T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OPTİMİZASYON PROBLEMLERİNE GENEL YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Cüneyd BAŞTANOĞLU

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Sezai MAKAS

MAYIS 2009

Cüneyd BAŞTANOĞLU tarafından hazırlanan OPTİMİZASYON TEORİLERİNE GENEL YAKLAŞIM adlı bu tezin YÜKSEK LİSANS tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Sezai Makas
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından MATEMATİK Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Yrd. Doç. Dr. Sezai MAKAS

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nebi ÖNDER

Üye : Prof. Dr. Nalan CİNEMRE

Üye : ____

Üye : ____

Bu tez, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

ÖZET

Bu çalışmada, optimizasyon problemlerine genel yaklaşım amaçlanmıştır.

Bu amaç doğrultusunda çalışmanın birinci bölümünde yapılacak çalışma hakkında ön bilgi verilmiştir.

İkinci bölümünde ise varyasyon hesabının Lagrange problemi, türev kısıtlaması altındaki Lagrange problemlerine ve klasik Bolza problemlerine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise Mayer optimal kontrol problemi ve türev kısıtlaması olan optimal Lagrange ve Bolza problemlerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise Mayer, Lagrange, Bolza optimal kontrol problemlerinin birbirlerine indirgenmesi incelenmiştir.

Bu tezdeki araştırmalar çok sayıda somut örneklerle açıklanmış ve uygulama nitelikli problemler çözülmüştür.

SUMMARY

In this study a general view problems of optimization is intended.

In line with this goal in the first section provides information about the work.

In the second part Classical Lagrange Problems of the Calculus of Variations, Classical Lagrange Problems with Constraints on the Derivatives and Classical Bolza Problems has been given.

In the third part The Mayer Problems of Optimal Control and The Lagrange and Bolza Problems of Control as Problems of the Calculus of Variations with Constraints on the Derivatives has been given.

In the fourth section Mayer, Lagrange, Bolza Problems of Optimal Control be reduced to each other were examined.

In this work the researches are explained by a number of concrete examples and some problems are solved for application.

ÖNSÖZ

Bu çalışmalarım süresince bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım, kendisinden çok şey öğrendiğim tez danışmanım Sn. Yrd. Doç. Dr. Sezai Makas olmak üzere tüm hocalarıma ve tezimi bitirmemde bana destek olan aileme tüm kalbimle teşekkür ederim.

Mayıs 2009 Cüneyd BAŞTANOĞLU

ŞEKİL LİSTESİ

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

BÖLÜM 1: GİRİŞ

1.1 Varyasyon Hesabında Ön Bilgiler

Klasik varyasyon hesabın temel problemi aşağıdaki gibi ifade edilmektedir.

$$J\big(y(x)\big) = \int_a^b L\big(x, y(x), y'(x)\big)dx \ \to inf \tag{1.1}$$

$$y(a) = y_0, y(b) = y_1 \tag{1.2}$$

Varyasyon hesabı ile ilgili ilk çalışmalarda y = y(x) fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında en azından $C^1[a, b]$ sınıfından olduğu kabul edilirdi ve fonksiyonun ekstremumu aranırken bu fonksiyonların hem kendileri hem de türevleri yakın olan fonksiyonlar karşılaştırılırdı. Bir başka deyişle $\hat{y}(x) \in C^1[a, b]$ ve $\varepsilon > 0$ olsun.
Eğer $y(a) = y(b) = 0$ ve

$$\|y(x)\|_1 = \max \left\{ \max_{x \in [a,b]} |y(x)| , \max_{x \in [a,b]} |y'(x)| \right\} < \varepsilon$$

olduğunda

$$J(y(x) + \hat{y}(x)) \geq J(\hat{y}(x))$$

oluyorsa $\hat{y}(x)$ fonksiyonu (1.1), (1.2) problemine zayıf minimum veriyor denir [1, 2]. $C^1[a, b]$sınıfından olan $\hat{y}(x)$ fonksiyonunun (1.1), (1.2) problemine zayıf minimum vermesi için ilk gerek şart Euler ve Lagrange tarafından verilmiştir ve aşağıdaki gibi ifade edilmiştir [2, 6].

$$-\frac{d}{dx} L_{y'}\big(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)\big) + L_y\big(x, \hat{y}(x), \hat{y}'(x)\big) = 0 \tag{1.3}$$

İntegral altındaki $L(t, y, y')$ fonksiyonu (aşağıda onu integrand diye adlandıracağız) belli özelliğe sahip olursa, $\hat{y}(x)$ fonksiyonu için önemli olan Hilbert teoremi geçerlidir.

Teorem 1 (Hilbert): Eğer $c \epsilon (a, b)$ noktasının belli bir civarında

$$L_{y'y'}\big(c, y(c), y'(c)\big) \neq 0$$

olursa $y = \hat{y}(x)$ fonksiyonunun $x = c$ noktasının civarında 2. mertebeden sürekli türevi vardır. Bu teoremin ispatı [4]'de verilmiştir.

Varyasyon hesabında

$$L_{y'y'} \neq 0 \tag{1.4}$$

eşitsizliği Legendre şartı olarak bilinmektedir [6, 9].

Varyasyon hesabında zayıf minimumun yanısıra, güçlü minimum kavramı da önemli rol oynamaktadır. Varyasyon hesabında güçlü minimum problemi ilk defa Weierstrass tarafından incelenmiştir [4, 9]. Güçlü minimum tanımı aşağıda verilmiştir.

Eğer $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$\|y(x)\|_0 = \max_{x \in [a,b]} |y(x)| < \varepsilon \quad \text{ve} \quad y(a) = y(b) = 0$$

şartlarını sağlayan herhangi bir $y(x) \epsilon PC^1[a, b]$ fonksiyonu için

$$J(y(x) + \hat{y}(x)) \geq J(\hat{y}(x))$$

olursa, bu fonksiyon (1.1), (1.2) problemine güçlü minimum verir denir.

$y = \hat{y}(x)$ fonksiyonunun (1.1), (1.2) problemine güçlü minimum vermesi için Weierstrass şartını sağlaması gerekir.

Teorem 2 (Weierstrass): Eğer $y(x)\epsilon PC^1[a,b]$ fonksiyonu (1.1), (1.2) problemine güçlü minimum verirse $\forall\dot{x} \in (a,b)$ ve $\forall p \in R$ için

$$E(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x),P) = L(x,\hat{y}(x),P) - L\big(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\big) - \big(P,\hat{y}'(x)\big)L_{y'}\big(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x)\big) \geq 0 \quad (1.5)$$

olmalıdır [5].

Weierstrass ve Legendre şartları tabiati ile Euler Lagrange denkleminin yerel şartlardır. Varyasyon hesabında bu yerel şartların yanısıra global şartlar da mevcuttur. Bu şartlar ilk defa Jacobi tarafından verilmiştir. Ve bu şartlar altında (1.1), (1.2) probleminin 2. varyasyonu aşağıdaki gibi ifade edilmiştir [7, 10].

$$J\big(y(x)\big) = \int_a^b \left[\hat{L}_{y'y'}(x,\hat{y}(x),\hat{y}'(x))y^2(x) + (\hat{L}_{yy}(x) - \frac{d}{dx}\hat{L}_{yy'}(x))y'^2(x) \right] dx \qquad (1.6)$$

(1.6) kuadratik fonksiyonelinin Euler denklemi olan

$$-\frac{d}{dx}(\hat{L}_{y'y'}(x,\hat{y}'(x)) + (\hat{L}_{yy}(x) - \frac{d}{dx}\hat{L}_{yy'}(x))y(x) \qquad (1.7)$$

denklemine Jacobi denklemi denir [6, 14].

Her $x \in [a,b]$, $\hat{L}_{y'y'}(x) \neq 0$ olduğunu kabul ederek (1.7) denkleminin $y(a) = 0$, $y'(a) = 1$ başlangıç şartını sağlayan çözümünü $\bar{y}(x)$ ile gösterelim. $\bar{y}(c) = 0, c \neq a$ noktasına $x = c$ noktası ile eşlenik olan nokta denir. $y = \hat{y}(x)$ fonksiyonu (1.1), (1.2) problemine zayıf minimum verirse (a,b) aralığında $x = c$ noktası ile eşlenik olan nokta yoktur.

Varyasyon hesabında bir problem araştırılırken geleneksel olarak $L_{y'y'}(x) \neq 0$ şartı kabul edilir ve daha sonra da Jacobi denkleminin incelenmesine geçilir. $L_{y'y'}(x) \neq 0$ şartı (1.7) diferansiyel denkleminin varlık ve teklik teoremine uygulaması olarak sağlanır. Fakat $L_{y'y'}(x) \neq 0$ şartının dejenere olduğu problemler de karşımıza sık sık çıkmaktadır. Hilbert teoremine göre, $L_{y'y'}(x) \neq 0$
şartı bozulduğunda $\hat{y}(x) \in C^2$ olmasına gerek yoktur. Böyle problemler kuantum mekaniğinde, astronomide, uzay teknolojisinde devamlı karşımıza çıktığı için onların

da incelenmesi güncel problem olarak ilgi çekmektedir. Bu problemlere dejenere olmuş problemler denir. Bu problemler ilk defa M. Morse [13], Leighton [11], Hestenes [9], M. Tagiyev [16] gibi matematikçiler tarafından incelenmiştir.

1.2 Varyasyon Hesabında Zayıf, Güçlü ve Mutlak Minimum

Varyasyon hesabının temel problemi olan (1.1), (1.2) probleminde yer alan $y = y(x)$ fonksiyonunun [a, b] aralığında mutlak sürekli fonksiyon olduğu kabul edilir. Yani $y(x) \in AC[a,\ b]$ dır. $L(x, y, z)$ fonksiyonu üzerinde ilave şartlar konmazsa (1.1), (1.2) probleminin, genelde çözümünün varlığını söylemek imkansızdır. Aşağıdaki örnekte yer alan fonksiyon extremal, yani Euler denklemini sağlayan bir fonksiyon olmasına rağmen bu fonksiyon problemin güçlü minimumu değildir [4, 9, 13].

Örnek : $J(y) = \int_0^1 y'^3\ dx, y(0) = 0, y(1) = 1$ fonksiyonelinin Euler denklemi $-\frac{d}{dx}(3y'^2) = 0 \ \Rightarrow \ y' = sabit$ dir. Sınır şartlarını sağlayan extremal çözüm $\hat{y}(x) = x$ dir. $\hat{y}(x) = x$ fonksiyonu bu probleme zayıf minimum verir. Gerçekten $h(0) = h(1) = 0, h(x) \in C^1[0, 1]$ olsun. Bu takdirde fonksiyonel

$$J(\hat{y}(x) + h(x)) = \int_0^1 (1 + h')^3 dx = \int_0^1 dx + \int_0^1 3h'(x)\, dx + \int_0^1 h'^2(3 + h'(x))dx$$

$$= J(\hat{y}(x)) + \int_0^1 h'^2(3 + h'(x))dx$$

dir. Eğer $\|h(x)\|_1 < 3$ ise $h'(x) + 3 > 0$ ve $J(\hat{y}(x) + h(x)) > J(\hat{y}(x))$ alınır. Fakat $\hat{y}(x) = x$ fonksiyonu problemin güçlü minimumu değildir [11].

Bu problemde güçlü minimum olması integral altındaki $L(x, y, z) = z^3$ fonksiyonunun konveks olmasına bağlıdır. Varyasyon hesabında mutlak minimumun varlığı problemi ilk defa L. Tonelli tarafından çözülmüştür ve bu teorem aşağıda ifade edilmiştir.

Teorem 3 (L. Tonelli) : Yukarıdaki (1.1), (1.2) probleminde aşağıdaki şartların sağlandığını varsayalım.

1) $\exists\alpha > 0, \exists p > 1, \beta \in R$ olmak üzere $L(x,y,z) \geq \alpha|z|^p + \beta, \forall(x,y) \in G$

2) $\forall(x,y) \in G$ için $z \to L_z(x,y,z)$ fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında artan fonksiyondur.

Burada 1 ve 2 şartlarına bağlı olarak (1.1), (1.2) problemine mutlak minimum veren bir $\hat{y}(x) = x$ fonksiyonu vardır [2].

1.3 Weierstrass'ın e fonksiyonu

$S \subset R^n$ kümesi dışbükey (konveks) bir küme olsun.

$\forall x, y \in S$ için $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere,

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in S. \qquad f: S \rightarrow R \tag{1.8}$$

S'de tanımlanmış gerçel değerli bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdaki fonksiyon $0 \leq \lambda \leq 1$ aralığında,

$$\varphi(\lambda) = (1 - \lambda) f(x) + \lambda f(y) - f\big((1 - \lambda)x + \lambda y\big), \quad x, y \epsilon S \tag{1.9}$$

şeklinde oluşur.

<u>Önerme :</u> $f \in C^1(R^n)$ fonksiyonunun $S \subset R^n$ konveks kümesinde konveks fonksiyon olması için gerek ve yeter şart

$$E(x, y) = f(y) - f(x) - \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_j) f_{x_i}(x) \tag{1.10}$$

fonksiyonunun $\forall x, y \in S$ için negative olmamasıdır, yani

$$e(x, y) \geq 0 \tag{1.11}$$

olmasıdır. Bu şekilde (1.10) ifadesinde tanımlanan $e(x,\ y): R^n x R^n \rightarrow R$ fonksiyonuna Weierstrass'ın e fonksiyonu denir [16].

BÖLÜM 2: VARYASYON HESABININ LAGRANGE PROBLEMİ

2.1 Varyasyon Hesabının Klasik Lagrange Problemleri

Bu bölümde (2.1) de ifade edilen varyasyon hesabının klasik Lagrange probleminin maksimum ve minimum durumu ile ilgileneceğiz. Lagrange problemi aşağıdaki gibidir.

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} f_0\left(t, x(t), x'(t)\right) dt \tag{2.1}$$

Burada $J(x)$ problemin fonksiyoneli, n - vektörü sürekli bir fonksiyon, $x(t) = (x^1, \dots, x^n)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ aralığında $C: x = x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ sürekli bir eğri olup R^{n+1} sınıfındandır.

Bu problemde yer alan t $\in R$ gerçek ya da bağımsız değişkeni, genelde "zaman" olarak adlandırılır. $x = (x^1, \dots, x^n)$, $t_1 \in R^n, n \geq 1$, gerçek vektör değişkeni de genelde "alan" ya da "faz" değişkeni olarak adlandırılır. Yörünge yada eğri olarak adlandırılan

$$x(t) = (x^1, \dots, x^n), \qquad t_1 \leq t \leq t_2$$

fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olup, bu $f(t, x, x')$ fonksiyonu R^{1+2n} de ya da R^{1+2n} nin herhangi bir parçasında tanımı verilmiş olan gerçek değerli bir fonksiyondur. Bu tip fonksiyonlara Lagrange fonksiyonu denir [8].

Her bir $(t, x) \in R^{1+n}$ değişkenine sadece *tx* - alanı içerisinde verilmiş olan bir A kümesindeki, $A = [t_0, T] \times A_0$, $A_0 \subset R^n$, değişkenleri alınır ve A nın toplam *tx* - alanı hariç tutulmaz. Bu yüzden aşağıdaki $x(t)$ fonksiyonlarının

$$\left(t, x(t)\right) \in A, \qquad t_1 \leq t \leq t_2 \tag{2.2}$$

sınır koşullarını sağlaması gerekir.

Aşağıdaki örnekte "iki ucu sabit olan" bir eğriyi ele alalım. Bu eğrinin koordinatları

$$x(t_1) = x_1, \ \ x(t_2) = x_2 \ \ (t_1, t_2, x_1, x_2 \ sabit), \ t_1 < t_2$$

$$x_1 = (x_1{}^1, \dots, x_1{}^n) \in R^n, \qquad x_2 = (x_2{}^1, \dots, x_2{}^n) \in R^n.$$

şeklinde olup C eğri ailesinin R^{1+n} içindeki sabit noktaları $1 = (t_1, x_1)$ ve $2 = (t_2, x_2)$ dir. Bu eğri ailelerinin sınır koşullarına bakıldığında; C eğrisinin $1 = (t_1, x_1)$ altında sabit nokta olan eğrisi aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma: x = g(t), \quad t' \le t \le t''$$

Bu eğri

$$x(t_1) = x_1 \ \ , x(t_2) = g(t_2), \qquad t_1 < t_2, \ t' \le t \le t^n$$

şeklinde ifade edilir. Buna ek olarak C nin R^{n+1} de verilmiş olan B_1 ve B_2 gibi iki kümenin elemanı olduğu görülür.
Sınır koşulları $2n + 2, \ t_1, x(t_1) = (x_1{}^1, \dots, x_1{}^n), \ t_2, x(t_2) = (x_2{}^1, \dots, x_2{}^n)$ olan,

$$e[x] = (t_1, x(t_1), t_2, \ x(t_2))$$

fonksiyonu gerçek x - yörüngesinin bitiş noktasıdır. Burada t_1 ve t_2' nin sabit olması gerekir. Bu sınır koşullar çoğunlukla yukarıda adı geçen $2n + 2$ kümesinde ifade edilir. Sınır koşulları genel olarak ifade etmenin yolu R^{2n+2} de alınan bir B kümesinin (t_1, x_1, t_2, x_2) alt kümesini belirlemek ve aşağıda tanımlanan (2.3) ü zorunlu tutmaktır.

$$e[x] \in B \ \ ya \ da \ \ (t_1, \ x(t_1), t_2, x(t_2)) \in B \qquad (2.3)$$

Bu, iki ucun sabit olmasına veya t_1, x_1, t_2, x_2 sabit olmak üzere, (t_1, x_1, t_2, x_2) nin R^{2n+2} de bulunan B alt kümesinin tek bir noktası olmasına eşittir. Γ eğrisi üzerinde bulunan birinci sabit uç nokta (t_1, x_1) ve ikinci sabit uç nokta (t_2, x_2) durumu ise $B = (t_2, x_2)\ x\ \Gamma$ olması durumuna eşittir.

(2.1) denkleminin (2.2) ve (2.3) kısıtlamaları altında olan minimum ve maksimum problemleri genellikle varyasyon hesabında Lagrange problemleri olarak adlandırılır ve $p \leq 1$, $C > 0$ sabitleri için aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\int_{t_1}^{t_2} |x'(t)|^p \, dt \leq C \tag{2.4}$$

Bu denklem daha genel olarak

$$\int_{t_1}^{t_2} H(t, x(t), x'(t)) \, dt \leq C$$

şeklinde ifade edilir. Alternatif olarak fonksiyonelin herhangi bir N değeri için

$$J_j(x) = \int_{t_1}^{t_2} H\big(t, x(t), x'(t)\big) \, dt = C_j \big[veya \leq C_j\big], \quad j = 1, \dots, N.$$

şeklinde oluşan problemlere izoperimetri problemleri denir [15].

Burada n-vektör fonksiyonu üzerinde olan tüm sürekli $x(t) = (x^1, \dots, x^n)$ fonksiyonları $t_1 \leq t \leq t_2$ aralığında ele alınır ve bu ifadenin sürekli türevi olan $x'(t) = (x'^1, \dots, x'^n)$ ile C^1 sınıfında en iyi sonuç bulunabilir.

Basit bir örnekle sürekli ve türevli tüm $x(t) = (x^1, \dots, x^n)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, fonksiyonlarının en uygun sonucunu bir C_S sınıfında aramak daha doğrudur. Böyle bir durumda eğer $f_0(t, x, u)$ nun belirli ve AxR^n de sürekli olduğunu kabul edersek, o zaman $f_0\big(t, x(t), x'(t)\big), [t_1, t_2]$ aralığında sürekli olur ve (2.1) bir Riemann integrali olur.

Ancak, en uygun çözümün C_S olmadığını gösteren başka örneklere baktığımızda $x(t) = (x^1, \dots, x^n)$ nin en uygun çözümünü tüm mutlak ve sürekli n-vektör fonksiyonlarının sınıfından daha büyük bir sınıfta aramak daha uygun olacaktır. Burada sadece mutlak ve sürekli fonksiyonların sınıfı ele alındığından sürekli fonksiyon olarak

$$x(t) = (x^1, \dots, x^n),\ t_1 \le t \le t_2$$

nin en büyük sınıfa sahip olduğu görülür. Bu fonksiyonların türevi

$[t_1, t_2]$ aralığında $x'(t) = (x'^1, \dots, x'^n)$

şeklindedir. Örneğin,

$$x(\beta) - x(\alpha) = \int_\alpha^\beta x'(t)dt,$$

integrali her bileşen için bir Lebesgue integralidir.

Tersine, eğer $g(t)$ fonksiyonu bir L-integrali ise, o zaman

$$G(t) = \int_{t_1}^{t} g(\tau)d\tau$$

mutlak ve süreklidir. Burada $f_0(t, x, u)$, AxR^n içinde sürekli olduğunda ve *x(t)* fonksiyonu mutlak sürekli olduğu zaman $f_0\big(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot)\big)$ nın kesinlikle ölçülebilir olduğu kabul edilir. Bu durumda $f_0\big(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot)\big)$ denklemi L-integrali olma gerekliliğini gösterir ve bu yüzden (2.1) bir L- integralidir.

Örnek : $J(x) = \int_0^1 \left(x^2 + \left|x'^2 - 1\right|\right)dt$ fonksiyonelinin $n = 1$, $x(0) = 0$, $x(1) = 0$ şartları altında Lagrange probleminin bir minimumuna sahip olduğunu gösterelim.

Burada $x^2 + \left|x'^2 - 1\right| \geq 0$'dır. Çünkü $x(0) = 0$, $x(1) = 0$ için bütün mutlak ve sürekli $x(t)$ fonksiyonları $0 \leq t \leq 1$ aralığında bir minimum belirtir. O halde kesinlikle $J(x) \geq 0$'dır.

Şimdi

$$x_k(t) = t - \frac{j}{k}, \quad \frac{j}{k} \leq tz = \frac{j}{k} + \frac{1}{2k}, \quad x_k(t) = \frac{j+1}{k} - t\ ,$$

$$\frac{j}{k} + \frac{1}{2k} \leq t \leq (j+1)/k, \qquad j = 0,1, \dots, k-1.$$

ile belirlenmiş olan $x_k(t)$ yörüngeleri sırasıyla ele alınsın. Burada $0 \leq x_k(t) \leq 1/2k$ için $x'(t) = \pm 1$ olur . $[0,1]$ aralığında $0 \leq J(x_k) \leq 1/4k^2$ için , $J(x_k) \to 0$, $k \to \infty$ olarak alındığı zaman $j = 0$ olur. Açıkça $0 \leq t \leq 1$ aralığında $J(x) = 0$ için hiçbir mutlak sürekli $x(t)$ fonksiyonu yoktur. Çünkü $[0,1]$ aralığında $x'(t) = \pm 1$ için $x(t) = 0$ olacaktır, bu bir tezattır. Bu da yukarıdaki problemin kesin minimuma sahip olmadığını gösterir.

2.2 Türev Kısıtlaması Altında Klasik Lagrange Problemleri

Türev kısıtlaması altında ki klasik Lagrange problemi (2.1) denklemi ile aynı olup sınır koşulları (2.2) ve (2.3) gibidir. Burada x, olası değerlerine kısıtlama getirilerek göz önünde bulundurulur. Her bir $(t, x) \epsilon A$ için $Q\ (t, x)$ alt kümesi belirlenir. Türevli, n- vektörlü $x'(t) = (x'^1, \dots, x'^n)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ mutlak sürekli fonksiyoneli ile ilgili $Q(t, x(t))$ ye ait olması gerekir. Başka bir deyişle mutlak sürekli $x(t)$ fonksiyonunun aşağıdaki şekilde olması gerekir.

$$x'(t) \in Q\big(t, x(t)\big), \qquad t \in [t_1, t_2] \tag{2.5}$$

Buna yönlendirici alan adı verilir [1, 8].

Örneğin, $n = 1$ ve $Q\ =\ Q\ (t, x) = [z|a\ \leq z \leq\ b]$ için sadece $x'(t)$ eğimi, a ve b arasında kalan mutlak sürekli sayısal fonksiyon ile sınırlanır. Başka bir örnekte herhangi bir $n\ \geq\ 1$ ve $Q\ (t, x) = [z\ \epsilon\ R^n\ |lzl\ \leq\ a]$ için $x'(t) = (x'^1, \dots, x'^n)$ teğet vektörünün ekseni, t - eksenine paralel olan ve sabit açıklığı olan bir huniye ait olan $x(t) =\ (x^1, \dots, x^n)$ mutlak sürekli fonksiyonu ile sınırlanır yani
$|x'(t)|\ \leq a,\ t\ \epsilon\ [t_1\ , t_2]$ dır.

Bu durumda,

$$M_0 = [(t, x, z)|(t, x)\ \epsilon\ A, z\ \epsilon\ Q\ (t, x)]$$

kümesi R^{1+2n} nin bir alt kümesidir. $f_0(t, x, u)$ fonksiyonunun, M_0 içinde tanımlanmış olan $x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ mutlak sürekli n-vektör fonksiyonunu (2.1), (2.2), (2.5) i sağlayacağını varsaydığımızda

$$f_0\big(t, x(t), x'(t)\big), \qquad (t_1, t_2)$$

fonksiyonu bir L – integralidir. Aynı zamanda $f_0(t, x, z)$ nin R^{1+2n} nin alt kümesi olan M_0 içinde $+\infty$ a eşit olduğu belirlenebilir ve bu durumda f_0 ın genişletilmiş bir fonksiyon olduğu görülür. Bu şekilde yapılarak $f_0\big(\cdot, x(\cdot), x'(\cdot)\big)$ fonksiyonunun

$[t_1, t_2]$ aralığında tüm $t \in [t_1, t_2]$ için L-integrali olması konusundaki gereklilik aşağıdaki gibidir.

$$\big(t, x(t)\big) \epsilon\, A \quad ve \quad x'(t)\ \epsilon\ Q(t, x(t))$$

Yine (2.1) integraline ve (2.2), (2.3) sınır koşullarına ek olarak $x(t) = (x^1, \ldots, x^n),\ t_1 \leq t \leq t_2$ mutlak sürekli yörüngesinin aşağıdaki diferansiyel denklemler sistemini sağlaması gerekir.

$$G_j\big(t, x(t), x'(t)\big) = 0, \quad t\ \epsilon\ [t_1\ , t_2],\ \ j = 1, \ldots, N < n, \tag{2.6}$$

Burada $G_j(t, x, u)$, AxR^n de belirlenmiş gerçek değerli fonksiyonlardır. Herhangi bir $(t, x)\ \epsilon\ A$ noktası için,

$$Q(t, x) = [z\ \epsilon\ R^n \mid G_j(t, x, z) = 0, j = 1, \ldots, N) \subset R^n$$

kümesi ele alınır. Bu kümenin mutlak sürekli *x(t)* n - vektör fonksiyonu, (2.6) sınırlaması altında (2.5) şeklinde gösterilebilir ya da $Q(x, t)$ kümesinin içerisinde $x'(t)\ \epsilon\ Q(t, x(t))$ olarak yazılabilir.

2.3 Varyasyon Hesabın Klasik Bolza Problemi

Varyasyon hesabının klasik Bolza probleminde, $A \subset R^{n+1}$ ve $B \subset R^{2n+2}$ olmak üzere, AxR^n de verilen $f_0(t, x, z)$ gerçek değerli fonksiyonu ile B de verilen $g(t_1, x_1, t_2, x_2)$ gerçek değerli fonksiyonu (2.1) ifadesinde yerine konularak aşağıdaki (2.7) diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem için maksimum ve minimum problemleri vardır.

$$J(x) = g\big(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)\big) + \int_{t_1}^{t_2} f_0\big(t, x(t), x'(t)\big) dt \tag{2.7}$$

Yukarıdakine benzer biçimde (2.2) ve (2.3) sınırlamaları ile

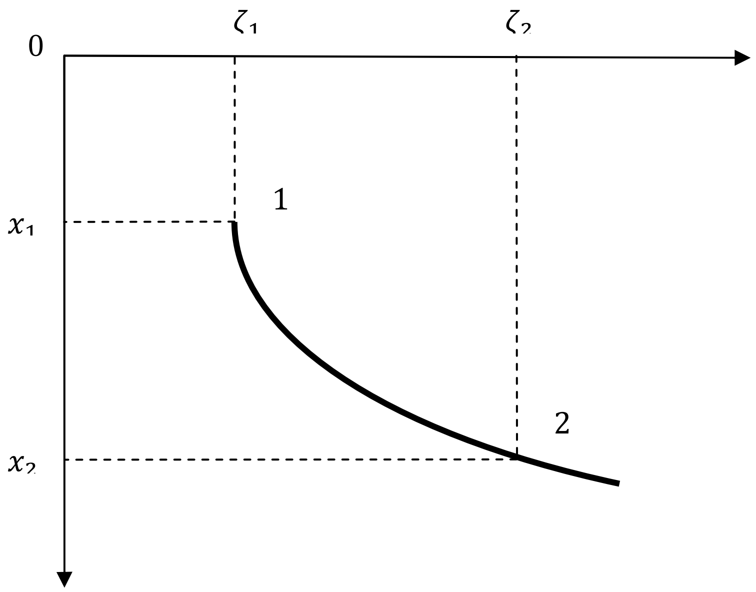
$$\big(t, x(t)\big) \in A, t \in [t_1\ , t_2],\ \big(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)\big) \in B$$

şeklinde, $y$ine mutlak sürekli $x(t) = (x^1, \dots, x^n)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ n – vektör fonksiyonu tarafından sağlanan bir $N < n$ için (2.7) diferansiyel denklemi elde edilir [4]. Bu tip problemlere Bolza problemi denir.

2.4 Varyasyon Hesabında Klasik Problem Örnekleri

1. Klasik Brachistochrone Problemi:

Düşey düzlem üzerinde verilen $(\zeta^1, x^1) = 1$ ve $(\zeta^2, x^2) = 2$ $\zeta^1 < \zeta^2$, $x^1 < x^2$ noktaları arasında başlangıç hızı $v_1 \geq 0$ olan ve 2 noktasına minimum sürede varan $C: x = x(\zeta)$, $\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$ eğrisini bulma problemidir.



Şekil-2.1: Brachistochrone Eğrisi

Bu problem ilk kez 1696 yılında John Bernoulli tarafından çözülmüştür. Problem $x(\zeta)$, $\zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2$, $x(\zeta_1) = x_1$, $x(\zeta_2) = x_2$ mutlak sürekli yörüngesinde ki tüm sınıflar için geçerlidir ve aşağıdaki fonksiyonelin minimumuna karşılık gelmektedir.

$$J(x) = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} (x - a)^{-1/2} (1 + x'^2)^{1/2} d\zeta, \quad (') = d/d\zeta$$

Burada α sabit $ve\ \alpha = x_1 - {v_1}^2/2g$ dir. g, yerçekimi ivmesidir. Optimal sonuç mevcut olup ve tektir, yani bir sikloit yayıdır. A, $[(\zeta, x) | \zeta_1 \leq \zeta \leq \zeta_2, x \geq x_1]$

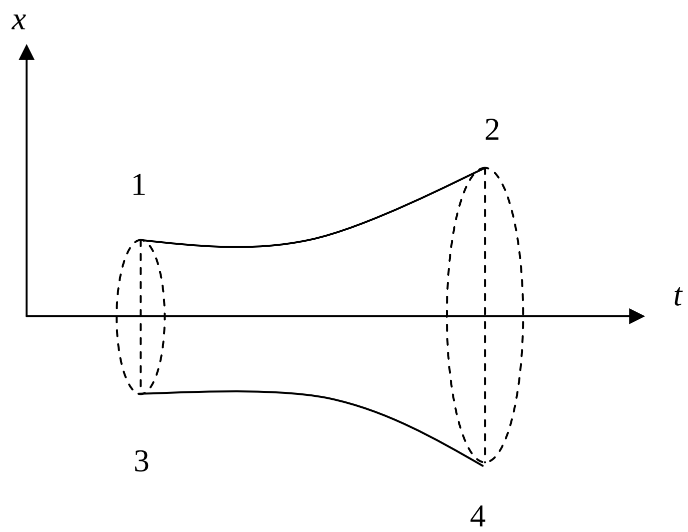
kümesidir. B ise $(\zeta_1, x_1, \zeta_2, x_2)$ biçiminde tektir. C eğrisi boyunca $1 = (\zeta_1, x_1)$ noktası $\zeta = \zeta_2$ dikey doğrusuna minimum sürede ulaşıyor ise o zaman ζ_2 sabittir, x_2 belirsizdir, A yukarıdaki gibidir ve R^4 ün alt kümesi olan $B = (\zeta_1,\ x_1,\ \zeta_2\ )$ x R dir.

2. *Minimum Alanın Dönel Yüzey Problemi*:

R^2 *de* verilen *tx* – düzlemi üzerinde, $1 = (t_1,\ x_1)$, $2 = (t_2,\ x_2)$, $t_1 < t_2$, $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ olmak üzere, $C: x = x(t),\ t_1 \leq t \leq t_2,\ x(t) \geq 0$ eğrisini bulma problemi, t ekseni etrafında minimum alanlı bir dönel S yüzeyi oluşturan

$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} x(t)\left(1 + x'^2(t)\right)^{1/2} dt$$

fonksiyonunun minimumunu bulma problemi ile aynıdır.



Şekil-2.2: Minimum Yüzey Alanı

A = $[t_1, t_2]$ x $[0, +\infty)$ içerisinde iki ucu sabit olan tüm x ler, mutlak sürekli yörüngelerin sınıfındadır. C: x = x(t), x mutlak sürekli şeklindeki formlarda optimal çözüm her zaman mevcut değildir. Eğer mevcut ise bu bir eğri yayıdır .

$x = x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$, $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ mutlak sürekli eğrisinin sınıfında minimum değeri olmayabilir. Ancak bu durumda bu eğriler ile tanımlanan dönel yüzey ile eğri tarafından tanımlanan dönel yüzeyi karşılaştırmak önemlidir. Sonuncusu daha küçük ve gerçek optimal çözüm olabilir fakat bu eğri $x = x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ şeklinde değildir .

3. <u>Minimum Uzunluk Problemi :</u>

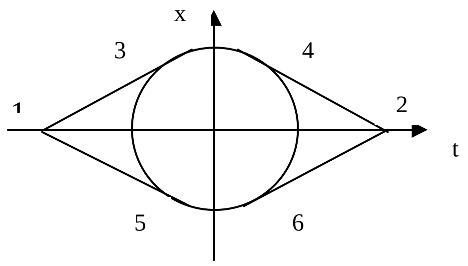
$x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ sınır koşulları ile sabit iki noktası $1 = (t_1, x_1)$, $2 = (t_2, x_2)$, $t_1 < t_2$ biçiminde verilen ve R^2 de bulunan *tx*-düzleminin parametrik olmayan eğrisinin minimum uzunluğu,

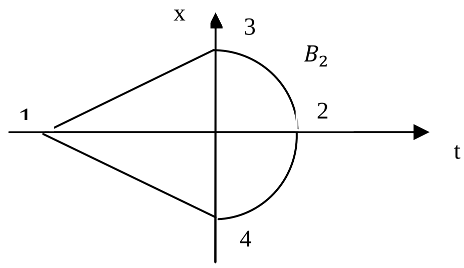
$$J(x) = \int_{t_1}^{t_2} \left(1 + x'^2(t)\right)^{1/2} dt$$

fonksiyonunu minimize etme problemine karşılık gelir. Çünkü mutlak sürekli *x* için C: $x = x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ eğrilerinin Jordan uzunluğu klasik integrale eşittir . $J(x)$ in minimumu *s = 12* ya da $m = (x_2 - x_1)/(t_2 - t_1)$ olmak üzere,

$$x(t) = x_1 + m(t - t_1), \ t_1 \leq t \leq t_2$$

tarafından verilir. 1 ve 2 ye bağlanan ve istediğimiz uzunlukta $C: x = x(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ poligonal hatlar varsa aynı fonksiyonun maksimumu yoktur.





Şekil - 2.3: Parametrik Olmayan Eğri Uzunluğu

Şekil - 2.4: Parametrik Olmayan Eğri

Eğer Lipschitzian olan $J(x)$ fonksiyonunu L nin sabit tüm $x(f)$ fonksiyonlarının sınıfı ile sınırlarsak ve bundan dolayı mutlak sürekli $|x'(t)| \leq L$ ise o zaman $L > |m|$ için aynı $J(x)$ fonksiyonu aynı minimuma sahiptir.

Ayrıca $A = [(t, x) \epsilon R^2 \,|t^2 + x^2 \geq I]$ bölgesindeki $1 = (-2, 0)$ dan $2 = (2, 0)$ a katılımlı tüm mutlak sürekli $C\colon x = x(t),\ -2 \leq t \leq 2$ eğrilerinin aynı sınıfında $J(x)$ fonksiyonunun iki optimal çözümü olduğu dikkate alınır. Bunlar Şekil - 2.3 te gösterilmiş olan 1342 ve 1562 eğrileridir.

Son olarak da $J(x)$fonksiyonunun $s = 13$ ve $s = 14$ ile verilen $B_2 = [(t, x)|t^2 + x^2 = 1, t \geq 0]$ yayının $1 = (a, 0)$ katılımlı tüm mutlak sürekli $C\colon x = x(t),\ a \leq t \leq t^2$eğrilerinin $a < 0$ durumunda iki minimumu vardır. Eğer $a = 0$ ise $(0, 0)$ noktasından $(s, y) \epsilon B^2$ noktasına $s > 0$ olan tüm yarıçaplar için sonsuz çözüm olduğu, eğer $a > 0$ $(s = 12)$ ise tam bir optimum çözüm olduğu görülür.

4. ***Minimum Olmayan Probleme Bir Örnek:***

$J(x) = \int_0^1 tx'^2 dt$ nin tüm mutlak sürekli $C\colon x = \mathrm{x(t)},\ 0 \leq t \leq 1$ eğrilerinin (0, 1) = 1 ve (1, 0) = 2 şartları altında mevcut olan sınıfında minimumu yoktur. Bunu görmek için,

$$f_0(t, x, x') = tx'^2$$

denkleminin $0 \leq t \leq 1$ durumu için negatif olmadığına dikkat edelim. Burada $inf\ x(0) = 1,\ x(1) = 0$ tüm mutlak sürekli $x(t),\ 0 \leq t \leq 1$ fonksiyonlarının sınıfı olarak alınmıştır. Bundan dolayı $i = inf\, J(x) \geq 0$ dır. Diğer yandan $0 \leq t \leq k^{-1}$ için $x_k(t) = 1$ biçiminde tanımlanan ve $k^{-1} \leq t \leq 1,\ \ k = 2, 3, \ldots$ için $x_k(t) = -\frac{\text{In t}}{\ln k}$ olacak şekilde mutlak sürekli bir $x_k(t), 0 \leq t \leq 1,\ k = 2, 3, \ldots$ fonksiyonu ele alındığında ya $x'_k(t) = 0$ ya da $x'_k(t) = -(t\ \text{In}k)^{-1}$ dir. Dolayısıyla $J[x_k] = (lnk)^{-1}$ dır. Böylece, k →∞ iken J$[x_k]$ → 0 ve $i = 0$ olur.

$J(x)$ fonksiyonu [0, 1] aralığında $tx'^2(t) = 0$ koşulunu beraberinde bulundurmaz ise $i = 0$ ifadesi bulunamaz. [0, 1] aralığında $x'(t) = 0$ ya da $x(t)$ sabit ise burada $x(0) = 1,\ x(1) = 0$ durumu gerekir. Bu durum, $J(x)$ in tüm mutlak sürekli $C: x =$ x(t)$, 0 \leq t \leq 1$ eğrilerinin $1 = (0,\ 1),\ 2 = (1,\ 0)$ sınıfı içerisinde mutlak minimumu olmadığını gösterir.

BÖLÜM 3: MAYER, LAGRANGE, BOLZA OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİ

3.1 Mayer Optimal Kontrol Problemleri

Mayer optimal kontrol probleminde, $t \in R$ değişkeni ile birlikte $x = (x^1, \ldots, x^n) \in R^n,\ n \geq 1$ ve $u = (u^1, \ldots, u^m) \in R^m,\ m \geq 1$ vektör değişkenleri ele alınır. Burada *t* bağımsız değişken (zaman), *x* durum yada faz değişkeni ve *u* ise kontrol değişkenidir.

$x(t) = (x^1, \ldots, x^n),\ u(t) = (u^1, \ldots, u^m),\ t_1 \leq t \leq t_2$ fonksiyonları ele alındığında (x yörünge, u kontrol, yönlendirici veya strateji olarak adlandırılır) bu fonksiyonların $\frac{dx}{dt} = f\big(t, x(t), u(t)\big), f(t, x, u) = (f_1, \ldots, f_n)$ diferansiyel denklem sistemini sağlaması gerekir. Diğer bir deyişle, seçili bir $u(t)$ için $x(t)$, $\frac{dx}{dt} = f\big(t, x, u(t)\big)$ diferansiyel denklem sisteminin normal formda bir çözümü olarak düşünülür. (t, x) değişkeninin $A \subset R^{n+1}$ alt kümesinde değişebileceği kabul edilir. u uzayında verilen bir U kümesinin değişkeni olan u nun, $U = R^m$ de veya $U = U(t, x)$ te *t*'ye, *x*'e veya her ikisinin nasıl tanımlandığına bağlı olarak değişmesi kabul edilir. Burada U bazen kontrol uzayı bazen de sınırlı bir küme olarak adlandırılır.

Problemin çözümü için *x*'in, bölüm (2.4) te yazılan $\big(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)\big) \in B$, $B \subset R^{2+2n}$ sınır koşullarını sağlaması gerekir. Son olarak, $g(t_1, x_1, t_2, x_2)$ fonksiyonu *B*'de tanımlanmış reel değerli bir fonksiyon olarak düşünülerek $J(x, u) = g\big(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)\big)$ fonksiyonunun maksimum ve minimumu bulunabilir. Bu tür fonksiyonlara maliyet fonksiyonu denir.

Örnek olarak, (t_1, x_1) ve x_2 sabitken $g = t_2$ ise $u(t)$' yi ve buna karşı gelen yörünge olan $x(t)$'yi belirleyecek bir stratejiye ihtiyacımız vardır. Bu nedenle hareketli bir nokta olan $P = (x_1, \ldots, x_n)$, aşağıda diferansiyel sistem (3.2) de görülen, x_1 den, x_2 ye mümkün olan en kısa t_2 zamanında hareket eder. Bu problem, minimum zaman problemi veya Brachistochrone problemi olarak adlandırılır.

Özet olarak, burada fonksiyonun maksimum veya minimumunu bulma problemi vardır.
Fonksiyon,

$$J(x,u) = g\big(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)\big) \tag{3.1}$$

diferansiyel sistem,

$$dx/dt = f\big(t, x(t), u(t)\big),\ t_1 \leq t \leq t_2 \tag{3.2}$$

sınır koşul,

$$e[x] = (t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) \in B, \tag{3.3}$$

ve kısıtlar,

$$\big(t, x(t)\big) \in A, \qquad t_1 \leq t \leq t_2 \tag{3.4}$$

$$u(t) \in U\big(t, x(t)\big), \quad t_1 \leq t \leq t_2 \tag{3.5}$$

şeklinde olup bu tip problemlere optimal kontrol teorisinde Mayer problemi veya kanonik Mayer problemi denir [14]. Bu problemin kısıtları

$$\int_{t_1}^{t_2} \left|x'(t)\right|^p dt \leq C\,, \qquad p \geq 1 \tag{3.6}$$

ya da

$$\int_{t_1}^{t_2} |u(t)|^q dt \leq D\,, \qquad q \geq 1,$$

biçiminde ifade edilir.

Bölüm (2.1) deki gibi, x bölgesel sürekli ve türevli, u, $[t_1\,, t_2]$ arasında bölgesel sürekli ve u, $x(t) = (x^1, \ldots, x^n)$, $u(t) = (u^1, \ldots, u^m)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ tüm değer çiftleri sınıfında iken optimal çözüm olan x in bulunması beklenir. Ancak bu tür optimal çözümler bu sınıf içerisinde olmadığından ve var olan problemlerle ilgili pek çok güçlük olduğundan, optimal çözüm olan x'i, x gibi mutlak sürekli ve $[t_1, t_2]$ aralığında ölçülebilir olan u çiftlerinin daha geniş sınıflarında aramak daha uygun olur. Bu varsayımla, x mutlak sürekli ve u ölçülebilir olmak üzere, $x(t)$, $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ çiftinin (3.2), (3.4), (3.5) koşullarını sağladığı kabul edilebilir. Ele aldığımız problem, kontroller ve stratejiler açıkça belirtilmeksizin çevirici alanlar yönünden yazılabilir.

$J(x, u)$ fonksiyonunun maksimum ve minimum değerlerinin *u(t)* kontrol fonksiyonu tarafından U sınırları içinde elde edildiği durumlar vardır. Örneğin, $m = 1$, $U = [-1 \leq u \leq 1]$ ve *u(t)* nin sadece ± 1 değerlerini aldığını varsayalım. Bu duruma bang - bang çözümü denir.

Varyasyon hesabında Lagrange ve Bolza problemleri, optimal kontrol problemlerinde daima özel durumlar gibi düşünülmektedir. Yüksek dereceden diferansiyel denklemler içeren Mayer tipi optimal kontrol problemleri, birinci dereceden diferansiyel denklemli Mayer problemlerine indirgenir. Mesela, $x^{h(t)} = F\left(t, x, x', \dots, x^{(h-1)}, u\right)$ denklemi $x = y_1, x' = y_2, \dots, x^{(h-1)} = y_h$ alınarak $y_1^1 = y_2, \dots, y_{h-1}^1 = y_h, y_h^1 = F(t, y_1, \dots, y_h, u)$ (3.2) biçimine dönüştürülür.

3.2 Türev Kısıtlaması Olan Lagrange ve Bolza Optimal Kontrol Problemleri

Türev kısıtlaması olan Lagrange optimal kontrol problemlerinde,

fonksiyon,

$$J(x,u) = \int_{t_1}^{t_2} f_0\big(t, x(t), u(t)\big)dt$$

diferansiyel sistem,

$$x'(t) = f\big(t, x(t), u(t)\big), \quad u(t) \in U\big(t, x(t)\big), \quad t \in [t_1, t_2], \qquad (3.7)$$

kısıtlar,

$$\big(t, x(t)\big) \in A, \qquad \big(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)\big) \in B,$$
$$x(t) = (x^1, \dots, x^n), \; u(t) = (u^1, \dots, u^m),$$

olmak üzere, her $(t,x) \in A$ için,

$$Q(t,\mathrm{x}) = [z |\; z = f(t,x,u), u \in U(t,x)] \subset R^n,$$
$$\tilde{Q}(t,\mathrm{x}) = [(z^0, z) |\; z^0 \geq f_0(t,x,u), z = f(t,x,u), u \in U(t,x)] \subset R^{n+1}$$

kümesi belirlenir. Burada, $Q(t,\mathrm{x})$ ile R^{n+1}'de $\tilde{Q}(t,\mathrm{x})$ kümesinin her $(t,x) \in A$ için, $T(t,\mathrm{x},\mathrm{z})$ ile genişletilmiş gerçek değerli fonksiyonu elde edilir. T(t, x, z) ya aşağıdaki gibidir

$$T(t,\mathrm{x},\mathrm{z}) = \inf\, [z^0 | (z^0, z) \in \tilde{Q}(t,\mathrm{x})]$$
$$= \inf[z^0 | z^0 \geq f_0(t,x,u), z = f(t,x,u), u \in U(t,x)], \quad z \in R^n,$$

veya $-\infty \leq T(t, \mathrm{x}, \mathrm{z}) \leq +\infty$ dur.

Burada, $T(t, \mathrm{x}, \mathrm{z}) = +\infty$ ve her $z \notin Q(t, \mathrm{x})$ dir. Çünkü yukarıda verilen *inf.* , gerçel sayılar sınıfındandır. Öte yandan,

$$z \in Q(t, \mathrm{x}) \text{ ve } (t, x) \in A \text{ için } -\infty \leq T(t, \mathrm{x}, \mathrm{z}) \leq +\infty.$$

biçiminde genişletilmiş fonksiyon olan $T(t, \mathrm{x}, \mathrm{z})$ fonksiyonu optimal kontrol problemiyle ilgili Lagrange fonksiyonu olarak adlandırılır (3.7). O halde (3.7) problemi, herhangi bir $x(t)$, $u(t)$, $t_1 \leq t \leq t_2$ için, $x'(t) \in Q(t, \mathrm{x}(t))$ ve $\big(t, (t, x)\big) \in A$, $\big(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)\big) \in B$ olmak üzere,

$$J_0(x) = \int_{t_1}^{t_2} T\big(t, x(t), x'^{(t)}\big) dt \leq J(x, u) \tag{3.8}$$

olur. Burada $T(t, \mathrm{x}(t),\ x'(t))$ ölçülebilir ve L - integrali alınabilir ise diğer bir deyişle türev üzerindeki $x'(t) \in Q(t, \mathrm{x}(t))$ kısıtlaması ile varyasyonun hesaplanması problemi vardır. Alternatif olarak,

$$J(x, u) = g\big(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)\big) + \int_{t_1}^{t_2} f_0\big(t, x(t), u(t)\big) dt \tag{3.9}$$

düşünülebilir. Burada, B de tanımlanan reel değerli f_0 ve $g\big(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)\big)$ fonksiyonları, (3.2) deki diferansiyel denklemler, (3.3) deki sınır koşullar, (3.4) ve (3.5) deki kısıtlamalarla birlikte önceki gibidir. Buna Bolza optimal kontrol problemi denir [4, 7].

BÖLÜM 4: MAYER, LAGRANGE VE BOLZA OPTİMAL KONTROL PROBLEMLERİNİN BİRBİRLERİNE İNDİRGENMESİ

Lagrange problemleri, bu probleme ilaveten x^0 durum değişkeni, $\tilde{x} = (x^0, x) = (x^0, x^1, x^2, \dots, x^n)$ yeni durum vektörü, $dx^0/dt f_0\big(t, x(t), u(t)\big)$ diferansiyel denklemi ve $x^0(t_1) = 0$ başlangıcı şartı göz önüne alınarak kolayca Mayer problemlerine indirgenir. Böylece *J*(x,u)= $x^0(t_2)$ durumuna gelerek $g = x^0(t_2)$, $(n+1)$ vektörünün $\tilde{x}$ vektörüne yerleştirildiği Mayer Problemi elde edilir [14].

Benzer şekilde Bolza problemi de x^0 durum değişkeni, $x^0(t_1) = 0$ başlangıç şartı, $dx^0/dt = f_0$ diferansiyel denklemi göz önüne alınarak Mayer problemine indirgenir. Böylece (3.9) fonksiyonu

$$J(x,u) = g\big(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)\big) + x^0(t_2)$$

halini alır ve yeniden Mayer problemi elde edilir.

Burada açıkça görülmektedir ki Bolza problemleri Mayer ve Lagrange problemlerini içermektedir. Çünkü, (3.9) fonksiyonu eğer $f_0 = 0$ ise (3.1)'e yani Mayer problemine, eğer $g = 0$ ise (3.7)'ye yani Lagrange problemine indirgenebilir [7, 10].

Şimdi de Mayer ve Bolza problemlerinin Lagrange problemlerine indirgenebileceğini gösterelim. x^0 ilave durum değişkeni ve ek diferansiyel denklemin başlangıç şartı,

$$dx^0/dt = 0, \qquad x^0(t_1) = (t_2 - t_1)^{-1} g\big(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)\big),$$

olmak üzere, (3.1) fonksiyonu

$$J(x,u) = \int_{t_1}^{t_2} x^0(t)\, dt$$

olur.

(3.9) fonksiyonu da

$$J(x,u) = \int_{t_1}^{t_2} [f_0\big(t, x(t), u(t)\big)] + x^0(t)dt,$$

olur. Böylece Mayer, Lagrange ve Bolza problemlerinin teorik olarak birbirlerine denk oldukları söylenebilir [5].

Burada ilginç bir konu da, $f_0 > 0$ olan herhangi bir Lagrange probleminin minimum zaman problemine indirgenebilmesidir. Eğer $\tau, \frac{d\tau}{dt} = f_0\big(t, x(t), u(t)\big)$, ilişkisi t ile ilgili yeni bir zaman değişkeni olursa, $t = t(\tau)$ ilişkisi $\tau = \tau(t)$ ilişkisi şeklinde tersine dönüştürülebilir. Başlangıç ve zaman değişkenleri olan $t_1$ve t_2 yeni zaman değişkenleri olan $\tau_1 = \tau(t_1), \tau_2 = \tau(t_2)$ halini alır ve diferansiyel sistem

$$dx/dt = f_0\big(t, x(t), u(t)\big),$$
$$dx/dt < f {f_0}^{-1}$$

olur. Bu durumda (3.7) fonksiyonu da,

$$J(x,u) = \int_{t_1}^{t_2} f_0 \, dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau = \tau_2 - \tau_1,$$

şekline dönüşür.

Mayer, Lagrange ve Bolza problemlerinin, f ve f_0 fonksiyonları zamandan bağımsız olmak şartıyla, otonom olduğu söylenebilir.

Yukarıdaki herhangi bir probleme x^{n+1} ilave değişkeni, $dx^{n+1}/dt = 1$ diferansiyel denklemi, $x^{n+1}(t_1) = t_1$ sınır koşulları tanımlandığında, $x^{n+1} = t$ haline gelerek otonom probleme indirgenebilir.

Aynı problemler sabit bir aralıkta örneğin [0, 1] aralığında otonom problemlere indirgenebilir. Bu işlem, x^{n+1}, x^{n+2} yeni iki değişken, $dx^{n+1} = x^{n+2}$, $dx^{n+2}/d\tau = 0$ (yani $d^2x^{n+1}/d\tau^2 = 0$) diferansiyel denklemleri ve $x^{n+1}(0) = t_1$, $x^{n+1}(1) = t_2$ sınırları tanımlanarak yapılabilir. Bu durumda,

$$t = x^{n+1} = t_1 + (t_2 - t_1)\tau,\ x^{n+2} = t_2 - t_1,\ 0 \leq \tau \leq 1$$

halini alır ve t durum değişkeni yeniden x^{n+1} olur.

Lagrange optimal kontrol problemi klasik Lagrange varyasyon hesabı problemlerini de kapsar. Eğer $m = n,\ f(t,x,u) = u,\ f_1(t,x,u) = u^1, i = 1, \dots, n$ ve $U = R^n$ ise $x'(t) = u(t)$ olur ve problem (3.7) diferansiyel denklemi olmaksızın sadece (3.3) ve (3.4) kısıtlarıyla

$$(t_1, x(t_1), t_2, x(t_2)) \in B, \left(t, x(t)\right) \in A,\ J[x] = \int_{t_1}^{t_2} f_0\left(t, x(t), x'(t)\right) dt$$

fonksiyonuna indirgenir. Diğer bir deyişle, bölüm (2.1) de bahsedilen Lagrange varyasyonlar hesabı problemleri daima Lagrange optimal kontrol problemleri gibi $(m = n,\ f = u, U = R^n)$ ve Mayer problemleri gibi düşünülebilir.

Benzer şekilde, bölüm (2.3) te bahsedildiği gibi klasik Bolza varyasyonlar hesabı problemleri, Lagrange problemleri için kullandığımız denklemler ve (2.2), (2.3) özel kısıtlamaları sayesinde daima Bolza optimal kontrol problemleri $(m = n, f = u, U = R^n)$ ve Mayer problemleri gibi düşünülebilir.

Aşağıda (3.7) probleminin (3.8)'e indirgenmesinin bir örneği verilmektedir.

<u>Örnek 1:</u> $n = 1,\ m = 2$ olmak üzere,

$$J[x,u,v] = \int_0^1 (2u^2 + 2v^2) dt, \qquad dx/dt = u + v,$$
$$x(0) = x, x(1) = x_2, ve\ (u,v) \in U = [u \geq 0,\ v \geq 0] \subset R^2,$$
$$z^0 = f_0(t,x,u,v) = 2u^2 + 2v^2 = (u+v)^2 + (u-v)^2$$
$$z = f(t,x,u,v) = \mathrm{u} + \mathrm{v}$$

vardır. Dolayısıyla, $z^0 \geq T(t, \mathrm{x}, \mathrm{z}) = z^2$ ve ayrıca $Q(t, \mathrm{x}) = [z \mid z \geq 0]$ üzerinde değişir. Optimal kontrolün verilen problemi aşağıdaki probleme indirgenmiştir.

$$J_0[x] = \int_0^1 \left(x'(t)\right)^2 dt, \quad x(0) = x_1, \quad x(1) = x_2,$$

Sınırlama ise,

$$x'(t) \in Q\big(t, \mathrm{x}(t)\big) = [z \mid z \geq 0] \subset R, \text{ yani } x' \geq 0,$$

biçimindedir. f_0 ve f fonksiyonları daima açık şekilde yazılamaz. Ancak teorik olarak, bu fonksiyon vardır ve kullanılabilir.

<u>Örnek 2:</u> $J(x,u) = \int_0^1 u^2 dt$, $x' = x + u$, fonksiyonunun $x(0) = x_1 = 1$, $x(1) = x_2 = 0$ koşulları altında minimumu olduğunu gösterelim.

Burada $n = m = 1$, $U = R$ iken problem bir Lagrange problemidir. Bu problem, $x' = x + u$, $y' = u^2$, $n = 2$, $m - 1$, $x(0) = 1$, $x(1) = 0$, $y(0) = y_1 = 0$ iken Mayer problemine yani $J[x, y, u]$'ya indirgenir. Mayer probleminde $y(1) = y_2 \in R$ olduğu için $B = (0, 1, 0; 1, 0, \mathrm{y}_2)$, R^6 da düz bir çizgidir.

<u>Örnek 3:</u> $x(0) = x_1 = 1$ iken $x' - x + u$, $J[x, u] = \int_0^1 u^2 dt + (x(1))^2$ nin minimumudur. $n = m = 1$ alındığında U = R iken $g = x_2^2 = (x_2(1))^2$ dir ve bu bir Bolza problemidir.

Bu problemde, $x' - x + u$, $y' = u^2$, $n = 2$, $m = 1$ alındığında
$x(0) = x_1 = 1, y(0) = y_1 = 0$ iken $g = y_2 + x_2^2 = y(1) + \big(x(1)\big)^2$ olur ve

$$J[x, y, u] = y(1) + (x(1))^2$$

olacak şekilde problem Mayer problemine indirgenir.

SONUÇ

Bu çalışmada klasik varyasyon hesabının Lagrange, Bolza ve Mayer problemleri ele alınmış ve bu problemlere bağlı uygulama alanları gösterilmiştir. Daha sonra adı geçen problemlerin birbirlerine dönüştürülebileceği ispatlanmıştır. Ayrıca, tezde türev kısıtlamaları olan Lagrange problemleri de incelenmiş ve onun optimal kontrol problemi ile ilintisi ortaya koyulmuştur. Teorik materyali açıklayan örneklere de yer verilmiştir. Böylece, klasik varyasyon hesabı problemlerinin, optimal kontrol problemi olarak yorumlanarak çözümlenebileceği gösterilmiştir.

KAYNAKÇA

[1] **Akhiezer, N.I**., The Calculus of Variations. Blaisdell, 1962. pp.247

[2] **Bliss, G.A,** *Lectures on the Calculus of Variation*. The University of Chicago Press, (1961)

[3] **Bliss, G.A,** The Calculus of Variations. University of Chicago Press, (1946)

[4] **Bolza, O.,** *Lectures on the Calculus 0f Variations*. Dover Publications, New York (1961).

[5] **Fleming, W.H. Richel, R.W.,** *Deterministic and Stochastic Optimal Contro.* Springer-Verlag (1975).

[6] **Gelfand, I. M., and Fomin S. V.,** *Calculus of Variations*. Prentice Hall. Englewood Chiff New Jersey, (1963).

[7] **Graves, L.M.,** On *the Weierstrss Condition fort he problem of Bolza in the Calculus* of Variations , Anal of math. Vol.33, 747-752, (1932)

[8] **Graves, L.M.,** On *the Problem of Lagrange.*, Amer. J. math. 53, pp.547-554.

[9] **Hestenes, M.R.,** *Calculus of Variations and Optimal Control Theory* John Wiley And Sons, New York, (1966).

[10] **Leitmann, G.,** *The Calculus of Variations and Optimal control Plenum,* Press New York and London (1983)

[11] **Lighton, W.,** *Boundary for the Solutions of a Second Order Linear Differantial* Equation, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, V.35 N4, (1949).

[12] **Makas S.,** Varyasyonlar Hesabının Singülerite Problemleri, Doktora Tezi, M.S.Ü, Fen Bilimleri Enstitüsü, (1996).

[13] **Morse, M.,** Singular Quadratic Functionals, Math.Anal 201, pp 315-340 (1973).

[14] **Reid,** *Analogues of the Jacobi Conditionfor the Problem of Mayer in the Calculus of Variations* , Anals of Math. Vol.35 pp 836-848, (1934)

[15] **Rockafellar, R.T.,** *Optimal ares And The Minimum Value Function in the Problem of Lagrange* , Trans.Amer. math. Pp. 53-84, (1973).

[16] **Tagiyev, M.H.,** Necessary and Sufficient Condition for Strong Extremum in Degenereted Problems of the Calculus of Variations, Russian Service of Math, V34, 7, (1979).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Cüneyd BAŞTANOĞLU

Doğum Tarihi : 04.03.1982

Doğum Yeri : Denizli

Medeni Durum: Bekar

Mezun Olduğu Üniversite: Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Fen - Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2001 - 2005).

İş Tecrübeleri:

2005 - (halen devam ediyor): Uğur Dershaneleri Beşiktaş Şubesi, Matematik Öğretmeni , İstanbul.

Yabancı Dili: İyi derecede İngilizce.

Bilgisayar Bilgileri: MS Office (Word, Excel, Powerpoint - İleri Düzeyde)

Sertifika Bilgileri: Teknoloji, İnovasyon ve Eğitim - Harvard University Extension School ve Bahçeşehir Üniversitesi Ortak Sertifika Programı (2007)