 = x_3 = 0\}$ olarak bulunur. Yani H^+ alt uzayı, x_1 ekseni üzerindeki vektörlerden oluşmaktadır. Benzer şekilde, $N = \{x : x_2 = 0\}$ ve $H^- = \{ x : x_1 = x_3 = 0\}$. O halde H^- alt uzayı x_2 ekseni üzerindeki vektörlerden oluşmaktadır. $H_0 = P \cap N$ olduğundan $H_0 = \{ x : x_1 = x_2 = 0 \}$ olur. Görüldüğü gibi, $Q(x) = x_1^2 - x_2^2$ kuadratik formu ile R^3 uzayı, birbirine dik x_1, x_2, x_3 eksenlerine parçalanmış oldu ($R^3 = H^+ \oplus H_0 \oplus H^-$). Ayrıca H^+ alt uzayında $Q(x) = x_1^2 > 0$, H^- alt uzayında $Q(x) = -x_2^2 < 0$ ve H_0 alt uzayında $Q(x) = 0$ dır.

(Teorem 4.1)'de bulunan sonuçlardan aşağıdaki teorem yazılabilir;

Teorem 4.1.2 : P(x) ve N(x) aşağıdaki koşulları sağlayan kuadratik formlar olmak üzere, bir Q(x) kuadratik formu tek türlü belirli olarak Q(x) = P(x) − N(x) biçiminde göterilebilir;

1) H uzayının N-transversal vektörlerinin kümesinin orthogonal tümleyeni üzerinde P(x) = 0 dır.

2) H uzayının P-transversal vektörlerinin kümesinin orthogonal tümleyeni üzerinde N(x) = 0 dır.

(3) H uzayının Q-transversal vektörlerinin kümesi üzerinde P(x) = N(x) = 0 dır.

4.2. Wls-Sürekli Kuadratik Formlar

Bu kısımda wls-sürekli kuadratik formlar ele alınacaktır. Bu kısımda açıklanan sonuçlar ile *(Teorem 3.1.3)* birlikte ele alınırsa, "Bir kuadratik formun wls-sürekli olması için gerek ve yeter koşul, bu formun Legendre şartını zayıf anlamda sağlamasıdır" sonucu elde edilir.

Lemma 4.2.1: Bir Q(x) kuadratik formu, H uzayının kapalı bir lineer alt uzayında nonnegatif (negatif olmayan) form ise Q(x), bu alt uzayda wls-süreklidir.

İspat : B uzayında $x_q \to x_0$ ise $Q(x_q - x_0, x_0) \to 0$ olacağından;

$$Q(x_q) - Q(x_0) \equiv 2\, Q(x_q - x_0, x_0) + Q(x_q - x_0)$$

özdeşliğinden,

$$\lim_{q\to\infty} \inf\, [Q(x_q) - Q(x_0)] = \lim_{q\to\infty} \inf\, [Q(x_q - x_0)]$$

eşitliği elde edilir ve Q(x), B uzayında nonnegatif olduğundan, buradan;

$$\lim_{q\to x} \inf\, [Q(x_q) - Q(x_0)] \geq 0$$

yani Q(x) kuadratik formunun B alt uzayında wls-sürekli olduğu bulunur.

Lemma 4.2.2 : Bir Q(x) kuadratik formu, H uzayının kapalı lineer bir B alt uzayında nonpozitif ve wls-sürekli ise Q(x), B alt uzayında w-süreklidir.

İspat : Q(x), B alt uzayında nonpozitif olduğundan, −Q(x) kuadratik formu nonnegatiftir ve *(Lemma 4.2.1)* gereği wls-süreklidir. Hem Q(x) hem de −Q(x) wls-sürekli olduğundan, Q(x) kuadratik formu w-süreklidir.

Bu sonuç, *(Teorem 4.1.1)* ile birlikte ele alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir;

Teorem 4.2.1 : Bir $Q(x)$ kuadratik formunun H uzayında wls-sürekli olması için gerek ve yeter şart, *(Teorem 4.1.1)*'de tanımlanan H^- alt uzayında w-sürekli olmasıdır.

İspat : $\Rightarrow$: $Q(x)$ kuadratik formu H uzayında wls-sürekli ise H^- alt uzayında da wls-süreklidir. O halde *(Lemma 4.2.2)* gereğince $Q(x)$, H^- alt uzayında w-süreklidir.

$\Leftarrow$: $Q(x)$, H^- alt uzayında w-sürekli ise aynı zamanda wls-süreklidir. Ayrıca, $Q(x)$ kuadratik formu H^+ ve H_0 alt uzaylarında nonnegatif olduğundan *(Lemma 4.2.1)* gereği bu alt uzaylarda da wls-süreklidir ve dolayısıyla tüm H uzayında wls-süreklidir.

Ayrıca, H^- alt uzayı sonlu boyutlu ise burada $Q(x)$ wls-süreklidir ([10]).

Teorem 4.2.2 : Bir $Q(x)$ kuadratik formunun H uzayında wls-sürekli olması için gerek ve yeter koşul, $P(x)$ nonnegatif bir form ve $K(x)$ w-sürekli bir form olmak üzere, $Q(x)$ formunun aşağıdaki biçimde gösterilebilmesidir;

$$Q(x) = P(x) - K(x)\,. \qquad (4.6)$$

$K(x)$ formunun tanımı şu biçimde daraltılabilir; "$K(x)$, H uzayında nonnegatif ve H uzayının P-transversal vektörlerine dik (orthogonal) olan küme üzerinde sıfıra özdeştir".

İspat : $\Rightarrow$: $Q(x)$, H uzayında wls-sürekli ise, *(Teorem 4.1.2)*'de tanımı verilen $-N(x)$ kuadratik formu, H uzayında nonpozitif ve wls-süreklidir. O halde *(Lemma 4.2.2)* gereği $-N(x)$, H uzayında w-süreklidir. Dolayısıyla $K(x)$ olarak $N(x)$ kuadratik formu alınırsa, $Q(x)$ kuadratik formu *(4.6)* biçiminde gösterilebilir.

$\Leftarrow$: $P(x)$ nonnegatif bir form ve $K(x)$ w-sürekli ve dolayısıyla wls-sürekli ise, $Q(x)$, H uzayında wls-süreklidir.

Sonuç : $Q(x)$ kuadratik formu, H uzayında, wls-sürekli ve $Q^*(x) \geq Q(x)$ ise $Q^*(x)$, H uzayında wls-süreklidir.

İspat : $Q(x)$ kuadratik formu, H uzayında, wls-sürekli ise *(4.6)* biçiminde gösterilebilir ve $Q^*(x) \geq Q(x)$ olduğundan buradan,

$$P^*(x) = Q^*(x) + K(x) \geq Q(x) + K(x) = P(x) \geq 0$$

olur. O halde $Q^*(x)$ wls-süreklidir.

Teorem 4.2.3 : $Q(x)$ kuadratik formu, H uzayının sonlu boyutlu lineer bir C alt uzayının orthogonal (veya Q-orthogonal) tümleyeninde nonnegatif ise, $Q(x)$, H uzayında wls-süreklidir.

İspat : *(Teorem 4.1.1)*'de tanımlanan H alt uzayının boyutu, C alt uzayının boyutundan büyük olamaz, dolayısıyla H^- alt uzayı sonlu boyutludur, dolayısıyla $Q(x)$ wls-süreklidir.

4.3. Sonlu İndeksli ve Sonlu Sıfırlıklı Kuadratik Formlar

Tanım 4.3.1 : *(Kuadratik formun indeksi ve sıfırlığı)*: Bir $Q(x)$ kuadratik formunun belirlediği ve *(Teorem 4.1.2)*'de tanımı verilen H^- ve H_0 alt uzaylarının boyutuna, sırasıyla, H uzayında $Q(x)$ kuadratik formunun *indeksi* ve *sıfırlığı* denir. $Q(x)$ kuadratik formunun indeksi i ile, sıfırlığı n ile gösterilecektir.

Bu kısımda i ve $i+n$ 'nin sonlu olduğu durumlar incelenecektir, dolayısıyla *(Teorem 4.2.1)* gereği, burada incelenecek olan $Q(x)$ kuadratik formları H uzayında wls-süreklidir. Bu durumda $Q(x)$,Legendre şartını zayıf anlamda sağlar (*bkz.*Bölüm 4.2).

H uzayı yerine kapalı lineer bir B alt uzayı alınırsa, *(Tanım 4.3.1)* yine geçerli olur. Fakat B alt uzayı kapalı değilse, *(Teorem 4.1.2)* in temelini oluşturan tamlık şartı sağlanmayacaktır. Bu yüzden $Q(x)$ kuadratik formunun, H uzayının lineer bir B alt uzayındaki indeksi ve sıfırlığı aşağıdaki gibi tanımlanacaktır:

Tanım 4.3.1 : H uzayının lineer bir B alt uzayında, $Q(x)$ formunun *indeksi*; B nin, $Q(x)$ kuadratik formunun negatif olduğu maksimal bir lineer alt uzayının boyutudur. $Q(x)$ kuadratik formunun *sıfırlığı* ise; B alt uzayının Q-transversal vektörlerinin kümesinin boyutudur.

Bu tanımın geçerliliği, aşağıdaki lemmadan görülebilir;

Lemma 4.3.1 : B, H uzayının lineer bir alt uzayı ve B_0, B alt uzayının Q-transversal vektörlerinin kümesi olmak üzere; $Q(x)$ kuadratik formunun negatif olduğu, B uzayının sonlu boyutlu maksimal lineer bir C alt uzayı var olsun. Bu durumda, D kümesi, C alt uzayına Q-orthogonal olan $x \in B$ vektörlerinden oluşmak üzere, D kümesinde $Q(x) \geq 0$ dır. Eşitlik hali sadece $x \in B_0$ ise geçerlidir. C*, B uzayının, $Q(x) \leq 0$ şartını sağlayan ve B_0 ile sıfır vektöründen başka ortak elemanı olmayan, maksimal lineer bir alt uzay olmak üzere, C* alt uzayının boyutu C alt uzayının boyutuna eşittir.

İspat : C; $Q(x)$ kuadratik formunun negatif olduğu, B uzayının maksimal lineer bir alt uzayı olduğundan, C alt uzayına Q-orthogonal olan bazı $x \in B$ vektörleri için $Q(x) < 0$ olsaydı, C alt uzayının maksimalliği ile çelişilirdi. O halde D kümesinde $Q(x) \geq 0$ dır.

C* alt uzayının boyutu, C alt uzayının boyutundan büyük olsun. Bu durumda, *(Teorem 2.2.4)* gereği (H = B için), C alt uzayına Q-orthogonal (yani $x \in D$) olup C nin elemanı olmayan , sıfırdan farklı bir $x \in C^*$ vektörü vardır . O halde bu vektörler için $Q(x) = 0$ dır ve dolayısıyla $x \in B_0$ olur (çelişki) .

C alt uzayının boyutu, C* alt uzayının boyutundan büyük olsun. Bu durumda, *(Teorem 2.2.4)* gereği C* alt uzayına Q-orthogonal olup C* ın elemanı olmayan, sıfırdan farklı bir $x \in C$ vektörü vardır . $y \in C^*$ olmak üzere, herhangi bir b reel sayısı için $bx + y$ şeklindeki vektörler, C* alt uzayı ile aynı özellikleri sağlayan bir alt uzay doğurur. Bu sonuç ise C* alt uzayının maksimalliği ile çelişir.

O halde C* alt uzayının boyutu, C alt uzayının boyutuna eşittir.

Aşağıdaki teorem, H uzayı tam olmadığında da geçerlidir;

Teorem 4.3.1 : H uzayında, $Q(x)$ kuadratik formunun indeksi i sonlu ise, değeri aşağıdaki özdeş tanımlardan biri ile belirlenebilir;

(1) H uzayının, $Q(x)$ kuadratik formunun negatif olduğu maksimal bir B lineer alt uzayının boyutu.

(2) H uzayının, $Q(x) \leq 0$ koşulunu sağlayan ve H uzayının sıfırdan farklı Q-transversal elemanını içermeyen maksimal bir C lineer alt uzayının boyutu.

(3) k tamsayısı; Q-orthogonal tümleyeninde $Q(x) \geq 0$ şartını sağlayan, H uzayının lineer bir C alt uzayının boyutu olmak üzere, k tamsayılarının en küçüğü.

(4) k tamsayısı; orthogonal tümleyeninde $Q(x) \geq 0$ şartını sağlayan, H uzayının bir D alt uzayının boyutu olmak üzere, k tamsayılarının en küçüğü.

(5) k tamsayısı; $L_\alpha(x) = 0$ ($\alpha = 1,...,k$) için $Q(x) \geq 0$ şartını sağlayan $L_1(x)$,..., $L_k(x)$ lineer formlarının sayısı olmak üzere, k tamsayılarının en küçüğü.

İspat : *(Lemma 4.3.1)* den, H uzayının indeksi i nin değerini tanımlayan (1) ve (2) ifadelerinin özdeş olduğu görülür. Ayrıca (2) deki özellikleri sağlayan bir C alt uzayı aynı zamanda (3) ifadesindeki özellikleri de sağlar. (3) ifadesinde tanımlanan C alt uzayının $Q(z) > 0$ eşitsizliğini sağlayan bir z vektörü var olsun. C*, z vektörüne Q-orthogonal olan tüm x vektörlerinin kümesi olmak üzere, C* kümesi için aşağıdaki özellik geçerlidir;

C* kümesine Q-orthogonal olan bir x vektörü, y vektörü z ye Q-orthogonal olmak üzere, $x = y + b\,z$ biçiminde gösterilebilir. Buradan;

$$Q(x) = Q(y) \; + b^2\, Q(z) \geq 0$$

bulunur ve bu sonuç C alt uzayının seçimi ile çelişir. O halde (2) ve (3) ifadeleri özdeştir. Dolayısıyla (4) ve (5) ifadeleri (3) ifadesine özdeştir. Ayrıca *(Teorem 4.1.1)* de tanımlanan $D = H^-$ alt uzayı (3) ve (4) şıklarındaki özellikleri sağlar.

Sonuç : $Q(x)$ kuadratik formu, H uzayının k boyutlu lineer bir C alt uzayının orthogonal (veya Q-orthogonal) tümleyeninde nonnegatif ise, $Q(x)$ kuadratik formunun indeksi $i \leq k$ dir.

Teorem 4.3.2 : $Q(x)$ kuadratik formunun indeksi ile sıfırlığının toplamı $m = i+n$ sonlu ise, değeri değeri aşağıdaki özdeş tanımlardan biri ile belirlenebilir;

(1) H uzayının, $Q(x) \leq 0$ koşulunu sağlayan maksimal bir B lineer alt uzayının boyutu.

(2) k tamsayısı; $Q(x)$ kuadratik formunun Q-orthogonal tümleyeninde pozitif olduğu, H uzayının lineer bir B alt uzayının boyutu olmak üzere, k tamsayılarının en küçüğü.

(3) k tamsayısı; $x \neq 0$ ve $L_\alpha(x) = 0$ ($\alpha = 1,...,k$) için $Q(x) > 0$ şartını sağlayan $L_1(x)$,..., $L_k(x)$ lineer formlarının sayısı olmak üzere, k tamsayılarının en küçüğü.

İspat : Bu önermeler, *(Teorem 4.3.1)* yardımıyla gösterilebilir. B alt uzayı, *(Teorem 4.1.1)* de tanımlanan H^- ve H_0 alt uzaylarının doğrudan toplamı olmak üzere teoremdeki şartları sağlar.

Sonuç : Q(x) kuadratik formu, H uzayının sonlu k boyutlu lineer bir C alt uzayının orthogonal tümleyeninde pozitif ise, Q(x) formunun indeksi ile sıfırlığının toplamı $m \leq k$ dır.

Bu sonuçtan aşağıdaki teorem elde edilir;

Teorem 4.3.3 : H*, H uzayının lineer bir alt uzayı ve H ve H* uzaylarında Q(x) kuadratik formunun indeksi ve sıfırlığı sırasıyla i, i^* ve n, n^* olmak üzere ve d, elemanları hem H uzayının hem de H* uzayının Q-transversal vektörlerinin kümesi olan D nin boyutu ise;

$$i^* \leq i \qquad i^* + n^* \leq i + d \leq i + n \tag{4.7}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Benzer bir sonuç aşağıda verilmiştir;

Teorem 4.3.4 : H uzayında Q*(x) ≥ Q(x) ve Q(x), Q*(x) kuadratik formlarının indeksleri i, i^* ve sıfırlıkları n, n^* olmak üzere ve d, H uzayının hem Q-orthogonal hem de Q*-orthogonal vektörü olan x vektörlerinin kümesi D nin boyutu ise; *(4.7)* ile verilen eşitsizlikler geçerlidir. Eğer H uzayının her $x \neq 0$ vektörü için Q*(x) > Q(x) ise;

$$i^* + n^* \leq i \tag{4.8}$$

olur.

H*, H uzayının sonlu boyutlu lineer bir alt uzayının orthogonal tümleyeni ise aşağıdaki teorem elde edilir;

Teorem 4.3.5 : $L_1(x)$,...., $L_k(x)$,H uzayında tanımlı k tane lineer bağımsız lineer form olmak üzere, H* , $L_\alpha(x) = 0$ ($\alpha = 1,...,k$) eşitliğini sağlayan tüm x vektörlerinin kümesi olsun. Bu durumda i, i^*, n, n^*, d sayıları *(Teorem 4.3.3)* deki biçimde tanımlanmak üzere, *(4.7)* eşitsizliklerinin yanısıra aşağıdaki eşitsizlik sağlanır;

$$i + n \leq i^* + d + k . \tag{4.9}$$

BÖLÜM 5

LEGENDRE FORMLARI

5.1. Tekil olmayan ve Pozitif Belirli Kuadratik Formlar

Tanım 5.1.1 : *(Tekil olmayan form)*: B, H uzayının lineer bir alt uzayı olmak üzere, belirli bir L(x) lineer formu ve her $x \in$ B için;

$$\mathrm{L}(x) = \mathrm{Q}(y\,,x) \tag{5.1}$$

eşitliğini sağlayan tek türlü belirli bir $y \in$ B vektörü varsa, Q(x) kuadratik formuna lineer B alt uzayında *tekil olmayan form* denir.

Tanım 5.1.2 : *(Pozitif belirlilik)*: H uzayının lineer bir B alt uzayında,

$$\mathrm{Q}(x) \geq h \mid x \mid^2 \tag{5.2}$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir h sayısı varsa, Q(x) kuadratik formu B alt uzayında *pozitif belirlidir* denir. H uzayında pozitif belirli olan kuadratik formlar D(x) ve bu kuadratik forma karşılık gelen bilineer form D(x , y) biçiminde gösterilecektir.

Lemma 5.1.1 : Q(x), H uzayının lineer bir B alt uzayında tekil olmayan kuadratik form ise, H uzayı B alt uzayı ile B nin Q-orthogonal tümleyeni olan C alt uzayının doğrudan toplamıdır (H = B ⊕ C) ve B alt uzayı kapalıdır.

İspat : Q(x), B alt uzayında tekil olmayan bir kuadratik form ise, belirli bir $x_0 \in$ H ve her $y \in$ B vektörü için, L(y) = Q(x_0 , y) = Q(y_0 , y) eşitliğini sağlayan tek türlü belirli bir $y_0 \in$ B vektörü vardır. O halde her $y \in$ B vektörü için, Q($x_0 - y_0$, y) = 0 dir ve dolayısıyla, $z_0 = x_0 - y_0$ vektörü B alt uzayına Q-orthogonaldir. Yani $z_0 = x_0 - y_0 \in$ C olup, H uzayı B ile C alt uzaylarının doğrudan toplamıdır.

$\{y_q\}$ dizisi, $y_q \in$ B olmak üzere bir $x_0 \in$ H vektörüne yakınsasın ve $y_0 \in$B , $z_0 \in$C vektörleri $x_0 = z_0 + y_0$ olacak biçimde seçilmiş olsun. Bu durumda,

$$|x_0 - y_0|^2 = (x_0 - y_0\,, x_0 - y_0) = \lim_{q\to\infty}(x_0 - y_0\,, y_q - y_0)$$

olur ve Q(x), B alt uzayında tekil olmayan form olduğundan, her $y \in$ B için, L*(y) = ($x_0 - y_0$, y) = Q($\bar{y}$, y) eşitliğini sağlayan bir $\bar{y} \in$ B vektörü vardır. O halde,

$$|x_0 - y_0|^2 = \lim_{q\to\infty} Q(\bar{y}, y_q - y_0)$$

eşitliği elde edilir. Burada y_0 yerine $x_0 - z_0$ konacak olursa, $\bar{y} \in$ B ve $z_0 \in$ C olduğundan Q($\bar{y}$, z_0) = 0 olur ve buradan,

$$|x_0 - y_0|^2 = \lim_{q\to\infty} Q(\bar{y}, y_q - x_0) = 0$$

ve dolayısıyla $x_0 = y_0$ bulunur. O halde $y_q \Rightarrow y_0 \in$ B olur, yani B alt uzayı kapalıdır.

Teorem 5.1.1 : D(x), H uzayında tanımlı pozitif bir kuadratik form ise, aşağıdaki ifadeler birbirine özdeştir;

(1) D(x) pozitif belirlidir.

(2) D(x_q) $\to$ 0 ise $x_q \Rightarrow 0$.

(3) $x_q \to x_0$ ve D(x_q) $\to$ D(x_0) ise $x_q \Rightarrow x_0$.

(4) {D(x_q)} dizisi sınırlı ise {x_q} dizisinin zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır.

(5) {D(x_q , y)} dizisi, her $y \in$ H için sınırlı ise {x_q} dizisinin zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır.

(6) D(x), H uzayında tekil olmayan kuadratik formdur.

(7) B , H uzayının kapalı lineer bir alt uzayı ise, H uzayı, B alt uzayı ile B nin D-orthogonal tümleyeninin doğrudan toplamıdır.

İspat : (1) $\Rightarrow$ (2): D(x) pozitif belirli ise, D(x) $\geq h$ | x |^2 eşitsizliğini sağlayan pozitif bir h sayısı vardır. O halde, D(x_q) $\to$ 0 ise $\lim_{q\to\infty}$D(x_q) = 0 olup yukarıdaki eşitsizlik kullanılırsa;

$$0 \leq \lim_{q\to\infty} h|x_q|^2 \leq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\lim_{q\to\infty}|x_q|^2 \to 0$, yani $x_q \Rightarrow 0$ dır.

(2) $\Rightarrow$ (3): $x_q \to x_0$ ve D(x_q) $\to$ D(x_0) ise ve

$$D(x_q) - D(x_0) = 2\, D(x_q - x_0 , x_0) + D(x_q - x_0)$$

eşitliği gözönüne alınırsa, , $\lim_{q\to\infty}$ D($x_q - x_0$) = 0 olur. Buradan, (2) önermesi gereği $x_q - x_0 \Rightarrow 0$, yani $x_q \Rightarrow x_0$ bulunur.

(1) $\Leftarrow$ (3): x_q ve x_0 vektörleri, | x_q | = 1 , D(x_q) < 1 / q ve $x_q \to x_0$ olacak biçimde seçilsin (yani (1) önermesi sağlanmasın), buradan;

$$0 = \lim_{q\to\infty} D(x_q) \geq D(x_0) = 0$$

elde edilir. O halde, $x_0 = 0$ dır ve (3) önermesi gereği $x_q \Rightarrow 0$ olur. Fakat bu sonuç, $|x_q| = 1$ seçimi ile çelişir.

(1) $\Rightarrow$ (4): D(x) pozitif belirli ve $\{D(x_q)\}$ dizisi sınırlı ise,

$$M \geq D(x_q) \geq h\,|x_q|^2$$

eşitsizliğini sağlayan bir M > 0 sayısı vardır, yani $\{|x_q|\}$ dizisi de sınırlıdır. Dolayısıyla $\{x_q\}$ dizisinin zayıf yakınsak bir alt dizisi vardır ([19]).

(1) $\Leftarrow$ (4): x_q ve x_0 vektörleri, $1 = D(x_q) \leq (1/q)\,|x_q|^2$ ve $x_q \to x_0$ olacak biçimde seçilsin (yani (1) önermesi sağlanmasın), yukarıdaki eşitsizlikten $|x_q|^2 > q$ elde edilir. fakat (4) önermesi gereği $\{|x_q|\}$ sınırlı olmalıdır (çelişki).

(1) veya (4) $\Rightarrow$ (5): L(x) lineer bir form olmak üzere, $f(x) = D(x) - 2\,L(x)$ fonksiyonu wls-sürekli ve azalan, sınırlı bir alt diziye sahiptir, bu durumda f(x) fonksiyonunun minimuma eriştiği bir y vektörü vardır. $g(t) = f(y + tx)$ fonksiyonunu gözönüne alınırsa, her $x \in H$ için;

$$g(t) = 2\,D(y) + 2\,t\,D(x,y) + t^2 D(x) - L(y) - 2\,t\,L(x)$$

dir ve $t = 0$ için $g(0) = f(y)$ olacağından (y de minimum);

$$g'(0) = 2\,D(y,x) - 2\,L(x) = 0$$

olur ve buradan,

$$L(x) = D(y\,,x)$$

bulunur ve D(x) pozitif olduğundan fonksiyonunun minimuma eriştiği tek bir y vektörü vardır. O halde D(x), tekil olmayan kuadratik formdur.

(5) $\Leftarrow$ (6): Eğer D(x) tekil olmayan kuadratik form ise (z,x) iç çarpımı $(z,x) = D(y,x)$ biçiminde yazılabilir (*Riezs Teoremi*) ve tersi de doğrudur. O halde, $\{(z,x_q)\}$ dizisi her $z \in H$ için sınırlı ise $|D(y,x_q)| = |(z,x_q)| \leq M$ ve dolayısıyla $\{D(y,x_q)\}$ dizisi sınırlı olur. $|(z,x_q)| \leq N\,|x_q|$ olduğundan, $\{(z,x_q)\}$ dizisinin her $z \in H$ için sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\{|x_q|\}$ dizisinin sınırlı olmasıdır. Yani ancak (6) önermesi sağlanıyorsa (5) önermesini sağlanır.

(5) $\Rightarrow$ (4): Schwarz eşitsizliğinden $|D(x,y)|^2 \leq D(x)\,D(y)$ olduğundan, $\{|D(x_q)|\}$ dizisi sınırlı ise $\{|D(y,x_q)|\}$ dizisi de sınırlı olur ve dolayısıyla (5) sağlanıyorsa (4) önermesi de sağlanır.

(6) $\Rightarrow$ (7): *(Lemma 5.1)* gereği, D(x) tekil olmayan kuadratik form ise; H uzayı, H nin kapalı lineer alt uzayı B ile B nin D-orthogonal tümleyeninin doğrudan toplamıdır.

(6) $\Leftarrow$ (7): Bir L(x) lineer formu, $x_0 \neq 0$ olmak üzere L(x) = (x_0 , x) biçiminde yazılabilir. B, L(x) = 0 eşitliğini sağlayan vektörlerin kümesi olsun. $x_0 = y_0 + z_0$ olacak biçimde, $y_0 \in$ B ve C , B kümesinin D-orthogonal tümleyeni olmak üzere, $z_0 \in$ C vektörlerini gözönüne alalım. $x_0 \neq 0$ olduğundan, $z_0 \neq 0$ dır. L(x) = 0 ise D(z_0 , x) = 0 olacağından, D(z_0 , x) = k L(x) olacak biçimde bir k sabiti vardır. O halde $z = (1/\, k)\, z_0$ olmak üzere, D(z , x) = L(x) dir.

Lemma 5.1.2: H uzayı, B ve C alt uzaylarının doğrudan toplamı ve B, C birbirine Q-orthogonal alt uzaylar olsun. Q(x), H uzayında tekil olmayan kuadratik form olması için gerek ve yeter şart Q(x)'in, B ve C alt uzaylarında tekil olmayan kuadratik form olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: Q(x), H uzayında tekil olmayan kuadratik form ise, H uzayında; L(x) = Q(x_0 , x) eşitliğini sağlayan tek bir $x_0 \in$ H vektörü vardır. $x_0 = y_0 + z_0$ olacak biçimde, $y_0 \in$ B ve $z_0 \in$ C vektörlerini gözönüne alalım. Bu durumda, her $y \in$ B için;

$$L(y) = Q(y_0 + z_0\, , y) = Q(y_0\, , y)\, ,$$

ve benzer şekilde, her $z \in$ C için;

$$L(z) = Q(z_0\, , z)$$

eşitliği elde edilir. Bu gösterimlerin tekliği kolayca gösterilebilir (iki farklı gösterim olduğu farzedilerek çelişkiye varılır).

$\Leftarrow$: Q(x); B ve C alt uzaylarında tekil olmayan kuadratik form ise, B alt uzayında L(y) = Q(y_0 , y) ve C alt uzayında L(z) = Q(z_0 , z) olacak biçimde tek türlü belirli $y_0 \in$ B ve $z_0 \in$ C vektörleri vardır. H uzayı, B ve C alt uzaylarının doğrudan toplamı olduğundan, H uzayında;

$$L(x) = Q(y_0 + z_0\, , x)$$

olur ve bu gösterilişin tek türlü belirli olduğu da kolayca gösterilebilir.

Teorem 5.1.2: Q(x); H uzayının her kapalı alt uzayında tekil olmayan kuadratik form ise, Q(x) veya –Q(x), H uzayında pozitif belirlidir.

İspat: $x_0 \neq 0$ olmak üzere $Q(x_0) = 0$ olsun. Bu durumda, B; x_0 vektörünün Q-orthogonal tümleyeni olmak üzere, B alt uzayı kapalıdır ve $x_0 \in B$ olur. Ayrıca, $y \in B$ ise her $x \in B$ için, $Q(y + x_0 , x) = Q(y , x)$ eşitliği elde edilir. Bu durumda $Q(x)$, B alt uzayında tekil olmayan form değildir. Bu sonuç, lemmanın hipoteziyle çelişir. O halde $x_0 \neq 0$ için $Q(x_0) > 0$ veya $Q(x_0) < 0$ dır. Yani, $Q(x)$ ve $-Q(x)$ formlarından biri H uzayında pozitiftir ve tekil olmayan kuadratik formdur, dolayısıyla H uzayında pozitif belirlidir.

Teorem 5.1.3: H uzayının her kapalı lineer B alt uzayı için, H uzayı B alt uzayının ve B nin Q-orthogonal tümleyeninin doğrudan toplamı ise, $Q(x)$ ve $-Q(x)$ formlarından biri H uzayında pozitif belirlidir.

Bölüm 3 de *(3.4)* eşitliğiyle tanımlanan kuadratik form pozitif belirli formlara bir örnektir.

5.2. Legendre Formları

Tanım 5.2.1: Aşağıdaki koşulları sağlayan bir $J(x)$ kuadratik formuna *Legendre formu* denir:

(1) $J(x)$, H uzayında wls-sürekli,

(2) $x_q \rightarrow x_0$ ve $J(x_q) \rightarrow J(x_0)$ ise, $x_q \Rightarrow x_0$.

Legendre formları genelde $J(x)$ ile, bilineer formları ise $J(x , y)$ ile gösterilir. Legendre formları Legendre'nin güçlendirilmiş şartını sağlarlar.

Teorem 5.2.1: Pozitif bir Legendre formu pozitif belirlidir.

İspat: Legendre formları tanım gereği *(Teorem 5.1.1)* 'in (3). önermesini sağlar, dolayısıyla pozitif bir Legendre formu pozitif belirlidir .

Teorem 5.2.2: H uzayının, $J(x)$ Legendre formunun nonpozitif olduğu lineer bir B alt uzayı sonlu boyutludur.

İspat: *(Lemma 4.2.2)* gereği $J(x)$ w-süreklidir. Bu durumda, $x_q \rightarrow x_0$ ise $J(x_q) \rightarrow J(x_0)$ dir ve buradan, Legendre formunun tanımı gereği $x_q \Rightarrow x_0$ elde edilir. O halde B uzayında, zayıf ve güçlü yakınsaklık birbirine özdeştir. Bu ise ancak sonlu boyutlu uzaylarda mümkündür.

Teorem 5.2.3: Legendre formunun indeksi ve sıfırlığı sonludur.

İspat: *(Teorem 5.2.2)* gereği, *(Teorem 4.1.1)* de tanımlanan, J(x) Legendre formunun belirlediği H^- ve H_0 alt uzayları sonlu boyutludur ve böylece *(Tanım 4.3.1)*' den indeks ve sıfırlığın sonlu olduğu sonucu çıkar.

(Teorem 5.2.1) ve *(Teorem 5.2.3)* birlikte ele alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir;

Teorem 5.2.4: Bir J(x) kuadratik formunun, H uzayında Legendre formu olması için gerek ve yeter koşul, H uzayında, J(x) formunun orthogonal tümleyeninde pozitif belirli olduğu lineer bir B alt kümesinin var olmasıdır. J(x), H uzayının lineer bir B alt uzayının orthogonal tümleyeninde Legendre formu ise, H uzayında da bir Legendre formudur.

Teorem 5.2.5: Bir J(x) Legendre formu ile w-sürekli bir K(x) kuadratik formunun toplamı J(x) + K(x), yine bir Legendre formudur.

İspat: K(x), w-sürekli ise aynı zamanda wls-süreklidir, J(x) Legendre formu da tanımı gereği wls-sürekli olduğundan J(x) + K(x) formu wls-süreklidir. Bununla birlikte, $x_q \to x_0$ için J(x) + K(x) $\to$ J(x) + K(x) ise, K(x) w-sürekli olduğundan, J(x_q) $\to$ J(x_0) dır. Ayrıca, J(x) bir Legendre formu olduğundan buradan $x_q \Rightarrow x_0$ sonucu elde edilir.

Teorem 5.2.6: Bir J(x) kuadratik formunun, H uzayında Legendre formu olması için gerek ve yeter koşul, D(x) pozitif belirli ve K(x) w-sürekli bir kuadratik form olmak üzere, J(x) formunun;

$$J(x) = D(x) - K(x) \qquad (5.3)$$

biçiminde gösterilebilmesidir. K(x) formu, H uzayında negatif olmayan (nonnegatif) kuadratik form olarak da tanımlanabilir.

İspat: $\Rightarrow$: $\{x_1, ..., x_n\}$, H uzayına J-orthogonal olan vektörler kümesinin bir tabanı olmak üzere, *(Teorem 4.1.2)* de tanımlanan, J(x) formunun belirlediği P(x) ve N(x) kuadratik formlarını gözönüne alalım. Bu durumda, J(x) = P(x) – N(x) dir ve;

$$D(x) = P(x) + N(x) + (x_\alpha, x)\,(x_\alpha, x)$$

formu H uzayında pozitiftir. *(Teorem 4.2.2)* nin ispatında N(x) kuadratik formunun w-sürekli olduğu gösterilmişti. Ayrıca,

$$K(x) = D(x) - J(x) = 2\,N(x) + (x_\alpha , x)\,(x_\alpha , x)$$

eşitliği gözönüne alınırsa, D(x) ile J(x) formlarının farkı w-sürekli olduğundan buradan, D(x) formunun H uzayında bir Legendre formu olduğu sonucu elde edilir. D(x) formu H uzayında pozitif olduğundan *(Teorem 5.2.1)* gereği pozitif belirlidir.

$\Leftarrow$: J(x) formu *(5.3)* biçiminde gösterilebiliyorsa, *(Teorem 5.2.5)* gereği, bir Legendre formudur.

Sonuç 1: J(x) bir Legendre formu ise, H uzayının K(x) = 0 eşitliğini sağlayan her $x \neq 0$ vektörü için, J(x) > 0 eşitsizliğini gerçekleyen nonnegatif w-sürekli bir K(x) formu vardır.

Sonuç 2: J(x) formu, H uzayında bir Legendre formu ve J*(x), H uzayında J*(x) $\geq$ J(x) şartını sağlayan bir kuadratik form ise, J*(x) H uzayında bir Legendre formudur.

Teoremde tanımlanan, J(x) formunun belirlediği D(x) ve K(x) kuadratik formlarını gözönüne alalım. Bu durumda,

$$D^*(x) = J^*(x) + K(x) \geq J(x) + K(x) = D(x)\,.$$

Bu eşitsizlikten, D*(x) formunun H uzayında pozitif belirli ve dolayısıyla J*(x) formunun bir Legendre formu olduğu anlaşılır.

Legendre formunun tanımında yer alan (2). şart, işaretinden bağımsız olarak Legendre formunu belirler;

Teorem 5.2.7: Bir Q(x) kuadratik formu, " $x_q \rightarrow x_0$ ve $Q(x_q) \rightarrow Q(x_0)$ ise $x_q \Rightarrow x_0$" şartını sağlıyorsa, Q(x) veya –Q(x), H uzayında bir Legendre formudur.

İspat: Q(x) veya –Q(x), H uzayında wls-süreklidir. $\{y_q\}$ ve $\{z_q\}$dizilerini gözönüne alalım, öyle ki ; bu diziler y_0 ve z_0 vektörlerine zayıf yakınsasın ve ;

$$A < Q(y_q), \quad C > Q(z_0) \qquad (5.4)$$

olmak üzere, $Q(y_q)$, $Q(y_q\,,\,z_q)$, $Q(z_q)$ formları A,B,C sayılarına yakınsasın. Bu durumda,

$$[\,A - Q(y_0)\,]\,a^2 + 2\,a\,[\,B - Q(y_0\,,z_0)\,] + C - Q(z_0) = 0 \qquad (5.5)$$

denkleminin a_1 ve a_2 gibi farklı reel iki kökü vardır. O halde;

$$x_{q\alpha} = a_\alpha y_q + z_q \rightarrow x_{0\alpha} = a_\alpha y_0 + z_0 \qquad (\,\alpha = 1,2\,).$$

Bununla birlikte,

$$Q(x_{q\alpha}) = Q(y_q)\,a_\alpha^{\,2} + 2\,a_\alpha\,Q(y_q\,,z_q) + Q(z_q)$$

olup *(5.5)* denkleminden,

$$\lim_{q\to\infty} Q(x_{q\alpha}) = A\, a_\alpha^2 + 2\, a_\alpha B + C = Q(x_{0\alpha})\,.$$

Hipotez gereği, $x_{q\alpha} \Rightarrow x_{0\alpha}$ olur. $a_1 \neq a_2$ olduğundan, ancak $y_q \Rightarrow y_0$ ve $z_q \Rightarrow z_0$ ise $x_{q\alpha} \Rightarrow x_{0\alpha}$ olabilir. Fakat, bu durumda $A = Q(y_0)$ ve $C = Q(z_0)$ olup *(5.4)* şartlarıyla çelişkiye varılır.

İllüstrasyon: Bölüm 3'deki *(Teorem 3.1.1)* ve *(Teorem 3.1.4)* teoremlerinde gözönüne alınan ve *(3.6)* eşitliğiyle tanımlanan $J(x)$ integralinin H uzayında bir Legendre formu olması için gerek ve yeter şart *(3.9)* eşitliği ile verilen, Legendre'nin güçlendirilmiş şartını sağlamasıdır. Bununla birlikte, *(Teorem 5.2.4)* de gözönüne alınan $J(x)$ kuadratik formu, H uzayının;

$$L_\alpha(x) = a_{\alpha j}\, x^j(a) + b_{\alpha j}\, x^j(b) + \int_a^b \{ A_{j\alpha}(t) x^j + B_{j\alpha}(t) \dot{x}^j \}\, dt = 0 \qquad (\alpha = 1,\dots,m)$$

eşitliklerini sağlayan fonksiyonlarının kümesi olan B lineer bir alt uzayında bir Legendre formu olması için gerek ve yeter şart *(3.9)* eşitliği ile verilen, Legendre şartının sağlanmasıdır.

BÖLÜM 6

VARYASYONLAR HESABINDA KUADRATİK FORMLAR

$A=A(t)$, $B=B(t)$ ve $C=C(t)$; $[t_0\ ,\ t_1]$ aralığında sürekli fonksiyonlar olmak üzere;

$$K(x(.))=\int_{t_0}^{t_1} K(t,x,\dot{x})\,dt=\int_{t_0}^{t_1}(A\dot{x}^2+2C\dot{x}x+Bx^2)\,dt \qquad (6.1)$$

kuadratik formu, varyasyon hesabının temel fonksiyonelinin 2. varyansı olduğundan büyük önem taşımaktadır. Bu bölümde $K(x)$ kuadratik formu, aşağıda özellikleri verilecek olan $W_{2,1}([t_0\ ,\ t_1])$ uzayında incelenecektir.

6.1. $W_{2,1}([t_0\ ,\ t_1])$ Uzayı

$[t_0\ ,\ t_1]$ kapalı aralığında mutlak sürekli olan, türevinin karesi ise Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyonların uzayı $W_{2,1}([t_0\ ,\ t_1])$ biçiminde gösterilir. Bu uzay,

$$(x(t),y(t))=x(t_0)y(t_0)+\int_{t_0}^{t_1}\dot{x}(t)\dot{y}(t)\,dt \qquad (6.2)$$

eşitliği ile tanımlanan iç çarpım işlemine göre bir Hilbert uzayıdır. $W_{2,1}([t_0\ ,\ t_1])$ uzayının $x(t_0) = x(t_1) = 0$ şartını sağlayan fonksiyonlardan oluşan alt uzayı $\overset{0}{W}_{1,2}([t_0,t_1])$ biçiminde gösterilir.

Teorem 6.1.1: $\xi \neq 0$ olmak üzere, $\xi \in R$ herhangi bir sayı, $\tau \in [t_0\ ,\ t_1]$ herhangi bir nokta ise, $\bar{x} \equiv 0$ fonksiyonuna $W_{2,1}([t_0\ ,\ t_1])$ uzayında zayıf yakınsayan, fakat güçlü yakınsak olmayan bir $x_m(t;\xi,\tau)$ dizisi vardır ve bu dizi aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\lim_{m\to\infty} K(x_m(.)) = A(\tau)\xi^2 . \qquad (6.3)$$

İspat: τ noktası $[t_0, t_1]$ aralığının iç noktası olsun. $\Delta_m = \{t: |t-\tau| < 1/2m\}$ olmak üzere, $\{x_m(t;\xi,\tau)\}$ dizisi,

$$x_m(t;\xi,\tau) = \begin{cases} \dfrac{\xi}{2\sqrt{m}} - \xi\sqrt{m}\,|t-\tau|, & t \in \Delta_m \\ 0 & , \ t \notin \Delta_m \end{cases} \tag{6.4}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $\|x(.,\xi,\tau)\|_{W_{2,1}([t_0,t_1])} = |\xi| \neq 0$ dır. Dolayısıyla, $\{x_m(t;\xi,\tau)\}$ dizisi sıfıra güçlü yakınsak değildir. Fakat, $\lim_{m\to\infty} \Delta_m = 0$ olduğundan, Cauchy Schwarz eşitsizliği kullanılarak, her $y(t) \in W_{2,1}([t_0, t_1])$ ve $m\to\infty$ için;

$$|(x_m(.;\xi,\tau), y(.))| = |\int_{\Delta_m} \dot{x}_m(t;\xi,\tau)\,\dot{y}(t)\,dt| \le \|x_m(.;\xi,\tau)\|(\int_{\Delta_m} \dot{y}(t)\,dt)^{1/2} \to 0$$

elde edilir. Yani $\{x_m(t;\xi,\tau)\}$ dizisi sıfıra zayıf yakınsaktır.

Bu durumda *(Lemma 3.1.1)* gereği $m\to\infty$ için $\{x_m(t;\xi,\tau)\}$ dizisi $\bar{x} \equiv 0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olacağından, *(6.1)* eşitliğinin sağ tarafındaki $\int_{\Delta_m} Bx^2\,dt$ ifadesi için,

$$\int_{\Delta_m} B(t)\,x_m^2(t;\xi,\tau)\,dt \le \frac{C}{m}\max_{t_0 \le t \le t_p} |B(t)| = O\left(\frac{1}{m}\right)$$

olur. Ayrıca, $C(t)\dot{x}_m(t;\xi,\tau)x_m(t;\xi,\tau)dt$ çarpımı düzgün sınırlıdır ve $m\to\infty$ için;

$$\int_{\Delta_m} C(t)\,\dot{x}_m(t;\xi,\tau)\,x_m(t;\xi,\tau)\,dt \to 0$$

elde edilir. Son olarak, ortalama değer teoremi kullanılarak;

$$\int_{\Delta_m} A(t)\,x_m^2(t;\xi,\tau)\,dt \to A(\tau)\xi^2$$

bulunur.

Teorem 6.1.2 : $\{x_m(t)\}$ dizisi $x(t)$ fonksiyonuna $W_{2,1}([t_0, t_1])$ uzayında zayıf yakınsak ise, bu dizi aynı fonksiyona $L_2[t_0, t_1]$ uzayında güçlü yakınsaktır.

İspat: Banach-Steinhaus teoremi gereği ([16]), $\{x_m(.)\}$ dizisi $x(.)$ fonksiyonuna zayıf yakınsak ise, $\{x_m(.)\}$ dizisi $W_{2,1}([t_0, t_1])$ uzayında güçlü sınırlıdır, yani;

$$x_m^2(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}_m^2(t)\,dt \le C_1^2 \tag{6.5}$$

eşitsizliğini sağlayan C_1 sayısı vardır.

Ayrıca, $e(.,\tau)$ fonksiyonunu;

$$(x_m(.),e(.,\tau))=\int_{t_0}^{\tau}\dot{x}_m(t)dt=x_m(\tau)-x_m(t_0)$$

eşitliğini sağlayacak biçimde seçersek buradan,

$$(x(.),e(.,\tau))=x(\tau)-x(t_0)$$

elde edilir. $x_m(t_0) \to x\ (t_0)$ olduğu gözönünde bulundurulursa, her $t \in [t_0\ ,\ t_1]$ için $x_m(t) \to x\ (t)$ olur.

Ayrıca, Cauchy eşitsizliği kullanılarak,

$$|x_m(t)-x_m(t_0)| \le \sqrt{t-t_0}\,|x_m(.)|^2_{W_{2,1}[t_0,t_1]}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan Lebesgue teoremi ([15]) gereği, $\int_{t_0}^{t_1}(x_m(t)-x(t))^2\,dt \to 0$, yani $x_m \xrightarrow{L_2} x$ bulunur.

6.2. $K(x)$ Kuadratik Formunun Özellikleri

Bu kısımda, *(6.1)* eşitliği ile tanımlanan $K(x)$ kuadratik formunun zayıf sürekliliği, wls-sürekliliği ve Legendre formu olma şartı incelenmiştir.

Teorem 6.2.1 : $K(x)$ kuadratik formunun $W_{2,1}$ ($[t_0\ ,\ t_1]$) uzayında zayıf sürekli olması için gerek ve yeter şart $A(t) \equiv 0$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $K(x)$ kuadratik formu zayıf sürekli, fakat $A(t) \neq 0$ olsun. $A(t)$ sürekli olduğundan, $A(\tau) \neq 0$ olacak biçimde $\tau \in (t_0\ ,\ t_1)$ elemanı vardır. O halde, bazı $\xi \neq 0$ için, $A(\tau)\ \xi^2 \neq 0$ olur. *(Teorem 6.1.1)* de tanımlanan $x_m(t;\xi,\tau)$ dizisi gözönüne alınırsa, $x_m(.;\xi,\tau)$ dizisi sıfıra zayıf yakınsak ve $K(x_m(.)) \to A(\tau)\xi^2$ olduğundan, $A(\tau)\ \xi^2 = 0$ bulunur (çelişki). O halde, her $t \in [t_0\ ,\ t_1]$ için $A(t) \equiv 0$ dır.

$\Leftarrow$: $A(t) \equiv 0$ ise *(6.1)* eşitliğinden,

$$K(x_m(.)) = \int_{t_0}^{t_1}(2C\dot{x}x+Bx^2)\,dt$$

olur. *(Teorem 6.1.2)* de, $\{x_m(t)\}$ dizisi $x(t)$ fonksiyonuna $W_{2,1}$ $([t_0\ ,\ t_1])$ uzayında zayıf yakınsadığında, bu dizinin aynı fonksiyona $L_2[\ t_0\ ,\ t_1]$ uzayında güçlü yakınsak olduğu gösterilmişti. Ayrıca, $W_{2,1}$ $([t_0\ ,\ t_1])$ uzayında zayıf yakınsaklığın tanımına göre, $x_m \to x$ ise $L_2[t_0,t_1]$ uzayında $\dot{x}_m(t) \to \dot{x}(t)$ dır. O halde,

$$\int_{t_0}^{t_1} B(t)x_m^2(t)\,dt \to \int_{t_0}^{t_1} B(t)x^2(t)\,dt$$

ve

$$\int_{t_0}^{t_1} C(t)\dot{x}_m(t)x_m(t)\,dt \to \int_{t_0}^{t_1} C(t)\dot{x}(t)x(t)\,dt$$

dolayısıyla, $K(x_m) \to K(x)$ bulunur.

Teorem 6.2.2: $K(x)$ formunun $W_{2,1}$ $([t_0\ ,\ t_1])$ uzayında wls-sürekli olması için gerek ve yeter şart, her $t \in [t_0\ ,\ t_1]$ için $A(t) \geq 0$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $K(x)$ fonksiyoneli wls-sürekli, fakat bazı $\tau \in [t_0\ ,\ t_1]$ için $A(\tau) < 0$ olsun. Eğer yine *(Teorem 6.1.1)* de tanımlanan $x_m(t;\xi,\tau)$ dizisi gözönüne alınırsa, $x_m(.;\xi,\tau)$ dizisinin sıfıra yakınsadığı ve $K(x_m(.)) \to A(\tau)\xi^2 < 0 = K(0)$ olduğu görülür. Bu sonuç ise $K(x)$ formunun wls-sürekli olmasıyla çelişir. O halde her $t \in [t_0\ ,\ t_1]$ için $A(t) \geq 0$ dır.

$\Leftarrow$: Her $t \in [t_0\ ,\ t_1]$ için $A(t) \geq 0$ olsun. $K(x)$ formunun;

$$K_1(x(.)) = \int_{t_0}^{t_1} A(t)\dot{x}^2\,dt \quad \text{ve} \quad K_2(x(.)) = K_1(x(.)) - K(x(.)) \tag{6.6}$$

olmak üzere, $K(x) = K_1(x) - K_2(x)$ biçimindeki yazılışı gözönüne alınırsa, $K_1(x(.))$ nonnegatif ve $K_2(x(.))$ w-sürekli olduğundan, *(Teorem 4.2.2)* gereği $K(x)$ formu wls-süreklidir.

Teorem 6.2.3: $K(x)$ fonksiyonelinin Legendre formu olması için gerek ve yeter şart, her $t \in [t_0\ ,\ t_1]$ için $A(t) > 0$ olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$: $K(x)$ fonksiyoneli bir Legendre formu olsun. Bu durumda, yukarıdaki (Teorem 6.2.2)'den, $A(t) \geq 0$ şartının gerekliliği görülmektedir. Fakat $\xi \neq 0$ için $A(\tau)\xi^2 = 0$ olduğunda, *(Teorem 6.1.1)* de tanımlanan $x_m(t;\xi,\tau)$ dizisi için,

$$K(x_m(.)) \to A(\tau)\xi^2 = 0$$

elde edilir ve $K(x)$ bir Legendre formu olduğundan buradan, $x_m(.;\xi,\tau)$ dizisinin sıfıra güçlü yakınsadığı bulunur (çelişki). O halde $A(t) > 0$ olmalıdır.

$\Leftarrow$: Her $t \in [t_0\,, t_1]$ için $A(t) > 0$ olsun. Bu durumda $K(x)$ formu, *(Teorem 6.2.2)* gereği, $W_{2,1}$ $([t_0\,, t_1])$ uzayında wls-süreklidir. Diğer taraftan, $x_m \to x$ ve $K(x_m) \to K(x)$ olsun. $A(t) > 0$ olduğundan,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\dot{x}_m(t) - \dot{x}(t)|^2\, dt \leq \gamma \int_{t_0}^{t_1} A(t)(\dot{x}_m(t) - \dot{x}(t))^2\, dt$$

ve *(6.6)* eşitliklerini gözönüne almakla buradan,

$$\int_{t_0}^{t_1} |\dot{x}_m(t) - \dot{x}(t)|^2\, dt \leq \gamma\,(K_1(x_m) + K_1(x)) - 2\gamma \int_{t_0}^{t_1} A(t)\dot{x}(t)\dot{x}_m(t)\, dt$$

eşitsizliği elde edilir. Burada *(Lemma 3.1.1)* ve $K_1(x_m) \to K_1(x)$ olduğu gözönüne alınırsa $\int_{t_0}^{t_1} |\dot{x}_m(t) - \dot{x}(t)|^2\, dt \to 0$ bulunur. Böylece *(6.2)* tanımı kullanılarak, $W_{2,1}$ $([t_0\,, t_1])$ uzayında, $x_m \Rightarrow x$ bulunur. Yani $K(x_m)$ bir Legendre formudur.

SONUÇLAR

Hilbert uzayında geçerli olan teoremlerin Varyasyonlar Hesabına uygulanmasında, kendine eş operatörler yerine, kuadratik formları kullanmak daha elverişli olduğundan, bu çalışmada; operatörler için geçerli sonuçlar kuadratik formlar cinsinden ele alınmıştır.

Hilbert uzayında tanımlı kuadratik formlar teorisini Varyasyonlar Hesabına uygulayabilmek için, öncelikle Legendre şartının genelleştirmesine ihtiyaç vardır. Bu genelleştirmeye üçüncü bölümde yer verilmiştir.

Beşinci bölümde, Legendre formunun sonlu indeksli ve sonlu sıfırlıklı olduğu açıklanmıştır. İndeks ve sıfırlık Varyasyon Hesabında temel teşkil etmektedir. Örneğin; sıfırlık, bir diferansiyel denklemin verilen sınır koşullarını sağlayan lineer bağımsız çözümlerinin sayısı olarak ve indeks ise, bu diferansiyel denklemin çözümlerinin salınım sayısı biçiminde tanımlanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Albert A. A., A Quadratic Form Problem in the Calculus of Variations, Bull. Amer. Math. Soc. 44 , 1938, 250-252.

[2] Béla v. Sz.-Nagy, Spektraldarstellung Linearer Transformationen des Hilbertischen Raumes, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 5, part 5, Springer, Berlin, 1942.

[3] Birkhoff G. D., Hestenes M. R., Natural Isoperimetric Conditions in the Calculus of Variations, Duke Math. J. 1, 1935, 198-286.

[4] Bliss G. A., A Boundary Value Problem for a System of Ordinary Differential Equations of the First Order, Trans. Amer. Math. Soc. 28, 1926, 561-584.

[5] Bliss G. A., Lectures on the Calculus of Variations, The University of Chicago Press, 1946.

[6] Calkin J. W., Functions of Several Variables and Absolute Continuity I, Duke Math. J. 6, 1940, 170-186.

[7] Graves L. M., The Weierstrass Condition for Multiple Integral Variation Problems, Duke Math. J. 5, 1939, 656-660.

[8] Greub W., Linear Algebra, Springer-Verlag New York Inc., 1975, 261-272.

[9] Hazard K., Index Theorems for the Problem of Bolza in the Calculus of Variations, Contributions to the Calculus of Variations, 1938-1941, The University of Chicago Press, 293-356.

[10] Hestenes M. R., Applications of the Theory of Quadratic Forms in Hilbert Space to the Calculus of Variations, Pacific J. Math. 1, 1951, 525-581.

[11] Hestenes M. R., Calculus of Variations and the Optimal Control Theory, Wiley,1966.

[12] Hestenes M. R., McShane E. J., A Theorem on Quadratic Forms and Application in the calculus of Variations, trans. Amer. Math. Soc. 47, 1940, 501-512.

[13] Hestenes M. R., Sufficient Conditions for Multiple Integral Problems in the calculus of Variations, Amer. J. Math. 70, 1948, 239-275.

[14] Karush W., Isoperimetric Problems and Index theorems in the Calculus of Variations, Dissertation, The University of Chicago, 1942.

[15] Kolmogorov A. N., Fomin S. V., Introductory Real Analysis, Dover Publications, 1970.

[16] Kreyszig E., John Wiley & Sons. Inc., 1978.

[17] Morrey C. B., Jr., Functions of Several Variables and Absolute II, Duke Math. J. 6, 1940, 187-215.

[18] Morrey C. B., Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations and Related Topics, University of California Publications in Mathematics, new Series, 1, 1943, 1-130.

[19] Morse M., The Calculus of Variations in the large, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 18, New York, 1934.

[20] Oden J. T., Applied Functional Analysis, Prentice-Hall Inc., 1979.

[21] Reid W. T., A New Class of Self-Adjoint Boundary Value Problems, Trans. Amer. Math. Soc. 52, 1942, 381-425.

[22] Reid W. T., A Theorem on Quadratic Forms, Bull. Amer. Math. Soc. 44, 1938, 437-440.

[23] Reid W. T., Boundary Value Problems of the Calculus of Variations, Bull. Amer. Math. Soc. 43, 1937, 633-666.

[24] Ritcey L., Index theorems for Discontinuous Problems in the Calculus of Variations, Dissertation, The University of Chicago, 1945.

[25] Stone M. H., Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis, American Mathematical society Colloquium Publications, vol. 15, New York, 1932.

[26] Terpstra F. J., Die Darstellung Biquadratischer formen als Summen von Quadraten mit Anwendung auf die Variationsrechnung, Math. Ann. 116, 1939, 166-180.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Almanya'nın Düren şehrinde doğdu. 1993 yılında Kadıköy Kız Lisesinden, 1997 yılında Mimar Sinan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı yıl, Mimar Sinan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans programına kabul edildi. 1998 yılı Temmuz ayında Mimar Sinan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne Araştırma Görevlisi olarak atanmış olup, halen bu göreve devam etmektedir.