T.C
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FENBİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
MATEMATİK YÜKSEK LİSANS TEZİ

q-ANALİZ

Tuğçen YARDIMCI

DANIŞMAN: Yrd.Doç.Dr. Ahmet BAKKALOĞLU

İSTANBUL-HAZİRAN 2005

T67808

Tuğçen Yardımcı tarafından hazırlanan " q- Analiz " adlı araştırmanın Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

İmza
Yüksek Lisans Tez Danışmanı

Bu çalışma Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman:	Yrd.Doç.Dr. Ahmet Bakkaloğlu (M.S.G.S.Ü)	İmza
Jüri Üyesi:	Prof.Dr. Yılmaz Akyıldız (Boğaziçi Üni.)	İmza
Jüri Üyesi:	Yrd.Doç.Dr. Nebi Önder (M.S.G.S.Ü)	İmza

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlama aşamasında bilgilerini paylaşmak adına büyük yol almamı sağlayan değerli hocalarım Prof.Dr. Yılmaz Akyıldız, Yrd.Doç.Dr. Ahmet Bakkaloğlu, Yrd.Doç.Dr. Mehmet Ünal ve Yrd.Doç.Dr. Nebi Önder'e, ayrıca tezin yazımı ve şekillerin çizilmesindeki yardımlarından dolayı nişanlım Cem Selmanoğulları'na ve hayatım boyunca yanımda olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Tuğçen YARDIMCI

İÇERİK

BÖLÜM 1

Giriş

q– Analiz, en az dörtyüz yıllık tarihi olan, soyut ve uygulamalı matematiğin birçok alanı ile ilişkili geniş bir konudur. q– Analiz 'in temeli Euler'e kadar dayanmaktadır. q– Analiz matematiğin yavaş gelişmiş fakat güzel ve heyecanlı bir bölümüdür. Üzerinde çalışmış olduğumuz kitabın adı "Quantum Calculus" dur. Fakat fizikteki quantum ile aralarında doğrudan doğruya bir ilişki yoktur. Bu yüzden kitabın adını q– Analiz olarak türkçeye çevirdik. Şimdi q– Analiz hakkında kısaca bilgi verelim.

Aşağıdaki ifadeyi ele alalım.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{1.1}$$

Eğer x, x_0 a yaklaşırken $(x \to x_0)$ limit varsa, bu ifade $f(x)$ fonksiyonunun $x = x_0$ noktasındaki $\frac{df}{dx}$ türevinin tanımı olacaktır. Yukarıdaki ifadede $x = qx_0$ veya $x = x_0 + h$ alınır ($q \neq 1$ ve sabit bir sayı, $h \neq 0$ ve sabit bir sayı) ve limit alınmazsa q– analizin büyüleyici dünyasına giriş yapmış oluruz. Buna göre $x = qx_0$ alınırsa,

$$D_q f(x) = \frac{f(qx_0)-f(x_0)}{qx_0-x_0} \tag{1.2}$$

elde edilir. Bu ifadeye $f(x)$ in q– türevi veya $f(x)$ in türevinin q– benzeri denir. Benzer şekilde $x = x_0 + h$ alınırsa,

$$D_q f(x) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

elde edilir. Bu ifadeye de $f(x)$ in h– türevi veya $f(x)$ in türevinin h– benzeri denir. Dikkat edecek olursak,

$$\lim_{q\to 1} D_q f(x) = \lim_{h\to 0} D_h f(x) = \frac{df}{dx} = f'(x)$$

olacaktır. Bu tezde q– analiz üzerinde incelemeler yapılmıştır. İlk bölümlerde q– analize giriş yapılmıştır. Burada q– türev, q– diferansiyel, q– Taylor formülü,q– binom formülü ve uygulamalarına yer verilmiştir. Daha sonraki bölümlerde ise, q– trigonometrik fonksiyonlar, q– exponansiyel fonksiyonlar ve matematikte çok önemli bir yere sahip olan Ramanujan çarpım formülü ile Jacobi çarpım formülü incelenmiştir. İleriki bölümlerde ise "q– analizde integral" hakkında bilgi verilmiş ve gamma ve beta fonksiyonlarınının q– benzerleri incelenmiştir. Son bölüm ise "Quantum Calculus" kitabından olmayıp, Victor Kac ile Alberto De Sole'nin "On integral representations of q– gamma and q– beta functions" adlı orjinal makalesinden alınmıştır. Bu tezde q– analizi incelerken, bilinen analizin geleneksel çizgisi boyunca ilerleyecek ve sayılar teorisinden ve matematikteki önemli notasyonlardan ve matematiğin diğer dallarından (kompleks analiz,reel analiz,lineer cebir,cebir,vb.) yararlanacağız.

BÖLÜM 2

q–Türev ve h–Türev

Tanım 1 *Herhangi bir keyfi $f(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.*

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x) \tag{2.1}$$

ifadesine q– türev denir.

$$d_h f(x) = f(x+h) - f(x) \tag{2.2}$$

ifadesine h– türev denir.

Örnek 2 *$f(x) = x$ fonksiyonu için $d_q f(x)$ ve $d_h f(x)$ değerlerini bulalım.*

$$\begin{aligned} d_q f(x) &= qx - x = x(q-1) \\ d_h f(x) &= x + h - x = h \end{aligned}$$

olarak bulunur.

2.1 İki Fonksiyonun Çarpımının q – Diferansiyeli

$f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} d_q(f(x).g(x)) &= f(qx).g(qx) - f(x)g(x) \\ &= f(qx).g(qx) - f(x).g(x) - f(qx).g(x) + f(qx).g(x) \\ &= f(qx).(g(qx) - g(x)) + g(x)(f(qx) - f(x)) \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$d_q(f(x).g(x)) = f(qx).d_q g(x) + g(x).d_q f(x) \tag{2.3}$$

2.2 İki Fonksiyonun Çarpımının h – Diferansiyeli

$$\begin{aligned} d_h(f(x).g(x)) &= f(x+h).g(x+h) - f(x).g(x) \\ &= f(x+h).g(x+h) - f(x)g(x) + f(x+h).g(x) - f(x+h).g(x) \\ &= f(x+h)(g(x+h) - g(x)) + g(x)(f(x+h) - f(x)) \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$d_h\left(f(x)\,g(x)\right) = f\left(x+h\right).d_h g\left(x\right) + g\left(x\right).d_h f\left(x\right) \tag{2.4}$$

Şimdi de q– diferansiyel ve h– diferansiyel yardımıyla q– türev ve h– türevi tanımlayalım.

Tanım 3

$$D_q f\left(x\right) = \frac{d_q f\left(x\right)}{d_q x} = \frac{f\left(qx\right) - f\left(x\right)}{qx - x} \tag{2.5}$$

$f\left(x\right)$ *'in q– türevi*

$$D_h f\left(x\right) = \frac{d_h f\left(x\right)}{d_h x} = \frac{f\left(h+x\right) - f\left(x\right)}{h} \tag{2.6}$$

$f\left(x\right)$ *'in h– türevi olarak tanımlanır.*

Örnek 4 $f\left(x\right) = x^n, n \in \mathbb{Z}^+$ *fonksiyonunun q– türevini ve h– türevini bulunuz.*

$$D_q f\left(x\right) = \frac{\left(qx\right)^n - \left(x^n\right)}{qx - x} = \frac{x^n\left(q^n - 1\right)}{x\left(q-1\right)} = \frac{q^n - 1}{q - 1}x^{n-1}$$

$$D_h f\left(x\right) = \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \frac{x^n + \frac{nx^{n-1}}{1!}h + \ldots + h^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + n\left(n-1\right)x^{n-2}h + \ldots + h^{n-1}$$

Tanım 5 $n \in Z^+$ *olmak üzere* $[n] = \frac{q^n-1}{q-1}$ *ifadesine n'nin q– benzeri denir. Ayrıca,*

$$[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} \tag{2.7}$$

şeklinde de ifade edilebilir.

Bu tanıma göre yukarıdaki örneğe geri dönersek,

$$D_q x^n = \frac{q^n - 1}{q - 1}x^{n-1} = [n]\,x^{n-1}$$

olacaktır. Bu ifade x^n nin sıradan türev haline benzemektedir. Eğer $q \to 1$ için eşitliğin her iki tarafının limiti alınırsa,

$$\lim_{q \to 1} D_q x^n = \lim_{q \to 1} [n]\,x^{n-1} = n.x^{n-1}$$

olacaktır. Çünkü,

$$\lim_{q \to 1} [n] = \lim_{q \to 1}\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right) = n$$

olacaktır. Yani $[n]$ q– analizde, sıradan analizdeki n pozitif tamsayısı ile aynı rolü oynamaktadır.

Tanım 6

$$[\infty] = \frac{1}{1-q}$$

olarak tanımlanır.

2.3 İki Fonksiyonun Çarpımının ve Bölümünün q− Türevi

$f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon olmak üzere, (2.5) ifadesinden yararlanarak aşağıdaki q− türevi elde ederiz.

$$\begin{aligned} D_q(f(x)g(x)) &= \frac{d_q(f(x)g(x))}{d_qx} = \frac{f(qx)d_qg(x)+g(x)d_qf(x)}{x(q-1)} \\ &= f(qx)\frac{d_qg(x)}{d_qx}+g(x)\frac{d_qf(x)}{d_qx} \end{aligned}$$

$$D_q(f(x)g(x)) = f(qx)D_qg(x)+g(x)D_qf(x) \tag{2.8}$$

simetriden dolayı,

$$D_q(f(x)g(x)) = g(qx)D_qf(x)+f(x)D_qg(x) \tag{2.9}$$

elde edilir. Şimdi de iki fonksiyounun bölümünün q− türevinin nasıl tanımlandığını gösterelim.

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x) \\ g(x)\frac{f(x)}{g(x)} &= f(x) \end{aligned}$$

Eşitliğin her iki tarafının q− türevini alalım.

$$D_q\left(g(x).\frac{f(x)}{g(x)}\right) = D_qf(x)$$

(2.8) den aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$g(qx)D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)+\frac{f(x)}{g(x)}D_qg(x) = D_qf(x)$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{D_qf(x)-\frac{f(x)}{g(x)}D_qg(x)}{g(qx)}$$

$$D_q\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)D_qf(x)-f(x)D_qg(x)}{g(x)g(qx)} \tag{2.10}$$

q– Türevde genelde zincir kuralı yoktur. Ancak $u(x) = \alpha x^{\beta} (\alpha, \beta sabit)$ olmak üzere $f(u(x))$ şeklindeki fonksiyonların q– türevleri zincir kuralı ile bulunabilir. Bunu gösterelim.

$$\begin{aligned} D_q(f(u(x))) &= D_q\left(f\left(\alpha x^{\beta}\right)\right) = \frac{f\left(\alpha x^{\beta} q^{\beta}\right) - f\left(\alpha x^{\beta}\right)}{x(q-1)} \\ &= \frac{f\left(\alpha x^{\beta} q^{\beta}\right) - f\left(\alpha x^{\beta}\right)}{\alpha x^{\beta} q^{\beta} - \alpha x^{\beta}} \frac{\alpha x^{\beta} q^{\beta}}{x(q-1)} \\ &= \frac{f\left(q^{\beta} u\right) - f(u)}{q^{\beta} u - u} \frac{u(qx) - u(x)}{x(q-1)} \end{aligned}$$

$$D_q(f(u(x))) = \left(D_{q^{\beta}} f\right)(u(x)) D_q u(x) \tag{2.11}$$

elde edilir. Başka bir değişle $u(x) = x^2 + x$ veya $u(x) = \sin x$ gibi fonksiyonlarda, $u(qx)$ basit bir şekilde u'nun terimleri cinsinden ifade edilemez. Bu yüzden genel zincir kuralı burada uygulanamaz.

Örnek 7 $f(x) = \ln(x)$ *fonksiyonunun q– diferansiyelini, h– diferansiyelini ve* $D_q f(x), D_q g(x)$ *değerlerini bulalım*

$$\begin{aligned} d_q(\ln x) &= \ln qx - \ln x = \ln q \\ D_q(\ln x) &= \frac{d_q(\ln x)}{d_q x} = \frac{\ln qx - \ln x}{x(q-1)} = \frac{\ln q}{x(q-1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_h(\ln x) &= \ln(x+h) - \ln x = \ln \frac{x+h}{x} \\ D_h(\ln x) &= \frac{d_h \ln x}{d_h x} = \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} \end{aligned}$$

$$\lim_{q \to 1} D_q(\ln x) = \lim_{q \to 1} \frac{\ln q}{x(q-1)} = \lim_{q \to 1} \frac{\frac{1}{q}}{x} = \frac{1}{x} = (\ln x)'$$

$$\lim_{h \to 0} D_h(\ln x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h}}{1} = \frac{1}{x} = (\ln x)'$$

Örnek 8 $f(x) = x^2$ *fonksiyonunun* $d_q f(x)$, $d_h f(x)$, $D_q f(x)$, $D_h f(x)$ *değerlerini bulunuz.*

$$\begin{aligned} d_q f(x) &= q^2 x^2 - x^2 = x^2(q^2 - 1) \\ D_q f(x) &= \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{x^2(q^2-1)}{x(q-1)} = x(q-1) \\ \lim_{q \to 1} D_q f(x) &= 2x = (x^2)' \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_h f(x) &= (x+h)^2 - x^2 = h^2 + 2xh \\
D_h f(x) &= \frac{d_h f(x)}{d_h x} = \frac{h^2 + 2xh}{h} = h + 2x \\
\lim_{h \to 0} D_h f(x) &= 2x = (x^2)'
\end{aligned}
$$

BÖLÜM 3

Polinomlar için Genel Taylor Formülü

Teorem 1 *a herhangi bir sayı ve D de polinomlar uzayında lineer bir operatör olsun. $(P_0(x), P_1(x), \ldots)$ de aşağıdaki üç koşulu sağlayan polinomlar dizisi olsun.*

1 $P_0(a) = 1$ ve $P_n(a) = 0 \quad n \geq 1$

2 $der P_n(x) = n$

3 $dP_n(x) = P_{n-1}(x) \quad \forall n \geq 1$ için ve $D(1) = 0$

Derecesi N olan herhangi bir $f(x)$ polinomu için genel Taylor formülü aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} (D^n f)(a) P_n(x) \tag{3.1}$$

İspat. V, derecesi N'den büyük olmayan polinomların bir uzayı olsun. O halde $\dim V = N+1$ olacaktır. $(P_0(x), P_1(x), \ldots, P_N(x))$ polinomları lineer bağımsızdırlar. Çünkü herbir $P_i(x)$ $0 \leq i \leq N$ polinomlarının derecesi farklıdır.(2.koşul) Buna göre $(P_0(x), P_1(x), \ldots, P_N(x))$ polinomlar dizisi V polinomlar uzayının bir bazı olacaktır. Herhangi bir $f(x) \in V$ aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} c_k P_k(x) \tag{3.2}$$

Buradaki c_k katsayıları tektir. Çünkü $f(x)$ fonksiyonu $(P_0(x), P_1(x), \ldots, P_N(x))$ bazları cinsinden tek türlü yazılabilir.

$$f(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots + c_N P_N(x)$$

$x = a$ için,

$$f(a) = c_0 P_0(a) + c_1 P_1(a) + \ldots + c_N P_N(a)$$

elde edilecektir ve teoremdeki 1.şarttan dolayı $f(a) = c_0$ olacaktır. Şimdi de (3.2) eşitliğinin her iki tarafına n defa D linner operatörünü uygulayalım.

$$(D^n f)(x) = \sum_{n=0}^{N} c_k P_{k-n}(x)$$

elde edilecektir. Bu eşitlikte $x = a$ koyalım. $0 \leq n \leq N$ için,

$$(D^n f)(a) = c_n P_0(a) + c_{n+1} P_1(a) + ... + c_n P_{N-n}(a) = c_n$$

elde edilir. Bulduğumuz bu ifadeyi (3.2) de yerine koyarsak,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \left(D^k f\right)(a) P_k(x)$$

elde edilecektir. ■

Örnek 2 *$D = \frac{d}{dx}$, $P_n(x) = \frac{(x-a)^n}{n!}$ olarak seçersek yukarıdaki teoremdeki üç şart sağlanacaktır. O halde bu değerleri(3.1)de yerine koyalım.*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \left(D^k f\right)(a) P_k(x)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{d^k f(a)}{dx^k} \frac{(x-a)^k}{k!}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{N} f^k(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$$

Böylece $f(x)$ fonksiyonunun $x = a$ noktasındaki genel Taylor formülünü elde etmiş oluyoruz. Dikkat edecek olusak, $D = \frac{d}{dx}$ n. mertebeden polinomlar uzayını $(n-1)$. mertabeden polinomlar uzayına resmeden lineer bir tasvirdir.

BÖLÜM 4

$(x-a)^n$ nin q– Benzeri ve q– Türevi

Bir önceki bölümdeki teoremdeki D lineer operatörü yerine D_q lineer operatörünü alalım. $\{P_0(x), P_1(x), ...\}$ polinomlar dizisi de yine bu teoremdeki üç şartı sağlasın. Eğer $a=0$ olarak seçersek, $P_n(x) = \frac{x^n}{[n]!}$ olarak alabiliriz.. Çünkü,

1-$P_0(0) = 1$ ve $P_n(0) = 0$ $(\forall n \geq 1)$ olacaktır.

$P_0(x) = \frac{x^0}{[0]!} = 1$ $P_0(o) = 1$ $P_n(0) = \frac{0^n}{[n]!} = 0$

2-$der P_n(x) = n$

3-$D_q P_n(x) = P_{n-1}(x)$

$D_q 1 = \frac{d_q 1}{d_q x} = 0$

Eğer $a \neq 0$ ve $D = D_q$ olarak seçersek aceba $P_n(x)$ nasıl olacaktır? Bu sorunun yanıtını bir önceki bölümdeki teoremi kullanarak bulalım.

$P_0(x) = 1$, $D_q P_1(x) = P_0(x)$, $P_1(a) = 0$ olmalıdır.

$D_q P_1(x) = 1 \implies \frac{d_q P_1(x)}{d_q x} = \frac{P_1(qx) - P_1(x)}{x(q-1)} = 1$

$P_1(qx) - P_1(x) = x(q-1)$

$P_1(aq) - P_1(a) = aq - a$

$P_1(aq) = aq - a$ ve $P_1(a) = 0$ olmalıdır. O halde,

$$P_1(x) = x - a$$

olarak bulunacaktır. Şimdi de $P_2(x)$ 'i bulmaya çalışalım.

$D_q P_2(x) = P_1(x)$ ve $P_2(a) = 0$ olmalıdır.

$D_q P_2(x) = \frac{P_2(qx) - P_2(x)}{x(q-1)} = x - a$

$P_2(qx) - P_2(x) = (x-a)\, x\, (q-1)$

$P_2(aq) - P_2(a) = 0 \implies P_2(aq) = 0$ olmalıdır. $P_2(a) = 0$ ve $P_2(aq) = 0$ olacağı için, $P_2(x) = (x-a)(x-qa)$ olacaktır. Bunu sınayalım.

$D_qP_2(x) = \frac{P_2(qx)-P_2(x)}{x(q-1)} = x-a$ olmalıdır. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
D_qP_2(x) &= \frac{(qa-a)(qx-aq)-(x-a)(x-aq)}{x(q-1)} \\
&= \frac{(x-a)[q(qx-a)-(x-aq)]}{x(q-1)} \\
&= \frac{(x-a)(q^2x-qa-x+qa)}{x(q-1)} \\
&= \frac{(x-a)(q^2x-x)}{x(q-1)} \\
&= \frac{(x-a)x(q^2-1)}{x(q-1)} \\
&= (x-a)\frac{q^2-1}{q-1} \\
&= (x-a)[2]
\end{aligned}
$$

Oysa $D_qP_2(x) = (x-a)$ olmalıydı. O halde eşitliği sağlamak için,

$$P_2(x) = \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]}$$

olmalıdır. Şimdi de $P_3(x)$'i bulalım. $D_qP_3(x) = P_2(x)$, $P_3(a) = 0$ olmalıdır.

$$
\begin{aligned}
D_qP_3(x) &= \frac{d_qP_3(x)}{d_qx} = \frac{P_3(qx)-P_3(x)}{x(q-1)} = \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]} \\
P_3(qx)-P_3(x) &= \frac{(x-a)(x-qa)x(q-1)}{[2]} \\
P_3(aq)-P_3(a) &= 0 \implies P_3(aq) = 0
\end{aligned}
$$

$$P_3(qx)-P_3(x) = \frac{x(q-1)(x-a)(x-qa)}{[2]}$$

denkleminde $x = qa$ alırsak,

$$P_3(q^2a) - P_3(qa) = 0 \quad \implies \quad P_3(q^2a) = 0$$

olacaktır. $P_3(a) = 0, P_3(aq) = 0, P_3(aq^2) = 0$ olacağından dolayı $P_3(x) = (x-a)(x-qa)(x-q^2$
olacaktır. Bunu sınayalım.

$$D_qP_3(x) = \frac{P_3(qx)-P_3(x)}{x(q-1)} = \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]}$$

olmalıdır. Buna göre,

$$
\begin{aligned}
D_q P_3(x) &= \frac{(qx-a)(qx-qa)\left(qx-q^2a\right)-(x-a)(x-qa)\left(x-q^2a\right)}{x(q-1)} \\
&= \frac{(qx-a)\,q(x-a)\,q(x-qa)-(x-a)(x-qa)\left(x-q^2a\right)}{x(q-1)} \\
&= \frac{(x-a)(x-qa)\left[(qx-a)q^2-\left(x-q^2a\right)\right]}{x(q-1)} \\
&= \frac{(x-a)(x-qa)\left(q^3x-aq^2-x+q^2a\right)}{x(q-1)} \\
&= \frac{(x-a)(x-qa)\,x\left(q^3-1\right)}{x(q-1)} \\
&= (x-a)(x-qa)\frac{q^3-1}{q-1} \\
&= (x-a)(x-qa)[3]
\end{aligned}
$$

Oysa $D_q P_3(x) = \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]}$ olmalıydı. O halde eşitliği sağlamak için,

$$P_3(x) = \frac{(x-a)(x-qa)\left(x-q^2a\right)}{[3][2]}$$

olacaktır.

$$P_1(x) = x-a$$

$$P_2(x) = \frac{(x-a)(x-qa)}{[2]}$$

$$P_3(x) = \frac{(x-a)(x-qa)\left(x-q^2a\right)}{[3][2]}$$

olduğundan $P_n(x)$ polinomunu $a \neq 0$ için aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$P_n(x) = \frac{(x-a)(x-qa)\left(x-q^2a\right)\ldots\left(x-q^{n-1}a\right)}{[n]!}$$

Tanım 1 *$n!$ in $q-$ benzeri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.*

$$[n]! = \left\{\begin{array}{ll} 1 & n=0 \\ [n][n-1]\ldots[1] & n=1,2,3,\ldots \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

Tanım 2 *$(x-a)^n$ polinomunun $q-$ benzeri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.*

$$(x-a)_q^n = \left\{\begin{array}{ll} 1 & n=0 \\ (x-a)(x-qa)\ldots\left(x-q^{n-1}a\right) & n\geq 1 \end{array}\right\} \tag{4.2}$$

Önerme 3 $n \geq 1$ *için*

$$D_q (x-a)_q^n = [n] (x-a)_q^{n-1} \tag{4.3}$$

dir.

İspat. Bu önermenin ıspatını tüme varım yöntemi ile yapacağız.

$n = 1$ için,

$$D_q (x-a)_q = D_q (x-a) = \frac{qx - q - x + a}{x(q-1)} = 1 = [1] (x-a)_q^0$$

olacağı için önerme $n = 1$ için doğrudur. Varsayalım ki, (4.3) ifadesi bazı k değerleri için doğru olsun. (4.3) ün $k+1$ değeri için de doğru olduğunu gösterelim. (2.9) dan yararlanarak,

$$(x-a)_q^{k+1} = (x-a)(x-qa)\ldots\left(x-q^{k-1}a\right)\left(x-q^k a\right) = (x-a)_q^k \left(x-q^k a\right)$$

$$\begin{aligned}
D_q (x-a)_q^{k+1} &= D_q\left((x-a)_q^k \left(x-q^k a\right)\right) \\
&= (x-a)_q^k D_q\left(x-q^k a\right) + \left(qx-q^k a\right) D_q (x-a)_q^k \\
&= (x-a)_q^k \left(\frac{\left(qx-q^k a\right)-\left(x-q^k a\right)}{x(q-1)}\right) + q\left(x-q^{k-1}a\right)[k](x-a)_q^{k-1} \\
&= (x-a)_q^k \left(\frac{qx-q^k a - x + q^k a}{x(q-1)}\right) + q\left(x-q^{k-1}a\right)[k](x-a)_q^{k-1} \\
&= (x-a)_q^k \left(\frac{x(q-1)}{x(q-1)}\right) + q\left(x-q^{k-1}a\right)[k](x-a)_q^{k-1} \\
&= (x-a)_q^k + q\left(x-q^{k-1}a\right)[k](x-a)(x-qa)\ldots\left(x-q^{k-2}a\right) \\
&= (x-a)_q^k + q[k](x-a)_q^k \\
&= (x-a)_q^k (1+q[k]) \\
&= (x-a)_q^k [k+1]
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ıspat tamamlanmış olmaktadır. ■

4.1 $(x-a)_q^n$ Polinomunun Özellikleri

Genelde $(x-a)_q^{m+n} \neq (x-a)_q^m (x-a)_q^n$ dir.

Önerme 4

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m \left(x-q^m a\right)_q^n \qquad m, n > 0 \tag{4.4}$$

İspat.

$$\begin{aligned}(x-a)_q^{m+n} &= (x-a)(x-qa)\left(x-q^2a\right)...\left(x-q^{m-1}a\right)(x-q^ma)\ldots\left(x-q^{m+n-1}a\right)\\ &= \left((x-a)(x-qa)...\left(x-q^{m-1}a\right)\right)\left((x-q^ma)(x-q(q^ma))\ldots\left(x-q^{n-1}(q^ma)\right)\right)\\ &= (x-a)_q^m(x-q^ma)_q^n\end{aligned}$$

■

(4.4) eşitliğinde $m=-n$ olarak alırsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$(x-a)_q^{-n} = \frac{1}{(x-q^{-n}a)_q^n} \tag{4.5}$$

Önerme 5 *Herhangi iki tam sayı olan m ve n için aşağıdaki eşitlik doğrudur.*

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m(x-q^ma)_q^n$$

İspat. 1- $m=-m'<0$ ve $n>0$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(x-a)_q^m(x-q^ma)_q^n &= (x-a)_q^{-m'}\left(x-q^{-m'}a\right)_q^n\\ &= \frac{\left(x-q^{-m'}a\right)_q^n}{(x-q^{-m'}a)_q^{m'}}\end{aligned}$$

$$= \left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\left(x-q^{-m'}a\right)_q^{m'}\left(x-q^{m'}\left(q^{-m'}a\right)\right)_q^{n-m'}}{\left(x-q^{-m'}a\right)_q^{m'}} & n\geq m'\\ \dfrac{\left(x-q^{-m'}a\right)_q^n}{\left(x-q^{-m'}a\right)\left(x-q^n(q^{-m'}a)\right)_q^{m'-n}} & n<m'\end{array}\right\}$$

$$= \left\{\begin{array}{ll}(x-a)_q^{n-m'} & n\geq m'\\ \dfrac{1}{\left(x-q^{n-m'}a\right)_q^{m'-n}} = (x-a)_q^{n-m'} & n<m'\end{array}\right\}$$

$$= (x-a)_q^{n-m'}$$

$$= (x-a)_q^{n+m}$$

2- $m\geq 0$ ve $n=-n'<0$ için eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(x-a)_q^m(x-q^ma)_q^n &= (x-a)_q^m(x-q^ma)_q^{-n'}\\ &= \frac{(x-a)_q^m}{(x-q^{m-n'}a)_q^{n'}}\end{aligned}$$

$$
= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\left(x-q^{m-n'}a\right)_q^{n'} (x-a)_q^{m-n'}}{\left(x-q^{m-n'}a\right)_q^{n'}} & m \geq n' \\ \frac{(x-a)_q^m}{\left(x-q^{n'-m}\left(q^{m-n'}a\right)\right)_q^m \left(x-q^{m-n'}a\right)_q^{n'-m}} & m < n \end{array} \right\}
$$

$$
= \left\{ \begin{array}{ll} (x-a)_q^{m-n'} & m \geq n' \\ \frac{1}{\left(x-q^{m-n'}a\right)_q^{n'-m}} = (x-a)_q^{m-n'} & m < n' \end{array} \right\}
$$

$$
= (x-a)_q^{m-n'}
$$

$$
= (x-a)_q^{m+n}
$$

3- $m = -m' < 0$ ve $n = -n' < 0$ için önermedeki eşitliğin doğru olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
(x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n &= (x-a)_q^{-m'} \left(x - q^{-m'}a\right)_q^{-n'} \\
&= \frac{1}{(x-q^{-m'}a)_q^{m'} \left(x - q^{-n'}(q^{-m'}a)\right)_q^{n'}} \\
&= \frac{1}{\left(x - q^{n'}\left(q^{-m'-n'}a\right)\right)_q^{m'} \left(x - q^{-m'-n'}a\right)_q^{n'}} \\
&= \frac{1}{\left(x - q^{-m'-n'}a\right)_q^{m'+n'}} = (x-a)_q^{-m'-n'} \\
&= (x-a)_q^{m+n}
\end{aligned}
$$

■

$(x-a)_q^n$ nin bir başka özelliği ise,

$$
(a-x)_q^n \neq (-1)^n (x-a)_q^n
$$

olmasıdır. Bunun yerine $n \geq 1$ için;

$$
\begin{aligned}
(a-x)_q^n &= (a-x)(a-qx)\left(a-q^2x\right)\ldots\left(a-q^{n-1}x\right) \\
&= (a-x)\, q\left(q^{-1}a - x\right) q^2 \left(q^{-2}a - x\right) \ldots q^{n-1}\left(aq^{1-n} - x\right) \\
&= q^{(n-1)n/2} (x-a)\left(x - q^{-1}a\right)\left(x - q^{-2}a\right)\ldots\left(x - q^{1-n}a\right)(-1)^n \\
&= (-1)^n q^{n(n-1)/2} \left(x - q^{1-n}a\right)_q^n
\end{aligned}
$$

4.2 Bazı Özel Polinomların q− Türevleri

1.

$$
D_q\left(\frac{1}{(x-a)_q^n}\right) = D_q\left(\frac{1}{\left(x - q^{-n}\left(q^n a\right)\right)_q^n}\right) = D_q \left(1 - q^n a\right)_q^{-n} = [-n] \left(1 - q^n a\right)_q^{-n-1}
$$

2.

$$\begin{aligned}
D_q (a-x)_q^n &= D_q \left((-1)^n q^{n(n-1)/2} \left(x - q^{1-n} a \right)_q^n \right) \\
&= (-1)^n q^{(n-1)n/2} [n] \left(x - q^{1-n} a \right)_q^{n-1} \\
&= -1 (-1)^{n-1} [n] q^{n-1} q^{(n-1)(n-2)/2} \left(x - q^{-n+2} \left(q^{-1} a \right) \right)_q^{n-1} \\
&= -[n] q^{n-1} (-1)^{n-1} q^{(n-1)(n-2)/2} \left(x - q^{-n+2} \left(q^{-1} a \right) \right)_q^{n-1} \\
&= -[n] q^{n-1} \left(a q^{-1} - x \right)_q^{n-1} \\
&= -[n] (a - qx)_q^{n-1}
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
D_q \left(\frac{1}{(a-x)_q^n} \right) &= \frac{(a-x)_q^n D_q 1 - 1 D_q (a-x)_q^n}{(a-qx)_q^n (a-x)_q^n} \\
&= \frac{-D_q (a-x)_q^n}{(a-qx)_q^n (a-x)_q^n} \\
&= \frac{[n] (a-qx)_q^{n-1}}{(a-qx)_q^n (a-x)_q^n} \\
&= \frac{[n] (a-qx) \left(a - q^2 x \right) \dots \left(a - q^{n-2} qx \right)}{(a-x)_q^n (a-qx) \left(a - q^2 x \right) \dots \left(a - q^{n-1} qx \right)} \\
&= \frac{[n]}{(a-x)_q^n (a - q^n x)} \\
&= \frac{[n]}{(a-x)_q^n (a - q^n x)} \\
&= \frac{[n]}{(a-x)_q^{n+1}}
\end{aligned}$$

BÖLÜM 5

Polinomlar için q– Taylor Formülü

Bir önceki bölümde $P_n(x) = \frac{(x-a)_q^n}{[n]!}$ polinomunun D_q lineer öperatörü ile üçüncü bölümdeki teoremdeki üç şartı sağladığını göstermiştik. Şimdi yine bu teoreme göre Taylor formülünün q-benzerini tanımlayalım.

Tanım 1 *Mertebesi N olan herhangi bir $f(x)$ polinomu ve c herhangi bir sayı olmak üzere, q– Taylor gösterilişi aşağıdaki gibidir.*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} \left(D_q^j f\right)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!} \tag{5.1}$$

Örnek 2 *$f(x) = x^n$ fonksiyonunun $c = 1$ için q– Taylor gösterilimini bulunuz.*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} \left(D_q^j f\right)(1) \frac{(x-1)_q^j}{[j]!}$$

$$D_q f(x) = [n]\, x^{n-1}$$

$$D_q^2 f(x) = [n]\,[n-1]\, x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$D_q^j f(x) = [n]\,[n-1] \ldots [n-j+1]\, x^{n-j}$$

$D_q^j f(1) = [n]\,[n-1] \ldots [n-j+1]$ olacaktır. O halde buna göre $f(x)$ in $x = 1$ noktası civarındaki q– Taylor formülü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{[n]\,[n-1] \ldots [n-j+1]}{[j]!} (x-1)_q^j = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (x-1)_q^j$$

Tanım 3

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$$

ifadesine q– binom katsayısı denir.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \frac{[n]!}{[n-j]!\,[j]!} = \frac{[n]\,[n-1]\ldots[n-j+1]\,[n-j]\,[n-j-1]\ldots[1]}{[n-j]\,[n-j-1]\ldots[1]\,[j]!} \\ &= \frac{[n]\,[n-1]\ldots[n-j+1]}{[j]!} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dikkat edecek olursak $q \to 1$ için limit alındığında $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ ifadesi bilinen binom katsayısına eşit olacaktır. Ayrıca $q \to 1$ için limit alındığında $\sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (x-1)_q^j$ ifadesi $\sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} (x-1)^j$ haline dönüşür ki bu bildiğimiz binom formülüdür.

BÖLÜM 6

Gauss Binom Formülü

Bu bölümde q− binom katsayılarını içeren iki binom formülü hakkında bilgi vereceğiz. Şimdi bir önceki bölümde verilen örneğe benzer aşağıdaki örneği ele alalım.

Örnek 1 *n,, negatif olmayan bir tam sayı ve a herhangi bir sayı olsun. $f(x) = (x+a)_q^n$ nin $x = 0$ civarındaki q− Taylor formülünü bulalım.*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \left(D_q^j f\right)(c) \frac{(x-c)_q^j}{[j]!}$$

$j \leq n$ için,

$$D_q f(x) = [n](x+a)_q^{n-1}$$
$$D_q^2 f(x) = [n][n-1](x+a)_q^{n-2}$$
$$\vdots$$
$$D_q^j f(x) = [n][n-1][n-2]\dots[n-j+1](x+a)_q^{n-j}$$
$$\left(D_q^j f\right)(0) = [n][n-1][n-2]\dots[n-j+1](a)_q^{n-j}$$
$$(x+a)_q^m = (x+a)(x+qa)\dots x+q^{m-1}(a)_q^{n-j}$$

$x = 0$ ise ,

$$a_q^m = aqa\dots q^{m-1}a = a^m q^{m(m-1)/2}$$

olacaktır. Buna göre,

$$\left(D_q^j f\right)(0) = [n][n-1][n-2]\dots[n-j+1]\, a^{n-j} q^{(n-j)(n-j-1)/2}$$

elde edilecektir. Sonuç olarak $f(x) = (x+a)_q^n$ nin q− Taylor formülü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \frac{[n][n-1]\dots[n-j+1]}{[j]!} q^{(n-j)(n-j-1)/2} a^{n-j} x^j \tag{6.1}$$

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{(n-j)(n-j-1)/2} a^{n-j} x^j$$

Yukarıdaki formülde j yerine $n-j$ koyalım. q– Binom katsayılarının tanımından yararlanarak,

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-j]!\,[j]!} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}$$

elde edilecektir. Buna göre (6.1) ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2} a^j x^{n-j} \tag{6.2}$$

Bu formüle Gauss Binom Formülü adı verilir.

Teorem 2 *Binom formülü ancak $yx = qxy$ (q, x ve y ile komütatif bir sayı) olduğu zaman komütatiftir.*

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} y^{n-j} x^j \tag{6.3}$$

İspat. Ispatı tüme varım yöntemi ile yapalım. (6.3) ifadesinin $n=1$ için doğru olduğu açıktır.

$$(x+y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x = y + x$$

$$y^k x = y^{k-1} yx = y^{k-1} qxy = qy^{k-1} xy = qy^{k-2} yxy = qy^{k-2} qxy^2 = \ldots = q^k xy^k$$

elde edilecektir. (6.3) ifadesinin $n=n$ için doğru olduğunu kabul edip, ifadenin $(n+1)$ için de doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (x+y)^{n+1} &= (x+y)^n (x+y) \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j} \right) (x+y) \\ &= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j} x + \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} \qquad y^k x = q^k xy^k \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j \left(g^{n-j} x y^{n-j}\right) + \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} x^j q^{n-j+1} y^{n-j+1} + \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} \\
&= \begin{bmatrix} n \\ n+1-1 \end{bmatrix} x^{n+1} + \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} q^{n-j+1} \right) x^j y^{n-j+1} \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \left(\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} q^{n-j+1} \right) x^j y^{n-j+1} \\
&= x^{n+1} + y^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n+1 \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j+1}
\end{aligned}
$$

elde edilecektir. Böylece ıspat tamamlanmış olacaktır. Bu ıspatta bir sonraki bölümde göreceğimiz q- Pascal kuralını kullandık.

$$
\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix}
$$

Burada n yerine $n+1$ koyarsak,

$$
\begin{bmatrix} n+1 \\ j \end{bmatrix} = q^{n+1-j} \begin{bmatrix} n \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}
$$

elde edilecektir. ■

BÖLÜM 7

q-Binom Katsayılarının Özellikleri

Bir önceki bölümde q– binom katsayılarının bazı özelliklerini incelemiştik. Eğer $q \to 1$ için q– binom katsayılarının limitini alırsak, bilinen binom katsayılarını elde ederiz. q– Binom katsayıları, bilinen binom katsayıları ile aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi bir benzerlik gösterir.

$$\binom{n}{j} = \frac{(n)!}{(n-j)!\,(j)!} = \binom{n}{n-j}$$

Bilinen binom katsayıları

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[n-j]!\,[j]!} = \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix}$$

q– Binom katsayıları olduğunu biliyoruz. Aceba buna benzer başka benzerlikler var mı?

$$\binom{n}{j} = \binom{n-1}{j-1} + \binom{n-1}{j} \quad 1 \leq j \leq n-1$$

olduğunu biliyoruz. Buna Pascal kuralı denir.

Önerme 1 *İki q– Pascal kuralı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.* $1 \leq j \leq n-1$ *için;*

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + q^j \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \tag{7.1}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

İspat. $1 \leq j \leq n-1$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} [n] &= 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} \\ &= 1 + q + q^2 + \ldots + q^j + q^{j+1} + \ldots + q^{n-1} \\ &= \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{j-1}\right) + q^j \left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-j-1}\right) \\ &= [j] + q^j [n-j] \end{aligned}$$

elde edilir. (7.2) ifadesi ise aşağıdaki şekilde elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} n \\ n-j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j-1 \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ n-j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} n-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{n-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ j-1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

■

Önerme 2 *Herbir q− binom katsayısı, q nun derecesi $j(n-j)$ olan bir polinomudur. Aynı zamanda polinomun başkatsayısı 1 dir.*

İspat. Negatif olmayan herhangi bir n tamsayısı için;

$$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$$

olacağı için bu dercesi sıfır olan sabit bir polinomdur.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \frac{[n]!}{[n-j]!\,[j]!} = \frac{[n]\,[n-1]\ldots[n-j+1]\,[n-j]\,[n-j-1]\ldots[1]}{[n-j]\,[n-j-1]\ldots[1]\,[j]\,[j-1]\ldots[1]} \qquad (7.3) \\
&= \frac{[n]\,[n-1]\,[n-2]\ldots[n-j+1]}{[j]\,[j-1]\ldots[1]} \\
&= \frac{\frac{q^n-1}{q-1}\frac{q^{n-1}-1}{q-1}\cdots\frac{q^{n-j+1}-1}{q-1}}{\frac{q^j-1}{q-1}\frac{q^{j-1}-1}{q-1}\cdots\frac{q-1}{q-1}} \\
\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} &= \frac{(q^n-1)\,(q^{n-1}-1)\ldots(q^{n-j+1}-1)}{(q^j-1)\,(q^{j-1}-1)\ldots(q-1)}
\end{aligned}$$

Dikkat edecek olursak (7.3) eşitliğindeki pay ve payda, katsayıları 1 olan q nun bir polinomudur. Bu iki polinomun bölümü de bir polinom olacaktır. Bu polinomun derecesi ise payın derecesinin, paydanın derecesinden farkı olacaktır. Yani,

$$(n+(n-1)+(n-2)+\ldots+(n-j+1))-(j+(j-1)+(j-2)+\ldots+1)=j\,(n-j)$$

elde edilecektir. O halde bir q− binom katsayısı, q nun mertebesi $j\,(n-j)$ olan bir polinomu şeklinde ifade edilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olacaktır. ■

Şimdi de q− Binom katsayılarının başka bir özelliğinden bahsedelim. Yukarıda $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ q− binom katsayısının mertebesi $j(n-j)$ olan q nun bir polinomu olduğunu göstermiştik. Yani,

$$a_0+a_1q+q_2q^2+...+a_{j(n-j)-1}q^{j(n-j)-1}+a_{j(n-j)}q^{j(n-j)} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)...(q^{n-j+1}-1)}{(q^j-1)(q^{j-1}-1)...(q-1)}$$

olmalıdır. Bu eşitlikte q yerine $\frac{1}{q}$ koyup, $q^{j(n-j)}$ ile her iki tarafı çarpalım

$$.a_0+a_1\frac{1}{q}+a_2\frac{1}{q^2}+...+a_{j(n-j)-1}\frac{1}{q^{j(n-j)-1}}+a_{j(n-j)}\frac{1}{q^{j(n-j)}} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)...(q^{n-j+1}-1)}{(q^j-1)(q^{j-1}-1)...(q-1)}\frac{1}{q^{j(n-}}$$

$$a_0q^{j(n-j)}+a_1q^{j(n-j)-1}+...+a_{j(n-j)-1}q+a_{j(n-j)} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)...(q^{n-j+1}-1)}{(q^j-1)(q^{j-1}-1)...(q-1)}$$

Görüldüğü gibi eşitliğin sağ tarafı değişmeyecektir.

$$\begin{aligned} a_0 &= a_{j(n-j)} \\ a_1 &= a_{j(n-j)-1} \\ a_2 &= a_{j(n-j)-2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bunu genellersek, $a_i = a_{j(n-j)-i}$ olacaktır.Bu da bize $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ polinomunun katsayılarının simetrik olduğunu gösterir.

Teorem 3 *$A_n = \{1,2,3,...,n\}$ ve $A_{n,j}$, A_n 'nin j elemanlı tüm alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun. Buna göre $0 \le j \le n$ için;*

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \sum_{S\in A_{n,j}} q^{W(S)-\frac{j(j+1)}{2}} \quad , \quad W(S) = \sum_{s\in S} s \qquad (7.4)$$

İspat. Bu teoremi n üzerinde tüme varım yöntemi ile ispatlayacağız.Öncelikle $n=1$, $j=0,1$ için teoremin doğru olduğunu gösterelim. $j=0$ için $A_{1,0}=\{\not c\}$, $W((\not c))=0$ olacaktır.Bu durumda (7.4) ün sağ ve sol tarafı aşağıda gösterildiği gibi birbirlerine eşit olacaklardır.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 = \sum q^0 = \sum 1 = 1$$

$n=1,\ j=1$ için $A_{1,1}=\{\{1\}\}$, $W(\{1\})=1$ olacaktır.Bu durumda da yine (7.4) ün sağ ve sol tarafı aşağıda gösterildiği gibi birbirlerine eşit olacaklardır.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 = \sum q^{1-\frac{2}{2}} = 1$$

Varsayalımki, (7.4) ifadesi $1 \le n \le m-1$, $m \ge 2$ için doğru olsun ve $m=n$ olarak seçelim. $j=0$ için $A_{m,0}=\{\{\not{c}\}\}$ olacak ve (7.4) ifadesi yine sağlanacaktır.$j \ge 1$ için $A_{m,j}=B \cup B'$ öyleki $B=\{S \in A_{m,j}\ \ m \notin S\}$, $B'=\{S \in A_{m,j}\ \ m \in S\}$ olacak şekilde tanımlayabiliriz. B deki tüm kümeler A_{m-1} nin j elemanlı tüm alt kümeleridir.B' deki her küme ise A_{m-1} in $(j-1)$ elemanlı alt kümeleridir.Buna göre (7.4) ifadesi,

$$\begin{aligned}
\sum_{S\in A_{m,j}} q^{W(S)-\frac{j(j+1)}{2}} &= \sum_{S\in B} q^{W(S)-\frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{S\in B'} q^{W(S)-\frac{j(j+1)}{2}} \\
&= \sum_{S\in A_{m-1,j}} q^{W(S)-\frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{S\in A_{m-1,j-1}} q^{(W(S)+m)-\frac{j(j+1)}{2}} \\
&= \sum_{S\in A_{m-1,j}} q^{W(S)-\frac{j(j+1)}{2}} + \sum_{S\in A_{m-1,j-1}} q^{W(S)-\frac{j(j+1)}{2}} q^{m-j} \\
&= \begin{bmatrix} m-1 \\ j \end{bmatrix} + q^{m-j} \begin{bmatrix} m-1 \\ j-1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Tüme varımdan $1 \le n \le m, m \ge 2$ için (7.4) ifadesini doğru kabul etmiştik. Ayrıca q–Pascal kuralından dolayı da son eşitlik elde edilmiştir.O halde (7.4) ifadesi j üzerindeki tüme varımdan dolayı $0 \le j \le m$ için doğrudur. Sonuç olarak n üzerindeki tüme varımdan dolayı da $0 \le j \le n$ için teorem doğru olacaktır. ∎

BÖLÜM 8

q–Binom Katsayılar ve Sonlu Cisimler

Bu bölümde q– binom katsayılarının değerlerinin ne anlama geldiğini açıklayacağız. Konumuza geçmeden önce,lineer cebirin bazı temel kavramları hakkında biraz bilgi verelim.

V, F cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olsun. V vektör uzayının elemanları vektörlerdir. V bir vektör uzayı, W da V nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. W nun V nin bir alt uzayı olması için;

1. $\overrightarrow{0} \in W$
2. $\forall u, v \in W, u + v \in W$
3. $\forall u \in W, k \in W$ için $ku \in W$

V, F cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olsun. Yani V vektör uzayı, F cismi üzerinde elemanları sonlu olan bir küme tarafından span edilsin. Eğer $(v_1, v_2, ...v_n)$ V vektör uzayını gerer ve F cismi üzerinde lineer bağımsız iseler bu vektörlere V vektör uzayının bir bazı denir. V vektör uzayının boyutu ise baz vektörlerinin sayısıdır. Sıfır boyutlu alt uzay bir tanedir ve $\{0\}$ olarak gösterilmektedir.Bir boyutlu alt uzay sıfırdan faklı bir vektör tarafından span edilir ve $(av/v \neq 0, a \in F)$ şeklinde tanımlanır. İki boyutlu bir alt uzay ise iki tane lineer bağımsız vektör tarafından span edilir ve $(av_1 + bv_2/v_1, v_2 \neq 0, a, b \in F)$ şekilde tanımlanır. Benzer şekilde n boyutlu bir vektör uzayıda tanımlanabilir.

F_q mertebesi $| F_q |= q$ (q asal bir sayının kuvveti) olan bir cisim olsun. F_q^n de F_q cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $dim F_q^n = n$ olacaktır. Dolayısıyla F_q^n vektör uzayı aşağıdaki şekilde tanımlanan n-li vektörlerden oluşacaktır.

$$(a_1, a_2...a_n) \in F_q^n$$

Burada $\forall a_i \in F_q$ ve $| F_q |= q$ olduğundan $| F_q^n |= q^n$ olacaktır. Yani F_q^n vektör uzayı q^n tane faklı n-lilerden oluşmaktadır.

Teorem 1 *Eğer F_q mertebesi q olan bir cisim ise (q asal bir sayının kuvveti),*

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = n \text{ boyutlu } F_q^n \text{ vektör uzayının } j- \text{ boyutlu alt uzaylarının sayısı} \tag{8.1}$$

İspat. $V = F_q^n$, F_q cismi üzerinde tanımlı bir vektör uzayı olsun. $j = 0$ için $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[0]![n]!} = 1$ ve n- boyutlu bir V vektör uzayının sadece bir tane sıfır boyutlu bir alt uzayı vardır. O da $\{0\}$ dır. O halde $j = 0$ için teorem doğrudur.Şimdi de $j \geq 1$ için teoremi ıspatlayalım.V vektör uzayından $j-$ boyutlu bir alt uzay oluşturabilmemiz için, V vektör uzayından j tane lineer bağımsız baz vektörleri seçmeliyiz.Baz vektörlerimiz $v_1, v_2, ...v_j$ olsun.V vektör uzayı olduğundan $\overrightarrow{0}$ vektörünü içermektedir.Herbir baz elemanıda sıfırdan farklı olmalıdır. O halde v_1 baz vektörü V vektör uzayından ,$q^n - 1$ tane faklı şekilde seçilebilir.İkinci olarak v_2 vektörü, v_1 tarafından span edilen alt uzayın herhangi bir elemanı olmamalıdır.Çünkü $v_1$ve v_2 baz vektörleri lineer bağımsız olmalıdırlar. Bu yüzden v_2 yi ,v_1 tarafından span edilen alt uzayın bir elemanı olarak alamayız. v_1 baz vektörünün oluşturduğu alt uzay $V_1 = (av_1/v_1 \neq 0, a \in F_q)$ şeklinde tanımlanacağından v_1 tarafından span edilen alt uzayın q tane elemanı olacaktır. O halde v_2 vektörü $q^n - q$ tane farklı şekilde seçilecektir. Benzer şekilde geri kalan baz vektörleri de seçilir.Buna göre n- boyutlu vektör uzayı olan F_q^n vektör uzayından;

$$\left(q^n - 1\right)\left(q^n - q\right)\ldots\left(q^n - q^{j-1}\right) \tag{8.2}$$

tane faklı yoldan j tane lineer bağımsız baz vektörü seçebiliriz. Fakat oluşturduğumuz bu j lilerden bazıları aynı alt uzayı oluşturacaklardır. Çünkü bir vektör uzayı farklı bazlar tarafından oluşturulabilir.Bu nedenle (8.2) ifadesini $j-$ boyutlu bir alt uzayın kaç farklı baz tarafından span edilebileceği sayısına bölmeliyiz. Herhangi bir $j-$ boyutlu bir alt uzay alalım ve bu alt uzaydan kaç farklı şekilde lineer bağımsız j liler oluşturulabileceğini hesaplayalım.Herhangi bir j– boyutlu alt uzayın q^j tane elemanı vardır. Çünkü F_q üzerinde $j-$ boyutlu bir alt uzay asağıdaki şekilde tanımlanacaktır.

$$\left(a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_jv_j/v_j \neq 0,\ v_j \in F_q^n, a_j \in F_q\right)$$

Burada $\forall a_j \in F_q$ yerine q tane farklı değer yazabileceğimizden dolayı $j-$ boyutlu bir alt uzayın q^j tane elemanı vardır. Şimdi $j-$ boyutlu bir alt uzaydan j tane lineer bağımsız vektör seçelim. Bu seçim yukarda anlatılan şekilde yapılır.

$$(q^j-1)\,(q^j-q)(q^j-q^2)\dots(q^j-q^{j-1}) \tag{8.3}$$

Bunun sonucunda j– boyutlu bir vektör uzayından (8.3) de belirtildiği kadar farklı şekilde $j-$li lineer bağımsız baz vektörleri seçilebilir. Yani $j-$ boyutlu bir alt uzay (8.3) tane fakl baz tarafından span edilmektedir. Dolayısıyla birbirinden faklı j- boyutlu alt uzayların sayısı;

$$\begin{aligned}\frac{(q^n-1)\,(q^n-q)(q^n-q^2)\dots(q^n-q^{j-1})}{(q^j-1)\,(q^j-q)\dots(q^j-q^{j-1})} &= \frac{(q^n-1)\,q(q^{n-1}-1)\dots q^{j-1}(q^{n-j+1}-1)}{(q^j-1)q(q^{j-1}-1)q^2(q^{j-2}-1)\dots q^{j-1}(q-1)}\\ &= \frac{qq^2\dots q^{j-1}(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q^{n-j+1}-1)}{q\dots q^{j-1}(q^j-1)(q^{j-1}-1)\dots(q-1)}\\ &= \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\end{aligned}$$

olacaktır. Yukarıdaki bölme işlemini yapmamızın sebebi,

$$(q^j-1)\,(q^j-q)\dots(q^j-q^{j-1})$$

tane baz bir tane j– boyutlu alt uzay oluştumaktadır. Dolayısıyla,

$$(q^n-1)\,(q^n-q)\dots(q^n-q^{j-1})$$

tane bazın kaç tane farklı j– boyutlu alt uzay oluşturduğunu bulmak için bu iki ifadeyi birbirine böldük. Böylece ıspat tamamlanmış olmaktadır. ■

Tıpkı Pascal kuralı gibi, binom katsayılarını içeren ifadelerinde q– benzeri vardır. Bir sonraki örnekte,

$$\begin{pmatrix} m+k \\ n \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{k} \begin{pmatrix} m \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ k-j \end{pmatrix} \tag{8.4}$$

ifadesinin q– benzerini bulmaya çaılşacağız. Ama önce bu ifadenin nasıl oluşturulduğunu hatırlayalım. Varsayalım ki elimizde $m+n$ tane topumuz var ve bu topları m tanesi 1.grup, n tanesi de 2. grup olmak üzere iki gruba ayıralım.$(m+n)$ tane toptan k tane topu kaç farklı şekilde seçeriz? 1. gruptan hiç çekmez 2. gruptan k tane, 1. gruptan 1 tane 2. gruptan k-2 tane vbg .şeklinde seçebiliriz.Sonuç olarak tüm bu farklı seçme olasılıklarını toplarsak yukarıdaki ifadeyi elde ederiz.

Şimdi amacımız (8.4) ifadesinin q− benzerini yukarıdaki teorem yardımı ile bulmaktır. $V = F_q^{m+n}$ vektör uzayını alalım. $dimV = m+n$ ve$|V| = q^{m+n}$ dir. $V_m \subset V$ de V nin m− boyutlu bir alt uzayı olsun. Amacımız $(m+n)$ boyutlu bir vektör uzayında kaç tane farklı k− boyutlu alt uzay olduğunu bulmaktır. Bunu bulmanın bir yolunun yukarıdaki teoremden $\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix}$ olduğunu biliyoruz. Şimdi de bu ifadeyi elde etmenin ikinci yolunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
V &= F_q^{m+n} \quad dimV = m+n \quad |V| = q^{m+n} \\
V_m &\subset V \quad dimV_m = m \quad |V_m| = q^m \\
W &\subset V \quad dimW = k \quad |W| = q^k
\end{aligned}
$$

olarak alalım. İki tane alt uzayın kesişimi yine bir alt uzaydır. O halde $W \cap V_m$, V nin j− boyutlu bir alt uzaydır.$(j = 0, 1, 2...k)$ V_m nin j− boyutlu bir alt uzayı ile herbir W vektör uzayı arasında bir ilişki kurabiliriz.Varsayalım ki $dimW' = j$ ve $W' \subset V_m$ olsun. W' vektör uzayının tabanını W vektör uzayının tabanına genişletebiliriz. Yani W' vektör uzayının j-tane lineer bağımsız vektörüne $k-j$ tane lineer bağımsız vektör ekleyerek W vektör uzayının bir tabanını oluşturabiliriz. W yi W'nin bir genişlemesi olarak düşünebiliriz. Bir başka deyişle, W' nün bazını W nun bazına tamamlayabilirz.Bu nedenle W' deki j-tane lineer bağımsız vektöre $k-j$ tane lineer bağımsız vektör eklemeliyiz. Bu k-j tane lineer bağımsız vektörü $W - W'$ den almalıyız. Çünkü $k-j$ tane lineer bağımsız vektörü W' vektör uzayından seçersek lineer bağımsızlık bozulacaktır. Buna göre $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-j})$ seçeceğimiz lineer bağımsız vektörleri göstersin. v_1 vektörünü $q^{m+n} - q^m$ tane farklı şekilde seçebiliriz. v_1 ile v_2 lineer bağımsız vektörler olacağından v_2 , v_1 ile V_m tarafından span edilen vektör uzayının bir elemanı olmamalıdır. O halde $q^{m+n} - q^{m+1}$ tane farklı şekilde v_2 vektörünü seçilebiliriz. Benzer şekilde v_3 de, v_1, v_2 ve V_m nin span ettiği alt uzayın bir elemanı olmamalıdır. Buna göre v_3 vektörü, $q^{m+n} - q^{m+2}$ tane farklı yolla seçilebilir. O halde $(v_1, v_2, ..., v_{j-k})$ lineer bağımsız vektörleri,

$$
(q^{m+n} - q^m)(q^{m+n} - q^{m+1}) \ldots (q^{m+n} - q^{m+k+j-1})
$$

farklı şekilde seçilebilmektedir. Bu ifade bir tane W' alt vektör uzayının W vektör uzaylarına kaç farklı şekilde genişletilebileceğini ifade etmektedir. Aceba bir tane W' alt vektör uzayı tek bir tane W vektör uzayına kaç farklı şekilde genişletilebilir? W vektör uzayından $(v_1, v_2, \ldots, v_{k-j})$ lineer bağımsız vektörleri aşağıdaki kadar farklı şekilde seçilebilir.

$$(q^k - q^j)(q^k - q^{j+1}) \ldots (q^k - q^{k-1})$$

faklı şekilde bir tane W' alt vektör uzayı tek bir W vektör uzayına genişler. Buna göre bir tane W' vektör uzayı acaba kaç farklı şekilde W vektör uzaylarına genişler? Bu sorunun cevabı,

$$\begin{aligned}
\frac{(q^{m+n} - q^m) \ldots (q^{m+n} - q^{m+k-j-1})}{(q^k - q^j) \ldots (q^k - q^{k-1})} &= \frac{q^m \ldots q^{m+k-j-1}(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \ldots (q^{n-k-j+1} - 1)}{q^j \ldots q^{k-1}(q^{k-j} - 1)(q^{k-j-1} - 1) \ldots (q - 1)} \\
&= \frac{q^{m(k-j)} q^{(k-j)(k-j+1)/2}}{q^{j(k-j)} q^{(k-j)(k-j+1)/2}} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \\
&= q^{(m-j)(k-j)} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olacaktır. W' vektör uzayını da $\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$ farklı şekilde seçilebiliriz. Yani m boyutlu V_m vektör uzayının $\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$ tane j– boyutlu alt uzayı vardır. O halde W vektör uzayı da;

$$\begin{bmatrix} m+n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{k} q^{(m-j)(k-j)} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n \\ k-j \end{bmatrix} \tag{8.5}$$

tane farklı şekilde seçilebilir. Yani F_q^{m+n} vektör uzayının k-boyutlu alt uzaylarının sayısı yukardaki şekilde hesaplanabilir. (8.5) ifadesi (8.4) ifadesinin q– benzeridir.

$f(x) = x^n$ nin $x = 1$ noktası civarındaki q– Taylor formülünü aşağıdaki şekilde bulmuştuk.

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (x-1)_q^j \tag{8.6}$$

Şimdi bu ifadenin doğruluğunu $x = q^m$, $m \in Z^+$ için ıspatlayalım. Dikkat edersek yukarıdaki denklemin her iki tarafı x in bir polinomudur ve sonsuz çokluktaki x değerleri için eşitlik sağlanacaktır.

m, n pozitif tam sayılar olmak üzere S kümesi $A = F_q^n$ den $B = F_q^m$ vektör uzayları arasındaki tüm lineer tasvirlerin bir kümesi olsun. $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, A vektör uzayının bir bazı olsun. Varlık ve teklik teoreminden yararlanarak şunları söyleyebiliriz. T, S kümesinin herhangi bir elemanı olmak üzere, $T(e_k)$, B vektör uzayında q^m tane vektörden birine gidecektir.$(1 \leq k \leq n)$ Bu tasvir tektir. O halde A dan B ye $(q^m)^n$ tane farklı tasvir tanımlayabiliriz.Yani $|S| = (q^m)^n$ olacaktır. Bir başka deyişle,

$$|S| = (q^m)^n = \sum_{j=0}^{n} (\textit{rangı } j \textit{ olan } S \textit{ nin elemanlarının sayısı})$$

olacaktır. Bu yüzden bu ifadenin sağ tarfının $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (q^m - 1)_q^j$ ye eşit olduğunu göstermeliyiz. Dolayısıyla S nin rankı j olan lineer tasvirlerinin sayısını bulmalıyız. $T : A \to B$ bir lineer tasvir olsun. $W = T(A) \subset B$ j-boyutlu bir alt uzay olsun. O halde T lineer tasvirinin rankı j olacaktır. Ayrıca $rankT = \dim W = \dim T(A) \leq \dim A$ olacaktır. Yani $j \leq n$ olacaktır. Öyleyse A dan B ye tanımlanan tüm lineer tasvirlerin rankları $0, 1, 2, \ldots, n$ olacaktır. Bu yüzden,

$$|S| = \sum_{j=0}^{n} (\text{rangı j olan S nin elemanlarının sayısı})$$

şeklinde tanımladık. Yani $j = 0, 1, 2..., n$ için rankı j olan A dan B ye tüm lineer tasvirlerin sayısı bize A dan B ye tüm lineer tasvirlerin sayısını verecektir. Yukarıdaki denklemde dikkat etmemiz gereken bir nokta vardır. T tasvirinin rankı olan j, m den büyük olmamalıdır. Çünkü toplamdaki j. terimi alırsak, $j > m$ için;

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (q^m - 1)_q^j = \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (q^m - 1)(q^m - q) \ldots (q^m - q^m) \ldots (q^m - q^{j-1}) = 0$$

olacaktır. Dolayısıyla $j < m$ olmalıdır. Bunun böyle olacağını şu şekilde de görebiliriz. $rankT = \dim W = \dim T(A) = j$ ve $\dim B = m$ idi. $T(A) \subset B$ olacağından $\dim T(A) = j \leq m$ olacaktır. $T(A)$, B nin j-boyutlu bir alt uzayıdır.Ispatımızı yaparken lineer tasvirlerin bazı özelliklerinden yararlanacağız. A vektör uzayını iki tane alt uzayın direkt toplamı olarak yazabiliriz. Çünkü V, A nın bir alt vektör uzayı ise $A = V \oplus K$ olacak şekilde A vektör uzayının bir K alt vektör uzayı vardır. $A = V \oplus K$ olarak yazılabileceğinden dolayı $A = V \cup K$ ve $V \cap K = (0)$ olacaktır. Dolayısıyla V alt vektör uzayı j-boyutlu ise K alt vektör uzayıda n-j boyutlu olmalıdır. Çünkü;

$$\begin{aligned} \dim(V \cup K) &= \dim V + \dim K - \dim(V \cap K) \\ n &= j + (n-j) - 0 \end{aligned}$$

olacaktır. Eğer iki vektör uzayının boyutları birbirine eşitse,vektör uzayları birbirine izomorftur. Yani aralarında 1-1 ve örten bir lineer tasvir vardır. Bu tanıma göre V vektör uzayı ile $W = T(A)$ arasında 1-1 ve örten bir lineer tasvir vardır. $K = (v \in A/T(v) = 0)$ olacak şeklinde tasvirin çekirdeğini tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \dim A &= \dim(\ker T) + \dim(imT) \\ n &= (n-j) + j \end{aligned}$$

olduğundan $\dim(\ker T) = (n-j)$ olacaktır. O halde $V \subset A$ ve $W \subset B$ alt uzayları T tasviri ile birbirlerine izomorftur ve $rankT = j$ dir. Önceki teoremden yararlanarak, V alt uzayını $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$ farklı şekilde, W alt uzayını ise $\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$ farklı şekilde seçebiliriz. Dolayısıyla V ve W alt vektör uzayları $\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}\begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix}$ farklı şekilde seçebiliriz. $(v_1, v_2, \ldots, v_j)$ vektörleri, V vektör uzayının bazı ise, $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_j)$ vektörleri de W vektör uzayında lineer bağımsız olacaklardır. $T(v_1)$, $q^j - 1$ farklı şekilde seçilebilir. ($T(v_i) \neq 0$ ve T 1-1 ve örten lineer tasvir olduğundan sadece $T(0) = 0$ dır) $T(v_2)$, $T(v_1)$ in doğurduğu alt uzayın bir elemanı olmamalıdır. Çünkü bu vektörler lineer bağımsızdırlar. Buna göre $T(v_2)$, $q^j - q$ tane farklı şekilde seçilebilmektedir. $T(v_3)$ ise $T(v_1)$ ve $T(v_2)$ nin doğurduğu alt uzayın bir elemanı olmamalıdır. Buna göre $T(v_3)$ vektörü $q^j - q^2$ tane farklı şekilde seçilebilmektedir. O halde V ile W arasında rankı j olan,

$$(q^j - 1)(q^j - q) \ldots (q^j - q^{j-1})$$

tane farklı 1-1 ve örten lineer tasvir tanımlanabilir. Sonuç olarak S nin rankı j olan elemanlarının sayısı;

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ j \end{bmatrix} \prod_{i=0}^{j-1}(q^j - q^i) &= \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \prod_{i=0}^{j-1}\left(\frac{q^{m-i}-1}{q^{j-i}-1}\right) \prod_{i=0}^{j-1}(q^j - q^i) \\
&= \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \prod_{i=0}^{j-1}(q^m - q^i) \\
&= \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} (q^m - 1)_q^j
\end{aligned}$$

olacaktır. O halde (8.6) ifadesi $x = q^m$ için doğrudur.

Tanım 2

$$G_n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}$$

Bu sayıya n. Galois sayısı denir.

Önerme 3 *Galois sayıları aşağıdaki özelliği sağlamaktır.*

$$G_{n+1} = 2G_n + (q^n - 1)G_{n-1} \qquad G_0 = 1 \quad ve \quad G_1 = 2 \tag{8.7}$$

İspat. $P_n(x) = (x-1)_q^n$ şeklinde tanımlayalım.Polinomlar uzayı üzerinde bir L lineer tasviri tanımlayalım. $L\{P_n(x)\} = 1 \;\; n \geq 0$ olsun.Daha önceki bölümlerde x^n polinomunun $x = 1$ noktası civarındaki q− Taylor formülünü ;

$$x^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} P_j(x)$$

şeklinde bulmuştuk.Bu ifadenin her iki tarafına L lineer tasvirini uygularsak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$L(x^n) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} L\{P_j(x)\} = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = G_n \tag{8.8}$$

Dikkat edersek,

$$\begin{aligned}
P_{n+1}(x) &= (x-1)_q^{n+1} = (x-1)(x-q)...(x-q^{n-1})(x-q^n) \\
&= (x-1)_q^n(x-q^n) \\
&= (x-q^n)P_n(x) \\
&= xP_n(x) - q^nP_n(x)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafina L lineer tasvirini uygulayalım.

$$L\{P_{n+1}(x)\} = L\{xP_n(x)\} - L\{q^nP_n(x)\}$$

$$L\{xP_n(x)\} = L\{P_{n+1}(x)\} + L\{q^nP_n(x)\} = 1 + q^n \tag{8.9}$$

bulunur. Diğer tarftan, $D_qP_n(x) = [n]\,P_{n-1}(x)$ ifadesinden yararlanarak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{aligned}
D_qP_n(x) &= [n]\,P_{n-1}(x) \\
L(D_qP_n(x)) &= [n]\,L\{P_{n-1}(x)\} \\
&= \frac{q^n-1}{q-1}L\{P_{n-1}(x)\} \\
&= \frac{q^n-1}{q-1}L\{P_n(x)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(q-1)L(D_qP_n(x)) &= (q^n-1)L\{P_n(x)\} \\
&= q^nL\{P_n(x)\} - L\{P_n(x)\} \\
&= q^n - 1 \\
&= q^n + 1 - 2 \\
&= q^n + 1 - 2L\{P_n(x)\}
\end{aligned}$$

$$1 + q^n = (q-1)L\{D_qP(x)\} + 2L\{P_n(x)\} \tag{8.10}$$

elde edilecektir. Dikkat edecek olursak (8.9) ve (8.10) birbirlerine eşittir. Bu nedenle,

$$L\{xP_n(x)\} = 2L\{P_n(x)\} + (q-1)L\{D_qP_n(x)\} \qquad n \geq 0 \tag{8.11}$$

olacaktır. Herhangi bir polinom $P_n(x)$ polinomunun lineer kombinezonu şeklinde yazılabileceğinden dolayı, (8.11) da $P_n(x)$ yerine herhangi bir polinom koyabiliriz. Eğer bu polinomu x^n olarak seçersek,

$$L\left\{x^{n+1}\right\} = 2L\left\{x^n\right\} + (q-1)\,L\left\{[n]\,x^{n-1}\right\}$$

$$L\left\{x^{n+1}\right\} = 2L\left\{x^n\right\} + (q^n-1)\,L\left\{x^{n-1}\right\}$$

elde edilecektir. (8.9) dan (8.7) ifadesi elde edilecektir. Böylece ıspat tamamlanmış olacaktır. ■

BÖLÜM 9

Kuvvet Serileri için q–Taylor Formülü ve Heine'nin Binom Formülü

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ kuvvet serisini ele alalım. Bu serinin yakınsaklık merkezi $c = 0$ noktasıdır. R yakınsaklık yarı çapı olmak üzere $|x| < R$ de seri yakınsaktır. Bu kuvvet serisi $x = 0$ noktası civarında yakınsaktır ve kuvvet serisi $x = 0$ noktası civarında tanımlı bir $f(x)$ fonksiyonuna yakınsamaktadır. Bu yüzden seriyi $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ şeklinde ifade edebiliriz. Şimdi de $f(x)$ fonksiyonun $x = 0$ noktası civarındaki genel Taylor formülünü (3.1) ifadesinden yararlanarak yazalım.

$$\begin{aligned}
Df(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^{k-1} \\
D^2 f(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} c_k k (k-1) x^{k-2} \\
&\vdots \\
D^n f(x) &= \sum_{k=n}^{\infty} c_k k (k-1)(k-2)\dots(k-n+1) x^{k-n} \\
&= c_n n! + c_{n+1}\frac{(n+1)!}{1!}x + c_{n+2}\frac{(n+2)!}{2!} + \dots
\end{aligned}$$

$$D^n f(0) = c_n n! \ \Rightarrow\ c_n = \frac{D^n f(0)}{n!} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(D^k f)(0)}{k!} x^k$$

Bu ifadeye $f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktası civarında tanımlı olduğu için $f(x)$ 'in $x = 0$ civarındaki genel Taylor formülü denir. Dolayısıyla $f(x)$ in q– Taylor formülü $x = 0$ noktası civarında tanımlanacaktır. Yani $f(x)$ in q– Taylor formülü aşağıdaki şekilde tanımlanacaktır.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (D_q^k f)(0) \frac{x^k}{[k]!} \tag{9.1}$$

Teorem 1 *D, formal kuvvet serilerinin uzayında bir lineer operatör olsun. $(P_0(x), P_1(x), \ldots)$ polinomlar dizisi de üçüncü bölümdeki teoremin şartlarını $a = 0$ noktası için sağlasın. Buna göre herhangi bir kuvvet serisi $x = 0$ noktası civarındaki genel Taylor serisi ile ifade edilebilir.*

İspat. V, polinomların sonsuz boyutlu bir uzayı ve $(P_0(x), P_1(x), \ldots)$ polinomlar diziside bu uzayın bir bazı olsun. $P_n(x) = a_n x^n$ şeklinde tanımlayalım. Bu polinomlar lineer bağımsızdırlar. Buna göre $f(x) \in V$ fonksiyonunu $P_n(x)$ lerin bir lineer kombinezonu olarak aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j P_j(x) \tag{9.2}$$

$f(x) = c_0 P_0(x) + c_1 P_1(x) + \ldots \Rightarrow f(0) = c_0$ olacaktır. Çünkü $P_0(0) = 1$ ve $P_n(0) = 0$ $n \geq 1$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}(D^n f)(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} c_j P_{j-n}(x) \\ (D^n f)(0) &= c_n P_0(0) + c_{n+1} P_1(0) + \ldots = c_n\end{aligned}$$

olacaktır.Bunu (9.2) de yerine yazarsak,

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (D^j f)(0) P_j(x)$$

elde edilecektir. Sonuç olarak, herhangi bir formal kuvvet serisi $x = 0$ noktası civarındaki q− Taylor formülü ile de ifade edilebilir.

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (D_q^j f)(0) \frac{x^j}{[j]!}$$

■

Örnek 2 *$f(x) = \frac{1}{(1-x)_q^n}$ fonksiyonunu alalım. $f(x)$ fonksiyonunun q− Taylor formülünü bulalım. $f(x)$ bir formal kuvvet serisidir. Çünkü;*

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-qx)\ldots(1-q^{n-1}x)} \\ &= \frac{1}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1} \\ &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\end{aligned}$$

olacaktır. Şimdi de bu kuvvet serisinin q− Taylor serisini bulalım. Bu seri $x = 0$ noktası civarında yakınsak olduğu için q− Taylor serisine de $x = 0$ noktası civarında açmalıyız.

$$f(x) = (D_q^j f)(0)\frac{x^j}{[j]!}$$

$$\begin{aligned} D_q f(x) &= D_q \frac{1}{(1-x)_q^n} = \frac{[n]}{(1-x)_q^{n+1}} \\ &\vdots \\ D_q^j f(x) &= \frac{[n]\,[n+1]\ldots[n+j-1]}{(1-x)_q^{n+j}} \end{aligned}$$

$$D_q^j f(0) = [n]\,[n+1]\ldots[n+j-1] \qquad j \geq 1$$

Sonuç olarak,

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum \frac{[n]\,[n+1]\ldots[n+j-1]}{[j]!}x^j \tag{9.3}$$

bulunur. Bu ifade $\frac{1}{(1-x)^n}$ nin Taylor formülünün q− benzeridir. Bu formüle HEİNE'NİN BİNOM FORMÜLÜdenir.

BÖLÜM 10

Euler'in iki Özdeşliği ve q–Eksponansiyel Fonksiyonları

Buraya kadar olan bölümlerde iki tane binom formülü gördük. Bunlar,

$$(x+a)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2} a^j x^{n-j}$$

Gauss Binom formülü ve

$$\frac{1}{(1-x)_q^n} = 1 + \sum_{j=0}^{n} \frac{[n]\,[n+1]\,[n+2]\ldots[n+j-1]}{[j]!} x^j$$

Heine Binom formülü idi.

Gauss binom formülünde x yerine 1, a yerine de x alırsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$(1+x)_q^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} q^{j(j-1)/2} x^j$$

Eğer bu iki formülün $n \to \infty$ için limitini alırsak ne olur? $q = 1$ için cevap açıktır.

$$(x+a)^n = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} a^j x^{n-j}$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = 1 + \sum_{j=0}^{n} \frac{[n]\,[n+1]\,[n+2]\ldots[n+j-1]}{[j]!} x^j$$

$|\, q \,| < 1$ için $[n]$ nin $n \to \infty$ için limitini alalım.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} [n] &= \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^n}{1-q} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-q} - \lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{1-q} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-q} - \frac{1}{1-q} \lim_{n\to\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\lim_{n\to\infty} [n] = \frac{1}{1-q} \tag{10.1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \lim_{n\to\infty}\frac{(1-q^n).(1-q^{n-1})\dots(1-q^{n-j+1})}{(1-q^j)(1-q^{j-1})\dots(1-q)}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^n}{1-q}\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n-1}}{1-q^2}\dots\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n-j+1}}{1-q^j}$$

$$\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{1-q}\frac{1}{1-q^2}\dots\frac{1}{1-q^j} \tag{10.2}$$

elde edilir. Gauss ve Heine binom formüllerinin $n \to \infty$ için limitlerini alırsak aşağıdaki ifadeleri elde edeceğiz.

$$(1+x)_q^\infty = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2}\frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)} \tag{10.3}$$

$$\frac{1}{(1-x)_q^\infty} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^j)} \tag{10.4}$$

Yukardaki iki ifade sonsuz çarpımdan sonsuz toplama gitmektedir. Dikkat edecek olursak $n \to \infty$ için Gauss ve Heine binom formülleri x 'in formal bir kuvvet serisine dönüşmüştürler. Yukarıdaki ifadeler $q = 1$ için bir q-benzer değildir. Çünkü $q = 1$ için toplamlardaki herbir terim tanımsız olacaktır. Daha da ilginci yukarıdaki iki ifade Gauss ve Heine'den daha önce yaşamış olan Euler tarafından bulunmuştur.(10.3) ve (10.4) ifadelerine sırasıyla Euler'in birinci ve ikinci benzerlikleri denir ve E_1 ve E_2 olarak gösterilir.

E_2 denklemini ele alalım.

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots(1-q^j)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{\left(\frac{1-q}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\dots\left(\frac{1-q^j}{1-q}\right)} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[j]!} \tag{10.5}$$

Bu ifade bilinen üstel fonksiyonun Taylor formülüne benzemektedir.

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{j!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{10.6}$$

Tanım 1 *e^x exponansiyel fonksiyonunun q– benzeri (q–exponansiyel fonksiyon) aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.*

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^j}{[j]!} \tag{10.7}$$

(10.4) ve (10.5) den aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$e_q^{x/1-q} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{1-q}\right)^j}{[j]!} = \frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} \tag{10.8}$$

E_2 denkleminden yararlanarak,

$$e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} = \frac{1}{(1-(1-q)\,x)_q^{\infty}} \tag{10.9}$$

Benzer şekilde E_1 denklemini kullanarak başka bir q− üstel fonksiyonunu tanımlayabiliriz. Exponansiyel fonksiyonun başka bir q− benzeri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

$$E_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{[j]!} = (1+(1-q)\,x)_q^{\infty} \tag{10.10}$$

Burada $q \to 1$ için limit alısak e^x fonksiyonunu elde ederiz. Şimdi bulduğumuz iki q− exponansiyel fonksiyonunun bazı özelliklerini gösterelim. Bilinen exponansiyel fonksiyonun türevi kendisine eşittir. e^x in iki q− benzeri de benzer davranışta bulunmaktadır. Bunu gösterelim.

$$D_q e_q^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{D_q x^j}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{[j]\,x^{j-1}}{[j]!} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{[j-1]!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!} = e_q^x$$

ve

$$\begin{aligned} D_q E_q^x &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{D_q x^j}{[j]!} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} q^{j(j-1)} \frac{[j]\,x^{j-1}}{[j]!} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} q^{(j-1)(j-2)/2} q^{j-1} \frac{x^{j-1}}{[j-1]!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{q^j x^j}{[j]!} = E_q^{qx} \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$D_q e_q^x = e_q^x \quad ve \; D_q E_q^x = E_q^{qx} \tag{10.11}$$

elde edilir. Dikkat edecek olursak E_q^x in q− türevi kendisine eşit değildir. (10.11) ifadesinden yararlanarak,

$$D_q \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^n} = \frac{-D_q g(x)}{g(x)\, g(qx)} = \frac{[n](1-q)(1-qx(1-q))_q^{n-1}}{(1-(1-q)x)_q^n (1-qx(1-q))_q^n} = \frac{[n](1-q)}{(1-(1-q)x)_q^{n+1}}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} D_q \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{[n](1-q)}{(1-(1-q)x)_q^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(1-q)\frac{1-q^n}{1-q}}{(1-(1-q)x)_q^{n+1}} \\
&= (1-q) \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1-q^n}{1-q}}{(1-(1-q)x)_q^{n+1}} \\
&= \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}} \\
&= e_q^x
\end{aligned}$$

ve

$$Dq(1+(1-q)x)_q^n = (1-q)[n](1+(1-q)x)_q^{n-1}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Dq(1+(1-q)x)_q^n &= \lim_{n\to\infty}(1-q)[n](1+(1-q)x)_q^{n-1} \\
&= (1+(1-q)x)_q^{\infty} \\
&= E_q^{qx}
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Genelde $e_q^x.e_q^y \neq e_q^{x+y}$dir. Eğer x ve y bölüm 6 da bahsedilen komutatiflik ilişkisine sahipse yani $yx = qxy$ ise, $e_q^x.e_q^y = e_q^{x+y}$olacaktır. Bunu gösterelim.

$$e_q^x.e_q^y = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{[j]!}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{[k]!}\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^j y^k}{[j]!\,[k]!} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{[j+k]!}{[j]!\,[k]!}\frac{x^j y^k}{[j+k]!}$$

Yukarıdaki toplamda $n = j+k$ olsun. $yx = qxy$ olduğundan altıncı bölümdeki teoremden yararlanarak,

$$e_q^x.e_q^y = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} x^j y^{n-j}\right)\frac{1}{[n]!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{[n]!} = e_q^{x+y} \qquad (10.12)$$

elde edilir. Sonuç olarak eğer $yx = qxy$ ise $e_q^x e_q^y = e_q^{x+y}$dir. (10.9) ve (10.10) ifadelerinden yararlanarak,

$$e_q^x E_q^{-x} = 1 \qquad (10.13)$$

elde edilir. (10.3) ve (10.4) ifadelerini kullanarak;

$$\begin{aligned}
e_{1/q}^{x} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j \left(1-\frac{1}{q}\right)^j}{\left(1-\frac{1}{q}\right)\left(1-\frac{1}{q^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{q^j}\right)} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j (1-q)^j (-1)^j q.q^2 q^3 \ldots q^{j-1} q^j}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)(-1)^j q^j} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-q)\, x^j q^{\frac{j(j-1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)} \\
&= E_q^x
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$e_{1/q}^{x} = E_q^x \tag{10.14}$$

elde edilir.

BÖLÜM 11

q-Trigonometrik Fonksiyonlar

q− Trigonometrik fonksiyonlar aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$\sin_q x = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i} \qquad S\dot{I}N_q x = \frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i} \tag{11.1}$$

$$\cos_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} \qquad COS_q x = \frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2} \tag{11.2}$$

(10.14) den $S\dot{I}N_q x = \frac{e_{1/q}^{ix} - e_{1/q}^{-ix}}{2i} = \sin_{1/q} x$ ve $COS_q x = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} = \cos_{1/q} x$ elde edilir. Ayrıca (10.13) ifadesinden yararlanarak,

$$\cos_q x.COS_q x = \frac{e_q^{ix}.E_q^{ix} + e_q^{ix}E_q^{-ix} + e_q^{-ix}E_q^{ix} + e_q^{-ix}E_q^{-ix}}{4} = \frac{2 + e_q^{ix}E_q^{ix} + e_q^{-ix}E_q^{ix}}{4}$$

$$\sin_q x.S\dot{I}N_q x = \frac{e_q^{ix}E_q^{ix} - e_q^{ix}E_q^{-ix} - e_q^{-ix}E_q^{ix} + e_q^{-ix}E_q^{-ix}}{-4} = -\frac{e_q^{ix}E_q^{ix} + e_q^{-ix}E_q^{-ix} - 2}{4}$$

elde edilir. Sonuç olarak $\cos_q x.COS_q x + \sin_q x.S\dot{I}N_q x = 1$ ifadesi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nin q− benzeridir. Şimdi de q− trigonometrik fonksiyonların türevlerini zincir kuralından yararlanarak hesaplayalım. $u = u(x) = ix$, $f(x) = e_q^x$ olarak seçelim.

1.

$$\begin{aligned} D_q \sin_q x &= D_q\left(\frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(D_q e_q^{ix} - D_q e_q^{-ix}\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(ie_q^{ix} + ie_q^{-ix}\right) \\ &= \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} \\ &= \cos_q x \end{aligned}$$

$$D_q \sin_q x = \cos_q x \tag{11.3}$$

2.

$$\begin{aligned} D_q \cos_q x &= D_q \left(\frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(ie_q^{ix} - ie_q^{-ix} \right) \\ &= \frac{i}{2} \left(e_q^{ix} - e_q^{-ix} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(e_q^{-ix} - e_q^{ix} \right) \\ &= -\sin_q x \end{aligned}$$

$$D_q \cos_q x = -\sin_q x \tag{11.4}$$

3.

$$\begin{aligned} D_q S\dot{I}N_q x &= D_q \left(\frac{E_q^{ix} - E_q^{-ix}}{2i} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(iE_q^{iqx} + iE_q^{-iqx} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(E_q^{iqx} + E_q^{-iqx} \right) \\ &= COS_q x \end{aligned}$$

$$D_q S\dot{I}N_q x = COS_q x \tag{11.5}$$

4.

$$\begin{aligned} D_q COS_q x &= D_q \left(\frac{E_q^{ix} + E_q^{-ix}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(iE_q^{iqx} - iE_q^{-iqx} \right) \\ &= \frac{i}{2} \left(E_q^{iqx} - E_q^{-iqx} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(E_q^{-iqx} - E_q^{iqx} \right) \\ &= -S\dot{I}N_q x \end{aligned}$$

$$D_q COS_q x = -S\dot{I}N_q x \tag{11.6}$$

BÖLÜM 12

Jacobi'nin üçlü Çarpım Formülü

Sonsuz çarpım ve sonsuz toplamları anlatmak için E_1 ve E_2 iki Euler özdeşkiğini tekrar kullanacağız. Bu bölümde Jacobi tarafından keşfedilen önemli bir özdeşliği ispatlayacağız. Bu ispatı yaparkende E_1ve E_2 deklemlerini kullanacağız.

Teorem 1 *Eğer* $|\, q \,| < 1$ *ise;*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}z\right)\left(1+q^{2n-1}z^{-1}\right) \tag{12.1}$$

ifadesine Jacobi'nin üçlü çarpım formülü denir.

İspat. E_1 ifadesini ele alarak başlayalım.

$$\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^n x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j(j-1)/2} x^j}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)} \tag{12.2}$$

Burada q yerine q^2 ve x yerine zq koyarsak,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{2n-1}z\right) = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1+q^{2n+1}z\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2} z^j}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2j})} \tag{12.3}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemin her iki yanını $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)$ ile çarparsak toplam ifadesindeki payda ortadan kalkacaktır. Yani,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2}.z^j}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots(1-q^{2j})} = 1 + \frac{qz}{1-q^2} + \frac{q^2z^2}{(1-q^2)(1-q^4)} + \ldots$$

Burdaki toplamda payda eşitlersek,

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{j^2}.z^j}{(1-q^2)(1-q^4)\ldots(1-q^{2j})} = \frac{(1-q^2)\ldots + qz\left(1-q^4\right)\left(1-q^6\right)\ldots + q^2z^2\left(1-q^6\right)\left(1-q^8\right).}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots(1-q^{2j})}$$

Dikkat edilirse paydayı aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right) = (1-q)\left(1-q^2\right)\left(1-q^3\right)\ldots$$

Şimdi bunu da göz önünde bulundurarak (12.3) denkleminin her iki tarafını $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)$ ile çarpalım. Buna göre;

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}\right) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\left(q^{j^2}z^j\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-q^{2n+2j+2}\right)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}q^{j^2}z^j\left(\left(1-q^{2j+2}\right)\left(1-q^{2j+4}\right)...\right) \\
&= \left(1-q^2\right)\left(1-q^4\right)...+qz\left(1-q^4\right)\left(1-q^6\right)...
\end{aligned}$$

Yukarıdaki toplamın $j=0$ yerine $j=-\infty$ dan başlaması birşey farkettirmez. Çünkü $n\geq 0$ ve $j<0$ için $\left(1-q^{2n+2j+2}\right)=0$ dır. Diğer tarafdan (12.2) denklemini tekrar kullanırsak j yerine k, q yerine q^2 ve x yerine $-q^{2j+2}$ yazarsak,

$$\prod_{n=0}^{\infty}\left(1-q^{2n+2j+2}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{k^2+2kj+k}\left(-1\right)^k}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2k})}.$$

elde edilecektir. Bulduğumuz bu deklemi yukarıdaki denklemde yerine koyarsak,

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}z\right) &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^k.q^{(j+k)^2+k}.z^j}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2k})} \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{j^2}z^j\left(-qz^{-1}\right)^k}{(1-q^2)(1-q^4)\dots(1-q^{2k})}
\end{aligned}$$

elde edilir. Burda j yerine $j-k$ koyduk.Şimdi de E_2 denkleminde (10.4) q yerine q^2, x yerine de $-qz^{-1}$ koyarak kullanalım

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+q^{2n-1}z^{-1})}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-qz^{-1}\right)^k}{(1-q^2)(1-q^4)...(1-q^{2k})} \tag{12.4}$$

ve (12.4) ifadelerinden aşağıdaki sonuç elde edilecektir.

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{2n-1}z\right)\left(1+q^{2n-1}z^{-1}\right)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^{j^2}z^j$$

Böylece ıspat tamamlanmış olmaktadır. ∎

BÖLÜM 13

Parçalı Fonksiyon ve Euler'in Çarpım Formülü

Jacobi'nin üçlü çarpım formülünde z ve q yerine çeşitli değerler koyarak birçok ilginç sonuç elde edebiliriz. Örnek verecek olursak, Jacobi üçlü çarpım formülünde $|q| < 1$ için q yerine $q^{1/3}$ ve z yerine de $-q^{-1/2}$ alırak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\sum_{n \in Z} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-q^{3n}\right)\left(1-q^{3n-2}\right)\left(1-q^{3n-1}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-q^n\right) \tag{13.1}$$

Bu ifadeye Euler'in çarpım formülü denir. Bu formülü q'nun bir kuvvet serisi olarak düşünebiliriz. Böylece;

$$\varphi(q) = \sum_{n \in Z} (-1)^n q^{\frac{3n^2-n}{2}} \tag{13.2}$$

$$\varphi(q) = \sum_{n \in Z} (-1)^n q^{e_n} \tag{13.3}$$

$$\varphi(q) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-q^n\right) \tag{13.4}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Buradaki e_n sayısına,

$$e_n = \frac{3n^2-n}{2} \tag{13.5}$$

pentagonal sayılar denir. Dikkat edecek olursak, (13.3) ifadesinde derecesi e_n olan q ların katsayısı $(-1)^n$,diğerlerinin katsayısı ise sıfır olacaktır.

Tanım 1 $p(n)$, *parçalı fonksiyonu pozitif tamsayılar kümesi üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlıdır.*

$$p(n) = \begin{cases} n \text{ nin pozitif tam sayıların toplamı seklinde kac farklı yolla yazılabileceğinin sayısıdır } n \\ 0 & n < \\ 1 & n = \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p(1) &= 1 \\ p(2) &= 2 \qquad 2 = 1+1 \\ p(3) &= 3 \qquad 3 = 1+1+1 = 2+1 \\ p(4) &= 5 \qquad 5 = 1+1+1+1+1 = 4+1 = 3+2 = 1+1+2 \end{aligned}$$

Burada $p(n)$ nin n nin küçük değerleri için büyümesinin küçük olması aldatıcıdır. $p(n)$, n ile birlikte eksponansiyel olarak artmaktadır.

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}n} e^{\pi\sqrt{2n/3}} \qquad n \to \infty$$

Önerme 2

$$\frac{1}{\varphi(q)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n \tag{13.6}$$

İspat. $|\, q \,| < 1$ olduğunu varsayalım.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(q)} &= \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots} \\ &= (1+q+q^2+\ldots)(1+q^2+q^4+\ldots)(1+q^3+q^6+\ldots)\ldots \end{aligned}$$

Yukarıdaki ifadede q ların derecesi pozitif tam sayılardır. Eğer eşitliğin sağ tarafını q nun bir kuvvet serisine dönüştürmek istersek, herbir terim $q^{1n_1}q^{2n_2}q^{3n_3}$ ... formunda olacaktır (n_i, negatif olmayan tüm tam sayılar). Herbir q^nterimi $n = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \ldots$olduğundan, q^n nin katsayısı n nin pozitif sayıların toplamı olarak kaç farklı şekilde yazılabileceğinin sayısı olacaktır. q^n teriminin katsayısı n nin parçalanışına yani $p(n)$ ye eşit olacaktır. O halde,

$$\frac{1}{\varphi(q)} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, q^n$$

eşitliğini yazabiliriz. ■

Teorem 3 *Herhangi bir pozitif n tam sayısı için;*

$$p(n) = p(n-e_1) + p(n-e_{-1}) - p(n-e_2) - p(n-e_{-2}) + \ldots \tag{13.7}$$

İspat. Aşağıdaki ifadenin,

$$\varphi(q) = \sum_{j\in Z} (-1)^j q^{e_j} \ ve \ \frac{1}{\varphi(q)} = \sum_{k\in Z} p(k) q^k$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$\varphi(q) \frac{1}{\varphi(q)} = 1 = \left(\sum_{j\in Z} (-1)^j q^{e_j}\right) \left(\sum_{k\in Z} p(k) q^k\right)$$

elde edilir. $\sum_{j\in Z}\sum_{k\in Z} (-1)^j p(k) q^{e_j+k} = 1$ ifadesi q nun bir polinomudur. $k < 0$ için $p(k) = 0$ olacaktır. $e_j + k = n$ olarak alırsak herhangi bir q^n nin katsayısı $n > 0$ için $\sum_{j\in Z} (-1)^j p(n - e_j)$ olacaktır.Buna göre $\sum_{k\in Z}\sum_{j\in Z} (-1)^j p(k) q^{e_j+k} = 1$ ifadesini açacak olursak, $1+a_1q+a_2q^2+\ldots = 1$ olacaktır. Buradan da görüldüğü gibi bu eşitliğin sağlanabilmesi için q^n lerin katsayılarının sıfıra eşit olması gerekmektedir. Bu yüzden,

$$\sum_{j\in Z} (-1)^j p(n - e_j) = 0 = p(n - e_1) + p(n - e_{-1}) - p(n - e_2) - p(n - e_{-2}) + \ldots$$

olacaktır. Böylece ıspat tamamlanmış olacaktır. ∎

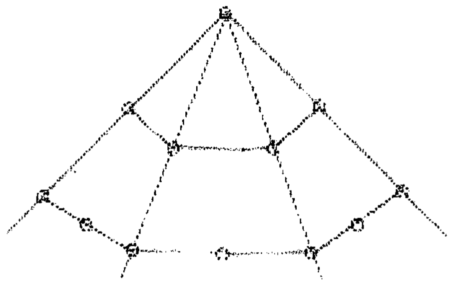
Yukardaki teorem yardımıyla $p(n)$ değerlerini daha hızlı bir şekilde hesaplayabiliriz. Buna bir örnek verelim.

$$p(5) = p(5 - e_1) + p(5 - e_{-1}) - p(5 - e_2) - p(5 - e_{-2}) + \ldots$$

$$\begin{aligned} e_{-1} &= 2 \\ e_1 &= 1 \\ e_2 &= 5 \\ e_{-2} &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(5) &= p(4) + p(3) - p(0) - p(-2) + 0 \\ &= 5 + 3 - 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

elde edilecektir. Bölümün başında $e_n = \frac{3n^2-n}{2}$ değerini pentagonal sayılar olarak tanımlamıştık. Pentagonal sayıların geometrik bir anlamı vardır. Bunu aşağıdaki şekilde açıklayabiliriz.



Şekil 1

Formüle göre $e_2 = 5$ olacaktır. e_2 değeri yukarıdaki şekildeki birinci beşgenin köşelerinin sayısıdır. Benzer şekilde $e_3 = 12$ değeri ise ikinci beşgendeki köşelerin sayısı olacaktır. Benzer şekilde m-gonal sayıları da tanımlayabiliriz. Polygonal sayıların en çok yaygın iki tipi aşağıda tanımlanmıştır.

1. ÜÇGEN SAYILAR

$$\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. KARE SAYILAR

$$\Box_n = n^2$$

Bunlara benzer olarak n. m-gonal sayılsını aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz. $m \geq 3$ için,

$$M_n = (m-2)\Delta_{n-1} + n = \frac{n(mn - 2n - m + 4)}{2} \tag{13.8}$$

Önerme 4

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{\Delta_n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}} \tag{13.9}$$

İspat. Jacobi'nin üçlü çarpım formülünde q ve z yerine $q^{1/2}$ koyalım.Burdan,

$$\begin{aligned} \sum_{n \in Z} q^{\Delta_n} &= \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n)(1+q^n)\left(1+q^{n-1}\right) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{n-1}\right) \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n-1}\right)=2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n}\right)$$

olduğundan dolayı,

$$\sum_{n\in Z}q^{\Delta_n}=2\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{n}\right)$$

elde edilecektir. $\Delta_n=\Delta_{-n-1}$ olduğundan dolayı $n=0$ dan ∞ a kadar olan toplam, $n=-1$ den ∞ a kadar olan toplama eşit olacağı için yukarıdaki ifade aşağıdaki hale gelecektir.

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^{\Delta_n}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1+q^{n}\right)$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^{2n}}{1-q^{n}}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2n-1}} \tag{13.10}$$

Yukarıdaki (13.10) ifadesinden yararlanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^{\Delta_n}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\frac{1}{1-q^{2n-1}}$$

■

Önerme 5

$$\sum_{n\in Z}(-q)^{n^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^{n}}{1+q^{n}} \tag{13.11}$$

İspat. Jacobi'nin üçlü çarpım formülünde z yerine -1 koyalım. Bunun sonucunda,

$$\sum_{n\in Z}(-q)^{n^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1-q^{2n-1}\right)\left(1-q^{2n-1}\right)$$

elde edilir. (13.10) ifadesinden yararlanarak,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n}\right)\left(1-q^{2n-1}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n}\right)$$

elde edilir. Bundan dolayı,

$$\sum_{n\in Z}(-q)^{n^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{n}\right)\left(1-q^{2n-1}\right)$$

olacaktır. Yine (13.10) ifadesinden,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-q^{2n-1}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+q^{n}}$$

elde edilecektir. Sonuç olarak,

$$\sum_{n\in Z}(-q)^{n^2}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1-q^{n}}{1+q^{n}}$$

elde edilir.Böylece ıspatımız tamamlanmış olmaktadır. ■

Daha sonraki bölümlerde (13.9) ve (13.11) ifadelerini bir tam sayının kare ve üçgen sayılarının toplamı şeklimde parçalamda kullanacağız. Şimdi (13.10) ifadesini yeniden ele alalım. İfadenin sol tarafını açarsak,

$$(1+q)\left(1+q^2\right)\left(1+q^3\right)\ldots$$

elde edilecektir. Bu q nun bir polinomudur. Burada herhangi bir q^n teriminin kuvveti $n = n_1 + n_2 + n_3 + ...$ şeklindedir. Buradaki herbir n_i pozitif tamsayısı birbirinden farklıdır. O halde q^n teriminin katsayısı n nin kaç farklı şekilde, farklı pozitif tam sayıların toplamı şeklinde yazılabileceğinin sayısıdır. Aynı ifadenin sağ tarafını açarsak,

$$\frac{1}{1-q}\frac{1}{1-q^3}\frac{1}{1-q^5}\cdots=\left(1+q+q^2+\ldots\right)\left(1+q^3+q^6+\ldots\right)\left(1+q^5+q^{10}+\ldots\right)\ldots$$

elde edilecektir. Bu ifade de q nun bir polinomudur ve herbir q^n teriminin katsayısı n nin teksayıların toplamı şeklinde kaç farklı şekilde ifade edilebileceğinin sayısıdır. Kısacası,

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+q^{n}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^{2n-1}}$$

ifadesi q nun bir polinomudur. Burdan n pozitif tam sayısının farklı pozitif sayılarla parçalanışının sayısının,tek sayılarla parçalanışının sayısına eşit olduğunu söyleriz.

Teorem 6 *n sıfır olmayan herhangi bir tam sayı olmak üzere, $n > 0$ için aşağıdaki fonksiyon tanımlı ise,*

$$d(n)=\left\{\begin{array}{ll} n\ nin\ pozitif\ b\ddot{o}lenlerinin\ toplam\imath & n>0 \\ 0 & n<0 \end{array}\right\}$$

$$d(n)=d(n-e_1)+d(n-e_{-1})-d(n-e_2)-d(n-e_{-2})+\ldots. \qquad (13.12)$$

olacaktır. $d(0) = n$ *olarak tanımlanmaktadır.*

İspat. $D(q) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d(n)\, q^n$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\begin{aligned}
D(q) &= d(1)\,q + q^2 d(2) + q^3 d(3) + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m/n} mq^n \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m/n} mq^n \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m\left(q^m + q^{2m} + q^{3m} + ...\right) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1-q^m} \\
&= -q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{d}{dq} \log\left(1-q^m\right) \\
&= -q \frac{d}{dq} \log \prod_{m=1}^{\infty} \left(1-q^m\right) \\
&= \frac{-q\frac{d}{dq} \prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1-q^m\right)}{\prod\limits_{m=1}^{\infty}\left(1-q^m\right)}
\end{aligned}$$

Buradan (13.4) ifadesinden yaralanarak, aşağıdaki sonuca ulaşabiliriz.

$$D(q)\,\varphi(q) = -q\frac{d}{dq}\varphi(q)$$

(13.3) ifadesinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{j=1}^{\infty} d(j)\, q^j\right)\left(\sum_{k\in Z} (-1)^k q^{e_k}\right) &= -q\frac{d}{dq}\sum_{m\in Z} (-1)^m q^{e_m} \\
&= -q\sum_{m\in Z} (-1)^m e_m q^{e_m-1} \\
&= \sum_{m\in Z} (-1)^{m+1} e_m q^{e_m}
\end{aligned}$$

Dikkat edecek olursak eşitliğin her iki tarafı q nun bir polinomudur. Sol taraftaki ifadede q^n nin katsayısı, $\sum\limits_{k\in Z} (-1)^k d(n-e_k)$ olacaktır. Her iki taraftaki q^n katsayılarını karşılaştırırsak,

$$\sum_{k\in Z} (-1)^k d(n-e_k) = \left\{\begin{array}{ll} (-1)^{m+1} e_m & \text{eğer } n = e_m \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } n \neq e_m \text{ ise} \end{array}\right\}$$

elde edilecektir. Bu ifade (13.12) ifadesi ile aynıdır. Çünkü $j = n - e_k \geq 1$ ve $d(n)$ herhangi bir negatif n değeri için sıfır olarak tanımlanmaktadır. ∎

BÖLÜM 14

q-Hipergeometrik Fonksiyonlar ve Heine Formülü

Tanım 1 *Eğer*

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n \qquad \frac{c_{n+1}}{c_n}=R(n) \quad c_0=1 \tag{14.1}$$

ve R rasyonel bir fonksiyon (R nin paydası negatif olmayan tamsayılar için tanımlı) ise $F(x)$'e hipergeometrik seri denir.

Eğer $R(n)$ verilmişse, c_n katsayılarını kolaylıkla bulabiliriz.

$$c_n=R(0)\,R(1)\ldots R(N-1) \qquad n\geq 1 \tag{14.2}$$

Şimdi bu formülü nasıl elde ettiğimizi gösterelim.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=R(n)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
c_{n+1} &= R(n)\,c_n \\
c_n &= R(n-1)\,c_{n-1} \\
c_{n-1} &= R(n-2)\,c_{n-2} \\
c_{n-2} &= R(n-3)\,c_{n-3} \\
&\vdots \\
c_1 &= R(0)\,c_0
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Şimdi bulduğumuz bu değerleri sırasıyla

$$c_n=R(n-1)\,c_{n-1}$$

de yerine koyalım.

$$
\begin{aligned}
c_n &= R(n-1)\,R(n-2)\,c_{n-2} \\
c_n &= R(n-1)\,R(n-2)\,R(n-3)\,c_{n-3} \\
&\vdots \\
c_n &= R(n-1)\,R(n-2)\,R(n-3)\ldots R(1)\,R(0)
\end{aligned}
$$

elde edilecektir. $R(t) \equiv 1$ ise tüm n'ler için $c_n = 1$ olacaktır. Bu durumda $F(x)$ bir geometrik seridir. Hipergeometrik seri ile geometrik seri arasındaki fark budur.

$R(t)$'yi aşağıdaki gibi çarpanlarına ayırabiliriz.

$$
R(t) = \frac{(t+a_1)(t+a_2)\ldots(t+a_r)}{(t+b_1)(t+b_2)\ldots(t+b_s)(t+1)} \tag{14.3}
$$

Burada $b_j \neq a_r$ ve b_j'ler negatif olmayan tam sayılardır. $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$

Tanım 2 *Eğer $F(x)$, (14.1) deki gibi tanımlıysa ve $R(t)$ (14.3) formunda yazılabiliyorsa, $F(x)$ i aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.*

$$
F(x) = {}_rF_s \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots, b_s \end{matrix} \; ; x \right] \tag{14.4}
$$

Bu ifadeyi daha açık bir şekilde aşağıdaki gibi ifade edebiliriz.

$$
F(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\{a_1(a_1+1)\ldots(a_1+n-1)\}\ldots\{a_r(a_r+1)\ldots(a_r+n-1)\}\,x^n}{\{b_1(b_1+1)\ldots(b_1+n-1)\}\ldots\{b_s(b_s+1)\ldots(b_s+n-1)\}\,n!} \tag{14.5}
$$

Çünkü,

$$
F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n
$$

$$
c_n = R(0)\,R(1)\ldots R(n-1) \;\; ve \;\; R(t) = \frac{(t+a_1)(t+a_2)\ldots(t+a_r)}{(t+b_1)(t+b_2)\ldots(t+b_s)(t+1)}
$$

olduğunu biliyoruz. Bunlardan yararlanarak,

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{a_1 a_2 a_3 \ldots a_r}{b_1 b_2 b_3 \ldots b_s} \frac{(a_1+1)(a_2+1)\ldots(a_r+1)}{(b_1+1)(b_2+1)\ldots(b_s+1)\,2} \cdots \frac{(a_1+n-1)(a_2+n-1)\ldots(a_r+n-1)}{(b_1+n-1)(b_2+n-1)\ldots(b_s+n-1)\,n} \\
&= \frac{\{a_1(a_1+1)\ldots(a_1+n-1)\}\ldots\{a_r(a_r+1)\ldots(a_r+n-1)\}}{\{b_1(b_1+1)\ldots(b_1+n-1)\}\ldots\{b_s(b_s+1)\ldots(b_s+n-1)\}\,n!}
\end{aligned}
$$

Bulduğumuz c_n ifadesini yukarıdaki kuvvet serisinde yerine yazarsak, (14.5) ifadesini elde ederiz.

$$ {}_0F_0\left[x\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x $$

$$ {}_1F_0\left[\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} ;x\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\left(a+1\right)...\left(a+n-1\right)}{n!} x^n = \frac{1}{\left(1-x\right)^a} $$

Bu ifade $\frac{1}{(1-x)^a}$'nin Taylor açılımıdır. Hipergeometrik seriler, binom, geometrik ve exponansiyel seriler gibi bir seri çeşidir.

Tanım 3 *Eğer*

$$ \Phi\left(x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{14.6} $$

$$ \frac{c_{n+1}}{c_n} = R\left(q^n\right) \quad , \quad c_0 = 1 \tag{14.7} $$

ve $R\left(t\right)$, *paydası* $t = 1, q, q^2, \ldots$ *değerleri için tanımsız olmuyorsa,* $\Phi\left(x\right)$*'e q-hipergeometrik seri denir.*

Yine benzer şekilde $n \geq 1$ için,

$$ c_n = R\left(1\right) R\left(q\right) R\left(q^2\right) \ldots R\left(q^{n-1}\right) \tag{14.8} $$

$R\left(t\right)$ yi yine benzer şekilde aşağıdaki gibi çarpanlarına ayırabiliriz.

$$ R\left(t\right) = \frac{\left(a_1 - t^{-1}\right) \ldots \left(a_r - t^{-1}\right)}{\left(b_1 - t^{-1}\right) \ldots \left(b_s - t^{-1}\right)\left(q - t^{-1}\right)} \tag{14.9} $$

Burada $a_i \neq b_j$ ve $b_j \neq 1, q, q^2, \ldots$ $1 \leq i \leq r$ $1 \leq j \leq s$ dir. Şimdi de (14.6) daki c_n katsayısını daha açık bir forumda ifade etmeye çalışalım. Bunu yaparken de aşağıdaki eşitlikten yararlanacağız.

$$ \prod_{j=0}^{n-1} \left(a - q^{-j}\right) = \left(-1\right)^n q^{-n(n-1)/2} \left(1-a\right)_q^n \tag{14.10} $$

(14.8) ifadesindeki herbir $R(t)$ değerini (14.9) ifadesinden yararlanarak bulup (14.8) de tekrar yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{(a_1-1)\dots(a_r-1)\left(a_1-q^{-1}\right)\dots\left(a_r-q^{-1}\right)\dots\left(a_1-q^{1-n}\right)\dots\left(a_r-q^{1-n}\right)}{(b_1-1)\dots(b_s-1)(q-1)\left(b_1-q^{-1}\right)\dots\left(b_s-q^{-1}\right)\left(q-q^{-1}\right)\left(b_1-q^{1-n}\right)\dots\left(b_s-q^{1-n}\right)(q-} \\
&= \frac{(a_1-1)\dots\left(a_1-q^{1-n}\right)\dots\left\{(a_r-1)\dots\left(a_r-q^{1-n}\right)\right\}}{(b_1-1)\dots\left(b_1-q^{1-n}\right)\dots(b_s-1)\dots\left(b_s-q^{1-n}\right)(q-1)\dots\left(q-q^{1-n}\right)} \\
&= \frac{(-1)^n(1-a_1)\dots\left(1-a_1q^{n-1}\right)q^{-n(n-1)/2}\dots(-1)^n q^{-n(n-1)/2}(1-a_r)\dots\left(1-a_rq^{n-1}\right)}{(-1)^n(1-b_1)\dots\left(1-b_1q^{n-1}\right)q^{-n(n-1)/2}\dots(q-1)\dots\left(q-q^{1-n}\right)}
\end{aligned}$$

(14.10) ifadesinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{(1-a_1)_q^n\dots(1-a_r)_q^n\left((-1)^n q^{-n(n-1)/2}\right)^r}{(1-b_1)_q^n\dots(1-b_s)_q^n\left((-1)^n q^{-n(n-1)/2}\right)^s}\frac{1}{(-1)^n q^{-n(n-1)/2}(1-q)_q^n} \\
&= \frac{\left((-1)^n q^{-n(n-1)/2}\right)^{r-s-1}(1-a_1)_q^n\dots(1-a_r)_q^n}{(1-b_1)_q^n\dots(1-b_s)_q^n(1-q)_q^n}
\end{aligned}$$

$$c_n = \frac{\left((-1)^n q^{n(n-1)/2}\right)^{-r+s+1}(1-a_1)_q^n\dots(1-a_r)_q^n}{(1-b_1)_q^n\dots(1-b_s)_q^n(1-q)_q^n} \tag{14.11}$$

elde edilir. q- Hipergeometrik serisini (14.4) ifadesine benzer şekilde aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz..

$$\Phi(x) ={}_r\Phi_s\left[\begin{matrix} a_1,a_2,\dots,a_r \\ b_1,b_2,\dots,b_s\end{matrix};q;x\right] \tag{14.12}$$

Ayrıca (14.11) de bulduğumuz ifadeyi (14.6) da yerine yazarsak $\Phi(x)$ hipergeometrik serisini aşağıdaki şekilde de ifade edebiliriz.

$$\Phi(x) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left((-1)^n q^{n(n-1)/2}\right)^{-r+s+1}(1-a_1)_q^n\dots(1-a_r)_q^n}{(1-b_1)_q^n\dots(1-b_s)_q^n(1-q)_q^n}x^n \tag{14.13}$$

$${}_0\Phi_0\left[\begin{matrix} - \\ -\end{matrix};q;x\right] = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{n(n-1)/2}\frac{x^n}{(1-q)_q^n} = (1-x)_q^{\infty} = E_q^{x/(q-1)} \tag{14.14}$$

$${}_1\Phi_0\left[\begin{matrix} 0 \\ -\end{matrix};q;x\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(1-q)_q^n} = \frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} = e_q^{x/(1-q)} \tag{14.15}$$

$${}_1\Phi_0[a;q;x] = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-a)_q^n}{(1-q)_q^n}x^n \tag{14.16}$$

Yukarıdaki (14.16) ifadesinde $a = q^N \quad (N \in Z^+)$ alalım.

$$\begin{aligned}
{}_1\Phi_0\left[q^N;q;x\right] &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-q^N\right)\left(1-q^{N+1}\right)\ldots\left(1-q^{N+n-1}\right)}{(1-q)\left(1-q^2\right)\ldots\left(1-q^n\right)}x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{1-q^N}{1-q}\right)\ldots\left(\frac{1-q^{N+n-1}}{1-q}\right)}{\left(\frac{1-q}{1-q}\right)\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)\ldots\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)}x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[N]\,[N+1]\ldots[N+n-1]}{[1]\,[2]\ldots[n]}x^n \\
&= 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[N]\,[N+1]\ldots[N+n-1]}{[n]!}x^n \\
&= \frac{1}{(1-x)_q^N}
\end{aligned}$$

Bu ifade Heıne Binom Formülü dür. Sonuç olarak,

$$ {}_1\Phi_0\left[q^N;q;x\right] = \frac{1}{(1-x)_q^N} \tag{14.17}$$

elde edilecektir. Bu ifade Heıne Binom Formülü'nün q-hipergeometrik seriyle gösterilişidir.

Teorem 4 *Herhangi bir a için, Heine nin aşağıdaki formülü elde edilir.*

$$ {}_1\Phi_0\left[a;q;x\right] = \frac{(1-ax)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}} \tag{14.18}$$

İspat. Eğer $a = q^N$ ise (14.18) ifadesi doğrudur. Bunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
{}_1\Phi_0\left[q^N;q;x\right] &= \frac{\left(1-q^N x\right)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}} = \frac{\left(1-q^N x\right)\left(1-q^{N+1}x\right)\ldots}{(1-x)\,(1-qx)\ldots} \\
&= \frac{1}{(1-x)\,(1-qx)\ldots\left(1-q^{N-1}x\right)} \\
&= \frac{1}{(1-x)_q^N}
\end{aligned}$$

elde edilir. (14.17) den elde ettiğimiz bu ifadenin zaten Heıne'nin binom formülü olduğunu biliyoruz. İspatı tamamlamak için çok kullanışlı bir yol izleyeceğiz. (14.18) ifadesinin her iki tarafını katsayıları a nın rasyonel fonksiyonu olacak şekilde sonsuz birer seri ile ifade edebiliriz. Yani,

$$ {}_1\Phi_0\left[a;q;x\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(a)\,x^n \ \ ve \frac{(1-ax)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}} = \sum_{n=0}^{\infty} c'\,(a)\,x^n $$

şeklinde ifade edebiliriz. (14.18) ifadesinin $a = q^N$ için , yani a nın sonsuz çokluktaki değeri için doğru olduğunu biliyoruz. Bu durumda $\forall n \in N$ ve $a = q^N$ için $c_n(a) = c'(a)$ dir ve $c_n - c'_n$ ifadesi a nın rasyonel bir fonksiyonudur ve bu fonksiyon a nın sonsuz çokluktaki değeri için sıfıra eşittir. $c_n - c'_n$ rasyonel bir fonksiyon ise bu fonksiyonun sıfırlarının sayısı payın mertebesini geçmeyecektir. Ama $c_n - c'_n$ fonksiyonunun sonsuz çoklukta sıfırı olduğu için $\forall n$ $(n = 0, 1, ...)$ için $c_n - c'_n = 0$ olacaktır. Dolayısıyla $\forall a$ değeri için $c_n(a) = c'(a)$ olacaktır. Böylece (14.18) ifadesi sağlanmış olacaktır. ∎

BÖLÜM 15

Genel Binom Formülü ve Heine Binom Formülü

Herhangi bir α sayısı için aşağıdaki eşitliği tanımlayabiliriz.

$$(1+x)_q^{\alpha} = \frac{(1+x)_q^{\infty}}{(1+q^{\alpha}x)_q^{\infty}} \tag{15.1}$$

Bu ifadeyi nasıl elde ettiğimizi gösterelim. Bir önceki bölümde,

$$\frac{(1-q^N x)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}} = \frac{1}{(1-x)_q^N}$$

olduğunu görmüştük. Burda N yerine α, x yerine de $-x$ alırsak, (15.1) ifadesini elde etmiş oluruz.

Önerme 1 *Herhangi iki α ve β sayıları için aşağıdaki eşitlik vardır.*

$$(1+x)_q^{\alpha}(1+q^{\alpha}x)_q^{\beta} = (1+x)_q^{\alpha+\beta} \tag{15.2}$$

İspat. (15.1) ifadesini kullanarak, aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$(1+x)_q^{\alpha} = \frac{(1+x)_q^{\infty}}{(1+q^{\alpha}x)_q^{\infty}} \qquad (1+q^{\alpha}x)_q^{\alpha} = \frac{(1+q^{\alpha}x)_q^{\infty}}{(1+q^{\alpha+\beta}x)_q^{\infty}}$$

$$(1+x)_q^{\alpha}(1+q^{\alpha}x)_q^{\beta} = \frac{(1+x)_q^{\infty}}{(1+q^{\alpha}x)_q^{\infty}}\frac{(1+q^{\alpha}x)_q^{\infty}}{(1+q^{\alpha+\beta}x)_q^{\infty}} = \frac{(1+x)_q^{\alpha}}{(1+q^{\alpha}q^{\beta}x)_q^{\infty}} = (1+x)_q^{\alpha+\beta}$$

elde edilecektir. ■

Önerme 2 *Herhangi bir α sayısı için aşağıdaki ifade doğrudur.*

$$D_q(1+x)_q^{\alpha} = [\alpha](1+qx)_q^{\alpha-1} \tag{15.3}$$

İspat. Yukarıdaki tanımı kullanarak yukarıdaki eşitliği elde edebiliriz.

$$
\begin{aligned}
D_q((1+x)_q^\alpha) &= D_q\left(\frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^\alpha x)_q^\infty}\right) \\
&= \frac{d_q\left(\frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^\alpha x)_q^\infty}\right)}{d_q x} \\
&= \left(\frac{(1+qx)_q^\infty}{(1+q^{\alpha+1}x)_q^\infty} - \frac{(1+x)_q^\infty}{(1+q^\alpha x)_q^\infty}\right)\frac{1}{x(q-1)} \\
&= \frac{(1+qx)_q^\infty}{(1+q^\alpha x)_q^\infty}\frac{(1+q^\alpha x)-(1+x)}{x(q-1)} \\
&= (1+qx)_q^{\alpha-1}\frac{q^\alpha - 1}{q-1} \\
&= [\alpha]\,(1+qx)_q^{\alpha-1}
\end{aligned}
$$

elde edilir. ■

Yukarıdaki önerme yardımı ile $(1+x)_q^\alpha$ nın q- Taylor Serisi'ni bulabiliriz. (2.11) de verilen zincir kuralı yardımıyla,

$$(1+x)_q^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty}\left(D_q^j f\right)(0)\frac{x^j}{[j]!}$$

$$
\begin{aligned}
D_q^j\,(1+x)_q^\alpha &= D_q^{j-1}\,[\alpha]\,(1+qx)_q^{\alpha-1} \\
&= D_q^{j-2}\,[\alpha]\,[\alpha-1]\,q\left(1+q^2x\right)_q^{\alpha-2} \\
&= D_q^{j-3}\,[\alpha]\,[\alpha-1]\,[\alpha-2]\,qq^2\left(1+q^3x\right)_q^{\alpha-3} \\
&\ \vdots \\
&= [\alpha]\,[\alpha-1]\,[\alpha-2]\ldots[\alpha-j+1]\,qq^2q^3\ldots q^{j-1}\left(1+q^jx\right)_q^{\alpha-j}
\end{aligned}
$$

$$D_q^j\,(1+x)_q^\alpha\,\backslash_{x=0} = [\alpha]\,[\alpha-1]\,[\alpha-2]\ldots[\alpha-j+1]\,q^{j(j-1)/2}$$

Sonuç olarak,

$$
\begin{aligned}
(1+x)_q^\alpha &= \sum_{j=0}^{\infty}[\alpha]\,[\alpha-1]\,[\alpha-2]\ldots[\alpha-j+1]\,q^{j(j-1)/2}\frac{x^j}{[j]!} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\begin{bmatrix}\alpha \\ j\end{bmatrix} q^{j(j-1)/2}x^j
\end{aligned}
$$

elde edilecektir. Dikkat edersek bu ifade Gauss Binom Formülü dür.

Önerme 3 *Herhangi bir α sayısı için aşağıdaki ifade doğrudur.*

$$D_q\left(\frac{1}{(1-x)_q^{\alpha}}\right)=\frac{[\alpha]}{(1-x)_q^{\alpha-1}} \tag{15.4}$$

İspat. q– Türevin tanımından yararlanarak, yukarıdaki ifadeyi elde edebiliriz.

$$\begin{aligned}
D_q\left(\frac{1}{(1-x)_q^{\alpha}}\right) &= D_q\left(\frac{(1-q^{\alpha}x)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}}\right)\\
&= \left(\frac{(1-q^{\alpha+1}x)_q^{\infty}}{(1-xq)_q^{\infty}}-\frac{(1-q^{\alpha}x)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}}\right)\frac{1}{x(q-1)}\\
&= \frac{(1-q^{\alpha+1}x)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}}\frac{(1-x)-(1-q^{\alpha}x)}{x(q-1)}\\
&= \frac{1}{(1-x)_q^{\alpha+1}}\frac{q^{\alpha}-1}{q-1}\\
&= [\alpha]\frac{1}{(1-x)_q^{\alpha+1}}
\end{aligned}$$

elde edilecektir. ■

Yukarıdaki önermeyi kullanarak $\frac{1}{(1-x)_q^{\alpha}}$'nın q– Taylor Serisi 'ni bulabiliriz.

$$f(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\left(D_q^jf\right)(0)\frac{x^j}{[j]!}$$

$$D_q\left(\frac{1}{(1-x)_q^{\alpha}}\right)=\frac{[\alpha]}{(1-x)_q^{\alpha+1}}$$

$$D_q^2\left(\frac{1}{(1-x)_q^{\alpha}}\right) = \frac{[\alpha][\alpha+1]}{(1-x)_q^{\alpha+2}}$$

$$\vdots$$

$$D_q^j\left(\frac{1}{(1-x)_q^{\alpha}}\right) = \frac{[\alpha][\alpha+1][\alpha+2]\dots[\alpha+j-1]}{(1-x)_q^{\alpha+j}}$$

$$D_q^j\left(\frac{1}{(1-x)_q^{\alpha}}\right)|_{x=0}=[\alpha][\alpha+1][\alpha+2]\dots[\alpha+j-1]$$

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)_q^{\alpha}} &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{[\alpha][\alpha+1][\alpha+2]\dots[\alpha+j-1]}{[j]!}x^j\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha})(1-q^{\alpha+1})\dots(1-q^{\alpha+j-1})}{(1-q^j)(1-q^{j-1})\dots(1-q^2)(1-q)}x^j\\
&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha})_q^j}{(1-q)_q^j}x^j
\end{aligned}$$

Heine Binom Formülü elde edilecektir. (14.17) ifadesinden dolayı aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\frac{1}{(1-x)_q^{\alpha}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(1-q^{\alpha})_q^j}{(1-q)_q^j} x^j = {}_1\Phi_0\left[a;q;x\right] \tag{15.5}$$

BÖLÜM 16

Ramanujan Çarpım Formülü

Bu bölümde Hintli matematikçi Ramanujan tarafından tarafından bulunan ve sayılar teorisinde çok ilginç uygulamaları olan Ramanujan Çarpım Formülü'nü inceleyeceğiz. Ispatı yaparken Heine Binom Formülü'nden ve kompleks analizdeki bazı bilgilerden yararlanacağız. Ramanujan'ın Çarpım Formülü'nün ıspatını yapmadan önce bazı hatırlatmalar yapalım.

ANALİTİK FONKSİYON

Bir $f(z)$ karmaşık fonksiyonu, bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0, \delta)$ komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa , $f(z)$, z_0 noktasında analitiktir denir. Ayrıca $f(x)$, $x = c$ noktası civarında Taylor Serisi'ne açılabiliyorsa bu noktada analitiktir. Analitik fonksiyonların serisi yine analitik bir fonksiyona yakınsamaktadır.

ÖZDEŞLİK TEOREMİ

f ve g fonksiyonları $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve limiti B de bulunan B deki bir dizinin terimleri üzerinde eşit oluyorsa , B bölgesinin tümünde $f = g$ dir.

Teorem 1 *$g(z)$ fonksiyonunun bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olması için gerek ve yeter koşul herbir $z_0 \in A$ noktası için $g(z)$ fonksiyonunun $D = \{z / \mid z - z_0 \mid < r\}$ dairesinde yakınsak bir kuvvet serisine eşit olmasıdır.*

İspat. $\Rightarrow$gerek koşul $g(z)$ fonksiyonu bir $z_0 \in A$ noktasında analitikse , bu noktanın komşuluğundaki z'ler için geçerli olmak üzere,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z - z_0^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

olacak şekilde bir açılıma sahiptir ve $f(z)$, $\mid z - z_0 \mid < r$ yakınsaklık dairesinde bu seriye yakınsamaktadır. $\Leftarrow$ yeter koşul Her kuvvet serisi kendi yakınsaklık çemberinde bir analitik fonksiyona yakınsar. O halde,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

olduğundan $g(z)$ analitik bir fonksiyondur. ■

Teorem 2 *RAMANUJAN ÇARPIM FORMÜLÜ*

$$|q|<1, |a|>|q|, |b|<1 \ ve \frac{|b|}{|a|}<x<1 \tag{16.1}$$

bölgesinde a,b,q ve x'in fonksiyonlarının aşağıdaki eşitliği vardır.

$$\begin{aligned} {}_1\Psi_1(a;b;q;x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1-a)_q^n}{(1-b)_q^n} x^n \\ &= \prod_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{bq^n}{a}\right)\left(1-q^{n+1}\right)\left(1-\frac{q^{n+1}}{ax}\right)\left(1-axq^n\right)}{\left(1-bq^n\right)\left(1-\frac{q^{n+1}}{a}\right)\left(1-\frac{bq^n}{ax}\right)\left(1-xq^n\right)} \end{aligned} \tag{16.2}$$

İspat. (16.2) ifadesi a,b,q ve x'in fonksiyonları arasında bir ilişki kurmaktadır. Ispatı yaparken a,q ve x 'i bir sabit gibi düşünüp fonksiyonları b'nin bir fonksiyonu gibi düşüneceğiz. (16.1) bölgesinde a, q, x sabit ve $|b| < \min\{1, |ax|$ olacaktır.$\}$Ispatı yaparken izleyaceğimiz yol,

1-Toplam ve çarpım serilerinin (16.1) bölgesinde analitik bir fonksiyona yakınsadıklarını yani analitik fonksiyonlar olduklarını göstereceğiz.

2-(16.1) bölgesinden alınan $\{q^m, q^{m+1}, \ldots\}$ dizisinin terimleri üzerinde $(\lim_{m\to\infty} q^m = 0, \ldots)$serilerin birbirine eşit olduğunu göstereceğiz. (16.2) ifadesinde toplam serisinin n. terimini $f_n(b)$ olarak tanımlayalım. Amacımız $f_n(b)$ fonksiyonunun analitik olduğunu ve (16.2) ifadesindeki toplam serisinin (16.1) bölgesinde yakınsak bir seri olduğunu göstermektir. Analitik bir fonksiyonun serisi, yine analitik bir fonksiyona yakınsayacaktır.

$$f_n(b) = \frac{(1-a)_q^n}{(1-b)_q^n} x^n \qquad \{a, q, x \ \ sabit\}$$

$f_n(b)$ fonksiyonu $n > 0$ için (16.1) bölgesinde tanımlıdır. Yani,bu bölgede $f_n(b)$ fonksiyonunu tanımsız yapan bir değer yoktur. Çünkü $|q| < 1, |b| < 1$ olduğundan $(1-b)_q^n = (1-b)(1-qb)\ldots(1-q^{n-1}b)$ ifadesi (16.1) bölgesinde sıfırdan farklıdır. Bu yüzden (16.1) bölgesinde $f_n(b)$ fonksiyonu analitiktir. Şimdi de $n > 0$ için serinin yakınsak olduğunu gösterelim. Oran testini uygularsak,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left| \frac{f_{n+1}(b)}{f_n(b)} \right| &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(1-a)_q^{n+1}}{(1-b)_q^{n+1}} x^{n+1} \frac{(1-b)_q^n}{x^n (1-a)_q^n} \right| \\
&= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x(1-q^n a)}{(1-q^n b)} \right| \\
&= |x| < 1
\end{aligned}$$

olduğundan seri $n > 0$ için (16.1) bölgesinde yakınsaktır. O halde seri bu bölgede $n > 0$ için analitik bir fonksiyona yakınsayacaktır. Şimdi de $n < 0$ için serinin (16.1) bölgesinde analitik bir fonksiyona yakınsadığını gösterelim.

$$f_{-n}(b) = \frac{(1-a)_q^{-n}}{(1-b)_q^{-n}} x^{-n} = \frac{(1-q^{-n}b)_q^n}{(1-q^{-n}a)_q^n} x^{-n}$$

(16.1) bölgesinde $f_{-n}(b)$ fonksiyonunun paydası sıfır olmamaktadır. Bu yüzden (16.1) bölgesinde $f_{-n}(b)$ fonksiyonu analitik olacaktır. Şimdi de $n < 0$ için serinin (16.1) bölgesinde yakınsak olduğunu ve analitik bir fonksiyona yakınsadığını gösterelim.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to-\infty} \left| \frac{f_{-n-1}(b)}{f_{-n}(b)} \right| &= \lim_{n\to-\infty} \left| \frac{(1-q^{-n-1}b)_q^{n+1}}{(1-q^{-n-1}a)_q^{n+1}} \frac{x^{-n-1}}{x^{-n}} \frac{(1-q^{-n}a)_q^n}{(1-q^{-n}b)_q^n} \right| \\
&= \lim_{n\to-\infty} \left| \frac{(1-q^{-n-1}b)}{(1-q^{-n-1}a)} x^{-1} \right| \\
&= \lim_{n\to-\infty} \left| \frac{(q^{n+1}-b)}{(q^{n+1}-a)x} \right| \\
&= \left| \frac{b}{ax} \right| < 1
\end{aligned}$$

Oran testinden dolayı $n < 0$ için seri (16.1) bölgesinde yakınsaktır ve $f_{-n}(b)$ fonksiyonu bu bölgede analitik olduğundan $n < 0$ için seri analitik bir fonksiyona yakınsamaktadır. (16.2) ifadesinin sağ tarafına geçtiğimiz zaman,

$$\prod_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{bq^n}{a}\right)(1-q^{n+1})\left(1-\frac{q^{n+1}}{ax}\right)(1-axq^n)}{(1-bq^n)\left(1-\frac{q^{n+1}}{a}\right)\left(1-\frac{bq^n}{ax}\right)(1-xq^n)} = \frac{\left(1-\frac{b}{a}\right)_q^\infty (1-q)_q^\infty \left(1-\frac{q}{ax}\right)_q^\infty (1-ax)_q^\infty}{(1-b)_q^\infty \left(1-\frac{q}{a}\right)_q^\infty \left(1-\frac{b}{ax}\right)_q^\infty (1-x)_q^\infty}$$

elde edilecektir. Paydadaki terimler (16.1) bölgesinde sıfıra eşit olmamaktadır. Bu yüzden bu ifade verilen bölgede analitiktir. Buraya kadar (16.1) bölgesinde iki serinin de analitik fonksiyon olduğunu gösterdik. Şimdi de (16.1) bölgesinden $\{q^m, q^{m+1}, \ldots\}$ dizisini alalım. Bu dizinin terimleri $m \to \infty$ için sıfıra gitmektedir. Amacımız (16.2) ifadesinin bu dizinin her terimi için birbirine eşit olduğunu göstermektir. $b = q^m$ olarak seçersek , m sayısı b nin (16.1) bölgesinin bir elemanı olması için yeteri kadar büyük bir sayı olacaktır. Eğer $n = -n' \leq -m$ ise,

$$\frac{1}{(1-q^m)_q^n} = \frac{1}{(1-q^m)_q^{-n'}} = \left(1-q^{m-n'}\right)_q^{n'} = 0$$

olacaktır. Çünkü $-n' \leq -m$ ise,

$$\left(1-q^{m-n'}\right)_q^{n'} = \left(1-q^{m-n'}\right)...\left(1-q^{m-n'}q^{n'-m}\right)...\left(1-q^{m-n'}q^{n'-1}\right) = 0$$

olacaktır. Buna göre $n > -m$ için (4.5) ifadesinini de kullanarak, (16.2) ifadesinin sol tarafı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in Z} \frac{(1-a)_q^n}{(1-b)_q^n} x^n &= \sum_{n=-m+1}^{\infty} \frac{(1-a)_q^n}{(1-q^m)_q^n} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-a)_q^{-m+n+1}}{(1-q^m)_q^{-m+n+1}} x^{-m+n+1} \\
&= x^{1-m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-a)_q^{-m+n+1}}{(1-q^m)_q^{-m+n+1}} x^n \\
&= x^{1-m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-a)_q^{1-m}\left(1-q^{1-m}a\right)_q^n}{(1-q^m)_q^{1-m}(1-q)_q^n} x^n \\
&= x^{1-m} \frac{(1-a)_q^{1-m}}{(1-q^m)_q^{1-m}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(1-q^{1-m}a\right)_q^n}{(1-q)_q^n} x^n \\
&= x^{1-m} \frac{(1-a)_q^{1-m}}{(1-q^m)_q^{1-m}} \,{}_1\Phi_0\left[q^{1-m}a; q; x\right]
\end{aligned}$$

$$LHS = x^{1-m} \frac{(1-a)_q^{1-m}}{(1-q^m)_q^{1-m}} \frac{\left(1-q^{1-m}ax\right)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}}$$

olacaktır. $b = q^m$ sayısı (16.1) bölgesinin bir elemanı olduğunduğundan dolayı $\mid b \mid = \mid q^m \mid < 1$ olması için $m \geq 1$ olmalıdır. Dolayısıyla $1 - m \leq 0$ olacaktır.Buna göre,

$$(1-a)_q^{1-m} = \frac{1}{\left(1-q^{1-m}a\right)_q^{m-1}} \; ve \frac{1}{(1-q^m)_q^{m-1}} = \frac{1}{\left(1-q^{m-1}q\right)_q^{m-1}} = (1-q)_q^{m-1}$$

olacaktır. Bundan dolayı (16.2) nin sol tarafı aşağıdaki gibi olacaktır.

$$LHS = x^{1-m} \frac{(1-q)_q^{1-m}}{\left(1-q^{1-m}a\right)_q^{1-m}} \frac{\left(1-q^{1-m}ax\right)_q^{\infty}}{(1-x)_q^{\infty}}$$

Şimdi de $b = q^m$ değerini (16.2) nin sağ tarafında yerine koyalım.

$$\begin{aligned} RHS &= \frac{\left(1-q^m a^{-1}\right)_q^{\infty}(1-q)_q^{\infty}\left(1-qa^{-1}x^{-1}\right)_q^{\infty}(1-ax)_q^{\infty}}{(1-q^m)_q^{\infty}\left(1-qa^{-1}\right)_q^{\infty}\left(1-q^m a^{-1}x^{-1}\right)_q^{\infty}(1-x)_q^{\infty}} \\ &= \frac{(1-q)_q^{m-1}(1-ax)_q^{\infty}\left(1-qa^{-1}x^{-1}\right)_q^{m-1}}{\left(1-qa^{-1}\right)_q^{m-1}(1-x)_q^{\infty}} \end{aligned}$$

Şimdi de LHS ile RHS yi karşılaştıralım.

$$x^{1-m}\frac{(1-q)_q^{1-m}\left(1-q^{1-m}ax\right)_q^{\infty}}{\left(1-q^{1-m}a\right)_q^{1-m}(1-x)_q^{\infty}} = \frac{(1-q)_q^{m-1}(1-ax)_q^{\infty}\left(1-qa^{-1}x^{-1}\right)_q^{m-1}}{\left(1-qa^{-1}\right)_q^{m-1}(1-x)_q^{\infty}}$$

Buradan,

$$\begin{aligned} \frac{\left(1-qa^{-1}\right)_q^{m-1}}{\left(1-q^{1-m}a\right)_q^{1-m}} &= x^{m-1}\frac{\left(1-qa^{-1}x^{-1}\right)_q^{m-1}(1-ax)_q^{\infty}}{\left(1-q^{1-m}ax\right)_q^{\infty}} \\ &= x^{m-1}\frac{\left(1-qa^{-1}x^{-1}\right)_q^{m-1}(1-ax)(1-qax)\left(1-q^2ax\right)\dots}{\left(1-q^{1-m}ax\right)\left(1-q^{2-m}ax\right)\dots\left(1-q^{-1}ax\right)(1-ax)(1-qax)\dots} \\ &= x^{m-1}\frac{\left(1-qa^{-1}x^{-1}\right)_q^{m-1}}{\left(1-q^{1-m}ax\right)_q^{m-1}} \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\frac{\left(1-qa^{-1}\right)_q^{m-1}}{\left(1-q^{1-m}a\right)_q^{1-m}} = x^{m-1}\frac{\left(1-qa^{-1}x^{-1}\right)_q^{m-1}}{\left(1-q^{1-m}ax\right)_q^{m-1}} \tag{16.3}$$

elde edilecektir. Dikkat edecek olursak $x = 1$ için her iki taraf birbirine eşittir. Ayrıca eşitliğin sağ tarafı x den bağımsızdır. Bunu gösterelim.

$$\begin{aligned} x^{m-1}\frac{\left(1-qa^{-1}x^{-1}\right)_q^{m-1}}{\left(1-q^{1-m}ax\right)_q^{m-1}} &= x^{m-1}\frac{\left(1-qa^{-1}x^{-1}\right)\left(1-q^2a^{-1}x^{-1}\right)\dots\left(1-q^{m-1}a^{-1}x^{-1}\right)}{\left(1-q^{1-m}ax\right)\left(1-q^{2-m}ax\right)\dots\left(1-q^{-1}ax\right)} \qquad m \geq 1 \\ &= x^{m-1}\frac{1-qa^{-1}x^{-1}}{1-q^{-1}ax}\frac{1-q^2a^{-1}x^{-1}}{1-q^{-2}ax}\dots\frac{1-q^{m-1}a^{-1}x^{-1}}{1-q^{1-m}ax} \\ &= x^{m-1}\frac{1-q/ax}{1-ax/q}\frac{1-q^2/ax}{1-ax/q^2}\cdots\frac{1-q^{m-1/ax}}{1-ax/q^{m-1}} \\ &= x^{m-1}\frac{(ax-q)/ax}{(q-ax)/q}\frac{(az-q^2)/ax}{(q^2-ax)/q^2}\cdots\frac{(ax-q^{m-1})/ax}{(q^{m-1}-ax)/q^{m-1}} \\ &= x^{m-1}\left(-\frac{q}{ax}\right)\left(-\frac{q^2}{ax}\right)\cdots\left(-\frac{q^{m-1}}{ax}\right) \\ &= \frac{(-1)^{m-1}q^{\frac{(m-1)m}{2}}}{a^{m-1}x^{m-1}}x^{m-1} \\ &= \frac{(-1)^{m-1}q^{\frac{(m-1)m}{2}}}{a^{m-1}} \end{aligned}$$

Böylece (16.3) eşitliğinin sağ tarafının x den bağımsız olduğunu göstermiş olduk. Buraya kadar (16.1) ifadesinin her iki tarafının $b = q^m$ için birbirlerine eşit olduklarını gösterdik. Bu eşitlik $b = q^{m+1}, q^{m+2}, \ldots$ değerleri için de sağlanacaktır. O halde Özdeşlik teoreminden dolayı (16.1) bölgesinde (16.2) eşitliği vardır. Böylece ıspat tamamlanmış olmaktadır. ■

Ramanujan çarpım formülü a, b, q, x olmak üzere dört tane değer içermektedir. Burada önemli özel durumlardan biri de $a = y$, $b = qy$ içindir. O halde yeni yakınsaklık bölgesi,

$$|q| < |x| < 1 \quad |q| < |y| < |q|^{-1} \tag{16.4}$$

olacaktır. Buna göre Ramanujan çarpım formülünün sol tarafı aşağıdaki hali alacaktır.

$$\begin{aligned}
LHS &= \sum_{n \in Z} \frac{(1-y)_q^n}{(1-qy)_q^n} x^n = \sum_{n \in Z} \frac{(1-y)(1-qy)\ldots(1-q^{n-1}y)}{(1-qy)(1-q^2y)\ldots(1-q^ny)} x^n \\
&= \sum_{n \in Z} \frac{(1-y)}{(1-q^ny)} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-y)}{(1-q^ny)} x^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(1-y)}{(1-q^ny)} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-y)}{(1-q^ny)} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-y)}{(1-q^{-n}y)} x^{-n}
\end{aligned}$$

olacaktır. İkinci toplamı aşağıda inceleyelim.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-y)}{(1-q^{-n}y)} x^{-n} &= (1-y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-n}}{1 - \frac{y}{q^n}} \\
&= (1-y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-n} q^n}{q^n - y} \\
&= (1-y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-n} q^n y^{-1}}{y^{-1} q^n - 1} \\
&= -(1-y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-n} q^n y^{-1}}{1 - q^n y^{-1}}
\end{aligned}$$

Bulduğumuz bu ifadeyi yukarda yerine yazalım.

$$LHS = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-y)}{(1-q^ny)} x^n - (1-y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{-n} q^n y^{-1}}{1 - q^n y^{-1}}$$

$$
\begin{aligned}
LHS &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-y)\,x^{n}\left(1+q^{n}y+(q^{n}y)^{2}+\ldots\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}(1-y)\,x^{-n}\left(q^{n}y^{-1}+\left(q^{n}y^{-1}\right)^{2}+\ldots\right)\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}(1-y)\,x^{n}\,(q^{n}y)^{m}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(1-y)\,x^{-n}\left(q^{n}y^{-1}\right)^{m}\\
&= (1-y)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}x^{n}\,(q^{n}y)^{m}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}x^{-n}\left(q^{n}y^{-1}\right)^{m}\right)
\end{aligned}
$$

Şimdi de çarpım tarafının yeni yakınsaklık bölgesinde $b=qy,\ a=y$ değerleri için nasıl değişeceğine bakalım.

$$
RHS=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-q^{n+1}\right)\left(1-q^{n+1}\right)\left(1-q^{n+1}x^{-1}y^{-1}\right)\left(1-yxq^{n}\right)}{\left(1-q^{n+1}y\right)\left(1-q^{n+1}y^{-1}\right)\left(1-q^{n+1}x^{-1}\right)\left(1-xq^{n}\right)}
$$

elde edilecektir. LHS ve RHS yi $(1-y)$ ile bölelim.

$$
\begin{aligned}
\sum_{m,n=0}^{\infty n}(q^{n}y)^{m}-\sum_{m,n=1}^{\infty}x^{-n}\left(q^{n}y^{-1}\right)^{m} &= \prod_{n=0}^{\infty}\frac{\left(1-q^{n+1}\right)\left(1-q^{n+1}\right)\left(1-q^{n+1}x^{-1}y^{-1}\right)\left(1-yxq^{n}\right)}{\left(1-q^{n+1}y\right)\left(1-q^{n+1}y^{-1}\right)\left(1-q^{n+1}x^{-1}\right)\left(1-xq^{n}\right)(1-}\\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{n}\right)^{2}\left(1-q^{n}x^{-1}y^{-1}\right)\left(1-yxq^{n-1}\right)}{\left(1-q^{n}y\right)\left(1-q^{n}y^{-1}\right)\left(1-q^{n}x^{-1}\right)\left(1-xq^{n-1}\right)(1-y)}\\
&= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{n}\right)^{2}\left(1-q^{n}x^{-1}y^{-1}\right)\left(1-yxq^{n-1}\right)}{\left(1-q^{n-1}y\right)\left(1-q^{n}y^{-1}\right)\left(1-q^{n}x^{-1}\right)\left(1-xq^{n-1}\right)}
\end{aligned}
$$

Bu ifadede $x=y=z$ olarak alırsak (16.4) bölgesinde $\mid q\mid<\mid z\mid<1$ olacaktır.Buna göre,

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}z^{m+n}q^{mn}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}z^{-m-n}q^{mn}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{n}\right)^{2}\left(1-q^{n}z^{-2}\right)\left(1-z^{2}q^{n-1}\right)}{\left(1-q^{n-1}z\right)^{2}\left(1-q^{n}z^{-1}\right)^{2}}
$$

olacaktır. Şimdi de bu ifadenin her iki tarafını $\frac{1-z}{1+z}=\frac{(1-z)^{2}}{1-z^{2}}$ ile çarpalım.

$$
\frac{1+z}{1-z}+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}z^{m+n}q^{mn}-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}z^{-m-n}q^{mn}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{n}\right)^{2}\left(1-q^{n}z^{-2}\right)\left(1-z^{2}q^{n-1}\right)}{\left(1-q^{n-1}z\right)^{2}\left(1-q^{n}z^{-1}\right)^{2}}
$$

$$
1+\frac{1-z}{1+z}\sum_{m,n=1}^{\infty}q^{mn}\left(z^{m+n}-z^{-m-n}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{n}\right)^{2}\left(1-q^{n}z^{-2}\right)\left(1-z^{2}q^{n-1}\right)}{\left(1-q^{n-1}z\right)^{2}\left(1-q^{n}z^{-1}\right)^{2}}\frac{(1-z)^{2}}{(1-z^{2})}
$$

olacaktır. Burada,

$$
\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{n}z^{-2}\right)(1-z)^{2}}{\left(1-q^{n-1}z\right)^{2}\left(1-z^{2}\right)}=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{n}z^{2}\right)}{\left(1-q^{n}z\right)^{2}}
$$

olacağı için , sonuç olarak aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$$
1+\frac{1-z}{1+z}\sum_{m,n=1}^{\infty}q^{mn}\left(z^{m+n}-z^{-m-n}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1-q^{n}\right)^{2}\left(1-q^{n}z^{-2}\right)\left(1-z^{2}q^{n}\right)}{\left(1-q^{n}z\right)^{2}\left(1-q^{n}z^{-1}\right)^{2}}\qquad(16.5)
$$

Bu ifadeden sonraki iki bölümde oldukça fazla yararlanacağız.

BÖLÜM 17

Bir Tam Sayının İki ve Dört Kare Cinsinden Toplamının Açık Formülleri

Sayılar teorisinde en eski problemlerden biri, bir pozitif tam sayının kareler toplamı şeklinde nasıl parçalanacağıdır. Bu konuda Lagrange'ın herhangi bir pozitif tam sayının dört tane tam sayının karelerinin toplamı olarak parçalanabileceğini ıspatlaması çok önemli bir sonuçtur. Bu bölümde Lagrange'ın bu teoremini ıspatlayacak ve bir pozitif tam sayının iki karenin veya dört karenin toplamı şeklinde parçalanışlarının sayısını bulmak için Gauss ve Jacobi'nin açık formüllerini elde etmeye çalışacağız.

Tanım 1 $\square_m(N)$ $=N$ *sayısının, m tane tam sayının karelerinin toplamı şeklinde kaç şekilde yazılabileceğinin sayısıdır.*

Örnek 2 $\square_2(5) = 8$ *olduğunu gösterelim. Yani* 5 *sayısının iki tam sayının karelerinin toplamı şeklinde 8 şekilde yazılabileceğini gösterelim.*

$$\begin{aligned} 5 &= 1^2 + 2^2 \\ &= 2^2 + 1^2 \\ &= 2^2 + (-1)^2 \\ &= (-1)^2 + (-2)^2 \\ &= (-2)^2 + (-1)^2 \\ &= 1^2 + (-2)^2 \\ &= (-2)^2 + 1^2 \\ &= (-1)^2 + 2^2 \end{aligned}$$

Yukarıdanda da anlaşılacağı gibi $(\pm1, \pm2)$ *ve* $(\pm2, \pm1)$ *sayı çiftlerinin karelerinin toplamı* 5 *olacaktır.*

Eğer

$$\square\,(q) = \sum_{n\in Z} q^{n^2} \tag{17.1}$$

şeklinde bir formal kuvvet serisi tanımlarsak,

$$\square_m\,(N) = \square\,(q)^m \text{ deki } q^N \text{ nin katsayısı olacaktır.} \tag{17.2}$$

Bunu gösterelim.

$$\square\,(q)^m = \left(\sum_{n\in Z} q^{n^2}\right)^m = (\ldots + q^9 + q^4 + q + 1 + q + q^4 + q^9 + \ldots)^m$$

Bu serideki her bir q^N terimi için $N = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_m^2$ yazabiliriz. Çünkü N sayısı m tane tam sayının karelerinin toplamı şeklinde elde edilmektedir. Buna göre de, q^N nin katsayısı N nin m tane tam sayının karelerinin toplamı şeklinde kaç şekilde yazılabileceğinin sayısıdır. Bu durumda $\square\,(q)^m$ deki q^Nnin katsayısı $\square_m\,(N)$ olacaktır.

Teorem 3 *Herhangi bir N pozitif tam sayısı için,*

$$\square_4\,(N) = 8X\,(N \textit{ nin } 4 \textit{ ün katı olmayan pozitif bölenlerinin toplamı}) \tag{17.3}$$

Teoremin ıspatına geçmeden önce, bu teoremden her N pozitif tam sayısının 4 tane tam sayının karelerinin toplamı şeklinde her zaman yazılabileceğini söyleyebiliriz. Çünkü, 1 sayısı tüm tam sayıların bir çarpanıdır ve 4 ün bir katı değildir. Bu teoremden böyle bir genelleme elde edebiliriz. Şimdi teoremi ıspatlayalım.

İspat. (16.5) ifadesini ele alalım. Bu ifadenin her iki tarafının $z \to -1$ için limitini alalım. (13.11) ve (17.1) ifadelerini kullanarak,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to -1} RHS &= \lim_{z\to -1} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2\,(1-z^{-2}q^n)\,(1-z^2q^n)}{(1-zq^n)^2\,(1-z^{-1}q^n)^2} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2\,(1-q^n)\,(1-q^n)}{(1+q^n)^2\,(1+q^n)^2} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^4}{(1+q^n)^4} \\
&= \left(\sum (-q)^{n^2}\right)^4 \\
&= \square(-q)^4
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to -1} LHS &= \lim_{z\to -1}\left(1+\frac{1-z}{1+z}\sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn}\left(z^{m+n}-z^{-n-m}\right)\right)\\
&= \lim_{z\to -1}\left(1+(1-z)\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{q^{mn}\left(z^{m+n}-z^{-n-m}\right)}{1+z}\right) \quad L'Hospital\ kuralı\\
&= \lim_{z\to -1} RHS = 1+4\sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn}(m+n)(-1)^{m+n-1}
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Dikkat edecek olursak,

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn} n\,(-1)^{m+n-1} = \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn} m\,(-1)^{m+n-1}$$

olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to -1} RHS &= 1+8\sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn} m(-1)^{m+n-1}\\
&= 1+8\sum_{m,n=1}^{\infty} (-q^m)^n\, m\,(-1)^{m-1}\\
&= 1+8\sum_{m=1}^{\infty}\left(-q^m+(-q^m)^2+(-q^m)^3+\ldots\right) m\,(-1)^{m-1}\\
&= 1+8\sum_{m=1}^{\infty} m\,(-1)^{m-1}(-q^m)\left(1+(-q^m)+(-q^m)^2+\ldots\right)\\
&= 1+8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m\, mq^m}{1+q^m}\\
&= 1+8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m\,(-q)^m}{1+q^m}
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi de $\lim_{z\to -1} LHS$ ve $\lim_{z\to -1} RHS$ ifadelerinde q yerine $-q$ koyalım.

$$\lim_{z\to -1} RHS = \square\,(q)^4 \quad ve \quad \lim_{z\to -1} LHS = 1+8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mq^m}{1+(-q)^m}$$

elde edilecektir. Bu limit değerleri birbirine eşit olduğuna göre,

$$\square\,(q)^4 = 1+8\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mq^m}{1+(-q)^m} \tag{17.4}$$

yazabiliriz.

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{mq^m}{1+(-q)^m} = \sum_{\substack{m\geq 1\\ m\ tek}}^{\infty}\frac{mq^m}{1-q^m}+\sum_{\substack{m\geq 1\\ m\ çift}}^{\infty}\frac{mq^m}{1+q^m} \tag{17.5}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{m\geq 1\\ m \text{ çift}}}^{\infty} \frac{mq^m}{1+q^m} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kq^{2k}}{1+q^{2k}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2kq^{2k}\left(1-q^{2k}+q^{4k}-q^{6k}+...\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2k\left(q^{2k}-q^{4k}+q^{6k}-q^{8k}+...\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} 2k\left(q^{2k}+q^{4k}+q^{6k}+...\right) - \sum_{k=1}^{\infty} 4k\left(q^{4k}+q^{8k}+q^{12k}+...\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kq^{2k}}{1-q^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4kq^{4k}}{1-q^{4k}}
\end{aligned}
$$

elde edilir.O halde,

$$
\sum_{\substack{m\geq 1\\ m \text{ çift}}}^{\infty} \frac{mq^m}{1+q^m} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kq^{2k}}{1+q^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kq^{2k}}{1-q^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4kq^{4k}}{1-q^{4k}}
$$

yazabiliriz. Bulduğumuz bu ifadeyi (17.5) ifadesinde yerine yazalım.

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mq^m}{1+(-q)^m} &= \sum_{\substack{m\geq 1\\ m \text{ tek}}}^{\infty} \frac{mq^m}{1-q^m} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2kq^{2k}}{1-q^{2k}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4kq^{4k}}{1-q^{4k}} \\
&= \sum_{\substack{m\geq 1\\ 4\nmid m}}^{\infty} \frac{mq^m}{1-q^m} \\
&= \sum_{\substack{m\geq 1\\ 4\nmid m}}^{\infty} m\left(q^m+q^{2m}+q^{3m}+...\right) \\
&= \sum_{\substack{m\geq 1\\ 4\nmid m}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mq^{mn}
\end{aligned}
$$

elde edilecektir. Bulduğumuz bu ifadeyi (17.4) de yerine yazarsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$
\square(q)^4 = 1 + 8 \sum_{\substack{m\geq 1\\ 4\nmid m}}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} mq^{mn} \tag{17.6}
$$

Bundan dolayı, herhangi bir $N \geq 1$ için, $\square(q)^4$ de q^N nin katsayısı n pozitif tam sayısı için $N = nm$, $m \nmid 4$ olmak üzere $8\sum m$ olacaktır. Başka bir deyişle, $\square_4(N)$ sayısı N nin 4 ün katı olmayan pozitif bölenlerinin toplamının 8 ile çarpımına eşit olacaktır. ■

Teorem 4 *Herhangi bir N pozitif tam sayısı için,*

$$\begin{aligned}
\square_4(N) &= 4X\,(\text{mod}\,4 \textit{ te 1 e denk olan } N \textit{ nin pozitif bölenlerinin sayısı}) \\
&\quad -4X((\text{mod}\,4) \textit{ te 3 e denk olan pozitif bölenlerinin sayısı})
\end{aligned}$$

İspat. (16.5) ifadesinde z yerine i yazalım. Buna göre (13.11) ifadesinden de yararlanarak,

$$\begin{aligned}
RHS &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2(1+q^n)(1+q^n)}{(1-iq^n)^2(1+iq^n)^2} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2(1+q^n)^2}{(1-iq^n)^2(1+iq^n)^2} \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n})^2}{(1+q^{2n})^2} \\
&= \square(-q^2)^2
\end{aligned}$$

elde edilecektir.

$$\begin{aligned}
LHS &= 1+\frac{1-i}{1+i}\sum_{n,m=1}^{\infty} q^{mn}\left(i^{m+n}-i^{-(m+n)}\right) \\
&= 1-i\sum_{n,m=1}^{\infty} q^{mn}\left(i^{m+n}-(-i)^{(m+n)}\right)
\end{aligned}$$

$m+n$ toplamı çift ise $(-i)^{(m+n)} = i^{m+n}$, $m+n$ toplamı tek ise $(-i)^{(m+n)} = -(i)^{m+n}$ olacağından $m+n$ çift için terimler birbirini götürecektir. Bu yüzden toplamı sadece $m+n$ tek için inceleyeceğiz.

$$\begin{aligned}
LHS &= 1-i\sum_{\substack{m,n=1\\ m+n tek}}^{\infty} q^{mn}i^{m+n}+i\sum_{\substack{m,n=1\\ m+n tek}}^{\infty} q^{mn}(-i)^{m+n} \\
&= 1-i\sum_{\substack{m\geq1\\ m tek}}^{\infty}\sum_{\substack{n\geq1\\ n çift}}^{\infty} q^{mn}i^{m+n}-i\sum_{\substack{m\geq1\\ m çift}}^{\infty}\sum_{\substack{n\geq1\\ n tek}}^{\infty} q^{mn}i^{m+n}-i\sum_{\substack{m\geq1\\ m tek}}^{\infty}\sum_{\substack{n\geq1\\ n çift}}^{\infty} i^{m+n}q^{mn}-i\sum_{\substack{m\geq1\\ m çift}}^{\infty}\sum_{\substack{n\geq1\\ n tek}}^{\infty} i^{m+n}q^{mn} \\
&= 1-2i\sum_{\substack{m\geq1\\ m tek}}^{\infty}\sum_{\substack{n\geq1\\ n çift}}^{\infty} q^{mn}i^{m+n}-2i\sum_{\substack{m\geq1\\ m çift}}^{\infty}\sum_{\substack{n\geq1\\ n tek}}^{\infty} q^{mn}i^{m+n} \\
&= 1-4i\sum_{\substack{m\geq1\\ m tek}}^{\infty}\sum_{\substack{n\geq1\\ n çift}}^{\infty} q^{mn}i^{m+n}
\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre LHS=RHS olduğundan aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\square\left(-q^{2}\right)^{2}=1-4i\sum_{\substack{m\geq1\\ m tek}}^{\infty}\sum_{\substack{n\geq1\\ n çift}}^{\infty}q^{mn}i^{m+n}$$

Burada q yerine $-q$ koyalım.

$$\square\left(q\right)^{2}=1-4\sum_{\substack{m\geq1\\ m tek}}^{\infty}\sum_{\substack{n\geq1\\ n çift}}^{\infty}\left(-q\right)^{\frac{mn}{2}}i^{m+n+1}$$

$$\left(-1\right)^{\frac{mn}{2}}i^{m+n+1}=\left(-1\right)^{\frac{mn}{2}}\left(i^{2}\right)^{\frac{m+n+1}{2}}=\left(-1\right)^{\frac{m+1}{2}(n+1)}$$

olacaktır. $\frac{m+1}{2}$ çift(tek) ise $\left(-1\right)^{\frac{m+1}{2}(n+1)}$ yerine $\left(-1\right)^{\frac{m+1}{2}}$ yazabiliriz.

$$\square\left(q\right)^{2}=1-4\sum_{\substack{m\geq1\\ m tek}}^{\infty}\sum_{\substack{n\geq1\\ n çift}}^{\infty}q^{\frac{mn}{2}}\left(-1\right)^{\frac{m+1}{2}}$$

$n=2k$ için

$$\square\left(q\right)^{2}=1+4\sum_{\substack{m\geq1\\ m tek}}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}q^{mk}\left(-1\right)^{\frac{m-1}{2}} \tag{17.7}$$

elde edilecektir. Bu eşitliğin sağ tarafını yorumlayalım. Bu serideki q^{N} nin katsayısının nasıl bulunduğunu gösterelim. Herhangi bir $N\geq1$ ve herbir m pozitif tek sayısı için,

1-m/N ve $\frac{m-1}{2}$ çift ise $\frac{m-1}{2}=2l$ $m=4l+1$ olacaktır. Bu durumda m tek sayısı mod 4 te 1 e denk olacaktır.

2-m/N ve $\frac{m-1}{2}$ tek ise $\frac{m-1}{2}=2l+1$ $m=4l+3$ olacaktır. Bu durumda m tek sayısı mod 4 te 3 e denk olacaktır. $\square_{2}(N)$ sayısı $\square\left(q\right)^{2}$serisindeki q^{N} nin katsayısını temsil ettiğine göre, $\square_{2}\left(N\right)$ sayısı N nin mod 4 te 1 e denk olan pozitif bölenlerinin sayısının 4 ile çarpımından, N nin mod 4 te 3 e denk olan pozitif bölenlerinin sayısının 4 ile çarpımının çıkarılması ile bulunur. ∎

Teorem 5 *FERMAT TEOREMİ*

p tek asal sayısı iki karenin toplamı şeklinde yazılabilmesi için gerek ve yeter koşul $p\equiv1\bmod4$ olmasıdır.

İspat. $\Longrightarrow$Gerek koşul p tek asal sayısı $p=a^{2}+b^{2}$ olacak şekilde iki karenin toplamı şeklinde yazılabilsin. p tek sayı olduğundan $|\ a\ |\neq|\ b\ |$olacaktır. $(\pm a,\pm b)$ ve $(\pm b,\pm a)$ ikilileri bu denklemi sağlayacaktır. $\square_2(p) = 8$ olacağından bir önceki teoremden ve p nin asal sayı olmasından dolayı $\square_2(p) = 8$ olması için $p \equiv 1 \bmod 4$ olmalıdır.

$\Longleftarrow$Yeter koşul $p \equiv 1 \bmod 4$ ise p asal tek sayısının iki karenin toplamı şeklinde yazılabildiğini gösterelim. p nin pozitif bölenleri p asal olduğunudan 1 ve p dir . 1 ve p, $\bmod 4$ te 1 e denk olduklarından dolayı önceki teoremden $\square_2(p) = 8$ olduğunu söyleyebiliriz . Yani p asal tek sayısı iki sayının karelerinin toplamı şeklinde 8 şekilde yazılabilmektedir. ■

BÖLÜM 18

Bir Tam Sayının İki ve Dört Üçgen Sayının Toplamı Cinsinden Açık Formülleri

Bu bölümde bir tam sayının iki veya dört tane üçgen sayının toplamı şeklinde ifade edebilmek için Ramanujan çarpım formülünden yararlanacağız. n.üçgen sayısını yeniden hatırlayalım.

$$\triangle_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Üçgen sayılarda $\triangle_n = \triangle_{-n-1}$eşitliği olduğundan $\{\triangle_n\}_{n\in Z}$ dizisi simetriktir. Bu yüzden üçgen sayıların tanımını $n \geq 0$ için sınırlıyoruz.

Tanım 1 $\triangle_m(N)$ *=N pozitif tam sayısının m tane üçgen sayının toplamı şeklinde kaç şekilde yazılabileceğinin sayısıdır.*

Örnek 2 $\triangle_2(6)$ *sayısını yani 6 sayısının iki tane üçgen sayının toplamı şeklinde kaç şekilde ifade edilebileceğinin sayısını bulalım.*

$$\begin{aligned} 6 &= \triangle_2 + \triangle_2 \\ &= \triangle_0 + \triangle_3 \\ &= \triangle_3 + \triangle_0 \end{aligned}$$

olacağından $\triangle_2(6)$ *=3 olacaktır.*

Aşağıdaki kuvvet serisini ele alalım.

$$\triangle(q) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\triangle_n} \tag{18.1}$$

$\triangle_m(N)$ sayısının, $\triangle(q)^m$ kuvvet serisindeki q^N nin katsayısına eşit olduğunu gösterelim.

$$\triangle(q)^m = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{\triangle_n}\right)^m = \left(1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \ldots\right)^m$$

Yukarıdaki seriden anlaşılacağı gibi, q^N nin katsayısı, N nin m tane üçgen sayının toplamı şeklinde kaç şekilde ifade edilebileceğinin sayısıdır. Bunu bir örnekle gösterelim.

Örnek 3 *$\triangle_2(6)$ sayısının $\triangle(q)^2$ serisindeki q^6 nın katsayısına eşit olduğunu gösterelim. Önceki örnekte $\triangle_2(6) = 3$ olduğunu göstermiştik.*

$$\triangle(q)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^{\triangle_n}\right)^2 = \left(1 + q + q^3 + q^6 + q^{10} + \ldots\right)^2$$

Serideki q^6 terimi, $1q^6$,q^3q^6 ,$q^6 1$ şeklinde elde edilecektir.Yani q^6 nın katsayısı 3 olacaktır.

Teorem 4 *Herhangi bir N pozitif tam sayısı için,*

$$\begin{aligned} \triangle_2(N) &= (4N+1 \textit{ in } \bmod 4 \textit{ te } 1e \textit{ denk olan pozitif bölenlerinin sayısı}) \qquad (18.2) \\ &\quad - (4N+1 \textit{ in } \bmod 4 \textit{ te } 1e \textit{ denk olan pozitif bölenlerinin sayısı}) \end{aligned}$$

İspat.

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} q^{mn} z^{m+n} - \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn} z^{-m-n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2 \left(1-z^{-2}q^n\right)\left(1-z^2q^{n-1}\right)}{(1-zq^{n-1})^2 \left(1-z^{-1}q^n\right)^2}$$

ifadesinde q yerine q^2, z yerine $-\sqrt{q}$ koyalım.

$$RHS = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n q^n)^2 \left(1-(-1)^n q^{n-1}\right)\left(1+(-1)^n q^n\right)}{\left(1-(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}\right)\left(1+(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}\right)^2}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-(-1)^n q^{n-1})(1+(-1)^n q^n = 2\prod_{n=1}^{\infty} (1+(-1)^n q^n)^2$$

ve (12.4) ifadesini kullanarak;

$$\begin{aligned} RHS &= 2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-(-1)^n q^n)^2 (1+(-1)^n q^n)^2}{\left(1-(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}\right)^2 \left(1+(-1)^n q^{n-\frac{1}{2}}\right)^2} \\ &= 2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-(-1)^{2n} q^{2n}\right)^2}{\left(1-(-1)^{2n} q^{2n-1}\right)^2} \\ &= 2\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n})^2}{(1-q^{2n-1})^2} \\ &= 2\triangle(q)^2 \end{aligned}$$

elde edilecektir.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_{m,n=0}^{\infty} (-1)^{mn+m+n} q^{mn-\frac{(m+n)}{2}} - \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{mn-m-n} q^{mn-\frac{(m+n)}{2}} \\ &= \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{mn-1} q^{mn-\frac{(m+n)}{2}} - \sum_{m,n=1}^{\infty} (-1)^{mn-m-n} q^{mn-\frac{(m+n)}{2}} \end{aligned}$$

Yukarıdaki toplamda $m+n$ tek olduğu zaman,her iki toplamda $m+n$ ye karşılık gelen terimler birbirlerini götüreceklerdir. Eğer $m+n$ çift ise;

$$\sum_{\substack{m,n=1 \\ m+n çift}}^{\infty} (-1)^{mn} (-1) q^{mn-\frac{(m+n)}{2}} - \sum_{\substack{m,n=1 \\ m+n çift}}^{\infty} (-1)^{mn} (-1)^{-(m+n)} q^{mn-\frac{(m+n)}{2}}$$
$$= 2 \sum_{\substack{m,n=1 \\ m+n çift}}^{\infty} (-1)^{mn-1} q^{mn-\frac{(m+n)}{2}}$$

elde edilecektir. O halde sonuç olarak;

$$\begin{aligned} LHS &= 2 \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ m+n çift}}^{\infty} (-1)^{mn-1} q^{mn-\frac{(m+n)}{2}} \\ &= 2 \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ m,n tek}}^{\infty} q^{mn-\frac{(m+n)}{2}} - 2 \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ m,n çift}}^{\infty} q^{mn-\frac{(m+n)}{2}} \end{aligned}$$

elde edilecektirir. Sonuç olarak,

$$\triangle(q)^2 = \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ m,n tek}}^{\infty} q^{mn-\frac{(m+n)}{2}} - \sum_{\substack{m,n\geq 1 \\ m,n çift}}^{\infty} q^{mn-\frac{(m+n)}{2}}$$

olacaktır. Bir $\pm q^N$ terimini elde etmek için $m,n \geq 1$ m,n tek veya m,n çift için $N = mn - \frac{(m+n)}{2}$ veya $4N+1 = (2m-1)(2n-1)$ olmalıdır. Eğer $m,n \geq 1$ ve m,n tek ise, $2m-1 \equiv 1 \bmod 4$ ve $2n-1 \equiv 1 \bmod 4$ olacaktır.Eğer $m,n \geq 1$ ve m,n çift ise $2m-1 \equiv 3 \bmod 4$ ve $2n-1 \equiv 3 \bmod 4$ olacaktır.Buna göre serideki herhangi bir $\pm q^N$ teriminin kat sayısı veya $\triangle_2(N)$ sayısı, $4N+1$ in $\bmod 4$ te 1e denk olan pozitif bölenlerinin sayısının $4N+1$ in $\bmod 4$ te 1e denk olan pozitif bölenlerinin sayısının farkı olacaktır.

■

Önerme 5 *Eğer $4N+1$ asal bir sayı olacak şekilde N pozitif tam sayısı varsa N iki tane farklı üçgen sayının toplamı şeklinde tek türlü yazılır.*

İspat. Eğer $4N+1$ sayısı asal ise bu sayının pozitif bölenleri 1 ve $4N+1$ dir. Bir önceki teoremden yararlanarak,her iki pozitif bölende mod 4 te 1 e denk olacağından N pozitif tam sayısı iki tane üçgen sayının toplamı şeklinde ifade edilebilecektir. Buna göre N pozitif tam sayısını aşağıda gösterilen şekillerde ifade edebiliriz.

1-$N = \triangle_k + \triangle_l = \triangle_l + \triangle_k$ $\qquad k \neq l$

2-$N = \triangle_k + \triangle_k = \triangle_l + \triangle_l$ $\qquad k \neq l$ olmalıdır. $\{\triangle_n\}_{n\in Z}$dizisinin terimleri giderek arttığından dolayı 2.olasılık olamaz. Bu yüzden N pozitif tam sayısı 1.olasılıkta gösterildiği gibi iki tane farklı üçgen sayının toplamı şeklinde tek türlü yazılabilmektedir. ∎

Yukarıdaki önermeye örnek olarak $N = 7$ için, $4N+1 = 28+1 = 29$ asal sayı olduğundan $\triangle_2(7) = 2$ olacaktır. Gerçekten $7 = \triangle_1 + \triangle_3 = \triangle_3 + \triangle_1$ olacaktır.

Teorem 6 *N herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere;*

$$\triangle_4(N) = 2N+1 \text{ in tüm pozitif bölenlerinin toplamıdır.} \tag{18.3}$$

İspat.

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} q^{mn} z^{m+n} - \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn} z^{-m-n} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2 (1-z^{-2}q^n)(1-z^2q^{n-1})}{(1-zq^{n-1})^2 (1-z^{-1}q^n)^2}$$

ifadesinin her iki tarafını $1-qz^{-2}$ ile bölelim. Daha sonra da q yerine q^2, z yerine de q koyalım.

$$RHS = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2 (1-z^{-2}q^n)(1-z^2q^{n-1})}{(1-qz^{-2})(1-zq^{n-1})^2 (1-z^{-1}q^n)^2}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1-z^{-2}q^n}{1-qz^{-2}} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-z^{-2}q^{n+1})$$

ifadesini kullanarak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$RHS = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^n)^2 (1-z^{-2}q^{n+1})(1-z^nq^{n-1})}{(1-zq^{n-1})^2 (1-z^{-1}q^n)^2}$$

Şimdi de (13.9) ifadesinden yararlanarak, RSH de q yerine q^2, z yerine de q koyalım.

$$\begin{aligned} RHS &= \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{2n})^2 (1-q^{2n})(1-q^{2n})}{(1-q^{2n-1})^2 (1-q^{2n-1})^2} \\ &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^4 \\ &= \triangle(q)^4 \end{aligned}$$

elde edilecektir.

$$LHS = \frac{1}{1-qz^{-2}} \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} q^{mn} z^{m+n} - \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{mn} z^{-m-n} \right)$$

q yerine q^2, z yerine de q koyarsak, payda $1 - qz^{-2} = 1 - q^2 q^{-2} = 0$ olacağından yukarıdaki ifade tanımsız olacaktır. Bu nedenle q yerine q^2 koyup, $z \to q$ için limit alacağız.

$$\begin{aligned}
RHS &= \lim_{z\to q} \frac{1}{1-q^2z^{-2}} \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} q^{2mn} z^{m+n} - \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{2mn} z^{-m-n} \right) \\
&= \lim_{z\to q} \frac{1}{2z^{-3}q^2} \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} q^{2mn} (m+n) z^{m+n-1} + \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{2mn} (m+n) z^{-m-n-1} \right) \\
&= \frac{1}{2q^{-1}} \left(\sum_{m,n=0}^{\infty} q^{2mn+n+m-1} (m+n) + \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{2mn-m-n-1} (m+n) \right) \\
&= \frac{1}{2q^{-1}} \left(\sum_{m,n=1}^{\infty} q^{2mn-n-m-1} (m+n-2) + \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{2mn-m-n-1} (m+n) \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{2mn-n-m} (m+n-2) + \frac{1}{2} \sum_{m,n=1}^{\infty} q^{2mn-m-n} (m+n) \\
&= \sum_{m,n=1}^{\infty} (m+n-1)\, q^{2mn-m-n} \\
&= \sum_{m,n=1}^{\infty} (2m-1)\, q^{2mn-m-n} \\
&= \triangle(q)^4
\end{aligned}$$

elde edilecektir. $2m-1=k, 2n-1=l$ olsun. Bu durumda $n \geq 1$ ve $m \geq 1$ olduğundan $k, l \geq 1$ olacaktır.

$$\triangle(q)^4 = \sum_{\substack{k,l\geq 1 \\ k,l\, tek}}^{\infty} k q^{\frac{kl-1}{2}}$$

elde edilecektir. Eğer $\frac{kl-1}{2} = N$ veya $2N+1 = kl$ oluyorsa yukarıdaki seride bir q^N terimi elde edilecektir. O halde q^N teriminin katsayısı

$$\sum_{k/2N+1} k$$

şeklinde tanımlanacaktır. $\triangle(q)^4$ sersindeki q^N nin katsayısı $\triangle_4(N)$ sayısı olacağından, $\triangle_4(N)$ sayısı $2N+1$ in tüm pozitif bölenlerinin toplamı olacaktır. ■

BÖLÜM 19

q-Antitürev

Bu bölüme kadar sadece q− diferansiyelden bahsettik. Aceba q− analizde integral nasıl tanımlıdır? Bu bölümde bu soruya cevaparayacağız. Önce aşağıdaki tanımla başalayalım.

Eğer $D_qF(x) = f(x)$ ise, $F(x)$'e $f(x)$'in q− antitürevi denir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$F(x) = \int f(x)\,d_qx \tag{19.1}$$

Bilinen analizde antitürev tek değildir. Analizde antitürevin tekliği sabitlerin eklenmesine kadardır. Çünkü bir fonksiyonun türevinin sıfır olması için gerek ve yeter koşul fonksiyonun sabit olmasıdır. Fakat bu durum q–analizde daha karmaşıktır. Çünkü $D_q\varphi(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\varphi(qx) = \varphi(x)$ olmasıdır ki burda $\varphi(x)$ fonksiyonunun sabit olması gerekmez. Eğer $\varphi(x)$ fonksiyonu sabit bir fonksiyon ise $x = 0$ noktasında sürekli olacaktır. Bir fonksiyona $\varphi(x)$ fonksiyonunu eklersek bu fonksiyonun q–türevi değişmeyecektir. Eğer $\varphi(x)$'i bir kuvvet serisi olarak almak istersek, $\varphi(qx) = \varphi(x)$ şartının sağlanması için $n \geq 1$ ve c_n, x^n nin katsayısı olmak üzere $c_n = q^n c_n$ olmalıdır. Ancak $c_n = 0$, $n \geq 1$ olduğu zaman $\varphi(qx) = \varphi(x) = c_0 = sabit$ olacaktır. Böyle bir durumda eğer,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

bir kuvvet serisi ise $f(x)$'in sabit terime kadar tek bir tane q− antitürevi vardır.

$$\int f(x)\,d_qx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{[n+1]} + c \tag{19.2}$$

Eğer $f(x)$ herhangi bir fonksiyon ise, q− antitüreve bazı kısıtlamalar getirerek q− antitürevin tekliğini güçlendirebiliriz. $D_q\varphi(x) = 0$ ise $\varphi(qx) = \varphi(x)$ olacaktır. $\varphi(qx) = \varphi(x)$ olması peryodik fonksiyonlara benzemektedir. Burda x değeri sıfıra yaklaşırken peryot giderek küçülecektir. Eğer $(0.1, 1]$ aralığında $\varphi(x)$'in grafiği düz fakat dik değilse, $x \to 0$ için peryot giderek azalacak ve grafiğin şekli değişmeyecektir. Grafik giderek dikleşecektir. Bu durumda

$\varphi(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli olmayacaktır. Bu nedenle $\varphi(x)$ fonksiyonu sabit fonksiyon olmayacaktır. Bu söylediklerimizi bir örnek üzerinde gösterelim. $\varphi(x)$ fonksiyonu $(0.1, 1]$ aralığında tanımlı ve düz fakat dik olmayan bir fonksiyon olsun.

x değeri sıfıra yaklaşırken q değerleri giderek azalacaktır. $q = 0.1$ için,

$$\begin{aligned}
\varphi(0.1) &= \varphi(0.01) \\
\varphi(0.5) &= \varphi(0.05) \\
&\vdots \\
\varphi(1) &= \varphi(0.1)
\end{aligned}$$

olacaktır. Grafik $(0.01, 0.1]$ aralığında daha dikleşecek ve sıfıra yaklaşacaktır. $\varphi(0), x = 0$ noktasında tanımlı olmayacağından fonksiyon bu noktada sürekli olmayacaktır. Bu nedenle $\varphi(x)$ fonksiyonu sabit bir fonksiyon olmayacaktır.

Önerme 1 $0 < q < 1$ *olsun. Sabit terim eklenînceye kadar herhangi bir* $f(x)$ *fonksiyonunun* $x = 0$ *noktasında sürekli olan en çok bir tane* $q-$ *türevi vardır.*

İspat. Varsayalımki $F_1(x)$ ve $F_2(x)$, $f(x)$ 'in $x = 0$ noktasında sürekli olan iki q−antitürevi olsun.$\varphi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ şeklinde tanımlayalım. O halde $\varphi(x)$ fonksiyonuda $x = 0$ noktasında sürekli ve $D_q\varphi(x) = 0$ olacaktır. Çünkü $D_q\varphi(x) = D_qF_1(x) - D_qF_2(x) = 0$ olacaktır. Herhangi bir $A > 0$ için,

$$\begin{aligned}
m &= \inf\{\varphi(x) / qA \leq x \leq A\} \\
M &= \sup\{\varphi(x) / qA \leq x \leq A\}
\end{aligned}$$

olsun.Eğer $\varphi(x)$ yukarıdan veya aşağıdan sınırlı değilse, m ve M sonsuz olabilir. Varsayalımki, $m < M$ olsun. Bu durumda $\varphi(0) \neq m$ ve $\varphi(0) \neq M$ den en az biri doğrudur. $\varphi(0) \neq m$ olduğunu varsayalım. $\varphi(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli olduğundan yeterince küçük $\epsilon > 0$ sayısı için $\delta > 0$ pozitif tam sayısı bulunabiliriz. Süreklilikten dolayı $m+ \epsilon \notin \varphi(0, \delta)$ olacaktır. Diğer taraftan herhangi bir N için, $q^N A < \delta$ seçebiliriz. $\varphi(qx) = \varphi(x)$ olduğunu göz önüne alarak,

$$m + \epsilon \in (m, M) \subset \varphi[qA, A] = \varphi\left(q^{N+1}A, q^N A\right) \subset \varphi(0, \delta)$$

olacaktır. Burdan, $m+\epsilon \in \varphi(0,\delta)$ elde edilecektir. Bu bir çelişkidir. O halde $m=M$ olmalıdır. Buna göre $[qA, A]$ aralığında $\varphi(x)$ sabit bir fonksiyon olacaktır. Yani $\varphi(x)$ fonksiyonu heryerde sabit fonksiyon olacaktır.

$$F_1(x)-F_2(x)=c \qquad F_1(x)=F_2(x)+c$$

Bu önerme herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun q− antitürevin tek olması için, q− antitürevin $x=0$ noktasında sürekli olması gerektiğini belirtmektedir. Aksi taktirde q− antitürev $x=0$ noktasında sürekli değilse, $f(x)$ fonksiyonunun birçok q− antitürevi olacaktır. ■

$u=u(x)=\alpha x^{\beta}$ $(\alpha,\beta$ *sabit*$)$ olarak tanımlayalım. $D_qF(x)=f(x)$ olsun.

$$\int f(u)\,d_qu=F(u)=F(u(x))$$

Herhangi bir q' için zincir kuralı yardımıyla,

$$\begin{aligned} F(u(x)) &= \int D_{q'}F(u(x))\,d_{q'}x \\ &= \int \left(D_{q'^{\beta}}F\right)(u(x))\,D_{q'}u(x)\,d_{q'}x \\ &= \int \left(D_{q'^{\beta}}F\right)(u(x))\,d_{q'}u(x) \end{aligned}$$

$q'=q^{\frac{1}{\beta}}$ olarak seçersek $D_{q'^{\beta}}F=D_qF=f$ olacaktır.

$$\int f(u)\,d_qu=F(u(x))=\int f(u(x))\,d_{q^{1/\beta}}u(x) \tag{19.3}$$

Bu formülün anlamı ise, $f(u)$'nun q-türevlerinden birinin $f(u(x))\,D_{q^{1/\beta}}u(x)$ olduğunu göstermektedir.

BÖLÜM 20

Jackson İntegral

$f(x)$ herhangi bir keyfi fonksiyon olsun. $f(x)$ 'in q– antitürevini elde etmek için $\hat{M}_q(F(x)) = F(qx)$ şeklinde tanımlanan $\hat{M}_q$ operatörünü ele alalım.

$$\frac{1}{(q-1)x}\left(\hat{M}_q - I\right)F(x) = \frac{F(qx)-F(x)}{x(q-1)} = f(x) \tag{20.1}$$

Bu sıra önemlidir. Çünkü operatörler komütatif değildirler.Burdan q-antitürevi aşağıdaki şekilde yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\frac{\left(1+\hat{M_q}+\hat{M_q}^2+\ldots\right)}{(q-1)x}\left(\hat{M}_q - I\right)F(x) &= \left(1+\hat{M_q}+\hat{M_q}^2+\ldots\right)f(x) \\
\frac{-F(x)}{(q-1)x} &= \left(1+\hat{M_q}+\hat{M_q}^2+\ldots\right)f(x) \\
F(x) &= (1-q)\,xf(x)\left(1+\hat{M_q}+\hat{M_q}^2+\ldots\right)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\int f(x)\,d_qx = F(x) = (1-q)\left(xf(x)+qxf(qx)+q^2xf\left(q^2x\right)+\ldots\right)$$

$$\int f(x)\,d_qx = (1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^jx\right) \tag{20.2}$$

Bu seriye $f(x)$'in Jackson integrali denir. Bu tanımdan yararlanarak aşağıdaki daha genel formülü yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,D_qg(x)\,d_qx &= (1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^jx\right)D_qg\left(q^jx\right) \\
&= (1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^jx\right)\frac{g\left(q^jx\right)-g\left(q^{j+1}x\right)}{(1-q)\,q^jx}
\end{aligned}$$

veya

$$\int f(x)\,d_qg(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f\left(q^jx\right)\left(g\left(q^jx\right)-g\left(q^{j+1}x\right)\right) \tag{20.3}$$

elde edilecektir. Aceba Jackson integrali hangi koşullar altında $F(x)$ fonksiyonuna yakınsar? Aşağıdaki teorem ile bu sorunun cevabını verelim.

Teorem 1 $0 < q < 1$ *olduğunu varsayalım. Eğer* $| f(x) x^{\alpha} |$, $(0.A]$ *aralığında herhangi bir* $0 \leq \alpha < 1$ *için sınırlı ise, (20.2) de tanımlanan Jackson integrali* $(0.A]$ *aralığında* $f(x)$*'in* $q-$ *antitürevi olan* $F(x)$*'e yakınsar. Dahası* $F(x)$, $x = 0$ *noktasında* $F(0) = 0$ *olacak şekilde süreklidir.*

İspat. $(0.A]$ aralığında $f(x) x^{\alpha}$ fonksiyonu sınırlı olsun.O halde bu aralıktaki tüm x'ler için $| f(x) x^{\alpha} | < M$ olacak şekilde bir M pozitif tam sayısı mevcuttur. $0 < x \leq A$ aralığındaki herhangi bir x için, $j \geq 0$ olmak üzere,

$$| f(q^j x) (q^j x)^{\alpha} | < M$$
$$| f(q^j x) | (q^j x)^{\alpha} < M$$
$$| f(q^j x) | < M (q^j x)^{-\alpha}$$

olacaktır. Bundan dolayı $0 < x \leq A$ için,

$$| q^j f(q^j x) | = | f(q^j x) | q^j < M (q^j x)^{-\alpha} q^j = M x^{-\alpha} (q^{1-\alpha})^j \tag{20.4}$$

Karşılaştırma testinden yararlanarak,

$$\sum_{j=0}^{\infty} M x^{-\alpha} (q^{1-\alpha})^j$$

geometrik serisi $1 - \alpha > 0$ ve $| q^{1-\alpha} | < 1$ olacağından dolayı, bu seri yakınsak bir seridir. Bu sebepten dolayı karşılaştırma testinden,

$$\sum_{j=0}^{\infty} | q^j f(q^j x) |$$

serisinin de yakınsak olduğunu söyleriz. Bu seri yakısak olduğundan,

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)$$

seriside mutlak yakınsaktır yani yakınsaktır. Dolayısıyla $f(x)$'in Jackson integrali bir $F(x)$ fonksiyonuna yakınsayacaktır. Yani,

$$F(x) = (1 - q) x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f(q^j x)$$

olacaktır.$x=0$ için $F(0)=0$ olduğu açıktır. Şimdi de $F(x)$ in $x=0$ noktasında sürekli olduğunu gösterelim. $F(x)$ fonksiyonunun $x=0$ noktasında sürekli olması için $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = 0$ olmalıdır. Limit tanımını kullanarak $\lim_{x\to 0} F(x) = 0$ olduğunu gösterelim. Eğer herhangi bir pozitif ϵ sayısı için $0 <\mid x - x_0 \mid< \delta$ olduğunda $\mid f(x) - l \mid< \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa, $x \to x_0$ için $f(x) \to l$ dir deriz. Buna göre $x_0 = 0$ olarak seçersek, $0 <\mid x - x_0 \mid< \delta$ için;

$$\mid (1-q)\, x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right) \mid< (1-q) \mid x \mid \sum_{j=0}^{\infty} \mid q^j f\left(q^j x\right) \mid$$

$$\begin{aligned}
&< (1-q) \mid x \mid \sum_{j=0}^{\infty} M x^{-\alpha} \left(q^{1-\alpha}\right)^j \\
&= (1-q) \mid x \mid \frac{M x^{-\alpha}}{1-q^{1-\alpha}} \\
&= (1-q)\, M \frac{x^{1-\alpha}}{1-q^{1-\alpha}} < (1-q)\, M \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-q^{1-\alpha}} < \epsilon
\end{aligned}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilmektedir. O halde $\lim_{x\to 0} F(x) = F(0) = 0$ olacağından $F(x)$, $x=0$ noktasında sürekli olacaktır. Şimdi de $F(x)$ fonksiyonunun $f(x)$'in q–antitürevi olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
D_q F(x) &= D_q \left((1-q)\, x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right) \right) \\
&= (1-q)\, q x D_q \left(\sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right) \right) + \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right) (1-q) D_q x \\
&= (1-q)\, q x \sum_{j=0}^{\infty} q^j \frac{f\left(q^{j+1} x\right) - f\left(q^j x\right)}{x\,(q-1)} + \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right)(1-q) \\
&= \frac{(1-q)\, q x}{x\,(q-1)} \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^{j+1} x\right) - q^j f\left(q^j x\right) + \sum_{j=0}^{\infty} f\left(q^j x\right) q^j (1-q) \\
&= \frac{-(1-q)\, q x}{x\,(q-1)} \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^{j+1} x\right) + \frac{(1-q)\, q x}{x\,(q-1)} \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right) + \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right)(1-q) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right) - \sum_{j=1}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right) \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Eğer $x \in (0, A]$ ve $0 < q < 1$ ise, $qx \in (0, A]$ olacaktır ve q-diferansiyel tanımlı olacaktır.Eğer Jackson integrali $x=0$ noktasında sürekli olan $F(x)$ q-antitürevine yakınsıyorsa, bir önceki bölümdeki önermeden $f(x)$'in Jackson integralinin tek olduğunu söyleriz. Başka bir deyişle, eğer $F(x)$'in, $f(x)$'in bir q– antitürevi ve $x=0$ noktasında sürekli olduğunu bilirsek, $F(x)$'i Jackson formülü ile ifade edebiliriz. Bunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(1-q)\,x\sum_{j=0}^{N} f\left(q^j x\right) q^j &= (1-q)\,x\sum_{j=0}^{N} q^j D_q F(t)\,|_{t=q^j x}\\ &= (1-q)\,x\sum_{j=0}^{N} q^j\left(\frac{F\left(q^j x\right)-F\left(q^{j+1}x\right)}{(1-q)\,q^j x}\right)\\ &= \sum_{j=0}^{N} F\left(q^j x\right)-F\left(q^{j+1}x\right)\\ &= F(x)-F\left(q^{N+1}\right)\end{aligned}$$

Yukarıda Jackson integarlinin kismi toplamını bulduk. $N\to\infty$ için limit alırsak,

$$(1-q)\,x\sum_{j=0}^{\infty} f\left(q^j x\right) q^j = F(x)-F(0)$$

elde edilecektir. $F(x)$ fonksiyonu $x=0$ noktasında sürekli olduğundan $F(0)$ tanımlıdır. ∎

Örnek 2 *$f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun Jackson integralinin olmadığını gösterelim.*

$$D_q\log x = \frac{\log qx-\log x}{x(q-1)} = \frac{\log q}{q-1}\frac{1}{x} \tag{20.5}$$

$$\int \frac{1}{x}d_q x = \frac{q-1}{\log q}\log x \tag{20.6}$$

elde edilir. Fakat $f(x)$'in Jackson formülü aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\int \frac{1}{x}d_q x = (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} 1 = \infty$$

elde edilecektir. Bu durumda $f(x)$'in Jackson integrali yoktur.Çünkü $f(x)\,x^{\alpha}$ fonksiyonu, $0\le\alpha<1$ ve $x\in(0,A]$ için sınırlı değildir.,

$$f(x)\,x^{\alpha} = (\frac{1}{x})^{1-\alpha} = h(x)$$

fonksiyonu $0\le\alpha<1$ aralığındaki herhangi bir α için, x sıfıra yetri kadar yakın seçilerek $h(x)$ fonksiyonu istenildiği kadar büyük yapılabilir. Bu nedenle $h(x)$ in bir üst sınırı olmadığı için sınırlı değildir. O halde teorem gereği $f(x)$ in Jackson integrali $F(x)$' e yakınsamayacaktır.

Tanım 3 $0 < a < b$ *olduğunu varsayalım. q– integral aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.*

$$\int_0^b f(x)\, d_q x = (1-q)\, b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j b\right) \tag{20.7}$$

veya

$$\int_a^b f(x)\, d_q x = \int_0^b f(x)\, d_q x - \int_0^a f(x)\, d_q x \tag{20.8}$$

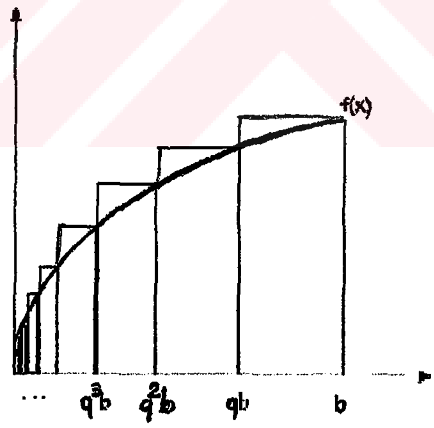
(20.3) ifadesinin yardımıyla, (20.7) ifadesinden daha genel bir formül elde edebiliriz.

$$\int_0^b f(x)\, d_q g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f\left(q^j b\right) \left(g\left(q^j b\right) - g\left(q^{j+1} b\right)\right)$$

$$\int_0^b f(x)\, d_q x = (1-q)\, b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j b\right) \tag{20.9}$$

20.1 q– İntegralin Geometrik Anlamı

q– İntegarlinin geometrik analamı aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi sonsuz çokluktaki dikdörtgenlerin alanlarının toplamıdır.



Şekil 2

Şekilden de görüldüğü gibi $[a, b]$ aralığını sonsuz çoklukta aralıklara bölünmüştür. Bu alanların toplamı bize q– integrali verecektir.Bu durum analizdeki belirli integralin tanımına benzemektedir. Eğer $q \to 1$ için limit alırsak,

$$\lim_{q \to 1} (1-q)\, b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j b\right)$$

ifadesinde dikdörtgenlerin genişliği sıfıra yaklaşacak ve bu durumda bu limit Riemann toplamına yakınsayacaktır. O halde $f(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli ise,

$$\lim_{q\to 1}\int_0^b f(x)\,d_qx=\int_0^b f(x)\,dx \tag{20.10}$$

olacaktır. (20.7) ifadesinde $b\to\infty$ için q– improper integralin tanımını iyi bir şekilde elde edemeyiz. Bunun yerine,

$$\begin{aligned}\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)\,d_qx &= \int_0^{q^j} f(x)\,d_qx-\int_0^{q^{j+1}} f(x)\,d_qx\\ &= (1-q)\sum_{k=0}^{\infty}q^{j+k}f\left(q^{j+k}\right)-(1-q)\sum_{k=0}^{\infty}q^{j+k+1}f\left(q^{j+k+1}\right)\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)\,d_qx=(1-q)\,q^jf\left(q^j\right) \tag{20.11}$$

elde edilecektir.

Tanım 4 *$f(x)$'in $[0,\infty)$ aralığındaki improper q– integrali aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.*

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} f(x)\,d_qx &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)\,d_qx \qquad 0<q<1\\ \int_0^{\infty} f(x)\,d_qx &= \sum_{j=-\infty}^{\infty}\int_{q^j}^{q^{j+1}} f(x)\,d_qx \qquad q>1\end{aligned}$$

Önerme 5 *İmproper q– integrali, eğer $x^{\alpha}f(x)$, $\alpha<1$ için $x=0$ ın bir komşuluğunda ve $\alpha>1$ için yeterince büyük x için sınırlı ise q– improper integrali yakınsaktır.*

İspat. İmproper q– integralin önermedeki şartlar altında yakınsadığını gösterelim. (20.11) ifadesinden,

$$\int_0^{\infty} f(x)\,d_qx=\mid 1-q\mid\sum_{j=-\infty}^{\infty}q^jf\left(q^j\right) \tag{20.13}$$

yazabiliriz. Bu önermenin ıspatını $0<q<1$ için yapacağız. $q>1$ için önermenin ıspatı benzer şekilde yapılmaktadır. (20.13) deki seriyi aşağıdaki gibi iki serinin toplamı şeklinde ifade edebiliriz.

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j f\left(q^j\right) = \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j\right) + \sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} f\left(q^{-j}\right) \tag{20.14}$$

Önce birinci toplamın yakınsak olduğunu gösterelim. $x^{\alpha} f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ ın bir komşuluğunda sınırlı ise $q < 1$, $\alpha < 1$ ve $M > 0$ için,

$$\left| \left(q^j\right)^{\alpha} f\left(q^j\right) \right| < M$$

$$\left| f\left(q^j\right) \right| < M \left(q^j\right)^{-\alpha}$$

$$\left| q^j f\left(q^j\right) \right| < q^j M \left(q^j\right)^{-\alpha} = M \left(q^j\right)^{1-\alpha}$$

yazabiliriz. $\sum_{j=0}^{\infty} M \left(q^j\right)^{1-\alpha}$ geometrik serisi $\alpha < 1$ için yakınsaktır. Çünkü $\left| q^{1-\alpha} \right| < 1$ olduğundan dolayı yakınsaktır. Karşılaştırma testine göre, $\sum_{j=0}^{\infty} \left| q^j f\left(q^j\right) \right|$ serisi de yakınsak olacaktır. Bu yüzden $\sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j\right)$ serisi de mutlak yakınsak yani yakınsak olacaktır. Şimdi de (20.14) ifadesinin sağ tarfındaki ikinci serinin de yakınsak olduğunu gösterelim. Önerme gereği $x^{\alpha} f(x)$ yeteri kadar büyük x değeri ve $\alpha > 1$ için sınırlıdır. Buna göre $M > 0$ için

$$\left| x^{\alpha} f(x) \right| < M$$

$x = q^{-j}$ yeterince büyük j için de aşğıdaki ifadeyi yazabiliriz.

$$\left| q^{-j} f\left(q^{-j}\right) \right| < M$$

$$\left| q^{-j} f\left(q^{-j}\right) \right| = q^{j(\alpha-1)} \left| q^{-\alpha j} f\left(q^{-j}\right) \right| < q^{j(\alpha-1)} M$$

elde edilecektir. $\sum_{j=1}^{\infty} M \left(q^{\alpha-1}\right)^j$ geometrik serisi $\left| q^{\alpha-1} \right| < 1$ olduğundan yakınsaktır. Karşılaştırma testine göre $\sum_{j=1}^{\infty} \left| q^{-j} f\left(q^{-j}\right) \right|$ serisi yakınsak olduğundan, $\sum_{j=1}^{\infty} q^{-j} f\left(q^{-j}\right)$ serside mutlak yakınsak yani yakınsak olacaktır. (20.14) ifadesindeki her iki seride yakınsak olacaktır. O halde önermedeki şartlar altında improper q– integrali yakınsak olacaktır. ■

$u = u(x) = \alpha x^{\beta}$ olarak tanımlayalım. Eğer bir fonksiyonun Jackson integrali $F(x)$'e yakınsarsa, bu integralin Jackson integrali tektir. (19.3) ifadesinin sağ tarafını (20.3) den yararlanarak yeniden ele alalım.

$$
\begin{aligned}
RHS &= \sum_{j=0}^{\infty} f\left(u\left(q^{j/\beta}x\right)\right)\left(u\left(q^{j/\beta}x\right)-u\left(q^{(j+1)/\beta}x\right)\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\alpha q^{j}x^{\beta}\right)\left(\alpha x^{\beta}q^{j}-\alpha q^{j+1}x^{\beta}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f\left(q^{j}u\right)\left(q^{j}u-q^{j+1}u\right) \\
&= (1-q)\,u\sum_{j=0}^{\infty} q^{j} f\left(q^{j}u\right) \\
&= LHS
\end{aligned}
$$

Yukarıdaki iki integral birbirlerine eşit oldukları için Jackson integralleri de yukarıda görüldüğü gibi birbirlerine eşit olacaklardır. Şimdi de,

$$
\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, d_q u = \int_a^b f(u(x))\, d_{q^{1/\beta}} u(x) \tag{20.15}
$$

olduğunu (20.3) ifadesinden yararlanarak gösterelim.

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(u(x))\, d_{q^{1/\beta}} u(x) &= \int_0^b f(u(x))\, d_{q^{1/\beta}} u(x) - \int_0^a f(u(x))\, d_{q^{1/\beta}} u(x) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\alpha b^{\beta} q^{j}\right)\left(\alpha b^{\beta}q^{j}-\alpha b^{\beta}q^{j+1}\right) - \sum_{j=0}^{\infty} f\left(\alpha a^{\beta} q^{j}\right)\left(\alpha a^{\beta}q^{j}-\alpha a^{\beta}q^{j+1}\right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} f\left(q^{j}u(b)\right)\left(u(b)\,q^{j}-q^{j+1}u(b)\right) - \sum_{j=0}^{\infty} f\left(q^{j}u(a)\right)\left(q^{j}u(a)-q^{j+1}u(a)\right) \\
&= (1-q)\,u(b)\sum_{j=0}^{\infty} q^{j} f\left(q^{j}u(b)\right) - (1-q)\,u(a)\sum_{j=0}^{\infty} q^{j} f\left(q^{j}u(a)\right) \\
&= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\, d_{qu}
\end{aligned}
$$

Bir sonraki bölümde göreceğimiz Newton-Leibniz formülünden $D_q F(x) = f(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli ise (20.15) deki her iki integral $F(u(b)) - F(u(a))$ değerine eşit olacaktır. Çünkü $D_q F(x) = f(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli ise, $F(x)$ fonksiyonu Jackson integrali ile ifade edilebiliyordu. Bu yüzden Newton-Leibniz formülü improper q− integraller içinde doğrudur. (20.15) ifadesinde $\alpha, \beta > 0, \beta = 1$ ise

$u = u(x) = \alpha x$ olacaktır. $a = 0, b = \infty$ için aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\int_0^\infty f(\alpha x)\, d_q(\alpha x) = \int_0^\infty f(\alpha x)\, \alpha d_q x = \int_0^\infty f(x)\, d_q x$$

$$\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty f(x)\, d_q x = \int_0^\infty f(\alpha x)\, d_q x \tag{20.16}$$

BÖLÜM 21

q-Analiz'in Temel Teoremi

Teorem 1 *(q– Analiz'in Temel Teoremi)*

Eğer $D_qF(x) = f(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli ise,

$$\int_a^b f(x)\, d_qx = F(b) - F(a) \qquad 0 \le a < b \le \infty \tag{21.1}$$

İspat. $D_qF(x) = f(x)$ ve $F(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli olsun. O halde $F(x)$ fonksiyonu Jackson formülü ile sabit bir terim eklenene kadar aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$F(x) = (1-q)\, x \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j x\right) + F(0)$$

(20.7) ifadesinden yararlanarak,

$$\int_0^a f(x)\, d_qx = (1-q)\, a \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j a\right) = F(a) - F(0)$$

elde edilecektir. Benzer şekilde sonlu bir b için,

$$\int_0^b f(x)\, d_qx = (1-q)\, b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(q^j b\right) = F(b) - F(0)$$

elde edilecektir. Sonuç olarak,

$$\int_a^b f(x)\, d_qx = \int_0^b f(x)\, d_qx + \int_0^a f(x)\, d_qx = F(b) - F(a)$$

olacaktır. Şimdi a yerine q^{j+1}ve b yerine de q^j alalım.$0 < q < 1$ için improper q– integral tanımından yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\int_a^{\infty} f(x)\, d_qx &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{q^{j+1}}^{q^j} f(x)\, d_qx \\
&= \sum_{j=-\infty}^{\infty} F\left(q^j\right) - F\left(q^{j+1}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} F(x) - F(0)
\end{aligned}$$

olacaktır. Eğer $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ varsa, q–analizin temel teoremi $b=\infty$ için doğru olacaktır. ∎

Önerme 2 *Eğer $x=0$ ın bir komşuluğunda $f'(x)$ var ve $x=0$ noktasında sürekli ise ($f'(x)$, $f(x)$ fonksiyonunun bilinen türevi olmak üzere),*

$$\int_a^b D_q f(x)\, d_q(x) = f(b) - f(a) \tag{21.2}$$

İspat. L'Hospital kuralından yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} D_q f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(qx)-f(x)}{x(q-1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{qf'(qx)-f'(x)}{q-1} \\
&= \frac{q-1}{q-1} f'(0) \\
&= f'(0)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak eğer $\lim\limits_{x\to 0} D_q f(x) = f'(0) = D_q f(0)$ olarak alırsak q– analizin temel teoreminden önermenin doğru olduğu görülür. ∎

q– İntegral ve bilinen integral arasındaki en büyük fark, herhangi bir aralıkta fonksiyonun q– integralini aldığımız zaman, fonksiyonun $x=0$ noktasındaki durumunu ele almak zorundayız. Çünkü Jackson integralinin yakınsaması için $F(x)$ in $x=0$ noktasından sürekli ve $D_q F(x) = f(x)$ olması gerekmektedir.

$f(x)$ ve $g(x)$ herhangi iki fonksiyon ve bilinen türevleri $x=0$ noktasının komşuluğunda tanımlı ve $x=0$ noktasında sürekli olsun.

$$D_q(f(x)g(x)) = f(x)(D_q g(x)) + g(qx)(D_q f(x))$$

Bilinen analizde diferansiyellenebilen iki fonksiyonun çarpımı da diferansiyellenebilmektedir. Dolayısıyla $D_q(f(x)g(x))$, $x=0$ noktasının komşuluğunda tanımlı ve bu noktada sürekli olacaktır. Yukarıdaki önermeden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\int_a^b D_q(f(x)g(x))\, d_q x &= \int_a^b f(x) D_q g(x)\, d_q x + \int_a^b g(qx)(D_q f(x))\, d_q x \\
f(b)g(b) - f(a)g(a) &= \int_a^b f(x)\, d_q g(x) + \int_a^b g(qx)\, d_q f(x)
\end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)\, d_q g(x) = f(b)\, g(b) - f(a)\, g(a) - \int_a^b g(qx)\, d_q f(x) \tag{21.3}$$

elde edilecektir. Bu formüle parçalı q– integrasyon denir. $b = \infty$ için de bu ifade doğru olacaktır. Parçalı q– integrasyonu q– Taylor formülünü Cauchy kalan terimi ile birlikte elde etmek için kullanabiliriz.

Teorem 3 *Varsayalım ki $D_q^j f(x)$, $j \leq n+1$ için $x = 0$ noktasında sürekli olsun. O halde Taylor formülünün Cauchy kalanı ile birlikte q– benzeri aşağıdaki gibi olacaktır.*

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n} \left(D_q^j f\right)(a) \frac{(b-a)_q^j}{[j]!} + \frac{1}{[n]!} \int_a^b D_q^{n+1} f(x)\, (b-qx)_q^n\, d_q x \tag{21.4}$$

İspat. $D_q f(x)$, $x = 0$ noktasında sürekli olduğundan q–analizin temel teoreminden,

$$\int_a^b D_q f(x)\, d_q x = f(b) - f(a) = -\int_a^b D_q f(x)\, d_q (b-x)$$

elde edilecektir. Yukarıdaki ifade (21.4) ifadesinin $n = o$ için karşılığıdır. Varsayalım ki n-1 içinde (21.4) ifadesi doğru olsun. Tüme varımdan (21.4) ifadesinin doğru olduğunu gösterelim. (21.4) ifadesi $n-1$ için aşağıdaki hale gelecektir.

$$f(b) = \sum_{j=0}^{n-1} \left(D_q^j f\right)(a) \frac{(b-a)_q^j}{[j]!} + \frac{1}{[n-1]!} \int_a^b D_q^n f(x)\, (b-qx)_q^{n-1}\, d_q x \tag{21.5}$$

q– Parçalı integarsyondan yararlanarak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\int_a^b D_q^n f(x)\, (b-qx)_q^{n-1}\, d_q x &= -\frac{1}{[n]} \int_a^b D_q^n f(x)\, d_q (b-x)_q^n \\
&= -\frac{1}{[n]} \left(-D_q^n f(a)\, (b-a)_q^n - \int_a^b (b-qx)_q^n\, D_q^{n+1} f(x)\, d_q x \right)
\end{aligned}$$

Bulduğumuz bu ifadeyi (21.5) de yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
f(b) &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(D_q^j f\right)(a) \frac{(b-a)_q^j}{[j]!} + \frac{1}{[n-1]!} \left(\frac{1}{[n]} D_q^n f(a)\, (b-a)_q^n + \frac{1}{[n]} \int_a^b (b-qx)_q^n\, D_q^{n+1} f(x)\, d_q x \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \left(D_q^j f\right)(a) \frac{(b-a)_q^j}{[j]!} + \frac{1}{[n]!} \int_a^b (b-qx)_q^n\, D_q^{n+1} f(x)\, d_q x
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Tüme varımdan dolayı ıspat tamamlanacaktır. ∎

BÖLÜM 22

q-Gamma ve q-Beta Fonksiyonları

Tanım 1

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx \qquad t > 0 \tag{22.1}$$

$$B(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{s-1}dx \qquad s,t > 0 \tag{22.2}$$

Bu fonksiyonlara sırasıyla gamma ve beta fonksiyonları denir.

Bu fonksiyonların bazı özellikleri aşağıda listelenmiştir.

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \tag{22.3}$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad n \text{ pozitif tam sayı} \tag{22.4}$$

$$B(t,s) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)} \tag{22.5}$$

(22.4) ifadesi gamma fonksiyonunun faktöriyel ile ifade edilebileceğini göstermektedir. Bu bölümde, gamma ve beta fonksiyonlarının q– benzerlerini, bunların özelliklerini ve (22.3), (22.4) ve (22.5) ifadelerinin q– benzerlerini inceleyeceğiz. $0 < q < 1$ olduğunu varsayalım.

Tanım 2 *Herhangi bir $t > 0$ için,*

$$\Gamma_q(t) = \int_0^\infty x^{t-1}E_q^{-qx}d_qx \tag{22.6}$$

fonksiyonuna q-Gamma fonksiyonu denir.

Öncelikle (10.10) dan $E_q^0 = 1$ ve (10.7) ile (10.13) den $E_q^{-\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{e_q^x} = 0$ olacaktır. (10.11) ifadesinden ve (21.3) de tanımlanan parçalı q– integrasyondan aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz.

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty x^t E_q^{-qx} d_q x &= -\int_0^\infty x^t D_q E_q^{-x} d_q x \\
&= -\int_0^\infty x^t d_q E_q^{-x} \\
&= \int_0^\infty E_q^{-qx} d_q x^t \\
&= \int_0^\infty E_q^{-qx} D_q x^t d_q x \\
&= [t] \int_0^\infty E_q^{-qx} x^{t-1} d_q x
\end{aligned}
$$

Burdan da herhangi bir $t > 0$ için aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\Gamma_q (t+1) = [t] \Gamma_q (t) \tag{22.7}$$

n negatif olmayan herhangi bir tam sayı için,

$$\Gamma_q (1) = \int_0^\infty E_q^{-qx} d_q x = -E_q^{-x} /_0^\infty = -E_q^{-\infty} + E_q^0 = 1$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma_q (1+1) &= [1] \Gamma_q (1) = 1 = \Gamma_q (2) \\
\Gamma_q (2+1) &= [2] \Gamma_q (2) = [2] = \Gamma_q (3) \\
\Gamma_q (3+1) &= [3] \Gamma_q (3) = [3]! = \Gamma_q (4) \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

$$\Gamma_q (n+1) = [n]! \tag{22.8}$$

elde edilecektir. Bu ifade (22.4) ifadesinin q− benzeridir.

Tanım 3 *Herhangi bir $t, s > 0$ için,*

$$B_q (t, s) = \int_0^1 x^{t-1} (1-qx)_q^{s-1} d_q x \tag{22.9}$$

fonksiyonuna q-Beta fonksiyonu denir.

q– İntegral ve improper q– integral tanımlarından yararlanarak $0 < q < 1$ olmak üzere aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz.

$$\begin{aligned} B_q(t,\infty) &= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^\infty d_qx \\ &= (1-q)\sum_{j=0}^{\infty} q^j \left(q^j\right)^{t-1}\left(1-q^{j+1}\right)_q^\infty \\ &= (1-q)\sum_{j=-\infty}^{\infty} q^j \left(q^j\right)^{t-1}\left(1-q^{j+1}\right)_q^\infty \\ &= \int_0^\infty x^{t-1}(1-qx)_q^\infty d_qx \end{aligned}$$

Burada j nin herhangi bir negatif tamsayı değeri için $\left(1-q^{j+1}\right)_q^\infty = 0$ olacaktır.

Şimdi de $\Gamma_q(t)$ ve $B_q(t,s)$ arasındaki ilişkiyi gösterelim.

$E_q^x = (1+(1-q)x)_q^\infty$ olduğuna göre $E_q^{-\frac{qx}{1-q}} = (1-qx)_q^\infty$ olacaktır.

$$B_q(t,\infty) = \int_0^\infty x^{t-1}(1-qx)_q^\infty d_qx = \int_0^\infty x^{t-1}E_q^{-\frac{qx}{1-q}}d_qx$$

Bu ifadede $x = (1-q)y$ dönüşümü yapalım.

$$\begin{aligned} B_q(t,\infty) &= \int_0^\infty (1-q)^{t-1}y^{t-1}E_q^{-qy}(1-q)\,d_qy \\ &= \int_0^\infty (1-q)^t y^{t-1}E_q^{-qy}d_qy \\ &= (1-q)^t\int_0^\infty E_q^{-qy}y^{t-1}d_qy \end{aligned}$$

veya

$$\frac{B_q(t,\infty)}{(1-q)^t} = \int_0^\infty E_q^{-qy}y^{t-1}d_qy = \Gamma_q(t)$$

Sonuç olarak,

$$\Gamma_q(t) = \frac{B_q(t,\infty)}{(1-q)^t} \tag{22.10}$$

elde edilecektir.

Önerme 4 *a) Eğer $t > 0$ ve n pozitif tam sayı ise,*

$$B_q(t,n) = \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n} \tag{22.11}$$

b) Eğer $t, s > 0$ ise,

$$B_q(t,s) = \frac{(1-q)(1-q)_q^{\infty}(1-q^{t+s})_q^{\infty}}{(1-q^t)_q^{\infty}(1-q^s)_q^{\infty}} \tag{22.12}$$

İspat. a) $D_q(a-x)_q^n = -[n](a-qx)_q^{n-1}$ifadesinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} B_q(t,s) &= \int_0^{\infty} x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1} d_qx \\ &= -\frac{1}{[s]}\int_0^{\infty} x^{t-1} D_q(1-x)_q^s d_qx \\ &= -\frac{1}{[s]}\int_0^{\infty} x^{t-1} d_q(1-x)_q^s \end{aligned}$$

(21.3) parçalı q– integrasyondan yararlanarak,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{[s]}\int_0^{\infty} (1-qx)_q^s d_qx^{t-1} \\ &= \frac{1}{[s]}\int_0^{\infty} (1-qx)_q^s D_qx^{t-1} d_qx \\ &= \frac{[t-1]}{[s]}\int_0^{\infty} (1-qx)_q^s x^{t-2} d_qx \end{aligned}$$

Sonuç olarak $s > 0, t > 1$ için,

$$B_q(t,s) = \frac{[t-1]}{[s]} B_q(t-1, s+1) \tag{22.13}$$

elde edilecektir. Diğer taraftan $t > 0, n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\begin{aligned} B_q(t,n+1) &= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^n d_qx \\ &= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{n-1}(1-q^nx) d_qx \\ &= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{n-1} d_qx - q^n \int_0^1 x^t (1-qx)_q^{n-1} d_qx \end{aligned}$$

Buradan da sonuç olarak,

$$B_q(t,n+1) = B_q(t,n) - q^n B_q(t+1,n) \tag{22.14}$$

elde edilecektir. (22.13) ve (22.14) den yararlanarak,

$$B_q(t,n+1) = B_q(t,n) - q^n \frac{[t]}{[n]} B_q(t,n+1)$$

veya

$$B_q(t,n) = B_q(t,n+1)\left(1 + q^n \frac{[t]}{[n]}\right)$$
$$B_q(t,n) = B_q(t,n+1)\left(1 + q^n \frac{1-q^t}{1-q^n}\right)$$
$$B_q(t,n) = B_q(t,n+1)\left(\frac{1-q^{t+n}}{1-q^n}\right)$$

Sonuç olarak $t > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$B_q(t,n+1) = \frac{1-q^n}{1-q^{t+n}} B_q(t,n) \tag{22.15}$$

olacaktır. Sonuçta $t > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\begin{aligned}
B_q(t,1) &= \frac{1}{[t]} \\
B_q(t,2) &= \frac{1-q}{1-q^{t+1}} \frac{1}{[t]} \\
B_q(t,3) &= \frac{1-q^2}{1-q^{t+2}} \frac{1-q}{1-q^{t+1}} \frac{1}{[t]} \\
&\vdots \\
B_q(t,n) &= \frac{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^{n-1})}{(1-q^{t+1})(1-q^{t+2})\dots(1-q^{t+n-1})} \frac{1}{[t]}
\end{aligned}$$

$$B_q(t,n) = \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n}$$

elde edilecektir.

b) $(1-q)_q^{n-1} = \frac{(1-q)_q^\infty}{(1-q^n)_q^\infty}$ ve $\frac{1}{(1-q^t)_q^n} = \frac{(1-q^{t+n})_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty}$ olduğunu biliyoruz. Bunları (22.11) de yerine yazalım. $t > 0$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\begin{aligned}
B_q(t,n) &= \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{(1-q^t)_q^n} \\
&= \frac{(1-q)(1-q)_q^\infty (1-q^{t+n})_q^\infty}{(1-q^n)_q^\infty (1-q^t)_q^\infty}
\end{aligned}$$

olacaktır. Bu ifade (22.12)ye eşit olduğundan $s = 1,2,3,\dots$ için (22.12) ifadesi doğru olacaktır. Amacımız $s > 0$ için (22.12) ifadesinin doğru olduğunu göstermektir. (22.12) ifadesinin sol tarafını,

$$
\begin{aligned}
B_q(t,s) &= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1}\, d_qx \\
&= \int_0^1 x^{t-1}\frac{(1-qx)_q^{\infty}}{(1-q^s x)_q^{\infty}} d_qx \\
&= \sum_{j=0}^{\infty}(1-q)\, q^j \left(q^j\right)^{t-1} \frac{\left(1-q^{j+1}\right)_q^{\infty}}{\left(1-q^{s+j}\right)_q^{\infty}}
\end{aligned}
$$

Burda $q^s = a$ olarak alırsak,

$$B_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}\frac{(1-qx)_q^{\infty}}{(1-ax)_q^{\infty}} d_qx$$

elde edilecektir. Benzer şekilde, (22.12) ifadesinin ~~sol~~ sağ tarafında da $q^s = a$ olarak alalım. Buna göre ~~sol~~ sağ taraf,

$$\frac{(1-q)(1-q)_q^{\infty}\left(1-aq^t\right)_q^{\infty}}{\left(1-q^t\right)_q^{\infty}(1-a)_q^{\infty}}$$

olacaktır. Şimdi ise (22.12) ifadesinin her iki tarafını q nun bir kuvvet serisi olarak düşünebiliriz. Yani $a = q^s$, $s = 1, 2, 3, ...$ için,

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j(a)\, q^j = \sum_{j=0}^{\infty} c_j'(a)\, q^j$$

olacaktır. Bu durumda $a = q^s$, $s = 1, 2, 3, \ldots$ için $c_j(a) = c_j'(a)$ olacaktır. $c_j(a) - c_j'(a)$, a'nın bir polinomudur ve sonsuz çokluktaki a değeri için $c_j(a) - c_j'(a) = 0$ olacaktır. $c_j(a) - c_j'(a)$ ifadesi a nın rasyonel bir fonksiyonu olduğundan bu ifadeyi sıfır yapan değerler en çok payın mertebesi kadar olacaktır. O halde $\forall a = q^s$, $s > 0$ için $c_j(a) = c_j'(a)$ olacaktır. Dolayısıyla (22.12) ifadesi $t, s > 0$ için doğru olacaktır. ∎

Önermenin a) şıkkı bize q− gamma fonksiyonunu aşağıdaki şekilde ifade etmemizde yarar sağlamaktadır. (22.11) ifadesinin $n \to \infty$ için limitini alırsak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$B_q(t,\infty) = \frac{(1-q)(1-q)_q^{\infty}}{\left(1-q^t\right)_q^{\infty}}$$

Bulduğumuz bu ifadeyi (22.10) da yerine koyalım.

$$\Gamma_q(t) = \frac{(1-q)(1-q)_q^{\infty}}{\left(1-q^t\right)_q^{\infty}(1-q)^t} \tag{22.16}$$

elde edilecektir. (22.12) ifadesinden q–Beta fonksiyonunun t ve s için simetrik olduğu anlaşılır. Yani $B_q(t,s) = B_q(s,t)$ olacaktır. (22.12) ve (22.16) ifadelerini kullanarak, q– beta fonksiyonunu q– gamma fonksiyonu cinsinden ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} B_q(t,s) &= \frac{(1-q)(1-q)_q^\infty \left(1-q^{t+s}\right)_q^\infty}{(1-q^t)_q^\infty (1-q^s)_q^\infty} \\ &= \frac{(1-q)_q^\infty (1-q)_q^\infty (1-q)^{t+s-1} \left(1-q^{t+s}\right)_q^\infty}{(1-q)^{t-1}(1-q^t)_q^\infty (1-q)^{s-1}(1-q^s)_q^\infty (1-q)_q^\infty} \\ &= \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)} \end{aligned}$$

Buradan aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$B_q(t,s) = \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)} \tag{22.17}$$

Böylece (22.5) ifadesinin q– benzerini elde etmiş oluyoruz.

BÖLÜM 23

Bernoulli Polinomları ve Bernoulli Sayıları

Tanım 1

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = \frac{ze^{zx}}{e^z - 1} \tag{23.1}$$

$B_n(x)$ polinomların negatif olmayan tüm n tam sayıları için x in polinomlarıdır. $B_n(x)$ polinomlarına Bernoulli polinomları denir. Eğer $\{B_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ polinomlar dizisi ise, (23.1) ifadesi bir üreteç(genereting) fonksiyon olacaktır.

(23.1) ifadesinin her iki tarafının diferansiyelini alırsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n'(x)}{n!} z^n = z \frac{ze^{zx}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^{n+1} \tag{23.2}$$

elde edilecektir.Bu iki serinin katsayılarının birbirlerine eşit olması gerektiğinden $n \geq 1$ için,

$$B_n'(x) = B_{n-1}(x)\, n \qquad n \geq 1 \tag{23.3}$$

olması gerekmektedir. Dikkat edecek olursak (23.2) deki eşitliğin sağlanması için $B_0'(x) = 0$ olmalıdır. Bu durumda $B_0(x) = c$ (c sbt) olacaktır. Aceba c sabiti nereye eşit olacaktır? Bu sorunun cevabını bulmak için (23.1) ifadesini ele alalım.

$$B_0(x) + zB_1(x) + z^2 \frac{B_2(x)}{2!} + ... = z \frac{\left(1 + zx + \frac{z^2x^2}{2!} + \frac{z^3x^3}{3!} + ...\right)}{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... - 1}$$

Yukarıdaki eşitliğin her iki tarafını $z \to \infty$ için limitini alırsak,

$$B_0(x) = \lim_{z \to 0} \frac{z\left(1 + zx + \frac{z^2x^2}{2!} + \frac{z^3x^3}{3!} + ...\right)}{z(1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^3}{4!} + ...)} = 1$$

elde edilecektir. O halde $c = 1$ olacaktır. Bernoulli polinomlarının bir özelliği ise $n \geq 0$ için $der B_n(x) = n$ olmasıdır. Eğer (23.1) ifadesinin sağ tarafındaki bölme işlemini yaparsak $B_n(x)$ polinomlarını sırasıyla elde edebiliriz. Buna göre,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = 1 + z\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{z^2}{2!}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) + \frac{z^3}{6}\left(\frac{x^3}{2} - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}\right) + ...$$

elde edilecektir. Burdan,

$$B_0(x)=0\ ,B_1(x)=x-\frac{1}{2}\ ,\ B_2(x)=x^2-x+\frac{1}{6}\ \ ,\ B_3(x)=\frac{x^3}{2}-\frac{3}{2}x^2+\frac{x}{2} \tag{23.4}$$

olacaktır. Diğer polinomlarda bölme işlemine devam edilerek bulunabilir.

Tanım 2 *$n \geq 0$ için $b_n = B_n(0)$ rakamlarına Bernoulli rakamları denir.*

(23.1) ifadesinde $x=0$ alırsak aşağıdaki sonuca ulaşacağız

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n=\frac{z}{e^z-1}$$

Eğer,

$$\frac{z}{e^z-1}=\frac{1}{1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^3}{4!}+\ldots}$$

bölme işlemini yaparsak b_n Bernoulli rakamlarını bulabiliriz.

Önerme 3 *Herhangi bir $n \geq 1$ için,*

$$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1} \tag{23.5}$$

İspat. (23.1) ifadesinden yararlanarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x+1)}{n!}z^n=\frac{ze^{z(x+1)}}{e^z-1}$$

yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x+1)}{n!}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n &= \frac{ze^{z(x+1)}-ze^{zx}}{e^z-1}\\
&= \frac{ze^{zx}(e^z-1)}{e^z-1}\\
&= ze^{zx}\\
&= \frac{d}{dx}e^{zx}
\end{aligned}$$

$$e^{zx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^nx^n}{n!}$$

olduğundan ,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x+1)}{n!}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n(x)}{n!}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^nnx^{n-1}}{n!}$$

elde edilecektir. Burada z^n katsayılarını mukayese ettiğimiz zaman $n \geq 1$ için,

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

olduğunu görürüz. ∎

Önerme 4 *Herhangi bir* $n \geq 0$ *için,*

$$B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j x^{n-j} \tag{23.6}$$

İspat.

$$F_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j x^{n-j}$$

olarak tanımlayalım. Eğer,

1-$F_n(0) = b_n \quad n \geq 0$

2-$F_n'(x) = nF_{n-1}(x) \quad n \geq 1$ olduğunu gösterebilirsek, $F_n(x) = B_n(x)$ olacaktır. Çünkü bu iki özellik Bernoulli polinomlarının belirleyici özellikleridir. Önce 1. özelliğin sağlandığını gösterelim.

$$F_n(x) = \binom{n}{0} b_0 x^n + \binom{n}{1} b_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} b_2 x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n} b_n$$

olduğundan $n \geq 0$ için $F_n(0) = b_n$ olacaktır. Şimdi de 2.özelliğin sağlandığını gösterelim.$n > j \geq 0$ için,

$$(n-j)\binom{n}{j} = (n-j)\frac{n!}{(n-j)!j!} = \frac{n!}{(n-j-1)!j!} = n\binom{n-1}{j}$$

olacaktır. Buradan yararlanarak $n \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}F_n(x) &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (n-j)\, b_j x^{n-j-1} \\ &= n\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (n-j)\, b_j x^{n-j-1} \\ &= nF_{n-1}(x) \end{aligned}$$

elde edilecektir. O halde $F_n(x) = B_n(x)$ olacaktır. Böylece ıspat tamamlanmış olacaktır. ∎

(23.6) ifadesinde $x = 1$ alalım. Bu durumda,

$$B_n(1) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} b_j = b_n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} b_j \qquad n \geq 1 \tag{23.7}$$

elde edilecektir. (23.5) ifadesinde $n \geq 2$ için $B_n(1) = b_n$ elde edilecektir. Bunu gösterelim.

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \qquad n \geq 1$$

ifadesinde $n = 1$ ve $x = 0$ alalım. Bu durumda,

$$B_1(1) - B_1(0) = 1$$

$$B_1(1) = B_1(0) + 1$$

elde edilir. $x = 0$ için,

$$B_n(1) - B_n(0) = 0$$

$$B_n(1) = B_n(0)$$

olacaktır. Bu iki ifadeden $n \geq 2$ için $B_n(1) = B_n(0) = b_n$ olduğunu görürüz. Buna göre,

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} b_j = 0 \qquad n \geq 2 \tag{23.8}$$

olacaktır. Çünkü (23.7) de $n = 1$ için,

$$B_1(1) = b_1 + \binom{1}{0} b_0 = b_1 + 1$$

olur ki bu ifade doğrudur. (23.7) de $n \geq 2$ için,

$$B_n(1) = b_n + \binom{n}{0} b_0 + \binom{n}{1} b_1 + \ldots + \binom{n}{n-1} b_{n-1}$$

olacaktır. Bu ifadenin $n \geq 2$ için $B_n(1) = b_n$ olması gerekmektedir. Dolayısıyla bu eşitliğin sağlanabilmesi için (23.8) ifadesinin olması gerekmektedir.

(23.8) ifadesinin yardımı ile Bernoulli rakamlarını kolaylıkla bulabiliriz. $n = 2$ için,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{1}\begin{pmatrix}2\\j\end{pmatrix}b_j &= \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}b_0+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}b_1\\ &= b_0+2b_1\\ &= 0\end{aligned}$$

olmalıdır. O halde $b_1 = -\frac{1}{2}$ olacaktır. Benzer şekilde $n = 3$ için,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{2}\begin{pmatrix}3\\j\end{pmatrix}b_j &= \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}b_0+\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}b_1+\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}b_2\\ &= 1-\frac{3}{2}+3b_2\\ &= 0\end{aligned}$$

olmalıdır. O halde $b_2 = \frac{1}{6}$ olacaktır. Benzer yolla $n = 4, 5, 6, \ldots$ için de $b_3, b_4, \ldots$ Bernoulli rakamlarını bulabiliriz. Bunlardan birkaçı aşağıdaki gibidir.

$$b_0 = 1,\ b_1 = -\frac{1}{2},\ b_2 = \frac{1}{6},\ b_3 = 0,\ b_4 = -\frac{1}{30},\ b_5 = 0,\ b_6 = \frac{1}{42} \tag{23.9}$$

Yukarıdaki Bernoulli rakamlarına baktığımız zaman $n \to \infty$ için $\mid b_n \mid \to 0$ gibi görünmektedir. Fakat bu durum yanıltıcıdır. Çünkü dizinin geri kalan terimlerine baktığımız zaman,

$$\begin{aligned}b_8 = -\frac{1}{30}, b_{10} = \frac{5}{66}, b_{12} = -\frac{691}{2730}, b_{14} = \frac{7}{6}\\ b_{16} = -\frac{3617}{510}, b_{18} = \frac{43867}{798}, b_{20} = -\frac{174611}{330},\end{aligned}$$

olduğunu görüyoruz. Bernoulli rakamlarının bir diğer özelliği ise $n \geq 3$ tek sayıları için $b_n = 0$ olmasıdır. Bernoulli rakamlarının bu özelliğinden ve (23.1) ifadesinde $x = 0$ koyarak aşağıdaki fonksiyonu elde edebiliriz.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}z^n - b_1 z = \frac{z}{e^z-1}+\frac{z}{2} = \frac{z}{2}\frac{e^z+1}{e^z-1}$$

Burada $f(z) = f(-z)$ olduğundan $f(z)$ çift fonksiyondur. Bernoulli rakamlarını içeren diğer bir ilginç formül ise (23.5) ve (23.6) ifadelerinde x yerine -1 koymakla elde edilecektir.

$$B_n(0) - B_n(-1) = n(-1)^{n-1} \qquad n \geq 1$$

$$B_n(-1) = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} b_j (-1)^{n-j} \quad n \geq 0$$

$$b_n - B_n(-1) = n(-1)^{n-1} \qquad n \geq 1$$

$$b_n + n(-1)^n = B_n(-1) = \sum_{j=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} b_j (-1)^{n-j}$$

veya

$$\begin{aligned}
b_n + n(-1)^n &= \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} b_0 (-1)^n + \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} b_1 (-1)^{n-1} + \sum_{j=2}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} b_j (-1)^{n-j} + \begin{pmatrix} n \\ n \end{pmatrix} b_n \\
n(-1)^n &= b_0 (-1)^n + n b_1 (-1)^{n-1} + \sum_{j=2}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} (-1)^{n-j} b_j \\
n &= b_0 - n b_1 + \sum_{j=2}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} (-1)^j b_j \\
n &= 1 + \frac{n}{2} + \sum_{j=2}^{n-1} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} (-1)^j b_j
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Bu ifade de j yerine $j+1$ koyarsak,

$$1 + \frac{n}{2} + \sum_{j=1}^{n-2} \begin{pmatrix} n \\ j+1 \end{pmatrix} (-1)^{j+1} b_{j+1} = n$$

Şimdi de n yerine $n+1$ koyarsak,

$$\begin{aligned}
1 + \frac{n+1}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \begin{pmatrix} n+1 \\ j+1 \end{pmatrix} (-1)^{j+1} b_{j+1} &= n+1 \\
\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} \frac{n+1}{j+1} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} b_{j+1} &= n - \left(\frac{n+1}{2}\right) \\
\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} \frac{b_{j+1}}{j+1} \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} &= \frac{n-1}{2(n+1)}
\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} \frac{b_{j+1}}{j+1} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} \tag{23.10}$$

elde edilecektir.

Önerme 5 *Herhangi bir $n \geq 1$ için,*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j(x) = nx^{n-1} \tag{23.11}$$

İspat. Bu önermenin ıspatını tüme varım yöntemi ile yapacağız. Buna göre $n = 1$ için,

$$\binom{1}{0} B_0(x) = x^0 = 1$$

olacağından önerme $n = 1$ için doğrudur. Varsayalım ki önerme herhangi bir $k \geq 1$ için doğru olsun. Amacımız önermenin $k + 1$ için de doğru olduğunu göstermektir. (23.3) ifadesinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j(x) &= \sum_{j=1}^{k} j \binom{k+1}{j} B_{j-1}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{k} j \frac{k+1}{j} \binom{k}{j-1} B_{j-1}(x) \\
&= (k+1) \sum_{j=1}^{k} \binom{k}{j-1} B_{j-1}(x) \\
&= (k+1) \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} B_j(x) \\
&= (k+1) kx^{k-1} \\
&= (k+1) \frac{d}{dx} x^k
\end{aligned}$$

veya

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j(x) = (k+1) x^k + c$$

elde edilecektir. Eğer bu ifadede $x = 0$ olarak alınırsa,

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} B_j(0) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} b_j(x) = c \qquad\qquad k \geq 1$$

(23.8) den dolayı $c = 0$ olduğu görülecektir. O halde tüme varım yöntemi ile önermenin pozitif tam sayılar için doğru olduğunu ıspatlamış oluyoruz. ■

(23.2) den ve Bernoulli rakamlarından yararlanarak Bernoulli polinomlarını elde edebiliriz. $B_0(x) = 1$, $B_n(0) = b_n \quad n \geq 0$, $B_n(1) = b_n \quad n \geq 2$ ve $derB_n(x) = n$ olduğunu da göz önüne alarak aşağıdaki Bernoulli Polinomlarını elde edebiliriz.

$$B_1'(x) = B_0(x)$$

$$B_1'(0) = B_0(0) = b_0 = 1$$

$$B_0(x) = 1$$

$$B_1'(x) = B_0(x) = 1$$

$$B_1(x) = x + c$$

$$B_1(0) = b_1 = -\frac{1}{2} = c$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

$$B_2'(x) = 2B_1(x)$$

$$B_2'(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$B_2(x) = x^2 - x + c$$

$$B_2(0) = b_2 = \frac{1}{6} = c$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

Benzer şekilde $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{x}{2}$, $B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$, $B_5(x) = x^5 - \frac{5x^4}{4} + \frac{5x^3}{3} - \frac{x}{6}$ elde edilecektir.

BÖLÜM 24

Simetrik q– Analiz

q– Diferansiyel aşağıdaki yolla simetrik hale getirilebilir.

$$\tilde{d}_q f(x) = f(qx) - f\left(q^{-1}x\right) \tag{24.1}$$

Tabii ki burada da $q \neq 1$ olacaktır. Bu tanımın ışığında simetrik q– türevi de aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\tilde{D}_q f(x) = \frac{\tilde{d}_q f(x)}{\tilde{d}_q x} = \frac{f(qx) - f\left(q^{-1}x\right)}{\left(q - q^{-1}\right)x} \tag{24.2}$$

24.1 Simetrik q– Çarpım Kuralı

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_q(f(x)\,g(x)) &= \frac{\tilde{d}_q(f(x)\,g(x))}{\tilde{d}_q x} \\
&= \frac{f(qx)\,g(qx) - f\left(q^{-1}x\right)g\left(q^{-1}x\right)}{\left(q - q^{-1}\right)x} \\
&= \frac{f(qx)\,g(qx) - f\left(q^{-1}x\right)g\left(q^{-1}x\right) + g(qx)\,f\left(q^{-1}x\right) - g(qx)\,f\left(q^{-1}x\right)}{\left(q - q^{-1}\right)x} \\
&= \frac{g(qx)\left(f(qx) - f\left(q^{-1}x\right)\right) + f\left(q^{-1}x\right)\left(g(qx) - g\left(q^{-1}x\right)\right)}{\left(q - q^{-1}\right)x}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\tilde{D}_q(f(x)\,g(x)) = g(qx)\,\tilde{D}_q f(x) + f\left(q^{-1}x\right)\tilde{D}_q g(x) \tag{24.3}$$

veya

$$\tilde{D}_q(f(x)\,g(x)) = f(qx)\,\tilde{D}_q g(x) + g\left(q^{-1}x\right)\tilde{D}_q f(x) \tag{24.4}$$

elde edilecektir.

24.2 Simetrik q– Bölme Kuralı

$$g(x)\,\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)$$

ifadesinin her iki tarafının (24.3) den yararlanarak simetrik q− türevini alalım.

$$\begin{aligned} D_q^{\check{}}(g(x)\frac{f(x)}{g(x)}) &= D_q^{\check{}} f(x) \\ g(q^{-1}x)\, D_q^{\check{}}(\frac{f(x)}{g(x)}) + \frac{f(qx)}{g(qx)} D_q^{\check{}} g(x) &= D_q^{\check{}} f(x) \\ D_q^{\check{}}(\frac{f(x)}{g(x)}) &= \frac{D_q^{\check{}} f(x) - \frac{f(qx)}{g(qx)} D_q^{\check{}} g(x)}{g(q^{-1}x)} \end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$D_q^{\check{}}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{g(qx)\, D_q^{\check{}} f(x) - f(qx)\, D_q^{\check{}} g(x)}{g(qx)\, g(q^{-1}x)} \tag{24.5}$$

elde edilecektir. Benzer şekilde (24.4) den yararlanarak aşağıdaki benzer sonuca da ulaşabiliriz.

$$D_q^{\check{}}(\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{g(q^{-1}x)\, D_q^{\check{}} f(x) - f(q^{-1}x)\, D_q^{\check{}} g(x)}{g(qx)\, g(q^{-1}x)} \tag{24.6}$$

α herhangi bir sayı olmak üzere,

$$D_q^{\check{}} x^{\alpha} = [\alpha]^{\check{}}\, x^{\alpha-1} \tag{24.7}$$

olacaktır. Burada,

$$[\alpha]^{\check{}} = \frac{q^{\alpha} - q^{-\alpha}}{q - q^{-1}} \tag{24.8}$$

olarak tanımlanmaktadır.

Önerme 1 *n herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere, eğer;*

$$(x-a)_{\check{q}}^{n} = (x - q^{n-1}a)(x - q^{n-3}a)(x - q^{n-5}a)\ldots(x - q^{-n+1}a) \tag{24.9}$$

ve $(x-a)_{\check{q}}^{0} = 1$ *şeklinde tanımlanırsa,*

$$D_q^{\check{}}(x-a)_{\check{q}}^{n} = [n]^{\check{}}\,(x-a)_{\check{q}}^{n-1} \tag{24.10}$$

olacaktır.

İspat. Önermenin ıspatını n üzerinde tüme varım yöntemi ile yapacağız. $n = 1$ için (24.10) un doğru olduğu açıktır. Herhangi bir $n > 1$ için önermenin doğru olduğunu varsayalım ve (24.10) un $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} (x-a)_{\check{q}}^{n+1} &= (x - q^{n}a)(x - q^{n-2}a)(x - q^{n-4}a)\ldots(x - q^{-n+2}a)(x - q^{-n}a) \\ &= (x-a)_{\check{q}}^{n}(x - q^{-n}a) \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. (24.4) den yararlanarak,

$$\begin{aligned}
D_q^{\tilde{}}\,(x-a)_{\tilde{q}}^{n+1} &= D_q^{\tilde{}}((x-a)_{\tilde{q}}^{n}\,(x-q^{-n}a)) \\
&= (qx-qa)_{\tilde{q}}^{n}\,D_q^{\tilde{}}\,(x-q^{-n}a)+(q^{-1}x-q^{-n}a)\,D_q^{\tilde{}}\,(x-qa)_{\tilde{q}}^{n} \\
&= (qx-qa)_{\tilde{q}}^{n}+[n]^{\tilde{}}\,(x-qa)_{\tilde{q}}^{n-1}\,(q^{-1}x-q^{-n}a) \\
&= q^{n}\,(x-a)_{\tilde{q}}^{n}+q^{-1}\,[n]^{\tilde{}}\,(x-qa)_{\tilde{q}}^{n-1}\,(x-q^{-n+1}a) \\
&= q^{n}\,(x-a)_{\tilde{q}}^{n}+q^{-1}\,[n]^{\tilde{}}\,(x-a)_{\tilde{q}}^{n} \\
&= \left(q^{n}+q^{-1}\,[n]^{\tilde{}}\right)(x-a)_{\tilde{q}}^{n} \\
&= [n+1]^{\tilde{}}\,(x-a)_{\tilde{q}}^{n}
\end{aligned}$$

elde edilecektir. ■

Dikkat edecek olursak, $(x-a)_{\tilde{q}}^{n}$ ifadesi n. dereceden bir polinomdur. Bunu ilk üç terimi yazarak görebiliriz.

$$\begin{aligned}
(x-a)_{\tilde{q}}^{0} &= 1 \\
(x-a)_{\tilde{q}}^{2} &= (x-qa)\,(x-q^{-1}a) \\
(x-a)_{\tilde{q}}^{3} &= (x-q^{2}a)\,(x-a)\,(x-q^{-2}a)
\end{aligned}$$

Eğer $a\neq 0$ ise $x=a$ noktasında n çift tam sayısı için $(x-a)_{\tilde{q}}^{n}\neq 0$ olacaktır. Çünkü,

$$(a-a)_{\tilde{q}}^{n}=(a-q^{n-1}a)\,(a-q^{n-3}a)\,(a-q^{n-5}a)\ldots(a-q^{-n+1}a)$$

olacağı için n çift tam sayısı için q ların hiçbirinin derecesi sıfır olmayacaktır. Bu yüzden $P_n(x)=\frac{(x-a)_{\tilde{q}}^{n}}{[n]^{\tilde{}}\,!}$ polinomu genel Taylor formülü için 3.bölümdeki teoremin şartlarını sağlamamaktadır. Çünkü $n\geq 1$ için $P_n(a)=0$ olmalıdır. Fakat n çift tam sayısı için $P_n(a)\neq 0$ olacaktır. Bu yüzden bu teoremi sağlayan polinomların ailesini aşağıdaki şekilde tanımlıyoruz.

$$P_n(x)=\frac{1}{[n]^{\tilde{}}\,!}\,(x-a)\,(x-(q-1+q^{-1})\,a)\ldots(x-(q^{n-1}-q^{n-2}+q^{n-3}-\ldots+q^{1-n})\,a)$$

$a=0$ için $f\,(x)$ kuvvet serisinin Taylor gösterimi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$f\,(x)=\sum_{n=1,3,\ldots}(D_q^{\tilde{}n}f)(0)\frac{x^{j}}{[j]^{\tilde{}}\,!} \tag{24.11}$$

$f(x) = (x+a)_{\tilde{q}}^{n}$ fonksiyonunu alalım.

$$D_{\tilde{q}}(x+a)_{\tilde{q}}^{n} = [n]^{\tilde{}}\,(x+a)_{\tilde{q}}^{n-1}$$

olacağından dolayı,

$$D_{\tilde{q}}^{j}(x+a)_{\tilde{q}}^{n} = [n]^{\tilde{}}\,[n-1]^{\tilde{}}\ldots[n-j+1]^{\tilde{}}\,(x+a)_{\tilde{q}}^{n-j}$$

olacaktır. $x=0$ için,

$$D_{\tilde{q}}^{j}(0+a)_{\tilde{q}}^{n} = [n]^{\tilde{}}\,[n-1]^{\tilde{}}\ldots[n-j+1]^{\tilde{}}\,(a)_{\tilde{q}}^{n-j}$$

$$(0+a)_{\tilde{q}}^{n} = q^{n-1}aq^{n-3}a\ldots q^{-n+1}a = a^{n}$$

olacaktır. O halde $j \leq n$ için,

$$\begin{aligned}(D_{\tilde{q}}^{j}f)(0) &= [n]^{\tilde{}}\,[n-1]^{\tilde{}}\ldots[n-j+1]^{\tilde{}}\,a^{n-j}\\ &= \frac{[n]!^{\tilde{}}}{[n-j]!^{\tilde{}}}a^{n-j}\end{aligned}$$

elde edilecektir. $j>n$ için $D_{\tilde{q}}^{j}f(x)=0$ olacaktır. O halde $f(x)$ fonksiyonunun simetrik q– Taylor serisi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$(x+a)_{\tilde{q}}^{n} = \sum_{n=0}^{\infty}\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^{\tilde{}} a^{n-j}x^{j} \tag{24.12}$$

Burada,

$$\begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}^{\tilde{}} = \frac{[n]!^{\tilde{}}}{[n-j]!^{\tilde{}}\,[j]!^{\tilde{}}} \tag{24.13}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca (24.12) denklemi Gauss Binom formülününün (6.2) $\tilde{q}$– benzeridir.

Şimdi de Heine Binom formülünün $\tilde{q}$– benzerini elde etmeye çalışalım.

$g(x) = \frac{1}{(1-x)_{\tilde{q}}^{n}}$ fonksiyonunu ele alalım.

$$\begin{aligned}(1-x)_{\tilde{q}}^{n} &= \left(x-q^{n-1}x\right)\left(x-q^{n-3}x\right)\left(x-q^{n-5}x\right)\ldots\left(x-q^{-n+1}x\right)\\ &= q^{n-1}\left(q^{1-n}-x\right)q^{n-3}\left(q^{3-n}-x\right)\ldots q^{1-n}\left(q^{n-1}-x\right)\\ &= (-1)^{n}q^{n-1}\left(x-q^{1-n}\right)q^{n-3}\left(x-q^{3-n}\right)\ldots q^{1-n}\left(x-q^{n-1}\right)\end{aligned}$$

veya

$$(1-x)_{\tilde{q}}^{n}=(-1)^{n}(x-1)_{\tilde{q}}^{n} \tag{24.14}$$

olacaktır.

$$\begin{aligned}
D_{\tilde{q}}(1-x)_{\tilde{q}}^{n} &= (-1)^{n}[n]^{\tilde{}}(x-1)_{\tilde{q}}^{n-1} \\
&= (-1)^{n}(-1)^{n-1}[n]^{\tilde{}}(1-x)_{\tilde{q}}^{n-1} \\
&= -[n]^{\tilde{}}(1-x)_{\tilde{q}}^{n-1}
\end{aligned}$$

(24.6) dan yararlanarak,

$$\begin{aligned}
D_{\tilde{q}}g(x) &= D_{\tilde{q}}\frac{1}{(1-x)_{\tilde{q}}^{n}} \\
&= \frac{[n]^{\tilde{}}(1-x)_{\tilde{q}}^{n-1}}{(1-qx)_{\tilde{q}}^{n}(1-q^{-1}x)_{\tilde{q}}^{n}} \\
&= \frac{[n]^{\tilde{}}\left(1-q^{n-2}x\right)\left(1-q^{n-4}x\right)\ldots\left(1-q^{-n+2}x\right)}{(1-q^{n}x)(1-q^{n-2}x)\ldots(1-q^{2-n}x)(1-q^{n-2}x)\ldots(1-q^{-n}x)} \\
&= \frac{[n]^{\tilde{}}}{(1-x)_{\tilde{q}}^{n+1}}
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Buradan $j \geq 0$ için

$$(D_{\tilde{q}}^{j}g)(x)=\frac{[n]^{\tilde{}}[n+1]^{\tilde{}}\ldots[n+j-1]^{\tilde{}}}{(1-x)_{\tilde{q}}^{n+j}}$$

$$(D_{\tilde{q}}^{j}g)(0)=[n]^{\tilde{}}[n+1]^{\tilde{}}\ldots[n+j-1]^{\tilde{}}$$

olacaktır. Sonuç olarak $g(x)$ fonksiyonunun simetrik q– Taylor serisi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\frac{1}{(1-x)_{\tilde{q}}^{n}}=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{[n]^{\tilde{}}[n+1]^{\tilde{}}\ldots[n+j-1]^{\tilde{}}}{[j]!^{\tilde{}}}x^{j} \tag{24.15}$$

Şimdi de simetrik q– analizde integralden bahsedelim. Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunun $\tilde{q}$ – antitürevinin açık formülünü elde etmek için, $\hat{M}_{q}(f(x))=f(qx)$ operatöründen yararlanacağız. Varsayalım ki $F(x), f(x)$ in $\tilde{q}$ – antitürevi olsun.

$$\left(\hat{M}_{q}-\hat{M}_{q^{-1}}\right)F(x)=F(qx)-F\left(q^{-1}x\right)=x\left(q-q^{-1}\right)f(x)$$

olacaktır.

$$\hat{M}_{q}\hat{M}_{q^{-1}}g(x)=\hat{M}_{q^{-1}}\hat{M}_{q}g(x)=g(x)$$

olacağından dolayı,

$$\hat{M}_{q^{-1}} = \left(\hat{M}_q\right)^{-1}$$

olacaktır. Bu yüzden,

$$\left(\hat{M}_q - \frac{1}{\hat{M}_q}\right) F(x) = x\left(q - q^{-1}\right) f(x)$$

veya

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\hat{M}_q}{1 - \hat{M}_q^{2}} \left(q^{-1} - q\right) x f(x) \\ &= \left(q^{-1} - q\right) \hat{M}_q \left(1 + \hat{M}_q^{2} + \hat{M}_q^{4} + \ldots\right) x f(x) \\ &= \left(q^{-1} - q\right) \left(\hat{M}_q + \hat{M}_q^{3} + \hat{M}_q^{5} + \ldots\right) x f(x) \end{aligned}$$

elde edilecektir. Buradan sonuç olarak,

$$F(x) = x\left(q^{-1} - q\right) \sum_{n=1,3,5,\ldots} q^n f(q^n x) \tag{24.16}$$

elde edilecekitr. Buradan açık bir şekilde (24.16) ın sağ tarafının yakınsaması halinde yukarıdaki toplam $f(x)$ in $\tilde{q}$ – antitürevi olan $F(x)$ e yakınsayacaktır. (24.16) daki serinin yakınsaması koşulu altında $\tilde{q}$ – integrali aşağıdaki şekilde tanımlarız.

$$\int_0^a f(x)\, \tilde{d}_q x = a\left(q^{-1} - q\right) \sum_{n=1,3,5,\ldots} q^n f(q^n a) \tag{24.17}$$

Şimdi de $\tilde{q}$ – antitürevin tekliğini inceleyelim. $\tilde{D}_q G(x) = 0$ olsun. Bu durumda herhangi bir x için $n \in Z$ olmak üzere, $G(qx) = G\left(q^{-1}x\right)$ veya $G(x) = G\left(q^{2n}x\right)$ olacaktır. Eğer $G(x)$ fonksiyonu x=0 noktasında sürekli ise, $G(x)$ fonksiyonu $x \to 0$ için $G(0)$ a yakınsayacaktır ve $G(x) = G\left(q^{2n}x\right)$ olduğundan dolayı $G(x)$ sabit bir fonksiyon olacaktır. Bu yüzden q–analizde olduğu gibi, $G(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli ise $\tilde{q}$ – antitürevler sabitlerle birbirlerinden ayrılacaklardır. Eğer,

$$\int_a^b f(x)\, \tilde{d}_q x = \int_0^a f(x)\, \tilde{d}_q x - \int_0^b f(x)\, \tilde{d}_q x \tag{24.18}$$

olarak tanımlarsak,

$$\begin{aligned}\int_{q^{m+1}}^{q^{m-1}} f(x)\, d_q^{\sim} x &= \left(q^{-1}-q\right)\left(\sum_{n=1,3,5,\ldots} q^{n+m-1} f\left(q^{n+m-1}\right)-\sum_{n=1,3,5,\ldots} q^{n+m+1} f\left(q^{n+m+1}\right)\right) \\ &= \left(q^{-1}-q\right) q^{m} f\left(q^{m}\right)\end{aligned}$$

elde edilecektir. Buradan da,

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\infty} f(x)\, d_q^{\sim} x &= \sum_{m=\pm 1,\pm 3,\ldots} \int_{q^{m+1}}^{q^{m-1}} f(x)\, d_q^{\sim} x \\ &= \left(q^{-1}-q\right) \sum_{m=\pm 1,\pm 3,\ldots} q^{m} f\left(q^{m}\right)\end{aligned}$$

elde edilecektir.

BÖLÜM 25

q– Gamma ve q–Beta Fonksiyonlarının İntegral Gösterilimleri

25.1 Giriş Bölümü

"q–benzer" in ne olduğunun kesin, belirgin bir karşılığı yoktur. A matematiksel ifadesinin q– benzerinin sezgisel tanımı, bir $\{A_q\}$ ailesidir öyle ki,

$$\lim_{q\to 1} A_q = A \quad 0 < q < 1$$

olacaktır. Bazı matematiksel ifadelerin q–benzerleri tek olabilir fakat bazen aynı ifadenin birden çok q– benzeri olabilmektedir. Bu duruma örnek verecek olursak, n pozitif tam sayısının tek bir tane q– benzeri olmasına karşın, e^x exponansiyel fonksiyonunun e_q^x ve E_q^x olmak üzere iki tane q– benzeri vardır.

q– Analiz (bilinen analizin q– benzeri) bir fonksiyonun diferansiyelinin, q– benzerinin tanımıyla başlar.

$$d_q f(x) = f(qx) - f(x)$$

Bu tanımdan yararlanarak, $f(x)$ fonksiyonunun türevinin q– benzerini de yani q– türevi aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$$D_q f(x) = \frac{d_q f(x)}{d_q x} = \frac{f(qx) - f(x)}{x(q-1)} \tag{25.1}$$

Bu tanımdan yararlanarak, iki fonksiyonun çarpımının q– türevini aşağıdaki şekilde tanımlayabiliriz:

$$D_q(f(x)g(x)) = g(x)D_q f(x) + f(qx)D_q g(x) \tag{25.2}$$

q– Türev tanımından yararlanarak $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere, x^α nın q– türevinin,

$$D_q x^\alpha = \frac{1-q^\alpha}{1-q} x^{\alpha-1}$$

olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Burada,

$$[\alpha] = \frac{1-q^{\alpha}}{1-q}$$

olarak tanımlanmaktadır. $[\alpha]$ ifadesine α nın q– benzeri denir. Benzer şekilde,

$$[\infty] = \frac{1}{1-q}$$

olarak tanımlanmaktadır. Şimdi de negatif olmayan n tam sayısı için $(x+a)^n$ fonksiyonunun q– benzerinin, $(x+a)_q^n$, nasıl tanımlandığını gösterelim:

$$(x+a)_q^n = \prod_{j=0}^{n-1}\left(x+q^j a\right)$$

Buradan q– türev tanımından yararlanarak,

$$D_q\,(x+a)_q^n = [n]\,(x+a)_q^{n-1} \tag{25.3}$$

$$(x+a)_q^0 = 1$$

olduğunu kolaylıkla görebiliriz. Dikkat edecek olursak,

$$\lim_{q\to 1}(x+a)_q^n = (x+a)^n$$

olacaktır. Benzer şekilde, $(a+x)^n$ fonksiyonunun q– benzeri olan $(a+x)_q^n$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$(a+x)_q^n = \prod_{j=0}^{n-1}\left(a+q^j x\right) \tag{25.4}$$

Bu ifade de $a=1$ ve $n=\infty$ olarak alırsak,

$$(1+x)_q^{\infty} = \prod_{j=0}^{\infty}\left(1+q^j x\right) \tag{25.5}$$

elde edilir. $0<q<1$ için bu sonsuz çarpım x in her değeri için yakınsak olacaktır. Bunu gösterelim. Euler'in birinci özdeşiliğinden (10.3) yararlanarak,

$$(1+x)_q^{\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2}\frac{x^j}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty}\left|\frac{a_{j+1}}{a_j}\right| &= \lim_{j\to\infty}\left|\frac{q^{(j+1)j/2}}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^{j+1})}\frac{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)}{q^{j(j-1)/2}}\right| \\
&= \lim_{j\to\infty}\left|\frac{1}{(1-q^{j+1})}q^j\right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

olacaktır. Yakınsaklık yarıçapı $R = \frac{1}{0} = \infty$ olacağından $(1+x)_q^{\infty}$ sonsuz çarpımı x in her değeri için yakınsak olacaktır. Şimdi de herhangi bir α sayısı için $(1+x)_q^{\alpha}$ nın tanımını verelim:

$$(1+x)_q^{\alpha} = \frac{(1+x)_q^{\infty}}{(1+q^{\alpha}x)_q^{\infty}} \tag{25.6}$$

Aşağıda bazı fonksiyonların $n \in \mathbb{Z}$ $a, b, t \in \mathbb{C}$ olmak üzere q– türevleri verilmiştir.

1. $D_q\,(ax+b)_q^n = a\,[n]\,(ax+b)_q^{n-1}$
2. $D_q\,(a+bx)_q^n = b\,[n]\,(a+bqx)_q^{n-1}$
3. $D_q\,(1+bx)_q^t = b\,[t]\,(1+bqx)_q^{t-1}$

Exponansiyel fonksiyonun iki tane önemli q– benzeri aşağıda tanımlanmıştır:

$$E_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n-1)/2} \frac{x^n}{[n]!} = (1+(1-q)\,x)_q^{\infty} \tag{25.7}$$

$$e_q^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{[n]!} = \frac{1}{(1-(1-q)\,x)_q^{\infty}} \tag{25.8}$$

Burada $[n]! = [n]\,[n-1]\ldots[1]$ şeklinde tanımlanmaktadır. Ayrıca (25.7) de tanımlanan seri $|\ x\ | < \infty$ için yakınsaktır. Benzer şekilde (25.8) de tanımlanan seri ise $|\ x\ | < [\infty]$ için yakınsaktır. (25.7) ve (25.8) deki ikinci eşitlikler ise Euler'in birinci (10.3) ve ikinci özdeşliğinden (10.4) yararlanarak yazılmıştır. Euler'in birinci özdeşliği olan E_1 aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.

$$(1+x)_q^{\infty} = \sum_{j=0}^{\infty} q^{j(j-1)/2} \frac{x^j}{(1-q)\,(1-q^2)\ldots(1-q^j)}$$

Euler'in ikinci özdeşliği olan E_2 ise aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\frac{1}{(1-x)_q^{\infty}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{(1-q)\,(1-q^2)\ldots(1-q^j)}$$

Euler'in birinci özdeşliği Gauss binom formülünde $n \to \infty$ için limit alınmasıyla ve $\lim_{n\to\infty} [n] = \frac{1}{1-q}$, $\lim_{n\to\infty} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{(1-q)(1-q^2)\ldots(1-q^j)}$ ifadelerinin yerine konulmasıyla elde edilmiştir. Euler'in ikinci özdeşliği ise, $\frac{1}{(1-x)_q^n}$ nin q– Taylor açılımında, $n \to \infty$ için limit alınması ile elde edilmiştir. e_q^x, q– exponansiyel fonksiyonun q– türevi yine kendisine eşittir. Ayrıca $e_q^0 = 1$ olacağı tanımdan kolaylıkla görülmektedir. Bunlara ek olarak,

$$e_q^x = \frac{1}{(1-(1-q)\,x)_q^{\infty}}$$

ve

$$E_q^{-x} = (1-(1-q)\,x)_q^{\infty}$$

olacağından dolayı,

$$e_q^x E_q^{-x} = 1$$

olacaktır. Diğer bir q– exponansiyel fonksiyon olan E_q^x in q– türevi ise aşağıdaki gibi olacaktır:

$$D_q E_q^x = E_q^{qx}$$

Bu bölümde Euler'in gamma ve beta fonksiyonlarının q– benzerleri üzerinde çalışacağız. q– gamma ve q– beta fonksiyonları için daha ayrıntılı bilgiyi bölüm 22 de bulabilirsiniz.

Tanım 1 *q– Gamma fonksiyonu $t > 0$ için,*

$$\Gamma_q(t) = \frac{(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)^{t-1}} \tag{25.9}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

$\Gamma_q(t)$ nin ilk integral gösterilimi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{[\infty]} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x \tag{25.10}$$

q– İntegral ise aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\int_0^b f(x)\, d_q x = (1-q)\, b \sum_{j=0}^{\infty} q^j f\left(bq^j\right) \tag{25.11}$$

Yukarıdaki seri bölüm 20 deki teoremden dolayı, yani eğer $0 < q < 1$ olmak üzere $|\ f(x)\, x^{\alpha}\ |$ $(0, A]$ aralığında $0 \leq \alpha < 1$ için sınırlı ise bu seri $f(x)$ fonksiyonunun q– antitürevine yakınsamaktadır ve $x = 0$ noktasında $F(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olacaktır. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli ise q− analizin temel teoreminden,

$$\int_0^a D_q f(x)\, d_q x = f(a) - f(0) \tag{25.12}$$

$$D_q \int_0^x f(x)\, d_q x = f(x)$$

olacaktır. a ve b keyfi sayılar olmak üzere,

$$\int_a^b f(x)\, d_q x = \int_0^b f(x)\, d_q x - \int_0^a f(x)\, d_q x$$

olarak tanımlanmaktadır. Ayrıca kısmi integrasyonun q− benzeri de aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\int_a^b g(x)\, D_q f(x)\, d_q x = f(x)\, g(x) \,/_a^b - \int_a^b f(qx)\, D_q g(x) \tag{25.13}$$

Bölüm 22 de gösterdiğimiz gibi $\Gamma_q(t)$ ile $B_q(t,s)$ arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır.

$$B_q(t,s) = \frac{\Gamma_q(s)\, \Gamma_q(t)}{\Gamma_q(s+t)} \tag{25.14}$$

Tanım 2 *Beta fonksiyonunun q− benzeri olan $B_q(t,s)$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır: $t, s > 0$ için,*

$$B_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1} (1-qx)_q^{s-1}\, d_q x \tag{25.15}$$

Jackson beta fonksiyonunun daha az kullanılan bir Euler integral temsilinin q− benzerini vermeye çalışmıştır.

$$B(t,s) = \int_0^\infty \frac{x^{t-1}}{(1+x)^{t+s}} dx \tag{25.16}$$

Yukarıdaki beta fonksiyonu ilerideki bölümde tanımlayacağımız beta fonksiyonunun aşağıdaki tanımında $x \to \frac{1}{1+x}$ değişken dönüşümünün yapılmasıyla elde edilmiştir. Bunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
B(t,s) &= \int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{s-1}\,dx \\
&= -\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{1+x}\right)^{t-1}\left(1-\frac{1}{1+x}\right)^{s-1}\frac{-1}{(1+x)^2}dx \\
&= \int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x)^{t-1}}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{s-1}\frac{1}{(1+x)^2}dx \\
&= \int_0^{\infty}\frac{x^{s-1}}{(1+x)^{t+s}}dx
\end{aligned}
$$

elde edilecektir. $B(t,s)$ fonksiyonu s ve t için simetrik olduğundan buradan aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$
B(t,s) = \int_0^{\infty}\frac{x^{t-1}}{(1+x)^{t+s}}dx
$$

Şimdi de $\Gamma_q(t)$ ve $B_q(t,s)$ fonksiyonlarının, $K(x;t)$ fonksiyonuna bağlı olan bir başka q–integral gösterilimini vermeden önce $K(x;t)$ fonksiyonunu inceleyelim.

$$
K(x;t) = \frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t (1+x)_q^{1-t} \tag{25.17}
$$

şeklinde tanımlanmaktadır. $K(x;t)$ fonksiyonu t tam sayı değerleri için x ten bağımsızdır. t ~~tam~~ reel sayısı için,

$$
K(qx;t) = K(x;t)
$$

olacaktır. Bunu gösterelim:

$$
K(qx;t) = \frac{q^t x^t}{1+qx}\left(1+\frac{1}{qx}\right)_q^t (1+qx)_q^{1-t}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{qx}\right)_q^t &= \frac{1+1/qx}{1+q^t/qx}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t \\
(1+qx)_q^{1-t} &= \frac{1+q^{1-t}x}{1+x}(1+x)_q^{1-t}
\end{aligned}
$$

olacağından,

$$\begin{aligned}
K(qx;t) &= \frac{q^t x^t}{1+qx}\frac{1+1/qx}{1+q^t/qx}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t \frac{1+q^{1-t}x}{1+x}(1+x)_q^{1-t} \\
&= \frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t (1+x)_q^{1-t}\frac{1+qx}{qx+q^t}\frac{1+q^{1-t}x}{1+qx}q^t \\
&= \frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t (1+x)_q^{1-t} q^t \frac{\left(1+q^{1-t}x\right)}{q^t\left(1+xq^{1-t}\right)} \\
&= \frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t (1+x)_q^{1-t} \\
&= K(x;t)
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Ayrıca t tam sayı değeri için, $K(x;t) = q^{t(t-1)/2}$ olacaktır. Bunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
K(x,t) &= \frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t (1+x)_q^{1-t} \\
&= \frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t \frac{(1+x)_q^{\infty}}{(1+q^{1-t}x)_q^{\infty}} \\
&= \frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\ldots\left(1+\frac{q^{t-1}}{x}\right)\frac{(1+x)_q^{\infty}}{(1+q^{1-t}x)_q^{\infty}} \\
&= \frac{x^t}{1+x}\frac{1+x}{x}\frac{x+q}{x}\ldots\frac{x+q^{t-1}}{x}\frac{(1+x)(1+qx)\ldots}{(1+q^{1-t}x)(1+q^{2-t}x)\ldots(1+q^{-1}x)(1+x)\ldots} \\
&= (x+q)\left(x+q^2\right)\ldots\left(x+q^{t-1}\right)\frac{(1+x)(1+qx)\ldots}{\left(1+\frac{x}{q^{t-1}}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{q}\right)(1+x)\ldots} \\
&= (x+q)\left(x+q^2\right)\ldots\left(x+q^{t-1}\right)\frac{q^{t(t-1)/2}}{(x+q^{t-1})(x+q^{t-2})\ldots(x+q)} \\
&= q^{t(t-1)/2}
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Fakat $t \in (0,1)$ için $K(x,t)$ fonksiyonu x e bağlıdır. Çünkü,

$$\begin{aligned}
\lim_{q\to 0} K(x;t) &= \lim_{q\to 0}\frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t (1+x)_q^{1-t} \\
&= \lim_{q\to 0}\frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{q}{x}\right)_q^{t-1}(1+x)(1+qx)_q^{-t} \\
&= \frac{x^t}{1+x}\frac{x+1}{x}1+x \\
&= x^t + x^{t-1}
\end{aligned}$$

olacaktır. q– İmproper integrali aşağıdaki şekilde tanımlıyoruz.

$$\int_0^{\infty/A} f(x)\,d_q x = (1-q)\sum_{n\in Z}\frac{q^n}{A}f\left(\frac{q^n}{A}\right) \tag{25.18}$$

Bu tanıma göre q− gamma ve q− beta fonksiyonlarının $K(x;t)$ fonksiyonuna bağlı diğer q− integral gösterilimi aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\Gamma_q(t) = K(A;t) \int_0^{\infty/A(1-q)} x^{t-1} e_q^{-x} d_q x \tag{25.19}$$

$$B_q(t,s) = K(A;t) \int_0^{\infty/A} \frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}} d_q x \tag{25.20}$$

$K(A;t)$ fonksiyonu herhangi bir t değeri için A ya bağlı olacaktır. Bu formülde Jackson t tam sayısı için $K(A;t)$ yerine $q^{t(t-1)/2}$ ifadesini kullanmıştır. İlerideki bölümlerde bu fonksiyonları sıkça kullanacağız.

Şimdi de ileride sıkça kullanacağımız q− integral tanımından yararlanarak elde edilen aşağıdaki eşitliklerin nasıl elde edildiğini gösterelim:

$$\int_0^{A} f(x)\, d_q x = \int_{q/A}^{\infty/A} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) d_q x \tag{25.21}$$

$$\int_0^{\infty/A} f(x)\, d_q x = \int_0^{\infty A} \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) d_q x \tag{25.22}$$

Önce (25.21) eşitliğinin nasıl elde edildiğini gösterelim. (25.11) ve (25.18) den yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\int_{q/A}^{\infty/A} \frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x}) d_q x &= \int_0^{\infty/A} \frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x}) d_q x - \int_0^{q/A} \frac{1}{x^2} f(\frac{1}{x}) d_q x \\
&= (1-q) \sum_{n\in Z} \frac{q^n}{A} \frac{A^2}{q^{2n}} f(\frac{A}{q^n}) - (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n+1}}{A} f(\frac{A}{q^{n+1}}) \frac{A^2}{q^{2n+2}} \\
&= (1-q) \sum_{n\in Z} \frac{A}{q^n} f(\frac{A}{q^n}) - (1-q) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A}{q^{n+1}} f(\frac{A}{q^{n+1}}) \\
&= \sum_{n=0}^{-\infty} (1-q) \frac{A}{q^n} f(\frac{A}{q^n}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (1-q) A q^n f(A q^n) \\
&= \int_0^{A} f(x) d_q x
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Şimdi de (25.22) eşitliğinin nasıl elde edildiğini gösterelim:

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty/A} f(x)d_qx &= \sum_{n\in Z}\int_{q^{n+1}/A}^{q^n/A} f(x)d_qx \\ &= \sum_{n\in Z}(1-q)\frac{q^n}{A}f(\frac{q^n}{A})\end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty A} \frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})d_qx &= \sum_{n\in Z}\int_{q^{n+1}A}^{q^nA} \frac{1}{x^2}f(\frac{1}{x})d_qx \\ &= \sum_{n\in Z}(1-q)q^nA\frac{1}{q^{2n}A^2}f(\frac{1}{q^nA}) \\ &= (1-q)\sum_{n\in Z}\frac{1}{q^nA}f(\frac{1}{q^nA}) \\ &= \int_0^{\infty/A} f(x)d_qx\end{aligned}$$

olacaktır. Bölüm 25.6 da (25.19) ifadesinin aşağıda tanımlanan Jacobi üçlü çarpım formülüne,

$$(1-q)_q^\infty(1-x)_q^\infty(1-\frac{q}{x})_q^\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n$$

(25.20) ifadesinin ise aşağıda tanımlanan Ramanujan çarpım formülüne denk olduklarını göstereceğiz.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(1-a)q^n}{(1-b)q^n}x^n = \frac{(1-q)_q^\infty(1-\frac{b}{a})_q^\infty(1-ax)_q^\infty(1-\frac{q}{ax})_q^\infty}{(1-b)_q^\infty(1-\frac{q}{a})_q^\infty(1-x)_q^\infty(1-\frac{b}{ax})_q^\infty}$$

Bölüm 25.2 de $B(t,s)$ ve $\Gamma(t)$ fonksiyonlarını ve q− benzerlerini tanımlayıp q− gamma ve q− beta fonksiyonlarının özelliklerini inceleyeceğiz. Bölüm 25.3, Bölüm 25.4 ve Bölüm 25.5 de gamma ve beta fonksiyonlarının diğer q− benzerini inceleyeceğiz. Bölüm 25.6 ise $\Gamma_q(t)$ ve $B_q(t,s)$ nin matematikte çok önemli olan Jacobi üçlü çarpım formülü ile Ramanujan çarpım formülüne denk olduklarını göstereceğiz.

25.2 q– Gamma ve q– Beta Fonksiyonlarının Tanımı

Euler'in gamma ve beta fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır. $t, s > 0$ olmak üzere,

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx \tag{25.23}$$

$$B(t,s) = \int_0^1 x^{t-1} (1-x)^{s-1} dx \tag{25.24}$$

$$B(t,s) = \int_0^\infty \frac{x^{t-1}}{(1+x)^{t+s}} dx \tag{25.25}$$

(25.24) ifadesinden anlaşılacağı gibi $B(t,s)$ fonksiyonu s ve t için simetriktir. $B(t,s) = B(s,t)$ olacaktır. Aşağıda gamma ve beta fonksiyonlarının temel özellikleri verilmiştir:

$$\Gamma(t+1) = t\Gamma(t) \tag{25.26}$$

$$B(t,s) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)} \tag{25.27}$$

Tanım 3 *$t > 0$ için q– gamma fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:*

$$\Gamma_q(t) = \int_0^{[\infty]} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x \tag{25.28}$$

Tanım 4 *$s, t > 0$ için q– beta fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:*

$$B_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1} (1-qx)_q^{s-1} d_q x \tag{25.29}$$

Yukarıda tanımlanan $\Gamma_q(t)$ ve $B_q(t,s)$ fonksiyonları gamma ve beta fonksiyonlarının doğru q– benzerleridir. Çünkü $q \to 1$ için $B_q(t,s)$ ve $\Gamma_q(t)$ fonksiyonlarının limitleri alındığı zaman sırasıyla beta ve gamma fonksiyonları elde edilecektir. Ayrıca bölüm 22 de bahsettiğimiz gibi $B_q(t,s)$ ve $\Gamma_q(t)$ fonksiyonları (25.26) ve(25.27) ifadelerinin q– benzerlerini sağlamaktadırlar.

Teorem 5 *a) $\Gamma_q(t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi de ifade edebiliriz:*

$$\Gamma_q(t) = \frac{(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)^{t-1}} \tag{25.30}$$

Ayrıca $\forall t > 0$ için,

$$\Gamma_q(t+1) = [t]\,\Gamma_q(t)$$

$$\Gamma_q(1) = 1$$

olacaktır.

b) q– gamma ve q– beta fonksiyonları arasında aşağıdaki gibi bir ilişki vardır:

$$\Gamma_q(t) = \frac{B_q(t,\infty)}{(1-q)^t} \tag{25.31}$$

$$B_q(t,s) = \frac{\Gamma_q(t)\,\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)} \tag{25.32}$$

İspat. Önce (25.31) ifadesinin ıspatıyla başlayalım.

$$E_q^x = (1+(1-q)\,x)_q^\infty$$

olduğuna göre,

$$E_q^{\frac{-qx}{1-q}} = (1-qx)_q^\infty$$

olacaktır. (25.29) da $s=\infty$ olarak seçelim. Daha sonra da $x=(1-q)\,y$ dönüşümü yapalım.

$$\begin{aligned}
B_q(t,\infty) &= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^\infty\,d_qx \\
&= \int_0^1 x^{t-1}E_q^{\frac{-qx}{1-q}}\,d_qx \\
&= \int_0^{1/1-q} (1-q)^{t-1}\,y^{t-1}E_q^{-qy}\,(1-q)\,d_qy \\
&= \int_0^{1/1-q} (1-q)^t\,y^{t-1}E_q^{-qy}d_qy \\
&= (1-q)^t\,\Gamma_q(t)
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Şimdi de (25.30) ifadesinin ıspatını yapalım. (25.13) de tanımlanan kısmi q– integrasyondan yararlanarak,

$$\begin{aligned}
B_q(t+1,s) &= \int_0^1 x^t\,(1-qx)_q^{s-1}\,d_qx \\
&= \frac{-1}{[s]}\int_0^1 x^tD_q\,(1-x)_q^s\,d_qx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{[s]}\int_0^1 (1-qx)_q^s D_q x^t d_q x \\
&= \frac{1}{[s]}\int_0^1 [t]\,(1-qx)_q^s x^{t-1} d_q x \\
&= \frac{[t]}{[s]}\int_0^1 (1-qx)_q^s x^{t-1} d_q x \\
&= \frac{[t]}{[s]} B_q(t,s+1)
\end{aligned}
$$

elde edilecekitr. Benzer şekilde,

$$
\begin{aligned}
B_q(t,s+1) &= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^s d_q x \\
&= \int_0^1 x^{t-1}(1-q^s x)(1-qx)_q^{s-1} d_q x \\
&= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1} d_q x - q^s \int_0^1 x^t (1-qx)_q^{s-1} d_q x \\
&= B_q(t,s) - q^s B_q(t+1,s)
\end{aligned}
$$

Sonuç olarak,

$$
B_q(t,s+1) = \frac{[s]}{[s+t]} B_q(t,s)
$$

ve

$$
B_q(t,1) = \frac{1}{[t]}
$$

elde edileceğinden buradan yararlanarak aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$
\begin{aligned}
B_q(t,2) &= \frac{1-q}{1-q^{1+t}} B_q(t,1) = \frac{1-q}{1-q^{1+t}}\frac{1}{[t]} \\
B_q(t,3) &= \frac{1-q^2}{1-q^{2+t}} B_q(t,2) = \frac{(1-q)\left(1-q^2\right)}{\left(1-q^{1+t}\right)\left(1-q^{2+t}\right)}\frac{1}{[t]} \\
&\vdots \\
B_q(t,n) &= \frac{(1-q)\left(1-q^2\right)\ldots\left(1-q^{n-1}\right)}{\left(1-q^{1+t}\right)\left(1-q^{2+t}\right)\ldots\left(1-q^{t+n-1}\right)}\frac{1}{[t]} \\
&= \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}}{\left(1-q^t\right)_q^n}
\end{aligned}
$$

Buradan $t > 0, n \in \mathbb{Z}^+$ için aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$B_q(t,n) = (1-q)\frac{(1-q)_q^{n-1}(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)_q^{t+n-1}} \tag{25.33}$$

Bu ifadenin $n \to \infty$ için limitini alacak olursak,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} B_q(t,n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{(1-q)(1-q)_q^{\infty}\left(1-q^{t+n}\right)_q^{\infty}}{(1-q^n)_q^{\infty}(1-q^t)_q^{\infty}} \\
&= \frac{(1-q)(1-q)_q^{\infty}}{(1-q^t)_q^{\infty}} \\
&= (1-q)(1-q)_q^{t-1}
\end{aligned}$$

sonuç olarak,

$$B_q(t,\infty) = (1-q)(1-q)_q^{t-1}$$

elde edilecektir. Buradan,

$$\begin{aligned}
\Gamma_q(t) &= \frac{B_q(t,\infty)}{(1-q)^t} \\
&= \frac{(1-q)(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)^t} \\
&= \frac{(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)^{t-1}}
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Ayrıca buradan yararlanarak $t > 0$ için aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{aligned}
\Gamma_q(t+1) &= \frac{(1-q)_q^t}{(1-q)^t} \\
&= \frac{(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)^{t-1}}[t] \\
&= [t]\,\Gamma_q(t)
\end{aligned}$$

Şimdi de (25.32) ifadesini ıspatlayalım. Burada $a = q^s$ ve $b = q^t$ olarak gösterelim. Önce (25.32) ifadesinin sol tarafını ele alalım.

$$\begin{aligned}
B_q(t,s) &= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1}\,d_qx \\
&= \int_0^1 x^{t-1}\frac{(1-qx)_q^{\infty}}{(1-q^sx)_q^{\infty}}d_qx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty}(1-q)\,q^{n}\,(q^{n})^{t-1}\,\frac{(1-q^{n+1})_q^{\infty}}{(1-q^{s+n})_q^{\infty}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(1-q)\,(q^{t})^{n}\,\frac{(1-q^{n+1})_q^{\infty}}{(1-q^{s+n})_q^{\infty}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(1-q)\,b^{n}\,\frac{(1-q^{n+1})_q^{\infty}}{(1-aq^{n})_q^{\infty}}
\end{aligned}
$$

olacaktır. Şimdi de (25.32) ifadesinin sağ tarafını ele alalım. (25.30) dan yararlanarak,

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma_q(t)\,\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)} &= \frac{(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)^{t-1}}\frac{(1-q)_q^{s-1}}{(1-q)^{s-1}}\frac{(1-q)^{t+s-1}}{(1-q)_q^{t+s-1}} \\
&= (1-q)\,\frac{(1-q)_q^{\infty}}{(1-q^{t})_q^{\infty}}\frac{(1-q)_q^{\infty}}{(1-q^{s})_q^{\infty}}\frac{(1-q^{t+s})_q^{\infty}}{(1-q)_q^{\infty}} \\
&= \frac{(1-q)\,(1-q)_q^{\infty}\,(1-ab)_q^{\infty}}{(1-a)_q^{\infty}\,(1-b)_q^{\infty}}
\end{aligned}
$$

elde edilecektir. Dikkat edecek olursak, elde ettiğimiz bu iki eşitliği katsayıları a ve b nin rasyonel bir fonksiyonu olan q nun bir kuvvet serisi olarak düşünebiliriz. Bu iki kuvvet serisi (25.30) ve (25.33) den dolayı $t > 0$ $s \in \mathbb{Z}^{+}$ için birbirlerine eşit olacaklarından, $a = q^{s}$ $s \in \mathbb{Z}^{+}$ için iki kuvvet serisi sonsuz çoklukta a değeri için birbirlerine eşit olacaklardır. Bu yüzden $t, s > 0$ için kuvvet serileri birbirlerine eşit olacaklardır. ∎

25.3 q– Gamma ve q– Beta Fonksiyonlarının Diğer Tanımları

Bir önceki bölümde $\Gamma_q(t)$ q– gamma fonksiyonunu Euler'in gamma fonksiyonunda, e^{-x} yerine q– benzeri olan E_q^{-qx} değerini koyarak q– integral ile aşağıdaki şekilde tanımlamıştık.

$$
\Gamma_q(t) = \int_{0}^{[\infty]} x^{t-1} E_q^{-qx} d_q x
$$

Aceba bu kez Euler'in gamma fonksiyonunda, exponansiyel fonksiyonun diğer q– benzeri olan e_q^{-x} ifadesini alırsak yeni q– gamma fonksiyonu nasıl olacaktır? Benzer şekilde daha önceki bölümde q– beta fonksiyonunu (25.24) de tanımlanan beta fonksiyonunun q– benzeri olarak tanımlamıştık. Aceba beta fonksiyonunun diğer bir gösterilimi olan ve (25.25) de tanımlanan fonksiyonun q– benzeri nasıl olacaktır? Bu bölümde bu sorulara cevap arayacağız. Önce aşağıdaki tanımları verelim.

Tanım 6 $A > 0$ *için,*

$$\gamma_q^{(A)}(t) = \int_0^{\infty/A(1-q)} x^{t-1} e_q^{-x} d_q x \tag{25.34}$$

Tanım 7 $A > 0$ *için,*

$$\beta_q^{(A)}(t,s) = \int_0^{\infty/A} \frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}} d_q x \tag{25.35}$$

Bu bölümde ayrıca $\gamma_q^{(A)}(t)$ ile $\beta_q^{(A)}(t,s)$ arasındaki ilişkiyi de inceleyeceğiz. Teorem 5 in ıspatından yararlanarak $\gamma_q^{(A)}(t)$ ile $\beta_q^{(A)}(t,s)$ arasındaki ilişkiyi göstermeye çalışalım. Teorem 5 in ıspatında kullandığımız temel üç adım aşağıda listelenmiştir.

1. $B_q(t,s)$ nin tanımında $s = \infty$ alarak $B_q(t,\infty)$ elde edilmiştir.

2. Kısmi q− integrasyondan yararlanarak $B_q(t,s)$ fonksiyonunun $B_q(t+1,s)$ ve $B_q(t,s+1)$ ile olan ilişkisi gösterilmiştir.

3. $B_q(t,s)$ fonksiyonunu katsayıları $a = q^s$ ve $b = q^t$ nin rasyonel fonksiyonu olan q nun bir kuvvet serisi olarak düşünülmüştür.

ADIM 1: $\beta_q^{(A)}(t,s)$ fonksiyonunun $s \to \infty$ için limitini alalım. Sonra $x = (1-q)y$ olacak şekilde değişken dönüşümü yapalım.

$$e_q^x = \frac{1}{(1-(1-q)x)_q^\infty}$$

olduğuna göre,

$$e_q^{\frac{-x}{(1-q)}} = \frac{1}{(1+x)_q^\infty}$$

olacaktır. Bunu da göz önüne alarak işlemlerimize başlayalım.

$$\begin{aligned}
\beta_q^{(A)}(t,\infty) &= \int_0^{\infty/A} \frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^\infty} d_q x = \int_0^{\infty/A} x^{t-1} e_q^{\frac{-x}{1-q}} d_q x \\
&= \int_0^{\infty/A(1-q)} (1-q)^{t-1} y^{t-1} e_q^{-y} (1-q)\, d_q y \\
&= (1-q)^t \int_0^{\infty/A(1-q)} y^{t-1} e_q^{-y} d_q y \\
&= (1-q)^t \gamma_q^{(A)}(t)
\end{aligned}$$

olacaktır. Buradan aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$\gamma_q^{(A)}(t) = \frac{1}{(1-q)^t}\beta_q^{(A)}(t,\infty) \tag{25.36}$$

ADIM 2: Bu adımda yine $\gamma_q^{(A)}(t)$ ile $\beta_q^{(A)}(t,s)$ arasındaki bir başka ilişkiyi gösterelim. (25.13) de tanımlanan kısmi q– integrasyondan yararlanarak,

$$\gamma_q^{(A)}(t+1) = q^{-t}[t]\,\gamma_q^{(A)}(t) \tag{25.37}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\gamma_q^{(A)}(t+1) &= \int_0^{\infty/A(1-q)} x^t e_q^{-x} d_q x \\
&= \frac{1}{[t+1]} \int_0^{\infty/A(1-q)} e_q^{-x} D_q x^{t+1} d_q x \\
&= \frac{1}{[t+1]} \int_0^{\infty/A(1-q)} q^{t+1} x^{t+1} e_q^{-x} d_q x \\
&= \frac{q^{t+1}}{[t+1]}\gamma_q^{(A)}(t+2)
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Yukarıdaki ifadede $t \to t-1$ olarak alırsak,

$$\gamma_q^{(A)}(t+1) = q^{-t}[t]\,\gamma_q^{(A)}(t)$$

elde edilecektir.

$$\lim_{x\to\infty} e_q^{-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{E_q^x} = 0$$

ve

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} x^t e_q^{-x} &= 0 \\
\lim_{x\to\infty} x^t e_q^{-x} &= 0
\end{aligned}$$

olacaktır. Bu ifadeleri de ele alarak (25.37) den yararlanarak aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$\gamma_q^{(A)}(1) = \int_0^{\infty/A(1-q)} e_q^{-x} d_q x = 1$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_q^{(A)}(2) &= q^{-1}[1]\,\gamma_q^{A}(1)\\
\gamma_q^{(A)}(3) &= q^{-2}[2]\,\gamma_q^{A}(2)\\
&= q^{-2}q^{-1}[2]\,[1]\,\gamma_q^{A}(1)\\
\gamma_q^{(A)}(4) &= q^{-3}[3]\,\gamma_q^{A}(3)\\
&= q^{-3}q^{-2}q^{-1}[3]\,[2]\,[1]\,\gamma_q^{A}(1)\\
&\vdots\\
\gamma_q^{(A)}(n) &= q^{-n(n-1)/2}[n-1]!
\end{aligned}
$$

Sonuç olarak $n \in \mathbb{Z}^{+}$ için,

$$
q^{n(n-1)/2}\gamma_q^{(A)}(n) = [n-1]! = \Gamma_q(n) \tag{25.38}
$$

elde edilecektir.

Önerme 8 *α ve β herhangi keyfi sayıları için,*

$$
D_q\frac{x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta}} = [\alpha]\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)_q^{\beta+1}} - ([\beta]-[\alpha])\frac{x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta+1}}
$$

İspat. q- Türev tanımını kullanarak,

$$
\begin{aligned}
D_q\frac{x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta}} &= \left(\frac{(qx)^{\alpha}}{(1+qx)_q^{\beta}} - \frac{x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta}}\right)\frac{1}{x(q-1)}\\
&= \frac{q^{\alpha}x^{\alpha}}{x(1+qx)_q^{\beta}(q-1)} - \frac{x^{\alpha}}{x(1+x)_q^{\beta}(q-1)}\\
&= \frac{q^{\alpha}x^{\alpha-1}}{(1+qx)_q^{\beta}(q-1)} - \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)_q^{\beta}(q-1)}\\
&= \frac{q^{\alpha}x^{\alpha-1}(1+x)}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)} - \frac{(1+q^{\beta}x)\,x^{\alpha-1}}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)}\\
&= \frac{q^{\alpha}x^{\alpha-1}}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)} + \frac{q^{\alpha}x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)} - \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)} - \frac{x^{\alpha}q^{\beta}}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)}\\
&\quad - \frac{x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)} + \frac{x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)}\\
&= \frac{[\alpha]\,x^{\alpha-1}}{(1+x)_q^{\beta+1}} + \frac{x^{\alpha}(q^{\alpha}-1)}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)} - \frac{x^{\alpha}(q^{\beta}-1)}{(1+x)_q^{\beta+1}(q-1)}\\
&= \frac{[\alpha]\,x^{\alpha-1}}{(1+x)_q^{\beta+1}} - ([\beta]-[\alpha])\frac{x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta+1}}
\end{aligned}
$$

elde edilecektir. ■

(25.13) de tanımlanan kısmi q− integrasyondan ve yukarıdaki önermeden yararlanarak $t, s > 0$ için,

$$\begin{aligned}
\beta_q^{(A)}(t+1,s) &= \frac{-1}{[t+s]}q^{-t}\int_0^{\infty/A}(qx)^t D_q\frac{1}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx \\
&= \frac{1}{[t+s]}q^{-t}\int_0^{\infty/A}\frac{1}{(1+x)_q^{t+s}}D_qx^t d_qx \\
&= \frac{[t]}{[t+s]}q^{-t}\beta_q^{(A)}(t,s)
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Sonuç olarak,

$$\beta_q^{(A)}(t+1,s) = \frac{[t]}{[t+s]}q^{-t}\beta_q^{(A)}(t,s) \tag{25.39}$$

yazabiliriz. $t = 1$ için,

$$\begin{aligned}
\beta_q^{(A)}(1,s) &= \int_0^{\infty/A}\frac{1}{(1+x)_q^{1+s}}d_qx \\
&= \frac{1}{[s]}\int_0^{\infty/A}D_q\frac{-1}{(1+x)_q^s}d_qx \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{[s]}\frac{1}{\left(1+\frac{q^N}{A}\right)_q^s} - \lim_{N\to\infty}\frac{1}{[s]}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{Aq^N}\right)_q^s} \\
&= \frac{1}{[s]}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\beta_q^{(A)}(1,s) = \frac{1}{[s]} \tag{25.40}$$

elde edilecektir. Burada $N \in \mathbb{Z}$ olmak üzere aşağıdaki tanımdan yararlanılmıştır:

$$\int_0^{\infty/A}D_qF(x)\,d_qx = \lim_{N\to\infty}F\left(\frac{1}{Aq^N}\right) - \lim_{N\to\infty}F\left(\frac{q^N}{A}\right)$$

(25.39) ve (25.40) dan yararlanarak $s > 0$ $n \in \mathbb{Z}^+$ için aşağıdaki ifadeleri elde ederiz.

$$\begin{aligned}
\beta_q^{(A)}(2,s) &= q^{-1}\frac{[1]}{[1+s]}\beta_q^{(A)}(1,s) \\
&= q^{-1}\frac{[1]}{[1+s]}\frac{1}{[s]} \\
\beta_q^{(A)}(3,s) &= q^{-2}\frac{[2]}{[2+s]}\beta_q^{(A)}(2,s) \\
&= q^{-2}\frac{[2]}{[2+s]}q^{-1}\frac{[1]}{[1+s]}\frac{1}{[s]} \\
&\vdots \\
\beta_q^{(A)}(n,s) &= q^{-n(n-1)/2}\frac{[n-1]!}{[s][s+1]\ldots[s+n-1]}
\end{aligned}$$

Ayrıca (25.33) ifadesini kullanarak,

$$\begin{aligned}
q^{n(n-1)/2}\beta_q^{(A)}(n,s) &= \frac{[n-1][n-2]\ldots[1]}{[s][s+1]\ldots[s+n-1]} \\
&= \frac{(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})\ldots(1-q)(1-q)}{(1-q^{s})(1-q^{s+1})\ldots(1-q^{s+n-1})} \\
&= \frac{(1-q)(1-q)_q^{n-1}(1-q)_q^{s-1}}{(1-q)_q^{s+n-1}} \\
&= B_q(n,s)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$q^{n(n-1)/2}\beta_q^{(A)}(n,s) = B_q(n,s) \tag{25.41}$$

elde edilecektir. (25.13) de tanımlanan kısmi q– integrasyon tanımından ve önerme 8 den yararlanarak,

$$\begin{aligned}
\beta_q^{(A)}(t,s+1) &= \int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s+1}}d_qx \\
&= \frac{1}{[t+s]}q^{s}\int_0^{\infty/A}\frac{1}{(qx)^{s}}D_q\frac{x^{t+s}}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx \\
&= \frac{-q^{s}}{[t+s]}\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t+s}}{(1+x)_q^{t+s}}D_q\frac{1}{x^{s}}d_qx \\
&= \frac{[s]}{[t+s]}\beta_q^{(A)}(t,s)
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\beta_q^{(A)}(t,s+1) = \frac{[s]}{[t+s]}\beta_q^{(A)}(t,s) \tag{25.42}$$

elde edilecektir. Şimdi de $\beta_q^{(A)}(t,1)$ değerini bulmaya çalışalım. $\beta_q^{(A)}(t,s)$ nin tanımından ve önerme 8 den yararlanarak,

$$\beta_q^{(A)}(t,1)=\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+1}}d_qx=\frac{1}{[t]}\int_0^{\infty/A}D_q\frac{x^t}{(1+x)_q^t}d_qx \tag{25.43}$$

elde edilecektir. Bu ifadenin sağ tarafını aşağıda gösterilen şekilde düzenleyelim:

$$\begin{aligned}\beta_q^{(A)}(t,1)&=\frac{1}{[t]}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{(Aq^N)^t\left(1+\frac{1}{Aq^N}\right)_q^t}-\frac{1}{[t]}\lim_{N\to\infty}\frac{\left(q^N\right)^t}{A^t\left(1+\frac{q^N}{A}\right)_q^t}\\&=\frac{1}{[t]}\left(\lim_{N\to\infty}\left(Aq^N\right)^t\left(1+\frac{1}{Aq^N}\right)_q^t\right)^{-1}\end{aligned}$$

Sonuç olarak;

$$\beta_q^{(A)}(t,1)=\frac{1}{[t]}\left(\lim_{N\to\infty}\left(Aq^N\right)^t\left(1+\frac{1}{Aq^N}\right)_q^t\right)^{-1} \tag{25.44}$$

elde edilecektir. Şimdi ise yukarıdaki limit değerinin $K(A;t)$ fonksiyonuna eşit olduğunu gösterelim:

$$\begin{aligned}A^t\lim_{N\to\infty}q^{Nt}\frac{\left(1+\frac{1}{Aq^N}\right)_q^\infty}{\left(1+\frac{q^t}{Aq^N}\right)_q^\infty}&=A^t\lim_{N\to\infty}\frac{q^{Nt}\left(1+\frac{q^{-N}}{A}\right)\cdots\left(1+\frac{q^{-1}}{A}\right)\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^\infty}{\left(1+\frac{q^{t-N}}{A}\right)\cdots\left(1+\frac{q^{t-1}}{A}\right)\left(1+\frac{q^t}{A}\right)_q^\infty}\\&=A^t\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t\lim_{N\to\infty}q^{Nt}\frac{\left(A+q^{-N}\right)\cdots\left(A+q^{-1}\right)}{\left(A+q^{t-N}\right)\cdots\left(A+q^{t-1}\right)}\\&=A^t\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t\lim_{N\to\infty}q^{Nt}\frac{\left(1+Aq^N\right)\cdots(1+Aq)\,q^{\frac{-N(N-1)}{2}+N^2-Nt}}{\left(1+Aq^{N-t}\right)\cdots\left(1+Aq^{1-t}\right)q^{\frac{-N(N-1)}{2}+N^2}}\\&=A^t\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t\lim_{N\to\infty}\frac{(1+Aq)\cdots\left(1+Aq^{-t}\right)\left(1+Aq^{1-t}\right)\cdots\left(1+Aq^N\right)}{\left(1+Aq^{1-t}\right)\cdots\left(1+Aq^{N-t}\right)}\\&=A^t\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t(1+qA)\left(1+q^2A\right)\cdots\left(1+q^{-t}A\right)\frac{1+A}{1+A}\\&=\frac{A^t}{1+A}\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t(1+A)_q^{-t+1}\\&=K(A;t)\end{aligned}$$

elde edilecektir. (25.42) ve (25.44) den yararlanarak $t>0$ $s\in\mathbb{Z}^+$ için aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$\begin{aligned}
\beta_q^{(A)}(t,2) &= \frac{[1]}{[1+t]}\beta_q^{(A)}(t,1)\\
&= \frac{[1]}{[1+t]}\left(K(A;t)\right)^{-1}\frac{1}{[t]}\\
\beta_q^{(A)}(t,3) &= \frac{[2]\,[1]}{[t]\,[1+t]\,[2+t]}\left(K(A;t)\right)^{-1}\\
&\vdots\\
\beta_q^{(A)}(t,s) &= \frac{[s-1]!}{[t]\,[t+1]\ldots[t+s-1]}\left(K(A;t)\right)^{-1}\\
&= \frac{(1-q)\,(1-q)_q^{s-1}\,(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)_q^{t+s-1}}\left(K(A;t)\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$K(A;t)\,\beta_q^{(A)}(t,s) = (1-q)\,\frac{(1-q)_q^{s-1}\,(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)_q^{t+s-1}} = B_q(t,s) \tag{25.45}$$

Önerme 9 *1.* $\forall x,t\in\mathbb{R}$ *için*

$$\lim_{q\to1}K(x;t)=1$$

ve $\forall t\in(0,1)$, $x\in\mathbb{R}$ *için*

$$\lim_{q\to0}K(x;t)=x^t+x^{t-1}$$

olacaktır.

2. $K(x;t)$ *fonksiyonunu* t *nin bir fonksiyonu olarak düşünürsek,*

$$K(x;t+1)=q^tK(x;t)$$

olacaktır. Buradan açık bir şekilde $K(x;0)=K(x;1)=1$ *olacaktır. Ayrıca herhangi bir* n *pozitif tam sayısı için,*

$$K(x;n)=q^{n(n-1)/2}$$

olacaktır.

3. $K(x;t)$ *fonksiyonunu* x *in bir fonksiyonu olarak düşünürsek,*

$$D_qK(x;t)=0\quad\forall x,t\in\mathbb{R}$$

olacağından $K(x;t)$ fonksiyonu bir $q-$ sabiti olacaktır. Başka bir değişle, $\forall n \in \mathbb{Z}$ için

$$K(q^n x;t) = K(x;t)$$

olacaktır.

İspat. 1-

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 1} K(x;t) &= \lim_{q\to 1} \frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t (1+x)_q^{1-t} \\ &= \frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^t (1+x)^{1-t} \\ &= 1\end{aligned}$$

olacaktır. $\forall t \in (0,1)$, $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned}\lim_{q\to 0} K(x;t) &= \lim_{q\to 0} \frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t (1+x)_q^{1-t} \\ &= \lim_{q\to 0} \frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{q}{x}\right)_q^{t-1} (1+x)(1+qx)_q^{-t} \\ &= \frac{x^t}{1+x}\frac{x+1}{x}1+x \\ &= x^t + x^{t-1}\end{aligned}$$

elde edilecektir.

2- Buradaki ıspatı yaparken aşağıdaki eşitlikten yararlanacağız.

$$(1+y)_q^{\alpha+1} = (1+q^\alpha y)(1+y)_q^\alpha$$

$K(x;t)$ fonksiyonunun tanımından yararlanarak,

$$\begin{aligned}K(x;t+1) &= \frac{x^{t+1}}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^{t+1} (1+x)_q^{-t} \\ &= \frac{x^{t+1}}{1+x}\left(1+\frac{q^t}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t (1+x)_q^{-t} \\ &= x\left(1+\frac{q^t}{x}\right)\frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t (1+x)(1+qx)\ldots(1+xq^{-t-1})\frac{(1+xq^{-t})}{(1+xq^{-t})} \\ &= x\left(1+\frac{q^t}{x}\right)\frac{1}{1+xq^{-t}}\frac{x^t}{1+x}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^t (1+x)_q^{1-t} \\ &= x\frac{\left(1+\frac{q^t}{x}\right)}{(1+xq^{-t})}K(x;t) \\ &= q^t K(x;t)\end{aligned}$$

elde edilecektir. Daha önce herhangi bir n tam sayısı için,

$$K(x;n) = q^{n(n-1)/2}$$

olduğunu göstermiştik. $t = 0$ için $K(x;t+1) = q^t K(x;t)$ eşitliğinden yararlanarak,

$$K(x;0) = K(x;1) = 1$$

olacaktır.

3- Giriş bölümünde

$$K(qx;t) = K(x;t)$$

olduğunu göstermiştik. Bu eşitlikte $x = qx$ için,

$$K\left(q^2x;t\right) = K(qx;t) = K(x;t)$$

olacaktır. Benzer şekilde $x = qx$ için bu işlemi n defa yaparsak,

$$K(x;t) = K(qx;t) = K\left(q^2x;t\right) = ... = K(q^nx;t)$$

elde edilecektir.

$$K(qx;t) = K(x;t)$$

olduğundan dolayı q– türevin tanımından $D_qK(x;t) = 0$ olacağı açıktır. Buradan $K(x;t)$ fonksiyonunun bir q– sabiti olduğunu söyleriz. $K(x;t)$ fonksiyonu sabit bir fonksiyon olmamasına rağmen q– türevi sıfır olan ilginç bir fonksiyondur. ∎

ADIM 3: (25.41) ve(25.45) ifadelerinden $A > 0$ için t veya s den biri pozitif tam sayı olduğu zaman,

$$K(A;t)\,\beta_q^{(A)}(t,s) = B_q(t,s) \tag{25.46}$$

olduğunu görüyoruz. Çünkü $t \in \mathbb{Z}^+$ $s > 0$ ise,

$$q^{t(t-1)/2}\beta_q^{(A)}(t,s) = B_q(t,s)$$

olacaktır. Ayrıca $s \in \mathbb{Z}^+$ $t > 0$ ise,

$$K(A;t)\,\beta_q^{(A)}(t,s) = B_q(t,s)$$

olacaktır. Bu adımda amacımız (25.46) ifadesinin $t, s > 0$ içinde sağlandığını göstermektir.

Teorem 10 *Her $A,t,s>0$ için,*

$$K(A;t)\,\gamma_q^{(A)}(t)=\Gamma_q(t) \tag{25.47}$$

$$K(A;t)\,\beta_q^{(A)}(t,s)=B_q(t,s) \tag{25.48}$$

İspat. Önce (25.47) nin ıspatı ile başlayalım. $A,t>0$ için aşağıdaki eşitliklerin sağlandığını daha önce göstermiştik.

$$\begin{aligned}\Gamma_q(t) &= \frac{B_q(t,\infty)}{(1-q)^t}\\ \gamma_q^{(A)}(t) &= \frac{\beta_q^{(A)}(t,\infty)}{(1-q)^t}\\ K(A;t)\,\beta_q^{(A)}(t,n) &= B_q(t,n)\end{aligned}$$

Buradaki son eşitlikte $n=\infty$ olarak alırsak,

$$\begin{aligned}\Gamma_q(t) &= \frac{B_q(t,\infty)}{(1-q)^t}\\ &= \frac{K(A;t)\,\beta_q^{(A)}(t,\infty)}{(1-q)^t}\\ &= \frac{K(A;t)\,(1-q)^t\,\gamma_q^{(A)}(t)}{(1-q)^t}\\ &= K(A;t)\,\gamma_q^{(A)}(t)\end{aligned}$$

elde edilecektir. Şimdi de (25.48) in ıspatını yapalım.

$$K(A;t)\,\beta_q^{(A)}(t,s)=\frac{A^t}{1+A}\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t(1+A)_q^{1-t}\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx$$

Burada $y=Ax$ dönüşümü yapalım.

$$\begin{aligned}K(A;t)\,\beta_q^{(A)}(t,s) &= \frac{A^t}{1+A}\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t(1+A)_q^{1-t}\int_0^{\infty/1}\frac{y^{t-1}}{A^t}\frac{1}{\left(1+\frac{y}{A}\right)_q^{t+s}}d_qy \qquad (25.49)\\ &= \frac{1}{1+A}\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t(1+A)_q^{1-t}\int_0^{\infty/1}\frac{y^{t-1}}{\left(1+\frac{y}{A}\right)_q^{t+s}}d_qy\end{aligned}$$

elde edilecektir. $A>0$ ve $b=q^t$ için integralin önündeki ifadeyi aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\frac{1}{1+A}\frac{\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^\infty}{\left(1+\frac{b}{A}\right)_q^\infty}\frac{(1+A)_q^\infty}{\left(1+\frac{qA}{b}\right)_q^\infty}$$

Dikkat edecek olursak yukarıdaki ifadeyi katsayısı b nin rasyonel bir fonksiyonu olan q nun bir kuvvet serisi olarak düşünebiliriz. (25.49) daki integrali aşağıdaki gibi iki integralin toplamı şeklinde parçalayabiliriz.

$$\int_0^1 \frac{y^{t-1}}{\left(1+\frac{y}{A}\right)_q^{t+s}} d_q y + \int_1^{\infty/1} \frac{y^{t-1}}{\left(1+\frac{y}{A}\right)_q^{t+s}} d_q y \tag{25.50}$$

Bu ifadedeki ilk integrali katsayıları $a = q^s$ ve $b = q^t$ nin rasyonel fonksiyonu olan q nun bir kuvvet serisi olarak ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{y^{t-1}}{\left(1+\frac{y}{A}\right)_q^{t+s}} d_q y &= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n \frac{(q^n)^{t-1}}{\left(1+\frac{q^n}{A}\right)_q^{t+s}} \\
&= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\left(1+\frac{q^{t+s+n}}{A}\right)}{\left(1+\frac{q^n}{A}\right)_q^{t+s+1}} \\
&= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\left(1+ab\frac{q^n}{A}\right)}{\left(1+\frac{q^n}{A}\right)_q^{t+s+1}}
\end{aligned}$$

Şimdi de (25.50) deki ikinci integrali ele alalım.

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty/1} \frac{y^{t-1}}{\left(1+\frac{y}{A}\right)_q^{t+s}} d_q y &= \int_0^{\infty/1} \frac{y^{t-1}}{\left(1+\frac{y}{A}\right)_q^{t+s}} d_q y - \int_0^1 \frac{y^{t-1}}{\left(1+\frac{y}{A}\right)_q^{t+s}} d_q y \\
&= (1-q)\sum_{n\in\mathbb{Z}} q^n (q^n)^{t-1} \frac{1}{\left(1+\frac{q^n}{A}\right)_q^{t+s}} - (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n (q^n)^{t-1} \frac{1}{\left(1+\frac{q^n}{A}\right)_q^{t+s}} \\
&= (1-q)\sum_{n=-1}^{-\infty} q^n (q^n)^{t-1} \frac{1}{\left(1+\frac{q^n}{A}\right)_q^{t+s}} \\
&= (1-q)\sum_{n=1}^{\infty} (q^{-n})^t \frac{1}{\left(1+\frac{1}{q^n A}\right)_q^{t+s}} \\
&= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} (q^{-n-1})^t \frac{1}{\left(1+\frac{1}{q^{n+1} A}\right)_q^{t+s}} \\
&= \int_0^q \frac{x^{s-1}}{x^{t+s}\left(1+\frac{1}{Ax}\right)_q^{t+s}} d_q x
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\int_1^{\infty/1} \frac{y^{t-1}}{\left(1+\frac{y}{A}\right)_q^{t+s}} d_q y = \int_0^q \frac{x^{s-1}}{x^{t+s}\left(1+\frac{1}{Ax}\right)_q^{t+s}} d_q x \tag{25.51}$$

elde edilecektir. Şimdi de $K(x;t)$ fonksiyonunu yeniden ele alalım.

$$K(Ax;t+s)=\frac{(Ax)^{t+s}}{(1+Ax)}\left(1+\frac{1}{Ax}\right)_q^{t+s}(1+Ax)_q^{1-t-s}$$

Buradan,

$$\frac{1}{x^{t+s}\left(1+\frac{1}{Ax}\right)_q^{t+s}}=\frac{1}{1+Ax}(1+Ax)_q^{1-t-s}A^{t+s}\frac{1}{K(Ax;t+s)}$$

elde edilecektir. $K(Ax;t+s)$ fonksiyonu x e bağlı olmasına rağmen $n\in\mathbb{Z}$ $x,t\in\mathbb{R}$ için $K(q^n x;t)=K(x;t)$ olduğundan dolayı, Jackson integralinden bir sabit olarak çıkacaktır. Çünkü,

$$\begin{aligned}
\int_0^q K(Ax;t+s)\,d_qx &= (1-q)\,q\sum_{n=0}^{\infty}q^nK\left(Aq^{n+1};t+s\right)\\
&= (1-q)\,q\left(K(Aq;t+s)+qK\left(Aq^2;t+s\right)+\ldots\right)\\
&= (1-q)\,q\left(K(A;t+s)+qK(A;t+s)+\ldots\right)\\
&= (1-q)\,qK(A;t+s)\sum_{n=0}^{\infty}q^n\\
&= K(A;t+s)\int_0^q d_qx
\end{aligned}$$

olacaktır. Burdan dolayı (25.51)deki integrali aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\frac{A^{t+s}}{K(A;t+s)}\int_0^q\frac{1}{1+Ax}x^{s-1}(1+Ax)_q^{1-t-s}\,d_qx \tag{25.52}$$

$a=q^s$ ve $b=q^t$ olarak alırsak (25.52) deki ilk çarpan aşağıdaki şekilde ifade edilecektir.

$$\begin{aligned}
\frac{A^{t+s}}{K(A;t+s)} &= A^{t+s}\left(\frac{1}{\frac{A^{t+s}}{1+A}\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^{t+s}(1+A)_q^{1-t-s}}\right) \qquad (25.53)\\
&= \frac{(1+A)\left(1+\frac{ab}{A}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{qA}{ab}\right)_q^{\infty}}{\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^{\infty}(1+A)_q^{\infty}}
\end{aligned}$$

(25.52) deki integrali ise aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned}
\int_0^q\frac{x^{s-1}}{1+Ax}(1+Ax)_q^{1-t-s}\,d_qx &= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n+1}}{Aq^{n+1}+1}\left(q^{n+1}\right)^{s-1}\left(1+Aq^{n+1}\right)_q^{1-t-s}\\
&= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty}a^{n+1}\frac{1}{Aq^{n+1}+1}\frac{\left(1+Aq^{n+1}\right)_q^{\infty}}{\left(1+Aq^{n-s-t+2}\right)_q^{\infty}}\\
&= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty}a^{n+1}\frac{\left(1+Aq^{n+2}\right)_q^{\infty}}{\left(1+A\frac{q^{n+2}}{ab}\right)_q^{\infty}}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\int_0^q \frac{x^{s-1}}{1+Ax}(1+Ax)_q^{1-t-s}\,d_qx = (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} a^{n+1}\frac{\left(1+Aq^{n+2}\right)_q^{\infty}}{\left(1+A\frac{q^{n+2}}{ab}\right)_q^{\infty}} \tag{25.54}$$

elde edilecektir. (25.53) ve (25.54) ifadelerinin her ikisi de katsayıları a ve b nin rasyonel fonksiyonu olan q nun bir kuvvet serisi olarak ifade edilebilirler. t veya s değerlerinden biri pozitif tam sayı olduğu zaman (25.48) sağlanacaktır. Şimdi de (25.48) ifadesinin sağ tarafını ele alalım.

$$\begin{aligned} B_q(t,s) &= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1}\,d_qx \\ &= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} q^n (q^n)^{t-1}\left(1-q^{n+1}\right)_q^{s-1} \\ &= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} b^n \frac{\left(1-q^{n+1}\right)_q^{\infty}}{(1-q^n a)_q^{\infty}} \end{aligned}$$

elde edilecektir. Dikkat edecek olursak $B_q(t,s)$ fonksiyonunu katsayıları a ve b nin rasyonel fonksiyonu olan q nun bir kuvvet serisi olacak şekilde ifade edilebilir. O halde (25.48) ifadesinin sağ ve sol tarafını q nun bir kuvvet serisi olacak şekilde ifade edebiliriz. Bu iki kuvvet serisi $t \in \mathbb{N}$ veya $s \in \mathbb{N}$ için birbirlerine eşit olacaklardır. O halde $t, s > 0$ için bu iki kuvvet serisi birbirlerine eşit olacaklardır. ■

25.4 q− Beta Fonksiyonunun Simetrik Olması

$B(t,s)$ fonksiyonu,

$$B(t,s) = \frac{\Gamma(t)\Gamma(s)}{\Gamma(t+s)} = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(t+s)} = B(s,t)$$

olacağından beta fonksiyonu s ve t için simetriktir. Benzer şekilde $s, t > 0$ için,

$$B_q(t,s) = \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1}\,d_{qx}$$

q− beta fonksiyonunda s ve t nin simetrik olduğunu açık bir şekilde göremeyiz. Fakat (25.32) den yararlanarak q− beta fonksiyonunda t ve s nin simetrik olduklarını aşağıdaki gibi açık bir şekilde görebiliriz.

$$B_q(t,s) = \frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)} = \frac{\Gamma_q(s)\Gamma_q(t)}{\Gamma_q(t+s)} = B_q(s,t)$$

Bu bölümde teorem 10 dan yararlanarak $A > 0$ için,

$$B_q(t,s) = K(A;t) \int_0^{\infty/A} \frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}} d_q x \tag{25.55}$$

fonksiyonunun t ve s için simetrik olduğunu göstereceğiz. $m, n \in \mathbb{Z}$ için aşağıdaki eşitliğin sağlandığını daha önce göstermiştik.

$$(x-a)_q^{m+n} = (x-a)_q^m (x-q^m a)_q^n$$

ifadesinden yararlanarak,

$$K\left(\frac{1}{x};t\right)\left(1+\frac{q}{q^t x}\right)_q^t (1+q^t x)_q^s$$

ifadesinin nereye eşit olacağını bulalım.

$$\begin{aligned}
K\left(\frac{1}{x};t\right)\left(1+\frac{q}{q^t x}\right)_q^t (1+q^t x)_q^s &= \frac{x}{x^t(1+x)}(1+x)_q^t\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^{1-t}\left(1+\frac{q}{q^t x}\right)_q^t (1+q^t x)_q^s \\
&= \frac{1}{x^t}(1+x)_q^t (1+q^t x)_q^s \frac{x}{(1+x)}\left(1+\frac{1}{x}\right)_q^{1-t}\left(1+\frac{q}{q^{t-1}x}\right)_q^t \\
&= \frac{1}{x^t}(1+x)_q^{t+s}\frac{x}{1+x}(1+\frac{1}{x}) \\
&= \frac{1}{x^t}(1+x)_q^{t+s}
\end{aligned}$$

Sonuç olarak,

$$\frac{1}{x^t}(1+x)_q^{t+s} = K\left(\frac{1}{x};t\right)\left(1+\frac{q}{q^t x}\right)_q^t (1+q^t x)_q^s \tag{25.56}$$

elde edilecektir. Önerme 9 dan dolayı;

$$K\left(\frac{1}{x};t\right) = K(A;t) \ \forall x = \frac{q^n}{A},\ n \in Z$$

olacaktır. Buna göre (25.56) ifadesi aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\frac{1}{x^t}(1+x)_q^{t+s} = K(A;t)\left(1+\frac{q}{q^t x}\right)_q^t (1+q^t x)_q^s$$

Bulduğumuz bu sonucu (25.55) deki integralde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} B_q(t,s) &= K(A;t)\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx \\ &= K(A;t)\int_0^{\infty/A}\frac{x^{-1}}{K(A;t)\left(1+\frac{q}{q^tx}\right)_q^t(1+q^tx)_q^s}d_qx \\ &= \int_0^{\infty/A}\frac{1}{x\left(1+\frac{q}{q^tx}\right)_q^t(1+q^tx)_q^s}d_qx \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $y=q^tx$ dönüşümü yaparsak $\alpha>0$ için,

$$B_q(t,s)=\int_0^{\infty/\alpha}\frac{q^t}{yq^t\left(1+\frac{q}{y}\right)_q^t(1+y)_q^s}d_qx$$

$$B_q(t,s)=\int_0^{\infty/\alpha}\frac{1}{y\left(1+\frac{q}{y}\right)_q^t(1+y)_q^s}d_qy \tag{25.60}$$

elde edilecektir. Burada (25.22) den yararlanarak;

$$B_q(t,s)=\int_0^{\infty\alpha}\frac{d_qx}{x(1+qx)_q^t(1+1/x)_q^s}$$

y=qx dönüşümü yaparsak,

$$B_q(t,s)=\int_0^{\infty\alpha}\frac{1}{y\left(1+\frac{q}{y}\right)_q^s(1+y)_q^t}d_qy$$

elde edilecektir. α yerine $1/\alpha$, koymak kaydıyla t ve s yer değiştirmektedir. Bu şart altında $B_q(t,s)$ fonksiyonu simetrik olacaktır.

25.5 Bazı İmproper İntegrallerin Kaydırma Altındaki Değişmezliği

$$\int_0^a f(x)\,dx=\int_a^{a+c} f(\cancel{x}+c)\,dx$$

Bu ifadenin $q-$ benzerini improper integral için fonksiyonların özel bir sınıfı için yazabiliriz. Bu özel fonksiyonu $\frac{x^\alpha}{(1+x)_q^\beta}$ olarak alalım.

Önerme 11 *$\alpha > 0$ ve $\beta > \alpha + 1$ için,*

$$\int_0^{\infty/\alpha} \frac{x^\alpha}{(1+x)_q^\beta} d_q x = \frac{q}{q^\beta K(A;\alpha)} \int_1^{\infty/1} \frac{x^\alpha \left(1-\frac{1}{x}\right)_q^\alpha}{x^\beta} d_q x \tag{25.61}$$

İspat. $B_q(t,s)$ fonksiyonunun tanımından ve (25.21) ifadesinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} B_q(t,s) &= \int_0^1 x^{s-1} (1-qx)_q^{t-1} d_q x \\ &= \int_q^{\infty/1} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{x}\right)^{s-1} \left(1-\frac{q}{x}\right)_q^{t-1} d_q x \\ &= \int_q^{\infty/1} \frac{1}{x^{s+1}} \left(1-\frac{q}{x}\right)_q^{t-1} d_q x \end{aligned}$$

elde edilecektir. Burada $y = \frac{x}{q}$ dönüşümü yapalım. $d_q y = \frac{1}{q} d_q x$ olacaktır. Buna göre,

$$\begin{aligned} B_q(t,s) &= \int_1^{\infty/1} \frac{q}{y^{s+1} q^{s+1}} \left(1-\frac{1}{y}\right)_q^{t-1} d_q y \\ &= \frac{1}{q^s} \int_1^{\infty/1} \frac{\left(1-\frac{1}{y}\right)_q^{t-1}}{y^{s+1}} d_q y \\ &= \frac{1}{q^s} \int_1^{\infty/1} \frac{x^{t-1} \left(1-\frac{1}{x}\right)_q^{t-1}}{x^{s+t}} d_q x \end{aligned} \tag{25.62}$$

elde edilecektir. Bu integrali düzenleyelim. $\alpha = t-1$, $\beta = t+s$ olarak seçelim ve $K(A;\alpha+1) = q^\alpha K(A;\alpha)$ eşitliğinden yararlanalım.

$$\begin{aligned} B_q(t,s) &= \frac{1}{q^s} \int_1^{\infty/1} \frac{x^{t-1} \left(1-\frac{1}{x}\right)_q^{t-1}}{x^{s+t}} d_q x \\ &= \frac{1}{q^s} \int_1^{\infty/1} \frac{x^\alpha \left(1-\frac{1}{x}\right)_q^\alpha}{x^\beta} d_q x \\ &= \frac{1}{q^{\beta-\alpha-1}} \int_1^{\infty/1} \frac{x^\alpha \left(1-\frac{1}{x}\right)_q^\alpha}{x^\beta} d_q x \end{aligned}$$

elde edilecektir. Teorem 10 dan,

$$B_q(t,s) = K(A;t)\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx$$

olduğunu biliyoruz. Buradan,

$$B_q(t,s) = K(A;\alpha+1)\int_0^{\infty/A}\frac{x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta}}d_qx$$

elde edilecektir. O halde sonuç olarak,

$$\begin{aligned}
K(A;\alpha+1)\int_0^{\infty/A}\frac{x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta}}d_qx &= \frac{1}{q^{\beta-\alpha-1}}\int_1^{\infty/1}\frac{x^{\alpha}\left(1-\frac{1}{x}\right)_q^{\alpha}}{x^{\beta}}d_qx \\
q^{\alpha}K(A;\alpha)\int_0^{\infty/A}\frac{x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta}}d_qx &= \frac{1}{q^{\beta-\alpha-1}}\int_1^{\infty/1}\frac{x^{\alpha}\left(1-\frac{1}{x}\right)_q^{\alpha}}{x^{\beta}}d_qx \\
\int_0^{\infty/\alpha}\frac{x^{\alpha}}{(1+x)_q^{\beta}}d_qx &= \frac{q}{q^{\beta}K(A;\alpha)}\int_1^{\infty/1}\frac{x^{\alpha}\left(1-\frac{1}{x}\right)_q^{\alpha}}{x^{\beta}}d_qx
\end{aligned}$$

elde edilecek ve ıspat tamamlanmış olacaktır. ■

(25.61) in $q \to 1$ için limitini alırsak $x \to x-1$ dönüşümü altında sol taraftaki integralden, sağ taraftaki integrali elde ederiz.

25.6 Özdeşlikler

q– İmproper integralin tanımından yararlanarak,

$$K(A;t)\,\gamma_q^{(A)}(t) = \Gamma_q(t)$$

ifadesinin Jackobi'nin üçlü çarpım formülüne denk olduğunu gösterelim.

$$\frac{A^t}{1+A}\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t(1+A)_q^{1-t}\int_0^{\infty/A(1-q)}x^{t-1}e_q^{-x}d_qx = \frac{(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)^{t-1}}$$

$$\frac{A^t}{1+A}\frac{(1+1/A)_q^{\infty}}{(1+q^t/A)_q^{\infty}}\frac{(1+A)_q^{\infty}}{(1+q^{1-t}A)_q^{\infty}}\int_0^{\infty/A(1-q)}x^{t-1}e_q^{-x}d_qx = \frac{(1-q)_q^{\infty}}{(1-q)^{t-1}(1-q^t)_q^{\infty}}$$

$$A^t(1+1/A)_q^{\infty}(1+qA)_q^{\infty}\left(1-q^t\right)_q^{\infty}(1-q)^{t-1}\int_0^{\infty/A(1-q)}x^{t-1}e_q^{-x}d_qx = (1-q)_q^{\infty}\left(1+q^t/A\right)_q^{\infty}\left(1+q^{1-}\right.$$

elde edilecektir. Eşitliğin sol tarafını düzenleyelim.

$$A^t(1+1/A)_q^\infty(1+qA)_q^\infty\left(1-q^t\right)_q^\infty(1-q)^{t-1}(1-q)\sum_{n\in Z}\frac{q^n}{A(1-q)}\left(\frac{q^n}{A(1-q)}\right)^{t-1}e_q^{\frac{-q^n}{A(1-q)}}$$

$$= (1+1/A)_q^\infty(1+qA)_q^\infty\left(1-q^t\right)_q^\infty\sum_{n\in Z}q^{nt}e_q^{\frac{-q^n}{A(1-q)}}$$

$$= (1+1/A)_q^\infty(1+qA)_q^\infty\left(1-q^t\right)_q^\infty\sum_{n\in Z}q^{nt}\frac{1}{(1+q^n/A)_q^\infty}$$

$$= (1+1/A)_q^\infty(1+qA)_q^\infty\left(1-q^t\right)_q^\infty\sum_{n\in Z}q^{nt}\frac{(1+1/A)_q^n}{(1+1/A)_q^\infty}$$

$$= (1+qA)_q^\infty\left(1-q^t\right)_q^\infty\sum_{n\in Z}q^{nt}(1+1/A)_q^n$$

Sonuç olarak,

$$(1-q)_q^\infty\left(1+q^t/A\right)_q^\infty\left(1+q^{1-t}A\right)_q^\infty=(1+qA)_q^\infty\left(1-q^t\right)_q^\infty\sum_{n\in Z}q^{nt}(1+1/A)_q^n \quad (25.63)$$

elde edilecektir. Bu ifadede $x=\frac{-q^t}{A}$ olarak seçelim. Buna göre,

$$(1-q)_q^\infty(1-x)_q^\infty(1-q/x)_q^\infty=(1+qA)_q^\infty(1+Ax)_q^\infty\sum_{n\in Z}(-x)^nA^n\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^n \quad (25.64)$$

elde edilecektir. Ayrıca ,

$$\begin{aligned}\lim_{A\to0}A^n\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^n &= \lim_{A\to0}A^n\left(1+\frac{1}{A}\right)\left(1+\frac{q}{A}\right)...\left(1+\frac{q^{n-1}}{A}\right)\\ &= \lim_{A\to0}A^n\frac{(A+1)(A+q)...\left(A+q^{n-1}\right)}{A^n}\\ &= \lim_{A\to0}qq^2\dots q^{n-1}\\ &= q^{n(n-1)/2}\end{aligned}$$

olacaktır. (25.64) ün her iki tarafının $A\to0$ için limitini alısak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

$$(1-q)_q^\infty(1-x)_q^\infty(1-q/x)_q^\infty=\sum_{n\in Z}(-x)^nq^{n(n-1)/2}$$

Bu ifadenin Jackobi üçlü çarpım formülü olduğunu biliyoruz.

Şimdi de,

$$K(A;t)\,\beta_q^{(A)}(t,s)=B_q(t,s)$$

ifadesinin nasıl bir q− serisine denk olacağını gösterelim.

$$K(A;t)\int_0^{\infty/A}\frac{x^{t-1}}{(1+x)_q^{t+s}}d_qx=\frac{\Gamma_q(s)\Gamma_q(t)}{\Gamma_q(s+t)}$$

$$\frac{A^t}{1+A}\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^t (1+A)_q^{1-t}(1-q)\sum_{n\in Z}\frac{q^n}{A}\left(\frac{q^n}{A}\right)^{t-1}\frac{1}{\left(1+\frac{q^n}{A}\right)_q^{t+s}}$$

$$= \frac{(1-q)_q^{t-1}(1-q)_q^{s-1}(1-q)^{s+t-1}}{(1-q)^{t-1}(1-q)^{s-1}(1-q)_q^{s+t-1}}$$

$$\frac{\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^{\infty}}{\left(1+\frac{q^t}{A}\right)_q^{\infty}}\frac{(1+qA)_q^{\infty}}{(1+q^{1-t}A)_q^{\infty}}(1-q)\sum_{n\in Z}q^{tn}\frac{1}{\left(1+\frac{q^n}{A}\right)_q^{t+s}}$$

$$= \frac{(1-q)_q^{\infty}(1-q)_q^{\infty}\left(1-q^{s+t}\right)_q^{\infty}(1-q)^{s+t-1}}{(1-q^t)_q^{\infty}(1-q^s)_q^{\infty}(1-q)_q^{\infty}(1-q)^{t-1}(1-q)^{s-1}}$$

$$\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^{\infty}\sum_{n\in Z}q^{tn}\frac{1}{\left(1+\frac{q^n}{A}\right)_q^{t+s}}$$

$$= \frac{(1-q)_q^{\infty}\left(1-q^{s+t}\right)_q^{\infty}\left(1+q^t/A\right)_q^{\infty}\left(1+q^{1-t}A\right)_q^{\infty}}{(1-q^t)_q^{\infty}(1-q^s)_q^{\infty}(1+qA)_q^{\infty}}$$

olacaktır. Bu eşitliğin sol tarafını düzenleyelim.

$$\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^{\infty}\sum_{n\in Z}q^{tn}\frac{\left(1+q^{t+n+s}/A\right)_q^{\infty}}{(1+q^n/A)_q^{\infty}} = \left(1+\frac{1}{A}\right)_q^{\infty}\sum_{n\in Z}q^{tn}\frac{\left(1+q^{t+s}/A\right)_q^{\infty}}{\left(1+q^{t+s}/A\right)_q^n(1+q^n/A)_q^{\infty}}$$

$$\left(1+\frac{1}{A}\right)_q^{\infty}\sum_{n\in Z}q^{tn}\frac{1}{\left(1+q^{t+s}/A\right)_q^n(1+q^n/A)_q^{\infty}} = \frac{(1-q)_q^{\infty}\left(1-q^{s+t}\right)_q^{\infty}\left(1+q^t/A\right)_q^{\infty}\left(1+q^{1-t}A\right)_q^{\infty}}{(1-q^t)_q^{\infty}(1-q^s)_q^{\infty}(1+qA)_q^{\infty}\left(1+q^{t+s}/A\right)_q^{\infty}}$$

Sonuç olarak;

$$\sum_{n\in Z}q^{tn}\frac{(1+1/A)_q^n}{\left(1+q^{t+s}/A\right)_q^n} = \frac{(1-q)_q^{\infty}\left(1-q^{s+t}\right)_q^{\infty}\left(1+q^t/A\right)_q^{\infty}\left(1+q^{1-t}A\right)_q^{\infty}}{(1-q^t)_q^{\infty}(1-q^s)_q^{\infty}(1+qA)_q^{\infty}\left(1+q^{t+s}/A\right)_q^{\infty}} \tag{25.65}$$

Bu ifade de $a=\frac{-1}{A}, b=\frac{-q^{s+t}}{A}, x=q^t$ olarak alırsak (25.65) aşağıda tanımlanan Ramanujan çarpım formülü olacaktır:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(1-a)_q^n}{(1-b)_q^n}x^n = \frac{(1-q)_q^{\infty}(1-\frac{b}{a})_q^{\infty}(1-ax)_q^{\infty}(1-\frac{q}{ax})_q^{\infty}}{(1-b)_q^{\infty}(1-\frac{q}{a})_q^{\infty}(1-x)_q^{\infty}(1-\frac{b}{ax})_q^{\infty}}$$

Şimdi de aşağıdaki q– beta fonksiyonunun nasıl bir q– serisine denk olduğunu gösterelim. $\alpha>0$ olamak üzere,

$$B_q(t,s) = \int_0^{\infty/\alpha}\frac{1}{y\left(1+\frac{q}{y}\right)_q^t(1+y)_q^s}d_qy$$

olarak tanımlanmaktadır.

$$
\begin{aligned}
\frac{\Gamma_q(s)\,\Gamma_q(t)}{\Gamma_q(s+t)} &= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^n}{\alpha}\frac{\alpha}{q^n}\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha q}{q^n}\right)_q^t\left(1+\frac{q^n}{\alpha}\right)_q^s}\\
\frac{(1-q)_q^{s-1}(1-q)_q^{t-1}(1-q)^{s+t-1}}{(1-q)^{s-1}(1-q)^{t-1}(1-q)_q^{s+t-1}} &= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha q}{q^n}\right)_q^t\left(1+\frac{q^n}{\alpha}\right)_q^s}\\
\frac{(1-q)_q^{\infty}(1-q)_q^{\infty}(1-q)^{t+s-1}\left(1-q^{s+t}\right)_q^{\infty}}{(1-q^s)_q^{\infty}(1-q^t)_q^{\infty}(1-q)_q^{\infty}(1-q)^{s-1}(1-q)^{t-1}} &= (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{\alpha q}{q^n}\right)_q^t\left(1+\frac{q^n}{\alpha}\right)_q^s}\\
\frac{(1-q)_q^{\infty}\left(1-q^{s+t}\right)_q^{\infty}}{(1-q^s)_q^{\infty}(1-q^t)_q^{\infty}} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(1+\alpha q^{t+1-n}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{q^{n+s}}{\alpha}\right)_q^{\infty}}{\left(1+\alpha q^{1-n}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{q^n}{\alpha}\right)_q^{\infty}}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(1+\alpha q^{t+1-n}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{q^{n+s}}{\alpha}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)_q^{n}}{\left(1+\alpha q^{1-n}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)_q^{\infty}}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(1+\alpha q^{t+1-n}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{q^{s}}{\alpha}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)_q^{n}}{\left(1+\alpha q^{1-n}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{q^s}{\alpha}\right)_q^{n}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)_q^{\infty}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(1+\alpha q^{t+1}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{q^{s}}{\alpha}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)_q^{n}}{\left(1+\alpha q^{t+1}\right)_q^{-n}\left(1+\alpha q^{1-n}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{q^s}{\alpha}\right)_q^{n}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)_q^{\infty}}\\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(1+\alpha q^{t+1}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{q^{s}}{\alpha}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)_q^{n}(1+q\alpha)_q^{-n}}{\left(1+\alpha q^{t+1}\right)_q^{-n}(1+\alpha q)_q^{\infty}\left(1+\frac{q^s}{\alpha}\right)_q^{n}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)_q^{\infty}}
\end{aligned}
$$

Sonuç olarak;

$$
\frac{(1+\alpha q)_q^{\infty}(1-q)_q^{\infty}\left(1-q^{s+t}\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)_q^{\infty}}{(1-q^s)_q^{\infty}(1-q^t)_q^{\infty}\left(1+q^{t+1}\alpha\right)_q^{\infty}\left(1+\frac{q^s}{\alpha}\right)_q^{\infty}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)_q^{n}(1+\alpha q)_q^{-n}}{\left(1+\frac{q^s}{\alpha}\right)_q^{n}\left(1+q^{t+1}\alpha\right)_q^{-n}}
$$

elde edilecektir. Bu eşitlikte $a = \frac{-1}{\alpha}, b = \frac{-q^s}{\alpha}, c = -q^{t+1}\alpha$ olarak alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(1-a)_q^n\left(1-\frac{q}{a}\right)_q^{-n}}{(1-b)_q^n(1-c)_q^{-n}} = \frac{(1-a)_q^{\infty}\left(1-\frac{q}{a}\right)_q^{\infty}(1-q)_q^{\infty}\left(1-\frac{bc}{q}\right)_q^{\infty}}{(1-b)_q^{\infty}(1-c)_q^{\infty}\left(1-\frac{b}{a}\right)_q^{\infty}\left(1-\frac{ac}{q}\right)_q^{\infty}}
$$

Şimdi de aşağıdaki q– gamma fonksiyonundan e_q^x q– exponansiyel fonksiyonunun nasıl elde edildiğini gösterelim. (25.7) den yararlanarak,

$$
\Gamma_q(t) = \int_0^{[\infty]} x^{t-1}E_q^{-qx}d_qx
$$

$$\begin{aligned}
\frac{(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)^{t-1}} &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-q)\frac{q^n}{(1-q)}\left(\frac{q^n}{1-q}\right)^{t-1}E_q^{\frac{-q^{n+1}}{1-q}} \\
\frac{(1-q)_q^{t-1}}{(1-q)^{t-1}} &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-q)^{1-t}q^{nt}\left(1-(1-q)\frac{q^{n+1}}{1-q}\right)_q^{\infty} \\
\frac{(1-q)_q^{\infty}}{(1-q^t)_q^{\infty}(1-q)^{t-1}} &= \sum_{n=0}^{\infty}(1-q)^{1-t}q^{nt}\left(1-q^{n+1}\right)_q^{\infty} \\
\frac{1}{(1-q^t)_q^{\infty}} &= \sum_{n=0}^{\infty}q^{nt}\frac{\left(1-q^{n+1}\right)_q^{\infty}}{(1-q)_q^{\infty}} \\
\frac{1}{(1-q^t)_q^{\infty}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{nt}}{(1-q)_q^{n}}
\end{aligned}$$

elde edilecektir. Burada $x=\frac{q^t}{1-q}$ dönüşümü yapılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-(1-q)x)_q^{\infty}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n(1-q)^n}{(1-q)_q^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\left(\frac{1-q}{1-q}\right)\cdots\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{[n]!} \\
&= e_q^x
\end{aligned}$$

olacaktır. Benzer şekilde aşağıdaki q– beta fonksiyonunun Heine'nin çarpım formülüne (9.3) denk olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
B_q(t,s) &= \int_0^1 x^{t-1}(1-qx)_q^{s-1}d_qx \\
\frac{\Gamma_q(t)\Gamma_q(s)}{\Gamma_q(t+s)} &= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty}q^n(q^n)^{t-1}\left(1-q^{n+1}\right)_q^{s-1} \\
\frac{(1-q)_q^{t-1}(1-q)_q^{s-1}(1-q)^{s+t-1}}{(1-q)^{t-1}(1-q)^{s-1}(1-q)_q^{t+s-1}} &= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty}q^{nt}\left(1-q^{n+1}\right)_q^{s-1} \\
\frac{(1-q)_q^{\infty}(1-q)_q^{\infty}(1-q)^{t+s-1}\left(1-q^{t+s}\right)_q^{\infty}}{(1-q^t)_q^{\infty}(1-q^s)_q^{\infty}(1-q)^{t+s-2}(1-q)_q^{\infty}} &= (1-q)\sum_{n=0}^{\infty}q^{nt}\left(1-q^{n+1}\right)_q^{s-1} \\
\frac{(1-q)_q^{\infty}\left(1-q^{t+s}\right)_q^{\infty}}{(1-q^t)_q^{\infty}(1-q^s)_q^{\infty}} &= \sum_{n=0}^{\infty}q^{nt}\left(1-q^{n+1}\right)_q^{s-1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(1-q^{t+s}\right)_q^{\infty}}{\left(1-q^t\right)_q^{\infty}} &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{nt}\frac{\left(1-q^s\right)_q^{\infty}}{\left(1-q\right)_q^{\infty}}\left(1-q^{n+1}\right)_q^{s-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{nt}\frac{\left(1-q^s\right)_q^{\infty}\left(1-q^{n+1}\right)_q^{s-1}}{\left(1-q\right)_q^{n}\left(1-q^{n+1}\right)_q^{\infty}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{nt}\frac{\left(1-q^s\right)_q^{n}\left(1-q^{s+n}\right)_q^{\infty}\left(1-q^{n+1}\right)_q^{s-1}}{\left(1-q\right)_q^{n}\left(1-q^{n+1}\right)_q^{\infty}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} q^{nt}\frac{\left(1-q^s\right)_q^{n}}{\left(1-q\right)_q^{n}}
\end{aligned}
$$

Sonuç olarak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{nt}\frac{\left(1-q^s\right)_q^{n}}{\left(1-q\right)_q^{n}} = \frac{\left(1-q^{t+s}\right)_q^{\infty}}{\left(1-q^t\right)_q^{\infty}}$$

elde edilecektir. Eğer $a = q^s, x = q^t$ olarak alırsak aşağıdaki Heine'nin çarpım formülünü elde etmiş oluruz.

$$\frac{\left(1-ax\right)_q^{\infty}}{\left(1-x\right)_q^{\infty}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\frac{\left(1-a\right)_q^{n}}{\left(1-q\right)_q^{n}}$$

Bölüm14 deki teoremden yararlanarak ayrıca aşağıdaki sonuca da ulaşabiliriz.

$${}_1\Phi_0\left[a;q;x\right] = \frac{\left(1-ax\right)_q^{\infty}}{\left(1-x\right)_q^{\infty}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n\frac{\left(1-a\right)_q^{n}}{\left(1-q\right)_q^{n}}$$

KAYNAKLAR

1. Adams Robert, 2003, *Calculus,* Person Education Inc. , Toronto

2. Ernst Thomas, 1999, *History of q-Calculus and a New Method,* Uppsala University

3. Kac Victor ve Cheung Pokman, 2002, *Quantum Calculus*, Springer

4. Schaums, 1990, *Lineer Cebir*, Nobel yayınları

5. Malık S.D. and Mordeson John N., 1997, *Fundamentals of Abstract Algebra,* Calcutta University

6. Sole Alberto ve Kac Victor, 2003, *On İntegral Representations of q-Gamma and q- Beta Functions,* Harvard University and MIT. University