

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FENBİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK YÜKSEK LİSANS TEZİ

PÒLYA'NIN SAYMA TEOREMİ'NE UYGULAMALAR

İpek AĞGEZ
DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Ahmet BAKKALOĞLU

İSTANBUL- KASIM 2004

ÖNSÖZ

Pölya'nın Sayma Teoremi'ne Uygulamalar adlı tez çalışmamda ele aldığım konunun somut bir getirisinin olması ve başka alanlara (örneğin kimyaya) büyük ölçüde katkı sağlaması, bu konuya daha fazla ilgi duyup, çalışmamı bu konu üzerinde yapmama sebep oldu. Tez çalışmamda yardımlarından dolayı tez danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Ahmet Bakkaloğlu'na teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Tezin yazımını üstlenen ve desteğini esirgemeyen değerli arkadaşım Taner Bahadır'a çok teşekkür ederim. Ayrıca tüm öğrenimim boyunca desteğini esirgemeyen, madden ve manen hep yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İpek Ağgez

İÇİNDEKİLER

ÖZET	I
SUMMARY	III

GİRİŞ	1
--------------------	---

BÖLÜM 1

1.1 ÜRETEÇ FONKSİYONLAR (GENERATING FUNCTIONS)	5
1.2 DENKLİK BAĞINTISI	8
1.3 GRUP AKSİYOMLARI	8

BÖLÜM 2

2.1 DENKLİK VE SİMETRİ GRUPLARI	10
2.2 Teorem	19
2.3 Lemma	20
2.4 BURNSIDE TEOREMİ	20
2.4.1 Teorem (Burnside)	24
2.5 DÖNME İNDEKSİ	31
2.5.1 Teorem	36
2.6 PÓLYA'NIN FORMÜLÜ	38
2.6.1 Teorem (Pólya'nın Sayma Formülü)	41

BÖLÜM 3

3.1 PÓLYA'NIN SAYMA FORMÜLÜ'NÜN KİMYADAKİ UYGULAMALARI... ..	50
3.2 ORGANİK BİLEŞİKLERİN İZOMERLERİNİN SAYISININ HESAPLANMASI VE PERMÜTASYONLARIN BİR GRUBU ÜZERİNDE GENEL KOMBİNATORİK PROBLEM.....	55
SONUÇ VE ÖNERİLER	59
KAYNAKLAR	60
ÖZGEÇMİŞ	61

ÖZET

Pòlya'nın Sayma Formülü, birçok problemi çözmeye etkili olacak önemli bir formüldür. Bir diğer önemli yanı da matematiksel olarak Grup Teori ve Üreteç Fonksiyonlar'ı birleştiren güçlü bir formül olmasıdır.

Birinci bölümde konumuzla bağlantısı olan üreteç fonksiyonlar hakkında bilgi vereceğiz. Ayrıca yine bu bölümde, tezde değinilen denklik bağıntısı ve grup teorisinin matematikte ne ifade ettiğini kısaca anlatacağız. Daha sonra denklik ve simetri gruplarını ifade ederek yönlendirilmiş veya yönlendirilmemiş bir cismin köşelerinin, kenarlarının veya yüzeylerinin m ($m = 1,2,3,\dots$ gibi) farklı renkle boyamalarını inceleyeceğiz ve buna ait birkaç örnek vereceğiz. Yapacağımız hesaplamalar veya formüller bu m renkle birbirine denk olmayan kaç boyamanın olduğuna yöneliktir. Buradaki denklikten kastımız; şekle ait köşelerin (kenarların veya yüzeylerin) şekle uygulanan simetrier [rotasyonlar (dönmeler), yansımalar veya herhangi bir eksen etrafındaki dönmeler] sonucunda yer değiştirdiği köşe ile (kenarla, yüzeyle) aynı renkte olmasıdır. Örneğin bir şekle uygulanan Π_i rotasyonu (dönmesi), şeklin a köşesini b köşesine götürüyorsa, ilk şekille Π_i rotasyonu sonucunda elde edilen şeklin birbirine denk (boyama anlamında) olması için a ile b 'nin (ve birbiri ile yer değişen diğer tüm köşelerin) aynı renkte olması gerekir.

İkinci bölümde Burnside Teoremi ve Pòlya'nın Sayma Formülü'ne ilişkin teorem, ispatı ile birlikte verilmiştir. Burnside Teoremi; şekle uygulanan simetrier sonucunda oluşan, birbirine denk olmayan boyamaların sayısını bulmak için yardımcı olacak bir teoremdir. Burnside Teoremi, bu konudaki basit problemlere çözüm ararken etkilidir. Daha karmaşık şekiller için; örneğin bir küpün köşelerinin boyanması gibi problemler için kullanılması güçlü çıkacağından bu tür karmaşık problemlerde yine bu tezde ele alacağımız Pòlya'nın Formülü'nü kullanacağız. Pòlya'nın Formülü karmaşık problemler için, dönme indeksi (ki bu bir üreteç fonksiyon yapısındadır) yardımıyla denk olmayan boyamaların sayısının bulunmasında oldukça etkili ve sonuca çabuk götüren bir formüldür.

Üçüncü ve son bölümde Pölya'nın Sayma Formülü'nün kimyada izomerlere uygulanışı ele alınmıştır. Ayrıca bu konuda G. Pölya'nın 1935'te yayınladığı makalesine de yer verilmiştir.

SUMMARY

In this paper we examine a special class of counting problems. Consider the ways of coloring the corners (edges or faces) of a oriented and unoriented objects, with m different colors. The difficulty in this problems comes from the geometric symmetries of the figure being colored. We used a special formula, based on this set of symmetries, to count all distinct colorings of a figure. We also obtain a generating function that gives a pattern inventory of the distinct colorings. For example, the pattern inventory of black-white colorings of the corners of a cube with all geometric symmetries allowed is

$$b^8 + b^7w + 3b^6w^2 + 3b^5w^3 + 7b^4w^4 + 3b^3w^5 + 3b^2w^6 + bw^7 + w^8$$

where the coefficient of $b^i w^j$ is the number of nonequivalent coloring with i black corners and j white corners.

In the pattern inventory, the coefficient of, say, b^3w is the number of nonequivalent colorings with three black and one white. This number can be obtained from Burnside's Theorem. In greater generality we have the Pòlya's Enumeration Formula. We will use this formula for more complex problems.

Pòlya's Enumeration Formula is important, practically because it solves important problems and it is an elegant marriage of group theory and generating functions.

GİRİŞ

Pólya'nın Sayma Teoremi'ne Uygulamalar isimli bu çalışmada; Grup Teori ve Üreteç Fonksiyonlar'ı (generating functions) kullanarak yönlendirilmiş veya yönlendirilmemiş bir cismin köşelerinin, kenarlarının veya yüzeylerinin farklı sayıdaki renkle yapılan boyamaları incelenmiş, bu konu ile ilgili teoremler ispatlarıyla verilmiş ve konuyla ilgili uygulamalar, geliştirilerek sunulmuştur.

Cisimlerin köşelerinin, kenarlarının veya yüzeylerinin boyanması ile ilgili George Pólya'nın geliştirdiği sayma formülü, bu konuda kullanılan en etkili ve yaygın bir yöntem olmuştur. Pólya'nın geliştirdiği bu formülün motivasyonu, kimyadaki izomerlerden kaynaklanmaktadır. Yani Pólya'nın bu sayma teoremini geliştirmekteki en büyük amacı, kimyada izomerlerin sayısının bulunması konusunda doğan bir sıkıntıyı ortadan kaldırmaktır. Bu sayede bir bileşiğin belli atomlarının yerine kullanılacak atomların sayısına bağlı olarak kaç izomerin oluşacağı sorusuna cevap bulunmuştur. Bu konudaki en önemli, en etkili ve en uzun makale G. Pólya tarafından 1937'de yayımlanan makaledir¹. Pólya'nın makalesinin ve bunun sonuçlarının, birden çıktığını düşünmek hatalı olur. Aksine Pólya'nın 1937de yazdığı makalesi, önceden beri yapmakta olduğu çalışmaların bir koleksiyonuydu.

Pólya, daha önceki bir makalesinde², Pólya Teoremi'nin özünü üç değişkenli formda, formal olmayan ispatıyla birlikte ele almıştı. Bu makale aynı zamanda izomer numaralandırma alanına da benzerin yerine bir üreteç fonksiyon koyarak girmişti.

Pólya'nın başka bir makalesi de³ izomer numaralandırma ve bunlara karşılık gelen asimptot sonuçlarını ayrıntılı olarak ele alıyordu. Burada, dört köklü ağaç için üreteç fonksiyonların fonksiyonel eşitlikleri ispatıyla sunulmuştu. Bu sonuçlardan bir dizi asimptot formülü türetilmiş ve bu sonuçlar ana makalesine eklenmişti.Örneğin

¹Pólya, G. , “Kombinatorische Anzählbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen”, Acta Math.(68), s.145-254, 1937

²Pólya, G. , “Un problème combinatoire général sur les groupes de permutations et le calcul du nombre des isomères des composés organiques (a general combinatorial problem on groups of permutations and the calculation of the number of isomers of organic compounds)”, Comp. Rend. Acad. Sci. , (201) s.1167-1169, Paris 1935

³ Pólya, G. , “Sur Le Nombre Des Isomères De Certains Composés Chimiques”, Comp. rend. Acad. Sci. , (202) s.1554, Paris 1936

alkoller, benzen ve naftalin türevleri gibi çeşitli kimyasal bileşikler için asimptot formülleri de veren makalesi⁴ de benzer şekildeydi. Daha önce bahsi geçen makalenin aksine bu makale asimptotik sonuçların elde edildiği bir tekrarlı formülün ispatını verir. Bu konudaki üçüncü bir makale⁵ aynı esasları konu alır ancak kimyasal bileşikler de daha geniş bir kapsama sahiptir. Birincil, ikincil ve üçüncül alkoller, eterler ve ketonların yanı sıra antrasen, piren, penantren ve triofan türevleri de göz önüne alınmıştır. Bu makalede Pólya, stereoizomerlerin numaralandırılması meselesine de değinmektedir.

Pólya'nın Teoremi hakkında yazı yazan neredeyse herkesin, uygulamanın bir özetini veya teoremin açıklanmasını içeren bir önsöz yazması bir gelenek haline geldi. Böylece teori hakkındaki ilk dönem yazılardaki teorem açıklaması sayısı neredeyse yayın sayısına eşitti.

1950'lerde, Graf Teori veya Pólya Teoremi'nin ilgilendiği kombinatorik türleri ile ilgili kitaplar neredeyse hiç yoktu. Graf Teori ile ilgili mevcut tek kitap König'e⁶ aitti ve Pólya Teoremi hakkındaki tek açıklamalı bilgi kaynağı Pólya'nın makalesinin kendisiydi. Bu sebeple teori uzun süre Almanca bilmeyen matematikçilerin erişiminden uzak kaldı. Bu durum, 1958 yılında Riordan'ın, birçok başka şeyin yanı sıra Pólya Teoremi'nin kısa bir özetini de içeren, kombinasyon analizleri hakkındaki kitabının yayınlanmasıyla düzeldi. Aynı yıl Berge'nin *Theorie des Graphes* isimli, ekleri arasında Pólya Teoremi'nin J. Riguet tarafından verilen mükemmel bir açıklamasını da içeren kitabı yayınlandı. Böylece teorem hakkındaki bilgiler İngilizce ve Fransızca bilen okuyuculara da ulaştı (Berge'nin kitabı İngilizce'ye dört yıl sonra çevrildi). Yine de pek çok matematikçi Pólya Teoremiyle, her ne kadar çeşitli makalelerde yer almış olsa da, N. De Bruijn'in "Applied Combinatorial Mathematics"⁷ kitabının "Pólya's Theory of Counting" bölümü sayesinde tanışmışlardır.

⁴ Pólya, G. , "Über das Anwachsen der Isomerenzahlen in den homologen Reihe der organischen Chemie". Vierteljschr. Naturforsch. Ges. (81) s.243-258 . Zürich 1936.

⁵ Pólya, G. , " Algebraische Berechnung der Isomeren einiger organischer Verbindungen". Z. Für Krystallogr. (A) (93) s.414, 1936

⁶ König, D. , Theorie der Graphen. Leipzig, 1936. Reprinted by Chelsea Publishing Company, New York, 1950.

⁷ de Bruijn, N. G. , Pólya's theory of counting, Chap. 5 of Applied Combinatorial Mathematics (E. F. Beckenbach, ed.) Wiley, Newyork, 1964.

1960'ların ortaları, hiçbir gerileme göstermeyen Graf Teori ve kombinatorik hakkında yayınların patlamaya başlamasına tanık oldu ve 1960'lardan sonra Pólya Teoremi'ni çeşitli açılardan ele alan yorumlar hızla birbirini izlemeye başladı.

1967'de Harary, kitabının⁸ dördüncü bölümünde Pólya Teoremi'nin bir ispatını sundu ve bir sonraki bölümünde de bazı uygulamalar verdi. Dört yıl sonra "Graph Teori"⁹ adlı kitabının 15. bölümünde Pólya Teoremi'nin bir yorumunu daha verdi ve bunu biraz geliştirdi.

Comtet'in iki ciltlik kombinatorik konulu eseri¹⁰ 1970 yılında çıktı. Pólya Teoremi'nin açıklaması ve ispatı ile birlikte dönme indeksi, Burnside Lemması vb gibi gerekli tüm önkoşulları verdi. Comtet Pólya'nın Teoremi'ni tek bir örnekle açıkladı: bir küpün yüzeylerinin boyanması. Ayrıca aynı yıl, çeşitli yerlerde alıntı yapılan ve belirgin şekilde saygı gördüğü anlaşılan Garsia'nın notları¹¹ yayınlandı.

Bir sonraki dönüm noktası, Pólya Teoremi'nin, pek çok graf ve graf benzeri nesnelerin numaralandırılmasına uygun şekilde kullanılması ve genelleştirilmesi de dahil bu tür kombinasyon tekniklerini geniş ayrıntılarla kapsayan, Harary ve Palmer'in 1973 tarihli graf numaralandırma monografisiydi¹². Bu sırada C. Liu'nun "Introduction to Combinatorial Mathematics"¹³ adlı eseri yayınlanmıştı. Bu kitabın 5. bölümü Pólya'nın sayma teorisini, Burnside Lemması ve bir kolye problemi, bir küpün yüzeylerinin boyanması ve basit kimyasal numaralandırma gibi çeşitli örnekler kullanarak teoremin ispatlanması da dahil olmak üzere ayrıntılı şekilde açıklamıştır. Kitap ayrıca Bruijn'in Pólya Teoremi'ni genelleştirmesini de uygun örneklerle incelemektedir.

1950 ve 1960'larda Pólya Teoremi üzerine çalışmalar çoğunlukla yetkin matematikçiler, üniversite mezunları ve belki birkaç üniversite öğrencisi arasında kalmıştı. Ancak J.H. Redfield'in, Pólya'nın temel tekniğini, Pólya'nın ünlü

⁸ Harary, F. , A proof of Pólya's enumeration theorem. A seminar in graph theory. (F. Harary, ed.) Holt, Rinehart and Winston, s.21-24, Newyork, 1967.

⁹ Harary, F. , Graph Theory. Addison-Wesley Pub. Co. ,1971.

¹⁰ Comtet, L. , Analyse Combinatoire v. 2. Press Universitaires de France 1970.

¹¹ Garsia, A. , A presentation of the enumeration theory of Pólya and de Bruijn. Analysis Seminar Notes. Univ. of California, San Diego, 1971.

¹² Harary, F. , Palmer, E. M. , Graphical Enumeration. Academic Press, 1973.

¹³ Liu, C. L. , Introduction to Combinatorial Mathematics. McGraw-Hill, Newyork, 1968.

makalesinin yayımından 10 yıl önce yayımladığı makalesinde¹⁴ verdiği 1960'lı yıllarda anlaşıldı.

1970'lerde teoriye olan ilgi oldukça alt seviyelere indiğinden üniversite öğrencilerine daha uygun açıklamalar ortaya çıktı. Bunlardan ikisinden bahsedilebilir. 1972 yılında üniversite öğretmenleri için verilen bir seminerin sonucu olan ve Liu'nun bir diğer kitabı olan "Topics in Combinatorial Mathematics"¹⁵, Pólya ve Bruijin teoremlerini birlikte ve kolay anlaşılır birkaç örnekle açıklamıştır. Burada her iki teorem de ispatlanmaz. Pólya numaralandırmasıyla ilgili çalışmasında Alan Tucker çekinmeden tüm kanıtları çıkarmış öğrencilerin bir teoremi kullanmak için kanıtını bilmelerine gerek olmadığına işaret etmektedir. Bunun yerine okuyucuyu yavaşça basit bir kolye problemine (dört boncuk, iki renk) yönlendirerek okuyucu Burnside Lemması'nı değerlendirmeye hazır hale gelene kadar simetri kavramı üzerinde durur. Buradan dönme indeksine ve oradan da kolay adımlarla Pólya Teoremi'nin açıklanmasına gider.

Bu noktada Pólya Teoremi bilindik bir kombinasyon metodu haline gelmiş ve kullanıldığında açıklanması gerekliliği ortadan kalkmıştır. Buna rağmen teoremin açıklamaları, artık takip etmenin imkansız hale geleceği kadar büyük bir hızla artmaya devam etmiştir.

¹⁴ Redfield, J.H., "The Theory of Group-Reduced Distributions", American Journal of Mathematics, 49, s.433-455, 1927.

¹⁵ Liu, C. L. , Topics in Combinatorial Mathematics. MAA ,1972.

BÖLÜM 1

1.1 ÜRETEÇ FONKSİYONLAR (GENERATING FUNCTIONS)

Üreteç fonksiyonlar (generating functions)¹⁶, soyut problem çözme teknikleridir. Özel koşullar altında seçme ve sıralama problemleri ve diğer kombinatorik problemlerinin çözümlerinde kullanılır. Ayrıca üreteç fonksiyonlar, kombinatorik problemlerini modellemede de kullanılır.

a_r , belli bir prosedüre göre, r tane objenin farklı şekilde seçilme sayısı olsun. Eğer g_x 'in aşağıdaki gibi bir polinom açılımı var ise g_x , a_r için bir üreteç fonksiyondur:

$$g_x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_r x^r + \dots + a_n x^n$$

Eğer yukarıdaki fonksiyonun sonsuz terimi varsa bu fonksiyona kuvvet serisi denir.

$g_x = (1+x)^n$, $a_r = C(n,r)$ için bir üreteç fonksiyondur. $C(n,r)$, n tane objeden r tane objenin seçilebilme sayısıdır.

$(1+x)^n$ 'nin açılımını elde etmek için önce $(a+x)^3$ çarpımını göz önüne alalım:

$$(a+x)(a+x)(a+x) = aaa + aax + axa + axx + xaa + xax + xxa + xxx$$

$a = 1$ olduğunda ise;

$$(1+x)(1+x)(1+x) = 111 + 11x + 1x1 + 1xx + x11 + x1x + xx1 + xxx \quad (1.1)$$

elde edilir. Bu çarpım; birinci çarpandaki bir terimin, ikinci çarpandaki ve üçüncü çarpandaki bir terimle çarpımının tüm farklı yollarının listesini verir. x^r 'nin $(1+x)^3$ ifadesindeki katsayısının veya daha genel olarak $(1+x)^n$ ifadesindeki katsayısının

¹⁶ Grimaldi, R.P., Discrete and Combinatorial Mathematics, s.387-407, New York 1994.

belirlenmesi problemi, içinde r tane x ve $(n-r)$ tane 1 bulunan tüm çarpımların sayısının belirlenmesi problemine indirgenir. x^r 'nin $(1+x)^3$ 'deki katsayısı $C(3,r)$ olup $(1+x)^n$ 'deki katsayısı ise $C(n,r)$ 'dir.

Polinom şeklindeki çarpanların çarpımına, bir terimin tüm polinom çarpanlarla çarpılmasıyla oluşan tüm çarpımların koleksiyonunun ürünü şeklinde bakmak çok önemlidir. Eğer i . polinom çarpan r_i tane farklı terim içerirse ve n tane çarpan var ise; $r_1 \times r_2 \times r_3 \times \dots \times r_n$ farklı çarpım oluşur. Örneğin, $(1+x)^n$ açılımında 2^n tane terim gelir.

$(1+x+x^2)^4$ 'ün açılımındaki çarpanlar kümesinin tüm terimleri aşağıdaki çarpımdan gelir:

$$\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \right\} \quad (1.2)$$

Burada 1 veya x veya x^2 'den oluşan çarpımlar vardır. Örneğin, x^1x^2x gibi.

Bu bölümde, öncelikle x 'in kuvvetlerinden oluşan ve katsayısı 1 olan polinomal çarpanların katlılığı ile ilgileneceğiz. Burada söz konusu çarpanlar $(1+x+x^2+x^3)$ veya $(1+x^2+x^4+x^6+\dots)$ şeklindedir. Bu çarpanlar x 'lerin farklı üslerinin oluşturduğu kümeler olarak tanımlanır. Ayrıca $x^0=1$ olduğunu hatırlarsak (1.1) denklemini:

$$\begin{aligned} (x^0+x^1) \cdot (x^0+x^1) \cdot (x^0+x^1) &= x^0x^0x^0 + x^0x^0x^1 + x^0x^1x^0 + x^0x^1x^1 + x^1x^0x^0 + x^1x^0x^1 \\ &\quad + x^1x^1x^0 + x^1x^1x^1 \end{aligned}$$

şeklinde yazarız. Ayrıca (1.2)'deki çarpanları da:

$$\left\{ \begin{matrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{matrix} \right\} \cdot \left\{ \begin{matrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \end{matrix} \right\} \quad \text{veya} \quad x^{e_1} x^{e_2} x^{e_3} x^{e_4} \quad 0 \leq e_i \leq 2 \quad (1.3)$$

şeklinde yazarız.

Birçok polinom çarpanın çarpımında ortaya çıkan x^r 'lerin katsayılarının belirlenmesi problemi, kuvvetler anlamında tekrar ifade edilecektir. Örneğin, $(1+x+x^2)^4$ 'ün açılımında ortaya çıkan x^5 'in katsayısını düşünelim. Bu katsayı (1.3)'den elde edilen, üsleri toplamı 5 olan $x^2x^0x^2x^1$ şeklindeki çarpımların sayısıdır. $(1+x+x^2)^4$ 'ün açılımındaki x^5 'in katsayısının bulunması problemi:

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = 5 \quad 0 \leq e_i \leq 2$$

denkleminin farklı tamsayı çözümlerinin sayısı problemi şeklinde modellenecektir. Burada e_i değişkeni (1.3)'deki çarpımın i . terimindeki kuvveti göstermektedir. Yukarıdaki denklemin tamsayı çözümlerinin sayısının bulunması problemi, 4 tane obje içinden 5 tane objeyi (bir çeşitten en fazla 2 tane seçme koşuluyla) seçme problemine denktir. Aynı zamanda bu problem, 5 özdeş objenin 4 farklı kutuya, bir kutuda en fazla 2 obje bulunmak koşuluyla kaç farklı şekilde dağıtılabileceği problemine de denktir.

Daha genel olarak, $(1+x+x^2)^4$ 'ün açılımında x^r 'nin katsayısı:

$$e_1 + e_2 + e_3 + e_4 = r \quad 0 \leq e_i \leq 2$$

denkleminin tamsayı çözümlerinin sayısı kadardır veya 4 çeşit obje içinden r tane objenin, bir çeşitten en fazla 2 tane seçmek koşuluyla, kaç farklı şekilde seçilebileceği (veya r tane özdeş objenin 4 kutuya, bir kutuda en fazla 2 tane obje olmak koşuluyla kaç farklı şekilde dağıtılabileceği) problemine denktir. O halde $(1+x+x^2)^4$, a_r için bir üreteç fonksiyondur. a_r : 4 farklı cins obje içerisinden r

tane objenin, bir çeşitten en fazla 2 tane bulunması koşuluyla, kaç farklı şekilde seçilebileceğidir.

Bu seviyede sayma problemleri için üreteç fonksiyonları nasıl oluşturacağımızla ilgileneceğiz.

1.2 DENKLİK BAĞINTISI

Herhangi bir kümeye ait a ve b elemanlarının denkliklerinin tanımını yapalım. Bu denkliği $a \sim b$ şeklinde yazacağız. Bir denklik bağıntısının esas özellikleri:

- (i) Geçişkenlik: $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$
- (ii) Yansıma: $a \sim a$
- (iii) Simetri: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

Denkliğin diğer tüm özellikleri bu üçünden çıkarılabilir. Bu üç özelliği sağlayan herhangi ikili bağıntı **denklik bağıntısı** olarak adlandırılır. Böyle bir bağıntı, bir kümeyi **denklik sınıflarına** ayırır. Bir kümenin denklik sınıflarına ayrılışına **parçalanış** denir. Bir parçalanış içinde denk elemanlar vardır.

Örnek 1.1:

(a) İnsanların oluşturduğu bir küme için aynı ağırlığa sahip olmak bir denklik bağıntısıdır; aynı ağırlıkta olan insanlar bir denklik sınıfı oluştururlar.

(b) Sayıların bir kümesi için iki sayının farkının çift sayı olması bir denklik bağıntısıdır; çift sayılar bir denklik sınıfı, tek sayılar da başka bir denklik sınıfı oluşturur.

(c) Şekillerin bir kümesi için aynı sayıda köşeye sahip olma bir denklik bağıntısıdır; herhangi bir n için bir denklik sınıfı, n tane köşeye sahip olan şekillerden oluşur.

1.3 GRUP AKSİYOMLARI

Matematiksel nesnelerin bir G koleksiyonu aşağıdaki dört özelliği sağlıyorsa, bir ikili işlemle birlikte bir **grup** olarak adlandırılır. G kümesi üzerinde (o) işlemi

tanımlansın. O halde (G, o) 'ın bir grup belirtmesi için gerek ve yeter şart G kümesinin elemanlarının aşağıdaki dört özelliği sağlamasıdır.

1) Kapalılık: $\forall a, b \in G$ için $a o b \in G$ olmalı.

2) Birim Eleman: $\forall a \in G$ için $a o e = e o a = a$ olacak şekilde $e \in G$ olmalı.

Bu koşulu sağlayan e elemanına **birim eleman** denir.

3) Ters Eleman: Herhangi $a \in G$ için $a o a^{-1} = a^{-1} o a = e$ olacak şekilde $a^{-1} \in G$ olmalıdır. Bu koşulu sağlayan a^{-1} elemanına **a 'nın tersi** denir.

4) Asosyatiflik: $\forall a, b, c \in G$ için $(a o b) o c = a o (b o c)$ olmalı.

BÖLÜM 2

2.1 DENKLİK VE SİMETRİ GRUPLARI

Burada, bir karenin köşelerini siyah, beyaz veya kırmızıya boyama yollarını inceleyeceğiz. 4 köşe için seçilecek 3 renk vardır, dolayısıyla $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ tane farklı renklendirme yapılabilir. Kabul edelim ki bu karelerin sabit bir pozisyonu olmasın, yani; bir sıvının içindeki bir kare molekülü gibi yönlendirilmemiş olsun. Şimdi, köşelerin kaç farklı renkle boyanacağını düşünelim. Boyanacak olan yönlendirilmemiş şekil, bir küp veya n -gen olabilir. O zaman burada, köşelerin yerine kenarlar veya yüzeyler boyanmış olabilir. Yüzen kare problemi, kolyedeki siyah, beyaz veya kırmızıya boyanmış boncukların farklı sıralanışlarını bulma problemi ile denktir.

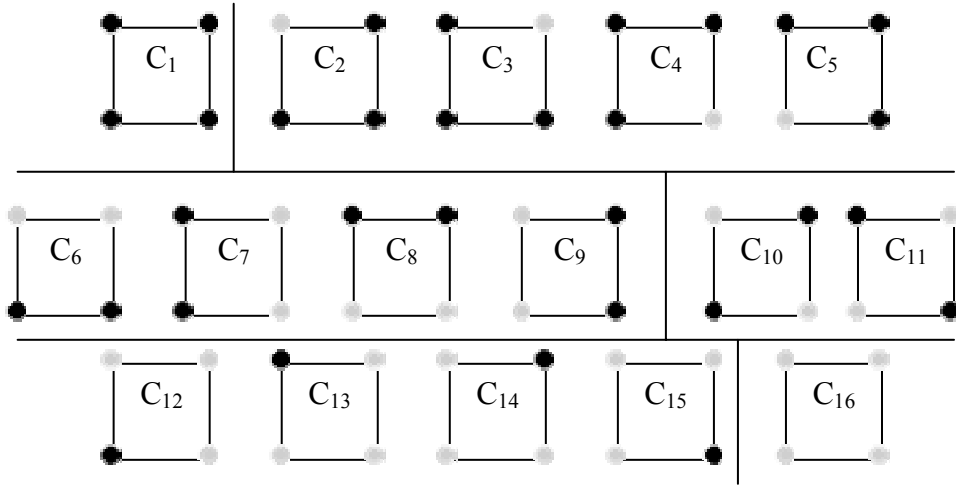
Bu problemlerdeki zorluk, boyanan şekillerin geometrik simetrilerinden kaynaklanır. Burada, bir şeklin farklı tüm boyamalarının sayısına ilişkin simetrilere dayanan bir formül geliştirilmiştir. Aynı zamanda bulduğumuz bir üreteç fonksiyon (bkz. 1.1), farklı boyamaların bir pattern envanterini verir. Örneğin, bir küpün köşelerinin siyah-beyaz boyamasının pattern envanteri, tüm geometrik simetrleri göz önüne alınarak, aşağıdaki fonksiyonu verir:

$$b^8 + b^7w + 3b^6w^2 + 3b^5w^3 + 7b^4w^4 + 3b^3w^5 + 3b^2w^6 + bw^7 + w^8$$

Burada $b^i w^j$ -nin katsayısı, birbirine denk olmayan boyamaların sayısıdır; i siyah köşelerin sayısını ve j de beyaz köşelerin sayısını gösterir.

Formülümüzü, üçüncü boyutta yüzen yönlendirilmemiş bir karenin köşelerini siyah-beyaza boyama üzerinde geliştireceğiz. Yönlendirilmemiş bir cisim çizmek imkansızdır. Herhangi bir şekil bunun sabit bir durumunu gösterir. Böylece, analizimizi sabit bir kareyi $2^4 = 16$ şekilde siyah-beyaza boyama üzerinde yapacağız (Şekil:2.1). Bu 16 şekli alt kümelere ayıracağız ve birbirine denk şekilleri aynı kümenin elemanı olarak göstereceğiz. Bu şekilde 6 alt küme vardır (şekil:2.1'de gösterilen boyanmış kareler bu şekilde gruplanmıştır) ve bu yüzden karenin

yüzmesiyle elde edilen 6 tane 2-li boyama vardır. Sabit boyamaların sayısı, zor bir problem kullanıldığında oldukça büyük olabilir; örneğin, bir küpün 2-li boyaması veya karenin 3-lü boyamasında olduğu gibi.



Şekil:2.1

Karenin neden böyle altı farklı şekilde 2-li boyamasının olduğunu açıklayan bir formül ve teori araştıracağız. Denk boyamaların oluşturduğu bu altı küme büyüklük olarak birbirinden farklıdır.

Daha sonra, bir kareyi kendi üzerine tasvir eden hareketlerle uğraşacağız (Şekil:2.2). Bu hareketler önceden yaptığımız boyamaları birbirine denk yapacaktır. Simetrisi ve simetrilerin, renklerin denkliği ile ilgilerini ifade edecek bir teori incelemeden önce kare ve diğer bir takım şekillerin simetrilerini inceleyeceğiz.

Örnek 2.1:

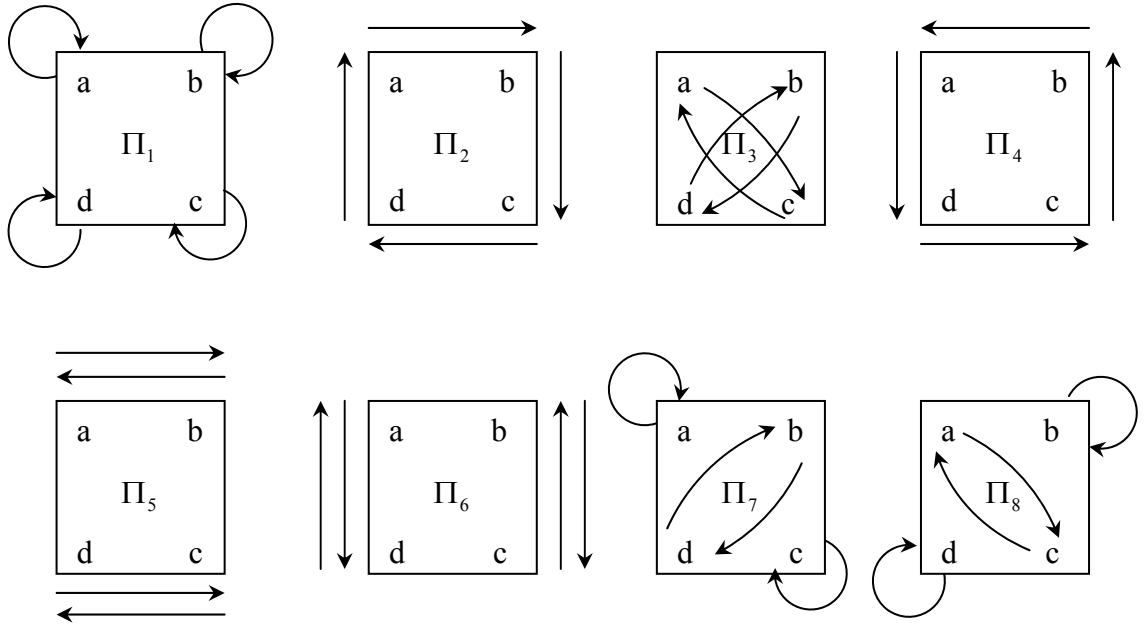
Şekil:2.2'deki gösterimler, kareyi kendi üzerine tasvir eden ve karenin simetrilerini gösteren hareketlerin kümesidir. Bu küme nasıl elde edilir? n çift olduğunda bir n -gen için simetrilerin kümesi nedir?

Karenin simetrisi iki sınıfa bölünür (ayrılır); dönme (rotasyon) - düzlemdeki dairesel hareketler ve yansımalar (flips) – üçüncü boyutta kullanılan hareketler. Rotasyonlar (dönmeler) karenin merkezindeki dönmelerdir, bunları bulmak kolaydır. Her bir rotasyon, en küçük (sıfır olmayan) rotasyonun katlarıdır. Rotasyonlar; $\Pi_2 = 90^\circ$ rotasyonu, $\Pi_3 = 180^\circ$ rotasyonu, $\Pi_4 = 270^\circ$ rotasyonu ve $\Pi_1 = 360^\circ$ (veya 0°) rotasyonudur.

Yansımaları gözümüzde canlandırmak biraz zordur; çünkü yansımalar üç boyutlu hareketlerdir. $\Pi_5 =$ dikey eksendeki yansıma ile ilgilidir, $\Pi_6 =$ yatay eksendeki yansıma ile ilgilidir, $\Pi_7 = a$ ve c zıt (ters) köşelerinin yansıması ile ilgilidir ve $\Pi_8 = b$ ve d zıt (ters) köşelerinin yansıması ile ilgilidir.

Bir düzgün n -gen'de en küçük rotasyon $(360/n)^\circ$ 'dir. $(360/n)^\circ$ rotasyonunun herhangi bir katı da yine bir rotasyon olur ve böylece toplam n tane rotasyonun olduğunu söyleriz. Bir düzgün çift n -gen (köşe ve kenar sayısı çift olan n -gen, yani n çift sayı) için iki tip yansıma vardır: iki zıt köşenin yer değişimi ve iki zıt kenarın yer değişimi. $n/2$ tane zıt kenar çifti ve $n/2$ tane zıt köşe çifti olduğu için düzgün bir çift n -gen $n/2 + n/2 = n$ tane yansımaya sahip olacaktır. Rotasyonları ve yansımaları toplarsak, düzgün bir çift n -gen'in $2n$ tane simetriye sahip olduğunu buluruz.

Bu $2n$ simetrisinin farklı tanımlamalarını göstereceğiz. Bir düzgün çift n -gen'in en çok $2n$ simetrisinin var olduğunu göstermek için belli bir x köşesini ve bu x köşesine saat yönü tarafında bağlı olan e kenarını göz önünde bulunduralım. Bir simetri hareketinden sonra x 'in pozisyonu ve buna bağlı olan e kenarının pozisyonu simetri hareketinin tümünü belirler. Bir simetri, x 'i n -gen'in herhangi bir köşesine n seçimle tasvir edebilir ve e , x 'in sağına veya soluna olmak üzere 2 şekilde yerleştirilebilir. Bu yüzden çift n -gen'in mümkün olan toplam $2n$ tane farklı simetrisi vardır.



Şekil:2.2

(Şekil:2.2)'de;

$\Pi_1 = 360^0$ (veya 0^0) rotasyonu, $\Pi_2 = 90^0$ rotasyonu, $\Pi_3 = 180^0$ rotasyonu, $\Pi_4 = 270^0$ rotasyonu, $\Pi_5 =$ dikey eksenindeki yansıma, $\Pi_6 =$ yatay eksenindeki yansıma, $\Pi_7 = a$ ve c zıt (ters) köşelerinin yansıması, $\Pi_8 = b$ ve d zıt (ters) köşelerinin yansımasıdır.

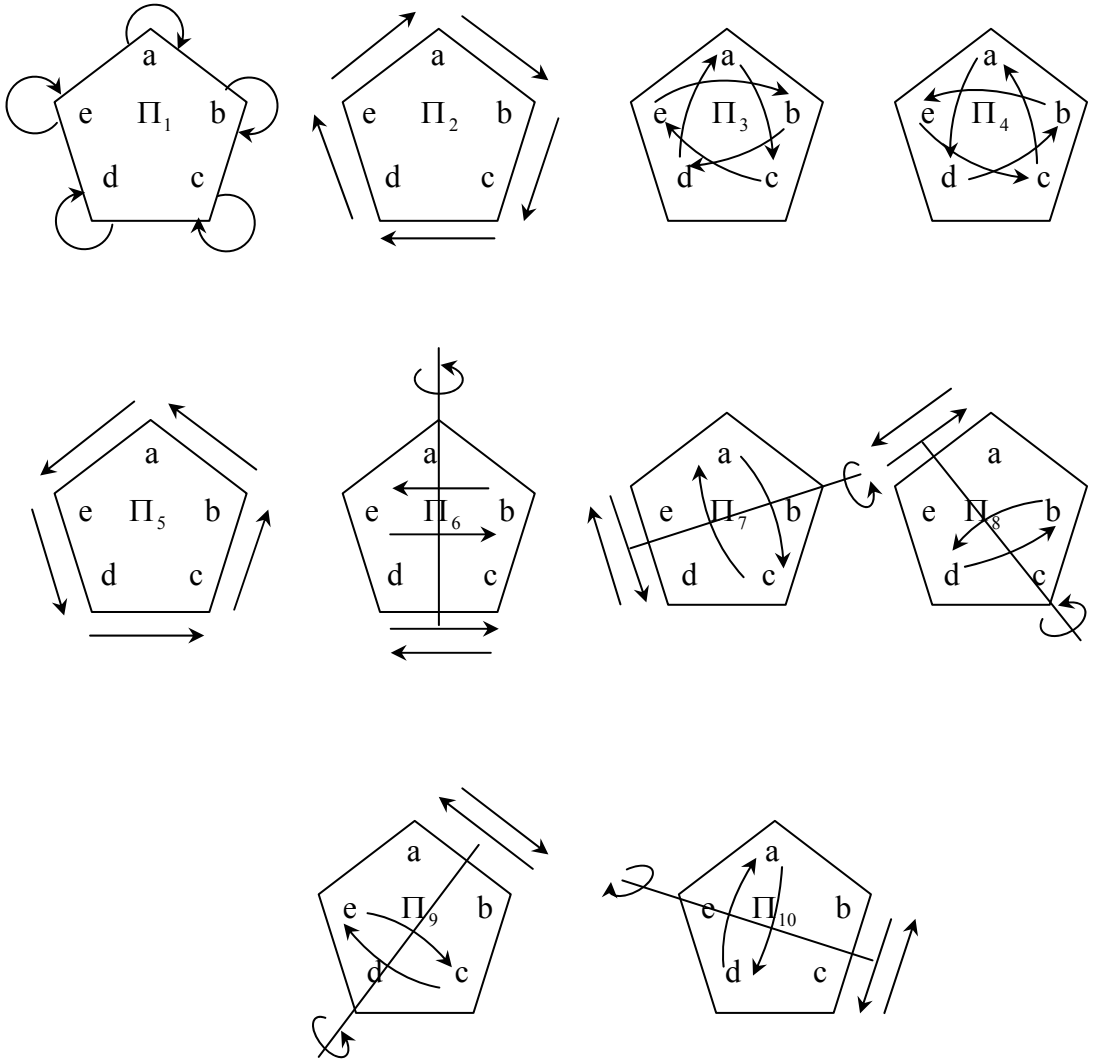
Örnek 2.2:

Bir düzgün beşgenin simetrisini tanımlayalım ve daha genel olarak n tek olmak üzere bir n -gen için bakalım.

Örnek 2.1'deki gibi herhangi bir düzgün n -gen n tane rotasyonel simetriye sahiptir. Dolayısıyla bir beşgen 5 tane rotasyonel simetriye sahip olacaktır. Bunlar: $0^0, 72^0, 144^0, 216^0$ ve 288^0 rotasyonlarıdır. Buna rağmen, karedeki gibi zıt kenarların veya zıt köşelerin yansımaları beşgen için geçerli değildir. Bunun yerine, bir köşeden

karşı kenarın ortasına doğru çizilen simetri eksenine göre yansıtma yapacağız (Şekil:2.3'teki gibi). Böyle 5 yansıma vardır ve toplamda 10 tane simetri olmuş olur.

Bir düzgün tek n -gen (kenar ve köşe sayısı tek olan n -gen, yani n tek sayı) n rotasyonla birlikte böyle n tane yer değiştirmeye sahiptir. Rotasyonların ve yansımaların toplanmasıyla bir düzgün tek n -gen'in $2n$ simetriye sahip olduğunu buluruz. Bu $2n$ simetrinin farklı olduğunu gösterelim. $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots, \Pi_{10}$ şeklindeki bu simetriler aşağıdaki gibidir:



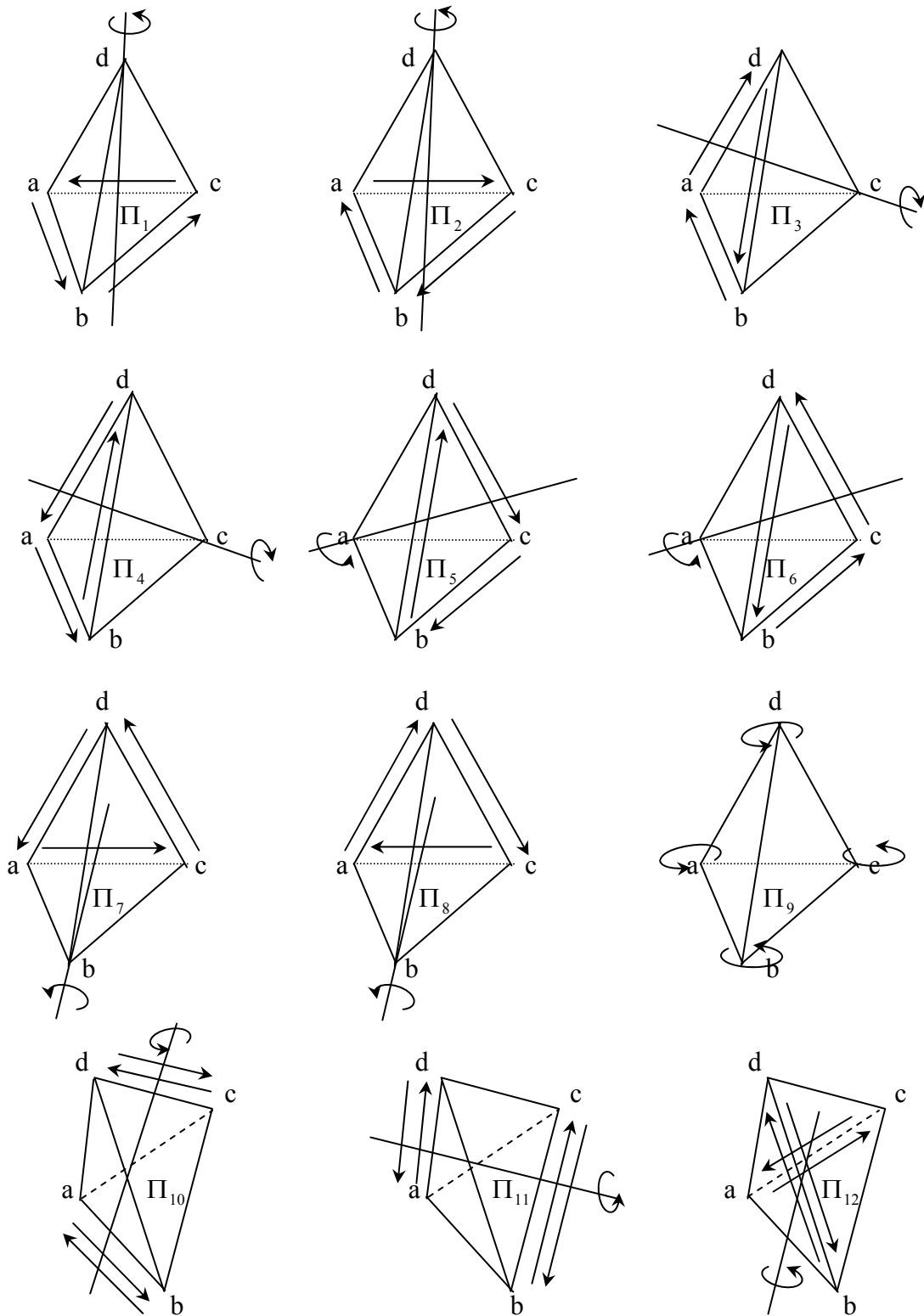
Şekil:2.3

(Şekil:2.3)'te:

$\Pi_1 = 360^0$ (veya 0^0) rotasyonu, $\Pi_2 = 72^0$ rotasyonu, $\Pi_3 = 144^0$ rotasyonu, $\Pi_4 = 216^0$ rotasyonu, $\Pi_5 = 288^0$ rotasyonu, $\Pi_6 = a$ köşesinden dc kenarına çizilen eksen boyunca 180^0 dönme, $\Pi_7 = b$ köşesinden ed kenarına çizilen eksen boyunca 180^0 dönme, $\Pi_8 = c$ köşesinden ae kenarına çizilen eksen boyunca 180^0 dönme, $\Pi_9 = d$ köşesinden ab kenarına çizilen eksen boyunca 180^0 dönme, $\Pi_{10} = e$ köşesinden bc kenarına çizilen eksen boyunca 180^0 dönmedir.

Örnek 2.3:

Bir düzgün dörtyüzlünün simetrilerini tanımlayalım: bir düzgün dörtyüzlü dört tane eşkenar üçgenden ve bunu takip eden altı kenar ve dört köşeden meydana gelir (Şekil:2.4). Bundan başka, tüm köşeleri sabit bırakan harekete 0^0 hareketi diyoruz. Bir köşeden ve karşı yüzün ortasından (ağırlık merkezinden) geçen eksen boyunca 120^0 veya 240^0 (Şekil:2.4.a) veya komşu olmayan kenarların ortasından geçen eksen boyunca 180^0 döndürebiliriz (Şekil:2.4.b). Bir köşe ve karşı yüzden oluşan dört çift ve karşı iki kenardan oluşan üç çift olduğu için toplam $1(0^0 \text{ hareketi}) + 4 \times 2 + 3 = 12$ simetriye sahibiz. Bu 12 simetrinin farklı olduğu ve başka simetrinin olmadığı aşağıda gösterilmiştir:



Şekil:2.4.a - $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6, \Pi_7, \Pi_8, \Pi_9$

Şekil:2.4.b - $\Pi_{10}, \Pi_{11}, \Pi_{12}$

(Şekil:2.4.a) ve (Şekil:2.4.b)'de:

$\Pi_1 = d$ köşesinden abc yüzeyinin ağırlık merkezine doğru çizilen eksen boyunca 120° dönme, $\Pi_2 = d$ köşesinden abc yüzeyinin ağırlık merkezine doğru çizilen eksen boyunca 240° dönme, $\Pi_3 = c$ köşesinden abd yüzeyinin ağırlık merkezine doğru çizilen eksen boyunca 120° dönme, $\Pi_4 = c$ köşesinden abd yüzeyinin ağırlık merkezine doğru çizilen eksen boyunca 240° dönme, $\Pi_5 = a$ köşesinden cdb yüzeyinin ağırlık merkezine doğru çizilen eksen boyunca 120° dönme, $\Pi_6 = a$ köşesinden cdb yüzeyinin ağırlık merkezine doğru çizilen eksen boyunca 240° dönme, $\Pi_7 = b$ köşesinden dac yüzeyinin ağırlık merkezine doğru çizilen eksen boyunca 120° dönme, $\Pi_8 = b$ köşesinden dac yüzeyinin ağırlık merkezine doğru çizilen eksen boyunca 240° dönme, $\Pi_9 = 360^\circ$ dönme, $\Pi_{10} = ab$ ve dc kenarlarının ortasından geçen eksen boyunca 180° dönme, $\Pi_{11} = da$ ve cb kenarlarının ortasından geçen eksen boyunca 180° dönme, $\Pi_{12} = db$ ve ac kenarlarının ortasından geçen eksen boyunca 180° dönmedir.

Bir karenin simetrisi doğal olarak karenin köşelerinin yer değiştirmesi (permütasyonu) şeklinde karakterize edilir. Böylece $\Pi_3 = 180^\circ$ rotasyonu (Şekil:2.2) köşelerin permütasyonu şeklinde tanımlanabilir: $a \rightarrow c, b \rightarrow d, c \rightarrow a, d \rightarrow b$ şeklinde veya tablo olarak; $\begin{pmatrix} abcd \\ cdab \end{pmatrix}$ şeklinde gösterilir. $\Pi_2 = 90^\circ$ rotasyonunu şöyle tanımlayabiliriz: $a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow d, d \rightarrow a$ veya $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow a$.

$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow \dots \rightarrow x_n \rightarrow x_1$ şeklindeki bir permütasyona bir **dairesel permütasyon** veya **devre** denir. Böylece Π_2 , uzunluğu 4 olan bir dairedir. Daireler genellikle $(x_1 x_2 x_3 \dots x_n x_1)$ formunda yazılır. Bu yüzden $\Pi_2 = (abcd)$ şeklinde yazılır. Herhangi bir permütasyon, ayrık dairelerin bir birleşimi olarak ifade edilebilir. Örneğin, $\Pi_1 = (a)(b)(c)(d)$, $\Pi_3 = (ac)(bd)$, $\Pi_4 = (adcb)$, $\Pi_5 = (ab)(cd)$, $\Pi_6 = (ad)(bc)$, $\Pi_7 = (a)(bd)(c)$ ve $\Pi_8 = (ac)(b)(d)$ olur.

(Şekil:2.2)'deki oklar köşelerin tasvirini gösterdiği için dairelerin takibini kolaylaştırmıştır.

Simetriler, köşelerin boyama permütasyonlarını ortaya çıkarır. Örneğin C_i , (Şekil:2.1)'deki i. kare ise, $\Pi_3 = 180^0$ rotasyonu aşağıdaki boyama permütasyonu olur:

$$\Pi_3 = \begin{pmatrix} C_1 C_2 C_3 C_4 C_5 C_6 C_7 C_8 C_9 C_{10} C_{11} C_{12} C_{13} C_{14} C_{15} C_{16} \\ C_1 C_4 C_5 C_2 C_3 C_8 C_9 C_6 C_7 C_{10} C_{11} C_{14} C_{15} C_{12} C_{13} C_{16} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Π_i simetrisi, bir karenin köşelerinin hareketi yoluyla gözde canlandırılabilirse de bizim ilgilendiğimiz Π_i 'nin bir boyamayı diğerine nasıl götürdüğüdür. Bu sebeple boyama denkliğini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz:

$$\Pi_i(C) = C^1 \text{ olacak şekilde bir } \Pi_i \text{ simetrisi varsa,}$$

$$C \text{ ve } C^1 \text{ boyaması denktir, yani } C \sim C^1 \text{ olur.} \quad (2.2)$$

Simetrilerin kümesi olan G kümesinin ilgilendiğimiz özellikleri, (2.2) eşitliğindeki $C \sim C^1$ bağıntısını denklik bağıntısı yapan özelliklerdir. Bu özellikler aşağıda verilmiştir (buradaki $\Pi_i \cdot \Pi_j$ çarpımından kastımız, Π_i hareketinin arkasından Π_j hareketi geliyor demektir):

1. Kapalılık : $\Pi_i, \Pi_j \in G$ ise, $\Pi_i \cdot \Pi_j \in G$ 'dir. Örneğin, (Şekil:2.2)'de $\Pi_2 \cdot \Pi_5 = \Pi_7$ 'dir.
2. Birim Eleman : G , Π_1 birim hareketini içerir, öyle ki $\Pi_1 \cdot \Pi_i = \Pi_i$ ve $\Pi_i \cdot \Pi_1 = \Pi_i$ olur. Örneğin, (Şekil:2.2)'de Π_1, Π_1 'dir.
3. Ters Eleman : Herhangi $\Pi_i \in G$ elemanının G 'de bir tersi vardır, Π_i^{-1} şeklinde gösterilir, öyle ki $\Pi_i^{-1} \cdot \Pi_i = \Pi_1$ ve $\Pi_i \cdot \Pi_i^{-1} = \Pi_1$ olur. Örneğin, (Şekil:2.2)'de $\Pi_2^{-1} = \Pi_4$ 'tür.

Dikkat edilirse boyama bağıntımızdaki kapalılık özelliği, geçişkenlik özelliğini sağlar (denklik bağıntısının 1. özelliği). Kabul edelim ki $C \sim C^1$ ve $C^1 \sim C^{11}$ olsun. $C \sim C^1$ olduğu için $\Pi_i(C) = C^1$ olacak şekilde $\Pi_i \in G$ ve $C^1 \sim C^{11}$ olduğu için $\Pi_j(C^1) = C^{11}$ olacak şekilde $\Pi_j \in G$ olmalıdır. Kapalılık özelliğinden, $\Pi_k = \Pi_i \cdot \Pi_j \in G$ yazarız. Burada $\Pi_k(C) = (\Pi_i \cdot \Pi_j)(C) = C^{11}$ 'dir. Böylece $C \sim C^{11}$ 'dir. Benzer şekilde simetrisinin (2). özelliğinin de belirttiği gibi, boyama bağıntımız denklik bağıntısının (ii) özelliğini (yansıma özelliği) sağlar; kabul edelim ki Π_1 G 'de birim eleman olsun. $\Pi_1(C) = C$ olduğu için $C \sim C$ olur. Son olarak simetrisinin (3). özelliği de denklik bağıntısının (iii) özelliğini (simetri özelliğini) sağlar; kabul edelim ki $C \sim C^1$ olsun. O halde herhangi $\Pi_i \in G$ için $\Pi_i^{-1} \in G$ olduğundan $\Pi_i^{-1}(C) = C^1$ yazarız. Kapalılık özelliğini de kullanırsak ($\Pi_i \cdot \Pi_i^{-1} \in G$ olur):

$$\Pi_i[\Pi_i^{-1}(C)] = \Pi_i(C^1)$$

$$\Pi_1(C) = \Pi_i(C^1)$$

$$C = \Pi_i(C^1)$$

olur ki bu da $C^1 \sim C$ demektir.

Simetrilerin kümesi olan G kümesi (1), (2) ve (3) özellikleri ile birlikte $(\Pi_i \cdot \Pi_j) \cdot \Pi_k = \Pi_i \cdot (\Pi_j \cdot \Pi_k)$ asosyatiflik özelliğini de sağladığından, çarpma ikili işlemiyle birlikte bir **grup** olarak adlandırılır. Böylece aşağıdaki teoremi söyleriz.

2.2 Teorem:

G, S (bir karenin köşeleri) kümesinin bir permütasyon grubu ve T, S 'nin boyamalarının bir koleksiyonu olsun (köşelerin 2-li boyamalarının). Buradan $C \sim C^1$

bağıntısı ile G , T 'nin denklik sınıflarına parçalanışına sebep olur \Leftrightarrow herhangi bir $\Pi \in G$, C 'yi C^1 'ne dönüştürürse.

Ayrıca S , nesnelerin herhangi bir kümesi ve T de boyamaların mümkün herhangi bir koleksiyonu olsun. Aşağıda gruplar için olan basit lemma, daha sonra geliştirilecek sayma formülü için önemlidir.

2.3 Lemma:

Bir G grubundaki herhangi iki Π_i, Π_j permütasyonları için, G 'de $\Pi_k = \Pi_i^{-1} \cdot \Pi_j$ olacak şekilde tek bir Π_k permütasyonu vardır öyle ki $\Pi_i \cdot \Pi_k = \Pi_j$ 'dir.

İspat:

İlk olarak $\Pi_i \cdot \Pi_k = \Pi_j$ olduğunu göstereceğiz. $\Pi_k = \Pi_i^{-1} \cdot \Pi_j$ olduğu için,

$$\begin{aligned} \Pi_i \cdot \Pi_k &= \Pi_i \cdot (\Pi_i^{-1} \cdot \Pi_j) = (\Pi_i \cdot \Pi_i^{-1}) \cdot \Pi_j \quad (\text{asosyatiflik özelliğinden}) \\ &= \Pi_1 \cdot \Pi_j = \Pi_j \end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra, kabul edelim ki aynı zamanda $\Pi_i \cdot \Pi_k^1 = \Pi_j$ olacak şekilde bir Π_k^1 permütasyonu var olsun. Buradan, $\Pi_i \cdot \Pi_k = \Pi_i \cdot \Pi_k^1$ olur. Eşitlik Π_i^{-1} ile çarpılırsa;

$$\begin{aligned} \Pi_i^{-1} \cdot (\Pi_i \cdot \Pi_k) &= \Pi_i^{-1} \cdot (\Pi_i \cdot \Pi_k^1) \Rightarrow (\Pi_i^{-1} \cdot \Pi_i) \cdot \Pi_k = (\Pi_i^{-1} \cdot \Pi_i) \cdot \Pi_k^1 \\ &\Rightarrow \Pi_1 \cdot \Pi_k = \Pi_1 \cdot \Pi_k^1 \Rightarrow \Pi_k = \Pi_k^1 \end{aligned}$$

elde ederiz.

2.4 BURNSIDE TEOREMİ

Karenin denk olmayan farklı 2-li boyamalarının sayısını hesaplamak için bir teorem inceleyeceğiz. Genel olarak, bazı şekillerde köşelerin (kenarların veya yüzeylerin)

kaç farklı şekilde boyandığını gösteren bir T kümesi için, bu şeklin simetrilerinin oluşturduğu G grubu T 'yi denklik sınıflarına ayırır.

Kabul edelim ki s tane simetrisi olan bir grup c tane boyamaya sahip T 'ye etki ediyor. E_c , C 'yi ve C 'ye denk olan tüm C^1 boyamalarını içeren denklik sınıfı olsun. Bu C^1 'ler bazı $\Pi \in G$ için $\Pi(C) = C^1$ 'nü verir. Eğer s simetrimin her biri için alınan Π 'ler, C 'yi $\Pi(C)$ gibi farklı boyamayla eşleştirirse E_c 'nin s tane boyaması olur. Ayrıca, $\Pi(C)$ 'lerin kümesi C 'yi içerir çünkü; $\Pi_1(C) = C$ 'dir (Π_1 birim simetri). Eğer her denklik sınıfı s tane boyama içeriyorsa:

$$sN = c : (\text{simetrilerin sayısı}) \times (\text{denklik sınıflarının sayısı}) = (\text{tüm boyamaların sayısı})$$

Bunu N için çözersek; $N = \frac{c}{s}$ olur.

Örneğin bir masa etrafındaki n kişi $c = n!$ şekilde oturabilir. Oturmak için $s = n$ tane dairesel rotasyon vardır ve herhangi denklik sınıfı n tane oturuş içerir. Böylece denklik sınıfının sayısı (dairesel olarak denk olmayan oturuşlar) $N = n! / n = (n-1)!$ olur. Diğer yandan kabul edelim ki bir yuvarlak masamız olsun ve etrafındaki üç sandalyenin her biri 120° ötede olsun. Burada beyaz ve siyah sandalyeler daha uygundur. Siyah ve beyaz sandalye her pozisyon için $2^3 = 8$ şekilde yerleştirilir. Bu masanın 0° , 120° ve 240° olmak üzere olası üç dairesel rotasyonu vardır. $c = 8$ boyama ve $s = 3$ simetriye sahibiz. Fakat denklik sınıflarının sayısı $N = 8 / 3$ olamaz, çünkü bu bir kesirdir.

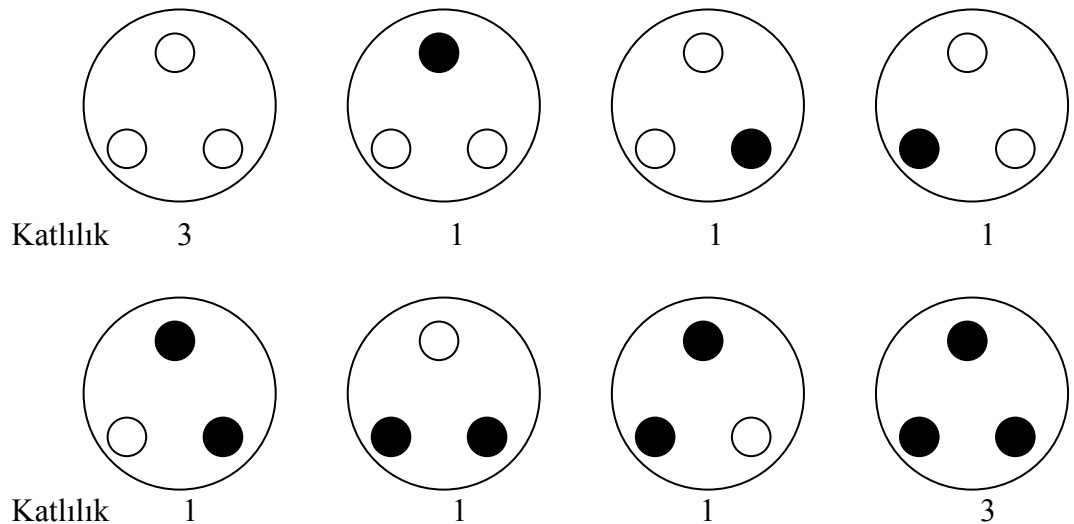
Bir denklik sınıfında, 1 siyah ve 2 beyaz veya 2 siyah ve 1 beyaz sandalyenin üç şekilde sıralanışı vardır. 0° , 120° ve 240° olmak üzere bir siyah sandalye farklı pozisyonlarla rotasyonel hareket ettirilir. Buna rağmen, 3 siyah sandalyenin (veya 3 beyaz sandalyenin) sıralanışı kendi başına bir denklik sınıfı oluşturur (Şekil:2.5). Her rotasyon 3 siyah (beyaz) sandalyeyi kendi üzerine tasvir eder, yani sabit bırakır.

$N = \frac{c}{s}$ formülünün payını düzeltmemiz gerekir. Birçok dairesel hareket bu sıralanışı yine kendisine tasvir ettiğinde herhangi bir sıralanışın katlılığını paya

ekleyeceğiz. Bu şekilde her denklik sınıfının, bu katlılıklar da sayıldığında, 3 tane elemanı vardır. “ 0^0 ” simetrisi ve diğer iki simetri (120^0 ve 240^0), tüm siyah sandalyelerin ve tüm beyaz sandalyelerin dizilişini sabit bırakır. (Şekil:2.5)’deki sıralanışları ve çeşitleri sayarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$N = (3+1+1+1+1+1+1+3) / 3 = 12 / 3 = 4$$

Karenin 2-li boyanması durumunda katlılığın hesaplanması oldukça zordur. Buradaki boyamaların denklik sınıfının boyutu 1, 2 veya 4 olabilir ama asla 8 olamaz (çünkü 8, karenin simetrilerinin sayısıdır). Buradaki ilk problem, Π_1 birim simetrisi dışındaki bazı Π simetrisi de bir C_i boyamasını sabit bırakabilir yani; $\Pi(C_i) = C_i$ olabilir. Diğer problem; C_k , C_i ’nin denklik sınıfındaki başka bir boyama ise C_i ’yi C_k ’ya dönüştürebilen birçok Π olabilir. Örneğin (Şekil:2.1’deki) $\Pi_1, \Pi_3, \Pi_7, \Pi_8$ simetrisi C_{10} boyamasını sabit bırakır ve $\Pi_2, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6$ simetrisi C_{10} ’u C_{11} ’e tasvir eder.



Şekil:2.5

Lemma 2.3 ile eğer Π^1 simetrisi C_{11} 'i sabit bırakıyor ise C_{10} 'u C_{11} 'e götüren $\Pi_2, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6$ simetrisi $\Pi = \Pi_2 \cdot \Pi^1$ formunda yazılabilir. Örneğin;

$$\Pi_5 = \Pi_2 \cdot \Pi_8 = \begin{pmatrix} abcd \\ badc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abcd \\ bcda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} abcd \\ cbad \end{pmatrix} \quad \text{dir.}$$

Benzer şekilde $\Pi_2 = \Pi_2 \cdot \Pi_1$, $\Pi_4 = \Pi_2 \cdot \Pi_3$, $\Pi_6 = \Pi_2 \cdot \Pi_7$. Aksine verilen herhangi Π^* , C_{11} 'i sabit bıraksın. $\Pi_2 \cdot \Pi^*$, C_{10} 'u C_{11} 'e götürsün ve bu yüzden $\Pi_2 \cdot \Pi^*$; $\Pi_2, \Pi_4, \Pi_5, \Pi_6$ 'dan biri olmalıdır. Böylece, C_{10} 'u C_{11} 'e götüren ve C_{11} 'i sabit bırakan Π 'ler arasında 1-1 bir tekabül vardır. Bu yüzden herhangi bir denklik sınıfındaki boyamaları saymak için bu boyamaları sabit bırakan Π 'lerin sayısını toplamak yeterlidir (örneğin: C_{11} 'in katlılığı 4'tür yani C_{10} 'u C_{11} 'e dönüştüren dört tane Π vardır).

Bu durumda C_{10} ve C_{11} 'i içeren denklik sınıfında C_{10} ve C_{11} 'in her biri 4 katlılığa sahiptir, bu yüzden bunların denklik sınıfları, katlılıkları da içererek, $4+4 = 8$ ($= s$, simetrisin sayısı) boyutludur.

Genelde katlılıklar sayılabiliyorsa herhangi E denklik sınıfı, s elemana sahip olacaktır.

$$\Phi(x), x\text{'i sabit bırakan } \Pi\text{'lerin sayısını gösteriyorsa } \sum_{x \in E} \Phi(x) = s \text{ olur.}$$

$\sum_{x \in E} \Phi(x) = s$ 'in ispatını şöyle yapabiliriz: x_1, x_2, \dots, x_m E denklik sınıfının boyamaları olsun ve $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_m$ simetrisin grubu olsun. Bu Π 'ler m tane R_1, R_2, \dots, R_m gruba ayrılır. Burada R_i , x_1 'i x_i 'ye tasvir eden Π 'lerin kümesidir. Yukarıda gösterildiği gibi x_1 'i x_i 'ye tasvir eden Π 'lerin sayısı $\Phi(x_1)$ 'ye eşittir. Böylece $\sum_{x \in E} \Phi(x)$; R_1, R_2, \dots ve R_m 'deki Π 'lerin sayılarının toplamıdır. Fakat R 'lerin toplamı, tüm simetrisin toplam sayısıdır (yani s 'dir).

Tüm denklik sınıfları toplanırsa Burnside Teoremi elde edilir.

2.4.1 Teorem (Burnside):

G , S kümesinin (karenin köşelerinin kümesi) permütasyonlarının bir grubu olsun. T de, S 'nin boyamalarının (köşelerin 2-li boyamasının) herhangi bir koleksiyonu olsun. T , G altında kapalıdır. S kümesinin (G, o) şeklindeki bir permütasyon grubunun sebep olduğu denklik bağıntısı, S kümesini denklik sınıflarına böler. Bu denklik sınıflarının sayısı:

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{\Pi \in G} \Psi(\Pi) \quad (2.3)$$

olur.

Burada $|G|$, permütasyonların (simetrilerin) sayısı ve $\Psi(\Pi)$ T 'de Π ile sabit kalan boyamaların sayısıdır¹⁷.

“ G altında kapalılık” ile anlatmaya çalıştığımız; tüm $\Pi \in G$ için, $x \in T \Rightarrow \Pi(x) \in T$ olmasıdır. T , karenin tüm köşelerinin ikili boyamalarının kümesi olduğunda bu kapalılık özelliği otomatik olarak gerçekleşir. Bölüm 2.6’da, S 'nin özel atkümelerine (iki köşesi siyah ve iki köşesi beyaz olan boyamaların kümesi gibi) (2.3) formülünü uygulayacağız. Bunlar G altında kapalıdır.

Burnside Teoremi'nin anlamını (ifadesini) daha da kuvvetlendirmek için ispata geçmeden önce bir uygulama yapalım.

$S = \{a, b, c, d\}$ ve G 'de;

$$\Pi_1 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}, \Pi_2 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & c & d \end{pmatrix}, \Pi_3 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & d & c \end{pmatrix} \text{ ve } \Pi_4 = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{pmatrix}$$

permütasyonlarını içeren permütasyon grubu olsun. G 'deki permütasyonlarla S 'ye etkiyen denklik bağıntısı Şekil 2.6’da gösterilmiştir. Buradan S 'nin şu iki denklik sınıfına ayrıldığını söyleyebiliriz: $\{a, b\}$ ve $\{c, d\}$. Burnside Teoremi'ne göre denklik sınıflarının sayısını hesaplarken

¹⁷ C.L. Liu, *Elements of Discrete Mathematics*, U.S.A. 1977, s.221-223

$\Psi(\Pi_1)=4, \Psi(\Pi_2)=2, \Psi(\Pi_3)=2$ ve $\Psi(\Pi_4)=0$ olduğunu biliyoruz. O halde denklik sınıflarının sayısı:

$$\frac{1}{4}(4+2+2+0)=2$$

olur.

	a	b	c	d
a	√	√		
b	√	√		
c			√	√
d			√	√

Şekil 2.6

İspat: Herhangi bir $t \in T$ için $\Phi(t)$, t 'yi sabit bırakan permütasyonların sayısı olsun.

O halde;

$$\sum_{\Pi \in G} \Psi(\Pi) = \sum_{t \in T} \Phi(t)$$

olur. Çünkü $\sum_{\Pi \in G} \Psi(\Pi)$ ve $\sum_{t \in T} \Phi(t)$ ifadelerinin her ikisi de G 'deki tüm permütasyonlar altındaki tüm değişmezlerin toplam sayısıdır. [Bu değişmezleri hesaplamamanın bir yolu, permütasyonları bir bir gözden geçirerek her bir permütasyon altında sabit kalan boyamaların toplam sayısını bulmaktır. Bu bize $\sum_{\Pi \in G} \Psi(\Pi)$ şeklinde bir toplam verir. Diğer bir yol da, boyamaları bir bir gözden geçirerek her bir

boyamayı sabit bırakan permütasyonların toplam sayısını bulmaktır. Bu da bize $\sum_{t \in T} \Phi(t)$ toplamını verir].

a ve b aynı deklük sınıfına ait T 'de iki boyama olsun. O halde a 'yı b 'ye götüren $\Phi(a)$ tane permütasyon olduğunu göstereceğiz. a ve b , aynı denklik sınıfına ait olduğu için bu şekilde en azından bir permütasyon vardır. Buna Π_x diyelim. $\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots\}$ kümesi a 'yı sabit bırakan $\Phi(a)$ tane permütasyonun kümesi olsun.

$\Phi(a)$ tane permütasyon içeren $\{\Pi_x \circ \Pi_1, \Pi_x \circ \Pi_2, \Pi_x \circ \Pi_3, \dots\}$ kümesi, a 'yı b 'ye götüren permütasyonların kümesi olur. İlk olarak, bu permütasyonların hepsinin birbirinden farklı olduğunu gösterelim. Bunlar birbirinden farklıdır çünkü; eğer $\Pi_x \circ \Pi_1 = \Pi_x \circ \Pi_2$ ise;

$$\Pi_x^{-1}(\Pi_x \circ \Pi_1) = \Pi_x^{-1}(\Pi_x \circ \Pi_2)$$

ve buradan da $\Pi_1 = \Pi_2$ bulunur ki bu da imkansızdır. İkinci olarak G 'de a 'yı b 'ye götüren başka bir permütasyon olmadığını görelim. Kabul edelim ki a 'yı b 'ye götüren bir Π_y permütasyonu olsun. Buradan $\Pi_x^{-1} \circ \Pi_y$, a 'yı a 'ya götüren bir permütasyon olur, çünkü; Π_x^{-1} b 'yi a 'ya götürür. O halde $\Pi_x^{-1} \circ \Pi_y$, $\{\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \dots\}$ kümesindeki permütasyonlardan biri olur. Bu yüzden $\Pi_x \circ (\Pi_x^{-1} \circ \Pi_y) = \Pi_y$ de $\{\Pi_x \circ \Pi_1, \Pi_x \circ \Pi_2, \dots\}$ kümesindeki permütasyonlardan biri olur. Dolayısıyla sonuç olarak G 'de a 'yı b 'ye götüren $\Phi(a)$ tane permütasyon var deriz.

a, b, c, \dots, h aynı denklik sınıfında bulunan T 'nin elemanları olsun. G 'deki tüm permütasyonlar; a 'yı a 'ya götüren, a 'yı b 'ye götüren, a 'yı c 'ye götüren, \dots , a 'yı h 'ye götüren permütasyonlar olarak sınıflandırılabilir. Burada herbir sınıflandırmadaki permütasyonların $\Phi(a)$ tane olduğunu gösterdiğimiz için ;

$$\Phi(a) = \frac{|G|}{\text{a'yı içeren denklik sınıfındaki elemanların sayısı}}$$

olduğunu yazarız. Benzer argümanı kullanarak

$$\Phi(b) = \Phi(c) = \dots = \Phi(h) = \frac{|G|}{\text{a'yı içeren denklik sınıfındaki elemanların sayısı}}$$

elde ederiz. Dolayısıyla:

$$\Phi(a) + \Phi(b) + \Phi(c) + \dots + \Phi(h) = |G|$$

olur. Bunun devamında T 'nin elemanlarının herhangi bir denklik sınıfı için;

$$\sum_{\text{denklik sınıfındaki tüm } t\text{'ler}} \Phi(t) = |G| \text{ olur ve}$$

$$\sum_{t \in T} \Phi(t) = \left(\begin{array}{c} T\text{'nin denklik sınıflarının} \\ \text{sayısı} \end{array} \right) \times |G|$$

yazarız. Bu sebeple T 'nin denklik sınıflarının sayısı:

$$= \frac{1}{|G|} \sum_{t \in T} \Phi(t) = \frac{1}{|G|} \sum_{\Pi \in G} \Psi(\Pi)$$

olur.

Teoremdaki iki toplam birlikte, herhangi bir boyama için Π 'nin sabit bıraktığı tüm durumları sayar. Birinci toplam farklı boyamalar üzerinde, ikinci toplam farklı Π 'ler üzerindedir.

(2.3) formülünün arkasındaki ana fikri informal olarak aşağıdaki gibi özetleyebiliriz. Karenin tüm boyamalarının sayısı olan c , $\Psi(\Pi_1)$ 'e eşittir, çünkü Π_1

birim simetrisi tüm boyamaları sabit bırakır. Eğer 8 simetrisinin her biri, bir C boyamasını 8 farklı boyama içine tasvir ediyorsa her bir denklik sınıfında 8 boyama vardır ve bu sebeple toplam $\frac{c}{8} = \frac{\Psi(\Pi_1)}{|G|}$ denklik sınıfı vardır. Buna rağmen, $\{\Pi(c) : \Pi \in G\}$ koleksiyonundaki boyamalar, yönlendirilmemiş bir karenin boyamalarının bir denklik sınıfını oluşturur ve hiçbir zaman bunların hepsi farklı değildir. (2.3) formülündeki $\Psi(\Pi_i)$ terimleri, tekrarlanan boyamaların katlılığını da toplar, bu yüzden (2.3)'teki toplamda her bir denklik sınıfı 8 boyamaya sahiptir.

Örnek 2.4:

Bir batonu eşit boyutlu silindirik bantlarla boyayalım. Her bir bant siyah veya beyaza boyanabilir. Eğer baton yönlendirilmemiş ise havada döner. Baton iki bantlı ise mümkün olan farklı 2-li boyamalarının sayısı kaçtır? 3 bantlı ise kaçtır? 4 bantlı ise kaçtır?

(Şekil:2.7)'de batonlar 2, 3 ve 4 bantlıdır.

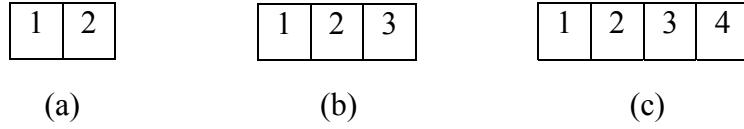
(a) iki bantlı batonun simetrilerinin grubunda $\Pi_1 = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$ ve $\Pi_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 21 \end{pmatrix}$ 'dir.

Devresel olarak ifade edersek; $\Pi_1 = (1)(2)$ ve $\Pi_2 = (12)$. Π_1 (birim simetri), batonun bir 0° dönmesi ve Π_2 de batonun 180° dönmesi şeklinde düşünülebilir. Batonun ikili boyamaları kümesindeki tüm ikili boyamalar Π_1 ile soldan sabit kalır. $2^2 = 4$ tane 2-li boyama vardır ve bu yüzden $\Psi(\Pi_1) = 4$ 'tür. 2-li boyamalar kümesinde tüm siyah ve tüm beyaz boyamalar Π_2 ile soldan sabit kalır ve bu yüzden $\Psi(\Pi_2) = 2$ olur. Burnside Teoremi ile farklı boyamaların sayısı;

$$\frac{1}{2}[\Psi(\Pi_1) + \Psi(\Pi_2)] = \frac{1}{2}(4 + 2) = 3$$

olur.

(b) 3 bantlı batonun simetri grubunda $\Pi_1 = \begin{pmatrix} 123 \\ 123 \end{pmatrix}$ ve $\Pi_2 = \begin{pmatrix} 123 \\ 321 \end{pmatrix}$ devresel olarak ifade edilirse $\Pi_1 = (1)(2)(3)$ ve $\Pi_2 = (13)(2)$. Yine Π_1 , batonun bir 0° dönmesi Π_2 de 180° dönmesidir. Tüm 2^3 2-li boyamalar Π_1 ile sabit kalır, bu yüzden $\Psi(\Pi_1) = 2^3 = 8$ 'dir.



Şekil:2.7

Π_2 ile soldan sabit kalan 2-li boyamaların kümesinde 2 bantı (ortadaki bant) herhangi bir renkte, fakat uçtakiler aynı renkte olmalıdır. Bu yüzden $\Psi(\Pi_2) = 2 \times 2 = 4$ olur. Farklı boyamaların sayısı;

$$\frac{1}{2} [\Psi(\Pi_1) + \Psi(\Pi_2)] = \frac{1}{2} (8 + 4) = 6$$

(c) 4 bantlı batonun simetri grubunda $\Pi_1 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix}$, $\Pi_2 = \begin{pmatrix} 1234 \\ 4321 \end{pmatrix}$ olup bunları devresel olarak ifade edersek; $\Pi_1 = (1)(2)(3)(4)$ ve $\Pi_2 = (14)(23)$ olur. Burada da Π_1 , batonun 0° dönmesi; Π_2 de 180° dönmesidir. Π_1 , tüm 2^4 2-li boyamayı sabit bırakır ve bu yüzden $\Psi(\Pi_1) = 2^4 = 16$ 'dır. Π_2 ile soldan sabit kalan 2-li boyamalar kümesinde kenardaki boyamalar (1 ve 4) ve ortadaki boyamalar (2 ve 3) aynı olmalıdır. Bu yüzden $\Psi(\Pi_2) = 2 \times 2 = 4$ olur. Buradan farklı boyamaların sayısı:

$$\frac{1}{2}[\Psi(\Pi_1) + \Psi(\Pi_2)] = \frac{1}{2}(16 + 4) = 10$$

olur.

Örnek 2.5:

Eğer baton yönlendirilmemiş ise (Örnek 2.4'teki gibi) n bantlı bir batonun kaç farklı 3'lü boyaması vardır?

Örnek 2.4'te olduğu gibi, batonun simetrisi; 0° döndürme ve 180° döndürmedir. 3 renkli, n banda sahip batona etkiyen 0° ve 180° dönmelerinin grubuna (2.3) formülünü uygulayacağız. Sabit batonun 3^n tane boyaması vardır ve bu yüzden $\Psi(0^\circ) = 3^n$ 'dir. Bir 180° döndürmesinde boyamaların sayısı, n 'nin çift veya tek oluşuna bağlıdır.

Eğer n çift ise, batonun bir yarısındaki her bir $\frac{n}{2}$ bant herhangi bir renk olabilir ($3^{n/2}$ seçim ile) ve daha sonra 180° döndürmenin sabit bıraktığı boyamalar simetrik olarak ters olan bantla aynı renkte olmalıdır. Bu yüzden $\Psi(180^\circ) = 3^{n/2}$ ve (2.3) formülünden:

$$N = \frac{1}{2}(3^n + 3^{n/2})$$

n tek ise en ortadaki bant için 3 renkten herhangi birini (3 seçimle) kullanabiliriz.

Orta bandın herhangi bir tarafındaki $\frac{n-1}{2}$ bandı da $3^{(n-1)/2}$ seçim ile herhangi renkte boyayabiliriz ve diğer $\frac{n-1}{2}$ bandı da bunlara simetrik olarak aynı renkte boyarız. Bu

yüzden $\Psi(180^\circ) = 3 \times 3^{(n-1)/2} = 3^{(n+1)/2}$ ve $N = \frac{1}{2}(3^n + 3^{(n+1)/2})$ olur.

Örnek 2.6:

Kabul edelim ki; siyah, beyaz ve kırmızı gibi üç renk boncuktan oluşan bir kolye olsun. n boncuklu kaç farklı kolye vardır?

Bir çembere simetrik olarak n tane boncuk yerleştirildiğinde boncuklar, düzgün n -gen'in köşelerinin yerini tutar. Böylece soru şu hale dönüşür: “3 renk kullanılarak bir n -gen'in köşeleri kaç farklı şekilde boyanır?”. Cevap, “farklı” ifadesiyle anlatılmak istenenin ne olduğuna bağlıdır. Eğer boncukların kolye üzerinde hareket etmesine izin verilmezse, bu n -gen'in sabit olduğunu gösterir ve cevap; $3 \times 3 \times \dots \times 3 = 3^n$ olur (n köşenin her biri için 3 renkten biri seçilir). Problemimizin daha gerçekçi ifadesi, boncukların çember üzerinde serbestçe hareket etmesine izin verilmesidir, bu, n -gen'in serbestçe dönmesidir (fakat n -gen'in havada takla atması şeklindeki hareketlerine izin yoktur). Bir n -gen'in rotasyonel simetrilerinin sebep olduğu 3-lü boyamaların denklik sınıflarının sayısı olan N 'yi (2.3) formülü ile hesaplayacağız. Hesaplamayı $n = 3$ için yapacağız. Bir sonraki bölümde daha büyük n -ler için geliştirilen daha genel bir teknikten söz edeceğiz.

3 boncuklu bir kolyenin $3^3 = 27$ tane 3-lü boyaması vardır ve $0^\circ, 120^\circ$ ve 240° olmak üzere 3 rotasyonu vardır. 0° rotasyonu tüm boyamaları sabit bırakır ve bu yüzden $\Psi(0^\circ) = 27$ 'dir. 120° rotasyonu; bir renkle sadece bir köşe boyanmışsa bu boyamayı sabit bırakmayabilir. Bununla birlikte, 120° rotasyonu sadece tek renkli boyama için sabit bırakır. Bu yüzden $\Psi(120^\circ) = 3$ 'tür. 240° rotasyonu 120° rotasyonunun aksidir (tersidir) ve bu yüzden $\Psi(240^\circ) = 3$ olur. (2.3) formülü ile:

$$N = \frac{1}{3}(27 + 3 + 3) = 11 \text{ elde ederiz.}$$

2.5 DÖNME İNDEKSİ

Yönlendirilmemiş bir şeklin farklı boyamalarının sayısını Burnside Teoremi'ni uygulayarak bulmak zordur. Bu yüzden bunun dışında bir teori araştıracağız. Bölüm 3'te bahsedilen Burnside Teoremi, simetrilerin oluşturduğu bir G grubunun etki ettiği T kümesinin (bir şeklin boyamalarının kümesi) denklik sınıflarının sayısını (N 'yi), yani:

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{\Pi \in G} \Psi(\Pi)$$

ifadesini gösterir. Burada $\Psi(\Pi)$, T 'deki boyamaları sabit bırakan Π 'lerin sayısıdır. T kümesi bir küpün veya 10-gen'in köşelerinin 3-lü boyamalarının kümesi ise, $\Psi(\Pi)$ 'nin (şeklin boyamalarını sabit bırakan Π simetrilerinin sayısının) tanımını ifade etmek imkansız gibidir. Biz $\Psi(\Pi)$ 'nin tanımının Π 'nin yapısından daha kolay belirlenebileceğini göstereceğiz. Bu yaklaşımla hesaplama oldukça kısaldı. $\Psi(\Pi)$ 'nin hesaplanışını kolaylaştıran bu teoriyi karenin 2-li boyamalarının üzerinde geliştireceğiz.

Karenin 2-li boyaması için Burnside Teoremi'ni uygulayalım. Öncelikle Π_i hareketleri ile sabit kalan 2-li boyamaları inceleyerek sayısını hesaplayalım (Şekil:2.1 ve Şekil:2.2'yi kullanarak). Her bir Π_i için hesapladığımız $\Psi(\Pi_i)$ 'ler gibi Π_i 'nin sabit bırakması gereken boyamaların hangileri olduğunu ve bunların sayısını matematiksel olarak tahmin etmemizi sağlayan bir örneğe bakalım. Π_i 'lerin ve bunların sabit bıraktığı boyamaların bir tablosunu yapmak yararlı olur; Şekil:2.8'deki (i) ve (ii) kolonlarına bakalım ((iii) ve (iv) kolonları daha sonra geliştirildi).

0° rotasyonu olan Π_1 , tüm köşeleri ve buna bağlı olarak tüm boyamaları sabit bırakır. Bu yüzden $\Psi(\Pi_1)=16$ 'dır. 90° rotasyonu olan Π_2 ; a,b,c,d köşelerinin devresel olarak yer değişimidir. 90° rotasyonunun sabit bırakıyor olmasının anlamı; bir boyamadaki her köşenin 90° rotasyonundan sonra, rotasyon öncesindeki rengiyle aynı renkte olmasıdır. Π_2 , a'yı b'ye götürdüğünden Π_2 'nin sabit bıraktığı bir boyamada b ve a'nın aynı renge sahip olması gerekir. Aynı şekilde, bir boyama c'yi b'nin rengine, d'yi c'nin rengine ve a'yı d'nin rengine sahip yapmalıdır. Söylediklerimizin hepsini birlikte düşünürsek, sadece köşelerin tamamen siyah veya tamamen beyaz boyanması durumunda yani C_1 ve C_{16} 'da, Π_2 boyamaları sabit bırakır. Bu yüzden $\Psi(\Pi_2)=2$ olur. Genel olarak bir C boyamasının Π ile sabit kalması için gerek ve yeter koşul, her v köşesi için, C boyamasındaki v 'nin rengi ile $\Pi(v)$ 'nin renginin aynı olmasıdır. Bu yüzden simetri $\Pi(v)$ rengini değiştirmez.

(i)	(ii)	(iii)	(iv)
Π_i hareketi	Π_i 'nin sabit bıraktığı boyamalar	devresel durum gösterimi	Π_i 'nin sabit bıraktığı boyamaların envanteri
Π_1	16- tüm boyama	x_1^4	$(b+w)^4 = 1b^4 + 4b^3w + 6b^2w^2 + 4bw^3 + 1w^4$
Π_2	$2 - C_1, C_{16}$	x_4	$(b^4+w^4) = 1b^4 + 1w^4$
Π_3	$4 - C_1, C_{10}, C_{11}, C_{16}$	x_2^2	$(b^2+w^2)^2 = 1b^4 + 2b^2w^2 + 1w^4$
Π_4	$2 - C_1, C_{16}$	x_4	$(b^4+w^4) = 1b^4 + 1w^4$
Π_5	$4 - C_1, C_6, C_8, C_{16}$	x_2^2	$(b^2+w^2)^2 = 1b^4 + 2b^2w^2 + 1w^4$
Π_6	$4 - C_1, C_7, C_9, C_{16}$	x_2^2	$(b^2+w^2)^2 = 1b^4 + 2b^2w^2 + 1w^4$
Π_7	$8 - C_1, C_2, C_4, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{14}, C_{16}$	$x_1^2 x_2$	$(b+w)^2 (b^2+w^2) = 1b^4 + 2b^3w + 2b^2w^2 + 2bw^3 + 1w^4$
Π_8	$8 - C_1, C_3, C_5, C_{10}, C_{11}, C_{13}, C_{15}, C_{16}$	$x_1^2 x_2$	$(b+w)^2 (b^2+w^2) = 1b^4 + 2b^3w + 2b^2w^2 + 2bw^3 + 1w^4$

Şekil:2.8

180° rotasyonu olan Π_3 'ü düşünelim. (Şekil:2.2)'de gösterilen Π_3 'ün tanımına bakarsak Π_3 'ün a ve c köşeleri ile b ve d köşelerinin yer değişimine sebep olduğunu görürüz. Bununla beraber Π_3 'ün sabit bıraktığı bir boyama a ile c köşesini ve b ile d köşesini aynı renge sahip yapmak zorundadır (ayrıca başka bir koşula gerek yoktur). a, c için farklı iki renkten biri ve b, d için de farklı iki renkten biri seçilebilir. Bu demektir ki $2 \times 2 = 4$ tane boyama sabit kalır. Bunlar $C_1, C_{10}, C_{11}, C_{16}$ 'dır. Bu yüzden $\Psi(\Pi_3) = 4$ olur.

Π_4 simetrisi, 270° 'lik veya 90° 'lik bir rotasyondur ve bu yüzden Π_2 simetrisi ile benzerdir. Dolayısıyla $\Psi(\Pi_4) = \Psi(\Pi_2) = 2$ olur. Yatay rotasyon olan Π_5 , a ile b köşelerini ve c ile d köşelerini yer değiştirir. 180° rotasyonu olan Π_3 gibi, Π_5 simetrisi de a ile b ve c ile d aynı renkte ise boyamaları sabit bırakır. a ile b ve c ile d

için 2 renk seçilebileceğinden Π_3 gibi Π_5 de, $\Psi(\Pi_5) = 2 \times 2 = 4$ boyamayı sabit bırakır. Bunlar; C_1, C_6, C_8, C_{16} olur.

Π_6 , $2 \times 2 = 4$ tane karenin 2-li boyamasını sabit bırakır ve köşelerin ikişerli çiftlerini yer değiştirir. Formal olarak, bir yer değiştirme, iki eleman için bir dairesel permütasyondur. Eğer Π_i , köşelerin bir kümesinin devresel permütasyonu ise (yani Π_i 'de köşelerin formu Π_i 'nin bir devresidir) tüm sabit bırakan boyamaların sayımı şu gerçeğe dayanır; Π_i köşelerin bir alt kümesinin devresel permütasyonu ise Π_i ile sabit kalan bir boyamada bu köşelerin devresel permütasyonu aynıdır.

Bölüm 2'de bahsedildiği gibi, herhangi bir Π_i , komşu devrelerin çarpımı gibi gösterilebilir. Örneğin $\Pi_3 = (ac)(bd)$ ve $\Pi_4 = (adcb)$. Her bir simetri için, bir devresel gösterime ve devrelerin sayısının hesaplanmasına ihtiyaç duyarız. İleride kullanmak için, devreleri uzunluklarına göre sınıflandıralım. Bir simetrinin devresel bilgisini şöyle kodlayacağız; Π_i 'de 1 boyutlu (1 köşe içeren) bir devre için bir x_1 çarpanı içeren, 2 boyutlu bir devre için bir x_2 çarpanı içeren, ve böyle devam ederek oluşturulan bir ifade elde ederiz. Bu ifadeye, bir simetrinin **devresel yapı gösterimi** denir.

Π_2 ve Π_4 'ün devresel yapı gösterimi x_4 'tür, çünkü her biri bir dördü devre içerir ve $\Pi_2 = (abcd)$ ve $\Pi_4 = (adcb)$ olur. Π_3, Π_5 ve Π_6 için devresel yapı gösterimi $x_2 x_2$ veya x_2^2 şeklindedir, çünkü her biri iki tane 2-li devre içerir. (Şekil:2.8)'deki (iii) kolonu her bir simetrinin devresel yapı gösterimini verir.

Π_1 için ne diyebiliriz (bu düşünceye göre)? Önceden, Π_1 tüm boyamaları sabit bırakır demek yeterliydi. Şimdi, bir köşenin yer değiştirme ile sabit kalmasının bir 1-li devre gibi sınıflandırma olduğuna dikkat çekelim. Böylece Π_1 , 4 tane 1-li devre içerir ve devresel yapı gösterimi x_1^4 olur. Π_1 'in, $2^4 = 16$ boyamayı sabit bırakacağını tahmin ederiz. Bu, Π_1 'in tüm 2-li boyamaları sabit bıraktığını gösterir.

Herhangi Π_i için, Π_i 'nin devresel yapı gösterimindeki her bir x_i yerine 2 yazarsak sabit bırakan boyamaların sayısını buluruz (veya genel olarak x_i yerine renk sayısını yazarız). Buradan sabit bırakan boyamalarının sayısını

$\Psi(\Pi) = 2^{\Pi'nin\ devrelerinin\ sayisi}$ olur. Bu teoriyi Π_7 ve Π_8 'e uygulayalım. Bu yansımaların her biri için devresel yapı gösteriminin $x_1^2 x_2$ olduğu görülmektedir (Şekil:2.2) ve böylece her biri için $2^2 \times 2 = 8$ tane boyamanın sabit kaldığını bulabiliriz.

Yüzen karenin farklı 2-li boyamalarının sayısı için Burnside Teoremi geçerlidir. (Şekil:2.8)'de (ii) kolonundaki sayıları toplayıp 8'e bölersek:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\Pi \in G} \Psi(\Pi) = \frac{1}{8} (16 + 2 + 4 + 2 + 4 + 4 + 8 + 8) = \frac{1}{8} (48) = 6$$

Bu sonucu elde etmek için daha kolay bir yol vardır. İlk olarak, her bir simetrisinin devresel yapı gösterimi cebirsel olarak toplanır, aynı terimler bir arada toplanır ve 8'e bölünür. (Şekil:2.8)'deki (iii) kolonundan, $\frac{1}{8}(x_1^4 + 2x_4 + 3x_2^2 + 2x_1^2 x_2)$ olduğunu görürüz. Bu ifadeye simetrisinin bir G grubu için **dönme indeksi** denir [$P_G(x_1, x_2, \dots, x_k)$ şeklinde gösterilir]. Her bir x_i yerine, $x_i = 2$ yazarsak bu, $P_G(2, 2, \dots, 2)$ olur (yaptığımız işlemleri ters çevirirsek, ilk olarak her bir devresel yapı gösteriminde her bir x_i yerine, $x_i = 2$ koyarız ve sonra toplarız).

Kabul edelim ki 2 renk yerine 3 rengimiz olsun. Daha sonra aynı düşünce uygulanır fakat şimdi her bir devrede köşelerin rengi için 3 seçim vardır. Eğer bir simetri k devreye sahipse, karenin 3^k tane 3-lü boyamalarını sabit bırakır ve farklı 3-lü boyamaların sayısı $P_G(3, 3, \dots, 3)$ olur. Daha genel olarak herhangi bir m için, $P_G(m, m, \dots, m)$ yönlendirilmemiş bir karenin birbirine denk olmayan m -li boyamalarının sayısı olacaktır. Bu boyama sayma formülünü elde etmek için kullandığımız argüman, dönme indeksi ile birlikte herhangi bir kümenin simetrisinin boyamaları için de geçerlidir.

2.5.1 Teorem:

S , boş olmayan bir küme ve G , S 'nin simetrilerinin bir grubu olsun. Bu grup S 'nin m -li boyamalarının kümesi üzerinde bir denklik bağıntısı oluşturacak şekilde S 'ye etkir. S 'nin, birbirine denk olmayan m -li boyamalarının sayısı $P_G(m, m, \dots, m)$ 'i verir.

Örnek 2.7:

Teoremi kullanarak Örnek 2.6'daki kolye problemini tekrar çözelim. Burada boncuklar, çember etrafında serbestçe dönebiliyordu fakat yansımalara bu anlamda izin verilmiyordu. Boncuklar için üç renk uygundur ve ipe dizilmiş n boncuğun 3-lü boyamasının sayısı, devresel olarak yönlendirilmemiş bir n -gen'in 3-lü boyamasının sayısına eşittir. $n = 3$ olduğunda $0^\circ, 120^\circ$ ve 240° rotasyonları için devresel yapı

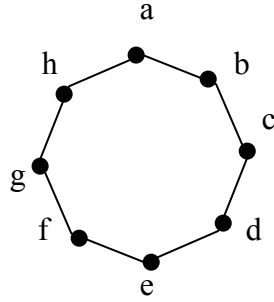
gösterimi sırasıyla x_1^3, x_3 ve x_3 'tür. Böylece $P_G = \frac{1}{3}(x_1^3 + 2x_3)$ ve ipe dizilmiş üç

boncuğun farklı 3-lü boyamasının sayısı da $P_G(3,3,3) = \frac{1}{3}(3^3 + 2 \times 3) = 11$ olur. Daha

genel olarak ipe dizilmiş 3 boncuğun m -li boyamasının sayısı

$$P_G(m, m, m) = \frac{1}{3}(m^3 + 2m) \text{ olur.}$$

Daha karışık bir durumu deneyelim: $n = 8$ (Şekil:2.9). Buradaki rotasyonlar $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 180^\circ, 225^\circ, 270^\circ$ ve 315° 'dir. 0° rotasyonu sekiz tane 1-li devre içerir. 45° rotasyonunun devresel yer değişimi $(abcdefgh)$ 'dir. 90° rotasyonu $(aceg)(bdfh)$ şeklindeki devresel ayrılışa sahiptir. 135° rotasyonunun devresel yer değişimi $(adgbehcf)$ olur. 180° rotasyonu ise $(ae)(bf)(cg)(dh)$ şeklinde bir devresel ayrılışa sahiptir.



Şekil:2.9

Böylece devresel yapı gösterimi 0^0 rotasyonu için: x_1^8 , 45^0 rotasyonu için: x_8 , 90^0 rotasyonu için: x_4^2 , 135^0 rotasyonu için: x_8 , ve 180^0 rotasyonu için: x_2^4 olur. 225^0 , 270^0 ve 315^0 rotasyonları sırasıyla 135^0 , 90^0 ve 45^0 rotasyonlarının ters rotasyonlarıdır ve onlarla aynı devresel yapı gösterimlerine sahiptirler. Terimleri toplarsak:

$$P_G = \frac{1}{8}(x_1^8 + 4x_8 + 2x_4^2 + x_2^4)$$

elde ederiz. 8 boncuklu kolyenin farklı m -li boyama sayısı:

$$\frac{1}{8}(m^8 + 4m + 2m^2 + m^4)$$

olup, $m = 3$ için:

$$\frac{1}{8}(3^8 + 4 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3^4) = \frac{1}{8}(6561 + 12 + 18 + 81) = 834$$

elde ederiz.

Örnek 2.8:

Örnek 2.3'te düzgün dörtyüzlünün 12 simetrisini listelemiştik ((Şekil:2.4)'e bak): 0^0 yansıması, bir köşe ve karşı yüzün ortasından geçen sekiz tane 120^0 ve 240^0 yansıması, komşu olmayan kenarların ortasından geçen üç tane 180^0 yansıması. Şimdi, yüzen düzgün dörtyüzlünün köşelerinin 3-lü boyamasının sayısını elimizdeki teoreme göre bulacağız (oluşturacağız).

0^0 yansımasının devresel yapı gösterimi, x_1^4 'tür. Ekseni a köşesinden ve bcd yüzünün ortasından geçen 120^0 rotasyonunun devresel ayrılışı: $(a)(bcd)$ ve bunun devresel yapı gösterimi: x_1x_3 'tür. Diğer 120^0 ve 240^0 simetrisi de aynı devresel yapı gösterimine sahiptir. ab ve cd kenarlarının ortasından geçen 180^0 yansımasının devresel ayrılışı $(ab)(cd)$ ve devresel yapı gösterimi x_2^2 şeklindedir. Diğer 180^0 yansımaları aynı devresel yapı gösterimine sahiptir. Böylece:

$$P_G = \frac{1}{12}(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2) \text{ olur.}$$

Böylece köşelerin farklı 3-lü boyamalarının sayısı:

$$\begin{aligned} P_G(3,3,3,3) &= \frac{1}{12}(3^4 + 8 \times 3 \times 3 + 3 \times 3^2) \\ &= \frac{1}{12}(81 + 72 + 27) = 15 \quad \text{olur.} \end{aligned}$$

2.6 PÓLYA'NIN FORMÜLÜ

Bir pattern envanter için en son hedefimiz bir formül geliştirmek. Burada pattern envanter bir generating fonksiyondur ve renklerin farklı miktarda kullanılması ile yönlendirilmemiş bir şeklin kaç tane boyaması olduğunu söyler. Örneğin yönlendirilmemiş karenin siyah-beyaz boyaması için pattern envanter $1b^4 + 1b^3w + 2b^2w^2 + 1bw^3 + 1w^4$ olur. Pattern envanterdeki katsayıları, birçok Burnside Teoremi tipindeki sayma problemlerinin sonucu gibi bakılabilir. Burnside

Teoremi'ni tekrar hatırlayalım. T^n deki denklik sınıflarının sayısı olan N , S 'nin boyamalarının bir koleksiyonu olmak üzere (bir düzgün dörtyüzlünün yüzeyleri veya bir karenin köşelerinin kümesidir), S 'nin simetrilerinin sebep olmasından dolayı şöyle verilir:

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{\Pi \in G} \Psi(\Pi) \quad (2.4)$$

Bölüm 2.4'ten şunu görürüz:

$$\Psi(\Pi) = 2^{\Pi'nin\ devrelerinin\ sayısı}$$

Yüzen karenin 2-li boyaması konusunda, (Şekil:2.1)'deki boyamalar siyah ve beyaz renkli köşelerin sayısına göre şu gruplara ayrılır:

$$\begin{aligned} T_0 &= \{C_1\} \\ T_1 &= \{C_2, C_3, C_4, C_5\} \\ T_2 &= \{C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}\} \\ T_3 &= \{C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}\} \\ T_4 &= \{C_{16}\} \end{aligned}$$

Pattern envanterde katsayılar, mesela b^3w 'nin katsayısı, birbirine denk olmayan 3 köşenin siyah ve 1 köşenin beyaz olduğu boyamaların sayısını gösterir. Bir karenin simetrilerinin G grubunu sadece T kümesine etiketirsek bu sayı (2.4) eşitliğinden bulunur. Burnside Teoremi G altında kapalı olan herhangi bir boyamaya uygulanabilir. G altında kapalı terimi, herhangi $\Pi \in G$ için ve $C \in T$ boyaması için, $\Pi(C)$ T 'de başka bir boyamaya eşittir anlamına gelir. T_1 G altında kapalıdır, çünkü herhangi 3 siyah-1 beyaz şeklindeki bir boyamaya etki eden simetri sonuçta 3 siyah-1 beyaz şeklinde bir boyama ortaya çıkarır. Aynı şey diğer T_k 'lar için de doğrudur. Böylece pattern envanterde $b^{4-k}w^k$ 'nin katsayısı, G T_k 'ye etkideğinde (2.4) eşitliğinden bulunur.

Bu beş alt problemi aynı anda çözmeye çalışalım. Yani (Şekil:2.8)'deki tablonun ilk satırında $\{(iv) \text{ kolonuna bakalım}\}$ her T_k için Π_1 'in sabit bıraktığı 2-li boyamanın sayısını daha sonra ikinci satırda her T_k için Π_2 'nin sabit bıraktığı 2-li boyamaların sayısını ve daha sonra Π_3 ve diğerlerinin sabit bıraktığı 2-li boyamaların sayısını listeleyelim. Daha sonra tüm satırlardaki ilk sayıları (4'ü de siyah olan 2-li boyamaların sayısı) toplayıp 8'e bölersek pattern envanterdeki b^4 'ün katsayısını elde ederiz, tüm satırlardaki ikinci sayıları toplayıp 8'e bölersek b^3w 'nin katsayısını buluruz ve bu şekilde ilerleyerek diğer katsayıları da buluruz.

Π_1 hareketi tüm C 'leri sabit bıraktığı için, ilk satır 1, 4, 6, 4, 1 olur. Bu bilgiyi aynı formda pattern envanter için kullanalım. $b^4 + 4b^3w + 6b^2w^2 + 4bw^3 + w^4$ yazımında sabit boyamaların bir envanteridir. Dikkat edilirse bu envanter basit olarak $(b+w)^4 = (b+w)(b+w)(b+w)(b+w)$ şeklindedir. Burada her köşe için bir $(b+w)$ vardır. Π_2 için envanter $b^4 + w^4$ olur, Π_3 için envanteri $b^4 + 2b^2w^2 + w^4$ şeklinde buluruz. Bu ifade $(b^2 + w^2)^2$ 'nin çarpanlarına ayrılmış halidir.

Bazı Π hareketleri ile sabit kalan boyamaların bütün sayılarını bulurken daha önce yaptığımız gibi, sabit boyamaların envanterlerinde bir patterne bakalım. Yine pattern için anahtar Π 'nin sabit bıraktığı bir boyamadır. Π 'nin bir devresindeki tüm köşeler aynı renkte olmalıdır. Π_2 , tüm 4 köşeyi içeren tek devreye sahip olduğu için tüm köşeleri siyah veya tüm köşeleri beyaz olacaktır. Buradan envanter $b^4 + w^4$ olur. Π_3 hareketi 2 tane 2-li devreye sahiptir. Bunlar; (ac) ve (bd) 'dir. Bir sabit boyamada tüm 2-li devreler için 2 siyah veya 2 beyaz renk kullanılır. Dolayısıyla bir devrenin boyutu 2 ise envanteri $b^2 + w^2$ olur. Böyle mümkün 2 devreye sahip envanter $(b^2 + w^2)(b^2 + w^2)$ olur.

Π_i 'nin sabit boyamalarının envanteri $(b^j + w^j)$ çarpanlarının çarpımı olacaktır. Bu Π_i 'nin her j -li devresi için bir çarpan yazılır. Bu yüzden Π_i 'nin her boyutundaki devre sayısını bilmemiz gerekir. Fakat bu, devresel yapı gösteriminde kesin olarak görünür. Gerçekten devresel yapı gösteriminde her devre yerine $x_j = (b^j + w^j)$ yazılırsa envanterin görünümü tam olarak belli olur. Bu metotla sabit

boyamaların envanterlerinin kalanlarını hesaplarız. (Şekil:2.8)'e bakalım. Özellikle Π_7 için, (ii) kolonundaki boyamaların listesi ile envanter karşılaştırılıp kontrol edilmelidir. Pattern envanter, sabit boyamaların envanterlerinde kuvvetleri aynı olan terimlerin toplanıp 8'e bölünmesiyle elde edilir.

Daha önce Bölüm 2.5'te olduğu gibi, hesaptan tasarruf etmek ve daha yoğun bir formül elde etmek için önce devresel yapı gösterimlerinde toplama yapar 8'e böleriz. Daha sonra her devre için $x_j = (b^j + w^j)$ yazarız ve polinomlardaki cebir işlemlerini yaparak sonuca gideriz. Bu yaklaşımda ilk adım, dönme indeksinin $P_G(x_1, x_2, \dots, x_k)$ olduğunu kabul etmektir. Böylece P_G 'de x_j yerine, $x_j = (b^j + w^j)$ yazılarak pattern envanter elde edilir.

Eğer siyah, beyaz ve yeşil gibi üç renk olursa j boyutlu her bir devre bir sabit boyamada $(b^j + w^j + g^j)$ 'nin bir envanterine sahip olur. Bu yüzden P_G 'de $x_j = (b^j + w^j + g^j)$ kümesini elde edebiliriz. Bu durum herhangi bir şekil ve herhangi sayıda renk için uygulanabilir. Daha genel durumlar için aşağıdaki teoremi veririz.

2.6.1 Teorem (Pólya'nın Sayma Formülü)

S bir küme, G de S 'nin permütasyonlarının bir grubu olsun ve S 'nin boyamalarına etkisin. Bu durumda S 'nin boyamalarının bir denklik sınıfını elde ederiz. S 'nin denk olmayan 2-li boyamalarının envanteri şu generating fonksiyon ile verilir:

$$P_G \left[(b + w), (b^2 + w^2), (b^3 + w^3), \dots, (b^k + w^k) \right]$$

c_1, c_2, \dots, c_m boyamalarının kullanıldığı envanter:

$$P_G \left(\sum_{j=1}^m c_j, \sum_{j=1}^m c_j^2, \dots, \sum_{j=1}^m c_j^k \right)$$

olur. Bir an için, sabit kalan 2-li boyamaların sayısının hesaplanması problemine dönelim. Bu sayı pattern envanterin katsayılarının toplamıdır. Katsayıların toplamı için b ve w yerine 1 yazarız veya buna denk olarak P_G 'de x_j yerine 2 yazarız ve Bölüm 2.5'teki aynı formülü elde ederiz. Eğer m renge izin veriliyorsa P_G 'de $x_j = m$ yazarız ve böylece Bölüm 2.5'teki teoremdeki formülü $[P_G(m, m, m, \dots, m)]$ elde ederiz.

Diğer birçok üreteç fonksiyon probleminde olduğu gibi, bir üreteç fonksiyonun pattern envanter için $(c_1^i + c_2^i + \dots + c_m^i)^r$ şeklinde açılması sıkıcı olabilir. m ve r büyük olduğunda bu işlem bilgisayarda yapılır (cebrik işlemlerle).

İspat: $n=4$ için oluşturduğumuz simetri gruplarını farklı notasyonla ele alalım.

Π	Devresel Ayrılışı	Tipi (e_1, e_2, \dots, e_n)	Devresel Durum Gösterimi
Π_1	$(a)(b)(c)(d)$	$(4, 0, 0, 0)$	$x_1^4 x_2^0 x_3^0 x_4^0 = x_1^4$
Π_2	$(abcd)$	$(0, 0, 0, 1)$	$x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^1 = x_4$
Π_3	$(ac)(bd)$	$(0, 2, 0, 0)$	$x_1^0 x_2^2 x_3^0 x_4^0 = x_2^2$
Π_4	$(adcb)$	$(0, 0, 0, 1)$	$x_1^0 x_2^0 x_3^0 x_4^1 = x_4$
Π_5	$(ab)(cd)$	$(0, 2, 0, 0)$	$x_1^0 x_2^2 x_3^0 x_4^0 = x_2^2$
Π_6	$(ad)(bc)$	$(0, 2, 0, 0)$	$x_1^0 x_2^2 x_3^0 x_4^0 = x_2^2$
Π_7	$(a)(bd)(c)$	$(2, 1, 0, 0)$	$x_1^2 x_2^1 x_3^0 x_4^0 = x_1^2 x_2$
Π_8	$(ac)(b)(d)$	$(2, 1, 0, 0)$	$x_1^2 x_2^1 x_3^0 x_4^0 = x_1^2 x_2$

Şekil:2.10

Buradan hareketle dönme indeksinin;

$$P_G(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\Pi \in G} x_1^{e_1} x_2^{e_2} x_3^{e_3} x_4^{e_4}$$

olduğu açıktır. Burada $x_i = m$ yazılarak N sayısı bulunur ($i=1,2,3,4$). Burnside Teoremi yardımıyla;

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{\Pi \in G} x_1^{e_1} x_2^{e_2} \dots x_n^{e_n}$$

dir. Çünkü, $\Psi(\Pi)$ 'ler Π ile sabit kalan boyamaların sayısı idi ve

$\Psi(\Pi) = m^{\Pi'nin\ devrelerinin\ sayısı}$ (m , renk sayısı) olduğunu söylemiştik. Π 'nin devrelerinin sayısı $= e_1 + e_2 + \dots + e_n$ olacağından,

$$\Psi(\Pi) = m^{e_1 + e_2 + \dots + e_n} = m^{e_1} m^{e_2} \dots m^{e_n}$$

olur. Burada (e_1, e_2, \dots, e_n) ifadesine “ Π 'nin tipi” diyoruz. Burnside Teoremi yardımıyla birbirine denk olmayan boyamaların sayısı;

$$\begin{aligned} \frac{1}{|G|} \sum_{\Pi \in G} \Psi(\Pi) &= \frac{1}{|G|} \sum_{\Pi \in G} m^{e_1} m^{e_2} \dots m^{e_n} \\ &= P_G(m, m, \dots, m) \end{aligned}$$

olduğunu yazarız.

Örnek 2.9:

Farklı rotasyonlar altında 3 boncuklu kolye için siyah ve beyaz boncuk kullanarak pattern envanteri oluşturalım. Daha sonra aynı işi siyah, beyaz ve kırmızı boncuklar için tekrarlayalım.

Bölüm 2.5'teki Örnek 2.7'den $P_G = \frac{1}{3}(x_1^3 + 2x_3)$ olduğunu biliyoruz. Burada x_j yerine, $x_j = (b^j + w^j)$ ifadesini kullanırsak:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}[(b+w)^3 + 2(b^3 + w^3)] &= \frac{1}{3}[(b^3 + 3b^2w + 3bw^2 + w^3) + (2b^3 + 2w^3)] \\ &= \frac{1}{3}(3b^3 + 3b^2w + 3bw^2 + 3w^3) \\ &= b^3 + b^2w + bw^2 + w^3 \end{aligned}$$

olur. Bu sonuç deneysel olarak da elde edilebilir. Tüm boncukları siyaha veya beyaza boyamanın tek bir yolu vardır. Eğer bir boncuk beyaz ve diğerleri siyah ise, rotasyonla birlikte beyaz boncuk herhangi bir yerde olabilir. Bu yüzden sadece bir kolye bir beyaz ve iki siyah boncuktan oluşur. Aynı şey, bir siyah ve iki beyaz boncuklu kolyenin simetrisinde de vardır.

Şimdi, 3 boncuklu kolye için 3 renk kullanalım. P_G 'de x_j yerine, $x_j = (b^j + w^j + r^j)$ yazarsak $\frac{1}{3}[(b+w+r)^3 + 2(b^3 + w^3 + r^3)]$ ifadesini elde ederiz.

Bu ifadenin açılması yerine dolaylı bir yol kullanacağız. Belki yine envanterin her teriminin katsayısı 1'dir. Tüm envanterlerin katsayılarının 1 olup olmadığını anlamak için genel bir test vardır: N^* ; pattern envanterdeki terimlerin sayısı, N de patternin toplam sayısıdır [Yani $P_G(m, m, \dots, m)$ dir]. N , envanterdeki katsayıların toplamına eşit olduğu için, $N^* = N$ olması için gerek ve yeter şart her bir terimin katsayısının 1 olmasıdır. Pattern envanterdeki terimlerin N^* sayısı, n eleman olduğunda (köşe, boncuk v.s.) m renk için $C(n+m-1, n)$ şeklindedir. Elimizdeki durum için $m = 3$ ve $n = 3$ olduğundan $N^* = (3 + 3 - 1, 3) = \binom{5}{3} = 10$ olur. Bölüm 2.4'teki Örnek 3'ten $N = 11$ olduğunu biliyoruz. Tüm terimlerin katsayılarının 1 olmadığını da bildiğimize göre $N^* \neq N$ olduğunu söyleriz.

Diğer yandan $N^* = N + 1$ olmasının tek yolu envanterin dokuz teriminin katsayısının 1 ve bir teriminin katsayısının 2 olmasıdır. Fakat yukarıdaki düşüncede

sadece bir kolyenin tüm boncukları aynı renktedir ve sadece bir kolyede bir boncuk A rengine sahipken diğer iki boncuk B rengine sahiptir. 3 boncuklu kolye için olası diğer durumlarda sadece 3 renk kullanılır ve her renkten boncuk olur. Böylece, her renkten bir boncuğun olduğu 2 kolye olmalıdır (3 boncuğun dairesel sıralanışı kaç taneyse o kadar kolye vardır) ve 3 boncuklu kolyenin siyah, beyaz ve kırmızı için pattern envanteri:

$$b^3 + w^3 + r^3 + b^2w + b^2r + w^2b + w^2r + r^2b + r^2w + 2bwr$$

olur.

Örnek 2.10:

Rotasyonlar sonucu birbirinden farklı olan, 3 siyah ve 4 beyaz boncuk kullanılarak oluşturulacak 7 boncuklu kolyelerin sayısını bulalım.

Pattern envanterdeki b^3w^4 'ün katsayısını belirlememiz gerekir. 0^0 rotasyonu dışında her rotasyon, boncuk sayısı bir asal sayı ise, bir devresel permütasyondur. Bu yüzden $P_G = \frac{1}{7}(x_1^7 + 6x_7)$ olur. Pattern envanter de: $\frac{1}{7}[(b+w)^7 + 6(b^7 + w^7)]$ olur.

Tekrar deneysel metotları kullanarak pattern envanterin açılımını basitleştirelim. Pattern envanterdeki $6(b^7 + w^7)$ ifadesinin b^3w^4 terimine bir katkısı olmadığı için onu ihmal edebiliriz. Böylece 3 siyah ve 4 beyaz boncuklu kolyenin sayısı basit olarak:

$$\frac{1}{7}[(b+w)^7 \text{ 'deki } b^3w^4 \text{ 'ün katsayısı}] = \frac{1}{7} \binom{7}{3}$$

Örnek 2.11:

Bir düzgün dörtyüzlünün kenarlarının siyah-beyaz boyamasının pattern envanterini bulalım.

Örnek 2.8'de düzgün dörtyüzlünün köşelerinin dönme indeksini hesapladığımız halde, kenarların simetrisi için de farklı dönme indekslerine ihtiyacımız var.

Boyanabilir nesnelerin kümesinde altı kenar olduğu için düzgün dörtyüzlünün simetrilerini kenarlarının bir yer değişimi olarak düşünmeliyiz.

0° dönmesinin tüm kenarları sabit bıraktığı açıktır ve bu yüzden x_1^6 şeklinde devresel yapı gösterimine sahiptir. Bir köşenin 120° (veya 240°) dönmesi, bir köşeden karşı yüzün ortasına doğru olan eksen boyunca olduğundan bu köşeye komşu olan kenarları da devresel olarak döndürür. Bu yüzden 120° (veya 240°) dönmesinin devresel yapı gösterimi x_3^2 'dir.

Karşı kenarlara ait 180° dönmesi, bu iki kenarı sabit bırakır (Şekil:2.4'e bak). 2 kez 180° döndürülürse düzgün dörtyüzlünün orijinal pozisyonu elde edilir. Diğer dört kenar sabit kalmaz, bunlar 2-li devrenin içindedir. Bu yüzden 180° dönmesinin devresel yapı gösterimi $x_1^2 x_2^2$ olur. Buradan $P_G = \frac{1}{12}(x_1^6 + 8x_3^2 + 3x_1^2 x_2^2)$ olur.

Burada x_j yerine, $x_j = (b^j + w^j)$ yazarsak:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} \left[(b+w)^6 + 8(b^3 + w^3)^2 + 3(b+w)^2 \cdot (b^2 + w^2)^2 \right] \\ &= \frac{1}{12} \left[(b^6 + 6b^5w + 15b^4w^2 + 20b^3w^3 + 15b^2w^4 + 6bw^5 + w^6) \right. \\ & \left. + (8b^6 + 16b^3w^3 + 8w^6) + (3b^6 + 6b^5w + 9b^4w^2 + 12b^3w^3 + 9b^2w^4 + 6bw^5 + 3w^6) \right] \\ &= \frac{1}{12} (12b^6 + 12b^5w + 24b^4w^2 + 48b^3w^3 + 24b^2w^4 + 12bw^5 + 12w^6) \\ &= b^6 + b^5w + 2b^4w^2 + 4b^3w^3 + 2b^2w^4 + bw^5 + w^6 \end{aligned}$$

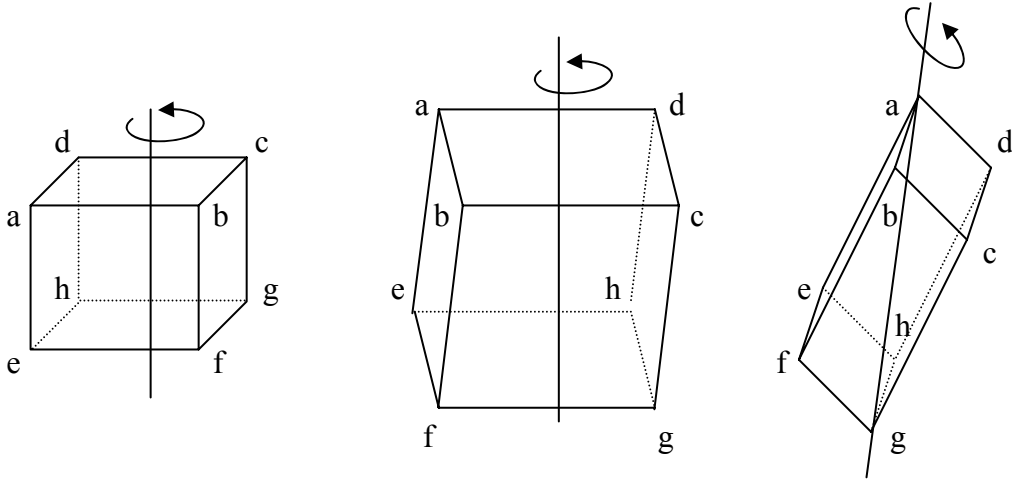
olur.

Örnek 2.12:

Yüzen bir küpün köşelerinin 2-li boyaması için pattern envanteri bulalım.

Küpün simetrisi, karşı yüzeylerin, karşı kenarların (komşu olmayan) ve karşı köşelerin dönmeleri ile oluşur. İlk olarak, 0° (sabit) hareketi vardır ve devresel yapı gösterimi x_1^8 'dir.

- a) Karşı Yüzeyler: $(abcd)$ ve $(efgh)$ karşı yüzey çiftinin (Şekil:2.10.a) 90° dönmesi ile $(abcd)(efgh)$ permütasyonu elde edilir. Bunun devresel yapı gösterimi x_4^2 'dir. Bir 270° dönmesi de aynı yapıdadır. 180° dönmesi $(ac)(bd)(eg)(fh)$ permütasyonu ile verilir. Bunun devresel yapı gösterimi x_2^4 şeklindedir. 3 çift ters yüzey vardır. Bu yüzden karşı yüzeylerin dönmesinin dönme indeksine toplam katkısı $6x_4^2 + 3x_2^4$ olur.



(a) Karşı Yüzeylerin
Dönmesi

(b) Karşı Kenarların
Dönmesi

(c) Karşı Köşelerin
Dönmesi

Şekil:2.11 Küpün Dönmesi

- b) Karşı Kenarlar: ad ve gf kenarlarının orta noktasından döndürürüz (Şekil:2.10.b). $(ad)(bc)(eh)(fg)$ permütasyonu olarak kabul edilen

180° dönmesinin devresel yapı gösterimi x_2^4 olur. 6 çift karşı kenar olduğu için kenarların dönmesinin toplam katkısı $6x_2^4$ olur.

- c) Karşı Köşeler: a ve g karşı köşelerini döndürürüz (Şekil:2.10.c). $(a)(bde)(chf)(g)$ permütasyonu olarak kabul edilen bir 120° dönmesinin devresel yapı gösterimi $x_1^2x_3^2$ olur. Bu permütasyonun ne yaptığını görmenin bir yolu, a 'ya komşu olan b,d,e köşelerinin a 'yı sabit bırakan herhangi bir harekette dairesel olarak yer değiştiklerine dikkat etmektir. Bir 240° dönmesi de $(a)(bed)(cfh)(g)$ şeklindedir ve devresel yapı gösterimi de yine $x_1^2x_3^2$ olur. Karşı köşelerden 4 çift olduğu için karşı köşelerin dönmesinin katkısı $8x_1^2x_3^2$ olur.

Terimleri birleştirirsek $P_G = \frac{1}{24}(x_1^8 + 6x_2^4 + 9x_3^4 + 8x_1^2x_3^2)$ 'yi elde ederiz. Küpün köşelerinin siyah ve beyaz boyamasının pattern envanteri:

$$\frac{1}{24} \left[(b+w)^8 + 6(b^4+w^4)^2 + 9(b^2+w^2)^4 + 8(b+w)^2(b^3+w^3)^2 \right]$$

olur.

Bir önceki örnekte b^8, b^7w, bw^7 ve w^8 terimlerinin katsayılarının 1 olduğunu kolayca görebiliriz. b^6w^2, b^5w^3 ve b^4w^4 terimleri sırasıyla generating fonksiyonun şu çarpanlarında vardır: $(\dots + 28b^6w^2 + 56b^5w^3 + 70b^4w^4 + \dots)$, $6(\dots + 2b^4w^4 + \dots)$, $9(\dots + 4b^6w^2 + 6b^4w^4 + \dots)$ ve $8(\dots + b^6w^2 + 2b^5w^3 + 4b^4w^4 + \dots)$. Toplanıp 24'e bölünürse:

$$\frac{1}{24} (\dots + 72b^6w^2 + 72b^5w^3 + 168b^4w^4 + \dots) = \dots + 3b^6w^2 + 3b^5w^3 + 7b^4w^4 + \dots$$

elde edilir (buradaki hataları yakalamak kolaydır, çünkü hataların çoğu katsayıların tamsayı olması gerekliliğiyle anlaşılır). Simetriden dolayı pattern envanterdeki bazı terimler ortadan kalkar ve

$$b^8 + b^7w + 3b^6w^2 + 3b^5w^3 + 7b^4w^4 + 3b^3w^5 + 3b^2w^6 + bw^7 + w^8$$

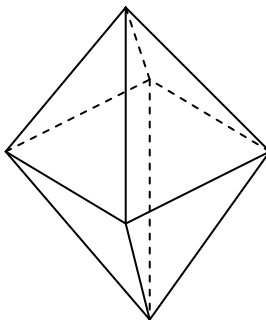
ifadesini elde ederiz.

BÖLÜM 3

3.1 PÓLYA’NIN SAYMA TEOREMİ’NİN KİMYADAKİ UYGULAMALARI

Pólya daha çok organik kimya ile ilgili örnekler vermiştir. Örneğin 6 hidrojen ve 6 karbon atomundan oluşan, “benzen” olarak bilinen bir kimyasal yapıyı çalışmalarında ele almıştır (kimyasal formülü: C_6H_6). Birçok farklı organik kimyasal, bir veya daha fazla hidrojen atomunun yerini tutan diğer atomlar sayesinde oluşturulabilir. Özellikle “**ikiz yer tutan benzen**” olarak bilinen C_6H_4XY şeklindeki bileşiklerin sınıfını göz önüne alalım. Burada X ve Y olarak gösterilen atomlar, iki hidrojen atomuyla yer değiştirmiştir. Böylece hidrojen atomunun yerine geçen herhangi iki atom, üç farklı bileşiğin ortaya çıkmasına olanak sağlar. Bu bileşikler özdeş kimyasal formüle sahip oldukları halde birbiriyle farklı kimyasal özelliklere sahiptirler. Bunlara **izomeridler** veya (günümüzde kullanılan ifadeyle) “**birbiriyle izomerler**” denir. Kimyacılar, verilen herhangi X ve Y atomu için neden sadece üç izomerin oluştuğunu hep merak etmişlerdir. Bu konuda, molekülün iç yapısına bağlı olarak yürütülen bazı varsayımlar vardır.¹⁸

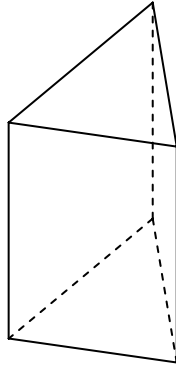
August Kekule’nin bu konudaki önerisi, bir düzgün altıgenin köşelerine karbon atomlarının yerleştirilmesi şeklinde bir düzenlemedir. Diğer önerisi ise aşağıdaki gibi bir sekizgenin köşelerinin kullanılmasıdır:



¹⁸ Pólya, G., Tarjan, R.E. and Woods, D.R., *Notes on Introductory Combinatorics*, Boston-Basel-Berlin 1983, s.61-70

Bu şekli değişik yollarla gözümüzde canlandırabiliriz. Gözümüzde canlandırmanın birinci yolu; bir küpün altı yüzünün merkezine yerleştirilmiş altı köşe şeklinde düşünmek, diğer bir yolu ise; iki kare piramidin, kare olan yüzlerinden birbirine yapıştırıldığı şeklinde düşündürmektir.

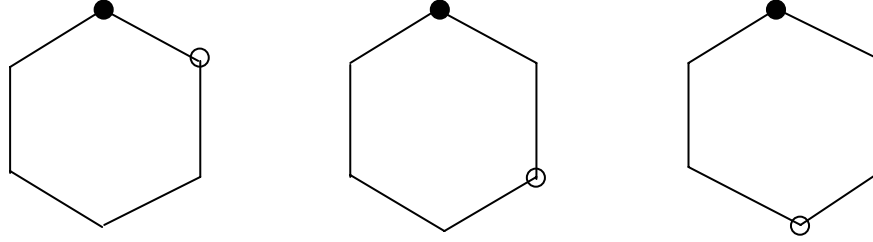
Üçüncü olası fikir de Albert Ladenburg'a aittir. Onun önerisi ise karbon atomlarının bir üçgen dik prizmanın köşelerine yerleştirilmesidir. Bu prizmanın uzun yüzü ile eşkenar üçgen olan diğer yüzü birbirine diktir.



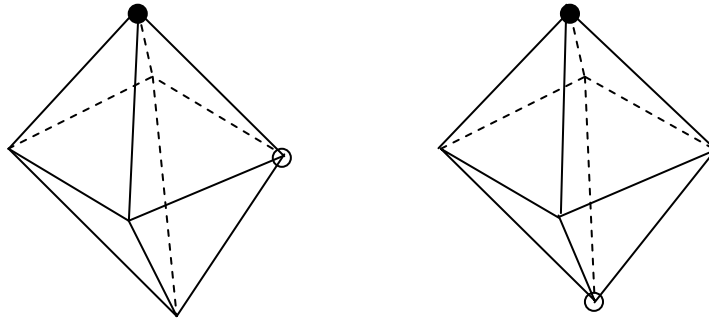
Bu fikirlerde ana prensip, her bir karbon atomunun diğeriyle aynı role sahip olabilmesidir, köşeler herhangi bir şekilde (yolla) ayırt edilemezler.

Hangi modelin (eğer varsa) doğru olduğuna nasıl karar vermeliyiz? X atomunu (●) şeklinde, Y atomunu (o) şeklinde göstereceğiz. Bu durumda kaç farklı görünüş (şekil) oluşur? Her bir modelde karbon atomları ayırt edici değildir (çünkü karbon atomları altıgenin köşelerine yerleştirildikten sonra 4 hidrojen atomu ve diğer iki hidrojen atomunun yerini tutan X ve Y atomları yerleştiriliyor. Dolayısıyla, yerleştirilen karbon atomları birbiriyle aynı olduğu için farklı görünümlere sebep olan hidrojen, X ve Y atomlarının yerleştirilişlerindeki farklılıktır). Bu yüzden X atomunu yerleştirdiğimiz yerin ayırıcı bir özelliği yoktur. O halde bu durumda, Y atomunun kaç farklı yolla yerleştirilebileceğine bakalım (yani karbon atomları altıgenin köşelerine yerleştirildikten sonra X atomu herhangi bir köşeye yerleştiriliyor ve bundan sonra Y atomunun farklı yerleştirilme sayısı kaç değişik görüntü oluşacağını

gösteriyor. Zaten aynı özellikteki 4 hidrojen atomu da X ve Y atomu yerleştirildikten sonra kalan 4 karbon atomunun üzerine yerleştiriliyor). Altıgen şeklindeki model için şu üç yol vardır:

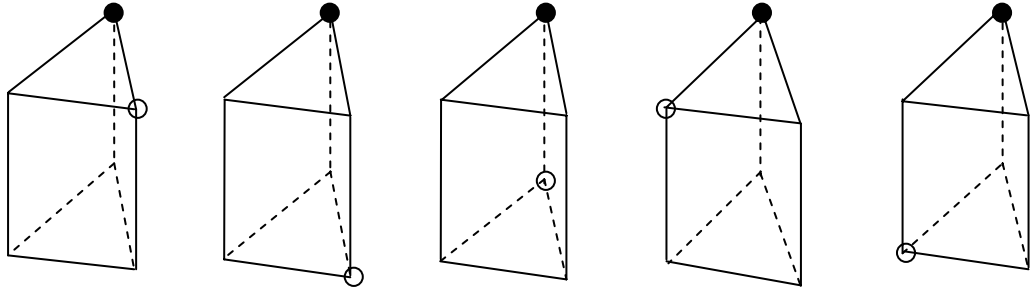


Y atomunun diğer iki pozisyonu, (sadece şeklin havada dönmesi durumunda) ilk iki şekildeki pozisyonla aynıdır, sekizgen modelde ise Y atomu sadece iki yolla yerleştirilebilir.



Bir köşeden geçen eksen boyunca dönme dışında diğer üç pozisyon da ilk şekildekiyle özdeştir.

Üçüncü modelde (üçgen dik prizmada), X atomu yer değiştirmemek kaydıyla, herhangi bir eksen etrafındaki dönmeler Y atomunu beş farklı pozisyona götürür. Bu şekilde oluşan bu beş durum da birbirinden farklıdır.



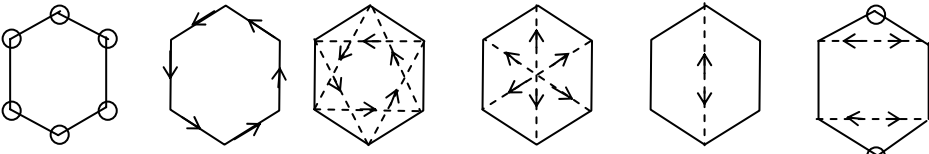
Burada sonuç itibariyle son iki şekil, ilk iki şeklin “**ayna görüntüsü**” dür. Yani son ikisini aynada yansıtırsak ilk ikisi gibi görünür. Burada şu soru akla gelir: ayna görüntüsü kimyasal olarak farklı olur mu? Bunun cevabı evettir. İki kimyasal birbirinin ayna görüntüsü ise kimyasal özellikleri birbirinden biraz farklıdır.

Eğer karbon atomları bir düzgün sekizgene yerleştirilirse C_6H_4XY 'nin sadece iki izomeri oluşturabilir. Eğer bir eşkenar üçgen dik prizmaya yerleştirilirse beş tane izomer oluşturabilir.

Gerçekte, kimyacılar göre sadece üç tane izomer bulunabilir, bu yüzden bu iki model de yanlış olmalıdır. Yani doğru olan altıgen modelin kullanılması olur.

Daha önce düzgün altıgenin dönme indeksinin nasıl bulunacağını incelemiştik. Tüm dönmelerinin sayısı = $6 \times 2 = 12$ olur. Aşağıdaki tablo yardımıyla altıgenin dönme indeksini bulacağız.

Dönme ekseni	Herhangi	Merkez	Merkez	Merkez	İki kenar	İki köşe
Dönme derecesi	0^0	$\pm 60^0$	$\pm 120^0$	180^0	180^0	180^0
Radyan cinsinden	0	$\pm 2\pi/6$	$\pm 2\pi/3$	$2\pi/2$	$2\pi/2$	$2\pi/2$
Eksen sayısı	1	1	1	1	3	3



$$P_G = \frac{x_1^6 + 2x_6 + 2x_3^2 + x_2^3 + 3x_2^3 + 3x_1^2 x_2^2}{12}$$

$$= \frac{x_1^6 + 2x_6 + 2x_3^2 + 4x_2^3 + 3x_1^2 x_2^2}{12} \quad (3.1.1)$$

(1)'de x_i yerine $x^i + y^i + z^i$ yazarsak (x : X atomu, y : Y atomu, z : kalan 4 tane H atomu), bulacağımız xy^4z^4 ün katsayısı, düzgün altıgende 1 tane X, 1 tane Y ve 4 tane Z atomunun bulunduğu farklı dizilişlerin sayısını verecek. (3.1.1)'deki kesrin payı:

$$(x + y + z)^6 + 2(x^6 + y^6 + z^6) + 2(x^3 + y^3 + z^3)^2 + 4(x^2 + y^2 + z^2)^3 + 3(x + y + z)^2 (x^2 + y^2 + z^2)^2$$

olur. Burada $(x + y + z)^6$ ifadesinden gelen xyz^4 'ün katsayısı $= \frac{6!}{1!1!4!} = \frac{6!}{4!} = 30$ bulunur. $2(x^6 + y^6 + z^6)$ teriminden ve bundan sonraki iki terimden de xyz^4 terimi gelmez. Son terim olan $3(x + y + z)^2(x^2 + y^2 + z^2)^2$ terimini açarsak:

$$3(x^2 + y^2 + z^2)(2xy + 2yz + 2xz)(x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2)$$

elde ederiz. Buradan $3 \cdot 2xyz^4 = 6xyz^4$ terimi gelir. Dolayısıyla (3.1.1) ifadesinden hareketle xyz^4 ün katsayısı $= \frac{30+6}{12} = 3$ bulunur ki bu da bize benzen bileşiğinde iki hidrojen atomunun yerine X ve Y gibi farklı iki atom koyulduğunda benzenin 3 tane izomerinin elde edilebileceğini gösterir.

3.2 ORGANİK BİLEŞİKLERİN İZOMERLERİNİN SAYISININ HESAPLANMASI VE PERMÜTASYONLARIN BİR GRUBU ÜZERİNDE GENEL KOMBİNATORİK PROBLEM¹⁹

1- $\Phi, \Phi^*, \Phi^{**}, \dots$ şekillerini vereceğiz. Bu şekiller nesnelerin, bazısı kırmızı bazısı mavi ve bazısı beyaz olan üç türünü içerecek. k tane kırmızı, l tane mavi ve m tane beyaz nesne içeren şekillerin sayısını a_{klm} ile göstereceğiz. Bu durumda;

$$\sum a_{klm} x^k y^l z^m = f(x, y, z)$$

$$f(x, y, z) = f_1, f(x^2, y^2, z^2) = f_2, f(x^3, y^3, z^3) = f_3, \dots$$

¹⁹ BIGGS, N.L., LLOYD, E.K. and WILSON, R.J, Graf Theory 1736-1936, Clarendon Press, London. s.70-71, (1986)

yazacağız.

2- Uzayda sabit p tane nokta ve bu noktaları yer değiştiren h dereceli bir \mathcal{H} grubunu ele alacağız. $H_{j_1 j_2 j_3 \dots j_p}$ \mathcal{H} uzayındaki j_1 noktayı sabit bırakan ve j_2 tanesini tersine yansıtan permütasyonların, derecesi 3 olan devrelerin, derecesi 4 olan devrelerin, ..., sayısını versin (Örneğin H_{1012} 1 noktayı sabit bırakan, 1 tane derecesi 3 olan, 2 tane derecesi 4 olan devre olduğunu gösterir). Bu permütasyonlar $[j_1, j_2, \dots, j_p]$ tipinde (indisleri üzerinden) adlandırılır (bkz. Pólya'nın Formülü'nün ispatı s.42-43). Burada $1j_1 + 2j_2 + \dots + pj_p = p$ olduğu açıktır.

3- $\Phi, \Phi^*, \Phi^{**}, \dots$ tane şekil arasından p şekil seçip bunları p noktaya yerleştirerek $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p)$ şeklinde bir küme sıralanışı elde ederiz. Bu şekiller tekrarlanabilir, yani aynı küme içinde birkaç noktada görülebilir. Eğer $\Phi_1 = \Phi_1^1, \Phi_2 = \Phi_2^1, \dots, \Phi_p = \Phi_p^1$ ise $(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p)$ ve $(\Phi_1^1, \Phi_2^1, \dots, \Phi_p^1)$ kümeleri özdeştir. Eğer $\Phi_{i_1} = \Phi_1^1, \Phi_{i_2} = \Phi_2^1, \dots, \Phi_{i_p} = \Phi_p^1$ olacak şekilde \mathcal{H} grubunun

$$S_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p \\ i_1 & i_2 & \dots & i_p \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

şeklinde bir permütasyonu varsa bu kümeler mod \mathcal{H}^c de denk kümedirler.

4- k tane kırmızı, l tane mavi ve m tane beyaz nesne içeren mod \mathcal{H}^c de birbirine denk olmayan kümelerin sayısını (A_{klm}) bulmaya çalışıyoruz. Önce şu üreteç fonksiyonu bulacağız:

$$\sum A_{klm} x^k y^l z^m = F(x, y, z)$$

$$5- \Phi_1 = \Phi_{i_1}, \Phi_2 = \Phi_{i_2}, \dots, \Phi_p = \Phi_{i_p} \text{ ise } (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_p) \text{ kümesi (3.2.1)}$$

permütasyonunu içerir diyoruz. S_i 'yi içeren ve k tane kırmızı, l tane mavi ve m tane beyaz nesne içeren kümelerin sayısı $A_{klm}(S_i)$ olsun. Eğer $S_i, [j_1, j_2, \dots, j_p]$ tipinde ise kolayca görülür ki;

$$\sum A_{klm}(S_i) x^k y^l z^m = f_1^{j_1} f_2^{j_2} \dots f_p^{j_p} \quad (3.2.2)$$

ifadesi tam olarak Euler'in klasik metodudur.

6- Sabit bir C kümesinin içerdiği \mathcal{H} 'nin permütasyonları, g dereceli G alt grubunu oluşturur. Birbirinden farklı ve C'ye denk olan kümelerin sayısı $\frac{h}{g}$ 'dir ve bu kümelerin her biri derecesi g olan birer alt grup içerir. Bu $\frac{h}{g}$ tane kümenin her biri aynı sayıda k, l, m tane kırmızı, mavi ve beyaz nesne içerir ve her biri

$$A_{klm}(S_1) + A_{klm}(S_2) + \dots + A_{klm}(S_h)$$

toplamında g cinsinden hesaplanır. Böylece bu toplamda (mod \mathcal{H} 'de) C'ye denk

kümeler ailesi $g \frac{h}{g} = h$ kez sayılmış olur. Yani;

$$A_{klm}(S_1) + A_{klm}(S_2) + \dots + A_{klm}(S_h) = h A_{klm} \quad (3.2.3)$$

ifadesini elde ederiz. (3.2.2) ve (3.2.3)'ten,

$$F(x, y, z) = \frac{1}{h} \sum H_{j_1 j_2 \dots j_p} f_1^{j_1} f_2^{j_2} \dots f_p^{j_p} \quad (3.2.4)$$

toplamını $[j_1, j_2, \dots, j_p]$ indisleri üzerinden elde ederiz.

7- (3.2.4) formülü simetri çalışmalarında çok sayıda kullanıma sahiptir. Özellikle de izomerlerin sayısının hesaplanmasında kullanılmaktadır. Burada tek bir örnek ele alacağız. Şekiller, $n = 0$ dahil $C_n H_{2n+1}$ radikalleridir. Nesnelere C atomlarıdır (tek tür nesne vardır) ve a_n , $C_n H_{2n+1} OH$ izomerik alkollerinin sayısıdır (steroizomerler göz önüne alınmamıştır). Böylece;

$$f(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 8x^5 + 17x^6 + \dots$$

ifadesini elde ederiz.

Düzgün altıgenin köşelerini ($p = 6$ nokta) ve altıgenin $h = 12$ rotasyonunun bir grubunu \mathcal{H} olarak aldık. Altıgenin dönme indeksi (bkz. s.54):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} [f^6 + 4f_2^3 + 3f_1^2 f_2^2 + 2f_3^2 + 2f_6] \\ & = 1 + x + 4x^2 + 8x^3 + 22x^4 + 51x^5 + 136x^6 + \dots \end{aligned}$$

olur. Bu ifadenin açılımında x^n 'nin katsayısı benzenin türev izomerlerinin ($C_{6+n} H_{6+2n}$) sayısıdır.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, verilen farklı geometrik şekillerin köşe, kenar ve yüzeylerinin mümkün tüm simetrilerini de ele alarak ve farklı sayıda renk kullanarak kaç değişik şekilde boyanabileceği Burnside Teoremi ve Pólya'nın Sayma Formülü yardımıyla hesaplanmış ve bunun diğer geometrik şekillere, renk sayısına ve şeklin yapısına göre nasıl uygulanacağı açıklanmıştır.

Ele alınan örneklerde şeklin, söz konusu renk sayısı ile birbirine denk olmayan farklı boyamalarının sayısı incelenmiş ve formüsel ifadesi verilmiştir. Sonuç itibarıyla elde edilen pattern envanterlerin bir generating fonksiyon olmasından dolayı konuya generating fonksiyonlarla ilgili bilgi verilerek başlanmıştır.

Sonuçta elde edilen pattern envanterdeki terimlerin kuvvetleri, hangi renkten kaç tane kullanıldığını ve katsayıları da renk cinsine ve sayısına bağlı olarak kaç tane boyamanın olabileceğini göstermektedir.

Son bölümde ele alınan, kimyadaki uygulamalar kısmında benzenin izomer sayısı bulunurken neden düzgün altıgenin kullanıldığı ispatlanabilir ve kimyaya uygulanışı hakkında yazılmış diğer makaleler ele alınıp konu ile ilgili daha fazla bilgi edinilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] BIGGS, N.L., LLOYD, E.K. and WILSON, R.J. (1986), *Graf Theory 1736-1936*, Clarendon Press, London.
- [2] BURNSIDE, W. (1955), *Theory of Groups of Finite Order*, Cambridge Univ. Press, New York.
- [3] GRIMALDÌ, R.P. (1994), *Discrete and Combinatorial Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, New York.
- [4] HARARY, F. and PALMER, E.M. (1973), *Graphical Enumeration*, Academic Press, New York.
- [5] LIU, C.L. (1977), *Elements of Discrete Mathematics*, Mc Graw-Hill, Inc, U.S.A., 218-223.
- [6] PÓLYA, G., TARJAN, R.E. and WOODS, D.R. (1983), *Notes on Introductory Combinatorics*, Birkäuser , Boston-Basel-Berlin.
- [7] PÓLYA, G. and READE, R.C. (1987), *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs and Chemical Compounds*, Springer- Verlag, New York.
- [8] PÓLYA, G., “Un Problème Combinatoire Général Sur Les Groupes De Permutations Et Le Calcul Du Nombre des Isomères des Composés Organiques”, *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l' Académie des Sciences*, (201) s.1167-1169, Paris 1935.
- [9] REYNOLDS, C.N. (1926-7), “On the problem of coloring maps in four colors”, *I. Ann. of Math.* (2) 28, s.1-15.
- [10] ROSEN, K.H. (1999), *Discrete Mathematics and Its Applications*, Mc Graw-Hill, Singapore.
- [11] TUCKER, A. (1995), *Applied Combinatorics*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [12] TUTTE, W.T. (1948), “On the Four Colour Conjecture”, *Proc. London Math. Soc.* 50, s.137-149.

ÖZGEÇMİŞ

İpek Ağgez, 1980 yılında Magosa’da dünyaya geldi. Lise öğrenimini 1997 yılında Namık Kemal Lisesi’nde tamamladı. 1997-1998 öğretim yılında girdiği M.S.G.S.Ü. Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Lisans Programı’nı Haziran 2001’de birincilikle bitirdi. 2001-2002 öğretim yılında M.S.G.S.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Yüksek Lisans Programı’na kabul edildi.