Sevan Bedikyan tarafından hazırlanan "Artin L-fonksiyonları" adlı çalışmanın Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yard. Doç. Dr. Nebi ÖNDER

Bu çalışma Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nebi ÖNDER (MSGSÜ)
Jüri Üyesi: Doç. Dr. K. İlhan İKEDA (İstanbul Bilgi Üniversitesi)
Jüri Üyesi: Yard. Doç. Dr. Ahmet BAKKALOĞLU (MSGSÜ)

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARTİN L-FONKSİYONLARI

Sevan BEDİKYAN
DANIŞMAN: Yard. Doç. Dr. Nebi ÖNDER

İSTANBUL-TEMMUZ 2004

İÇİNDEKİLER

ÖZET I
SUMMARY II
SEMBOL LİSTESİ III
ŞEKİL LİSTESİ IV
GİRİŞ 1
BÖLÜM 1: BİR *K* SAYI CİSMİNİN MUTLAK GALOİS GRUBU $\mathbf{G}_K$ 2
1.1.PROJEKTİF SİSTEMLER ve BU SİSTEMLERİN PROJEKTİF LİMİTLERİ 2
1.2. TOPOLOJİK GRUPLAR 7

BÖLÜM 2: GRUPLARIN TEMSİL TEORİSİ 8
2.1. $\mathbb{C}G$-MODÜLLER 8
2.2. GRUP CEBRİ ve REGÜLER $\mathbb{C}G$-MODÜLLER 10
2.3. GRUPLARIN TEMSİLİ: TEMEL KAVRAMLAR 12
2.4. GRUP TEMSİLLERİNİN FONKTÖRYEL ÖZELLİKLERİ 17
I Temsillerin Direkt Toplamı 17
II Temsillerin Tensör Çarpım 23
III Temsillerin Kısıtlanması 29
IV Bir Temsilin İndüksüyonu 30
2.5. KARAKTER TEORİSİ
ve KARAKTERLERİN FONKTÖRYEL ÖZELLİKLERİ 31
2.6. KARAKTER TABLOLARI 53
2.6.1 Ortogonallik Bağıntıları 54
2.6.2 Bazı Önemli Grupların Karakter Tabloları 55
I S_5 Grubunun Karakter Tablosu 55
II A_5 grubunun karakter tablosu 58
BÖLÜM 3: ARTİN L FONKSİYONLARI 59
3.1. $\mathbf{G}_K$ GRUBUNUN TEMSİL TEORİSİ 59
3.2. ARTİN L FONKSİYONLARININ İNŞASI 61
KAYNAKLAR 63
ÖZGEÇMİŞ 64

ÖZET

ARTİN L-FONKSİYONLARI

Bu tezde sayılar kuramında merkezi önem taşıyan Artin L-Fonksiyonları'nın inşası ve fonktöryel özellikleri incelenmiştir. Bu fonksiyonun kompleks analitik yapısı, Langlands fonktöryalite sanıtı neticesinde, hipotetik olarak var olduğu bilinen non-abelyen sınıf cisim kuramının inşası için büyük önem taşımaktadır.

Herhangi bir kompakt G grubunun, bu grubun üniter duali $\prod(G)$ tarafından betimlendiğini Tannaka dualite teoreminden biliyoruz. Sayılar kuramı, herhangi bir sayı cismi K nin mutlak Galois grubu $\mathbf{G}_K$ nin yapısını inceler. $\mathbf{G}_K$, Krull topolojisi altında kompakt bir gruptur. Dolayısıyla , $\mathbf{G}_K$, $\prod(\mathbf{G}_K)$ tarafından betimlenir. Yani, $\mathbf{G}_K$ nin yapısını anlamak için $\mathbf{G}_K$ nin, indirgenemez, sürekli, üniter temsillerini incelememiz gerekmektedir.

Sayı cismi K nin mutlak Galois grubu $\mathbf{G}_K$ nin temsil teorisi, Peter-Weyl teoremi sonucunda sonlu grupların (diskrit topoloji altında) temsil teorisine öz olarak denktir.

Bu genel gözlemlerin ışığı altında, tezimizin birinci bölümünde sayı cismi K nin mutlak Galois grubu $\mathbf{G}_K$, bir projektif sistemin, projektif limiti olarak inşa edilmiştir. İkinci bölümde ise sonlu grupların $\mathbb{C}$ üzerinde temsil teorisi tekrar edilmiştir. Çalışmamızın son bölümünde ise $\mathbf{G}_K$ nin herhangi bir $\mathbb{C}$ üzerindeki temsili ,

$$\rho : \mathbf{G}_K \rightarrow GL(V)$$

alınmış, buna bağlı olan Artin L-Fonksiyonu, $L(s,\rho)$ Euler çarpımı $\prod_p L(s,\rho_p)$ olarak inşa edilmiş, son olarak $L(s,\rho)$ nun fonktöryel özellikleri incelenmiştir.

SUMMARY

ARTIN L -FUNCTIONS

The aim of this thesis is to construct the Artin L-Function and to investigate the functorial properties of this function. The complex analytic structure of this function (via Langlands Functoriality principle) plays a central role in constructing the non-abelian class field theory.

Given a compact group G , the unitary dual $\prod(G)$, recovers the group G itself by the duality of Tannaka. Number theory, broadly speaking, investigates the structure of the absolute Galois group $\mathbf{G}_K$ of a given number field K . As is well known $\mathbf{G}_K$, under the Krull topology, is a compact group. Therefore, it is necessary for us to investigate the irreducible, continuous, unitary representations of $\mathbf{G}_K$.

Peter-Weyl theorem implies that the representation theory of $\mathbf{G}_K$ is essentially the same as the representation theory of finite groups.

Under this general observations, in the first chapter of our thesis we construct the absolute Galois group $\mathbf{G}_K$ as the projective limit of a certain projective system. In the second chapter, we review the representation theory of finite groups. Finally in the last chapter, we construct the Artin L- Function $L(s,\rho)$, attached to the representation

$$\rho : \mathbf{G}_K \to GL(V)$$

as an Euler product $\prod_p L(s,\rho_p)$, then investigate the functorial properties of $L(s,\rho)$.

GİRİŞ

Gauss'un kuadratik resiprosite teoremini ispatından günümüze sınıf cisim teorisi matematikte en önemli birkaç kuramdan biri olmuştur. Sınıf cisim teorisi, verilen bir K sayı cisminin Galois genişlemelerine ve bu genişlemelerin aritmetik yapısına sadace taban cisim K nın yapısını inceleyerek elde etmek için öngörülen derin ve hipotetik bir kuramdır. Bu kuram E/K genişlemesi abelyen olduğu durumda Takagi ve Artin tarafından inşa edilmiştir. E/K genişlemesi non-abelyen ise sadece günümüzde kısmi neticeler (Shimura'nın elde ettiği kısmi neticeler) mevcuttur. Ancak 1967 yılında Langlands fonktöryalite prensibi ile, şu an anılan son derece genel (belli hallerini ispat ederek) bir sanıt ortaya atmıştır.

Fonktöryalite prensibi, Artin-Tagaki kuramının non-abelyen genişlemelerini de ihtiva eden olabilecek en genel sınıf cisim kuramıdır.

Langlands'ın kuramında en önemli analitik obje, Artin L-Fonksiyonlarıdır. Hala pek çok özelliği bilinmeyen Artin L-Fonksiyonu üzerine yazılmış birkaç makaleden başka matematik literatüründe birşey olmadığı için bu konuya giriş niteliğinde bir çalışmanın yapılmasının gerekli olduğunu düşündük.

Çalışmamızın birinci bölümünde verilmiş bir K sayı cisminin mutlak Galois grubu $\mathbf{G}_K$, belli bir projektif sistem ve bu projektif sistemin limiti olarak inşa edilmiştir. Bu inşadan görüleceği gibi $\mathbf{G}_K$, pro-sonlu bir grup olmaktadır. Pro-sonlu grupların genel yapısı Krull zamanından beri oldukça iyi bir biçimde bilinmektedir ve bu grupların üzerine yerleştirilen doğal topoloji altında kompakt ve tamamiyle bağlantısız oldukları bilinmektedir. Bu tür grupların temsilleri sonlu grupların temsil kuramı ile yakından alakalıdır. Sonuç olarak ikinci bölümde sonlu grupların temsil teorisi detaylı bir biçimde ele alınmıştır.

Artin L-Fonksiyonları, verilen K sayı cisminin mutlak Galois grubu $\mathbf{G}_K$ nın bir temsili üzerine inşe edilir. Üçüncü bölümde Artin L –Fonksiyonlarının inşası incelenmiş ve bu fonksiyonların fonktöryel özellikleri ele alınmıştır.

BÖLÜM 1: BİR K SAYI CİSMİNİN MUTLAK GALOIS GRUBU G_K

Bir K sayı cismi verilsin (yani K rasyonel sayıların cismi $\mathbb{Q}$ nun sonlu bir genişlemesidir) . Sayı cismi K nın cebirsel kapanışını $\overline{K}$ ile gösterelim. İyi bilindiği gibi $\overline{K}/K$ Galois genişlemesidir (yani, her $\alpha \in \overline{K}$, K üzerinde cebirseldir ve α nın sağladığı minimal polinom $m_\alpha(T) \in K[T]$ nin diğer kökleri de $\overline{K}$ nın elemanıdır ve bu kökler birbirinden ayrıktır) .

TANIM : $G_K = Gal(\overline{K}/K)$, $\overline{K}/K$ Galois genişlemesine karşılık gelen grup olsun. Bu gruba K sayı cisminin mutlak Galois grubu denir.

Bu bölümde sayılar kuramının en önemli grubu olarak karşımıza çıkan G_K grubunu inşa edeceğiz ve bu grubun temel özelliklerini inceleyeceğiz.

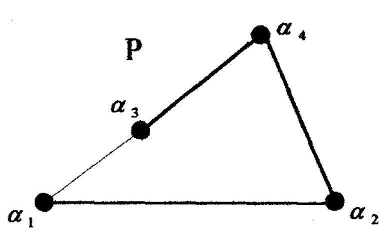
1.1.PROJEKTİF SİSTEMLER ve BU SİSTEMLERİN PROJEKTİF LİMİTLERİ

TANIM 1.1.1 : Üzerinde " $\leq$ " sıralama bağıntısı bulunan bir I kümesi alalım. Öyle ki $(I,\leq)$ sıralı kümesi her $i, j \in I$ için $\exists k$ öyle ki $i \leq k$ ve $j \leq k$ şartını sağlasın. Bu şartı sağlayan $(I,\leq)$ kümesine lineer sıralı küme denir.

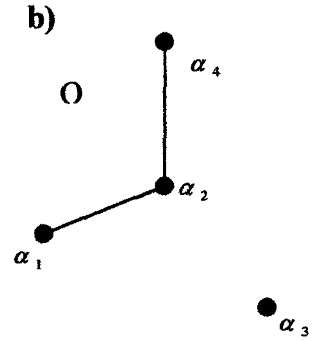
ÖRNEK 1.1.1 : Tamsayılar kümesi kümesi $\mathbb{Z}$ üzerindeki "$\leq$" doğal sıralama bağıntısına göre her m, $n \in \mathbb{Z}$ için $m \leq k$, $n \leq k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{Z}$ bulunabildiğinden ($\mathbb{Z}$, $\leq$) kümesi lineer sıralı bir kümedir.

ÖRNEK 1.1.2 : $I = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ kümesinin elemanları çizge üzerindeki noktaları göstersin. $1 \leq i \leq j \leq 4$ olmak üzere eğer α_i ile α_j noktaları bağlantılı ise $\alpha_i \ll \alpha_j$ olma şartını sağlayan bir "$\ll$" sıralama bağıntısı tanımlayalım.

a)



b)



Yukarıdaki çizgelerden (P, $\ll$) lineer sıralı iken , (Q, $\ll$) lineer sıralı değildir.

TANIM 1.1.2 : Bir $(I,\leq)$ lineer sıralı kümesini elealalım.Her $i\in I$ için G_i bir sonlu grup ve her $i,\ j\in I$ $(i\leq j)$ için $b_i^j:G_j\to G_i$ grup homomorfizması olmak üzere $\left(G_i,b_i^j:G_j\to G_i\right)_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$ sistemi ;

1) $\forall i\in I$ için $b_i^i:G_i\to G_i$ birim tasviri ;

2) $\forall i,j,k\in I$ öyle ki $i\leq j$ ve $j\leq k$ için ;

$$b_i^k=b_i^j\circ b_j^k \tag{1.1.1}$$

şartını sağlıyorsa $\left(G_i,b_i^j:G_j\to G_i\right)_{\substack{i,j\in I\\ i\leq j}}$ sistemine I üzerinde tarifli projektif sistem denir.

ÖRNEK 1.1.3 :

a) $I=\mathbb{N}_{>0}$ kümesi için "$\preccurlyeq$" sıralama bağıntısı;

$$n\preccurlyeq m \Leftrightarrow n|m \tag{1.1.2}$$

şeklinde tarif edilsin. Buna göre I lineer sıralı bir kümedir. Şimdi $G_n=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ($n\in I$) grubunu ele alalım. Her $m,n\in I$ öyle ki $n\preccurlyeq m$ için $x\in\mathbb{Z}$ olmak üzere $b_n^m(x+m\mathbb{Z})=(x+n\mathbb{Z})$ olacak şekilde bir $b_n^m:G_m\to G_n$ tasviri tanımlayalım. Buna göre;

1) $b_n^n:G_n\to G_n$ tasviri, her $x\in I$ için , $x+\ n\mathbb{Z}\ \to x+\ n\mathbb{Z}$ şartını sağladığından birim tasvirdir.

2) $n\preccurlyeq m$ ve $m\preccurlyeq k$ olacak şekildeki $m,n,k\in I$ elemanları için $n\preccurlyeq k$ şartı sağlandığından. b_n^k: $x+k\mathbb{Z}\to x+n\mathbb{Z}$ tasviri , b_n^k: $x+k\mathbb{Z}\to x+m\mathbb{Z}\to x+n\mathbb{Z}$ şeklinde ifade edilebildiğinden $b_n^k=b_m^k\circ b_n^m$ şartı sağlanır. Dolayısı ile $\left(G_n,b_n^m:G_m\to G_n\right)_{\substack{m,n\in I\\ m\leq n}}$ bir projektif sistemdir.

ÖRNEK 1.1.4 : $I = \{ E : K \subseteq E \subseteq \overline{K}$, E/K sonlu Galois genişlemesi $\}$ kümesi verilsin ve bu küme üzerinde ;

$$E_1, E_2 \in I \text{ için } E_1 \leq E_2 \Leftrightarrow E_1 \subseteq E_2 \tag{1.1.3}$$

ifadesiyle tanımlanan "$\leq$" bağıntısı ;

1) $E \subseteq E \Leftrightarrow E \leq E$

2) $E_1 \leq E_2, E_2 \leq E_1 \Leftrightarrow E_1 = E_2$

3) $E_1 \leq E_2, E_2 \leq E_3 \Rightarrow E_1 \leq E_3$

4) $\forall E, E' \in I$ için $\exists E''$ öyle ki $E \leq E''$, $E' \leq E''$

şartlarını sağladığından dolayı I üzerinde bir lineer sıralama bağıntısıdır ve $(I, \leq)$ lineer sıralı bir kümedir.

Bir $E \in I$ elemanı için $G_E = Gal(E/K)$ olsun. $E \leq E'$ şartını sağlayan $E, E' \in I$ cisimleri için, $b_E^{E'} : G_{E'} \to G_E$ tasvirini, her $\sigma \in E'$ için ;

$$b_E^{E'}\sigma = \sigma|_E \quad (\sigma \in G_{E'} = Gal(E'/K)) \tag{1.1.4}$$

şeklinde ifade edelim. Buna göre E/K Galois genişlemesi olduğundan dolayı her $\alpha \in E$ için $\sigma(\alpha) = \sigma|_E(\alpha) \in E$ dir. Dolayısıyla $b_E^{E'}$ iyi tanımlıdır. Ayrıca $\sigma, \sigma' \in G_{E'}$ olmak üzere her $\alpha \in E$ için;

$$\begin{aligned}(\sigma\sigma')|_E(\alpha) &= (\sigma\sigma')(\alpha) \\ &= \sigma(\sigma'(\alpha)) \\ &= \sigma(\sigma'|_E(\alpha)) \\ &= (\sigma|_E)((\sigma'|_E)(\alpha))\end{aligned} \tag{1.1.5}$$

şartı sağlandığından $b_E^{E'}$ grup homomorfizmidir. Şimdi $\left(G_E, b_E^{E'} : G_{E'} \to G_E\right)_{\substack{E,E' \in I \\ E \leq E'}}$ sisteminin projektif sistem oluşturduğunu gösterelim.

Her $\sigma \in G_E$ için $\sigma|_E = \sigma$ olduğundan dolayı $b_E^E : \sigma|_E \to \sigma|_E$ birim tasvirdir. Son olarak $b_E^{E'}: G_E \to G_E$ ve $b_{E'}^{E''}: E'' \to E'$ tasvirlerini gözönüne aldığımızda herhangi bir $\alpha \in E$ için ;

$$\begin{aligned}\left(b_E^{E'} \circ b_{E'}^{E''}\right)(\sigma(\alpha)) &= b_E^{E'}\left(\sigma|_{E'}(\alpha)\right) \\ &= \left(\sigma|_{E'}\right)|_E(\alpha) = \sigma|_E(\alpha)\end{aligned} \qquad (1.1.6)$$

eşitliği sağlanır. Bu nedenle,

$$\left(b_E^{E'} \circ b_{E'}^{E''}\right) = \sigma|_E(\alpha) = b_E^{E''} \qquad (1.1.7)$$

elde edilir. Buna göre $\left(G_E, b_E^{E'}: G_{E'} \to G_E\right)_{\substack{E,E' \in I \\ E \le E'}}$ projektif sistem olştunur.

TANIM 1.1.3 : Bir $(I, \le)$ lineer sıralı sistemi için bir $\left(G_i, b_i^j: G_j \to G_i\right)_{\substack{i,j \in I \\ i \le j}}$ projektif sisteminin limiti;

$$\varprojlim_i G_i := \left\{ (g_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i \,\middle|\, b_i^j(g_j) = g_i \right\} \qquad (1.1.8)$$

kümesidir.

LEMMA 1.1.1 : $\left(G_i, b_i^j: G_j \to G_i\right)_{\substack{i,j \in I \\ i \le j}}$ projektif sisteminin limiti ;

$$(g_i)_{i \in I}(h_i)_{i \in I} = (g_i h_i)_{i \in I} \qquad (1.1.9)$$

ifadesiyle tanımlanan $\prod_{i \in I} G_i \times \prod_{i \in I} G_i \to \prod_{i \in I} G_i$ işlemi altında bir grup yapısına sahiptir.

İSPAT : Kapalılık; Her $(g_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I} \in \varprojlim_i G_i$ için ;

$$b_i^j(g_j h_j) = b_i^j(g_j) b_i^j(h_j) = g_i h_i \qquad (1.1.10)$$

olduğundan kapalılık şartı sağlanır.

Assosyatiflik; $(g_i)_{i \in I}, (h_i)_{i \in I} (z_i)_{i \in I} \in \varprojlim_i G_i$ için;

$$\left((g_i)_{i\in I}(h_i)_{i\in I}\right)(z_i)_{i\in I}=\left(g_i(h_iz_i)\right)_{i\in I}=\left((g_ih_i)z_i\right)_{i\in I} \tag{1.1.11}$$

Birim Eleman; Her $i\in I$ için e_i, her bir G_i nin birim elemanını göstermek üzere $b_i^j(e_j)=e_i$ olduğundan $(e_i)_{i\in I}\in \varprojlim_i G_i$ dir. Ayrıca,

$$(g_i)_{i\in I}(e_i)_{i\in I}=(g_ie_i)_{i\in I}=(g_i)_{i\in I} \tag{1.1.12}$$

şartı sağlandığından $(e_i)_{i\in I}$, $\varprojlim_i G_i$ nin birim elemanıdır.

Ters Eleman; $(g_i)_{i\in I}\in \varprojlim_i G_i$ için $b_i^j(g_j^{-1})=b_i^j(g_j)^{-1}=g_i^{-1}$ olduğundan dolayı $(g_i^{-1})_{i\in I}\in \varprojlim_i G_i$ dir. Buna göre ;

$$(g_i)_{i\in I}(g_i^{-1})_{i\in I}=(g_ig_i^{-1})_{i\in I}=(e_i)_{i\in I} \tag{1.1.13}$$

sağlandığından $(g_i)_{i\in I}\in \varprojlim_i G_i$ için ters eleman mevcuttur ve $(g_i)_{i\in I}^{-1}=(g_i^{-1})_{i\in I}$ dir.

ÖRNEK 1.1.5 : Örnek 1.1.3 teki projektif limit ;

$$\hat{Z}=\varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\prod_{p<\infty}\mathbb{Z}_p \tag{1.1.14}$$

dir.

ÖRNEK 1.1.6 : Örnek 1.1.4 teki projektif limiti alalım ;

$\sigma\in Gal(\overline{K}/K)$ için $E\in I$ olmak üzere $\sigma_E=\sigma|_E$ eşitliği verilsin. $\sigma_E\in G_E$ ve $E\le E'$ şartını sağlayan $\forall E,E'\in I$ için $b_E^{E'}(\sigma_{E'})=(\sigma_{E'})|_E=\sigma_E$ olduğundan $\sigma_E\in \varprojlim_E G_E$ dir.

Şimdi $\sigma\to(\sigma_E)_{E\in I}$ ifadesiyle tarif edilen bir $T:Gal(\overline{K}/K)\to \varprojlim_E G_E$ tasvirini ele alalım. Buna göre $\sigma,\tau\in Gal(\overline{K}/K)$ olmak üzere ;

$$
\begin{aligned}
T(\sigma\tau) &= (\sigma\tau)_E \\
&= (\sigma\tau)|_E \\
&= (\sigma)|_E(\tau)|_E \\
&= (\sigma)_E(\tau)_E \\
&= T(\sigma)T(\tau)
\end{aligned} \tag{1.1.15}
$$

şartı sağlandığından T homomorfizmadır. Bununla birlikte ;

$$
\begin{aligned}
Ker(T) &= \{\sigma \in Gal(\overline{K}/K) : T(\sigma) = (\sigma)_E = Id_{G_E}\} \\
&= \{\sigma \in Gal(\overline{K}/K) : \sigma|_E = Id\} \\
&= \{\sigma = Id\}
\end{aligned} \tag{1.1.16}
$$

ve rastgele seçilen bir $(\sigma_E)_{E\in I}$ için . $E \leq E'$ şartını sağlayan her E, E' için $\sigma : \overline{K} \to \overline{K}$ tasvirini, eğer $\alpha \in E$ ise $\sigma(\alpha) = \sigma_E(\alpha)$ şartını sağlayacak şekilde seçelim. Bu durumda $\sigma \in Gal(\overline{K}/K)$ ve $T(\sigma) = (\sigma_E)_{E\in I}$ olur . □

1.2 TOPOLOJİK GRUPLAR

Bir $(I,\leq)$ sıralı kümesi ve $\left(G_i, b_i^j : G_j \to G_i\right)_{\substack{i,j\in I \\ i\leq j}}$ projektif sistemi verilsin. Bu sistemin $\varprojlim_i G_i$ limiti, bileşenleri üzerinde tarif edilmiş olan G_i lerin işlemi altında bir grup oluşturur.

TANIM 1.2.1 : $(G,.,\tau_G)$ üçlüsü eğer ;

1) G bir gruptur

2) (G,τ_G) bir topolojik uzaydır.

3) 1 ve 2 de tarif edilmiş olan yapılar birbirleriyle uyumludur. Yani ;

$$\cdot : G\times G \to G \text{ sürekli bir tasvirdir.} \tag{1.2.1}$$

$$\iota :: G \to G \qquad g \mapsto g^{-1} \text{ tasviri süreklidir} \tag{1.2.2}$$

şartlarını sağlıyorsa $(G,.,\tau_G)$ üçlüsüne bir topolojik gruptur denir.

ÖRNEK 1.2.2 : $\left(M_n(\mathbb{C}), +, \tau_{C^{n^2}}\right)$ topolojik bir gruptur.

ÖRNEK 1.2.3 : $\left(GL(n, \mathbb{C}), \cdot, \tau_{C^{n^2+1}}\right)$ topolojik bir gruptur.

Bir $\left(G_i, b_i^j : G_j \rightarrow G_i\right)_{\substack{i,j\in I \\ i\leq j}}$ projektif sistemi verilsin. Küme olarak $\varprojlim_i G_i$, G_i lerin kartezyen çarpımı $\prod_{i\in I} G_i$ kümesinin içindedir (burada söylememiz gerekli nokta Zorn'un lemmasını (seçme aksiyomu) kabul etmemizdir) .

G_i ler diskrit topoloji altında topolojik grup yapısına sahiptir. Dolayısıyla Tikonof teoremi sonucunda $\prod_{i\in I} G_i$, çarpım topolojisi altında kompakt bir gruptur.

Projektif limit $\varprojlim_i G_i$, tanımından dolayı $\prod_{i\in I} G_i$ nin bir alt grubudur.

TANIM 1.2.2 : $\varprojlim_i G_i$ ye indirgenmiş olan $\prod_{i\in I} G_i$ nin çarpım topolojisine projektif limit topolojisi denir.

Bu durumda projektif limit topolojisi altında, $\varprojlim_i G_i$ topolojik bir gruptur.

BÖLÜM 2: GRUPLARIN TEMSİL TEORİSİ

Bu bölümde, çalışmalarımız için gerekli olan grupların temsil teorisi ile ilgili genel bilgileri özetleyeceğiz.

2.1 $\mathbb{C}G$-MODÜLLER

TANIM 2.1.1 : V bir $\mathbb{C}$-vektör uzayı, G bir grup olsun. Eğer V üzerinde her $v,w \in V$, $g,h \in G$ ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için ;

(i) $gv \in V$

(ii) $(hg)v=h(gv)$ (2.1.1)

(iii) $1_G v = v$

(iv) $g(\lambda v) = \lambda(gv)$

(v) $g(w+v)=gw+gv$

şartlarını sağlayan bir $G \times V \to V$, $(g,v) \to gv$ $(g \in G,\ v \in V)$ işlemi tanımlanabiliyor ise V ye bir $\mathbb{C}G$-modülü denir.

TANIM 2.1.2 : V bir $\mathbb{C}G$-modülü ve W de, V nin sıfırdan farklı $\mathbb{C}$-alt uzayı olsun. Eğer her $v \in V$ ve her $g \in G$ için $gv \in W$ oluyor ise W ye, V nin bir $\mathbb{C}G$-alt modülüdür denir.

TANIM 2.1.3 : Sıfırdan farklı bir V $\mathbb{C}G$-modülünün $\{0\}$ ve V dışında hiçbir alt modülü yoksa V ye indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü denir.

TANIM 2.1.4 :

(*i*) V ve W herhangi iki $\mathbb{C}G$-modülü olmak üzere eğer $\vartheta : V \to W$ tasviri $\mathbb{C}$-lineer bir tasvirse ve her $g \in G$, $v \in V$ için $\vartheta(gv) = g(\vartheta v)$ şartını sağlıyorsa ϑ tasvirine $\mathbb{C}G$-modül homomorfizması denir.

(*ii*) V ve W herhangi iki $\mathbb{C}G$-modül olmak üzere $\vartheta : V \to W$ tasviri eğer $\mathbb{C}G$-modül homomorfizmasıysa ve tersinirse $\mathbb{C}G$-modül izomorfizmasıdır.

ÖNERME 2.1.1 : Farzedelim V ve W iki $\mathbb{C}G$-modülü olsun. Eğer $\vartheta : V \to W$ bir $\mathbb{C}G$-modül homomorfizması ise, bu taktirde $\dot{I}m(\vartheta)$ ile $Ker(\vartheta)$ sırasıyla W nin ve V nin alt modülleridir.

İSPAT : Kabul edelim ki $u \in \dot{I}m(\vartheta)$ olsun. Bu taktirde $\vartheta(v) = u$ olacak şekilde bir $v \in V$ mevcuttur. Eşitliğin her iki tarafının bir $g \in G$ ile soldan çarpılmasıyla , $g\vartheta(v) = gu$ elde edilir. ϑ bir bir $\mathbb{C}G$-modül homomorfizması olduğundan dolayı $g\vartheta(v) = \vartheta(gv) = gu$ eşitliği elde edilir. Dolayısıyla $\vartheta(gv) \in im(\vartheta)$ olduğundan dolayı $gu \in \dot{I}m\vartheta$ elde edilir, ki bu da $\dot{I}m\vartheta$ nin, W nin bir $\mathbb{C}G$ alt modülü olduğu anlamına gelir.

Diğer taraftan v, $Ker(\vartheta)$ nin sıfırdan farklı bir elemanı ise bu durumda $\vartheta(v) = 0$ olacağından $g\vartheta(v) = \vartheta(gv) = 0$ elde edilir. Böylece $gv \in Ker\vartheta$ olduğu görülür. Buna göre $Ker(\vartheta)$ de, V nin bir $\mathbb{C}G$ alt modülüdür. □

TANIM 2.1.5 : V herhangi bir $\mathbb{C}G$-modülü ve U da indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü olsun. Eğer V nin U ya izomorfik bir $\mathbb{C}G$-alt modülü var ise U ya V nin bir birleşik çarpanı adı verilir.

TANIM 2.1.6 : Herhangi V ve W gibi iki $\mathbb{C}G$-modülü alalım. Eğer hem V nin hem de W nun birleşik çarpanı olan bir U indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü var ise, U ya V ve W nin ortak birleşik çarpanı denir.

2.2 GRUP CEBRİ ve REGÜLER $\mathbb{C}G$-MODÜLLER

G, elemanları $g_1 = 1_G, g_2, \ldots, g_n$ olan sonlu bir grup olsun. Bu grubun elemanları ile;

$$\mathbb{C}G = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i \,\middle|\, \lambda_i \in \mathbb{C} \right\} \tag{2.2.1}$$

şeklinde formel $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ toplamlarından oluşan bir küme tanımlayalım. $\mathbb{C}G$ nin her $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$, $v = \sum \mu_i g_i$ elemanları için ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için ;

$$u + v = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i + \mu_i) g_i \tag{2.2.2}$$

ve

$$\lambda u = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i) g_i \tag{2.2.3}$$

şeklinde tanımlanan $+: \mathbb{C}G \times \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ işlemi ve $\mathbb{C} \times \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ skaler çarpımı ile $\mathbb{C}G$ bir $\mathbb{C}$-vektör uzayı oluşturur. İnşa ettiğimiz $\mathbb{C}G$, $\mathbb{C}$-vektör uzayı için $g_1, g_2, \ldots, g_n$ bir bazdır. Çünkü $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \ldots + \lambda_n g_n = 0$ ise, herhangi bir $v = \sum \mu_i g_i$ vektörü için;

$$\begin{aligned} v + 0 &= (\mu_1 + \lambda_1) g_1 + \ldots + (\mu_n + \lambda_n) g_n \\ &= \mu_1 g_1 + \ldots + \mu_n g_n \Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n = 0 \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

dır.

$\mathbb{C}G$ üzerine G deki çarpma işelemi kullanılarak $\cdot: \mathbb{C}G \text{ x } \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ çarpımını tarif edelim.

TANIM 2.2.1 : her $\sum_{g \in G} \lambda_g g$, $\sum_{h \in G} \mu_g h \in \mathbb{C}G$ için $\mathbb{C}G \times \mathbb{C}G \to \mathbb{C}G$ işlemi ;

$$\begin{aligned} \left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \left(\sum_{h \in G} \mu_h h \right) &= \sum_{g, h \in G} \lambda_g \mu_h (gh) \\ &= \sum_{g \in G} \sum_{h \in G} \left(\lambda_h \mu_{h^{-1} g} \right) g \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

ifadesi ile tanımlanır. Bu işlemle birlikte $\mathbb{C}G$ vektör uzayına grup cebri adı verilir.

TANIM 2.2.2 : G bir grup olsun. $Z(\mathbb{C}G)$ ile gösterilen grup cebrinin merkezi;

$$(\mathbb{C}G) = \{ z \in \mathbb{C}G : zr = rz \ (\forall r \in \mathbb{C}G) \} \tag{2.2.6}$$

olarak tanımlanır. $Z(\mathbb{C}G)$, $\mathbb{C}G$ nin alt uzayıdır. Eğer G abelyen bir grup ise;

$$\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)\left(\sum_{h\in G}\mu_h h\right)=\sum_{g,h\in G}\lambda_g\mu_h(gh)$$
$$=\sum_{g,h\in G}\mu_h\lambda_g(hg) \qquad (2.2.7)$$
$$=\left(\sum_{h\in G}\mu_h h\right)\left(\sum_{g\in G}\lambda_g g\right)$$

olduğundan $Z(\mathbb{C}G)$, bütün grup cebrine eşittir.

TANIM 2.2.3 : Her $u,v\in\mathbb{C}G$, $\lambda\in\mathbb{C}$ ve $g,h\in G$ için ;

(i) $gv\in\ \mathbb{C}G$

(ii) $(gh)v=g(hv)$

(iii) $1_G v=v$ (1_G: G nin birim elemanı) (2.2.8)

(iv) $g(\lambda v)=\lambda(gv)$

(v) $g(u+v)=ug+vg$

özellikleri gerçeklenir. Dolayısıyla $\mathbb{C}G$, bir $\mathbb{C}G$-modülüdür. $\mathbb{C}G$ ye regüler $\mathbb{C}G$-modülü adı verilir.

2.3 GRUPLARIN TEMSİLİ : TEMEL KAVRAMLAR

GL(V) ile $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi üzerindeki bir vektör uzayının otomorfizmlerinin oluşturduğu gurubu göstereceğiz.

TANIM 2.3.1: Bir G grubu için, $\rho: G\to GL(V)$ gurup homomorfizmasına G nin V üzerindeki bir kompleks temsili denir. V $\mathbb{C}$–Vektör uzayının boyutuna ρ nun derecesi denir ve kısaca dim(ρ) ile gösterilir.

ÖRNEK 2.3.1 : G grubu olarak $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ devirsel grubunu ele alalım ve $\mathbb{C}$–vektör uzayını , $V=\mathbb{C}$ olarak seçelim. *GL(V)* grubunu da $\lambda\in\mathbb{C}$ ve $\lambda^n=1$ olmak üzere $\forall z\in\mathbb{C}$ için $\varphi_i(z)=\lambda^i z$ ($i=0,1,2,\ldots,n-1$) ifadesiyle tanımlanan $\varphi_i:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ otomorfizmalarının oluşturduğu grubu ele alalım. Bu taktirde;

$$\rho(i+n\mathbb{Z})=\varphi_i \quad (i=0,1,2,...,n-1) \tag{2.3.1}$$

ifadesiyle tanımlanan $\rho: G \to GL(V)$ tasviri, G nin V $(i=1,2,...,n)$ üzerindeki bir temsilini verir.

TEOREM 2.3.1 :

(*i*) $\rho: G \to GL(V)$, G nin V üzerinde bir temsili olsun. $g \in G$, $v \in V$ olmak üzere V üzerinde $(g,v) \to gv$ işlemini $gv = \rho(g)v$ olarak tanımlarsak V bir $\mathbb{C}G$-modülü olur.

(*ii*) V bir $\mathbb{C}G$-modül olsun. Bu durumda $g \in G$, $v \in V$ için $\tilde{g}(v) = gv$ olarak tanımladığımız $\tilde{g}: V \to V$ tasviri tersinir bir lineer tasvirdir ve $g \to \tilde{g}$ fonksiyonu G nin V üzerinde bir temsilidir.

İSPAT: **(*i*)** ρ bir homomorfizm ve $\rho(g)$ $(g \in G)$ tersinir lineer tasvir olduğundan dolayı her $v, w \in V$, $g, h \in G$ ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $gv = \rho(g)v$ işlemi

$\rho(g)v \in V$

$\rho(gh)v = \rho(g)\rho(h)v$

$\rho(g)(v+w) = \rho(g)v + \rho(g)w$

$\rho(g)(\lambda v) = \lambda(\rho(g)v)$

$\rho 1_G v = v$ (1_G V nin birim elemanı)

özelliklerini sağlar. Dolayısıyla V bir $\mathbb{C}G$-modülüdür.

(*ii*) V bir $\mathbb{C}G$-modül olduğundan $\forall v \in V$, $g \in G$ için ;

$$\tilde{g}(v_1+v_2) = g(v_1+v_2) = g(v_1)+g(v_2)) = \tilde{g}(v_1)+\tilde{g}(v_2) \tag{2.3.2}$$

ve ayrıca $\tilde{g}^{-1}(v) = g^{-1}v$ olacak şekilde bir $\tilde{g}^{-1}: V \to V$ tasviri için;

$$\tilde{g}\tilde{g}^{-1}(v) = \tilde{g}(\tilde{g}^{-1}(v)) = \tilde{g}(g^{-1}(v)) = g(g^{-1}(v)) = gg^{-1}(v) = v \tag{2.3.3}$$

olur. Ayrıca $\tilde{g}^{-1}\tilde{g} = v$ olduğundan $\tilde{g}$ tersinir bir lineer tasvirdir. Bu türdeki tasvirlerin oluşturduğu gurubu $\tilde{G}$ ile gösterelim. $\rho(g) = \tilde{g}$ olarak tanımlanan $\delta: G \to \tilde{G}$

tasviri;

$$\rho(g_1g_2) = \widetilde{g_1g_2} = \tilde{g}_1\tilde{g}_2 = \rho(g_1)\rho(g_2) \qquad (2.3.4)$$

sağlandığından dolayı G nin V üzerinde bir temsilidir.□

SONUÇ 2.3.1 : Bir G grubunun her temsili bir $\mathbb{C}G$-modülüne karşılık geldiği gibi, her $\mathbb{C}G$_modülü G grubunun bir temsiline karşılık gelir.

TANIM 2.3.2 : Eğer $\rho : G \to GL(V)$, G nin V üzerindeki bir temsili ve W de V nin bir $\mathbb{C}G$_alt modülü olmak üzere $\rho' : G \to GL(W)$ temsiline ρ nun alt temsili denir.

TANIM 2.3.3 : G sonlu bir grup ve $V = \mathbb{C}G$ de bir regüler $\mathbb{C}G$-modülü olsun. V ye karşılık gelen G nin temsiline G nin $\mathbb{C}G$-modülü üzerindeki regüler temsili adı verilir.

TANIM 2.3.4 : İndigenemez bir V $\mathbb{C}G$_modülüne karşılık gelen $\rho : G \to GL(V)$ temsiline de G nin V üzerindeki indirgenemez temsili adı verilir.

LEMMA 2.3.1 (SCHUR'UN LEMMASI) : Farz edelim V ve W, indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüller olsun.

(1) Eğer $\vartheta : V \to W$ tasviri bir $\mathbb{C}G$-modül homomorfizması ise, ya her $v \in V$ için $\vartheta v = 0$ dır veya ϑ bir $\mathbb{C}G$-modül izomorfizmasıdır.

(2) Eğer $\vartheta : V \to V$ bir $\mathbb{C}G$-modül izomorfizması ise, O zaman ϑ, idantik tasvir olan 1_V nin bir skaler katıdır.

İSPAT :

(1) En az bir $v \in V$ için $\vartheta v = w \neq 0$ olduğunu varsayalım. $İm(\vartheta)$, W nin $\mathbb{C}G$-alt modülü olduğundan ve W idirgenemez $\mathbb{C}G$-modül olduğundan dolayı $İm(\vartheta) = W$ elde edilir. Benzer nedenlerden $Ker(\vartheta)$ de V nin $\mathbb{C}G$-alt modülü olduğundan ve $Ker(\vartheta) \neq V$ olduğundan $Ker\,\vartheta = 0$ elde edilir. O halde ϑ bir $\mathbb{C}G$-modül izomorfizmasıdır.

(2) Lineer cebirden bilindiği gibi, ϑ lineer otomorfizma olduğundan bir $\lambda \in \mathbb{C}$ özdeğerine sahiptir. Buna göre , 1_V V nin idantik tasvirini göstermek üzere $\mathrm{Ker}(\vartheta - \lambda\, 1_V) \neq 0$ olduğundan ve V indirgenemez $\mathbb{C}G$-modül olduğundan dolayı ÖNERME 2.1.1 den dolayı, $\mathrm{Ker}(\vartheta - \lambda\, 1_V) = V$ olmalıdır . Yani her $v \in V$ için $(\tilde{g} - \lambda_g 1_V)v = 0$ dır. Buna göre $\vartheta = \lambda\, 1_V$ şartı sağlanır.□

ÖNERME 2.3.1 : Eğer G bir abelyen grupsa, o zaman G nin indirgenemez temsilinin derecesi 1 dir.

İSPAT: Farz edelim $\rho : G \to GL(V)$ temsili, G nin bir V vektör uzayı üzerindeki indirgenemez temsili olsun. Bu durumda V indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülüdür. G abelyen bir grup olduğundan dolayı $x, g \in G$ ve $v \in V$ elemanları için ;

$$gxv = xgv \qquad (2.3.5)$$

dir. Bundan dolayı V nin $\tilde{g}(v) = gv$ olarak tanımlanan $\tilde{g}$ lineer otomorfizması için;

$$\tilde{g}(xv) = gxv = xgv = x\tilde{g}(v) \qquad (2.3.6)$$

şartı sağlandığından dolayı $\tilde{g}$ aynı zamanda bir $\mathbb{C}G$-modül homomorfizmasıdır. O halde 1_V, V nin idantik tasvirini göstermek üzere, Schur'un Lemmasi'na göre $\tilde{g} = \lambda_g 1_V$ olacak şekilde bir $\lambda_g \in \mathbb{C}$ mevcuttur. Dolayısıyla her $v \in V$ için $gv = \lambda_g v$ dir. Dolayısıyla W, V nin herhangi bir alt uzayı ise, her bir $x \in G$ ve $w \in W$ için $xw = \lambda_x w \in W$ ($\lambda_x \in \mathbb{C}$) şartı sağlandığından dolayı W aynı zamanda V nin $\mathbb{C}G$-alt modülüdür. Bu da W = V olmasını gerektirir. Yani $\dim(V) = 1$ dir.□

ÖRNEK 2.3.2 : ÖRNEK 2.3.1 de gösterdiğimiz $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ in $\rho : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathrm{GL}(\mathbb{C})$ temsilinde $\mathbb{C}$, indirgenemez $\mathbb{C}G$ modüldür ve $\dim(\mathbb{C}) = 1$ dir.

ÖNERME 2.3.2 : Farzedelim V, indirgrnemez bir $\mathbb{C}G$-modülü olsun ve herhangi bir $z \in Z(\mathbb{C}G)$ elemanı alalım. O zaman her $v \in V$ için ;

$$vz = \lambda v \tag{2.3.7}$$

şartını sağlayan bir $\lambda \in \mathbb{C}$ mevcuttur.

İSPAT : Her $r \in \mathbb{C}$G ve $v \in V$ için $zrv = rzv$ olduğundan $v \rightarrow zv$ tasviri V den V ye giden bir $\mathbb{C}$G-homomorfizmdir. Dolayısı ile bu $\mathbb{C}$G-homomorfizmi yukarıdaki verdiğimiz ispatta gösterdiğimiz gibi bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için $\lambda 1_V$ ye eşittir. Bu da istediğimiz sonucu verir. □

Bir G grubunun V vektör uzayı üzerindeki $\rho : G \rightarrow GL(\ V\ )$ temsilini gözönüne alalım. T: $V \rightarrow W$ tersinir bir lineer tasvir olmak üzere $\mu(g) = T^{-1}\rho(g)(v)T$ olarak tanımlayalım.Bu durumda her $g_1, g_2 \in G$ için;

$$\begin{aligned} \mu(g_1 g_2) &= T^{-1}\rho(g_1 g_2)(v)T \\ &= T^{-1}\rho(g_1)\rho(g_2)(v)T \\ &= T^{-1}\rho(g_1)T\rho T^{-1}(g_2)(v)T = \mu(g_1)\mu(g_2) \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

olduğundan μ tasviri G nin V üzerinde bir temsilidir.

TANIM 2.3.5 : Bir G grubunun V ve W vektör uzayları üzerindeki temsilleri sırasıyla μ ve ρ olmak üzere, eğer $\mu(g) = T^{-1}\rho(g)(v)T$ olacak şekilde tersinir bir T lineer tasviri var ise μ ve ρ temsillerine denk temsiller denir. Temsillerin birbirine denk olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

TEOREM 2.3.2 : V ve W $\mathbb{C}G$-modüller olmak üzere $\mu : G \to GL(V)$ ve $\rho : G \to GL(W)$ sırasıyla V ve W nin belirttiği temsiller olsun. μ ve ρ temsillerinin denk temsiller olabilmesi için gerek ve yeter koşul. V ve W nin $\mathbb{C}G$-izomorfik olmasıdır.

NOTASYON : G bir grup, V de bir $\mathbb{C}G$-modülü olsun. V nin bir β baz takımı için, $[g]_\beta$ ile $\tilde{g}(v) = gv$ ifadesi ile tanımlanan V nin $\mathbb{C}$-otomorfizminin ilgili matrisini göstereceğiz. Dolayısıyla V ye karşılık gelen ρ temsili için, $\rho(g) = [g]_\beta$ dir.

2.4 GRUP TEMSİLLERİNİN FONKTÖRYEL ÖZELLİKLERİ

I TEMSİLLERİN DİREKT TOPLAMI

Bir G grubunun iki temsili $\rho_1 : G \to GL(V_1)$ ve $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ olsun ve her $g \in G$ ve her $v, w \in V$ için $T_g(v,w) = (\rho_1(g)(v), \rho_2(g)(w))$ olacak şekilde bir $T_g : V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$ tasviri tanımlayalım. Buna göre ;

$$\begin{aligned} T_g((v+v', w+w')) &= (\rho_1(g)(v+v'), \rho_2(g)(w+w')) \\ &= (\rho_1(g)(v) + \rho_1(g)(v'), \rho_2(g)(w) + \rho_2(g)(w')) \\ &= (\rho_1(g)(v), \rho_2(g)(w)) + (\rho_1(g)(v'), \rho_2(g)(w')) \\ &= T_g(v,w) + T_g(v',w') \end{aligned} \qquad (2.4.1)$$

şartı sağlandığından ve ;

$$T_{1_G}(v,w) = (\rho_1(1_G)v, \rho_2(1_G)w) = (v,w) \qquad (2.4.2)$$

olduğundan T_g $\mathbb{C}$-lineer bir tasvirdir. Buna göre her $g \in G$ için $\rho_1 \oplus \rho_2(g) = T_g$ ifadesiyle tanımlanan $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$ tasviri G nin $V_1 \oplus V_2$ üzerindeki bir temsilidir. Çünkü $g_1, g_2 \in G$ olmak üzere her $(v,w) \in V_1 \oplus V_2$ için ;

$$\begin{aligned} T_{g_1g_2}(v,w) &= \left(\rho_1(g_1g_2)v, \rho_2(g_1g_2)w\right) \\ &= \left(\rho_1(g_1)\rho_1(g_2)v, \rho_2(g_1)\rho_2(g_2)w\right) \\ &= T_{g_1}(\rho_1(g_2)v, \rho_2(g_2)w) \\ &= T_{g_1}T_{g_2}(v,w) \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

olduğundan $\rho_1 \oplus \rho_2(g_1g_2) = T_{g_1g_2} = T_{g_1}T_{g_2} = \rho_1 \oplus \rho_2(g_1)\rho_1 \oplus \rho_2(g_2)$ dir.

TANIM 2.4.1 : Yukarıda ifade edilen, G nin $\rho_1 \oplus \rho_2 : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$ temsiline ρ_1 ve ρ_2 temsillerinin direkt toplamı denir.

Teorem 2.3.1 e göre V_1 ve V_2 $\mathbb{C}$–vektör uzayları ρ_1 ve ρ_2 temsillerine karşılık gelen $\mathbb{C}G$-modülü yapısına sahip oldukları gibi, $V_1 \oplus V_2$ vektör uzayı da, $\rho_1 \oplus \rho_2$ temsiline karşılık gelen bir $\mathbb{C}G$-modülü yapısına sahiptir. Diğer bir deyişle V_1 ve V_2 $\mathbb{C}G$-modüllerinin direkt toplamı olan $V_1 \oplus V_2$ de bir $\mathbb{C}G$-modülü yapısına sahiptir.

TEOREM 2.4.1 (MASCHKE'NİN TEOREMİ) : Bir G grubunun iki temsili ρ ve μ olsun. Eğer μ temsili ρ nun alt temsiliyse o zaman $\rho = \mu \oplus \sigma$ olacak şekilde ρ nun σ gibi bir alt temsili mevcuttur.

İSPAT : Farz edelim ρ ve μ temsilleri Bir G grubunun sırasıyla V ve U vektör uzayları üzerindeki temsilleri olsun. O halde TEOREM 2.3.1 den dolayı U ve V $\mathbb{C}G$-modüllerdir. Ayrıca μ temsili ρ nun alt temsili olduğundan dolayı U, V nin $\mathbb{C}$G-alt modülüdür. Şimdi V nin;

$$V = U \oplus W_0 \tag{2.4.4}$$

Şartını sağlayan bir alt uzayını alalım. Bir $v \in V$ için $v = u + w$ olacak şekilde tektürlü belirli $u \in U, w \in W_0$ elemanları mevcuttur. Bu durumda $\phi(v) = u$ olarak tanımlanan $\phi : V \to V$ tasviri iyi tanımlıdır ve V nin bir endomorfizmidir. Bunun yanında $\forall u \in U$ için $\varphi(u) = u$ ve $\varphi(u+w) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \Leftrightarrow u + w \in w$ sağlandığından dolayı $\mathrm{Im}(\varphi) = U$ ve

$\mathrm{Ker}(\varphi) = W_0$ dır. Son olarak $\varphi(\varphi(v)) = \varphi(u) = u = \varphi(v)$ dir. Yani φ, bir projeksiyondur. Bütün bunların doğrultusunda her $v \in V$ için;

$$\vartheta v = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\varphi(gv) \tag{2.4.5}$$

ifadesiyle tanımlanan bir $\vartheta : V \to V$ tasviri ,V nin bir endomorfizmidir ve im(ϑ) $\subseteq U$ dur. Hatta U, V nin $\mathbb{C}$G-alt modülü olduğundan dolayı her $u \in U$ için $gu \in U$ dur. Bu sebepten dolayı;

$$\begin{aligned}\vartheta u &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\varphi(gu) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}gu = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} u \\ &= u\end{aligned} \tag{2.4.6}$$

elde edilir ki, bu da im(ϑ) $= U$ olduğu anlamına gelir.

Bunun yanında bir $x \in G$ ve $v \in V$ için;

$$\begin{aligned}\vartheta(xv) &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\varphi(g(xv)) \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} g^{-1}\varphi((gx)v)\end{aligned} \tag{2.4.7}$$

dir. Burada her g için $h = gx$ yazılırsa yukarıdaki ifade;

$$\begin{aligned}\vartheta(xv) &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} h^{-1}x\varphi(hv) \\ &= x\left(\frac{1}{|G|}\sum_{h\in G} h^{-1}\varphi(hv)\right) \\ &= x\vartheta(v)\end{aligned} \tag{2.4.8}$$

elde edilir ki, bu da ϑ nin bir $\mathbb{C}G$-modülü homomorfizması olduğunu gösterir. O halde eğer $\ker\vartheta = W$ dersek, W , V nin bir $\mathbb{C}$G-alt modülüdür. Şimdi $V = U \oplus W$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için ϑ nin bir projeksiyon olduğunu göstermeliyiz. Çünkü eğer ϑ bir projeksiyon ise bu durumda $\forall \quad v \in V$ İçin $v = \vartheta v + (v - \vartheta v)$ olduğu gözönünde bulundurulursa; $\vartheta v \in \dot{I}m\vartheta$ ve $\vartheta(v - \vartheta v) = \vartheta v - \vartheta(\vartheta v) = 0$ olduğundan, $(v - \vartheta v) \in Ker\vartheta$ dir. Bu da $V = \dot{I}m\vartheta + Ker\vartheta$ şartını sağlar. Ayrıca eğer $x \in \dot{I}m\vartheta \cap Ker\vartheta$ ise $x \in \dot{I}m\vartheta$ olduğundan $\vartheta v = x$ olacak şekilde bir $v \in V$ mevcuttur. Buradan $\vartheta(\vartheta v) = \vartheta x \Rightarrow \vartheta x = x$ elde edilir. Aynı zamanda $x \in Ker(\vartheta)$ olduğundan da $\vartheta(x) = x = 0$ bulunur. Dolayısıyla;

$$\dot{I}m\vartheta \cap Ker\vartheta = \{0\} \qquad (2.4.9$$

elde edilir. Yani $V = \dot{I}m\vartheta \oplus Ker\vartheta$ dir. Şimdi ϑ nin bir projeksiyon olduğunu gösterelim.

İm(ϑ)=U olduğundan dolayı herhangi bir $v \in V$ için $\vartheta(v) = u \in U$ dur. Dolayısıyla (2.23) ten dolayı $\vartheta(\vartheta v) = \vartheta u = u$ elde edilir. O halde ϑ bir projeksiyondur. □

TANIM 2.4.2 : G bir grup ve ρ da G nin bir V vektör uzayı üzerindeki temsili olsun. Eğer $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus ... \oplus \rho_n$ olacak şekilde ρ nun $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ indirgenemez temsilleri var ise o zaman ρ ye bütünüyle indirgenebilir temsil denir.

TEOREM 2.4.2 : Eğer G sonlu bir grup ise G nin bütün temsilleri bütünüyle indirgenebilirdir.

ÖNERME 2.4.1 : Farz edelim V bir $\mathbb{C}G$-modülü olsun $U_1, U_2, ..., U_s$, V nin indirgenemez $\mathbb{C}G$-alt modüleri olmak üzere $V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_r$ olduğunu kabul edelim. Eğer U, V nin herhangi bir indirgenemez alt modülü ise o zaman $1 \le i \le r$ olmak üzere $U \cong U_i$ şartını sağlayan bir U_i indirgenemez $\mathbb{C}G$-alt modülü mevcuttur.

İSPAT : Her bir $u \in U$ için $u_i \in U_i$ $(i=1,2,...,s)$ olmak üzere $u = u_1 + u_2 + ... + u_s$ toplamı tek türlü belirlidir.Şimdi, $\pi_i(u) = u_i$ ifadesiyle tanımlanan, bir $\pi_i : U \to U_i$

tasvirini ele alalım. Herhangi bir $u \in U$ için $u_i \neq 0$ olacak şekilde bir i seçebildiğimizden dolayı $\pi_i \neq 0$ dır. Ayrıca her $g \in G$ için $\pi_i(gu) = gu_i = g\pi_i(u_i)$ şartı sağlandığından π_i, bir $\mathbb{C}G$ homomorfizmasıdır. Bundan ziyade $\pi_i \neq 0$ olduğundan dolayı $\ker(\pi_i) \neq U$ dur. Bu yüzden $\ker(\pi_i)$, U nun bir $\mathbb{C}G$-alt modülü olduğundan ve U indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü olduğundan, $\ker \pi_i = \{0\}$ olmalıdır. Bu da π_i nin bir $\mathbb{C}G$ izomorfizması olduğu anlamına gelir.□

TEOREM 2.4.3 : Farz edelim $\mathbb{C}G$ bir regüler $\mathbb{C}G$ modülü olsun ve $U_1, U_2, ..., U_r$ indirgenemez $\mathbb{C}G$-alt modülleri için;

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_r \tag{2.4.10}$$

şartı sağlansın. O zaman her indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü U_i lerden birine izomorfiktir.

İSPAT : Farz edelim W indirgenemez herhangi bir $\mathbb{C}G$-modülü olsun ve sıfırdan farklı herhangi bir $w \in W$ vektörü seçelim. Buna göre $W' = \{rw : r \in \mathbb{C}G\}$ şeklinde bir küme tanımlayalım. Her $rw \in W'$ ve $g \in G$ için $grw \in W'$ şartı sağlandığından dolayı W' , W nin $\mathbb{C}$G-alt modülüdür. Fakat W indirgemenez olduğundan dolayı $W' = W$ dir.

Şimdi $\vartheta r = rw$ $(r \in \mathbb{C}G)$ ifadesini sağlayan bir $\vartheta : \mathbb{C}G \to W$ tasviri tanımlayalım. ϑ, üzerinedir ($W' = W$ olduğundan dolayı) . Her $r_1, r_2 \in \mathbb{C}G$ için, $\vartheta(r_1 + r_2) = (r_1 + r_2)w = r_1 w + r_2 w = \vartheta r_1 + \vartheta r_2$ şartı sağlandığından ϑ bir lineer tasvirdir. Ayrıca $\vartheta(r_1 r_2) = r_1 r_2 w = r_1(r_2 w) = r_1(\vartheta r_2)$ şartı da sağlandığı için ϑ aynı zamanda bir $\mathbb{C}G$-homomorfizmasıdır. O halde $\mathbb{C}G = U \oplus \ker\vartheta$ dir ve $U \cong \mathrm{Im}\,\vartheta = V$ olduğundan $U \cong W$ elde edilir. Dolayısıyla W indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü olduğundan, U da indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülüdür. Bu yüzden ÖNERME 2.1.1 den dolayı $U \cong U_i$ olacak şekilde bir $i = 1,2,...,r$ mevcut olduğundan $W \cong U_i$ elde edilir.□

SONUÇ : G sonlu bir grup olsun. Bu durumda birbirine izomorfik olmayan sonlu sayıda indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü vardır.

ÖNERME 2.4.2 : Kabul edelim ki, G bir grup ve V de bir $\mathbb{C}G$-alt modül olsun. Eğer $g \in G$ ise o zaman $[g]_\beta$ matrisinin diyagonal matris olmasını sağlayan V nin bir β baz takımı mevcuttur.

İSPAT : Herhangi bir $g \in G$ için $H = \langle g \rangle$ alt grubunu alalım. V aynı zamanda bir $\mathbb{C}H$-modüldür. ÖNERME 2.3.4 e göre $V = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_k$ şartını sağlayan $U_1, U_2, ..., U_k$ indirgenemez $\mathbb{C}H$- alt modülleri mevcuttur ve ÖNERME 2.3.1 den dolayı her bir U_i nin boyutu 1 dir $(i=1,2,3,...,k)$. Her bir U_i ye karşılık gelen H nın temsillerini ρ_i ile gösterirsek, her $1 \le i \le k$ için, u_i vektörü U_i nin baz vektörünü göstermek üzere, $\rho_i(g)u_i = \lambda_i u_i$ $(\lambda_i^n = 1)$ olacak şekilde $\lambda_i \in \mathbb{C}$ mevcuttur. Dolayısıyla eğer V nin β baz takımı olarak , $u_1, u_2, ..., u_k$ vektörleri seçilirse ;

$$[g]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & . & 0 \\ . & & . & & . \\ & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad (2.4.11)$$

elde edilir.□

TEOREM 2.4.4 : Farz edelim $\mathbb{C}G$ bir regüler $\mathbb{C}G$ modülü olsun ve $U_1, U_2, ..., U_r$ indirgenemez $\mathbb{C}G$-alt modülleri için;

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_r \qquad (2.4.12)$$

şartı sağlansın. Eğer U indirgenemez bir $\mathbb{C}G$-modülse o zaman U ya izomorfik olan U_i lerin sayısı $\dim(U)$ ya eşittir.

TANIM 2.4.3 : $V_1, V_2, ..., V_k$ indirgenemez $\mathbb{C}G$ modülllerinden hiçbiri birbirine izomorfik değilse ve her indirgenemez $\mathbb{C}G$ modül bir V_i $(i = 1,2,...,k)$ ye izomorfikse $V_1, V_2, ..., V_k$ $\mathbb{C}G$-modülllerine tümüyle izomorfik olmayan $\mathbb{C}G$-modülller denir.

II TEMSİLLERİN TENSÖR ÇARPIMI :

TANIM 2.4.4 : V ve W kompleks vektör uzayları olsun. V nin bir baz takımı $v_1, v_2, ..., v_n$ ve W nin bir baz takımı ise $w_1, w_2, ..., w_m$ olmak üzere her bir elemanı $w_i \otimes w_j$ sembulü ile gösterilen bir ;

$$\{v_i \otimes w_j : 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\} \qquad (2.4.13)$$

kümesi oluşturalım. V ve W mn nin $V \otimes W$ ile gösterilen tensör çarpımı, bu kümenin elemanlarını baz olarak kabul eden nm boyutlu bir kompleks vektör uzayıdır. Buna göre $u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ $(\lambda_i \in \mathbb{C})$ ve $v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j$ $(\mu_j \in \mathbb{C})$ ifadeleriyle tarif edilen $u \in U$ ve $v \in W$ elemanları için $u \otimes v \in U \otimes V$ elemanı ;

$$u \otimes v = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j (v_i \otimes v_j) \qquad (2.4.14)$$

ifadesi ile tarif edilir.

ÖNERME 2.4.3:

i) Eğer $v \in V$ ve $w \in W$ ise o zaman herhangi bir $\lambda \in \mathbb{C}$ için ;

$$(\lambda v \otimes w) = (v \otimes \lambda w) = \lambda (v \otimes w) \qquad (2.4.15)$$

dir.

ii) Eğer $x_1, x_2, ..., x_k \in V$ ve $y_1, y_2, ..., y_l \in W$ ise ;

$$\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes \sum_{j=1}^{l} y_j = \sum_{i,j} x_i \otimes y_j \tag{2.4.16}$$

dir.

İSPAT : Kabul edelim $v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i$ ve $w = \sum \mu_j w_j$ olsun. Buna göre;

$$\begin{aligned} \lambda v \otimes w &= \sum_{i=1}^{m} \lambda \lambda_i \mu_j \left(v_i \otimes w_j\right) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mu_j \left(v_i \otimes w_j\right) \\ &= \lambda (v \otimes w) \end{aligned} \tag{2.4.17}$$

ve

$$\begin{aligned} v \otimes \lambda w &= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \lambda \mu_j \left(v_i \otimes w_j\right) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mu_j \left(v_i \otimes w_j\right) \end{aligned} \tag{2.4.18}$$

dir .Böylece istenilen eşitlik sağlanır.

ii) Kabul edelim $x_i = \sum_{p=1}^{m} \lambda_{ip} v_p$ ve $y_j = \sum_{q=1}^{n} \mu_{jq} w_q$ olsun. Bu taktirde ;

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes \sum_{j=1}^{l} y_j &= \sum_{p=1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \lambda_{ip} v_p \otimes \sum_{q=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \mu_{jq} w_q \\ &= \sum_{p,q,i,j} \lambda_{ip} \mu_{jq} \left(v_p \otimes w_q\right) \end{aligned} \tag{2.4.19}$$

ve benzer şekilde ;

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \left(x_i \otimes y_j\right) &= \sum_{i,j} \left(\sum_{p,q} \lambda_{ip} \mu_{jq} \left(v_p \otimes w_q\right) \right) \\ &= \sum_{i,j,p,q} \lambda_{ip} \mu_{jq} \left(v_p \otimes w_q\right) \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

elde edilir. Bundan dolayı $\sum_{i=1}^{k} x_i \otimes \sum_{j=1}^{l} y_j = \sum_{i,j} x_i \otimes y_j$ sonucuna varılır. □

ÖNERME 2.4.4 : Eğer $e_1, e_2, ..., e_m$ ve $f_1, f_2, ..., f_n$ TANIM 2.4.2 de verilen sırasıyla V ve W vektörlerinin bir bazı ise bu durumda ;

$$\{(e_i \otimes f_j): 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \tag{2.4.21}$$

kümesinin elemanları da $V \otimes W$ için bir baz oluşturur.

İSPAT : Her bir $v_i \in V$ ve $w_j \in W$ için ;

$$v_i = \sum_{k=1}^{m} \lambda_{ik} e_k \ , \ w_j = \sum_{l=1}^{n} \mu_{jl} e_l \tag{2.4.22}$$

olduğunu kabul edelim. ÖNERME 2.4.3 ten dolayı ;

$$v_i \otimes w_j = \sum_{k,l} \lambda_{ik} \mu_{jl} (e_i \otimes f_j) \tag{2.4.23}$$

dir. Diğer tarafan $v_i \otimes v_j$ $(1 \leq i \leq m), (1 \leq j \leq n)$ $V \otimes W$ için bir baz oluşturduğundan dolayı $V \otimes W$ nin bütün elemanları sayıları mn olan $e_i \otimes f_j$ elemanları tarafından gerilir. Buna göre $e_i \otimes f_j$ elemanları $V \otimes W$ nin bir bazıdır. □

Şimdi, V ve W, TANIM 2.4.2 de ifade edilen vektör uzayları olmak üzere bir G grubunun V ve W üzerindeki $\rho_1 : G \to GL(V)$, $\rho_2 : G \to GL(W)$ temsilleri için G nin $V \otimes W$ üzerindeki bir $\rho_1 \otimes \rho_2$ temsilini oluşturacağız.

TEOREM 2.4.5 : TANIM 2.4.2 de verilen V ve W vektör uzayları ve bir G grubu için $V \otimes W$ nin her $u = \sum \lambda_{ij} (v_i \otimes w_j)$ elemanına karşılık;

$$(\rho_1 \otimes \rho_2(g))\,(u) = \sum_{i,j} \lambda_{ij} (\rho_1(g)(v_i) \otimes \rho_2(g)(w_j)) \quad (g \in G) \tag{2.4.24}$$

eşitliği ile tarif edilen $\rho_1 \otimes \rho_2(g) : V \otimes W \to V \otimes W$ tasviri tersinir bir lineer tasvirdir.

İSPAT : Öncelikle $V\otimes W$ nin, $u=\sum\lambda_{ij}\left(v_i\otimes w_j\right)$ ve $v=\sum\mu_{ij}\left(v_i\otimes w_j\right)$ $(\lambda_{ij},\mu_{ij}\in\mathbb{C})$ elemanları ve herhangi bir $(\lambda\in\mathbb{C})$ için ;

$$
\begin{aligned}
\rho_1\otimes\rho_2(g)(u+\lambda v) &= \rho_1\otimes\rho_2(g)\left(\sum_{i,j}\lambda_{ij}\left(v_i\otimes w_j\right)+\lambda\sum_{i,j}\mu_{ij}\left(v_i\otimes w_j\right)\right)\\
&= \rho_1\otimes\rho_2(g)\left(\sum_{i,j}\left(\lambda_{ij}+\lambda\mu_{ij}\right)\left(v_i\otimes w_j\right)\right)\\
&= \sum_{i,j}\left(\lambda_{ij}+\lambda\mu_{ij}\right)\left(\rho_1(g)v_i\otimes\rho_2(g)w_j\right) \qquad (2.4.25)\\
&= \sum_{i,j}\lambda_{ij}\left(\rho_1(g)v_i\otimes\rho_2(g)w_j\right)+\lambda\sum_{i,j}\mu_{ij}\left(v_i\otimes w_j\right)\\
&= \rho_1\otimes\rho_2(g)(u)+\lambda\left(\rho_1\otimes\rho_2(g)(v)\right)
\end{aligned}
$$

şartı sağlandığından $\rho_1\otimes\rho_2(g)$ $\mathbb{C}$-lineer bir tasvirdir. Ayrıca her $g\in G$ için ; $\rho_1\otimes\rho_2\left(g^{-1}\right):V\otimes W\to V\otimes W$ lineer tasviri ;

$$
\begin{aligned}
\left(\rho_1\otimes\rho_2(g)\circ\rho_1\otimes\rho_2\left(g^{-1}\right)\right)(u) &= \rho_1\otimes\rho_2(g)\left(\sum_{i,j}\lambda_{ij}\left(\rho_1\left(g^{-1}\right)(v_i)\otimes\rho_2\left(g^{-1}\right)(w_j)\right)\right)\\
&= \sum_{i,j}\lambda_{ij}\left(\rho_1\left(gg^{-1}\right)(v_i)\otimes\rho_2\left(gg^{-1}\right)(w_j)\right) \qquad (2.4.26)\\
&= \sum_{i,j}\lambda_{ij}\left((v_i)\otimes(w_j)\right)\\
&= u
\end{aligned}
$$

şartını sağladığından dolayı $\rho_1\otimes\rho_2(g)$ tasviri tersinir bir lineer tasvirdir.□

TEOREM 2.4.6 : Bir G grubunun her g elemanını $\rho_1\otimes\rho_2(g)$ tersinir lineer tasvirine götüren ;

$$\rho_1\otimes\rho_2 : G\to GL(V\otimes W) \qquad (2.4.27)$$

tasviri G nin $V\otimes W$ üzerindeki bir temsilini verir.

İSPAT : Her $g_1,g_2\in G$ için ve $u=\sum\lambda_{ij}\left(v_i\otimes w_j\right)$ şeklindeki bir $u\in V\otimes W$

için;

$$\begin{aligned}\rho_1 \otimes \rho_2(g_1g_2)(u) &= \sum_{i,j}\lambda_{ij}\left(\rho_1(g_1g_2)(v_i)\otimes \rho_2(g_1g_2)(w_j)\right)\\ &= \sum_{i,j}\lambda_{ij}\left(\rho_1(g_1)\rho_1(g_2)(v_i)\otimes \rho_2(g_1)\rho_2(g_2)(w_j)\right)\\ &= \rho_1 \otimes \rho_2(g_1)\left(\sum_{i,j}\lambda_{ij}\left(\rho_1(g_2)(v_i)\otimes \rho_2(g_2)(w_j)\right)\right)\\ &= \rho_1 \otimes \rho_2(g_1)(\rho_1 \otimes \rho_2(g_2)(u))\end{aligned} \qquad (2.4.28)$$

Şartı sağlandığından dolayı $\rho_1 \otimes \rho_2 : G \to GL(V \otimes W)$, G nin $V \otimes W$ üzerindeki bir temsilidir.

ANIM 2.4.3 : TEOREM 2.4.2 de ifade edilen G nin $V \otimes W$ üzerindeki

$$\rho_1 \otimes \rho_2 : G \to GL(V \otimes W) \qquad (2.4.29)$$

Temsiline ρ_1 ve ρ_2 temsillerinin tensör çarpımı adı verilir.

Her temsil bir $\mathbb{C}G$-modülüne karşılık geldiğinden dolayı $V \otimes W$ vektör uzayı $\rho_1 \otimes \rho_2 : G \to GL(V \otimes W)$ temsili altında bir $\mathbb{C}G$-modülü yapısına sahiptir. Diğerbir ifadeyle, ρ_1 ve ρ_2 temsillerine karşılık gelen V ve W $\mathbb{C}G$-modüllerinin tensör çarpımı olan $V \otimes W$ de bir $\mathbb{C}G$-modülü yapısına sahiptir.

Şimdi bir V $\mathbb{C}G$-modülünün bir $v_1, v_2, \ldots, v_n$ baz takımı için $T\left(v_i \otimes v_j\right) = \left(v_j \otimes v_i\right)$ ifadesiyle tanımlanan bir $T: V \otimes V \to V \otimes V$ lineer transformasyonunu gözönüne alalım buna göre ;

$$S(V \otimes V) = \{x \in V \otimes V : Tx = x\} \qquad (2.4.30)$$

ve

$$A(V \otimes V) = \{x \in V \otimes V : Tx = -x\} \qquad (2.4.31)$$

ifadeleri ile tanımlanan $S(V\otimes V)$ ile $A(V\otimes V)$ kümeleri T bir lineer transformasyon olduğundan dolayı $V\otimes V$ nin birer alt uzayıdır. $S(V\otimes V)$ alt uzayına $V\otimes V$ nin simetrik alt uzayı, $A(V\otimes V)$ alt uzayına ise $V\otimes V$ nin antisimetrik alt uzayı adı verilir.

ÖNERME 2.4.5 : $S(V\otimes V)$ ve $A(V\otimes V)$ alt uzayları $V\otimes V$ nin $\mathbb{C}G$- alt modülleridir ve ayrıca ;

$$(V\otimes V)=S(V\otimes V)\oplus A(V\otimes V) \tag{2.4.32}$$

dir.

İSPAT : Her $\lambda_{ij}\in\mathbb{C}$ ve her $g\in G$ için ;

$$\begin{aligned} gT\left(\sum_{i,j}\lambda_{ij}(v_i\otimes v_j)\right) &= \sum_{i,j}\lambda_{ij}(gv_j\otimes gv_i) \\ &= T\left(\sum_{i,j}\lambda_{ij}(gv_i\otimes gv_j)\right) \\ &= T\left(g\sum_{i,j}\lambda_{ij}(v_i\otimes v_j)\right) \end{aligned} \tag{2.4.33}$$

şartı sağlandığından dolayı T bir $\mathbb{C}G$-homomorfizmasıdır. Bundan dolayı herhangi $x\in S(V\otimes V)$ ve $y\in A(V\otimes V)$ elemanları için ;

$$T(gx)=g(Tx)=gx \tag{2.4.34}$$

ve

$$T(gy)=g(Ty)=-gy \tag{2..4.35}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu da $gx\in S(V\otimes V)$ ve $gy\in A(V\otimes V)$ olduğu anlamına gelir. O halde S $(V\otimes V)$ ve $A(V\otimes V)$, $V\otimes V$ nin $\mathbb{C}G$- alt modülleridir.

Eğer $x\in A(V\otimes V)\cap A(V\otimes V)$ ise bu durumda $T(x)=x$ ve $T(x)=-x$ olacağından $x=0$ dır . Ayrıca her $x\in V$ için $x=\frac{1}{2}(x+Tx)+\frac{1}{2}(x-Tx)$ dir ve T^2 birim tasvir olduğundan dolayı $x=\frac{1}{2}(x+Tx)\in S(V\otimes V)$, $\frac{1}{2}(x-Tx)\in A(V\otimes V)$ sonucuna varılır. Böylece $(V\otimes V)=S(V\otimes V)\oplus A(V\otimes V)$ elde edilir. □

ÖNERME 2.4.5: $v_i\otimes v_j+v_j\otimes v_i$ $(1\le i\le j\le n)$ vektörleri $S(V\otimes V)$ için bir baz takımı oluşturur ve $S(V\otimes V)$ nin boyutu $n(n+1)/2$ dir. Benzer şekilde $v_i\otimes v_j-v_j\otimes v_i$ $(1\le i\le j\le n)$ vektörleri de $A(V\otimes V)$ nin bir bazıdır ve $A(V\otimes V)$ nin boyutu $n(n-1)/2$ dir.

İSPAT : $v_i\otimes v_j+v_j\otimes v_i$ vektörleri $S(V\otimes V)$ nin, $v_i\otimes v_j-v_j\otimes v_i$ vektörleri de $A(V\otimes V)$ nin lineer bağımsız vektörleri olduklarından dolayı $\dim S(V\otimes V)\ge n(n+1)/2$ ve $\dim A(V\otimes V)\ge n(n-1)/2$ dir. Ayrıca ÖNERME 2.4.5 gereğince ;

$$\dim S(V\otimes V)+\dim A(V\otimes V)=\dim(V\otimes V)=n^2 \qquad (2.4.36)$$

dir, ki bu da $\dim S(V\otimes V)=n(n+1)/2$ ve $\dim A(V\otimes V)=n(n-1)/2$ olması ile mümkündür. □

III TEMSİLLERİN KISITLANMASI

G grubunun bir H alt grubunu alalım . $\rho:G\to GL(V)$ G nin V üzerindeki bir temsili olmak üzere her $h\in H$ ve $v\in V$ için $\varphi_h(v)=\rho(h)v$ ifadesiyle tanımlanan bir $\varphi_h:V\to V$ tasvirini ele alalım. Buna göre, $\varphi_h(v+w)=\rho(h)(v+w)=\rho(h)(v)+\rho(h)(w)=\varphi_h(v)+\varphi_h(w)$ şartı sağlandığından ve $\varphi_{1_G}(v)=v$ olduğundan φ_h tasviri tersinir $\mathbb{C}$-lineer bir tasvirdir. Buna göre;

$$r_H(\rho)(h)=\varphi_h \qquad (2.4.37)$$

eşitliğiyle tanımlanan $r_H(\rho):H\to GL(V)$ tasviri her h_1, $h_2\in H$ ve $v\in V$ için;

$$
\begin{aligned}
r_H(\rho)(h_1h_2)(v) &= \varphi_{h_1h_2}(v) \\
&= \rho(h_1h_2)(v) \\
&= \rho(h_1)\rho(h_2)(v) \\
&= \varphi_{h_1}\varphi_{h_2}(v) \\
&= r_H(\rho)(h_1)r_H(\rho)(h_2)(v)
\end{aligned}
\tag{2.4.38}
$$

şartı sağlandığından G nin V üzerindeki bir temsilini verir.

TANIM 2.4.5 : Yukarıda ifade edilen, G nin $r_H(\rho): H \to GL(V)$ temsiline G nin H ye kısıtlanmış temsili denir.

IV BİR TEMSİLİN İNDÜKSİYONU

G grubunun bir H alt grubunu alalım. $\psi : H \to GL(W)$ H nın bir temsili olsun. Amacımız ψ temsili aracılığıyla G nin bir temsilini elde etmektir. Şimdi ;

$$
Ind_H^G W = \{ f : G \to W \mid f(hg) = \psi(h) f(g),\ \forall h \in H, \forall g \in G \} \tag{2.4.39}
$$

olarak tarif edilmiş $Ind_H^G W$ kümesini ele alalım. Her $f_1, f_2 \in Ind_H^G W$, $g \in G$ ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için tanımladığımız ;

$$
\begin{aligned}
(f_1 + f_2)(g) &= f_1(g) + f_2(g) \\
(\lambda f)(g) &= \lambda(fg)
\end{aligned}
\tag{2.4.40}
$$

işlemleri altında $Ind_H^G W$, bir $\mathbb{C}$-vektör uzayı oluşturur.

Şimdi $\gamma, g \in G$ olmak üzere ;

$$
f_\gamma(g) = f(g\gamma) \quad \left(f \in Ind_H^G W\right) \tag{2.4.41}
$$

ifadesiyle tanımlı bir f_γ tasviri tanımlayalım. Buna göre herhangi bir $h \in H$ için $g = hx$ olacak şekilde tek türlü belirli bir $x \in G$ bulunabildiğine göre ;

$$
\begin{aligned}
f_\gamma(g) &= f(g\gamma) \\
&= f(hx\gamma) \\
&= \psi(h) f(x\gamma) \\
&= \psi(h) f_\gamma(x)
\end{aligned}
\tag{2.4.42}
$$

şartı sağlanır. Dolayısı ile $f_\gamma \in Ind_H^G W$ dir.

Şimdi de $T_\gamma(f) = f_\gamma$ $\left(f \in Ind_H^G W\right)$ ifadesiyle verilen bir $T_\gamma : Ind_H^G W \to Ind_H^G W$ tasviri tanımlayalım. Her $f_1, f_2 \in Ind_H^G W$ $x \in G$ ve her $\lambda \in \mathbb{C}$ için ;

$$
\begin{aligned}
T_\gamma(f_1 + \lambda f_2)(x) &= (f_1 + \lambda f_2)_\gamma(x) \\
&= (f_1)_\gamma(x) + \lambda((f_2)_\gamma(x)) \\
&= T_\gamma(f_1)(x) + \lambda(T_\gamma(f_2)(x))
\end{aligned}
\tag{2.4.43}
$$

şartı sağlandığından dolayı T_γ , $\mathbb{C}$-lineer bir tasvirdir.

2.5 KARAKTER TEORİSİ ve KARAKTERLERİN FONKTÖRYEL ÖZELLİKLERİ

Farz edelim $\rho : G \to GL(V)$ bir G grubunun V üzerindeki temsili olsun. $\chi(g) = iz(\rho(g))$ olacak şekilde bir $\chi : G \to \mathbb{C}$ tasviri ele alalım. Burada Burada $iz(\rho(g))$, V nin $\rho(g)$ otomorfizmine karşılık gelen nxn boyutundaki tersinir matrisin izidir. V nin β, β' baz takımlarına göre $\rho(g)$ ye karşılık gelen matrisler , $[g]_\beta$ ve $[g]_{\beta'}$ olmak üzere $[g]_\beta = T^{-1}[g]_{\beta'} T$ eşitliğini sağlayacak bir T tersinir matrisi mevcuttur. Buna göre lineer cebirden iyi bildiğimiz $iz(AB) = iz(BA)$ $(A, B \in M_n(F))$ eşitliği kullanılarak ;

$$
\begin{aligned}
\chi(g) = iz(\rho(g)) &= iz([g]_\beta) \\
&= iz\left(T^{-1}[g]_{\beta'} T\right) \\
&= iz(TT^{-1}[g]_\beta
\end{aligned}
\tag{2.5.1}
$$

elde edilir. Yani $\chi(g)$ bazdan bağımsızdır. Bu da χ tasvirinin iyi tanımlı bir tasvir olduğunu gösterir.

TANIM 2.5.1 (BİR TEMSİLİN KARAKTERİ) : $\chi(g)=iz(\rho(g))$ ifadesi ile tanımlanan $\chi : G \to \mathbb{C}$ tasvirine ρ temsilinin karakteri adı verilir.

TANIM 2.5.2 : İndirgenemez bir $\rho : G \to GL(V)$ temsilinin χ karakterine, indirgenemez karakter adı verilir.

ÖNERME 2.5.1 : Bir G grubunun W ve V vektör uzayları üzerindeki temsilleri sırasıyla ρ ve ρ' olsun. Eğer ρ ve ρ' denk temsiller ise, o zaman bu temsillerin karakterleri de birbirine eşittir.

İSPAT : ρ ve ρ' denk temsiller olduklarından dolayı, her $g \in G$ için $\rho'(g)=T^{-1}\rho(g)T$ şartını sağlayan bir $T : V \to W$ $\mathbb{C}$-izomorfizmi mevcuttur. Bundan dolayı ρ ve ρ' temsillerinin sırasıyla χ, χ' karakterleri için, $g \in G$ olmak üzere ;

$$\begin{aligned} \chi'(g) &= iz(\rho'(g)) \\ &= iz(T^{-1}\rho(g)T) \\ &= iz(\rho(g)) \\ &= \chi(g) \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

elde edilir ki, bu da $\chi = \chi'$ olduğu anlamına gelir.□

Grupların temsil teorisinde önemli bir rolü olan karakterlerin bir takım önemli özelliklerine değinmeden önce , karakterleri incelerken bilinmesi gereken sınıf fonksiyonları kavramı ile, gruplar teorisinden bazı kavramlara değineceğiz.

TANIM 2.5.3 : Bir G grubunun elemanları x,y olmak üzere, eğer ;

$$y = h^{-1}xh \tag{2.5.3}$$

olacak şekilde bir $h \in G$ var ise x ile y ye G içinde birbirinin eşlenikleridir denir.

Eşlenik olma bağıntısı G de bir denklik bağıntısıdır. Buna göre, herhangi bir $x \in G$ nin denklik sınıfı ;

$$x^G = \{g^{-1}xg : g \in G\} \tag{2.5.4}$$

kümesidir. Bu denklik sınıfına x in G deki eşlenik sınıfı adı verilir.

ÖNERME 2.5.2 (S_n GRUBUNUN EŞLENİK SINIFLARI) : Farz edelim ki x, $(i_1 i_2 .. i_k)$ olacak şekilde k uzunluğunda bir devre olsun. Eğer $g \in S_n$ ise o zaman $g^{-1}xg$ de k uzunluğunda bir devredir.

İSPAT : $A = \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ kümesini ele alalım. Herhangi bir $i_r \in A$ için ;

$$i_r g(g^{-1}xg) = i_r xg = i_{r+1}g \quad (\text{eğer } r=k \text{ ise } i_1 g) \tag{2.5.5}$$

dir. Hatta bununla beraber $1 \le i \le n$ ve $i \notin A$ olmak üzere ;

$$ig(g^{-1}xg) = ixg = ig \tag{2.5.6}$$

elde edilir. Buradan ;

$$g^{-1}(i_1 .. i_k)g = (i_1 g i_2 g .. i_k g) \tag{2.5.7}$$

olduğu sonucuna varılır.

SONUÇ 2.5.1 : Bir $x \in S_n$ elemanı için x in x^{S_n} eşlenik sınıfı, x ile uzunluğu aynı olan elemanlardan oluşur.

ÖNERME 2.5.3 (A_n GRUBUNUN EŞLENIK SINIFLARI) : $n > 1$ olmak üzere $x \in A_n$ olsun. Bu taktirde ;

- **i)** Eğer x ile S_n deki bir tek permütasyon değişmeliyse bu taktirde $x^{S_n} = x^{A_n}$ dir.
- **ii)** Eğer x, S_n deki hiçbir tek permütasyon ile değişmeli değilse bu durumda x^{S_n} A_n içersinde x ve $(12)^{-1}x(12)$ ile temsil edilen eşlenik sınıflarına ayrılır.

İSPAT : i) x in herhangi bir g tek permütasyonu ile değişmeli olduğunu kabul edelim. Bir $h \in S_n$ için $y = h^{-1}xh$ olsun.Eğer h çift ise o zaman $y \in x^{A_n}$ dirve h tek ise $gh \in A_n$ olur ve ;

$$y = h^{-1}xh = h^{-1}g^{-1}xgh = (gh)^{-2}x(gh) \tag{2.5.8}$$

elde edilir. Böylece $y \in x^{A_n}$ elde edilir. Yani $x^{S_n} \subseteq x^{A_n}$ bulunur. Diğer yandan ÖNERME 2.5.2 den dolayı $x^{A_n} \subseteq x^{S_n}$ sağlandığından $x^{S_n} = x^{A_n}$ elde edilir.

TANIM 2.5.4 : Kabul edelim ki $x \in G$ olsun. x in G içindeki merkezileştiricisi ;

$$C_G(x) = \{g \in G : xg = gx\} \tag{2.5.9}$$

kümesidir ve bu küme G nin bir alt grubudur.

TEOREM 2.5.1 : Bir $x \in G$ elemanı için x^G eşlenik sınıfının mertebesi için ;

$$|x^G| = |G : C_G(x)| = |G|/|C_G(x)| \tag{2.5.10}$$

eşitliği sağlanır.

İSPAT : x^G den $C_G(x)$ in sağ eş kümelerine giden ve $f : g^{-1}xg \to C(x)g$ ifadesiyle tanımlanan bir f tasvirini alalım. Her $g, h \in G$ $(g \neq h)$ için;

$$\begin{aligned} g^{-1}xg = h^{-1}xh &\Leftrightarrow hg^{-1}x = xhg^{-1} \\ &\Leftrightarrow hg^{-1} \in C_G(x) \\ &\Leftrightarrow h \in C_G(x)g \\ &\Leftrightarrow C_G(x)g = C_G(x)h \end{aligned} \tag{2.5.11}$$

şartı sağlandığından dolayı f iyi tanımlı birebir ve üzerine bir tasvirdir. Böylece $|x^G| = |G : C_G(x)| = |G|/|C_G(x)|$ olduğu görülür. □

TANIM 2.5.5 (SINIF FONKSİYONLARI) : G herhangi bir grup olsun. Her $y \in x^G$ biçimindeki $x, y \in G$ için $f(x) = f(y)$ şartını sağlayan $f : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna G nin bir sınıf fonksiyonu adı verilir.

G nin tüm sınıf fonksiyonlarının kümesini $\mathbf{X}(G)$ ile gösterelim. Bu küme G den $\mathbb{C}$ ye giden tüm fonksiyonların oluşturduğu $\mathbb{C}$-vektör uzayının bir alt uzayıdır.

G nin Eşlenik sınıflarının kümesi $\{x_1^G, x_2^G, .., x_l^G\}$ olmak üzere i=1, 2, ... , l için;

$$f_i(x)=\begin{cases}1 & , x\in x_i^G \\ 0 & , x\notin x_i^G\end{cases} \tag{2.5.12}$$

şartını sağlayan $f_i \in \mathbf{X}(G)$ fonksiyonlarını gözönüne alalım. Bu fonksiyonların oluşturduğu kümenin elemanları $\mathbf{X}(G)$ nin bir $\mathbb{C}$-bazıdır. Gerçekten ;

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+...+\lambda_l f_l=0 \tag{2.5.13}$$

olması durumunda, herhangi bir $g\in G$ elemanı, aynı zamanda $x_1^G, x_2^G, ..., x_l^G$ eşlenik sınıflarından yalnızca birinin elemanıdır. Bu eşlenik sınıfını x_k^G (k=1, 2, ..., l) . olarak belirleyelim. Buna göre, $f_k(g)=1, f_j(g)=0$ ($j\neq k$) dır. Buradan ;

$$\lambda_1 f_1(g)+\lambda_2 f_2(g)+...+\lambda_l f_l(g)=\lambda_k f_k(g)=\lambda_k=0 \tag{2.5.14}$$

bulunur. Farklı eşlenik sınıflarından seçilen her $x\in G$ için benzer hesaplamalar sonucunda $\lambda_1=0, \lambda_2=0, ..., \lambda_l=0$ olduğu görülebilir. O halde $f_1, f_2, ..., f_l$, $\mathbb{C}$- lineer bağımsızdır. Şimdi de herhangi bir $f\in \mathbf{X}(G)$ fonksiyonunu ele alalım. Eğer herhangi bir $x\in G$ için $f(x)=z$ ($z\in\mathbb{C}$) ise bu durumda $f(x)$ i ;

$$f(x)=f_i(x)z \quad \left(x\in x_i^G\right) \tag{2.5.15}$$

eşitliği ile de ifade edebiliriz . Bu da herhangi bir $f\in \mathbf{X}(G)$ nin $f_1, f_2, ..., f_l$ nin lineer kombinasyonları olarak ifade edilebildiğini gösterir.

$\mathbf{X}(G)$ üzerinde her $f, g\in \mathbf{X}(G)$ elemanlarının sıralı ikililerini bir $\langle f,g\rangle$ kompleks sayısına karşılık getiren bir $\mathbf{X}(G)\times\mathbf{X}(G)\to\mathbb{C}$ hermitik iç çarpımı tanımlıdır. Bu iç çarpım her f, g, $h\in \mathbf{X}(G)$ için aşağıdaki özelliklere sahiptir.

i) $\langle f,g\rangle=\overline{\langle g,f\rangle}$

ii) $\langle \lambda_1 f+\lambda_2 g, h=\rangle=\lambda_1\langle f,h\rangle+\lambda_2\langle g,h\rangle$ (2.5.16)

iii) $\langle f,f\rangle>0 \quad (\forall f\neq 0)$

Bu özelliklerden "i" ye göre $\langle f,f\rangle$ her zaman bir reel sayıdır, "ii" ve "iii" özelliklerinden ise ;

$$\langle f,\lambda_1 g+\lambda_2 h=\rangle=\overline{\lambda}_1\langle f,g\rangle+\overline{\lambda}_2\langle f,h\rangle \qquad (2.5.17)$$

ifadesi elde edilir.

ÖRNEK 2.5.1 : Farz edelim $f,g\in \mathbf{X}(G)$ olsun. Bu durumda ;

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x)\overline{g(x)} \qquad (2.5.18)$$

ifadesi TANIM 2.4.4 teki **i, iii, iii** şartlarını sağladığından dolayı $\mathbf{X}(G)$ üzerinde bir iç çarpım tanımlar.

ÖNERME 2.5.3 : Bir grup temsilinin karakteri sınıf fonksiyonudur.

İSPAT: $\chi=\chi_\rho$, bir G grubunun V üzerindeki bir ρ temsilinin karakteri olsun.

$$x=z^{-1}yz \qquad (2.5.19)$$

şartını sağlayan herhangi $x,y,z\in G$ elemanlarını seçelim.Bu durumda ;

$$\begin{aligned}\chi(x)&=\chi(z^{-1}yz)\\ &=iz(\rho(z^{-1}yz))\\ &=iz(\rho(z^{-1})\rho(y)\rho(z))\\ &=iz(\rho(y))\\ &=\chi(y)\end{aligned} \qquad (2.5.20)$$

elde edilir. □

ÖNERME 2.5.4 : χ, bir $\rho: G\to GL(V)$ temsilinin karakteri olsun ve $|g|=m$ olacak Şekilde bir $g\in G$ seçelim. Bu taktirde;

i) $\chi(1_G)=\dim(V)$ (1_G, G nin birim elemanı)

ii) $\chi(g)^{-1}=\overline{\chi(g)}$

İSPAT :

i) Kabul edelim ki $\dim V = n$ olsun. $\rho : G \to GL(V)$ temsilinde $\rho(1_G)$, V nin idantik $\mathbb{C}$-lineer tasviridir. Dolayısıyla bu tasvirin ilgili matrisi I_n birim matrisidir. Buna göre ;

$$\chi(1_G) = iz(\rho(1_G)) = iz(I_n) = \dim(V) \tag{2.5.21}$$

bulunur.

ii) ÖNERME 2.3.5 ten dolayı $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ birin m inci mertebeden kökleri olmak üzere ;

$$[g^{-1}]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & 0 & . & 0 \\ . & & . & & . \\ & & & & . \\ 0 & 0 & . & . & \lambda^{-1}{}_n \end{pmatrix} \tag{2.5.22}$$

ifadesinin gerçeklendiği V nin bir β baz takımı mevcuttur. Dolayısıyla $\chi(g^{-1}) = \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + .. + \lambda_n^{-1}$ dir. Ayrıca birin m inci kökü olan her z kompleks sayısı için $\bar{z} = z^{-1}$ olduğundan ;

$$\chi(g^{-1}) = \lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} + .. + \lambda_n^{-1} = \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + ... + \bar{\lambda}_n = \chi(\bar{g}) \tag{2.5.23}$$

elde edilir.

ÖNERME 2.5.6 : İzomorfik $\mathbb{C}G$-modülllerin karakterleri birbirine eşittir.

İSPAT: V ve W izomorfik $\mathbb{C}G$-modülller ise TEOREM 2.3.2 den dolayı bu $\mathbb{C}G$-modülllerine karşılık gelen ρ ve ρ' temsilleri birbirine denktir. Dolayısıyla bir $g \in G$ olmak üzere;

$$\rho(g) = T^{-1}\rho'(g)T \tag{2.5.24}$$

şartını sağlayan bir $T:V\to W$ tersinir lineer tasviri mevcuttur.Buradan V ve W nin χ ve ψ karakterleri için;

$$\chi(g)=iz(\rho(g))=iz(T^{-1}\rho'(g)T)=iz(\rho!(g))=\psi(g) \tag{2.5.25}$$

elde edilir. □

ÖNERME 2.5.5 : Eğer χ ve ψ, bir G grubunun iki karakteriyse o zaman;

i) $\langle\chi,\psi\rangle=\langle\psi,\chi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\psi(g^{-1})$

dir ve bir reel sayıya eşittir.

ii) $\langle\chi,\psi\rangle=\sum_{i=1}^{l}\frac{\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}}{C_G(g_i)}$

İSPAT :

i) Karakter fonksiyonu bir sınıf fonksiyonu olduğundan ve ÖNERME 2.5.4 **(ii)** den dolayı ;

$$\langle\chi,\psi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\psi(g)}=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\psi(g^{-1}) \tag{2.5.26}$$

bulunur. Ayrıca $\langle\chi,\psi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\psi(g^{-1})=\langle\psi,\chi\rangle$ şartı sağlandığından ve $\langle\chi,\psi\rangle=\overline{\langle\psi,\chi\rangle}$ olduğumdan dolayı $\langle\chi,\psi\rangle$ bir reel sayıdır.

ii) Herhangi bir $g_i\in G$ nin denklik sınıfı g_i^G ile gösterilsin. Karakterler aynı denklik sınıfındaki elemanlar için aynı değere sahip olduklarından dolayı ;

$$\sum_{g\in g_i^G}\chi(g)\overline{\psi(g)}=|g_i^G|\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)} \tag{2.5.27}$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca $G=\bigcup_{i=1}^{l}g_i^G$ ve $|g_i^G=|G|/|C_G(g_i)|$ olduğundan dolayı ;

$$\langle \chi, \psi \rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\psi(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{i=1}^{l}\sum_{g \in g_i^G} \chi(g)\overline{\psi(g)}$$
$$= \sum_{i=1}^{l} \frac{|g_i^G|}{|G|}\chi(g_i)\overline{g_i} \qquad (2.5.28)$$
$$= \sum_{i=1}^{l} \frac{1}{C_G(g_i)}\chi(g_i)\overline{\psi(g_i)}$$

elde edilir □

TANIM 2.5.6 : Bir G grubunun regüler karakterleri, regüler bir $\mathbb{C}G$-modülün karakteri olarak tanımlanır . Bir regüler karakter kısaca, χ_{reg} sembolü ile gösterilir.

ÖNERME 2.5.7 : Kabul edelim V bir bir $\mathbb{C}G$-modülü olsun ve $U_1, U_2, \ldots, U_r$ indirgenemez $\mathbb{C}$G-alt modülleri için;

$$V = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_r \qquad (2.5.29)$$

şartı sağlansın. O zaman V nin karakteri, $U_1, U_2, \ldots, U_r$ indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerinin karakterlerinin toplamına eşit olur.

İSPAT : ÖNERME 2.4.1 den dolayı ispat açıktır.

TEOREM 2.5.2 : $V_1, V_2, \ldots, V_k$ tamamiyle izomorfik olmayan indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerin kümesi olsun ve i=1,2,...,k için her bir V_i nin karakterini χ_i ile gösterelim $\chi_i(1) = d_i$ olmak üzere;

$$\chi_{reg} = d_1\chi_1 + \ldots + d_k\chi_k \qquad (2.5.30)$$

dır.

İSPAT : Kabul edelim ki, i = 1,2,...,k olmak üzere her bir V_i için $\dim(V_i) = d_i$ olsun. TEOREM 2.4.4 ten dolayı;

$$\mathbb{C}G = (V_1 \oplus V_1 \oplus \ldots \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_2) \oplus \ldots \oplus (V_k \oplus \ldots \oplus V_k) \qquad (2.5.31)$$

dır. Dolayısı ile ÖNERME 2.5.6 ile $\chi_{reg} = d_1\chi_1 + ... + d_k\chi_k$ ifadesi elde edilir.□

ÖNERME 2.5.8: Eğer χ_{reg} , bir G grubunun regüler karakteri ise ;

$$\chi_{reg}(1) = |G| \qquad (2.5.32)$$

ve

$$\chi_{reg}(g) = 0 \quad (g \neq 1) \qquad (2.5.33)$$

İSPAT : G grubunun $g_1, g_2, ..., g_n$ elemanları regüler modülünün β bazının elemanları olmak üzere, $\chi_{reg}(1) = \dim \mathbb{C}G = |G|$ elde edilir.

Şimdi de birimden farklı bir $g \in G$ elemanı alalım. Bu durumda $i \neq j$ olmak üzere $g_i g = g_j$ şartını sağlayan $g_i g_j \in G$ elemanları mevcuttur. Dolayısıyla $[g]_\beta$ matrisinin j inci sütunu hariç i inci satırının elemanlarının tümü sıfıra eşittir. Diğer bir ifadeyle $[g]_\beta$ nin i-inci satır ve i-inci sütunu sıfıra eşittir.Böylece ;

$$\chi_{reg}(g) = tr[g]_\beta = 0 \qquad (2.5.34)$$

şartı sağlanır. □

ÖNERME 2.5.9 : Hiç ortak birleşik çarpanları olmayan W_1 ve W_2, $\mathbb{C}$G-alt modülleri için

$$\mathbb{C}G = W_1 \oplus W_2 \qquad (2.5.35)$$

ifadesi verilsin $e_1 \in W_1$, $e_2 \in W_2$ için $1 = e_1 + e_2$ olsun. Bu durumda $w_1 \in W_1$ ve $w_2 \in W_2$ için ;

$$\begin{matrix} w_1e_1 = w_1 & w_2e_1 = 0 \\ w_1e_2 = 0 & w_2e_2 = 1 \end{matrix} \qquad (2.5.36)$$

şartları sağlanır.

İSPAT : $w_1 \in W_1$ için $w_2 \to w_2 w_1$ ($w_2 \in W_2$) fonksiyonu tanımlayalım. Bu fonksiyon W_2 den W_1 e giden bir $\mathbb{C}G$-modülü homomorfizmasıdır. Fakat W_1 ve W_2 nin ortak birleşik çarpanı olmadığından SCHUR'un LEMMASI'ndan dolayı W_2 den W_1 e giden tüm $\mathbb{C}G$-modülü homomorfizmaları sıfırdır. Bu yüzden her $w_2 \in W_2$, $w_1 \in W_1$ için, $w_2 w_1 = 0$ sonucuna varılır. Benzer şekilde $w_1 w_2 = 0$ elde edilir. Ayrıca $w = 1w = (e_1 + e_2)w = e_1 w$, $x = 1x = (e_1 + e_2)x = e_2 x$ olduğu görülür.

SONUÇ 2.5.1 : $w_1 = e_1$, $w_2 = e_2$ alındığında $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ ve $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ elde edilir.

ÖNERME 2.5.10 : Farz edelim χ bir ÖNERME 2.5.9 deki W_1 $\mathbb{C}G$-modülünün karakteri olsun. Bu taktirde;

$$e_1 = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) g \tag{2.5.36}$$

dir.

İSPAT : Herhangi bir $x \in G$ için $\vartheta : w \to x^{-1} e_1 w$ ($w \in \mathbb{C}G$) fonksiyonu $\mathbb{C}G$ nin bir endomorfizmidir. Dolayısıyla ϑ , $w_1 \to x^{-1} w_1$ ve $w_2 \to 0$ biçimindedir. ϑ nin izi iki yolla hesaplanabilir. Birincisi $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ için;

$$\vartheta w_1 = x^{-1} e_1 w_1 = x^{-1} w_1 \ , \ \vartheta w_2 = x^{-1} e_1 w_2 = 0 \tag{2.5.37}$$

olduğundan $w_1 \to x^{-1} w_1$ W_1 in endomorfizmidir ve izi $\chi(x^{-1})$ e eşittir. W_2 nin $w_2 \to 0$ endomorfizminin izi ise 0 dır. Dolayısıyla ;

$$tr(\vartheta) = \chi(x^{-1}) \tag{2.5.38}$$

bulunur.

İkinci olarak, $e_1 \in \mathbb{C}G$ dir ve $e_1 = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ $(\lambda_g \in \mathbb{C})$ dir. Ayrıca $\mathbb{C}G$ nin $w \to x^{-1}gw$ endomorfizması eğer $x = g$ ise $|G|$ izine $x \neq g$ ise 0 izine sahiptir.Dolayısıyla $\vartheta : w \to x^{-1}\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g\right) w$ olduğundan;

$$tr\,\vartheta = \lambda_x |G| \tag{2.5.39}$$

bulunur.Bu yüzden;

$$e_1 = \frac{1}{|G|}\sum_{g \in G} \chi(g^{-1})g \tag{2.5.40}$$

dir.□

GEREKTİRME 2.5.1 : χ , W_1 $\mathbb{C}G$-modülünün karakteri ise, bu durumda;

$$\langle \chi, \chi \rangle = \chi(1) \tag{2.5.41}$$

dir.

TEOREM 2.5.3 : U ve V izomorfik olmayan $\mathbb{C}G$-modüller olsun ve U ve V nin karakteri sırasıyla δ ve ψ olsun. Bu durumda ;

$$\langle \chi, \chi \rangle = 1 \tag{2.5.42}$$

ve

$$\langle \chi, \psi \rangle = 0 \tag{2.5.43}$$

dır.

İSPAT : Kabul edelim $U_1, U_2, ..., U_r$ indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülleri için ;

$$\mathbb{C}G = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_n \tag{2.5.44}$$

eşitliği sağlansın. U herhangi bir indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülü olmak üzere $m=dimU$ olduğunu kabul edelim ve W de U ya izomorfik olan m adet U_i $\mathbb{C}G$-modülünun toplamı olsun. Geri kalan U_i $\mathbb{C}G$-modüllerinin toplamını da X ile gostereleim. Bu durumda ;

$$\mathbb{C}G = W \oplus X \qquad (2.5.45)$$

tir. Öyle ki, W ve X in hiçbir ortak birleşik çarpanları yoktur. Her bir U nun karakteri χ ise W nin karakteri $m\chi$ dır. Bir önceki önerme ile ;

$$\langle m\chi, m\chi \rangle = m\chi(1) \qquad (2.5.46)$$

dir. $\chi(1) = \dim U = m$ olduğundan $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ elde edilir.

Diğer taraftan $\mathbb{C}$G nin U ya veya V ye izomorfik olan U_i $\mathbb{C}$G-alt modüllerinin toplamını Y ile geri kalan U_i alt modüllerinin toplamını Z ile gösterirsek. $\mathbb{C}$G $=Y+Z$ dir ve Y ve Z ortak birleşik çarpana sahip değildir. GEREKTİRME 2.5.1 den dolayı ;

$$\begin{aligned} m\chi(1) + n\psi(1) &= \langle m\chi + n\psi, m\chi + n\psi \rangle \\ &= m^2\langle \chi, \chi \rangle + n^2 \langle \psi, \psi \rangle + mn(\langle \chi, \psi \rangle + \langle \psi, \chi \rangle) \end{aligned} \qquad (2.5.47)$$

dır. $\langle \chi, \chi \rangle = \langle \psi, \psi \rangle = 1$ ve $\chi(1) = m$, $\psi(1) = n$ dir. Dolayısı ile;

$$\langle \chi, \psi \rangle + \langle \psi, \chi \rangle = 2\langle \chi, \psi \rangle = 0 \qquad (2.5.48)$$

ve dolayısıyla $\langle \chi, \psi \rangle = 0$ elde edilir.

TEOREM 2.5.4 : Farz edelim $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_k$ karakterleri G grubunun indirgenemez karakterleri olsun. Buna göre eğer ψ karakteri G nin herhangi bir karakteri ise, herhangi nehatif olmayan d_i $(1 \le i \le k)$ tamsayıları için ;

$$\psi = d_1\chi_1 + d_2\chi_2 + ... + d_k\chi_k \qquad (2.5.49)$$

eşitliği sağlanır. Bunun dışında ;

$$d_i = \langle \psi, \chi_i \rangle \quad (1 \le i \le k) \tag{2.5.50}$$

ve

$$\langle \psi, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{k} d_i^2 \tag{2.5.51}$$

şartları sağlanır.

İSPAT : V her hangi bir $\mathbb{C}G$-modülü ise , tamamen izomorfik olmayan $V_1, V_2, ..., V_k$ indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüller olmak üzere ;

$$V \cong (V_1 \oplus .... \oplus V_1) \oplus ... \oplus (V_k \oplus .... \oplus V_k) \tag{2.5.52}$$

şartının sağlandığını biliyoruz (burada her bir $(V_i \oplus .... \oplus V_i)$ direkt toplamı d_i tane V_i indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülünün direkt toplamını göstermektedir) . Bu yüzden her bir V_i nin karakteri χ_i olmak üzere ,V nin herhangi bir ψ karakteri ;

$$\psi = d_1 \chi_1 + d_2 \chi_2 + ... + d_k \chi_k \tag{2.5.53}$$

şartını sağlar . Bu eşitliği kullanarak ;

$$\langle \psi, \chi_i \rangle = \langle d_1 \chi_1 + d_2 \chi_2 + ... + d_k \chi_k, \chi_i \rangle = d_i \tag{2.5.54}$$

ve

$$\langle \psi, \psi \rangle = d_1^2 + d_2^2 + ... d_k^2 \tag{2.5.55}$$

ifadeleri elde edilir. □

TEOREM 2.5.5 : Kabul edelim ki V , karakteri χ olan bir $\mathbb{C}G$-modülü olsun. Bu durumda V nin indirgenemez olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ olmasıdır.

İSPAT : TEOREM 2.5.3 ten dolayı V nin indirgenemez olduğu durumda $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ eşitliği sağlanır.

Tersine, eğer $\langle \chi, \chi \rangle = 1$ ise bu durumda TEOREM 2.5.4 ten dolayı negatif olmayan d_i tam sayıları için ;

$$1 = \langle \chi, \chi \rangle = d_1^2 + d_2^2 + ... + d_k^2 \qquad (2.5.56)$$

eşitliği ancak ve ancak d_i lerden biri 1 , diğerleri 0 olduğu durumda sağlanır. Bu ise V nin tamamen izomorfik olmayan V_i indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüllerinden birine izomorfik olması ile mümkündür. O halde V bir indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülüdür. □

TEOREM 2.5.6 : Bir G grubunun indirgenemez karakterleri sınıf fonksiyonlarının kümesi üzerinde tanımlı $\mathbb{C}$–vektör uzayının bir bazıdır.

İSPAT : Kabul edelim, $\chi_1, ..., \chi_k$ G nin indirgenemez karakterleri olsun. $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ kompleks sayıları için ;

$$\lambda_1 \chi_1 + ... + \lambda_k \chi_k = 0 \qquad (2.5.57)$$

eşitliği sağlansın. O halde TEOREM 2.5.3 kullanılarak ;

$$0 = \langle \lambda_1 \chi_1 + ... + \lambda_k \chi_k, \chi_i \rangle = \lambda_i \qquad (2.5.58)$$

elde edilir. Dolayısı ile $\chi_1, ..., \chi_k$ lineer bağımsızdır.

G deki eşlenik sınıflarının sayısı l olsun. O halde $k \leq l$ dir. O zaman göstermemiz gereken $l \leq k$ olduğudur.

Farz edelim $V_1, V_2, ..., V_n$ tamamiyle non-izomorfik indirgenemez $\mathbb{C}G$-modüller olsun. $\mathbb{C}$G regüler $\mathbb{C}G$-modülü için;

$$\mathbb{C}\mathrm{G} = W_i \oplus W_2 \oplus ... \oplus W_k \qquad (2.5.59)$$

direkt toplamı için her bir W_i , V_i nin kendi kopyalarıyla olan direkt toplamını göstersin. $f_i \in W_i$ olmak üzere $1 = f_1 + f_2 + ... + f_k$ diyelim. Bir $z \in Z(\mathbb{C}\mathrm{G})$ alalım. ÖNERME 2.3.2

den dolayı her $v \in V_i$ için $vz = \lambda_i v$ şartının sağlayan bir $\lambda_i \in \mathbb{C}$ mevcuttur. Dolayısı ile her $w \in W_i$ için $wz = \lambda_i w$ şartı sağlanır ve hatta;

$$f_i z = \lambda_i f \quad (1 \le i \le k) \tag{2.5.60}$$

dır. Buradan;

$$z = 1z = (f_1 + f_2 + ... + f_k)z = f_1 z + f_2 z + ... + f_k z \tag{2.5.61}$$

elde edilir. Bu da $Z(\mathbb{C}G)$ nin, $f_1, f_2, ..., f_k$ tarafından gerilen $\mathbb{C}G$ nin bir alt uzayının içinde olduğu anlamına gelir. $Z(\mathbb{C}G)$ nin boyutu l olduğundan $l \le k$ şartı sağlanır.□

ÖNERME 2.5.11 : Farzedelim $N \lhd G$ olsun $(N \ne \{1_G\})$ ve G/N nin bir $\tilde{\chi}$ karakterini alalım ve $g \in G$ olmak üzere

$$\chi(g) = \tilde{\chi}(Ng) \tag{2.5.62}$$

ifadesiyle tarif edilmiş bir $\chi : G \to \mathbb{C}$ tasvirini alalım. Bu durumda χ ile $\tilde{\chi}$ karakterlerinin dereceleri eşittir.

İSPAT : Kabul edelim $\tilde{\chi}$, bir $\tilde{\rho} : G/N \to GL(V)$ grup temsilinin karakteri olsun. Buradan hareketle $\rho : G \to GL(V)$ temsili ;

$$g \to N_g \to \tilde{\rho}(Ng) \tag{2.5.63}$$

biçiminde tarif edilsin. Bu tarife göre ρ nun karakteri χ için;

$$\chi(g) = iz(\rho(g)) = iz(\tilde{\rho}(Ng)) = \tilde{\chi}(Ng) \tag{2.5.64}$$

elde edilir. Böylece eğer $g = 1_G$ ise ;

$$\chi(1) = \tilde{\chi}(N) \tag{2.5.65}$$

bulunur.□

TANIM 2.5.8 : Eğer $N \lhd G$ ise ve $\tilde{\chi}$ da G/N nin karakteri ise, bu durumda $\chi(g) = \chi(Ng)$ ifadesiyle tanımlanan χ karakterine $\tilde{\chi}$ karakterinin G ye yükseltgenmiş karakteri denir.

TANIM 2.5.9 : Bir G grubunun derecesi 1 olan karakterine lineer karakter adı verilir.

ÖNERME : 2.5.12 Eğer χ bir G grubunun herhangi bir karakteri ise ve ψ de lineer karakteri ise o zaman herhangi her $g \in G$ için $\chi\lambda(g) = \chi(g)\lambda(g)$ şartını sağlayan $\chi\lambda$ Ifadesi de G nin bir karakteridir.

İSPAT : Farzedelim χ, bir $\rho : G \rightarrow GL(V)$ temsilinin karakteri olsun ve buna bağlı olarak $g \in G$ olmak üzere ;

$$(\lambda\rho)(g) = \lambda(g)\rho(g) \tag{2.5.66}$$

ifadesiyle tanımlanan bir $\lambda\rho$ tasviri alalım. λ ve ρ homomorfizm olduklarından dolayı $\lambda\rho$ ifadesi de homomorfizmdir. Diğer bir deyişle G nin bir temsilidir. Ayrıca $\lambda\rho(g)$ nin temsil ettiği matrisin izi ;

$$\begin{aligned} iz(\lambda\rho(g)) &= iz(\lambda(g)\rho(g)) \\ &= \lambda(g) iz(\rho(g)) \end{aligned} \tag{2.5.67}$$

ifadesine eşittir ki, bu da $\lambda(g)\chi(g) = \chi\lambda(g)$ ifadesini verir. O halde $\chi\lambda$ da G nin bir karakteridir.

Her $g \in G$ için $\lambda(g)$ kompleks sayısı birin köklerinden biri olduğundan dolayı $\lambda(g)\overline{\lambda(g)} = 1$ dir. Bundan dolayı ;

$$\begin{aligned} \langle \chi\lambda, \chi\lambda \rangle &= \sum_{g \in G} \chi\lambda(g)\overline{\chi\lambda(g)} \\ &= \sum_{g \in G} \chi(g)\lambda(g)\overline{\chi(g)\lambda(g)} \\ &= \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)}\lambda(g)\overline{\lambda(g)} \\ &= \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi(g)} = \langle \chi, \chi \rangle \end{aligned} \tag{2.5.68}$$

elde edilir. Yani eğer χ , G grubunun indirgenemez karakteri ise bu taktirde $\chi\lambda$ karakterinin de G nin indirgenemez karakteri olduğu anlamına gelir.□

Şimdi bir G grubunun karakterlerinin çarpımına daha genel bir anlam vermeye çalışalım. Yani yapmak istediğimiz G nin herhangi iki temsilinin karakterlerinin çarpımını karakter olarak kabul eden G nin yeni bir temsilini oluşturmaktır. Bunun için temsillerin tensör çarpımını kullanacağız.

Not olarak, bir G grubunun herhangi bir temsili bir $\mathbb{C}G$-modülüne karşılık geldiğinden dolayı hesaplamalarımızı $\mathbb{C}G$-modüller üzerinden yapacağız.

ÖNERME 2.5.13 : V ve W karakterleri sırasıyla χ ve ψ olan iki $\mathbb{C}$G- modülü olsun. Bu durumda her $g \in G$ için $\chi\psi\,(g) = \chi(g)\psi(g)$ ifadesiyle tanımlanan $\chi\psi$ çarpımı da $V \otimes W$ nin bir karakteridir.

İSPAT : ÖNERME 2.4.2 den dolayı şekilde λ_i ve μ_j kompleks sayıları için $e_i g = \lambda_i e_i$ ve $f_j g = \mu_j f_j$ $(\forall i = 1,2,...,m, \forall j = 1,2,...,n)$ şartını sağlayan V nin $e_1, e_2,...,e_m$ ve W nin $f_1, f_2,..., f_n$ baz takımları mevcuttur. Bundan dolayı ;

$$\chi(g) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \text{ ve } \psi(g) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \tag{2.5.69}$$

dir. Teorem 2.4.4 ten dolayı her i,j için $(e_i \otimes f_j)$, $V \otimes W$ nin bir bazıdır ve ;

$$g(e_i \otimes f_j) = ge_i \otimes gf_j = \lambda_i \mu_j (e_i \otimes f_j) \tag{2.5.70}$$

olduğundan ;

$$\varphi(g) = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j = \chi(g)\psi(g) \tag{2.5.71}$$

şartı sağlanır . □

Karakteri χ olan bir V $\mathbb{C}$G- modülünün $V \otimes V$ tensör çarpım modülünü göz önüne alalım. ÖNERME 2.5.12 gereğince χ^2 , $V \otimes V$ nin karakteridir. Diğer taraftan ÖNERME 2.4.5 e göre $V \otimes V = S(V \otimes V) \oplus A(V \otimes V)$ olduğundan dolayı, χ_A ve χ_S sırsı ile $S(V \otimes V)$ ve $A(V \otimes V)$ nin karakterleri olmak üzere ;

$$\chi^2 = \chi_A + \chi_S \tag{2.5.72}$$

eşitliği sağlanır.

ÖNERME 2.5.14 : Herhangi bir $g \in G$ için ;

$$\chi_S(g)=\frac{1}{2}\left(\chi^2(g)+\chi\left(g^2\right)\right) \tag{2.5.73}$$

ve

$$\chi_A(g)=\frac{1}{2}\left(\chi^2(g)-\chi\left(g^2\right)\right) \tag{2.5.74}$$

eşitlikleri sağlanır.

İSPAT : ÖNERME 2.4.2 den dolayı $\lambda_i \in \mathbb{C}$ için her $g \in G$ için $e_i g=\lambda_i e_i$ $(1 \le i \le n)$ eşitliğini sağlayan V nin bir $e_1, e_2, \ldots, e_n$ baz takımı oluşturulabilir. Bu taktirde ;

$$g\left(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i\right)=\lambda_i\lambda_j\left(e_i \otimes e_j - e_j \otimes e_i\right) \tag{2.5.75}$$

elde edilir . Buradan da ÖNERME 2.4.5 gereğince ;

$$\chi_A(g)=\sum_{i,j}\lambda_i\lambda_j \tag{2.5.76}$$

sonucuna varılır.

Diğer yandan, $e_i g^2=\lambda_i^2 e_i$ olduğundan dolayı $\chi(g)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ ve $\chi\left(g^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2$ dir. Bu yüzden ;

$$\chi^2(g)=(\chi(g))^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^2+2\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j=\chi\left(g^2\right)+2\chi_A(g) \tag{2.5.77}$$

dir.Böylece ;

$$\chi_A(g)=\frac{1}{2}\left(\chi^2(g)-\chi\left(g^2\right)\right) \tag{2.5.78}$$

şartı sağlanır ve ayrıca $\chi^2=\chi_A+\chi_S$ olduğundan dolayı ;

$$\chi_S(g)=\chi^2(g)-\chi_A(g)=\frac{1}{2}\left(\chi^2(g)+\chi\left(g^2\right)\right) \tag{2.5.79}$$

elde edilir. □

Şimdi de Bir G grubunun V vektör uzayına olan H alt grubuna kısıtlanmış temsililini gözönünde bulunduralım ve bu temsilin karakterlerini inceleyelim.

TANIM 2.5.10 : Bir G grubunun V vektör uzayı üzerindeki temsilinin karakterini χ ile gösterelim. χ nin H için aldığı değerler hesaplanarak elde edilen H nın $r_H(\chi)$ karakterine χ karakterinin H ya kısıtlanmış karakteri adı verilir.

Eğer χ bir G grubunun karakteri ise ve $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_r$ de H nın indirgenemez bir karakteri ise, bu durumda TEOREM 2.5.4 ile $d_i=\langle \chi_r,\psi_i\rangle_H=\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi(h)\overline{\psi_i(h)}$ $(1\le i\le r)$olmak üzere ;

$$r_H(\chi)=d_1\psi_1+\ldots+d_r\psi_r \qquad (2.5.80)$$

şartı sağlanır ve her bir ψ_i karakterine $r_H(\chi)$ karakterinin bir doğurayı adı verilir.

ÖNERME 2.5.15 : Bir G grubunun H alt grubunu gözönüne alalım. H nın herhangi bir sıfırdan farklı ψ karakteri için ;

$$\langle r_H(\chi),\psi\rangle_H\neq 0 \qquad (2.5.81)$$

şartını sağlayan G nin bir χ karakteri mevcuttur.

İSPAT : G grubunun indirgenemez karakterleri $\chi_1,\chi_2,\ldots,\chi_k$ olsun.

ÖNERME 2.5.7 ve ÖNERME 2.5.8 den dolayı G nin χ_{reg} regüler karakteri ;

$$\chi_{reg}(g)=\begin{cases}|G| & ,g=1\\ 0 & ,g\neq 1\end{cases} \qquad \text{ve} \qquad \chi_{reg}=\sum_{i=1}^{k}\chi_i(1)\chi_i \qquad (2.5.82)$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca;

$$0\neq\frac{|G|}{|H|}\psi(1)=\langle r_H(\chi),\psi\rangle_H=\sum_{i=1}^{k}\chi_i(1)\langle r_H(\chi),\psi\rangle_H \qquad (2.5.83)$$

olduğundan dolayı $\langle r_H(\chi),\psi\rangle_H\neq 0$ şartı sağlanır.□

ÖNERME 2.5.16 : Herhangi bir G grubunun indirgenemez karakteri χ olsun ve G nin H alt grubunun indirgenemz karakterleri ise $\psi_1,\psi_2,...,\psi_r$ olsun. Bu durumda $r_H(\chi)=d_1\psi_1+...+d_r\psi_r$ eşitliğindeki $d_1,d_2,...,d_r$ katsayıları için ;

$$\sum_{i=1}^{r} d_i^2 \leq |G:H| \tag{2.5.84}$$

şartı sağlanır. Bundan ziyade eğer her $g\in G$ için $\chi(g)=0$ olması için gerek ve yeter koşul $\sum_{i=1}^{r} d_i^2 = |G:H|$ şartının sağlanmasıdır.

İSPAT : TEOREM 2.5.4 ten dolayı ;

$$\langle r_H(\chi), r_H(\chi)\rangle_H = \frac{1}{|H|}\sum_{h\in H}\chi(h)\overline{\chi(h)} = \sum_{i=1}^{r} d_i^2 \tag{2.5.85}$$

dır. Ayrıca χ indirgenemez olduğundan dolayı ;

$$\begin{aligned} 1=\langle \chi,\chi\rangle_G &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\chi(g)} \\ &= \frac{1}{|G|}\sum_{h\in H}\chi(h)\overline{\chi(h)} + \frac{1}{|G|}\sum_{g\notin H}\chi(g)\overline{\chi(g)} \\ &= \frac{|H|}{|G|}\sum_{i=1}^{r} d_i^2 + \frac{1}{|G|}\sum_{g\notin H}\chi(g)\overline{\chi(g)} \end{aligned} \tag{2.5.86}$$

dir. Burada $\frac{1}{|G|}\sum_{g\notin H}\chi(g)\overline{\chi(g)}$ ifadesi sıfırdan büyüktür ve $K = 0$ olabilmesi için gerek ve yeter şart $g\notin H$ şartını sağlayan $g\in G$ elemanları için $\chi(g)=0$ olmasıdır. □

ÖNERME 2.5.17 : Eğer $H\lhd G$ ise ve χ da G nin indirgenemez karakteri ise o zaman $r_H(\chi)$ karakterinin tüm doğurayları aynı derecedendir.

İSPAT : Karakteri χ olan bir v $\mathbb{C}G$-modülünü gözönüne alalım. U da V nin H alt grubuna indirgenmiş $\mathbb{C}G$-modülünün bir alt modülü olsun ve her $g\in G$ için

$$gU = \{gu : u\in U\} \tag{2.5.87}$$

kümesi tanımlayalım. Bu küme V nin bir alt uzayıdır. Ayrıca , $H \lhd G$ olduğundan her $h \in H$ elemanı için $ghg^{-1} \in H$ şartı sağlanır. Dolayısı ile her $u \in U$ için;

$$h(gu) = g(g^{-1}hg)u \in gU \tag{2.5.88}$$

dur. Böylece gU , V nin H ye kısıtlanmış $\mathbb{C}H$-alt modülüdür. Bunun dışında eğer W , gU nun bir $\mathbb{C}H$-alt modülü ise bu durumda $g^{-1}W$ de U nun bir $\mathbb{C}H$-alt modülüdür. Fakat U indirgenemez olduğundan dolayı $g^{-1}W=\{0\}$ veya $g^{-1}W = U$ dur. Diğer bir ifadeyle $W=\{0\}$ veya $W=gU$ dur. Bundan dolayı gU indirgenemez $\mathbb{C}H$-modülüdür. Eğer $u \in U$ Olmak üzere $u \to gu$ tasvirini gözönüne alırsak,bu tasvir U dan gU ya giden tersinir bir lineer transformasyondur. O halde $\dim U = \dim gU$ elde edilir.

Bütün gU ($g \in G$) alt uzaylarının toplamı V nin bir $\mathbb{C}G$-alt modülüdür. Dolayısıyla V indirgenemez olduğundan ;

$$V = \sum_{g \in G} gU \tag{2.5.89}$$

eşitliği sağlanır. Fakat V gU lerden bazılarının direkt toplamına eşit olduğundan, V nin boyutları eşit olan $\mathbb{C}H$-modüllerinin toplamı biçiminde yazılaildiği görülür. Dolayısıyla $r_H(\chi)$ de H nın dereceleri birbirine eşit olan indirgenemez karakterlerin toplamı olarak yazılabilir.□

Eğer H Grubu, bir G grubunun içinde indeksi 2 olan normal alt grubu ise bu durumda G grubundan faydalanılarak H ile ilgili çeşitli bilgilere ulaşılabilir. Bunu kısım 2.6 da karakter tabloları konusunda irdeleyeceğiz. O halde $(G:H)=2$ olması durumunda elde edilen sonuçlara değinelim.

H bir G grubunun içinde indeksi iki olan bir alt grubu olsun bu durumda ;

(1) Bazı $g \notin H$ şartını sağlayan elemanlar için, G nin her $\chi(g) \neq 0$ olacak şekildeki indirgenemez χ karakteri H nin indirgenemez karakterine kısıtlanabilir. G nin bu karakterleri H ye daraltılışları birbirine eşit olan, χ ve $\lambda\chi$ ikilisi tarafından meydaa gelir.

(2) Eğer G nin χ gibi indirgenemez bir karakteri H dışındaki heryerde sıfır ise bu durumda χ karakteri, H nin, dereceleri eşit iki ayrık indirgenemez karakterine daraltılabilir. H nın χ aracılığıyla elde ettiğimiz bu ii karakteri G nin aşka ir indirgenemez karakterinden meydana gelir.

(3) H nin her indirgenemez karakteri (1) ve (2) deki G nin karakterlerinin kısıtlanması ile meydana gelir.

2.6 KARAKTER TABLOLARI

Bilindiği gibi bir tamsilin karakteri G sonlu grubunun elemanlarını $\mathbb{C}$ kompleks sayılarına götüren sınıf fonksiyonu olmakla beraber, indirgenemez karakterler sınıf fonksiyonları tarafından inşa edilen vektör uzayının bir bazını oluşturur. Diğer yandan sözkonusu vektör uzayının boyutunun, G nin eşlenik sınıflarının sayısına eşit olduğunu ve sınıf fonksiyonlarının eynı eşlenik sınıfındaki iki elemana karşılık aynı değeri aldıklarını biliyoruz.. Bu bilgilerimizden faydalanarak indirgenemez karakterlerin her bir eşlenik sınıfında aldıkları değerleri bir kare matris ile gösterebiliriz. Bu kare matrise karakter tablosu adı vareceğiz. Karakter tablolarının her bir satırında belli bir indirgenemez karakterin aldığı değerleri gözönüne aldığımızda Karakter tablolarının önemli bir yönü çalıştığımız grup ile ilgili önemli bilgiler vermesidir.

TANIM 2.6.1: Kabul edelim ki $\chi_1,\chi_2,...\chi_k$ bir G grubunun indirgenemez karakterleri olsun ve G nin eşlenik sınıflarının temsilcilerini de $g_1,g_2,...,g_k$ ile gösterelim. Her $1\leq i\leq k$ ve her $1\leq j\leq k$ için i inci satır ve j inci sütunu $\chi_i(g_j)$ olan matrise G nin karakter tablosu adı verilir.

Karakterler lineer bağımsız oldunlarından dolayı karakter tablosunun satırları da lineer bağımsızdır. Dolayısıyla karakter tablosu tersinir bir matristir.

2.6.1 ORTOGONALLİK BAĞINTILARI :

Teorem 2.4.2 nin bir sonucu olarak tamamen izomorfik olmayan $V_1,V_2,...,V_k$ indirgenemez $\mathbb{C}G$-modülleri için χ_i, bir V_i $(1 \le i \le k)$ $\mathbb{C}G$-modülünün indirgenemez karakterini göstermek üzere ve δ_{ij} kronecker delta fonksiyonunu göstermek üzere ;

$$\langle \chi_i, \chi_j \rangle = \delta_{ij} \tag{2.6.1}$$

bağıntısı gerçeklenir. Bu eşitlikten faydalanarak karakter tablosu ile kronecker delta fonksiyonu arasında bir ilişki kurmaya çalışacağız.

TEOREM 2.6.1 : Farzedelim, $\chi_1,\chi_2,...\chi_k$ bir G grubunun indirgenemez karakterleri olsun ve G grubunun eşlenik sınıflarının her bir temsilcisi $g_1,g_2,...,g_k$ ile gösterilsin. Bu durumda $r,s \in \{1,2,...,k\}$ için aşağıdaki bağıntılar gerçeklenir.

i) Satır ortogonallik bağıntıları :

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs} . \tag{2.6.2}$$

ii) Sütun ortogonallik bağıntıları :

$$\sum_{i=1}^{k} \chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)} = \delta_{rs}|C_G(g_r)| . \tag{2.6.3}$$

İSPAT :

i) ÖNERME 2.4.4 (ii) den dolayı;

$$\langle \chi_r, \chi_s \rangle = \sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} \tag{2.6.4}$$

olduğundan ve (2.6.1) den dolayı;

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\chi_r(g_i)\overline{\chi_s(g_i)}}{|C_G(g_i)|} = \delta_{rs} \tag{2.6.5}$$

olduğu görülebilir.

ii) $\psi_s(g_r)=\delta_{rs}$ $(1\leq r\leq k\ ,\ 1\leq s\leq k)$ ifadesini sağlayan bir ψ_s sınıf fonksiyonunu ele alalım. $\chi_1,\chi_2,...\chi_k$ sınıf fonksiyonlarının vektör uzayı için baz olduğundan $\psi_s=\lambda_1\chi_1+\lambda_2\chi_2+...+\lambda_k\chi_k$ şeklinde ifade edilir. Dolayısıyla ;

$$\lambda_i=\langle\psi_s,\chi_i\rangle=\frac{1}{|G|}\sum\psi_s(g)\overline{\chi_i(g)} \tag{2.6.6}$$

dir. Eğer g , g_s nin eşleniği ise , $\psi_s(g)=1$ ve diğer durumlarda $\psi_s(g)=0$ olduğundan ve G nin g_s ile eşlenik olan eleman sayısı $\frac{|G|}{|C_G(g_s)|}$ olduğundan dolayı;

$$\lambda_i=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in g_s^G}\psi_s(g)\overline{\chi_i(g)}=\frac{\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_G(g_s)|} \tag{2.6.7}$$

olur. Buradan da ;

(2.6.8)

$$\delta_{rs}=\psi_s(g_r)=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\chi_i(g_r)=\sum\frac{\chi_i(g_r)\overline{\chi_i(g_s)}}{|C_G(g_s)|} \tag{2.6.9}$$

bulunur.

2.6.2 BAZI ÖNEMLİ GRUPLARIN KARAKTER TABLOLARI :

I S_5 Grubunun Karakter Tablosu

SONUÇ 2.4.1 ve Teorem 2.4.1 den yararlanılarak S_5 in eşlenik sınıflarını , her bir eşlenik sınıfının eleman sayısını ve merkezcil grubun eleman sayısını gösteren tablo aşağıdaki gibidir;

Tablo (2.1) : S_5 in eşlenik sınıfları

Temsilci	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)	(123)(45)	(12345)
$\lvert g^G \rvert$	1	10	20	15	30	20	24
$\lvert C_G(g) \rvert$	120	12	6	8	4	6	5

S_5 in türetilmiş alt grubu $S'_5 = A_5$ tir (çünkü her S_n grubu için $S'_n = A_n$ dir) . $S_n / A_n = \{A_n, A_n(12)\} \cong C_2$ olduğundan dolayı S_n in S_n / A_n tarafından yükseltgenen χ_1 ve χ_2 indirgenemez karakterlerine sahiptir. Bu karakterler ;

$$\chi_1 = 1_G$$

ve

$$\chi_2(g) = \begin{cases} 1 & , g \in A_n \; ise \\ 0 & , g \notin A_n \; ise \end{cases},$$

indirgenemez karakterleridir.

Herhangi bir $g \in S_5$ için ;

$$\chi_3(g) = |fixg| - 1$$

ifadesi ile tanımlanan $\chi_3 : S_5 \to \mathbb{C}$ tasviri de S_5 in bir karakterini oluşturur. Buna göre ;

$$\langle \chi_3, \chi_3 \rangle = \frac{4^2}{120} + \frac{2^2}{12} + \frac{1}{6} + \frac{(-1)^2}{6} + \frac{(-1)^2}{5} = 1$$

şartı sağlandığından dolayı χ_3 karakteri S_5 grubunun diğer bir karakteridir. Ayrıca ÖNERME 2.5.12 den dolayı ;

$$\chi_4 = \chi_3 \chi_2$$

de S_5 grubunun dördüncü indirgenemez karakteridir.

S_5 in beşinci ve altıncı indirgenemez karakterlerni tensör çarpımından faydalanarak elde edeceğiz. Bunun için $\chi = \chi_3$ olmak üzere ÖNERME 2.5.14 aracılığı ile, χ_A ve χ_S karakterlerinin değer tablosunu oluşturalım.

Tablo (2.2) : χ_A ve χ_S karakterlerinin değer tablosu

g_i	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)	(123)(45)	(12345)
$\lvert C_G(g_i)\rvert$	120	12	6	8	4	6	5
χ_A	6	0	0	-2	0	0	1
χ_S	10	4	1	2	0	1	0

Buna göre ;

$$\langle \chi_A, \chi_A \rangle = \frac{36}{120} + \frac{4}{8} + \frac{1}{5} = 1$$

olduğundan dolayı $\chi_5 = \chi_A$, S_5 in indirgenemez karakteridir .

χ_S karakteri için ;

$$\langle \chi_S, \chi_1 \rangle = \frac{10}{120} + \frac{4}{12} + \frac{1}{6} + \frac{2}{8} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\langle \chi_S, \chi_3 \rangle = \frac{40}{120} + \frac{16}{12} + \frac{1}{6} + \frac{4}{8} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\langle \chi_S, \chi_S \rangle = \frac{100}{120} + \frac{16}{12} + \frac{1}{6} + \frac{4}{8} + \frac{1}{6} = 3$$

olduğundan dolayı ψ S_5 in indirgenemez karakteri olmak üzere ;

$$\chi_S = \chi_1 + \chi_3 + \psi$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla S_5 in altıncı indirgenemez karakteri ;

$$\chi_6 = \psi = \chi_S - \chi_1 - \chi_3$$

olarak bulunur.

S_5 in son indirgenemez karakteri ise ;

$$\chi_7 = \chi_6 \chi_2$$

ifadesiyle elde edilir. Buna göre S_5 in karakter tablosu şu şekildedir .

Tablo (2.3) S_5 in karakter tablosu

g_i	1	(12)	(123)	(12)(34)	(1234)	(123)(45)	(12345)
$C_g(g_i)$	120	12	6	8	4	6	5
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	-1	1	1	-1	-1	-1
χ_3	4	2	1	0	0	-1	-1
χ_4	4	-2	1	0	0	1	-1
χ_5	6	0	0	-1	0	0	1
χ_6	5	1	-1	1	-1	1	0
χ_7	5	-1	-1	1	1	-1	0

I A_5 Grubunun Karakter Tablosu

İyi bilindiği gibi A_5 grubu S_5 in ideksi 2 olan bir alt grubudur. ÖNERME 2.5.3 ile A_5 in eşlenik sınıflarının birer temsilcisi 1 , (123), (12)(34), (12345), ve (13452) dir. Buna göre her bir temsilci için, eşlenik sınıfının boyutunu ve merkezcil alt gruun mmertebesini gösteren tablo şu şekilde gösterilmiştir;

Tablo (2.4) : A_5 grubunun temsilcileri

Temsilci	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(123452)
$\|g^G\|$	1	20	15	12	12
$\|C_G(g)\|$	60	3	4	5	5

S_5 grubunun karakter tablosundaki $\chi_1,,\chi_3$ ve χ_6 karakterleri H nin elemanlarından farklı, her eleman için sıfırdan fatklıdır. Bu yüzden $r_{A_5}(\chi_1), r_{A_5}(\chi_3), r_{A_5}(\chi_6)$ karakterleri H nin indirgenemez karakterleridir. Bu karakterleri ψ_1,ψ_2,ψ_3 ile gösterelim. S_5 grubunun χ_5 karakteri ise H nin elemanlarından farklı her eleman için sıfır değerini alır. Bu yüzden de ψ_4 ve ψ_5 A_5 in iki ayrı indirgenemez karakterini göstermek üzere $r_{A_5}(\chi_5) = \psi_4 + \psi_5$ tir. Satır ve sütun ortogonallik bağıntıları ile ψ_4 ve ψ_5 değerleri hesaplandıktan sonra A_5 grubunun karakter tablosu ;

Tablo (2.4) : A_5 grubunun karakter tablosu

g^G	1	(123)	(12)(34)	(12345)	(12345)
$\lvert g^G \rvert$	1	20	15	12	12
$\lvert C_G(g) \rvert$	60	3	4	5	5
ψ_1	1	1	1	1	1
ψ_2	4	1	0	-1	-1
ψ_3	5	-1	1	0	0
ψ_4	3	0	-1	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$
ψ_5	3	0	-1	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

olarak elde edilir.

BÖLÜM 3: ARTİN L FONKSİYONLARI

Bu Bölümde, K bir sayı cismi olmak üzere K ye bağlı $\mathbf{G}_K$ mutlak Galois grubunun sonlu boyutlu kompleks temsillerini ve u temsillere ağlı Artin L-fonksiyonu adını verdiğimiz kompleks değişkenli tasvirini inceleyeceğiz.

3.1 $\mathbf{G}_K$ GRUBUNUN TEMSİL TEORİSİ

Birinci bölümde görüldüğü üzere $\mathbf{G}_K$ grubu kompatkt ve tümüyle bağlantısız olan topolojik gruptur. Dolayısıyla Peter-Weyl teoremine göre $\mathbf{G}_K$ topolojik grubunun sonlu temsillerini incelememiz yeterlidir.

K sayı cisminin mutlak Galois grubu $\mathbf{G}_K$ nın herhangi bir ;

$$\rho : \mathbf{G}_K \to GL(V)$$

temsilini alalım. Burada $GL(V)$ grubu üzerinde diskrit topoloji olduğunu kabul edelim. Bu durumda eğer $im(\rho)$, $GL(V)$ içinde sonlu bir alt grup ise $\rho : G_K \to GL(V)$ sürekli tasvir olacaktır. Dolayısı ile izomorfizma teoreminden ve sonsuz boyutlu Galois kuramı neticesinde ;

$$\begin{tikzcd} G_K \arrow[rr] \arrow[dr] & & GL(V) \\ & G_K / Ker(\rho) \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad (3.1.1)$$

Diyagramı komütatif bir üçgendir.

Burada $Ker(\rho)$, G_K topolojik grubunun açık (dolayısı ile kapalı) normal bir alt gubudur. Sonuç olarak öyle bir E/K sonlu Galois genişlemesi vardır ki

$$Ker(\rho) \cong Gal(\overline{K}/E) \quad \text{ve} \quad G_K / Ker(\rho) \cong im(\rho) \qquad (3.1.2)$$

olur. Yani ;

$$Gal(E/K) \xrightarrow{\cong} G_K / Ker(\rho) \xrightarrow{\tilde{\rho}} GL(V) \qquad (3.1.3)$$

sonlu E/K Galois genişlemesine karşılık gelen $Gal(E/K)$ grubunun sonlu boyutlu kompleks temsilidir.

Tersine, K sayı cisminin sonlu bir Galois genişlemesi E ve bu genişlemeye tekaül eden $Gal(E/K)$ grubunu ele alalım ve bu grubun herhangi bir ;

$$\tilde{\rho}:Gal(E/K) \rightarrow GL(V) \tag{3.1.4}$$

temsili için ;

$$\rho:G_K \xrightarrow{resE} Gal(E/K) \xrightarrow{\tilde{\rho}} GL(V) \tag{3.1.5}$$

kompozisyonu K nın mutlak Galois grubu G_K nın sürekli bir tasvirini verir. Çünkü $im(\rho)$, $GL(V)$ içinde sonlu bir alt gruptur.

Sonuç olarak K sayı cisminin G_K mutlak Galois grubunun $\mathbb{C}$ üzerinde sürekli temsillerini incelemek ile K nın sonlu Galois genişlemesine karşılık gelen grubun (ki bu sonlu bir gruptur ve mertebesi genişleme derecesine eşittir) $\mathbb{C}$ üzerindeki temsillerini incelemek birbirlerine denk teorilerdir.

NOT : Pontrjagin dualite teoremi yerel olarak kompakt abelyen topolojik bir G grubu ile $\hat{G} = Hom(G,\mathbf{T})$ grubu arasında, $\hat{\hat{G}} \cong G$ izomorfizmasının varlığını söyler.

Burada $\mathbf{T} = \{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1 \}$ kümesi, çarpma işlemi altında tarif edilmiş olan kompleks birim çember grubudur.

Öyleyse G grubunun indirgenemez sürekli temsilleri, G yi tamamen betimler.

Pntrjagin dualite teoreminin abelyen olmayan topolojik gruplara genellemesi de vardır. Şöyle ki; Herhangi bir G kompakt topolojik grup olmak üzere $\prod(G)$ ile G nin üniter dualini (yani $\mathbb{C}$ üzerindeki indirgenemez üniter temsillerinin kümesi) gösterelim. Bu durumda Tannaka dualite teoremi G grubunun $\prod(G)$ tarafından etimlendiğini söyler.

Sonuç olarak K sayı cisminin mutlak Galois grubunun kompakt topolojik bir grup olduğu gözönüne alınırsa, Tannaka dualite teoremi sonucu G_K nın $\mathbb{C}$ üzerinde indirgenemez sürekli temsiler tarafından betimlendiğini görürüz. □

3.2 ARTİN L-FONKLİYONLARININ İNŞASI

Sayı cismi K için, O_K ile tamsayılar halkasını gösterelim. Diğer bir ifadeyle O_K, K de bulunan cebirsel tamsayılar halkasıdır. K de bulunan Hensel asallarını $\mathbf{h}_K$ ile, K de bulunan Arşimet asallarını ise $\mathbf{a}_K$ ile gösterelim. K_p ise $p \in \mathbf{h}_K \cup \mathbf{a}_K$ için K sayı cisminin p-adik tümleyeni olsun. O zaman $p \in \mathbf{a}_K$ olması durumunda eğer $p: K \hookrightarrow \mathbb{C}$ gömmesi K sayı cismini $\mathbb{R}$ içine gönderirse $K_p \cong \mathbb{R}$ dir. Eğer $p: K \hookrightarrow \mathbb{C}$ gömmesi, $\exists \alpha \in K$ öyle ki $p(\alpha) \notin \mathbb{R}$ şartını sağlıyorsa $K_p \cong \mathbb{C}$ dir. $p \in \mathbf{h}_K$ olması durumunda ise K_p henselyen lokal cisim olur.

$p \in \mathbf{h}_K \cup \mathbf{a}_K$ için K_p cisminin cebirsel kapanışını $\overline{K}_p$ ile gösterelim.

LEMMA 3.2.1 : $K \subset K_p$ içermesi, doğal olarak $\overline{K} \hookrightarrow \overline{K}_p$ gömmesine genişler.

İSPAT: Herhangi bir $\alpha \in \overline{K}$, K üzerinde cebirsel olduğu için katsayıları K de olan sıfırdan farklı bir $p(T)$ polinomunun köküdür. $K \subset K_p$ içermesi neticesinde $p(T)$ polinomu $K_p[T]$ polinom halkasının elemanı olur. Bunun sonucunda $\alpha \in \overline{K}_p$ elde edilir. □

LEMMA 3. 2. 2 : $\overline{K} \hookrightarrow \overline{K}_p$ gömmesi ;

$$G_{K_p} \hookrightarrow G_K \tag{3.2.1}$$

gömmesini inşa eder. Burada G_{K_p}, K_p cisminin mutlak Galois grubu $Gal(\overline{K}_p / K_p)$ dir.

İSPAT : Herhangi bir $\sigma \in G_{K_p}$ alalım. Bu durumda $G|_{\overline{K}}$, $\overline{K}$ nin bir otomorfizmasıdır. Çünkü σ, K_p yi, dolayısı ile K yı invaryant bırakmaktadır ve $\overline{K}$, K üzerinde Galois genişlemesidir. Ayrıca eğer $\sigma_1, \sigma_2 \in G_{K_p}$ için $\sigma_1|_{\overline{K}} = \sigma_2|_{\overline{K}}$ şartını sağlıyorsa $\sigma_1 = \sigma_2$ olmak zorundadır. Çünkü $\overline{K}$, $\overline{K}_p$ içinde yoğun bir cisimdir ve σ_1, $\sigma_2 : \overline{K}_p \to \overline{K}_p$ otomorfizmaları süreklidir. □

Herhangi bir $\rho : G_K \to GL(V)$, $\mathbb{C}$ üzerinde tarif edilmiş sürekli bir temsili için LEMMA 3.2.2 neticesinde , her $p \in \mathbf{h}_K \cup \mathbf{a}_K$ asalı için ;

$$\rho_p : G_{K_p} \hookrightarrow G_K \xrightarrow{\rho} GL(V) \tag{3.2.2}$$

temsilini alalım. G_K nin (ρ, V) temsiline bağlı olan Artin L-fonksiynu ;

$$L(\cdot, \rho) : \{s \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(s) > 1\} \to \mathbb{C} \tag{3.2.3}$$

aşağıda tanımlayacağımız Euler çarpımı ifdesiyle tanımlanır ;

$$L(s, \rho_p) = \det\left(1 - q_p^{-s} \rho_{p(F_p)}\big|_{V^{I_p}}\right)^{-1}, \ \mathrm{Re}(s) > 1\} \tag{3.2.4}$$

şeklinde tanımlanır.

$p \in \mathbf{a}_K$ ise, p Euler faktörü $L(s, \rho_p)$;

(i) p, reel asal ise ;

$$L(s, \rho_p) = \left(\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\right)^{n_+} \left(\pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)^{n_-} \tag{3.2.5}$$

olur. Burada $K_p \cong \mathbb{R}$, $\overline{K}_p \cong \mathbb{C}$ ve $G_{K_p} = \{1, \varepsilon\}$ öyle ki, $1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ birim tasvir ve $\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ise kompleks eşlenik tasvirdir.

$n_\pm$ ile de $\rho_p(\varepsilon) \in GL(V)$ operatörünün ± 1 özdeğerlerinin sayısı gösterilmektedir.(Dolayısıyla $n_+ + n_- = \dim(\rho) = n$)

(ii) p komples asal ise ;

$$L(s, \rho_p) = \left(2(2\pi)^{-s} \Gamma(s)\right)^n \text{, burada } n = \dim(\rho) \tag{3.2.6}$$

dur.

KAYNAKLAR

Brown J. W. ve CHURCHILL R. V. (2003) Complex Variables and Applications McGraw-Hill Singapur

FARENICK D.R. (2001) Algebras of Linear Trasformations Springer-Verlag, New York

FRALEIGH J.B. (1994) Abstract Algebra Addison-WesleyA.B.D.

GARLING D.J.H (1986) Galois Theory Cambrige University Press, Büyük Britanya

JAMES G. ve LIEBECK M. (1993) Representations and Characters of Groups Cambrige University Press Büyük Britanya

LANG S. (1987) Linear Algebra Springer-Verlag, New York

ÖZGEÇMIŞ

Sevan Bedikyan 1977 yılında İstanbulda doğdu. Lise öğrenimini 1994 yılında Sahakyan Nunyan Ermeni Lisesinde tamamladı. 1996 yılında girdiği M.S.Ü. Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünü 2001 yılında tamamladı. Aynı yıl M.S.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü, yüksek lisans programına kabul edildi.

Sevan Bedikyan, Eylül 2002'de Araştırma görevlisi olarak atanmış olup, halen aynı görevine devam etmektedir.