Özlem Yılmaz tarafından hazırlanan "Lineer Olmayan Parabolik Denklem Sistemi ile Verilen Bir Başlangıç-Sınır Değer Probleminin Global Çözümünün Yokluğu" adlı araştırmanın Doktora Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr. Gülseren AYDIN

Bu çalışma Mimar Sinan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Prof.Dr. Gülseren AYDIN (M.S.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi)

Jüri Üyesi : Prof.Dr. Abbas Azimov (Y.T.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi)

Jüri Üyesi : Prof.Dr. Mehmet Tagiyev (M.S.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi)

Jüri Üyesi : Prof.Dr. Abdullah Yıldız (Sakarya Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi)

Jüri Üyesi : Prof.Dr. Fatma Senyücel (M.S.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi)

ÖNSÖZ

Lineer olmayan hiperbolik, parabolik ve eliptik denklem ve denklem sistemlerinin global çözümlerinin yokluğu konusunda çalışmalar hızla artmaktadır. Bu çalışmalara bir katkı olarak ortaya çıktığını düşündüğüm tez çalışmamın her aşamasında bana, yapıcı öneri ve bilgisiyle yol gösteren, yoğun desteğini esirgemeyen hocam Sayın Prof.Dr. Gülseren AYDIN'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunmayı bir borç bilirim.

Tez çalışmam sırasında, işimde verdiği esneklikten ve desteğinden dolayı Bölüm Başkanım hocam Sayın Prof.Dr. Belgin MAZLUMOĞLU'na, desteğinden ve yardımından dolayı hocam Sayın Prof.Dr. Fatma SENYÜCEL'e ve tez izleme komitemde verdikleri fikirler ile tez çalışmamı destekleyen hocam Sayın Prof.Dr. Abbas AZİMOV'a ve ayrıca yardımından dolayı hocam Sayın Prof.Dr. Mahammad TAGHİYEV'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Manevi desteğini esirgemeyen hocam Sayın Prof.Dr. Gülay KIROĞLU'na, her zaman desteğini gördüğüm canım arkadaşım, dostum Yrd.Doç.Dr. Meltem TUNA'ya, yardımını ve desteğini hiç esirgemeyen ve hep yanımda olduğuna inandığım canım arkadaşım, dostum Arş.Gör. Gülay İlona TELSİZ'e sonsuz teşekkürler ederim.

Ayrıca hayat arkadaşım sevgili eşime, her zaman yanımda olduğu ve bana verdiği pozitif enerjiden ve biricik oğluma, en yoğun olduğum anlar da bile küçücük yüreğiyle beni taşıyabildiği için sonsuz teşekkürler ederim.

Sevgili Anneciğim ve Babacığıma, öğrenimimin her anında yanımda oldukları, bugüne kadar gelmemde beni teşvik ettikleri için teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Özlem YILMAZ

Nisan,2003

İÇİNDEKİLER

ÖZET

LİNEER OLMAYAN PARABOLİK DENKLEM SİSTEMİ İLE VERİLEN BİR BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN GLOBAL ÇÖZÜMÜNÜN YOKLUĞU

Bu çalışmada; ekolojide Volterra-Lotka rekabet modelini temsil eden denklem sisteminin global çözümünün yokluğu problemi, Neumann ve Dirichlet sınır koşulları ile ele alınmıştır. Bu problem incelenirken V.K. Kalantarov ve O.A. Ladyzhenskaya [9] tarafindan geliştirilen genelleştirilmiş konkavlık yöntemi kullanılmıştır.

Bu yöntemde, yerel çözümün varlığı temel alınarak, denklemin ve sınır koşullarının özelliklerini taşıyan ve belli bir norma göre denklemin yerel çözümünü temsil eden pozitif bir $\psi(t)$ fonksiyonunun, Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasının hipotezlerini sağladığı gösterilir. Sonuçta, $\psi(t)$ fonksiyonunun yani çözümün normunun sonlu bir t anında sonsuz olduğu bulunur.

Çalışmanın giriş bölümünde; lineer olmayan parabolik denklem ve denklem sistemlerinin başlangıç-sınır değer problemlerinin global çözümlerinin yokluğu ve çözümlerin patlaması konularında bugüne kadar yapılmış çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Birinci bölümde; tezde kullanılan kavramlar ve tezin oluşumunda yararlanılan yöntem tanıtılmıştır.

İkinci bölümde; $\Omega \subset R^n$ de sınırlı ve yeterince düzgün, $\partial\Omega$ sınırına sahip bir bölge olmak üzere,

$$u_t - \Delta u = f_1(t,u,v) + \phi(x,t,u,u_x,v) \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

$$v_t - \Delta v = f_2(t,u,v) + \varphi(x,t,u,v) \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

denklem sistemi,

$$u(x,0)=u_0(x), \quad v(x,0)=v_0(x),$$

başlangıç koşulları,

$$u|_{\partial\Omega}=0, \qquad v|_{\partial\Omega}=0$$

sınır koşulları ile, başlangıç-sınır değer probleminin global çözümünün yokluğunu incelemek için, μ pozitif bir sabit olmak üzere iki kez türevlenebilen pozitif $\psi(t)$ fonksiyonu,

$$\psi(t)=\int_0^t\left(\|u(.,\tau)\|^2+\|v(.,\tau)\|^2\right)d\tau+\mu$$

şeklinde ele alınarak, bu fonksiyonun, enerji integrali yardımıyla Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasının hipotezlerini sağladığı gösterilmiştir. Sonuçta, $\psi(t)$ fonksiyonunun yani çözümün normunun, sonlu bir t anında sonsuz olduğu bulunmuştur.

Üçüncü bölümde, aynı denklem sistemi ve başlangıç koşulları ele alınarak sınır koşulları,

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0, \qquad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0$$

ile değiştirilerek, problemin global çözümünün yokluğu incelenmiştir. Bu incelemede, T_0, γ ve k pozitif sabitler olmak üzere pozitif $\psi(t)$ fonksiyonu,

$$\psi(t)=\int_0^t\left(\|u(.,\tau)\|^2+\|v(.,\tau)\|^2\right)d\tau+(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma(t+k)^2$$

şeklinde ele alınarak, bu fonksiyonun, enerji integrali yardımıyla Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasının hipotezlerini sağladığı gösterilmiştir. Sonuçta, $\psi(t)$ fonksiyonunun yani çözümün normunun sonlu bir t anında sonsuz olduğu bulunmuştur.

Sonuç olarak, parabolik tipte denklem sistemi ile verilen bir başlangıç-sınır değer probleminin global çözümünün yokluğu, değişik tipte sınır koşulları ile ele alınarak genelleştirilmiş konkavlık yöntemi ile incelenmiş ve global çözümünün olmaması koşulları elde edilmiş, bu koşullar altında çözümün yokluğu ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Volterra-Lotka rekabet modeli, Dirichlet ve Neumann koşulları, global çözümün yokluğu, genelleştirilmiş konkavlık yöntemi, enerji integrali.

SUMMARY

NONEXISTENCE OF GLOBAL SOLUTION OF AN INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM GIVEN WITH NONLINEAR PARABOLIC EQUATION SYSTEM

In this study, the problem of nonexistence of global solution of equation system representing the Volterra-Lotka competition model in ecology, is handled with Neumann and Dirichlet boundary conditions. While examining this problem, the generalized concavity method improved by V.K. Kalantarov and O.A. Ladyzhenskaya [9] is used.

In this method, under the existence of local solution, it is shown that the positive $\psi(t)$ function, having the properties of the equation and the boundary conditions and representing the local solution of the equation under defined norm, satisfies the hypotheses of Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemma. In conclusion, it is found that the $\psi(t)$ function namely the norm of the solution is infinite at a finite time t.

Information about the studies on the nonexistence of the global solutions and blow up of solution of initial-boundary value problems of nonlinear parabolic equation and equation systems, carried out up to now is given in the introduction.

Concepts and the method used in the thesis are introduced in the first chapter. In the second chapter,

$$u_t - \Delta u = f_1(t,u,v) + \phi(x,t,u,u_x,v) \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$
$$v_t - \Delta v = f_2(t,u,v) + \varphi(x,t,u,v) \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

equation system with

$$u(x,0)=u_0(x)\ ,\ v(x,0)=v_0(x)\ ,$$

initial conditions and

$$u\big|_{\partial\Omega}=0,\ v\big|_{\partial\Omega}=0$$

boundary conditions is defined, where $\Omega\subset R^n$ is bounded and sufficiently uniform with $\partial\Omega$ boundary. In order to examine the nonexistence of global solution of the initial-boundary value problem, a positive twice differentiable $\psi(t)$ function is taken as

$$\psi(t)=\int_0^t\left(\ \|u(.,\tau)\|^2+\|\ v(.,\tau)\|^2\right)\ d\tau+\mu$$

where μ is a positive constant. By using energy integral, it is shown that $\psi(t)$ function verifies the hypotheses of Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemma. In conclusion, it is found that the $\psi(t)$ function namely the norm of the solution is infinite at a finite time t.

In the third chapter, nonexistence of global solution of a problem with the same equation system and initial conditions but with different boundary conditions such as

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0,\ \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega}=0$$

is investigated. In this investigation, positive $\psi(t)$ function is defined as

$$\psi(t)=\int_0^t\left(\ \|u(.,\tau)\|^2+\|\ v(.,\tau)\|^2\right)\ d\tau+(T_0-t)\ \left(\ \|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma(t+k)^2$$

where $T_{0.}\gamma$ and k are positive constants. By using energy integral, it is shown that $\psi(t)$ function verifies the hypotheses of Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemma. In conclusion, it is found that the $\psi(t)$ function namely the norm of the solution is infinite at a finite time t.

As a result, nonexistence of global solution of an initial-boundary value problem given with a parabolic equation system is investigated with generalized concavity method by taking different types of boundary conditions into consideration and conditions of nonexistence of global solution are found. Nonexistence of global solution is proved under these conditions.

Keywords: Volterra-Lotka competition model, Dirichlet and Neumann conditions, nonexistence of global solution, method of generalized concavity, energy integral.

GİRİŞ

Lineer olmayan kısmi türevli evolusyon denklemleri ile verilmiş başlangıç ve başlangıç-sınır değer problemlerinin global çözümlerinin yokluğu konusu üzerine birçok araştırma yapılmıştır.

1960 lı yıllarda O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov ve N.N. Ural'tseva [19] çalışmalarında, sonlu zamanda patlayan parabolik denklemlerin değişik örneklerini vermişlerdir. A. Friedman [4], H. Fujita [5], S. Kaplan [13] lineer olmayan parabolik denklemlerin keyfi başlangıç değerleri için global çözümlerinin yokluğu konusunda çalışmalar yapmışlardır. W.A. Strauss [35] enerji yöntemini kullanarak bazı lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklemlerin çözümlerinin patlaması ile ilgili örnekler içeren bir çalışma yapmıştır.

S. Kaplan [13], H. Fujita [5], R.T. Glassey [6] ve J.B. Keller [14] çalışmalarında, L Laplace operatörü veya kendine eş düzgün bir eliptik operatör olmak üzere, ikinci mertebeden,

$$u_t + Lu = f(u)$$
$$u_{tt} + Lu = f(u)$$

ile verilen parabolik ve hiperbolik denklemlerin başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümlerinin patlaması için yeter koşulları vermişlerdir. Çalışmalarında kullandıkları yöntem, L eliptik operatörünün birinci özdeğerinin pozitifliği veya Green fonksiyonunun pozitifliğini temel almaktadır.

H.A. Levine [20],[21] deki çalışmalarında, P pozitif ve A negatif olmayan lineer simetrik operatörler ve $F(u)$ da belirli koşulları sağlayan lineer olmayan potansiyel operatör olmak üzere,

$$Pu_t + Au = F(u)$$
$$Pu_{tt} + Au = F(u)$$

ile verilen diferansiyel-operatör denklemleri için Cauchy probleminin global çözümlerinin yokluğunun koşullarını bulmak için konkavlık yöntemi denen çok kuvvetli bir yöntem geliştirmiştir. Bu yöntemle hem daha önceden incelenmiş hem de yeni ele alınmış birçok problem için global çözümlerin yokluğu incelenmiştir.

Levine'nin konkavlık yöntemini kullanarak, R.J. Knops, H.A. Levine, L.E. ve Payne [16], H.A. Levine [22][23], B. Straughan [34], H.A. Levine ve L.E. Payne [24] nın çalışmalarında, esas parçası lineer olmayan diferansiyel operatör denklemler, disipatif terim içeren ikinci mertebeden diferansiyel operatör denklemler, sınır koşulları lineer olmayan, lineer parabolik ve hiperbolik denklemler ve sürekli ortamlar mekaniğinin çeşitli denklem ve denklem sistemlerinin global çözümlerinin yokluk teoremlerini ispatlamışlardır.

Levine'nin konkavlık yöntemi, problemin yerel çözümünün varlığı temel alınarak, denklemi ve sınır koşullarını temsil eden pozitif $\psi(t) = \Psi(u(t))$ fonksiyonelinin oluşturulması esasına dayanmaktadır.

V.K. Kalantarov ve O.A. Ladyzhenskaya [9] yaptıkları çalışmada konkavlık yöntemini geliştirerek, genelleştirilmiş konkavlık yöntemi olarak bilinen bir lemma vermişlerdir.

Levine'nin konkavlık yönteminde, yukarıda sözü edilen diferansiyel operatör denklemlerde, A operatörünün, negatif olmayan ve simetrik operatör olması gerekirken, Kalantarov-Ladyzhenskaya'nın genelleştirilmiş konkavlık yöntemi, aynı denklemlere uygulanabilmekte ve A operatörünün, negatif olmayan ve simetrik operatör olması gerekmemektedir.

Levine lemmasının uygulanamadığı, H. Fujita [5], R.T. Glassey [6], S. Kaplan [13], J.B. Keller [14] in ele aldıkları problemler ve geniş bir sınıfı kapsayan pek çok yeni problemin, Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemması ile global çözümlerinin yokluğu incelenebilmiştir.

V.K. Kalantarov [10],[11], B. Palais [30], S.K. Turitsyn [36] , çalışmalarında çeşitli lineer olmayan evolusyon denklemlerinin global çözümlerinin davranışlarını genelleştirilmiş konkavlık yöntemini kullanarak incelemişlerdir.

V.K. Kalantarov [12] çalışmasında, ikinci mertebeden lineer olmayan,

$$Pu_{tt} + Qu_t + Au = B(u, u_t) + F(t, u)$$

şeklindeki diferansiyel-operatör denklemlerin bir sınıfi için, Cauchy probleminin global çözümlerinin yokluğu için gerekli koşulları araştırmış ve lineer olmayan dalga denklemleri ile ilgili örnekler vermiştir.

G. Seçim [33] çalışmasında, $\Omega \subset R^n$ de sınırlı ve yeterince düzgün, $\partial\Omega$ sınırına sahip bir bölge ve $p, l > 2$ olmak üzere,

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - \nabla\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u\right) + au_t = |u|^{p-2} u + |u|^{l-2} u, & (x,t) \in \Omega \times [0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T) \end{array}$$

başlangıç-sınır değer probleminin global çözümünün yokluğunu incelemiştir.

H.A. Levine, L.E. Payne [25] ve Z. Junning [8], Ω, R^n de bir bölge olmak üzere, ikinci mertebeden yarılineer,

$$u_t - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(d + |\nabla u|^{p-2}\right) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) + g(u, \nabla u) = f(u)$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad x \in \Omega, \qquad u(x,t) = 0 \quad x \in \partial\Omega, t > 0$$

ile verilen problem için, f bazı koşulları sağlamak ve $g \equiv 0$ olmak üzere global yokluk teoremlerini ispatlamışlardır. Aynı problem, V.K. Kalantarov, O.A. Ladyzhenskaya [9] tarafından, f, g bazı koşulları sağlamak üzere, $p = 2$ için incelenmiş ve global yokluk için yeter koşullar verilmiştir. D. Erdem [3] in çalışmasında, aynı problem, f ve g sürekli fonksiyonları bazı şartları sağlamak üzere, $p \geq 2$ olarak alınmış ve önceki çalışmalarda elde edilen sonuçların bir genelleştirilmesi yapılmıştır.

Matematiksel fizik ve matematiksel biyolojinin birçok problemi, L lineer veya yarılineer ikinci mertebeden parabolik operatör olmak üzere,

$$Lu = F_1(x,t,u,v)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = F_2(x,t,u,v)$$

formundaki denklem sistemleri ile verilir. Bu formdaki sistemler için başlangıç ve başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümlerinin varlığı, tekliği ve global davranışlarının incelendiği çok sayıda araştırma yapılmıştır.

A.Mc. Nabb [29] ve V.N. Maslennikova [28] çalışmalarında, Ω, R^n de sınırlı bir bölge, $F_i(x,t,u,v)$ $(i=1,2)$ fonksiyonu u,v ye göre Lipschitz şartlarını sağlayan bir fonksiyon ve L, ikinci mertebeden lineer veya yarılineer operatör olmak üzere, yukarıdaki sistem için, başlangıç-sınır değer probleminin global çözülebilirliğini incelemişlerdir.

J. Rauch ve J. Smoller [32], aynı sistemde,

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ve σ, γ pozitif sabitler olmak üzere,

$$F_1(x,t,u,v) = f(u) - v$$
$$F_2(x,t,u,v) = \sigma\, u - \gamma\, v$$

seçilerek, $x \in R$ de $t \geq 0$ için FitzHugh-Nagumo sisteminin kalitatif teorisini incelemişlerdir.

D.E. Jackson [7] makalesinde,

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u$$

ve

$$F_1(x,t,u,v) = (u+\psi_1(x,t))(u+\psi_2(x,t))(u+\psi_3(x,t)) - v(x,t) + f_3(x,t)$$
$$F_2(x,t,u,v) = \sigma\, u - \gamma\, v + f_4(x,t)$$

seçerek, çok boyutlu FitzHugh-Nagumo sistemi için başlangıç sınır-değer probleminin çözümlerinin varlığı, tekliği ve düzgünlüğünü incelemiştir.

M. Marion [27] çalışmasında, disipatif terim içeren reaksiyon-difüzyon sistemlerinin çözümlerinin uzun zaman davranışını incelemiştir. $\delta > 0$, $\sigma, \gamma \in R$ ve $h(u)$ tek dereceden ve en yüksek dereceli terimin katsayısı pozitif olan, lineer olmayan bir polinom olmak üzere,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta u + h(u) + \sigma\, u = 0$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \delta\, v + \gamma\, u = 0$$

sistemini gözönüne alarak global atraktörlerin varlığını araştırmış ve bulduğu sonuçları Hodgkin-Huxley, FitzHugh-Nagumo ve Feld-Noyes denklem sistemlerine uygulamıştır.

D. Erdem, V.K. Kalantarov [2], yaptıkları çalışmada, Ω, R^n de sınırlı olması gerekmeyen ve sınırı $\partial\Omega$ olan bir bölge olmak üzere,

$$Lu = F_1(x,t,u,v)$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = F_2(x,t,u,v)$$

denklem sisteminde,

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u$$

ve $F_i(x,t,u,v)$ $(i = 1,2)$ lineer olmayan fonksiyonları,

$$F_1(x,t,u,u_x,v) = a(x,t,u,u_x,v) + f_1(t,u,v)$$
$$F_2(x,t,u,v) = b(x,t,u,v) + f_2(t,u,v)$$

seçerek, başlangıç-sınır değer problemini gözönüne almışlardır. Amaçları, sözkonusu problemin global çözümünün yokluğunu garantileyen başlangıç verilerinin sağlaması gereken koşulları bulmaktır.

Günümüzde de, lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem sistemleri ile verilen, başlangıç ve başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümlerinin kalitatif teorisi ile ilgili pek çok çalışma yapılmaktadır. Buna, Y. Yamada [37] nın çalışması örnek verilebilir. Bu çalışmada, a_i, b_i, c_i, d_i $(i = 1,2)$, α pozitif sabitler ve Ω, R^n de düzgün sınırlı bir bölge olmak üzere,

$$u_t = d_1\Delta[(1+\alpha v)u] + u(a_1 - b_1u - c_1v) \qquad \Omega\times(0,\infty)$$
$$v_t = d_2\Delta v + v(a_2 - b_2u - c_1v)$$

çapraz difüzyon (cross-diffusion) etki içeren Volterra-Lotka rekabet sisteminin global çözümlerinin varlığı, Neumann veya Dirichlet sınır koşulları ve negatif olmayan başlangıç fonksiyonlarıyla incelenmiştir. Daha önce, $n \leq 3$ durumunda, denklem sisteminin global çözümlerinin varlığı söylenebildiği halde, bu çalışmada başlangıç fonksiyonlarının normları ve n boyutu üzerinde herhangi bir kısıtlama olmaksızın sistemin tek bir global çözümünün varlığı bulunmuştur.

Pao [31] kitabında, ekolojide Volterra-Lotka rekabet modelini, dispersiyon etkisini dikkate alarak, karşılaştırılan iki türün yoğunlukları $u(x,t)$ ve $v(x,t)$, Ω, sınırı $\partial\Omega$ olan bir bölge ve a_i, b_i, c_i $(i = 1,2)$ pozitif sabitler olmak üzere,

$$u_t - D_1\nabla^2 u = u(a_1 - b_1u - c_1v)$$
$$v_t - D_2\nabla^2 v = v(a_2 - b_2u - c_2v)$$

reaksiyon-difüzyon denklem sistemi,

$$u(0,x)=u_0(x)\geq 0, \qquad v(0,x)=v_0(x)\geq 0$$

başlangıç koşulu,

$$\alpha_0(x)\frac{\partial u}{\partial \upsilon}+\beta_0(x)u=h(x,t) \qquad t>0,\, x\in\partial\Omega$$

$$\alpha_0\geq 0,\ \beta_0\geq 0,\ \alpha_0+\beta_0>0$$

karışık tip sınır koşulu ile verilen başlangıç-sınır değer probleminin çözümlerinin global varlığını, karşılaştırma teoremlerini kullanarak ispatlamıştır.

Bu tez çalışmasında, son yıllarda yapılan çalışmalar dikkate alınarak, $\Omega\in R^n$ de sınırlı ve yeterince düzgün, $\partial\Omega$ sınırına sahip bir bölge olmak üzere, ekolojide Volterra-Lotka rekabet modelini temsil eden,

$$u_t-\Delta u=f_1(t,u,v)+\phi(x,t,u,u_x,v) \qquad x\in\Omega,\, t>0$$

$$v_t-\Delta v=f_2(t,u,v)+\varphi(x,t,u,v)$$

$$u(x,0)=u_0(x) \qquad v(x,0)=v_0(x)$$

sistemi, sırasıyla Dirichlet ve Neumann sınır koşulları ile incelenmiş ve çözümün global yokluğu araştırılmıştır.

Bu araştırmada sistemin enerji integrali elde edilmiş ve bunun yardımıyla iki kez türevlenebilen pozitif $\psi(t)$ fonksiyonunun, genelleştirilmiş konkavlık metodu olarak bilinen Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasının hipotezlerini, $\phi(x,t,u,u_x,v)$, $\varphi(x,t,u,v)$ fonksiyonları ve $u(x,0), v(x,0)$ başlangıç fonksiyonlarının bazı koşulları sağladığı takdirde, gerçeklediği gösterilmiştir. Bunun sonucunda hesaplanabilen sonlu bir t anında $\psi(t)$ fonksiyonunun sonsuza gittiği yani,

$$\lim_{t \to t_1} \left\{ \int_0^t \left(\|u(.,t)\|^2 + \|v(.,t)\|^2 \right) d\tau \right\} = \infty$$

olduğu görülmüştür.

BÖLÜM 1

ÖNBİLGİLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı tanımlar, eşitsizlikler ve bir lemma ispatı ile birlikte verilecektir.

1.1 Ekolojik Rekabet ve Rekabet Kuramı

İki veya daha fazla organizmadan her birinin, yaşamı için gerekli kaynağı ele geçirmeye çalışmasına *ekolojik rekabet* denir. Eğer mevcut kaynaklar, rakip organizmaların tümüne yetecek kadar bol değilse, ekolojik rekabetin etkisi, canlı sayısının artışının kısıtlanması şeklinde görülür. Aranan kaynaklar; besin, besleyici tuzla, ışık, yer (yuvalama, saklanma, dinlenme, avlanma, beslenme yeri) şeklinde olabilir. Birey sayısı artıkça, aranan kaynağın daha da daraldığı, bu darlığın da canlı sayısının artışını daha büyük ölçüde engellediği durumlar, yoğunluğa bağlı etkenlerin en çok verilen örneklerini oluştururlar.

Ekolojik rekabet, bazen çok açık biçimde görülür. Dişlerini göstererek buldukları kemiği birbirinin elinden almaya çalışan köpekler, birbirlerini gagalayarak atılan yemin çoğunu kapmaya çalışan tavuklar, rekabetin en doğrudan biçimini sergilerler. Burada birey, kendi istediği kaynağı (besin) isteyen rakiplerine karşı açık bir rekabet göstermektedir. Bunun yanında topraktaki fosfatı, civardaki başka bitkilerden daha etkin biçimde alabilen, dolayısıyla da komşularının büyümesini kısıtlayacak şekilde yayılan bir bitki de diğerleri ile rekabet halindedir. Burada da rekabetin nedeni besleyici tuzlardır. Çevresindeki diğer türleri yapraklarıyla gölgeleyen bir bitki ise, ortak aranılan kaynağı (ışık), rakiplerini engelleyecek biçimde kullanmaktadır. Her iki örnekte de rekabetin varlığı kolayca görülmez. Yaşadığı yeri kendi kokusuyla markalayan ve bu davranışla rakiplerini bu bölgeden uzak tutan bir kurt da, açık bir saldırganlığın gösterilmediği rekabet örnekleri arasında sayılabilir.

Ekolojik rekabet, canlı sayısının artışının denetiminde önemli bir etkendir. Doğada ve laboratuvarda pek çok araştırmalara konu olmuştur. Araştırmalar çoğunlukla değişik cins organizmalar arasındaki rekabet ile ilgili yapılmıştır (türler arası veya dış rekabet).

Aynı yerde yaşayan iki cins organizma arasında, aynı kaynaklar için, rekabetin doğada iki sonucu olabilir Ya bir süre sonra rakip türlerden biri orada yaşayamaz hale gelir, ya da iki taraf da bir yolunu bularak aynı yerde yaşamayı sürdürürler. Türlerin hangi koşullarda birbirlerini rekabet dışı bıraktığı, hangi koşullarda bir arada yaşamanın mümkün olduğu konusu, rekabet çalışmalarının temelini oluşturur.

1925-1926 da Lotka ve Volterra'nın geliştirdiği denklemlere göre *Rekabet Kuramını* aşağıdaki şekilde özetlemek olasıdır.[15] Kaynakları kısıtlı bir ortamda, tek başına yaşayan bir canlı türü, lojistik denkleme uygun olarak artar. Bu canlı sayısının ait olduğu tür 1 numarayla gösterilir ve ortamdaki sayısı da N olursa, canlı sayısının artışı:

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(\frac{K_1 - N_1}{K_1} \right)$$

olur.

Birinci türden organizmalardan oluşan canlı sayısının artışı, ortamın o tür için taşıma gücüne erişince $(N_1 = K_1 \quad olunca)$ durur. Birinci türle aynı kaynakları kullanmaya başlayan, yani rekabete giren ikinci bir türün de bu ortama geldiğini varsayalım. Mevcut kaynaklar bu kez, her iki tür tarafından da kullanılacağından, ortamda barınabilecek birinci türden bireylerin sayısı azalır. Yani ikinci türün varlığı, ortamın birinci tür için olan taşıma gücünün değerini (K_1) azaltır. Bu azalış, ortamın ikinci tür tarafından kullanılması ölçüsünde, yani ikinci türden birey sayısı (N_2) ile orantılı biçimde olur. En basit modelde bu azalış miktarı, ikinci türden gelen rekabeti gösteren rekabet katsayısı a ile, ikinci türe ait birey sayısının çarpımına eşittir. (aN_2). Yani ortamda birinciye rakip ikinci bir tür yaşamaya başlarsa, birinci türden canlı sayısının artışı da bu rakip türden ,

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left[\frac{(K_1 - aN_2) - N_1}{K_1} \right]$$

şeklinde etkilenir. Burada a katsayısı, rakip türden gelen rekabetin miktarını belirleyen bir sabittir.

Ortamdaki ikinci tür de birinci türün varlığından benzer şekilde etkilenir:

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left[\frac{(K_1 - bN_1) - N_2}{K_2} \right]$$

Yani birinci türün varlığı, ortamın ikinci tür tarafından kullanılabilecek kısmını (K_2), birinci türden gelecek rekabet ölçüsünde azaltır. Benzer şekilde, bu azalış birinci türden gelen rekabet katsayısıyla (b) ve birinci türden birey sayısıyla orantılıdır (bN_2).

1.2 Reaksiyon-Difüzyon Denklemi, Volterra-Lotka Rekabet Modeli ve Başlangıç-Sınır Koşulları

Tanım 1.2.1 Konveksiyon etki yok iken, $\Omega \subset R^n$ düzgün sınırlı bir bölge, $u(x,t)$ yoğunluk fonksiyonu olmak üzere,

$$u_t - \nabla.(D\nabla u) = f(x,t,u) \qquad (1.1)$$

yarılineer parabolik denklemine reaksiyon-difüzyon denklemi, $u_i(x,t) \quad (i = 1,...,N)$, yoğunluk fonksiyonları olmak üzere,

$$(u_i)_t - \nabla.(D_i \nabla u_i) = f_i(x,t,u_1,...,u_N) \qquad (1.2)$$

zayıf parabolik denklem sistemine de *reaksiyon-difüzyon* denklem sistemi denir.

Eğer konveksiyon etki var ise, μ, hız vektörü olmak üzere, (1.1) denklemi ve (1.2) denklem sistemi sırasıyla,

$$u_t - \nabla.\left(D\nabla u\right) + \mu.\nabla u = f\left(x,t,u\right)$$

ve

$$\left(u_i\right)_t - \nabla.\left(D_i\nabla u_i\right) + \mu_i.\nabla u_i = f_i\left(x,t,u_1,...,u_N\right) \qquad i = 1,...,N$$

olur. (1.2) denklemine özel bir model; dispersiyon etkisi altında, Ω, sınırı $\partial\Omega$ olan bir bölge, a_i, b_i, c_i $i = 1,2$ pozitif sabitler olmak üzere, karşılaştırılan iki türün yoğunlukları $u\left(x,t\right)$ ve $v\left(x,t\right)$ olduğunda,

$$u_t - D_1\nabla^2 u = u\left(a_1 - b_1 u - c_1 v\right)$$
$$v_t - D_2\nabla^2 v = v\left(a_2 - b_2 u - c_2 v\right)$$

reaksiyon-difüzyon denklemleridir. Bu denklem sistemine *ekolojide Volterra-Lotka rekabet modeli* denir.

Zamana bağlı problemlerde, t_0 başlangıç anında çözüm fonksiyonunun aldığı değerler;

(1.1) denklemi için,

$$u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right) \qquad x \in \Omega$$

(1.2) sistemi için ,

$$u_i(x,0)=u_{i,0}(x), \qquad i=1,...,N \qquad x\in\Omega$$

ile verilir. Bunlara *başlangıç koşulu* denir.

Üç tip sınır koşulundan bahsedilebilir. Sınır yüzeyi üzerinde,

$$u(x,t)=h(x,t), \qquad t>0, x\in\partial\Omega \tag{1.3}$$

ise *Dirichlet* sınır koşulu; sınır yüzeyi üzerinde, $\dfrac{\partial u}{\partial \upsilon}$, $u(x,t)$ nun υ doğrultusundaki türevi olmak üzere,

$$\frac{\partial u}{\partial \upsilon}=h(x,t), \qquad t>0, x\in\partial\Omega \tag{1.4}$$

ise *Neumann* sınır koşulu ve sınır yüzeyi üzerinde,

$$\frac{\partial u}{\partial \upsilon}+\beta u=h(x,t), \qquad t>0, x\in\partial\Omega \tag{1.5}$$

ise *Robin* sınır koşulu adını alır. Bu üç tip sınır koşulu, sınır yüzeyi üzerinde, $\alpha_0\geq 0,\ \beta_0\geq 0,\ \alpha_0+\beta_0>0$ olmak üzere,

$$\alpha_0(x)\frac{\partial u}{\partial \upsilon}+\beta_0(x)u=h(x,t) \qquad t>0, x\in\partial\Omega \tag{1.6}$$

biçiminde yazılabilir. (1.6) sınır koşulu, $\alpha_0=0, \beta_0=1$ olduğunda (1.3), $\alpha_0=1, \beta_0=0$ olduğunda (1.4) sınır koşulu halini alır. α_0, β_0 sabit olmaksızın (1.6) sınır koşulu gözönüne alındığında karışık tip sınır koşullarını verir.

Burada (1.2) sisteminde, herbir $u_i(x,t)$ yoğunluk fonksiyonu için sınır yüzeyi üzerinde bir koşul yazılması gerekmektedir. Örneğin; Neumann sınır koşulu,

$$\frac{\partial u_i}{\partial \upsilon} = g_i\left(x, t, u_1, \ldots, u_N\right) \qquad t > 0,\, x \in \partial\Omega$$

şeklini alacaktır. [31]

1.3 Normlu Uzay ve İç Çarpım Uzayı

Tanım 1.3.1 Bir E vektör uzayında, $x \in E$ vektörünü $\|x\|$ reel sayısına götüren ve aşağıdaki koşulları sağlayan $\|\cdot\|$ reel fonksiyonuna *norm* denir.

N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

N2) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in E$,

N3) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \qquad \forall x \in E, \forall \lambda \in C$,

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall x, y \in E$.

E bir vektör uzayı, $\|\cdot\|$ de E üzerinde tanımlanmış bir norm ise, $(E, \|\cdot\|)$ çiftine normlu uzay denir.

Bir normlu uzay üzerinde,

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

formülü ile metrik tanımlanabilir. O halde her normlu uzay metrik uzaydır.

E, bir kompleks vektör uzayı olsun.

$$(\,,\,) : E \times E \to C$$

ile tanımlanan ve $\forall\, x, y, z \in E$ ve $\forall \alpha \in C$ için aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyona *iç çarpım* denir.

I1) $(x,y)=\overline{(y,x)}$,

I2) $(\alpha x+\beta y,z)=\alpha(x,z)+\beta(y,z)$,

I3) $(x,x)\geq 0$ ve $(x,x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Üzerinde iç çarpım fonksiyonu tanımlanan E vektör uzayına *iç çarpım uzayı* denir

Her iç çarpım uzayı,

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$$

ile tanımlanan normla bir normlu uzay,

$$d(x,y)=\|x-y\|=\sqrt{(x-y,x-y)}$$

ile tanımlanan metrik ile bir metrik uzaydır.[18]

1.4 Banach ve Hilbert Uzayı

Tanım 1.4.1 $(E,\|\cdot\|)$ normlu uzay ve $\{x_n\}$ bu normlu uzayda bir vektör dizisi olsun. Eğer $\forall \in>0$ için $\exists M$ $\forall m,n>M$ için $\|x_m-x_n\|<\in$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisine *Cauchy dizisi* denir.

$(E,\|\cdot\|)$ normlu uzay ve $\{x_n\}$bu uzayda bir vektör dizisi olsun. Eğer $\forall \in>0$ için $\exists M \ni \forall n\geq M$ için $\|x_n-x\|<\in$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x\in E$ ye *yakınsar* denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ ile gösterilir.

Tanım 1.4.2 E normlu uzayında her Cauchy dizisi E nin bir elemanına yakınsar ise E ye *tam uzay* denir. E tam normlu uzay ise bu uzaya *Banach uzayı* denir. Bir tam iç çarpım uzayına *Hilbert uzayı* denir.

Tanım 1.4.3 E bir metrik uzay ve $M \subset E$, E nin bir alt kümesi olsun. M kümesini ihtiva eden bütün kapalı kümelerin arakesitine M *nin kapanışı* denir ve $\overline{M}$ ile gösterilir. E metrik uzayında $\overline{M} = E$ koşulunu sağlayan M kümesine, E de *yoğun küme* denir.

1.5 L^P uzayı

$\Omega \subset R^n$ de bir bölge ve $p \geq 1$ reel sayı olsun. Ω üzerinde,

$$f : \Omega \to R \cup \{\pm\infty\}$$

ile tanımlı, ölçülebilir ve $|f|^p$ Lebesque anlamında integre edilebilir fonksiyonlar cümlesine $L^p(\Omega)$ *uzayı* denir. $f \in L^p(\Omega)$ için norm,

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanır ve bu norm ile $L_p(\Omega)$ uzayı bir Banach uzayıdır. $L_2(\Omega)$ uzayı bir Hilbert uzayıdır. [17]

1.6 Operatörler

E ve F iki vektör uzayı olsun. D_A, A nın tanım kümesi olmak üzere, $A : D_A \subset E \to F$ bir operatör olsun.

Tanım 1.6.1 $A : D_A \subset E \to F$ operatörü,

i) $D_A \subset E$, E nin bir alt uzayıdır,

ii) $\forall x, y \in D_A$ ve $\alpha, \beta \in R$ için,

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

koşullarını sağlıyorsa A ya *lineer operatör* denir.

H kompleks sayılar üzerinde bir Hilbert uzayı, $\overline{D_A} = H$, $A: D_A \to H$ lineer operatör olsun. $\forall x, y \in D_A$ için,

$$(Ax, y) = (x, Ay)$$

ise A ya *simetrik operatör* denir.

$A: D_A \to H$, $\overline{D_A} = H$ lineer operatör olsun. A operatörüne göre yeni $A^*: D_{A^*} \to H$ operatörü tanımlanabilir. D_{A^*} olarak $y^* \in H$ olmak üzere, $\forall x \in D_A$ için,

$$(Ax, y) = (x, y^*)$$

eşitliğini sağlayan y lerin kümesi gösterilsin. O zaman her $y \in D_{A^*}$ için $A^*: D_{A^*} \to H$ operatörü $y^* = A^* y$ eşitliği ile tanımlanabilir. A^* operatörünün lineer olduğu açıktır. A^* operatörüne A nın *eşleniği* denir. $A = A^*$ ise A ya *kendine eş operatör* denir.

$\overline{D_A} = H$, $A: D_A \to H$ simetrik olabilmesi için gerek ve yeter koşul $A \subset A^*$ olmasıdır.

A, H Hilbert uzayında tanımlı lineer, simetrik bir operatör olsun. $\forall x \in D_A \subset H$ için,

$$(Ax, x) \geq 0$$

ise A operatörüne *negatif olmayan operatör* denir.

A negatif olmayan bir operatör ve $\forall x \in D_A \subset H$ için ,

$$(Ax, x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

oluyorsa A operatörüne *pozitif operatör* denir.

E ve F iki normlu uzay olsun. $A: D_A \subset E \to F$ operatörü, bir $k \geq 0$ reel sayısı ve $\forall x \in E$ için

$$\|Ax\| \leq k\|x\|$$

oluyorsa, A operatörüne *sınırlı operatör* denir.

1.7 Frechet Türevi

Aşağıda, normlu uzaylarda, bilinen türev kavramının bir genellemesi verilmiştir.

Tanım 1.7.1 E ve F Banach uzayları, $T: E \to F$ lineer olmayan bir operatör, $x \in E$ sabit bir nokta olsun. Eğer $\forall h \in E$ için,

$$T(x+h) - T(x) = Ah + \varphi(x,h) \tag{1.7}$$

eşitliğini sağlayan lineer, sınırlı $A: E \to F$ operatörü,

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\varphi(x,h)\|}{\|h\|} = 0$$

koşuluna uyan bir $\varphi(x,h): E \to F$ kalan operatörü varsa, T ye x noktasında *Frechet anlamda türevlenebilir operatör*, A lineer operatörüne ise, T nin x noktasındaki *türevi* denir. Türevin (1.7) tanımı şöyle de ifade edilebilir:

$T: E \to F$ operatörü verildiyse,

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|T(x+h)-T(x)-Ah\|}{\|h\|} = 0$$

koşulunu sağlayan lineer sınırlı $A: E \to F$ operatörü varsa, T ye x noktasında *türevlenebilir operatör* denir.[17]

1.8 Cauchy-Schwarz ve Young Eşitsizlikleri, 1. Green Özdeşliği

$1 < p < \infty,\quad \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olsun.

$$ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \qquad (a,b>0)$$

eşitsizliğine *Young eşitsizliği* denir.

$$ab \le \varepsilon a^p + (\varepsilon p)^{-q/p} q^{-1} b^q \qquad (a,b>0,\ \varepsilon>0)$$

eşitsizliğine ε *na bağlı Young eşitsizliği* denir.

$1 \le p,q \le \infty,\quad \dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olsun. Eğer $u \in L^p(\Omega)$, $v \in L^q(\Omega)$ ise,

$$\int_\Omega |u\,v|\ dx \le \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}$$

eşitsizliğine *Hölder eşitsizliği* denir. Eğer $p=2$ ve $q=2$ ise,

$$\int_\Omega |u\,v|\ dx \le \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

eşitsizliğide *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* adını alır. [17]

$\Omega \subset R^n$ sınırlı bir bölge $u, v \in L^2(\Omega)$ olsun. $\partial u / \partial n = n \cdot \nabla u$ dış normal doğrultuda yönlü türev olmak üzere,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \; dx = -\int_\Omega v \Delta u \; dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \; d(\partial\Omega)$$

olur ve *1. Green Özdeşliği* olarak bilinir. [1]

1.9 Global Çözümün Yokluğu ve Varlığı

Tanım 1.9.1 Bir başlangıç-sınır değer probleminde $[0, T) \times R^n$ de çözümlerin mevcut olduğu T lerin supremumuna *varlık aralığının uzunluğu* denir. Bu sayıya T_{max} denirse $T_{max} < +\infty$ ise *global çözüm yoktur,* $T_{max} = +\infty$ ise *global çözüm vardır* denir. [26]

1.10 Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemması

$\psi(t)$ iki kez türetilebilen ve $\alpha > 0$, c_1, $c_2 \geq 0$, $t > 0$ için,

$$\psi''(t)\psi(t) - (1+\alpha)[\psi'(t)]^2 \geq -2c_1\psi'(t)\psi(t) - c_2[\psi(t)]^2 \tag{1.8}$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir fonksiyon olsun.

Eğer,

$$\psi(0) > 0, \quad \psi'(0) > -\gamma_2\alpha^{-1}\psi(0) \quad \text{ve} \quad c_1 + c_2 > 0$$

ise,

$$\gamma_1 = -c_1 + \sqrt{c_1^{\;2} + \alpha c_2}\,, \qquad \gamma_2 = -c_1 - \sqrt{c_1^{\;2} + \alpha c_2}$$

olmak üzere,

$$t \to t_1 = \frac{1}{2\sqrt{c_1^2 + \alpha c_2}} \ell n \frac{\gamma_1 \psi(0) + \alpha \psi'(0)}{\gamma_2 \psi(0) + \alpha \psi'(0)}$$

için,

$$\psi(t) \to +\infty$$

olur.

İspat: $\Phi(t) = \psi^{-\alpha}(t)$ fonksiyonu olarak tanımlansın. $\Phi(t)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci türevi,

$$\Phi'(t) = -\alpha \frac{\psi'(t)}{\psi^{1+\alpha}(t)}, \qquad \Phi''(t) = -\alpha \frac{\psi''(t)\psi(t) - (1+\alpha)\left[\psi'(t)\right]^2}{\psi^{2+\alpha}(t)}$$

olur. Bu ifadeler (1.8) de yerine yazılırsa,

$$\Phi''(t) + 2c_1\Phi'(t) - \alpha c_2 \Phi(t) \equiv f(t) \leq 0 \tag{1.9}$$

şeklinde ikinci basamaktan sabit katsayılı diferansiyel denklemi elde edilir. $c_1 + c_2 > 0$ olması durumunda bu denklemin çözümü,

$$\Phi(t) = \beta_1 e^{\gamma_1 t} + \beta_2 e^{\gamma_2 t} + (\gamma_2 - \gamma_1)^{-1} \int_0^t f(\tau)\left[e^{\gamma_2(t-\tau)} - e^{\gamma_1(t-\tau)}\right] d\tau \tag{1.10}$$

olur. Burada β_1 ve β_2 sayıları,

$$\beta_1 + \beta_2 = \Phi(0)$$
$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = \Phi'(0)$$

cebirsel denklem sisteminin çözümü olmak üzere, teoremin hipotezinden,

$$\beta_1 = -(\gamma_1 - \gamma_2)^{-1}[\alpha\psi'(0) + \gamma_2\psi(0)]\,\psi^{-1-\alpha}(0) < 0$$

$$\beta_2 = (\gamma_1 - \gamma_2)^{-1}[\alpha\psi'(0) + \gamma_1\psi(0)]\,\psi^{-1-\alpha}(0) > 0$$

olarak elde edilir.

Diğer taraftan (1.10) eşitliğinin sağ taraf son terimi,

$$(\gamma_2 - \gamma_1)^{-1}\int_0^t f(\tau)\left[e^{\gamma_2(t-\tau)} - e^{\gamma_1(t-\tau)}\right]\,d\tau < 0$$

olduğundan,

$$0 \le \Phi(t) \le \beta_1 e^{\gamma_1 t} + \beta_2 e^{\gamma_2 t}$$

yazılabilir. Eğer t,

$$\beta_1 e^{\gamma_1 t} + \beta_2 e^{\gamma_2 t} = 0$$

olacak şekilde yani,

$$t_1 = (\gamma_1 - \gamma_2)^{-1}\,\ell n\left[-\frac{\beta_2}{\beta_1}\right]$$

seçilirse,

$$\lim_{t \to t_1} \Phi(t) = 0$$

olur. Buradan, $\Phi(t)=\psi^{-\alpha}(t)$ olarak alındığından,

$$\lim_{t\to t_1}\psi(t)=+\infty$$

olur.

Eğer, $\alpha>0,\ c_1,c_2=0$ ise (1.9) denklemi,

$$\Phi''(t)\le 0$$

şeklini alır. Bu eşitsizlik iki kez integre edilirse,

$$\Phi'(t)-\Phi'(0)\le 0$$

ve

$$\Phi(t)-\Phi'(0)t-\Phi(0)\le 0$$

olur. İkinci integrasyonda elde edilen eşitsizlik,

$$\Phi(t)\le\Phi(0)+\Phi'(0)t$$

olup ve $\Phi(t)\ge 0$ olduğundan,

$$0\le\Phi(t)\le\Phi(0)+\Phi'(0)t$$

elde edilir. Eğer t,

$$\Phi(0)+\Phi'(0)t=0$$

olacak şekilde yani,

$$t_1 = -\frac{\Phi(0)}{\Phi'(0)}$$

seçilirse,

$$\lim_{t \to t_1} \Phi(t) = 0$$

olur. Buradan da $\Phi(t) = \psi^{-\alpha}(t)$ olarak alındığından,

$$\lim_{t \to t_1} \psi(t) = +\infty$$

elde edilir.

BÖLÜM 2

2.1 EKOLOJİDE VOLTERRA-LOTKA REKABET MODELİNİ TEMSİL EDEN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN DIRICHLET SINIR KOŞULU İLE GLOBAL ÇÖZÜMÜNÜN YOKLUĞU

Bu model Dirichlet sınır koşulları ile verilen aşağıdaki sistemden oluşmaktadır.

$$u_t - \Delta u = f_1(t,u,v) + \phi(x,t,u,u_x,v) \qquad x \in \Omega,\ t>0 \qquad (2.1)$$

$$v_t - \Delta v = f_2(t,u,v) + \varphi(x,t,u,v) \qquad x \in \Omega,\ t>0 \qquad (2.2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0$$

$$v(x,0) = v_0(x), \qquad v|_{\partial\Omega} = 0$$

$\Omega \in R^n$ de sınırlı ve yeterince düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip bir bölge, $f_i(t,u,v)$ $(i=1,2)$, $\phi(x,t,u,u_x,v)$ ve $\varphi(x,t,u,v)$ fonksiyonları değişkenlerine göre sürekli fonksiyonlardır. $\phi(x,t,u,u_x,v)$ ve $\varphi(x,t,u,v)$ fonksiyonları M_1, M_2, M_3, N_1, N_2 pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$|\phi(x,t,u,u_x,v)| \le M_1|u_x| + M_2|u| + M_3|v| \qquad \forall u,v \in R \qquad (2.3)$$

$$|\varphi(x,t,u,v)| \le N_1|v| + N_2|u| \qquad (2.4)$$

Ayrıca değişkenlerine göre türetilebilen $G(t,u,v)$ fonksiyonelinin aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilsin:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}G(t,u(\tau),v(\tau))=f_1(t,u(\tau),v(\tau))u_\tau+f_2(t,u(\tau),v(\tau))v_\tau \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dt}G(t,u(x,t),v(x,t))=G_t+f_1u_t+f_2v_t \tag{2.6}$$

$$f_1u+f_2v\geq 2(\alpha_1+1)G(t,u,v)\ ,\qquad \alpha_1>0 \tag{2.7}$$

$$G_t(t,u,v)\geq M_4(f_1u+f_2v) \tag{2.8}$$

$$M_4=\frac{M_1^{\ 2}(1+\alpha_1)(1+2\varepsilon)}{4(\alpha_1-\beta)(1-\varepsilon)},\quad \beta\in(0,\alpha_1),\quad \varepsilon\in(0,1)$$

Bu problemin bu koşullar altında global çözümünün yokluğu, Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasına dayanan aşağıdaki teoremle verilecektir.

Teorem 2.1.1 $\{u,v\}$ fonksiyon çifti (2.1)-(2.2) probleminin yerel çözümü olsun ve bu problem için (2.3)-(2.8) koşulları sağlansın:

Burada,

$$\alpha=\sqrt{1+\beta}-1\ ,\qquad \delta=-\frac{\gamma_2}{\alpha}$$

$$\gamma_1=-c_1+\sqrt{c_1^{\ 2}+\alpha c_2}\ ,\quad \gamma_2=-c_1-\sqrt{c_1^{\ 2}+\alpha c_2}$$

$$c_1=\max\left\{\frac{M_1^{\ 2}}{4\alpha_1}+M_2+2\varepsilon_1,\frac{M_3^{\ 2}+N_2^{\ 2}}{4\varepsilon_1}+N_1\right\},\quad \varepsilon_1\in(0,1)$$

$$c_2=4(\alpha_1+1)M_7$$

$$M_5=M_4\left(\frac{M_1^{\ 2}+4\varepsilon M_2+8\varepsilon^2}{4\varepsilon}\right)+\frac{1}{4}\frac{1+\alpha_1}{\alpha_1-\beta}\left(M_2^{\ 2}\left(\frac{\varepsilon^2+\varepsilon+1}{\varepsilon}\right)+2N_2^{\ 2}\right)$$

$$M_6=M_4\left[\frac{M_3^{\ 2}+N_2^{\ 2}}{4\varepsilon}+N_1\right]+\frac{1+\alpha_1}{4(\alpha_1-\beta)}\left[2N_1^{\ 2}+\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)M_3^{\ 2}\right]$$

$$M_7=\max\{M_5,M_6\}$$

olmak üzere, $u_0(x)$ ve $v_0(x)$ başlangıç fonksiyonları,

$$A_0 = -\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2 - \frac{1}{2}\|\nabla v_0\|^2 + \int_\Omega G(0,u_0,v_0)\,dx - \frac{M_4}{2}\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right) > \frac{\delta(1+\alpha)^2}{4\alpha(\alpha_1+1)}\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)$$

ifadesini sağlarsa,

$$t_1 = \frac{1}{2\sqrt{c_1^{\,2} + \alpha c_2}} \ln \frac{4\alpha^2(\alpha+1)A_0 + \gamma_1(1+\alpha^2)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)}{4\alpha^2(\alpha_1+1)A_0 + \gamma_2(1+\alpha^2)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)}$$

için,

$$\lim_{t\to t_1} \left\{ \int_0^t \left(\|u(.,t)\|^2 + \|v(.,t)\|^2 \right) d\tau \right\} = \infty$$

olur.

İspat : $\{u,v\}$ fonksiyonları, (2.1)-(2.2) probleminin yerel çözümü olsun. (2.1) denkleminin her iki yanı $L_2(\Omega)$ da u ile skaler çarpılırsa,

$$(u_t,u) = (\Delta u,u) + (f_1,u) + (\phi,u)$$

olur. Eşitliğin sağındaki ilk terime 1. Green Özdeşliği uygulanırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u,u) = -(\nabla u,\nabla u) + (f_1,u) + (\phi,u)$$

veya

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u,u) = -\|u_x\|^2 + (f_1,u) + (\phi,u) \tag{2.9}$$

elde edilir.

(2.2) denkleminin her iki yanı da $L_2(\Omega)$ da v ile skaler çarpılırsa,

$$(v_t, v) = (\Delta v, v) + (f_2, v) + (\varphi, v)$$

olur. Eşitliğin sağındaki ilk terime 1. Green Özdeşliği uygulanırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v, v) = -(\nabla v, \nabla v) + (f_2, v) + (\varphi, v)$$

veya

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v, v) = -\|v_x\|^2 + (f_2, v) + (\varphi, v) \qquad (2.10)$$

elde edilir.

(2.9) ve (2.10) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) = -\|u_x\|^2 - \|v_x\|^2 + (\phi, u) + (\varphi, v) + (f_1, u) + (f_2, v) \qquad (2.11)$$

bulunur. Bu eşitliğin son iki terimi yerine (2.7) eşitsizliği kullanılıp, üçüncü ve dördüncü terimler yerine integral ifadeleri konulursa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) \geq -\|u_x\|^2 - \|v_x\|^2 - \int_\Omega |\phi\, u|\, dx - \int_\Omega |\varphi\, v|\, dx + 2(\alpha_1 + 1)\int_\Omega G(t, u, v)\, dx$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte, (2.3) ve (2.4) koşulları kullanılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq -\|u_x\|^2-\|v_x\|^2-\int_\Omega\left(M_1|u_x||u|+M_2|u|^2+M_3|u||v|\right)dx$$
$$-\int_\Omega\left(N_1|v|^2+N_2|u||v|\right)dx+2(\alpha_1+1)\int_\Omega G(t,u,v)\,dx$$

olur ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq 2(\alpha_1+1)\left[-\frac{1}{2}\|u_x\|^2-\frac{1}{2}\|v_x\|^2+\int_\Omega G(t,u,v)dx\right]+\alpha_1\|u_x\|^2+\alpha_1\|v_x\|^2$$
$$+M_1\|u_x\|\|u\|-M_2\|u\|^2-M_3\|u\|\|v\|-N_1\|v\|^2$$
$$-N_2\|u\|\|v\| \qquad (2.12)$$

elde edilir, eşitsizliğin sağ tarafındaki,

$$E(t)=-\frac{1}{2}\|u_x\|^2-\frac{1}{2}\|v_x\|^2+\int_\Omega G(t,u,v)dx$$

(2.1)-(2.2) denklem sistemi için enerji integralini verir. (2.12) Young eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq 2(\alpha_1+1)E(t)+\alpha_1\|u_x\|^2+\alpha_1\|v_x\|^2-M_2\|u\|^2-N_1\|v\|^2$$
$$-M_1\left[\frac{\varepsilon}{2}\|u_x\|^2+\frac{1}{2\varepsilon}\|u\|^2\right]-M_3\left[\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2\varepsilon}\|v\|^2\right]$$
$$-N_2\left[\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2\varepsilon}\|v\|^2\right]$$

elde edilir. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq 2(\alpha_1+1)E(t)+\alpha_1\|u_x\|^2+\alpha_1\|v_x\|^2-M_2\|u\|^2-N_1\|v\|^2$$

$$-\frac{M_1\varepsilon}{2}\|u_x\|^2-\frac{M_1}{2\varepsilon}\|u\|^2-\frac{M_3\varepsilon}{2}\|u\|^2-\frac{M_3}{2\varepsilon}\|v\|^2$$
$$-\frac{N_2\varepsilon}{2}\|u\|^2-\frac{N_2}{2\varepsilon}\|v\|^2$$

şeklini alır. Burada,

$$\frac{M_1\varepsilon}{2}=\alpha_1\ ,\ \frac{M_3\varepsilon}{2}=\varepsilon_1\ \text{ ve }\ \frac{N_2\varepsilon}{2}=\varepsilon_1$$

alınarak gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq 2(\alpha_1+1)E(t)+\alpha_1\|v_x\|^2-\left[\frac{M_1^{\ 2}}{4\alpha_1}+M_2+2\varepsilon_1\right]\|u\|^2$$
$$-\left[\frac{M_3^{\ 2}+N_2^{\ 2}}{4\varepsilon_1}+N_1\right]\|v\|^2 \qquad (2.13)$$

olur ve

$$l_1=\frac{M_1^{\ 2}}{4\alpha_1}+M_2+2\varepsilon_1\ \ ,\ \ l_2=\frac{M_3^{\ 2}+N_2^{\ 2}}{4\varepsilon_1}+N_1$$

olarak alındığında,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq 2(\alpha_1+1)E(t)+\alpha_1\|v_x\|^2-l_1\|u\|^2-l_2\|v\|^2 \qquad (2.14)$$

elde edilir.

(2.11) denklemi $(0,t)$ aralığında integre edilirse,

$$\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{d\tau}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)d\tau+\int_0^t\|u_x\|^2d\tau=-\int_0^t\|v_x\|^2d\tau+\int_0^t(\phi,u)d\tau+\int_0^t(\varphi,v)d\tau$$

$$+\int_0^t [(f_1,u)+(f_2,v)]d\tau$$

olur ve (2.3),(2.4) koşulları kullanılırsa,

$$\frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)+\int_0^t \|u_x\|^2 d\tau \le -\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau+\frac{1}{2}\|u_0\|^2+\frac{1}{2}\|v_0\|^2$$

$$+\int_0^t [M_1(u_x,u)+M_2(u,u)+M_3(u,v)]d\tau$$

$$+\int_0^t [N_1(v,v)+N_2(u,v)]d\tau$$

$$+\int_0^t [(f_1,u)+(f_2,v)]d\tau$$

bulunur ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)+\int_0^t \|u_x\|^2 d\tau \le -\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau+\frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$$

$$+M_1\int_0^t \|u_x\|\|u\|d\tau+M_2\int_0^t \|u\|^2 d\tau$$

$$+M_3\int_0^t \|u\|\|v\|d\tau+N_1\int_0^t \|v\|^2 d\tau$$

$$+N_2\int_0^t \|u\|\|v\|d\tau+\int_0^t [(f_1,u)+(f_2,v)]d\tau$$

ve burada da Young eşitsizliği kullanılırsa,

$$\frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)+\int_0^t \|u_x\|^2 d\tau \le -\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau+\frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$$

$$+\frac{M_1\varepsilon}{2}\int_0^t\|u_x\|^2\,d\tau+\frac{M_1}{2\varepsilon}\int_0^t\|u\|^2\,d\tau$$

$$+M_2\int_0^t\|u\|^2 d\tau+\frac{M_3\varepsilon}{2}\int_0^t\|u\|^2 d\tau+\frac{M_3}{2\varepsilon}\int_0^t\|v\|^2\,d\tau$$

$$+N_1\int_0^t\|v\|^2 d\tau+\frac{N_2\varepsilon}{2}\int_0^t\|u\|^2 d\tau+\frac{N_2}{2\varepsilon}\int_0^t\|v\|^2 d\tau$$

$$+\int_0^t[(f_1,u)+(f_2,v)]d\tau$$

elde edilir.

$$\frac{M_1\varepsilon}{2}=\varepsilon_2\ ,\quad \frac{N_2\varepsilon}{2}=\varepsilon_2\quad \text{ve}\quad \frac{M_3\varepsilon}{2}=\varepsilon_2$$

alındığında, yukarıdaki eşitsizlik,

$$\int_0^t\|u_x\|^2 d\tau-\varepsilon_2\int_0^t\|u_x\|^2 d\tau\le-\int_0^t\|v_x\|^2 d\tau+\frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)-\frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$$

$$+\left(\frac{M_1^{\ 2}}{4\varepsilon_2}+M_2+2\varepsilon_2\right)\int_0^t\|u\|^2\,d\tau$$

$$+\left(\frac{M_3^{\ 2}+N_2^{\ 2}}{4\varepsilon_2}+N_1\right)\int_0^t\|v\|^2\,d\tau+\int_0^t[(f_1,u)+(f_2,v)]d\tau$$

şeklini alır. Burada eşitsizliğin sağındaki üçüncü terim negatif olduğundan dolayı ihmal edilirse eşitsizlik daha da küçüldüğünden,

$$\int_0^t\|u_x\|^2\,d\tau\le\frac{1}{1-\varepsilon_2}\left[-\int_0^t\|v_x\|^2\,d\tau+\frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\left(\frac{M_1^{\ 2}}{4\varepsilon_2}+M_2+2\varepsilon_2\right)\int_0^t\|u\|^2\,d\tau\right.$$

$$\left.+\left(\frac{M_3^{\ 2}+N_2^{\ 2}}{4\varepsilon_2}+N_1\right)\int_0^t\|v\|^2\,d\tau+\int_0^t[(f_1,u)+(f_2,v)]d\tau\right]\qquad(2.15)$$

olarak bulunur.

(2.1) denklemi $L_2(\Omega)$ da u_t ile skaler çarpılırsa,

$$(u_t, u_t) = (\Delta u, u_t) + (f_1, u_t) + (\phi, u_t)$$

olup, eşitliğin sağındaki ilk terime 1.Green Özdeşliği uygulanırsa,

$$\|u_t\|^2 = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\nabla u, \nabla u) + (f_1, u_t) + (\phi, u_t)$$

veya

$$\|u_t\|^2 = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2 + (f_1, u_t) + (\phi, u_t) \tag{2.16}$$

elde edilir.

(2.2) denklemi de $L_2(\Omega)$ da v_t ile skaler çarpılırsa,

$$(v_t, v_t) = (\Delta v, v_t) + (f_2, v_t) + (\varphi, v_t)$$

olup, eşitliğin sağındaki ilk terime 1.Green Özdeşliği uygulanırsa,

$$\|v_t\|^2 = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\nabla v, \nabla v) + (f_2, v_t) + (\varphi, v_t)$$

veya

$$\|v_t\|^2 = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_x\|^2 + (f_2, v_t) + (\varphi, v_t) \tag{2.17}$$

elde edilir.

(2.16) ve (2.17) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\|u_t\|^2+\|v_t\|^2=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_x\|^2+(f_1,u_t)+(f_2,v_t)+(\phi,u_t)+(\varphi,v_t) \qquad (2.18)$$

elde edilir. (2.18) de (2.6) koşulu kullanılırsa,

$$\|u_t\|^2+\|v_t\|^2=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_x\|^2+\frac{d}{dt}\int_\Omega G(t,u,v)\ dx-\int_\Omega G_t\ dx+(\phi,u_t)+(\varphi,v_t)$$

ve bu eşitlik düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\|u_t\|^2+\|v_t\|^2&=\frac{d}{dt}\left[-\frac{1}{2}\|u_x\|^2-\frac{1}{2}\|v_x\|^2+\int_\Omega G(t,u,v)\,dx\right]-\int_\Omega G_t\,dx+(\phi,u_t)+(\varphi,v_t)\\&=\frac{d}{dt}(E(t))+(\phi,u_t)+(\varphi,v_t)-\int_\Omega G_t\ dx\end{aligned}$$

bulunur, buradan da,

$$\frac{d}{dt}(E(t))=\|u_t\|^2+\|v_t\|^2-(\phi,u_t)-(\varphi,v_t)+\int_\Omega G_t\ dx \qquad (2.19)$$

olup, bu eşitlik,

$$\frac{d}{dt}(E(t))\geq\|u_t\|^2+\|v_t\|^2-\int_\Omega|\phi|\,|u_t|\ dx-\int_\Omega|\varphi|\,|v_t|\ dx+\int_\Omega G_t\,dx$$

şeklinde ifade edilebilir. Son ifadede sırasıyla Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 - \left[\frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|\phi\|^2\right] - \left[\frac{\varepsilon}{2}\|v_t\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|\varphi\|^2\right] + \int_\Omega G_t \, dx$$

ve burada da,

$$\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon_3$$

alınırsa,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq (1-\varepsilon_3)\|u_t\|^2 + (1-\varepsilon_3)\|v_t\|^2 - \frac{1}{4\varepsilon_3}\|\phi\|^2 - \frac{1}{4\varepsilon_3}\|\varphi\|^2 + \int_\Omega G_t \, dx$$

olur. (2.3),(2.4) koşulları kullanılırsa,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq (1-\varepsilon_3)\|u_t\|^2 + (1-\varepsilon_3)\|v_t\|^2 - \frac{1}{4\varepsilon_3}\left(\|M_1|u_x| + M_2|u| + M_3|v|\|\right)^2$$
$$-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left(\|N_1|v| + N_2|u|\|\right)^2 + \int_\Omega G_t \, dx$$

bulunur. Bu eşitsizlik düzenlenirse,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq (1-\varepsilon_3)\|u_t\|^2 + (1-\varepsilon_3)\|v_t\|^2 - \frac{1}{4\varepsilon_3}\left(M_1^2\|u_x\|^2 + M_2^2\|u\|^2 + M_3^2\|v\|^2\right.$$
$$\left. + 2M_1M_2\|u_x\|\,\|u\| + 2M_1M_3\|u_x\|\,\|v\| + 2M_2M_3\|u\|\,\|v\|\right)$$
$$-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left(N_1^2\|v\|^2 + N_2^2\|u\|^2 + 2N_1N_2\|v\|\,\|u\|\right) + \int_\Omega G_t \, dx$$

elde edilir ve Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq (1-\varepsilon_3)\|u_t\|^2 + (1-\varepsilon_3)\|v_t\|^2 - \frac{1}{4\varepsilon_3}\Big(M_1^2\|u_x\|^2 + M_2^2\|u\|^2 + M_3^2\|v\|^2$$

$$+2\left(\frac{\varepsilon_4}{2}M_1^2\|u_x\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_4}M_2^2\|u\|^2\right) + 2\left(\frac{\varepsilon_4}{2}M_1^2\|u_x\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_4}M_3^2\|v\|^2\right)$$

$$+2\left(\frac{\varepsilon_4}{2}M_2^2\|u\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_4}M_3^2\|v\|^2\right)$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left(N_1^2\|v\|^2 + N_2^2\|u\|^2 + 2\left(\frac{\varepsilon}{2}N_1^2\|v\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}N_2^2\|u\|^2\right)\right) + \int_\Omega G_t\, dx$$

olur. Bu eşitsizlikte $\varepsilon = 1$ olarak alınır ve eşitsizlik düzenlenirse,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq (1-\varepsilon_3)\|u_t\|^2 + (1-\varepsilon_3)\|v_t\|^2 - \frac{M_1^2}{4\varepsilon_3}(1+2\varepsilon_4)\|u_x\|^2$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left[M_2^2\left(\varepsilon_4 + \frac{1}{\varepsilon_4} + 1\right) + 2N_2^2\right]\|u\|^2$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left[2N_1^2 + \left(\frac{2}{\varepsilon_4} + 1\right)M_3^2\right]\|v\|^2 + \int_\Omega G_t\, dx \tag{2.20}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $(0,t)$ aralığında integre edilip sağ taraftaki $\|u_x\|^2$ nin $(0,t)$ aralığındaki integrali yerine (2.15) yazılırsa,

$$E(t) - E(0) \geq (1-\varepsilon_3)\int_0^t \left(\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2\right) d\tau - \frac{M_1^2(1+2\varepsilon_4)}{4\varepsilon_3(1-\varepsilon_2)}\Bigg[-\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau$$

$$+\frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right) + \left(\frac{M_1^2}{4\varepsilon_2} + M_2 + 2\varepsilon_2\right)\int_0^t \|u\|^2 d\tau$$

$$+\left(\frac{M_3^2 + N_2^2}{4\varepsilon_2} + N_1\right)\int_0^t \|v\|^2 d\tau + \int_0^t [(f_1,u) + (f_2,v)]\, dx\, d\tau\Bigg]$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left[M_2^2\left(\varepsilon_4 + \frac{1}{\varepsilon_4} + 1\right) + 2N_2^2\right]\int_0^t \|u\|^2 d\tau$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left[2N_1^2+\left(\frac{2}{\varepsilon_4}+1\right)M_3^2\right]\int_0^t\|v\|^2d\tau+\int_0^t\int_\Omega G_t\,dx\,d\tau$$

olur. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$E(t)\geq E(0)+(1-\varepsilon_3)\int_0^t\left(\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right)d\tau+\frac{M_1^2(1+2\varepsilon_4)}{4\varepsilon_3(1-\varepsilon_2)}\int_0^t\|v_x\|^2d\tau$$

$$-\frac{M_1^2(1+2\varepsilon_4)}{8\varepsilon_3(1-\varepsilon_2)}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)-\left[\left(\frac{M_1^2(1+2\varepsilon_4)}{4\varepsilon_3(1-\varepsilon_2)}\right)\left(\frac{M_1^2}{4\varepsilon_2}+M_2+2\varepsilon_2\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\varepsilon_3}\left(M_2^2\left(\varepsilon_4+\frac{1}{\varepsilon_4}+1\right)+2N_2^2\right)\right]\int_0^t\|u\|^2d\tau$$

$$-\left[\left(\frac{M_1^2(1+2\varepsilon_4)}{4\varepsilon_3(1-\varepsilon_2)}\right)\left(\frac{M_3^2+N_2^2}{4\varepsilon_3}+N_1\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\varepsilon_3}\left(2N_1^2+\left(\frac{2}{\varepsilon_4}+1\right)M_3^2\right)\right]\int_0^t\|v\|^2d\tau$$

$$+\left(\frac{M_1^2(1+2\varepsilon_4)}{4\varepsilon_3(1-\varepsilon_2)}\right)\int_0^t[(f_1,u)+(f_2,v)]d\tau+\int_0^t\int_\Omega G_t\,dx\,d\tau$$

elde edilir. Burada,

$$\varepsilon_3=\frac{\alpha_1-\beta}{1+\alpha_1}\ ,\qquad \varepsilon_4=\varepsilon_2=\varepsilon\quad \text{ve}\quad M_4=\frac{M_1^2(1+\alpha_1)(1+2\varepsilon_4)}{4(\alpha_1-\beta)(1-\varepsilon_2)}$$

olarak alınıp,

$$A_0=E(0)-\frac{M_4}{2}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$$

notasyonu kullanılırsa,

$$E(t)\geq A_0+\frac{1+\beta}{1+\alpha_1}\int_0^t\left(\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right)d\tau+M_4\int_0^t\|v_x\|^2\,d\tau$$

$$-\left[M_4\left(\frac{M_1^{\,2}+4\varepsilon M_2+8\varepsilon^2}{4\varepsilon}\right)+\frac{1}{4}\frac{1+\alpha_1}{\alpha_1-\beta}\left(M_2^{\,2}\left(\frac{\varepsilon^2+\varepsilon+1}{\varepsilon}\right)+2N_2^{\,2}\right)\right]\int_0^t\|u\|^2\,d\tau$$

$$-\left[M_4\left(\frac{M_3^{\,2}+N_2^{\,2}}{4\varepsilon}+N_1\right)+\frac{1}{4}\frac{1+\alpha_1}{\alpha_1-\beta}\left(2N_1^{\,2}+\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)M_3^{\,2}\right)\right]\int_0^t\|v\|^2\,d\tau$$

$$-M_4\int_0^t[(f_1,u)+(f_2,v)]\,d\tau+\int_0^t\int_\Omega G_t\,dx\,d\tau \qquad (2.21)$$

olup (2.21) de,

$$M_5=M_4\left(\frac{M_1^{\,2}+4\varepsilon M_2+8\varepsilon^2}{4\varepsilon}\right)+\frac{1}{4}\frac{1+\alpha_1}{\alpha_1-\beta}\left(M_2^{\,2}\left(\frac{\varepsilon^2+\varepsilon+1}{\varepsilon}\right)+2N_2^{\,2}\right)$$

$$M_6=M_4\left(\frac{M_3^{\,2}+N_2^{\,2}}{4\varepsilon}+N_1\right)+\frac{1}{4}\frac{1+\alpha_1}{\alpha_1-\beta}\left(2N_1^{\,2}+\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)M_3^{\,2}\right)$$

notasyonları ve (2.8) şartı kullanılırsa,

$$E(t)\geq A_0+\frac{1+\beta}{1+\alpha_1}\int_0^t\left(\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right)d\tau+M_4\int_0^t\|v_x\|^2\,d\tau$$

$$-M_5\int_0^t\|u\|^2\,d\tau-M_6\int_0^t\|v\|^2\,d\tau \qquad (2.22)$$

elde edilir. Bu (2.22) eşitsizliği (2.14) de kullanılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq 2(\alpha_1+1)\left[A_0+\frac{1+\beta}{1+\alpha_1}\int_0^t\left(\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right)d\tau+M_4\int_0^t\|v_x\|^2d\tau\right.$$

$$\left.-M_5\int_0^t\|u\|^2d\tau-M_6\int_0^t\|v\|^2d\tau\right]+\alpha_1\|v_x\|^2-l_1\|u\|^2-l_2\|v\|^2$$

ve buradan da,

$$\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq 4(1+\beta)\int_0^t\left(\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right)d\tau-4(\alpha_1+1)M_5\int_0^t\|u\|^2 d\tau$$

$$-4(\alpha_1+1)M_6\int_0^t\|v\|^2 d\tau+(\alpha_1+1)A_0+4(\alpha_1+1)M_4\int_0^t\|v_x\|^2 d\tau$$

$$+2\alpha_1\|v_x\|^2-2l_1\|u\|^2-2l_2\|v\|^2 \qquad (2.23)$$

elde edilir.

Bu hazırlıklardan sonra, Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasındaki $\psi(t)$ fonksiyonu, teoremin koşullarını sağlayacak şekilde belirlenmelidir. $\{u,v\}$ fonksiyonları sözkonusu başlangıç-sınır değer probleminin yerel çözümü olsun. μ pozitif bir sabit, $\psi(t)$ iki kez türevlenebilen pozitif fonksiyonu,

$$\psi(t)=\int_0^t\left(\|u(.,\tau)\|^2+\|v(.,\tau)\|^2\right)d\tau+\mu$$

şeklinde olsun. Bunun için $\psi(t)$ fonksiyonunun iki kez türevi alınırsa,

$$\psi'(t)=\|u(.,t)\|^2+\|v(.,t)\|^2=\int_0^t\frac{d}{d\tau}\|u\|^2 d\tau+\int_0^t\frac{d}{d\tau}\|v\|^2 d\tau+\|u_0\|^2+\|v_0\|^2$$

$$=2\left[\int_0^t\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|u\|^2 d\tau+\int_0^t\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|v\|^2 d\tau\right]+\|u_0\|^2+\|v_0\|^2$$

$$=2\left[\int_0^t(u,u_\tau)d\tau+\int_0^t(v,v_\tau)d\tau\right]+\|u_0\|^2+\|v_0\|^2$$

ve

$$\psi''(t)=\frac{d}{dt}\left[\|u(.,t)\|^2+\|v(.,t)\|^2\right]$$

olarak elde edilir. $\psi'(t)$ ifadesinin sağındaki ilk terime Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left[\int_0^t (u,u_\tau)\,d\tau+\int_0^t (v,v_\tau)\,d\tau\right]\le\sqrt{\left(\int_0^t\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)d\tau\right)}\sqrt{\left(\int_0^t\left(\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right)d\tau\right)}$$

olup,

$$A_1=\int_0^t\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)d\tau \text{ ve } A_2=\int_0^t\left(\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right)d\tau$$

olarak alınırsa,

$$\left[\int_0^t (u,u_\tau)d\tau+\int_0^t (v,v_\tau)d\tau\right]\le\sqrt{A_1A_2} \tag{2.24}$$

elde edilir. Bu eşitlik $\psi'(t)$ de yerine yerleştirilirse,

$$\psi'(t)\le 2\sqrt{A_1A_2}+\|u_0\|^2+\|v_0\|^2 \tag{2.25}$$

olur. A_1 ifadesinden yararlanılarak, $\psi(t)$fonksiyonu,

$$\psi(t)=A_1+\mu \tag{2.26}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\chi(t)=\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)\left[\psi'(t)\right]^2 \tag{2.27}$$

ifadesindeki terimler ayrı ayrı kısıtlanmaya çalışılırsa:

(2.25) eşitsizliği kullanılarak,

$$[\psi'(t)]^2=\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)^2\le\left(2\sqrt{A_1A_2}+\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)^2$$

$$=4A_1A_2+\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)^2+4\sqrt{A_1A_2}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$$

elde edilir. Burada eşitsizliğin sağındaki son terime Young eşitsizliği uygulanırsa eşitsizlik,

$$[\psi'(t)]^2=\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)^2\le 4(1+\varepsilon_5)A_1A_2+\left(1+\frac{1}{\varepsilon_5}\right)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)^2 \tag{2.28}$$

şeklini alır.

$\psi''(t)\psi(t)$ terimi için ise,

$$\psi''(t)\psi(t)=\frac{d}{dt}\left[\|u\|^2+\|v\|^2\right](A_1+\mu)$$

eşitliği gözönüne alınarak (2.23) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\psi''(t)\psi(t)\ge\Bigg[4(1+\beta)\int_0^t\left(\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right)d\tau-4M_5(\alpha_1+1)\int_0^t\|u\|^2d\tau$$

$$-4M_6(\alpha_1+1)\int_0^t\|v\|^2d\tau+4(\alpha_1+1)A_0$$

$$+4(\alpha_1+1)M_4\int_0^t\|v_x\|^2d\tau+2\alpha_1\|v_x\|^2-2l_1\|u\|^2-2l_2\|v\|^2\Bigg]\ [A_1+\mu]$$

elde edilir.Bu eşitsizlik düzenlenirse,

$$\psi''(t)\psi(t) \geq [4(1+\beta)A_2 + 4(\alpha_1+1)\left(A_0 - M_5\int_0^t \|u\|^2 d\tau - M_6\int_0^t \|v\|^2 d\tau + M_4\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau\right)$$

$$+2\alpha_1\|v_x\|^2 - 2l_1\|u\|^2 - 2l_2\|v\|^2\Big]\ [A_1+\mu] \tag{2.29}$$

şeklini alır. Burada,

$$M_7 = \max\{M_5, M_6\} \quad \text{ve} \quad c_1 = \max\{l_1, l_2\}$$

olarak alınıp (2.29) eşitsizliğinde kullanılırsa,

$$\psi''(t)\psi(t) \geq [4(1+\beta)A_2 + 4(\alpha_1+1)\left(A_0 - M_7\int_0^t \left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)d\tau + M_4\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau\right)$$

$$+2\alpha_1\|v_x\|^2 - 2c_1\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\ [A_1+\mu]$$

$$= [4(1+\beta)A_2 + 4(\alpha_1+1)\left(A_0 - M_7A_1 + M_4\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau\right)$$

$$+2\alpha_1\|v_x\|^2 - 2c_1\psi'(t)]\ [A_1+\mu] \tag{2.30}$$

elde edilir.

Şimdi (2.28) ve (2.30) eşitsizlikleri (2.27) de yerleştirilirse,

$$\psi''(t)\psi(t) - (1+\alpha)[\psi'(t)]^2 \geq [4(1+\beta)A_2 + 4(\alpha_1+1)\left(A_0 - M_7A_1 + M_4\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau\right)$$

$$+2\alpha_1\|v_x\|^2 - 2c_1\psi'(t)]\ [A_1+\mu]$$

$$-(1+\alpha)\left[4(1+\varepsilon_5)A_1A_2 + \left(1+\frac{1}{\varepsilon_5}\right)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)^2\right]$$

$$=4(1+\beta)A_2A_1 + 4(1+\beta)A_2\mu$$

$$+\left[4(\alpha_1+1)\left(A_0-M_7A_1+M_4\int_0^t\|v_x\|^2d\tau\right)\right.$$

$$\left.+2\alpha_1\|v_x\|^2-2c_1\psi'(t)\right][A_1+\mu]$$

$$-(1+\alpha)\left[4(1+\varepsilon_5)A_1A_2+\left(1+\frac{1}{\varepsilon_5}\right)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)^2\right]$$

$$=4(1+\beta)A_2A_1+4(1+\beta)A_2\mu$$

$$+\left[4(\alpha_1+1)\left(A_0-M_7\psi(t)+M_7\mu+M_4\int_0^t\|v_x\|^2d\tau\right)\right.$$

$$\left.+2\alpha_1\|v_x\|^2-2c_1\psi'(t)\right]\psi(t)$$

$$-(1+\alpha)\left[4(1+\varepsilon_5)A_1A_2+\left(1+\frac{1}{\varepsilon_5}\right)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)^2\right]$$

çıkar ve bu son eşitsizlikte $\varepsilon_5=\alpha$ ve $(1+\alpha)^2=1+\beta$ olarak alınırsa,

$$\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)[\psi'(t)]^2\geq 4(1+\beta)A_2A_1+4(1+\beta)A_2\mu+[4(\alpha_1+1)(A_0-M_7\psi(t)$$
$$+M_7\mu+M_4\int_0^t\|v_x\|^2d\tau\Big)+2\alpha_1\|v_x\|^2-2c_1\psi'(t)]\psi(t)$$
$$-4(1+\beta)A_1A_2-(1+\alpha)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)^2$$

olur ve sağ taraftaki bazı pozitif terimler atılırsa, sağ taraf daha da küçüleceğinden eşitsizlik,

$$\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)[\psi'(t)]^2\geq -2c_1\psi'(t)\psi(t)-4(\alpha_1+1)M_7\psi^2(t)$$
$$+4(\alpha_1+1)(A_0+M_7\mu)\psi(t)$$
$$-(1+\alpha)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)^2$$
$$=-2c_1\psi'(t)\psi(t)-4(\alpha_1+1)M_7\psi^2(t)$$

$$+4(\alpha_1+1)(A_0+M_7\mu)(A_1+\mu)$$
$$-\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)^2$$

şeklinde yazılabilir. Pozitif olan $4(\alpha_1+1)(A_0+M_7\mu)A_1$ terimi atılırsa sağ taraf daha da küçüleceğinden,

$$\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)[\psi'(t)]^2\geq -2c_1\psi'(t)\psi(t)-4(\alpha_1+1)M_7\psi^2(t)$$
$$+4(\alpha_1+1)(A_0+M_7\mu)\mu$$
$$-\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)^2 \qquad (2.31)$$

şeklini alır. Son eşitsizlikte μ,

$$4(\alpha_1+1)A_0\mu-\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)^2=0$$

olacak şekilde yani,

$$\mu=\frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha(\alpha_1+1)}\frac{\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)^2}{A_0}$$

alınırsa ve $4(\alpha_1+1)M_7\mu^2$ terimi atılırsa (2.31) eşitsizliği,

$$\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)[\psi'(t)]^2\geq -2c_1\psi'(t)\psi(t)-4(\alpha_1+1)M_7\psi^2(t)$$

şeklini alır. Bu ifade Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemması ile karşılaştırılırsa,

$$c_2=4(\alpha_1+1)M_7$$

olduğu görülür ve,

$$\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)[\psi'(t)]^2 \geq -2c_1\psi'(t)\psi(t)-c_2\psi^2(t)$$

elde edilir.

Böylece, $\psi(t)$ fonksiyonu, $c_1, c_2 \geq 0$ sayıları ile Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasındaki (1.8) koşulunu gerçeklemiş olur.

Lemmanın diğer koşulları olan,

$$\psi(0)>0$$

ve

$$\psi'(0)>\delta\,\psi(0)$$

eşitsizliklerinin de $\psi(t)$ fonksiyonu için sağlanıp sağlanmadığı araştırılırsa;

$$\psi(0)=\mu$$

çıkar. μ nün pozitif olduğu yukarıdaki seçiminden açıkça görülür.

Teoremin hipotezindeki $u_0(x)$ ve $v_0(x)$ başlangıç fonksiyonları,

$$A_0 > \frac{\delta(1+\alpha)^2}{4\alpha(\alpha_1+1)}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right) \quad , \qquad (\ \alpha,\alpha_1,\delta \ \text{ pozitif idi }\ )$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde alınırsa ve burada eşitsizliğin her iki yanı $\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$ ile çarpılırsa,

$$\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)>\frac{\delta(1+\alpha)^2}{4\alpha(\alpha_1+1)}\frac{\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)^2}{A_0}$$

olur. Buradaki,

$$\psi(0)=\frac{(1+\alpha)^2}{4\alpha(\alpha_1+1)}\frac{\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)^2}{A_0}$$

ve

$$\psi'(0)=\|u_0\|^2+\|v_0\|^2$$

olduğundan,

$$\psi'(0)>\delta\,\psi(0)$$

elde edilir. Teoremin bütün koşulları sağlanmış olduğundan ispat tamamlanmıştır.

t_1 patlama zamanı,

$$t_1=\frac{1}{2\sqrt{c_1^{\,2}+\alpha c_2}}\ln\frac{\gamma_1\psi(0)+\alpha\psi'(0)}{\gamma_2\psi(0)+\alpha\psi'(0)}$$

ifadesinde bilinenler yazılırsa,

$$t_1=\frac{1}{2\sqrt{c_1^{\,2}+\alpha c_2}}\ln\frac{4\alpha^2(\alpha_1+1)A_0+\gamma_1(1+\alpha)^2\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)}{4\alpha^2(\alpha_1+1)A_0+\gamma_2(1+\alpha)^2\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)}$$

olarak bulunur. Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasından $t\to t_1$ için,

$$\lim_{t\to t_1}\left\{\int_0^t\left(\|u(.,t)\|^2+\|v(.,t)\|^2\right)\,d\tau\right\}=\infty$$

olur.

BÖLÜM 3

3.1 EKOLOJİDE VOLTERRA-LOTKA REKABET MODELİNİ TEMSİL EDEN BAŞLANGIÇ-SINIR DEĞER PROBLEMİNİN NEUMANN SINIR KOŞULU İLE GLOBAL ÇÖZÜMÜNÜN YOKLUĞU

Bu model Neumann sınır koşulları ile verilen aşağıdaki sistemden oluşmaktadır.

$$u_t - \Delta u = f_1(t,u,v) + \phi(x,t,u,u_x,v) \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{3.1}$$

$$v_t - \Delta v = f_2(t,u,v) + \varphi(x,t,u,v) \qquad x \in \Omega,\ t > 0 \tag{3.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

$$v(x,0) = v_0(x), \qquad \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = 0$$

$\Omega \in R^n$ de sınırlı ve yeterince düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip bir bölge, $f_i(t,u,v)$ $(i=1,2)$, $\phi(x,t,u,u_x,v)$ ve $\varphi(x,t,u,v)$ fonksiyonları değişkenlerine göre sürekli fonksiyonlardır. $\phi(x,t,u,u_x,v)$ ve $\varphi(x,t,u,v)$ fonksiyonları M_1, M_2, M_3, N_1, N_2 pozitif sabitler olmak üzere aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$|\phi(x,t,u,u_x,v)| \le M_1|u_x| + M_2|u| + M_3|v| \qquad \forall u,v \in R \tag{3.3}$$

$$|\varphi(x,t,u,v)| \le N_1|v| + N_2|u| \tag{3.4}$$

Ayrıca değişkenlerine göre türetilebilen $G(t,u,v)$ fonksiyonelinin aşağıdaki koşulları sağladığı kabul edilsin:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} G(t,u(\tau),v(\tau)) = f_1(t,u(\tau),v(\tau))u_\tau + f_2(t,u(\tau),v(\tau))v_\tau \tag{3.5}$$

$$\frac{d}{dt} G(t,u(x,t),v(x,t)) = G_t + f_1 u_t + f_2 v_t \tag{3.6}$$

$$f_1 u + f_2 v \geq 2(\alpha_1 + 1)G(t,u,v) \;, \qquad \alpha_1 > 0 \tag{3.7}$$

$$G_t(t,u,v) \geq M_4 (f_1 u + f_2 v) \tag{3.8}$$

$$M_4 = \frac{M_1^2 (1+\alpha_1)(1+2\varepsilon)}{4(\alpha_1 - \beta)(1-\varepsilon)}, \quad \beta \in (0,\alpha_1), \;\; \varepsilon \in (0,1)$$

Bu problemin global çözümünün yokluğu, Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasına dayanan aşağıdaki teorem yardımıyla verilecektir.

Teorem 3.1.1 $\{u,v\}$ fonksiyon çifti (3.1)-(3.2) probleminin yerel çözümü olsun ve bu problem için (3.3)-(3.8) koşulları sağlansın:

Burada,

$$\alpha = \sqrt{1+\beta} - 1 \;, \qquad \delta = -\frac{\gamma_2}{\alpha}$$

$$\gamma_1 = -c_1 + \sqrt{c_1^2 + \alpha c_2} \;, \qquad \gamma_2 = -c_1 - \sqrt{c_1^2 + \alpha\, c_2}$$

$$c_1 = \max\left\{ \frac{M_1^2}{4\alpha_1} + M_2 + 2\varepsilon_1, \frac{M_3^2 + N_2^2}{4\varepsilon_1} + N_1 \right\}, \;\; \varepsilon_1 \in (0,1)$$

$$c_2 = 4(\alpha_1 + 1)M_7$$

$$M_5 = M_4 \left(\frac{M_1^2 + 4\varepsilon M_2 + 8\varepsilon^2}{4\varepsilon} \right) + \frac{1}{4} \frac{1+\alpha_1}{\alpha_1 - \beta} \left(M_2^2 \left(\frac{\varepsilon^2 + \varepsilon + 1}{\varepsilon} \right) + 2N_2^2 \right)$$

$$M_6 = M_4 \left[\frac{M_3^2 + N_2^2}{4\varepsilon} + N_1 \right] + \frac{1+\alpha_1}{4(\alpha_1 - \beta)} \left[2N_1^2 + \left(1 + \frac{2}{\varepsilon} \right) M_3^2 \right]$$

$$M_7 = \max\{\, M_5, M_6 \,\}$$

olmak üzere,

$$0 < k < \frac{2}{\delta}$$

için, $u_0(x)$ ve $v_0(x)$ başlangıç fonksiyonları,

$$A_0 = -\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|^2 - \frac{1}{2}\|\nabla v_0\|^2 + \int_\Omega G(0,u_0,v_0)dx - \frac{M_4}{2}\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right) > \frac{(1+\alpha)^2}{\alpha(\alpha_1+1)} \frac{(\delta T_0 + 1)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)}{2k - k^2\delta}$$

ifadesini sağlarsa,

$$t_1 = \frac{1}{2\sqrt{c_1^{\,2} + \alpha c_2}} \ln \frac{\gamma_1[\,T_0\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\left(1+\alpha^2\right) + \alpha(\alpha_1+1)A_0k^2\,] + 2\alpha^2(\alpha_1+1)A_0k - \alpha(1+\alpha)^2\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|\right)^2}{\gamma_2[\,T_0\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\left(1+\alpha^2\right) + \alpha(\alpha_1+1)A_0k^2\,] + 2\alpha^2(\alpha_1+1)A_0k - \alpha(1+\alpha)^2\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|\right)^2}$$

için,

$$\lim_{t \to t_1} \left\{ \int_0^t \left(\|u(.,t)\|^2 + \|v(.,t)\|^2\right) d\tau \right\} = \infty$$

olur.

İspat : $\{u,v\}$ fonksiyonları, (3.1)-(3.2) probleminin yerel çözümü olsun. (3.1) denkleminin her iki yanı $L_2(\Omega)$ da u ile skaler çarpılırsa,

$$(u_t, u) = (\Delta u, u) + (f_1, u) + (\phi, u)$$

olur. Eşitliğin sağındaki ilk terime 1. Green Özdeşliği uygulanırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u,u) = -(\nabla u, \nabla u) + (f_1, u) + (\phi, u)$$

veya

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u,u)=-\|u_x\|^2+(f_1,u)+(\phi,u) \tag{3.9}$$

elde edilir.

(3.2) denkleminin her iki yanı da $L_2(\Omega)$ da v ile skaler çarpılırsa,

$$(v_t,v)=(\Delta v,v)+(f_2,v)+(\varphi,v)$$

olur. Eşitliğin sağındaki ilk terime 1. Green Özdeşliği uygulanırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v,v)=-(\nabla v,\nabla v)+(f_2,v)+(\varphi,v)$$

veya

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v,v)=-\|v_x\|^2+(f_2,v)+(\varphi,v) \tag{3.10}$$

elde edilir.

(3.9) ve (3.10) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)=-\|u_x\|^2-\|v_x\|^2+(\phi,u)+(\varphi,v)+(f_1,u)+(f_2,v) \tag{3.11}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin son iki terimi yerine (3.7) eşitsizliği kullanılıp, üçüncü ve dördüncü terimler yerine integral ifadeleri konulursa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq-\|u_x\|^2-\|v_x\|^2-\int_\Omega|\phi\, u|dx-\int_\Omega|\varphi\, v|dx+2(\alpha_1+1)\int_\Omega G(t,u,v)\,dx$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte (3.3) ve (3.4) koşulları kullanılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq -\|u_x\|^2-\|v_x\|^2-\int_\Omega \left(M_1|u_x||u|+M_2|u|^2+M_3|u||v|\right)dx$$
$$-\int_\Omega \left(N_1|v|^2+N_2|u||v|\right)dx+2(\alpha_1+1)\int_\Omega G(t,u,v)\,dx$$

olur ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq 2(\alpha_1+1)\left[-\frac{1}{2}\|u_x\|^2-\frac{1}{2}\|v_x\|^2+\int_\Omega G(t,u,v)\;dx\right]$$
$$+\alpha_1\|u_x\|^2+\alpha_1\|v_x\|^2+M_1\|u_x\|\|u\|-M_2\|u\|^2$$
$$-M_3\|u\|\|v\|-N_1\|v\|^2-N_2\|u\|\|v\| \qquad (3.12)$$

elde edilir, eşitsizliğin sağ tarafındaki,

$$E(t)=-\frac{1}{2}\|u_x\|^2-\frac{1}{2}\|v_x\|^2+\int_\Omega G(t,u,v)dx$$

(3.1)-(3.2) denklem sistemi için enerji integralini verir. (3.12) de Young eşitsizliği kullanılarak,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq 2(\alpha_1+1)E(t)+\alpha_1\|u_x\|^2+\alpha_1\|v_x\|^2-M_2\|u\|^2-N_1\|v\|^2$$
$$-M_1\left[\frac{\varepsilon}{2}\|u_x\|^2+\frac{1}{2\varepsilon}\|u\|^2\right]-M_3\left[\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2\varepsilon}\|v\|^2\right]$$
$$-N_2\left[\frac{\varepsilon}{2}\|u\|^2+\frac{1}{2\varepsilon}\|v\|^2\right]$$

elde edilir. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq 2(\alpha_1+1)E(t)+\alpha_1\|u_x\|^2+\alpha_1\|v_x\|^2-M_2\|u\|^2-N_1\|v\|^2$$

$$-\frac{M_1\varepsilon}{2}\|u_x\|^2-\frac{M_1}{2\varepsilon}\|u\|^2-\frac{M_3\varepsilon}{2}\|u\|^2-\frac{M_3}{2\varepsilon}\|v\|^2$$
$$-\frac{N_2\varepsilon}{2}\|u\|^2-\frac{N_2}{2\varepsilon}\|v\|^2$$

şeklini alır. Burada

$$\frac{M_1\varepsilon}{2}=\alpha_1\ ,\ \frac{M_3\varepsilon}{2}=\varepsilon_1\ \text{ ve }\ \frac{N_2\varepsilon}{2}=\varepsilon_1$$

alınarak gerekli kısaltmalar yapılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq 2(\alpha_1+1)E(t)+\alpha_1\|v_x\|^2-\left[\frac{M_1^{\ 2}}{4\alpha_1}+M_2+2\varepsilon_1\right]\|u\|^2$$
$$-\left[\frac{M_3^{\ 2}+N_2^{\ 2}}{4\varepsilon_1}+N_1\right]\|v\|^2 \qquad (3.13)$$

olur ve

$$l_1=\frac{M_1^{\ 2}}{4\alpha_1}+M_2+2\varepsilon_1\ \ ,\ \ l_2=\frac{M_3^{\ 2}+N_2^{\ 2}}{4\varepsilon_1}+N_1$$

olarak alındığında,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq 2(\alpha_1+1)E(t)+\alpha_1\|v_x\|^2-l_1\|u\|^2-l_2\|v\|^2 \qquad (3.14)$$

elde edilir.

(3.11) denklemi (0,t) aralığında integre edilirse,

$$\frac{1}{2}\int_0^t\frac{d}{d\tau}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)d\tau+\int_0^t\|u_x\|^2d\tau=-\int_0^t\|v_x\|^2d\tau+\int_0^t(\phi,u)d\tau+\int_0^t(\varphi,v)d\tau$$

$$+\int_0^t [(f_1,u)+(f_2,v)]\,d\tau$$

olur ve (3.3),(3.4) koşulları kullanılırsa,

$$\frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)+\int_0^t \|u_x\|^2\,d\tau \le -\int_0^t \|v_x\|^2\,d\tau+\frac{1}{2}\|u_0\|^2+\frac{1}{2}\|v_0\|^2$$

$$+\int_0^t [M_1(u_x,u)+M_2(u,u)+M_3(u,v)]\,d\tau$$

$$+\int_0^t [N_1(v,v)+N_2(u,v)]\,d\tau$$

$$+\int_0^t [(f_1,u)+(f_2,v)]\,d\tau$$

bulunur ve Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)+\int_0^t \|u_x\|^2 d\tau \le -\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau+\frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$$

$$+M_1\int_0^t \|u_x\|\|u\|\,d\tau+M_2\int_0^t \|u\|^2\,d\tau$$

$$+M_3\int_0^t \|u\|\|v\|\,d\tau+N_1\int_0^t \|v\|^2$$

$$+N_2\int_0^t \|u\|\|v\|\,d\tau+\int_0^t [(f_1,u)+(f_2,v)]\,d\tau$$

ve burada da Young eşitsizliği kullanılırsa,

$$\frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)+\int_0^t \|u_x\|^2 d\tau \le -\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau+\frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$$

$$+\frac{M_1\varepsilon}{2}\int_0^t\|u_x\|^2\,d\tau+\frac{M_1}{2\varepsilon}\int_0^t\|u\|^2\,d\tau$$

$$+M_2\int_0^t\|u\|^2\,d\tau+\frac{M_3\varepsilon}{2}\int_0^t\|u\|^2\,d\tau+\frac{M_3}{2\varepsilon}\int_0^t\|v\|^2\,d\tau$$

$$+N_1\int_0^t\|v\|^2\,d\tau+\frac{N_2\varepsilon}{2}\int_0^t\|u\|^2\,d\tau+\frac{N_2}{2\varepsilon}\int_0^t\|v\|^2\,d\tau$$

$$+\int_0^t\left[(f_1,u)+(f_2,v)\right]d\tau$$

elde edilir.

$$\frac{M_1\varepsilon}{2}=\varepsilon_2,\quad \frac{N_2\varepsilon}{2}=\varepsilon_2\quad \text{ve}\quad \frac{M_3\varepsilon}{2}=\varepsilon_2$$

alındığında yukarıdaki eşitsizlik,

$$\int_0^t\|u_x\|^2d\tau-\varepsilon_2\int_0^t\|u_x\|^2\,d\tau\le-\int_0^t\|v_x\|^2d\tau+\frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\frac{1}{2}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)$$

$$+\left(\frac{M_1^{\;2}}{4\varepsilon_2}+M_2+2\varepsilon_2\right)\int_0^t\|u\|^2\,d\tau$$

$$+\left(\frac{M_3+N_2^{\;2}}{4\varepsilon_2}+N_1\right)\int_0^t\|v\|^2\,d\tau+\int_0^t[(f_1,u)+(f_2,v)]d\tau$$

şeklini alır. Burada eşitsizliğin sağındaki üçüncü terim negatif olduğundan dolayı ihmal edilirse eşitsizlik daha da küçüldüğünden,

$$\int_0^t\|u_x\|^2d\tau\le\frac{1}{1-\varepsilon_2}\left[-\int_0^t\|v_x\|^2d\tau+\frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\left(\frac{M_1^{\;2}}{4\varepsilon_2}+M_2+2\varepsilon_2\right)\int_0^t\|u\|^2\,d\tau\right.$$

$$+\left(\frac{M_3^{\ 2}+N_2^{\ 2}}{4\varepsilon_2}+N_1\right)\int_0^t \|v\|^2 d\tau+\int_0^t [(f_1,u)+(f_2,v)]d\tau \tag{3.15}$$

olarak bulunur.

(3.1) denklemi $L_2(\Omega)$ da u_t ile skaler çarpılırsa,

$$(u_t,u_t)=(\Delta u,u_t)+(f_1,u_t)+(\phi,u_t)$$

olup, eşitliğin sağındaki ilk terime 1.Green Özdeşliği uygulanırsa,

$$\|u_t\|^2=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\nabla u,\nabla u)+(f_1,u_t)+(\phi,u_t)$$

veya

$$\|u_t\|^2=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2+(f_1,u_t)+(\phi,u_t) \tag{3.16}$$

elde edilir.

(3.2) denklemi de $L_2(\Omega)$ da v_t ile skaler çarpılırsa,

$$(v_t,v_t)=(\Delta v,v_t)+(f_1,v_t)+(\varphi,v_t)$$

olup, eşitliğin sağındaki ilk terime 1.Green Özdeşliği uygulanırsa,

$$\|v_t\|^2=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\nabla v,\nabla v)+(f_2,v_t)+(\varphi,v_t)$$

veya

$$\|v_t\|^2=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_x\|^2+(f_2,v_t)+(\varphi,v_t) \tag{3.17}$$

elde edilir.

(3.16) ve (3.17) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_x\|^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_x\|^2 + (f_1, u_t) + (f_2, v_t) + (\phi, u_t) + (\varphi, v_t) \qquad (3.18)$$

elde edilir. (3.18) de (3.6) koşulu kullanılırsa,

$$\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 = -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_x\|^2 + \|v_x\|^2\right) + \frac{d}{dt}\int_\Omega G(t,u,v)dx - \int_\Omega G_t\, dx + (\phi, u_t) + (\varphi, v_t)$$

ve bu eşitlik düzenlenirse,

$$\|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\|u_x\|^2 - \frac{1}{2}\|v_x\|^2 + \int_\Omega G(t,u,v)dx\right) - \int_\Omega G_t\, dx + (\phi, u_t) + (\varphi, v_t)$$

$$= \frac{d}{dt}(E(t)) + (\phi, u_t) + (\varphi, v_t) - \int_\Omega G_t\, dx$$

bulunur, buradan da,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) = \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 - (\phi, u_t) - (\varphi, v_t) + \int_\Omega G_t\, dx \qquad (3.19)$$

olup bu eşitlik,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 - \int_\Omega |\phi|\ |u_t|\ dx - \int_\Omega |\varphi|\ |v_t|\ dx + \int_\Omega G_t\ dx$$

şeklinde ifade edilebilir. Son ifadede sırasıyla Cauchy-Schwarz ve Young eşitsizlikleri kullanılırsa,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2 - \left[\frac{\varepsilon}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|\phi\|^2\right] - \left[\frac{\varepsilon}{2}\|v_t\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|\varphi\|^2\right] + \int_\Omega G_t\, dx$$

ve burada da,

$$\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon_3$$

alınırsa,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq (1-\varepsilon_3)\|u_t\|^2 + (1-\varepsilon_3)\|v_t\|^2 - \frac{1}{4\varepsilon_3}\|\phi\|^2 - \frac{1}{4\varepsilon_3}\|\varphi\|^2 + \int_\Omega G_t \ dx$$

olur. (3.3) ve (3.4) koşulları kullanılırsa,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq (1-\varepsilon_3)\ \|u_t\|^2 + (1-\varepsilon_3)\ \|v_t\|^2 - \frac{1}{4\varepsilon_3}\left(\|M_1|u_x| + M_2|u| + M_3|v|\|\right)^2$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left(\|N_1|v| + N_2|u|\|\right)^2 + \int_\Omega G_t \ dx$$

bulunur. Bu eşitsizlik düzenlenirse,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq (1-\varepsilon_3)\|u_t\|^2 + (1-\varepsilon_3)\|v_t\|^2 - \frac{1}{4\varepsilon_3}\left(M_1^2\|u_x\|^2 + M_2^2\|u\|^2 + M_3^2\|v\|^2\right.$$

$$\left. + 2M_1M_2\|u_x\|\|u\| + 2M_1M_3\|u_x\|\|v\| + 2M_2M_3\|u\|\|v\|\right)$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left(N_1^2\|v\|^2 + N_2^2\|u\|^2 + 2N_1N_2\|v\|\|u\|\right) + \int_\Omega G_t\, dx$$

elde edilir ve Young eşitsizliği uygulanırsa,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq (1-\varepsilon_3)\|u_t\|^2 + (1-\varepsilon_3)\|v_t\|^2 - \frac{1}{4\varepsilon_3}\Big(M_1^2\|u_x\|^2 + M_2^2\|u\|^2 + M_3^2\|v\|^2$$

$$+2\left(\frac{\varepsilon_4}{2}M_1^2\|u_x\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_4}M_2^2\|u\|^2\right) + 2\left(\frac{\varepsilon_4}{2}M_1^2\|u_x\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_4}M_3^2\|v\|^2\right)$$

$$+2\left(\frac{\varepsilon_4}{2}M_2^2\|u\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon_4}M_3^2\|v\|^2\right)$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left(N_1^2\|v\|^2 + N_2^2\|u\|^2 + 2\left(\frac{\varepsilon}{2}N_1^2\|v\|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}N_2^2\|u\|^2\right)\right)\Big) + \int_\Omega G_t\,dx$$

olur. Bu eşitsizlikte $\varepsilon = 1$ olarak alınır ve eşitsizlik düzenlenirse,

$$\frac{d}{dt}(E(t)) \geq (1-\varepsilon_3)\|u_t\|^2 + (1-\varepsilon_3)\|v_t\|^2 - \frac{M_1^2}{4\varepsilon_3}(1+2\varepsilon_4)\|u_x\|^2$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left[M_2^2\left(\varepsilon_4 + \frac{1}{\varepsilon_4} + 1\right) + 2N_2^2\right]\|u\|^2$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left[2N_1^2 + \left(\frac{2}{\varepsilon_4} + 1\right)M_3^2\right]\|v\|^2 + \int_\Omega G_t\,dx \qquad (3.20)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $(0,t)$ aralığında integre edilip eşitsizliğin sağındaki $\|u_x\|^2$ nin $(0,t)$ aralığındaki integrali yerine (3.15) eşitsizliği yazılırsa,

$$E(t) - E(0) \geq (1-\varepsilon_3)\int_0^t \left(\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2\right)d\tau - \frac{M_1^2(1+2\varepsilon_4)}{4\varepsilon_3(1-\varepsilon_2)}\left[-\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau\right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right) + \left(\frac{M_1^2}{4\varepsilon_2} + M_2 + 2\varepsilon_2\right)\int_0^t \|u\|^2 d\tau$$

$$\left.+\left(\frac{M_3^2 + N_2^2}{4\varepsilon_2} + N_1\right)\int_0^t \|v\|^2 d\tau + \int_0^t [(f_1,u) + (f_2,v)]\,d\tau\right]$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left[M_2^2\left(\varepsilon_4 + \frac{1}{\varepsilon_4} + 1\right) + 2N_2^2\right]\int_0^t \|u\|^2\,d\tau$$

$$-\frac{1}{4\varepsilon_3}\left[2N_1^{\,2}+\left(\frac{2}{\varepsilon_4}+1\right)M_3^{\,2}\right]\int_0^t\|v\|^2d\tau+\int_0^t\int_\Omega G_t\,dx\,d\tau$$

olur. Eşitsizlik düzenlenirse,

$$E(t)\geq E(0)+(1-\varepsilon_3)\int_0^t\left(\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right)d\tau+\frac{M_1^{\,2}(1+2\varepsilon_4)}{4\varepsilon_3(1-\varepsilon_2)}\int_0^t\|v_x\|^2d\tau$$

$$-\frac{M_1^{\,2}(1+2\varepsilon_4)}{8\varepsilon_3(1-\varepsilon_2)}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)-\left[\left(\frac{M_1^{\,2}(1+2\varepsilon_4)}{4\varepsilon_3(1-\varepsilon_2)}\right)\left(\frac{M_1^{\,2}}{4\varepsilon_2}+M_2+2\varepsilon_2\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\varepsilon_3}\left(M_2^{\,2}\left(\varepsilon_4+\frac{1}{\varepsilon_4}+1\right)+2N_2^{\,2}\right)\right]\int_0^t\|u\|^2d\tau$$

$$-\left[\left(\frac{M_1^{\,2}(1+2\varepsilon_4)}{4\varepsilon_3(1-\varepsilon_2)}\right)\left(\frac{M_3^{\,2}+N_2^{\,2}}{4\varepsilon_3}+N_1\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\varepsilon_3}\left(2N_1^{\,2}+\left(\frac{2}{\varepsilon_4}+1\right)M_3^{\,2}\right)\right]\int_0^t\|v\|^2d\tau$$

$$+\left(\frac{M_1^{\,2}(1+2\varepsilon_4)}{4\varepsilon_3(1-\varepsilon_2)}\right)\int_0^t[(f_1,u)+(f_2,v)]d\tau+\int_0^t\int_\Omega G_t\,dx\,d\tau$$

elde edilir. Burada,

$$\varepsilon_3=\frac{\alpha_1-\beta}{1+\alpha_1},\quad \varepsilon_4=\varepsilon_2=\varepsilon\qquad \text{ve}\quad M_4=\frac{M_1^{\,2}(1+\alpha_1)(1+2\varepsilon_4)}{4(\alpha_1-\beta)(1-\varepsilon_2)}$$

olarak alınıp,

$$A_0=E(0)-\frac{M_4}{2}\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$$

notasyonu kullanılırsa,

$$E(t) \geq A_0 + \frac{1+\beta}{1+\alpha_1}\int_0^t \left(\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2\right)d\tau + M_4\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau$$

$$-\left[M_4\left(\frac{M_1^2 + 4\varepsilon M_2 + 8\varepsilon^2}{4\varepsilon}\right) + \frac{1}{4}\frac{1+\alpha_1}{\alpha_1 - \beta}\left(M_2^2\left(\frac{\varepsilon^2+\varepsilon+1}{\varepsilon}\right) + 2N_2^2\right)\right]\int_0^t \|u\|^2 d\tau$$

$$-\left[M_4\left(\frac{M_3^2 + N_2^2}{4\varepsilon} + N_1\right) + \frac{1}{4}\frac{1+\alpha_1}{\alpha_1 - \beta}\left(2N_1^2 + \left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)M_3^2\right)\right]\int_0^t \|v\|^2 d\tau$$

$$-M_4\int_0^t [(f_1,u)+(f_2,v)]d\tau + \int_0^t\int_\Omega G_t\, dx\, d\tau \tag{3.21}$$

olup (3.21) de,

$$M_5 = M_4\left(\frac{M_1^2 + 4\varepsilon M_2 + 8\varepsilon^2}{4\varepsilon}\right) + \frac{1}{4}\frac{1+\alpha_1}{\alpha_1 - \beta}\left(M_2^2\left(\frac{\varepsilon^2+\varepsilon+1}{\varepsilon}\right) + 2N_2^2\right)$$

$$M_6 = M_4\left(\frac{M_3^2 + N_2^2}{4\varepsilon} + N_1\right) + \frac{1}{4}\frac{1+\alpha_1}{\alpha_1 - \beta}\left(2N_1^2 + \left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)M_3^2\right)$$

notasyonları ve (3.8) şartı kullanılırsa,

$$E(t) \geq A_0 + \frac{1+\beta}{1+\alpha_1}\int_0^t \left(\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2\right)d\tau + M_4\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau$$

$$-M_5\int_0^t \|u\|^2 d\tau - M_6\int_0^t \|v\|^2 d\tau \tag{3.22}$$

elde edilir. Bu (3.22), (3.14) de kullanılırsa,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) \geq 2(\alpha_1+1)\left[A_0 + \frac{1+\beta}{1+\alpha_1}\int_0^t \left(\|u_\tau\|^2 + \|v_\tau\|^2\right)d\tau + M_4\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau\right.$$

$$\left. - M_5\int_0^t \|u\|^2 d\tau - M_6\int_0^t \|v\|^2 d\tau\right] + \alpha_1\|v_x\|^2 - l_1\|u\|^2 - l_2\|v\|^2$$

ve buradan da,

$$\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\geq 4(1+\beta)\int_0^t\left(\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right)d\tau-4(\alpha_1+1)M_5\int_0^t\|u\|^2d\tau$$

$$-4(\alpha_1+1)M_6\int_0^t\|v\|^2d\tau+(\alpha_1+1)A_0+4(\alpha_1+1)M_4\int_0^t\|v_x\|^2d\tau$$

$$+2\alpha_1\|v_x\|^2-2l_1\|u\|^2-2l_2\|v\|^2 \tag{3.23}$$

elde edilir.

Bu hazırlıklardan sonra, Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasındaki $\psi(t)$ fonksiyonu, teoremin koşullarını sağlayacak şekilde belirlenmelidir. $\{u,v\}$ fonksiyonları sözkonusu başlangıç-sınır değer probleminin yerel çözümü olsun. T_0,γ ve k pozitif sabitler, $\psi(t)$ iki kez türetilebilen pozitif fonksiyonu,

$$\psi(t)=\int_0^t\left(\|u(.,\tau)\|^2+\|v(.,\tau)\|^2\right)d\tau+(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma(t+k)^2$$

şeklinde olsun. Bunun için $\psi(t)$ fonksiyonunun iki kez türevi alınırsa,

$$\psi'(t)=\|u(.,t)\|^2+\|v(.,t)\|^2-2\|u_0\|^2-2\|v_0\|^2+2\gamma(t+k)$$

$$=\int_0^t\frac{d}{d\tau}\|u\|^2d\tau+\int_0^t\frac{d}{d\tau}\|v\|^2d\tau-\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+2\gamma(t+k)$$

$$=2\left[\int_0^t\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|u\|^2d\tau+\int_0^t\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\|v\|^2d\tau\right]-\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+2\gamma(t+k)$$

$$=2\left[\int_0^t(u,u_\tau)\,d\tau+\int_0^t(v,v_\tau)d\tau\right]-\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+2\gamma(t+k)$$

ve

$$\psi''(t)=\frac{d}{dt}\left[\|u(.,t)\|^2+\|v(.,t)\|^2\right]+2\gamma$$

olarak elde edilir. $\psi'(t)$ ifadesinin sağındaki ilk terime Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left[\int_0^t (u,u_\tau)d\tau+\int_0^t (v,v_\tau)d\tau\right]\le\sqrt{\left(\int_0^t\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)d\tau\right)}\sqrt{\left(\int_0^t\left(\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right)d\tau\right)}$$

olup,

$$A_1=\int_0^t\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)d\tau \quad \text{ve} \quad A_2=\int_0^t\left(\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right)d\tau$$

olarak alınırsa,

$$\left[\int_0^t (u,u_\tau)d\tau+\int_0^t (v,v_\tau)d\tau\right]\le\sqrt{A_1A_2} \tag{3.24}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $\psi'(t)$ de yerine yerleştirilirse,

$$\psi'(t)\le 2\sqrt{A_1A_2}+2\gamma(t+k)-\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$$

olur. Pozitif olan son terim atılırsa, eşitsizliğin sağ tarafı daha da büyümüş olur ve

$$\psi'(t)\le 2\sqrt{A_1A_2}+2\gamma(t+k) \tag{3.25}$$

elde edilir. A_1 ifadesinden yararlanılarak, $\psi(t)$ fonksiyonu,

$$\psi(t)=A_1+(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+2\gamma(t+k)^2 \tag{3.26}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\chi(t)=\psi''(t)\ \psi(t)-(1+\alpha)\left[\psi'(t)\right]^2 \tag{3.27}$$

ifadesindeki terimler ayrı ayrı kısıtlanmaya çalışılırsa:

(3.25) eşitsizliği kullanılarak,

$$[\psi'(t)]^2=\left(\|u\|^2+\|v\|^2-2\|u_0\|^2-2\|v_0\|^2+2\gamma(t+k)\right)^2$$
$$\leq\left(2\sqrt{A_1A_2}+2\gamma(t+k)\right)^2=4A_1A_2+4\gamma^2(t+k)^2+8\sqrt{A_1A_2}\gamma(t+k)$$

elde edilir. Burada eşitsizliğin sağındaki son terime Young eşitsizliği uygulanırsa eşitsizlik,

$$[\psi'(t)]^2\leq 4(1+2\varepsilon_5)A_1A_2+4\left(1+\frac{1}{2\varepsilon_5}\right)\gamma^2(t+k)^2 \tag{3.28}$$

şeklini alır.

$\psi''(t)\psi(t)$ terimi için ise,

$$\psi''(t)\psi(t)=\left\{\frac{d}{dt}\left[\ \|u\|^2+\|v\|^2\right]+2\gamma\right\}\left\{A_1+(T_0-t)\left(\ \|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma(t+k)^2\right\}$$

eşitliği gözönüne alınarak (3.23) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\psi''(t)\psi(t)\geq\left[4(1+\beta)\int_0^t\left(\|u_\tau\|^2+\|v_\tau\|^2\right)d\tau-4M_5(\alpha_1+1)\int_0^t\|u\|^2d\tau\right.$$

$$-4M_6(\alpha_1+1)\int_0^t \|v\|^2 d\tau + 4(\alpha_1+1)A_0$$

$$+4(\alpha_1+1)M_4\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau + 2\alpha_1\|v_x\|^2 - 2l_1\|u\|^2 - 2l_2\|v\|^2 + 2\gamma\Big]$$

$$\left[A_1+(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma(t+k)^2\right]$$

elde edilir. Bu eşitsizlik düzenlenirse,

$$\psi''(t)\psi(t) \geq [4(1+\beta)A_2 + 4(\alpha_1+1)\Big(A_0 - M_5\int_0^t \|u\|^2 d\tau - M_6\int_0^t \|v\|^2 d\tau$$

$$+M_4\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau\Big) + 2\alpha_1\|v_x\|^2 - 2d_1\|u\|^2 - 2d_2\|v\|^2 + 2\gamma\ ]$$

$$\left[A_1+(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma(t+k)^2\right] \tag{3.29}$$

şeklini alır. Burada,

$$M_7 = \max\{M_5, M_6\} \quad \text{ve} \quad c_1 = \max\{l_1, l_2\}$$

olarak alınıp (3.29) eşitsizliğinde kullanılırsa,

$$\psi''(t)\psi(t) \geq [4(1+\beta)A_2 + 4(\alpha_1+1)\left(A_0 - M_7\int_0^t \left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)d\tau + M_4\int_0^t \|v_x\|^2 d\tau\right)$$

$$+2\alpha_1\|v_x\|^2 - 2c_1\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right) + 2\gamma\Big]$$

$$+\left[A_1+(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma(t+k)^2\right] \tag{3.30}$$

elde edilir.

Şimdi (3.28) ve (3.30) ifadeleri (3.27) de yerleştirilirse,

$$\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)[\psi'(t)]^2 \geq [4(1+\beta)A_2+4(\alpha_1+1)\left(A_0-M_7A_1+M_4\int_0^t\|v_x\|^2d\tau\right)$$

$$+2\alpha_1\|v_x\|^2-2c_1\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)+2\gamma]$$

$$\left[A_1+(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma(t+k)^2\right]$$

$$-(1+\alpha)\left[4(1+2\varepsilon_5)A_1A_2+4\left(1+\frac{1}{2\varepsilon_5}\right)\gamma^2(t+k)^2\right]$$

$$=4(1+\beta)A_2A_1+4(1+\beta)A_2(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$$

$$+4(1+\beta)A_2\gamma(t+k)^2$$

$$+\left[4(\alpha_1+1)\left(A_0-M_7A_1+M_4\int_0^t\|v_x\|^2d\tau\right)\right.$$

$$\left.+2\alpha_1\|v_x\|^2-2c_1\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)+2\gamma\right]$$

$$\left[A_1+(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma(t+k)^2\right]$$

$$-(1+\alpha)\left[4(1+2\varepsilon_5)A_1A_2+4\left(1+\frac{1}{2\varepsilon_5}\right)\gamma^2(t+k)^2\right]$$

$$=4(1+\beta)A_2A_1+4(1+\beta)A_2(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$$

$$+4(1+\beta)A_2\gamma(t+k)^2+[4(\alpha_1+1)(A_0-M_7\psi(t)$$

$$+M_7(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+M_7\gamma(t+k)^2$$

$$\left.+M_4\int_0^t\|v_x\|^2d\tau\right)+2\alpha_1\|v_x\|^2$$

$$-2c_1\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)+2\gamma]\psi(t)$$

$$-(1+\alpha)\left[4(1+2\varepsilon_5)A_1A_2+4\left(1+\frac{1}{2\varepsilon_5}\right)\gamma^2(t+k)^2\right]$$

çıkar ve bu son eşitsizlikte $2\varepsilon_5=\alpha$ ve $(1+\alpha)^2=1+\beta$ olarak alınırsa,

$$\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)[\psi'(t)]^2 \geq 4(1+\beta)A_2A_1+4(1+\alpha)^2A_2(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$$

$$+4(1+\alpha)^2 A_2\gamma(t+k)^2+[4(\alpha_1+1)(A_0-M_7\psi(t)$$
$$+M_7(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+M_7\gamma(t+k)^2$$
$$\left.+M_4\int_0^t\|v_x\|^2 d\tau\right)+2\alpha_1\|v_x\|^2$$
$$-2c_1\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)+2\gamma]\psi(t)$$
$$-4(1+\beta)A_1A_2-4(1+\alpha)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\gamma^2(t+k)^2$$

olur ve sağ taraftaki $M_4\int_0^t\|v_x\|^2 d\tau$, $2\alpha_1\|v_x\|^2$ pozitif terimler atılırsa, sağ taraf daha da küçüleceğinden eşitsizlik,

$$\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)[\psi'(t)]^2\geq 4(1+\alpha)^2A_2[\ (T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$$
$$\gamma(t+k)^2\ ]+[\ 4(\alpha_1+1)(A_0+M_7\psi(t)$$
$$+M_7(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+M_7\gamma(t+k)^2)$$
$$-2c_1\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)+2\gamma\ ]\psi(t)$$
$$-4(1+\alpha)\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\gamma^2(t+k)^2$$

şeklinde yazılabilir.

$$\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)[\psi'(t)]^2\geq -2c_1\left(\|u\|^2+\|v\|^2\right)\psi(t)-4(\alpha_1+1)M_7\psi^2(t)$$
$$+4(1+\alpha)^2A_2[\ (T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma(t+k)^2\ ]$$
$$+4(\alpha_1+1)\left(A_0+M_7(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)\right)\psi(t)$$
$$+4(\alpha_1+1)M_7\gamma(t+k)^2\psi(t)+2\gamma\psi(t)$$
$$-4\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\gamma^2(t+k)^2$$

$$= -2c_1\left(\psi'(t) + \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 - 2\gamma(t+k)\right)\psi(t)$$
$$- 4(\alpha_1 + 1)M_7\psi^2(t)$$
$$+ 4(1+\alpha)^2 A_2[\ (T_0 - t)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right) + \gamma(t+k)^2\ ]$$
$$+ 4(\alpha_1 + 1)\left(A_0 + M_7(T_0 - t)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\right)\psi(t)$$
$$+ 4(\alpha_1 + 1)M_7\gamma(t+k)^2\psi(t) + 2\gamma\psi(t)$$
$$- 4\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\gamma^2(t+k)^2$$
$$= -2c_1\psi'(t)\psi(t) - 4(\alpha_1 + 1)M_7\psi^2(t)$$
$$- 2c_1\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\psi(t) + 4c_1\gamma(t+k)\psi(t)$$
$$+ 4(1+\alpha)^2 A_2[\ (T_0 - t)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right) + \gamma(t+k)^2\ ]$$
$$+ 4(\alpha_1 + 1)\left(A_0 + M_7(T_0 - t)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\right)\psi(t)$$
$$+ 4(\alpha_1 + 1)M_7\gamma(t+k)^2\psi(t) + 2\gamma\psi(t)$$
$$- 4\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\gamma^2(t+k)^2$$

elde edilir ve eşitsizliğin sağındaki $4(\alpha_1 + 1)\left(A_0 + M_7(T_0 - t)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\right)\psi(t)$ terimde görünen $\psi(t)$ fonksiyonu yerine eşiti yazılırsa,

$$\psi''(t)\psi(t) - (1+\alpha)[\psi'(t)]^2 \geq -2c_1\psi'(t)\psi(t) - 4(\alpha_1 + 1)M_7\psi^2(t)$$
$$- 2c_1\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\psi(t) + 4c_1\gamma(t+k)\psi(t)$$
$$+ 4(1+\alpha)^2 A_2[\ (T_0 - t)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right) + \gamma(t+k)^2\ ]$$
$$+ 4(\alpha_1 + 1)\left(A_0 + M_7(T_0 - t)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\right)$$
$$[\ A_1 + (T_0 - t)\left(\ \|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right) + \gamma(t+k)^2\ ]$$
$$+ 4(\alpha_1 + 1)M_7\gamma(t+k)^2\psi(t) + 2\gamma\psi(t)$$

$$-4\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\gamma^2(t+k)^2$$

elde edilir. Eşitsizliğin sağındaki,

$$4(\alpha_1+1)\left(A_0+M_7(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)\right)\left[\ A_1+(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma(t+k)^2\ \right]$$

teriminde düzenleme yapılırsa,

$$\begin{aligned}\psi''(t)\psi(t)-(1+\alpha)\left[\psi'(t)\right]^2 \geq\ & -2c_1\psi'(t)\psi(t)-4(\alpha_1+1)M_7\psi^2(t)\\ & -2c_1\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)\psi(t)+4c_1\gamma(t+k)\ \psi(t)\\ & +4(1+\alpha)^2A_2\left[\ (T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma(t+k)^2\ \right]\\ & +4(\alpha_1+1)A_0\gamma(t+k)^2\\ & +4(\alpha_1+1)\left[\ A_0+M_7(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)\right]\\ & \left[\ A_1+(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)\right]\\ & +4(\alpha_1+1)\left[\ M_7(T_0-t)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)\right]\gamma(t+k)^2\\ & +4(\alpha_1+1)M_7\gamma(t+k)^2\psi(t)+2\gamma\psi(t)\\ & -4\frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}\gamma^2(t+k)^2 \qquad (3.31)\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitsizlikte γ,

$$4(\alpha_1+1)A_0\gamma(t+k)^2-\frac{4(1+\alpha)^2}{\alpha}\gamma^2(t+k)^2=0$$

olacak şekilde yani,

$$\gamma = \frac{\alpha(\alpha_1+1)A_0}{(1+\alpha)^2}$$

alınırsa ve c_1,

$$2\gamma\psi(t) - 2c_1\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)\psi(t) = 0$$

sağlayacak şekilde yani,

$$c_1 = \frac{\alpha(\alpha_1+1)A_0}{(1+\alpha)^2\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)}$$

olarak seçilirse ve diğer bütün terimler pozitif olduklarından atılırsa sağ taraf daha da küçüleceğinden (3.31) eşitsizliği,

$$\psi''(t)\psi(t) - (1+\alpha)[\psi'(t)]^2 \geq -2c_1\psi'(t)\psi(t) - 4(\alpha_1+1)M_7\psi^2(t)$$

şeklini alır. Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemması ile karşılaştırılırsa,

$$c_2 = 4(\alpha_1+1)M_7$$

olduğu görülür ve,

$$\psi''(t)\psi(t) - (1+\alpha)[\psi'(t)]^2 \geq -2c_1\psi'(t)\psi(t) - c_2\psi^2(t)$$

elde edilir.

Böylece, $\psi(t)$ fonksiyonu, $c_1, c_2 \geq 0$ sayıları ile Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasındaki (1.8) koşulunu gerçeklemiş olur.

Lemmanın diğer koşulları olan,

$$\psi(0) > 0$$

ve

$$\psi'(0) > \delta\,\psi(0)$$

eşitsizliklerinin de $\psi(t)$ fonksiyonu için sağlanıp sağlanmadığı incelenirse,

$$\psi(0) = T_0\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 \right) + \gamma k^2$$

olur yani $\psi(0) > 0$ dır.

Teoremin hipotezindeki $u_0(x)$ ve $v_0(x)$ başlangıç fonksiyonları,

$$0 < k < \frac{2}{\delta}$$

olmak üzere,

$$A_0 > \frac{(1+\alpha)^2}{\alpha(\alpha_1+1)} \frac{(\delta T_0 + 1)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)}{2k - k^2\delta}$$

sağlayacak şekilde alınırsa,

$$\frac{\alpha(\alpha_1+1)A_0}{(1+\alpha)^2} > \frac{(\delta T_0 + 1)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)}{2k - k^2\delta}$$

yazılabilir ve burada eşitsizliğin sol tarafındaki terim yerine eşiti yazılırsa,

$$\gamma > \frac{(\delta T_0 + 1)\left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2\right)}{2k - k^2\delta}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$2\gamma k-\gamma k^2\delta > (\delta T_0+1)\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$$

olur. Buradan da

$$2\gamma k-\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right) > \delta\ [\ T_0\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma k^2\ ]$$

elde edilir.

$$\psi(0)=[\ T_0\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)+\gamma k^2\ ]$$

ve

$$\psi'(0)=2\gamma k-\left(\|u_0\|^2+\|v_0\|^2\right)$$

olduğundan,

$$\psi'(0)>\delta\,\psi(0)$$

elde edilir. Böylece γ nın bu seçimi için ikinci koşulun da sağlandığı görülür. Teoremin bütün koşulları sağlanmış olduğundan ispat tamamlanmıştır..

t_1 patlama zamanı,

$$t_1=\frac{1}{2\sqrt{c_1^{\,2}+\alpha c_2}}\,\ell n\,\frac{\gamma_1\psi(0)+\alpha\psi'(0)}{\gamma_2\psi(0)+\alpha\psi'(0)}$$

ifadesinde de bilinenler yazılırsa,

$$t_1 = \frac{1}{2\sqrt{c_1{}^2 + \alpha c_2}} \ln \frac{\gamma_1 [\, T_0 \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 \right)\left(1+\alpha^2\right) + \alpha(\alpha_1 + 1)A_0 k^2 \,] + 2\alpha^2(\alpha_1+1)A_0 k - \alpha(1+\alpha)^2 \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 \right)^2}{\gamma_2 [\, T_0 \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 \right)\left(1+\alpha^2\right) + \alpha(\alpha_1 + 1)A_0 k^2 \,] + 2\alpha^2(\alpha_1+1)A_0 k - \alpha(1+\alpha)^2 \left(\|u_0\|^2 + \|v_0\|^2 \right)^2}$$

olarak bulunur.Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasından $t \to t_1$ için,

$$\lim_{t \to t_1} \left\{ \int_0^t \left(\|u(.,t)\|^2 + \|v(.,t)\|^2 \right) d\tau \right\} = \infty$$

olur.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, ekolojide Volterra-Lotka rekabet modelini temsil eden, lineer olmayan parabolik kısmi türevli diferansiyel denklem sistemi ile verilen başlangıç-sınır değer problemlerinin global çözümlerinin yokluğu, Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemması kullanılarak ispatlanmış ve problemin global çözümünün yokluğu ile ilgili koşullar verilmiştir.

İnceleme sırasında Kalantarov-Ladyzhenskaya Lemmasının uygulanmasının bir gereği olarak alınan denklem sistemi ile sınır koşullarının özelliklerini taşıyan ve belli bir norma göre denklemin yerel çözümünü temsil eden $\psi(t)$ fonksiyonlarının sonlu bir t anında sonsuza gittiği bulunmuştur.

Sonuçta, sınırlı ve düzgün bir bölgede Volterra-Lotka rekabet modelini temsil eden lineer olmayan kısmi türevli diferansiyel denklem sisteminin, Dirichlet ve Neumann sınır koşulları altında global çözümlerinin olmaması durumu, başlangıç değerlerinin ve denklem sistemindeki sağ taraf fonksiyonlarının hangi koşulları sağladığında mümkün olduğu araştırılmış ve bu koşullar elde edilmiştir.

Bu çalışma ile, ekolojide canlılar arasındaki rekabet modelini veren Volterra –Lotka rekabet modeli genelleştirilerek, lineer olmayan parabolik denklem sistemlerinin global çözümlerinin yokluğu konusundaki incelemelere bir ışık tutulmuştur.

Bundan sonraki çalışmalarda, iki veya daha fazla lineer olmayan evolusyon denkleminden oluşan denklem sistemleri için uygun başlangıç ve farklı sınır koşulları ile global çözümlerin yokluğu incelenebilir, patlama anı sayısal yöntemler kullanılarak hesaplanıp grafik ile gösterilebilir. Bu ve benzer problemlerin zayıf çözümlerinin kalitatif analizi yapılarak, bu çözümlerin varlığı, tekliği, global davranışları araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Debnath, L. and Mikusinski, P. (1990), Introduction to Hilbert Spaces with Applications, Academic Press, San Diego.

[2] Erdem, D. and Kalantarov, V.K. (1996), "Global Nonexistence of Solutions of Multicomponent Diffusion Systems", *Academy of Sciences of Azebaijan, Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics* 5, s. 21-29.

[3] Erdem, D. (1999), "Blow-Up of Solutions to Quasilinear Parabolic Equations", *Applied Mathematics Letters* 12, s. 65-69.

[4] Friedman, A. (1965), "Remarks on Nonlinear Parabolic Equations", *Proc. Symp. in Appl. Math. A.M.S.* 13, s. 3-23.

[5] Fujita, H. (1969), "On the Blowing up of Solutions to the Cauchy Problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$", *J. Faculty Science, Univ. of Tokyo* 13, s.109-124.

[6] Glassey, R.T. (1973), "Blow up Theorems of Nonlinear Wave Equations", *Math. Z.* 132, s.183-203.

[7] Jackson, D.E. (1990), "Existence and Regularity for FitzHugh-Nagumo Equations with in Homogeneous Boundary Conditions", *Nonlinear Anal. Theory. Methods & Appl.*.14, (3), s. 201-216.

[8] Junning, Z. (1993), "Existence and nonexistence of solutions for $u_t = div\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + f(\nabla u, u, x, t)$", *J.Math. Analy. Appl.* 172, s.130-146.

[9] Kalantarov, V.K. and Ladyzhenskaya, O.A. (1978), "The Occurence of Collapse for Quasilinear Equations of Parabolic and Hyperbolic Type", *J. Soviet Math.* 10, s. 53-70, *Translated from Zap. Nauch. Sem. LOMI* 69, 1977, 77-102.

[10] Kalantarov, V.K. (1984), "Collapse of the Solutions of Parabolic and Hyperbolic Equations with Nonlinear Boundary Conditions", *J. Soviet Math.* 27, s. 2601-2606, *Translated from Zap. Nauch. Sem. LOMI* 127, 1983, s.75-83.

[11] Kalantarov, V.K. (1987), "On the Global Behavior of Solutions of the Cauchy Problem for Second Order Differential-Operator Equations", *Izv. A.N., Az.SSR, Ser.Fiz.Tech. Math. Nauk.* 7, s. 36-43.

[12] Kalantarov, V.K. (1996), Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations, Turbulence Modeling and Vortex Dynamics, Proceedings Ist., Springer-Verlag, 169-181.

[13] Kaplan, S. (1963), "On the Growth of Solutions of Quasilinear Parabolic Equations", *Comm. Pure Appl. Math.* 16, s. 305-330.

[14] Keller, J.B. (1957), "On Solutions of Nonlinear Wave Equations", *Comm. Pure Appl. Math.* 10, s. 523-530.

[15] Kışlalıoğlu, M. ve Berkes, F. (1994), Ekoloji ve Çevre Bilimleri, Remzi Kitabevi, İstanbul.

[16] Knops, R.J., Levine, H.A. and Payne, L.E. (1974), "Nonexistence, Instability and Growth Theorems for Solutions of a Class of Abstract Nonlinear Equations with Applications to Nonlinear Elastodynamics", *Arch Rational Mech. Anal.* 55, s. 52-72.

[17] Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V. (1970), Introductory Real Analysis, Dover Publications, New York.
[18] Kreyszig, E. (1978), Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons, New York.
[19] Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A. and Ural'tseva, N.N. (1968), "Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Types", *A.M.S., Providence, Rhode Island.*
[20] Levine, H.A. (1973), "Some Nonexistence and Instability Theorems for Formally Parabolic Equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$", *Arch. Rational Mech. Anal.* 51, s. 371-386.
[21] Levine, H.A. (1974), "Instability and Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$", *Trans. Am. Math. Soc.* 192, s.1-21.
[22] Levine, H.A. (1974), "Some Additional Remarks on the Nonexistence of Global Solutions to Nonlinear Wave Equations", *SIAM J. Math. Anal.* 5, s. 138-146.
[23] Levine, H.A.(1974), "A Note on a Nonexistence Theorem for Some Nonlinear Wave Equations", *SIAM J. Math. Anal.* 5, s. 644-648.
[24] Levine, H.A. and Payne, L.E. (1974), "Nonexistence Theorems for the Heat Equations with Nonlinear Boundary Conditions and for Porous Medium Equation Backward in Time", *J. Diff. Eq.* 16, s. 319-334.
[25] Levine, H.A. and Payne, L.E. (1976), "Nonexistence of Global Weak Solutions for Classes of Nonlinear Wave and Parabolic Equations", *J. Math. Anal. Appl.* 55, s. 329-334.
[26] Levine, H.A. and Todorova, G. (2000), "Blow up of Solutions of the Cauchy Problem for a Wave Equation with Nonlinear Damping and Source Terms and Positive Initial Energy", *Proceedings of the American Mathematical Society* 129 (3), s. 793-805.
[27] Marion, M. (1989), "Finite-Dimension Attractors Associated with Partly Dissipative Reaction-Diffusion Systems", *SIAM J. Math. Anal.* 20 (4), s. 816-844,
[28] Maslennikova, V. N. (1963), "The First Boundary Value Problem for Quasilinear Diffusion Systems", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR.* 150, s. 991-994.
[29] Nabb, A.Mc. (1961), "Comparison and Existence Theorems for Multicomponent Diffusion Systems", *J. Math. Anal. Appl.* 3, s.133-144.
[30] Palais, B. (1988), "Blow up for Nonlinear Equations Using a Comparison Principle in Fourier Spaces", *Comm. Pure Appl. Math.* 151, s. 163-196.
[31] Pao, C.V. (1994), Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations, Plenum Press, New York.
[32] Rauch, J. and Smoller, J. (1978), "Qualitative Theory of Fitz Hugh Nagumo Equations", *Adv. Math.* 27, s.12-44.
[33] Seçim, G. (1999), "Lineer Olmayan Hiperbolik Denklemlerin Global Çözümlerinin Olmaması Hakkında", Doktora Tezi, M.S.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi, İstanbul.
[34] Straughan, B. (1975), "Further Global Nonexistence the Theorems for Abstract Nonlinear Wave Equations", *Proc.Amer. Math. Soc.* 48, s.381-390.

[35] Strauss, W.A. (1969), "The Energy method in Nonlinear Partial Differantial Equations", *Notas de Mathematica* 41, *Instituto de Mathematica Pura e Aplicada*, Rio de Janeiro.
[36] Turitsyn, S.K. (1993), "On a Toda Lattice Model with a Transversal Degree of Freedom, Sufficient Criterion of Blow up in the Continuum Limit", *Physics Letter A* 173, s. 267-269.
[37] Yamada, Y. (2002), "Global Solutions for Parabolic Systems with Cross-Diffusion", *Nonlinear Evolution Equations and Related Topics Fourth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations*, Wilmington, NCL USA, May 24-27.

ÖZGEÇMİŞ

Özlem Yılmaz, 1971 yılında İstanbul'da dünyaya geldi. Lise öğrenimini 1988 yılında Erenköy Kız Lisesinde tamamladı. Aynı yıl girdiği M.S.Ü Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Lisans programını 1992 yılında birincilikle bitirdi. 1992-1993 öğretim yılında İ.T.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Mühendislik Bilimleri Anabilim Dalı Sistem Analizi programına kabul edildi ve bir sene İngilizce hazırlık eğitimi aldı. Şubat 1996 da Yüksek Lisansını tamamladı. Şubat 1999 M.S.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik programında Doktora öğrenimine başladı. Ocak 1993 de M.S.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne Araştırma Görevlisi olarak atanmış olup, halen aynı bölümde görevine devam etmektedir.