

T.C.  
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DAİRESEL REGRESYON  
ve  
ULUSAL İMKB 100 ENDEKSİ ÜZERİNE BİR UYGULAMA

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
Deniz AYBER

İstatistik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Funda H. SEZGİN

MAYIS 2009

Deniz AYBER tarafından hazırlanan "DAİRESEL REGRESYON ve ULUSAL İMKB 100 ENDEKSİ ÜZERİNE BİR UYGULAMA" adlı bu tezin yüksek lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Funda H. SEZGİN

Tez Yöneticisi



Bu çalışma, jürimiz tarafından İstatistik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan : Yrd. Doç. Dr. Funda H. SEZGİN



Üye : Prof. Dr. Nalan CİNEMRE



Üye : Yrd. Doç. Dr. Sezai MAKAS



Bu tez, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

# DAİRESEL REGRESYON

ve

## ULUSAL İMKB 100 ENDEKSİ ÜZERİNE BİR UYGULAMA

(Yüksek Lisans Tezi)

Deniz AYBER

MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Mayıs 2009

### ÖZET

Bu çalışmada amaç, dairesel verilerin uygulama alanlarını açıklamak, dairesel verilerin özelliklerini, merkezi ve yayılım ölçülerini tanıtmak, dairesel dağılım ve grafik türlerini incelemek, dairesel değişkenlerin kendi aralarında veya doğrusal değişkenler ile olan ilişkisini belirlemek ve bu değişkenlerin regresyon analizi sonucu modellemesini, bilinen klasik istatistiksel tekniklerden farklı olan dairesel tekniklerin var olduğunu ortaya koyarak yapmaktır.

Bu amaç doğrultusunda, dairesel verilerin özellikleri incelenmiş, dairesel ölçümlerin farklı birimleri arasındaki dönüşümleri açıklanmış, grafiksel veri gösterimlerine yer verilmiş ve dairesel tanımlayıcı istatistikler hesaplanmıştır. Dairesel dağılım türleri, Dairesel Normal Dağılım ayrıntılı olarak ele alınmak üzere incelenmiştir. Dairesel Normal Dağılımın ortalama yön, yoğunlaşma parametresine ilişkin tahminler verilmiş buna bağlı olarak güven aralıkları oluşturulmuş ve uyum iyiliği test istatistikleri hesaplanmıştır. Dairesel değişkenlerin kendi aralarında ve doğrusal değişkenler arasındaki korelasyon katsayısı hesaplamaları ve bu katsayıların geçerlilik testleri verilmiştir. Değişkenler arası belirlenen ilişki sonrasında modelleme aşamasına geçilmiş ve Ulusal İMKB 100 endeksi için öncü bir göstergenin araştırıldığı uygulama bölümünde regresyon analizi yapılmıştır.

**Bilim Kodu** :

**Anahtar Kelimeler** : Dairesel Veri, Dairesel İstatistik, Dairesel Normal Dağılım (Von Mises), Dairesel Korelasyon, Dairesel Regresyon

**Sayfa Adedi** : 129

**Tez Yöneticisi** : Yrd. Doç. Dr. Funda H. SEZGİN

**CIRCULAR REGRESSION**  
**and**  
**AN APPLICATION ABOUT THE NATIONAL IMKB 100 INDEX**  
**(M.Sc. Thesis)**  
**Deniz AYBER**

**MIMAR SINAN FINE ARTS UNIVERSITY**  
**INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

**May 2009**

**ABSTRACT**

The main purpose of this study is, to explain the application areas of circular data, to promote properties of circular data center and spread measures, to examine the distribution and circular chart types, to determine its relationship with variables circular or linear in the variables among themselves and different from the classical statistical technique known as circular techniques have revealed that the operatives when regression analysis to model the results of these variables.

In the light of this aim, the properties of circular data is investigated, conversions between different units of circular measurement is described, been given place to the graphical data representation and circular descriptive statistics were calculated. Circular distribution types was examined to be treated as detailed in Circular Normal Distribution. Given estimates for the mean direction, concentration parameter depending on the kindness generated confidence intervals and calculated goodness of fit test statistics of Circular Normal Distribution. Circular variables among themselves and between linear variables correlation coefficient to calculate and it tests the validity coefficients were relationships between variables identified in the modeling stage, then were switched to a leading indicator for the National IMKB 100 index and investigate the application of regression analysis were made in.

**Science Code** :  
**Key Words** :Circular Data, Circular Statistic, Circular Normal Distribution, Circular Correlation, Circular Regression  
**Page Number** : 129  
**Supervisor** : Ast. Prof. Dr. Funda H. SEZGİN

## **ÖNSÖZ**

Bu çalışmanın her aşamasında göstermiş olduğu ilgi, görüş ve eleştirileri için danışman hocam Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Yrd. Doç. Dr. Funda H. SEZGİN'e, çalışmamın gerçekleşmesi için gerekli ortamı hazırlayan ve yazım aşamasında yaptığı düzeltmelerle yardımcı olan Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen – Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Nalan CİNEMRE'ye, bilgisayar paket programlarının tedarik edilmesi, bu programların kullanımı ve kaynak taraması aşamasında önemli katkılarda bulunan Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen - Edebiyat Fakültesi öğretim üyelerinden Sayın Yrd. Doç. Dr. Sezai MAKAS'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Semra ERPOLAT'a, Sayın Yrd. Doç. Dr. Eylem Deniz AKINCI'ya, Sayın Arş. Gör. Elif Özge ÖZDAMAR'a, Sayın Arş. Gör. Ozan KOCADAĞLI'ya, Sayın Arş. Gör. Barış AŞIKGİL'e, Sayın Arş. Gör. Bahar KINAY'a, Sayın Arş. Gör. Ferda Esin GÜLEL'e, Marmara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencilerinden Esra ŞENSOY'a, Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Yrd. Doç. Dr. Kadir Özgür PEKER'e, California Üniversitesi İstatistik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Dr. Ulric J. LUND'a, bu aşamada manevi desteklerini gördüğüm ailem ve çalışma arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs 2009

Deniz AYBER

# İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖZET.....	i
SUMMARY.....	ii
ÖNSÖZ.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	vii
ÇİZELGE LİSTESİ.....	x
SEMBOL LİSTESİ.....	xi
KISALTMALAR LİSTESİ.....	xii
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. DAİRESEL VERİLERİN ÖZELLİKLERİ ve GRAFİKLERİ.....</b>	<b>3</b>
2.1. Dairesel Verilerin Özellikleri.....	3
2.1.1. Dairesel Ölçümlerin Farklı Birimleri Arasındaki Dönüşümler.....	5
2.2. Dairesel Veri Grafikleri.....	5
2.2.1. Dairesel Ham Veri Grafikleri.....	6
2.2.2. Dairesel Kartezyen Veri Grafikleri.....	7
2.2.3. Doğrusal Histogram.....	7
2.2.4. Dairesel Histogram.....	8
2.2.5. Gül Şeması.....	8
<b>3. DAİRESEL TANIMLAYICI İSTATİSTİKLER.....</b>	<b>9</b>
3.1. Dairesel Ortalama Yön, Bileşke Uzunluğu ve Ortalama Bileşke Uzunluğu.....	10
3.1.1. Dairesel Ortalama Yön.....	10
3.1.2. Dairesel Bileşke Uzunluğu ve Ortalama Dairesel Bileşke Uzunluğu.....	11
3.1.2.1. Dairesel Ortalama Yön, Bileşke Uzunluğu ve Ortalama Dairesel Bileşke Uzunluğunun Genellenmesi.....	12
3.2. Yoğunlaşma Parametresi.....	15
3.3. Dairesel Varyans.....	17
3.4. Dairesel Standart Sapma.....	19
3.5. Dairesel Saçılım Ölçüsü ve Ortalama Yönün Dairesel Standart Hatası..	19
3.6. Dairesel Medyan Yönü.....	20
3.7. Dairesel Mod Yönü.....	21
<b>4. DAİRESEL OLASILIK DAĞILIMLARI.....</b>	<b>22</b>
4.1. Düzgün Dağılım.....	23
4.2. Kosinüs (Kardioid) Dağılım.....	24
4.3. Üçgensel (Triangular) Dağılım .....	24
4.4. Genel Sarmal Dağılımlar.....	25
4.4.1. Sarmal Normal Dağılım.....	25
4.4.2. Sarmal Cauchy Dağılım.....	26

4.5. Dairesel Normal (Von Mises) Dağılımı.....	27
4.5.1. Dairesel Normal Dağılımın Parametre Tahminleri.....	28
4.5.2. Dairesel Normal Dağılım İçin Uyum İyiliği Testi.....	30
4.5.2.1. $\mu$ ve $\kappa$ 'nın Bilinmemesi Durumunda Uyum İyiliği Testi.....	30
4.5.2.2. $\mu$ ve $\kappa$ 'nın Bilinmesi Durumunda Uyum İyiliği Testi.....	31
4.5.2.3. $\mu$ 'nin Bilinmesi ve $\kappa$ 'nın Bilinmemesi Durumunda Uyum İyiliği Testi.....	32
4.5.2.4. $\kappa$ 'nın Bilinmesi ve $\mu$ 'nin Bilinmemesi Durumunda Uyum İyiliği Testi.....	32
4.5.3. Dairesel Normal Dağılımda Aykırı Gözlemler İçin Uyuşmazlık Testi.....	33
4.5.4. Dairesel Normal Dağılımda Parametre Testleri ve Güven Aralığının Saptanması.....	33
4.5.4.1. Tek Örneklem Olması Durumunda Uygulanacak Parametre Testleri ve Güven Aralığının Saptanması.....	34
4.5.4.2. İki Örneklem Olması Durumunda Uygulanacak Parametre Testleri ve Güven Aralığının Saptanması.....	37
4.5.4.3. Çok Örneklem Olması Durumunda Uygulanacak Parametre Testleri ve Güven Aralığının Saptanması.....	41
4.5.4.3.1. Çok Örneklem Olması Durumunda Varyans Analizi Tablosunun Oluşturulması....	43
<b>5. DAİRESEL KORELASYON VE REGRESYON.....</b>	<b>45</b>
5.1. Dairesel Korelasyon.....	45
5.1.1. Dairesel - Dairesel ( <i>Circular - Circular</i> ) Korelasyon.....	46
5.1.1.1. Dairesel - Dairesel Korelasyon Katsayısı Testi.....	47
5.1.2. Doğrusal - Dairesel ( <i>Linear - Circular</i> ) Korelasyon.....	48
5.1.2.1. Doğrusal - Dairesel Korelasyon Katsayısı Testi.....	49
5.1.3. Dairesel - Doğrusal ( <i>Circular - Linear</i> ) Korelasyon.....	50
5.1.3.1. Dairesel - Doğrusal Korelasyon Katsayısı Testi.....	50
5.2. Dairesel Regresyon.....	51
5.2.1. Dairesel - Dairesel ( <i>Circular - Circular</i> ) Regresyon.....	51
5.2.1.1. Dairesel - Dairesel Regresyon Katsayılarının ve Saçılım Parametresinin Tahmini.....	52
5.2.1.2. Trigonometrik Polinom Derecesinin ( $m$ ) Belirlenmesi.....	55
5.2.1.2.1. Trigonometrik Polinom Derecesinin Belirlenmesinde Kullanılan Asimptotik Test...	58
5.2.2. Dairesel - Doğrusal ( <i>Circular - Linear</i> ) Regresyon.....	59
5.2.3. Doğrusal - Dairesel ( <i>Linear - Circular</i> ) Regresyon.....	61
<b>6. UYGULAMA.....</b>	<b>62</b>
6.1. Amaç ve Kapsam.....	62
6.2. Değişkenlerin Durağanlık Analizleri.....	65
6.3. Dairesel Dönüşüm Uygulamaları.....	69
6.4. Değişkenlerin Dairesel Grafik Gösterimleri.....	69
6.5. Değişkenlerin Dairesel Tanımlayıcı İstatistikleri.....	72
6.6. Değişkenlerin Dağılım Testleri ve Grafiksel Gösterimleri.....	73
6.7. Değişkenlerin Deneysel Dağılım Fonksiyonları ve Dağılım Uyum Grafikleri.....	78
6.8. Değişkenlerin Bootstrap Yöntemiyle Örneklem Analizleri.....	82
6.9. İMKB U-100 Değişkeniyle Diğer Değişkenlerin Dağılım, Örtüşüm ve Karşılaştırmalı Grafikleri.....	87

	<u>Sayfa No</u>
6.9.1. İkili Gül Şeması Örtüşüm Grafikleri.....	88
6.9.2. İkili Nokta Dağılım Grafikleri.....	88
6.9.3. İkili Dağılım Fonksiyonu Örtüşüm Grafikleri.....	89
6.9.4. Deneysel Dağılım Fonksiyonu Karşılaştırma Grafikleri ve Homojenlik Test İstatistikleri.....	89
6.10. Birleşik Homojenlik Testleri.....	92
6.11. İMKB U-100 Değişkeniyle Diğer Değişkenlerin Dairesel Korelasyon Katsayısı ve Geçerlilik Test İstatistikleri.....	93
6.12. İMKB U-100 Değişkeniyle Diğer Değişkenlerin Dairesel Regresyon Analizi ve Geçerlilik Test İstatistikleri.....	95
<b>7. SONUÇLAR ve TARTIŞMA.....</b>	<b>103</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>106</b>
<b>EKLER.....</b>	<b>108</b>
EK 1. Dairesel Normal Dağılımda (Von Mises) Verilen Yoğunlaşma Parametresi Değerleri İçin Ortalama Bileşke Uzunluğu Değerleri.....	108
EK 2. Dairesel Normal Dağılımda (Von Mises) Verilen Ortalama Bileşke Uzunluğu Değerleri İçin Tahmini Yoğunlaşma Parametresi Değerleri...	109
EK 3. Dairesel Normal Dağılımın (Von Mises) Uyum İyiliği Testi İçin Kritik Değerleri.....	110
EK 4. Dairesel Normal Dağılımın (Von Mises) Örneklem İçin Uyuşmazlık Testi Kritik Değerleri.....	110
EK 5. Ki-kare ( $\chi^2_{s,d;\alpha}$ ) Dağılımı Kritik Değerleri.....	111
EK 6. Dairesel Normal Dağılımda (Von Mises) Verilen Yoğunlaşma Parametresine Karşılık Gelen Açısal Dönüşüm Değerleri.....	112
EK 7. $F_{n_1,n_2;\alpha}$ Dağılımı Kritik Değerleri.....	113
EK 8. Tahmini Yoğunlaşma Parametresine ( $\hat{\mathbf{R}}^* = \mathbf{x}$ ) Karşılık Gelen $\mathbf{A}^{-1}(\hat{\mathbf{R}}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})$ Değerleri.....	114
EK 9. Normal Dağılım ( $z_\alpha$ ) Olasılık Değerleri.....	115
EK 10. S-Plus Paket Programı Circstat Eklentisi Dairesel İstatistik Yazılım Kodları.....	116
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>117</b>



## ŞEKİL LİSTESİ

	<b><u>Sayfa No</u></b>
Şekil 2.1. Kuzey başlangıçlı gözlemin saat doğrultusunda dönüş yönü.....	3
Şekil 2.2. Doğu başlangıçlı gözlemin saat doğrultusunun tersine doğru dönüş yönü.....	4
Şekil 2.3. Dairesel verilerin ham veri grafiği.....	6
Şekil 2.4. Bazı noktalarda birden fazla tekrar edilen daireseel verilerin ham veri grafiği.....	6
Şekil 2.5. Dairesel verilerin kartezyen grafiği.....	7
Şekil 2.6. Dairesel verilerin doğrusal histogram.....	7
Şekil 2.7. Dairesel verilerin daireseel histogram.....	8
Şekil 2.8. Dairesel verilerin gül şeması.....	8
Şekil 3.1. Kutupsal ve dik koordinatlar arasındaki ilişki.....	9
Şekil 3.2. İki daireseel gözleme ilişkin ortalama yön ve bileşke vektör.....	12
Şekil 4.1. Sürekli daireseel dağılımın daireseel gösterimi.....	22
Şekil 4.2. Sürekli daireseel dağılımın doğrusal gösterimi.....	23
Şekil 4.3. Yoğunlaşma parametresinin ortalama yön üzerindeki etkisi.....	27
Şekil 6.1. İMKB U-100 değişkeninin durağanlaştırma aşamaları.....	66
Şekil 6.2. BRENT değişkeninin durağanlaştırma aşamaları.....	66
Şekil 6.3. FTSE 100 değişkeninin durağanlaştırma aşamaları.....	66
Şekil 6.4. MSCI TR değişkeninin durağanlaştırma aşamaları.....	67
Şekil 6.5. CBOE OIX değişkeninin durağanlaştırma aşamaları.....	67
Şekil 6.6. RTSI değişkeninin durağanlaştırma aşamaları.....	68
Şekil 6.7. BUX değişkeninin durağanlaştırma aşamaları.....	68
Şekil 6.8. S&P 500 değişkeninin durağanlaştırma aşamaları.....	68
Şekil 6.9. İMKB U-100 değişkeninin daireseel grafik türleri.....	69
Şekil 6.10. BRENT değişkeninin daireseel grafik türleri.....	70
Şekil 6.11. FTSE 100 değişkeninin daireseel grafik türleri.....	70
Şekil 6.12. MSCI TR değişkeninin daireseel grafik türleri.....	70
Şekil 6.13. CBOE OIX değişkeninin daireseel grafik türleri.....	71

Şekil 6.14. RTSI değişkeninin dairesel grafik türleri.....	71
Şekil 6.15. BUX değişkeninin dairesel grafik türleri.....	71
Şekil 6.16. S&P 500 değişkeninin dairesel grafik türleri.....	72
Şekil 6.17. İMKB U-100 değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri.....	73
Şekil 6.18. BRENT değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri.....	74
Şekil 6.19. FTSE 100 değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri.....	74
Şekil 6.20. MSCI TR değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri.....	75
Şekil 6.21. CBOE OIX değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri.....	76
Şekil 6.22. RTSI değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri.....	76
Şekil 6.23. BUX değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri.....	77
Şekil 6.24. S&P 500 değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri.....	78
Şekil 6.25. İMKB U-100 değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği.....	78
Şekil 6.26. BRENT değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği.....	79
Şekil 6.27. FTSE 100 değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği.....	79
Şekil 6.28. MSCI TR değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği.....	80
Şekil 6.29. CBOE OIX değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği.....	80
Şekil 6.30. RTSI değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği.....	81
Şekil 6.31. BUX değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği.....	81
Şekil 6.32. S&P 500 değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği.....	82
Şekil 6.33. İMKB U-100 değişkeninin bootstrap örnekleme analizi.....	82
Şekil 6.34. BRENT değişkeninin bootstrap örnekleme analizi.....	83

Şekil 6.35. FTSE 100 değişkeninin bootstrap örnekleme analizi.....	84
Şekil 6.36. MSCI TR değişkeninin bootstrap örnekleme analizi.....	84
Şekil 6.37. CBOE OIX değişkeninin bootstrap örnekleme analizi.....	85
Şekil 6.38. RTSI değişkeninin bootstrap örnekleme analizi.....	86
Şekil 6.39. BUX değişkeninin bootstrap örnekleme analizi.....	86
Şekil 6.40. S&P 500 değişkeninin bootstrap örnekleme analizi.....	87
Şekil 6.41. İMKB U-100 değişkeninin diğer değişkenlerle göl şeması örtüşüm grafikleri.....	88
Şekil 6.42. İMKB U-100 değişkeninin diğer değişkenlerle ikili nokta dağılım grafikleri.....	88
Şekil 6.43. İMKB U-100 değişkeninin diğer değişkenlerle fonksiyonel örtüşüm grafikleri.....	89
Şekil 6.44. İMKB U-100 & BRENT değişkenlerinin deneysel dağılım analizi.....	89
Şekil 6.45. İMKB U-100 & FTSE 100 değişkenlerinin deneysel dağılım analizi.....	90
Şekil 6.46. İMKB U-100 & MSCI TR değişkenlerinin deneysel dağılım analizi.....	90
Şekil 6.47. İMKB U-100 & CBOE OIX değişkenlerinin deneysel dağılım analizi.....	91
Şekil 6.48. İMKB U-100 & RTSI değişkenlerinin deneysel dağılım analizi.....	91
Şekil 6.49. İMKB U-100 & BUX değişkenlerinin deneysel dağılım analizi.....	91
Şekil 6.50. İMKB U-100 & S&P 500 değişkenlerinin deneysel dağılım analizi	92
Şekil 6.51. Birleştirilmiş değişkenlerin Rao homojenlik testleri.....	92
Şekil 6.52. İMKB U-100 & BRENT değişkenlerinin ilişki analizi.....	93
Şekil 6.53. İMKB U-100 & FTSE 100 değişkenlerinin ilişki analizi.....	93
Şekil 6.54. İMKB U-100 & MSCI TR değişkenlerinin ilişki analizi.....	93
Şekil 6.55. İMKB U-100 & CBOE OIX değişkenlerinin ilişki analizi.....	94
Şekil 6.56. İMKB U-100 & RTSI değişkenlerinin ilişki analizi.....	94
Şekil 6.57. İMKB U-100 & BUX değişkenlerinin ilişki analizi.....	94
Şekil 6.58. İMKB U-100 & S&P 500 değişkenlerinin ilişki analizi.....	94
Şekil 6.59. İMKB U-100 ile yüksek etkileşimli göstergeler grafiği.....	102

## ÇİZELGE LİSTESİ

	<b><u>Sayfa No</u></b>
Çizelge 4.1. Varyans Analizi Formülleri.....	44
Çizelge 6.1. ADF Testi Durağanlık Analizi.....	65
Çizelge 6.2. Dairesel Tanımlayıcı İstatistikler.....	72
Çizelge 6.3. Bağımlı İMKB U-100 ve bağımsız BRENT değişkenlerinin düzeyle göre regresyon analizleri.....	96
Çizelge 6.4. Bağımlı İMKB U-100 ve bağımsız FTSE 100 değişkenlerinin düzeyle göre regresyon analizleri.....	96
Çizelge 6.5. Bağımlı İMKB U-100 ve bağımsız MSCI TR değişkenlerinin düzeyle göre regresyon analizleri.....	97
Çizelge 6.6. Bağımlı İMKB U-100 ve bağımsız CBOE OIX değişkenlerinin düzeyle göre regresyon analizleri.....	97
Çizelge 6.7. Bağımlı İMKB U-100 ve bağımsız RTSI değişkenlerinin düzeyle göre regresyon analizleri.....	98
Çizelge 6.8. Bağımlı İMKB U-100 ve bağımsız BUX değişkenlerinin düzeyle göre regresyon analizleri.....	98
Çizelge 6.9. Bağımlı İMKB U-100 ve bağımsız S&P 500 değişkenlerinin düzeyle göre regresyon analizleri.....	99
Çizelge 6.10. Birleşik Model Geçerlilik Tablosu.....	99
Çizelge 6.11. İMKB U-100 & BRENT Etki Sıralı Modellemeleri.....	100
Çizelge 6.12. İMKB U-100 & RTSI Etki Sıralı Modellemeleri.....	101
Çizelge 6.13. İMKB U-100 & S&P 500 Etki Sıralı Modellemeleri.....	101
Çizelge 6.14. İMKB U-100 & CBOE OIX Etki Sıralı Modellemeleri.....	101
Çizelge 6.15. İMKB U-100 & FTSE 100 Etki Sıralı Modellemeleri.....	102
Çizelge 6.16. İMKB U-100 & BRENT Etki Sıralı Modellemeleri.....	102
Çizelge 6.17. İMKB U-100 & BUX Etki Sıralı Modellemeleri.....	102

## SEMBOL LİSTESİ

$\theta$	: Dairesel Gözlem Değeri
$\bar{\theta}$	: Dairesel Ortalama Örneklem Yönü
$\mu$	: Dairesel Kitle Ortalama Yönü
$R$	: Dairesel Örneklem Bileşke Uzunluğu
$\rho$	: Dairesel Kitle Bileşke Uzunluğu
$\bar{R}$	: Dairesel Ortalama Örneklem Bileşke Uzunluğu
$\bar{\rho}$	: Dairesel Ortalama Kitle Bileşke Uzunluğu
$\kappa$	: Dairesel Yoğunlaşma Parametresi
$A_1(x)$	: Dönüştürülmüş İki Bessel Fonksiyonunun Oranı
$I_p(x)$	: $p$ -inci sıra dönüştürülmüş Bessel Fonksiyonu
$V$	: Dairesel Varyans
$v$	: Dairesel Standart Sapma
$\delta$	: Dairesel Saçılım Ölçüsü
$\sigma$	: Dairesel Standart Hata
$\tilde{\theta}$	: Dairesel Medyan
$\check{\theta}$	: Dairesel Mod
$\xi$	: Dairesel Uzaklık Miktarı
$\alpha, \beta$	: İkili Dairesel Gözlem Değeri
$L$	: Olabilirlik Fonksiyonu
$\rho_{(\alpha, \beta)}$	: Korelasyon Ölçüsü
$r_{(X, Y)}$	: Korelasyon Katsayısı
$f(\alpha, \beta)$	: Bileşik Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
$g(\alpha)$	: Koşullu Yoğunlaşma Fonksiyonu
$Y^{(i)}$	: Bağımlı Değişken Matrisi
$\tilde{X}^{(i)}$	: Bağımsız Değişken Matrisi
$\tilde{\lambda}^{(i)}$	: Regresyon Katsayılar Matrisi
$\Sigma$	: Saçılım Matrisi
$m$	: Trigonometrik Polinom Derecesi
$\varepsilon$	: Hata Terimi
$g(x)$	: Kaldıraç Fonksiyonu
$X_t^*$	: Zaman Serisi

## KISALTMALAR LİSTESİ

<i>VM</i>	: Dairesel Normal Dağılım
<i>var</i>	: Varyans
<i>kov</i>	: Kovaryans
<i>kor</i>	: Korelasyon
<b>İMKB U - 100</b>	: İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Ulusal 100 Endeksi
<b>BRENT</b>	: İngiltere Brent Petrol Varil Fiyatı
<b>FTSE 100</b>	: İngiltere Ulusal Endeksi
<b>MSCI TR</b>	: Morgan Stanley Türkiye Endeksi
<b>CBOE OIX</b>	: Chigago Petrol Borsası Endeksi
<b>RTSI</b>	: Rusya Ticaret Borsası Endeksi
<b>BUX</b>	: Macaristan Ulusal Endeksi
<b>ADF</b>	: Augmented Dickey Fuller

## 1. GİRİŞ

Yönlere ilişkin herhangi bir gözlem kümesi, yönsel (directional) veri olarak adlandırılır. Çoğunlukla meteoroloji, biyoloji, jeoloji, tıp, coğrafya, jeofizik ve psikoloji gibi alanlarda ölçümler yönsel veri olarak ölçülebilen açılar halinde kaydedilir. Yönsel gözlemler, rastgele deneylerde farklı biçimlerde ölçülür. Bu gözlemler kimi zaman rüzgar yönleri, kuşların serbest bırakıldıktan sonraki gidiş yönleri, hayvanların herhangi bir uyarılmaya karşı verdikleri yönsel tepkiler, okyanustaki akıntı yönleri, kardiyoritm veya biyoritm gibi doğrudan ölçümler şeklinde ölçülebilir de kimi zaman bazı gözlemler periyodik aralıklı zaman ölçümlerine herhangi bir formül yardımıyla dönüştürülür. Örneğin; Bir meteoroloji uzmanı rüzgârın seyir yönüne, bir biyolog bir kuşun uçuş yönüne ya da bir hayvanın herhangi bir uyarı sonucu hareket yönüne, bir okyanus bilimci dalgaların akış yönüne, bir jeolog dünyanın manyetik kutup yönüne, bir kardiyoloji uzmanı vektör-kardiyografik alana odaklanabilir. Yönsel araştırmalar incelenecek araştırmayla ilgili değişkenlerin boyutuna bağlı olarak yapılır. Değişkenlere ilişkin gözlemlerin, iki boyutlu olması halinde dairesel (circular), üç boyutlu olması halinde ise küresel (spherical) olarak adlandırılan bir tanımlama mevcuttur.

Doğrusal verilere uygulanan klasik istatistiksel yöntemlerin yönsel veriler üzerinde uygulanması, parametre tahmini ve regresyon çözümlemesi gibi konularda hatalara sebep olur. Bu yüzden bilinen istatistiksel tekniklerinden farklı olarak birçok yöntem geliştirilmiştir. Kendine özgü istatistiksel hesaplamalara sahip yönsel veri analizinin gelişimi, 1953 yılında Gumbel E.J. ve arkadaşlarının dairesel normal dağılımın teorik altyapı araştırmalarından 1968 yılında Ajne B.'nin dairesel dağılımlar için düzgünlük testleri geliştirmesine, 1980 yılında Mardia K.V. ve Jupp E.'un iki değişkenli dairesel dağılımlar için korelasyon katsayısı hesaplamasından, 1999 yılında Lund U.J.'un en küçük kareler regresyonunun dairesel yorumuna kadar dayanmaktadır.

Son zamanlarda özellikle parametrik olmayan tekniklere ilişkin ilerleme kaydedilmesi, yeni istatistiksel yöntemlerin gelişiminde yönsel istatistiklerin ne kadar verimli bir alan olduğunu gözler önüne sermektedir.

Geleceği doğru ve tutarlı bir şekilde tahmin etmek ve bunu geçmişe bakarak yapmak oldukça zordur. Özellikle borsa gibi aşırı oynaklığı (volatilite) olan ortamlarda bu daha da güç olmaktadır. Köklü değişikliklerin gerçekleştiği, krizlerin yer aldığı sistemlerde tahminleme başarısı oldukça düşmektedir. Günümüzde birçok araştırmacı bu nedenden dolayı, nokta tahmini yerine endeks yönünün nereye gideceğinin öncüsü olan yeni bir endeks oluşturmayı amaçlamaktadır. Borsa gelecek hakkındaki beklentilerle hareket ettiği için diğer değişkenler için bir tahmin edici durumundadır. Örneğin; borsa, GSMH gibi diğer değişkenlerin yönünü tahmin etmekte fakat bu ilişki ters yönlü işlememektedir. Ayrıca, psikolojik nedenlerden dolayı oluşan sürü (herding) davranışı ve buna bağlı köpükler (bubbles), kısa vadeli tahmin sonuçlarının isabetli olmasını engellemektedir. Son dönemde birçok uygulayıcı için borsa tahminlerinde en başarılı olabilecek yöntemlerden bir tanesi öncü göstergeleri kullanmaktır.

Çalışmanın amacı, İMKB U-100 indeksine yön verdiği düşünülen değişkenlere yönelik bir öncü gösterge geliştirmektir. Borsanın, yönsel veri özelliği gösterdiği göz önüne alınarak analiz edilmesi ve çıkarımların yapılması diğer önemli hedefdir. Çalışmada 28.08.2006 – 09.06.2008 dönemine ilişkin eş zamanlı çalışma günleri dikkate alınmak üzere 343 günlük gözlemler filtrelenmiş ve İMKB U-100 endeksi üzerinde etkili olduğu düşünülen BRENT, FTSE-100, MSCI TR, OIX, RTSI, BUX, S&P 500 değişkenleri ile uygulama çalışması yapılmıştır.

Çalışmanın birinci bölümünde, yönsel verilere ve uygulama alanlarına ilişkin bilgiler verilmiş, ikinci bölümünde, dairesel veri özellikleri anlatılmış ve dairesel grafik çizimleri yapılmış, üçüncü bölümünde, tanımlayıcı istatistiklerin hesaplama yöntemleri ve kullanım alanları açıklanmış, dördüncü bölümünde, dairesel olasılık dağılımları olasılık yoğunluk fonksiyonları ve trigonometrik momentleri ile anlatılmış, ayrıca dairesel normal dağılım, parametre tahminleri, parametre testleri, güven aralığı saptanması ve uyum iyiliği testleri ile örneklem durumuna bağlı olarak ayrıntılı bir şekilde incelenmiş, beşinci bölümünde, dairesel korelasyon ve regresyon analizleri, türlerine göre ayrılarak geçerlilik testleri, trigonometrik polinom derecesi tespitleri ile anlatılmış, altıncı bölümünde ise değişkenlerin durağanlık analizleri yapılmış, grafikleri ayrı ayrı ve ikili olarak çizilmiş dağılım uyumları araştırılmış, korelasyon ve regresyon analizleri yapılarak modellemelere ve grafiksel gösterimlerine yer verilmiştir.

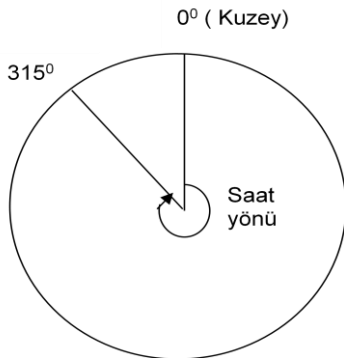


## 2. DAİRESEL VERİLERİN ÖZELLİKLERİ ve GRAFİKLERİ

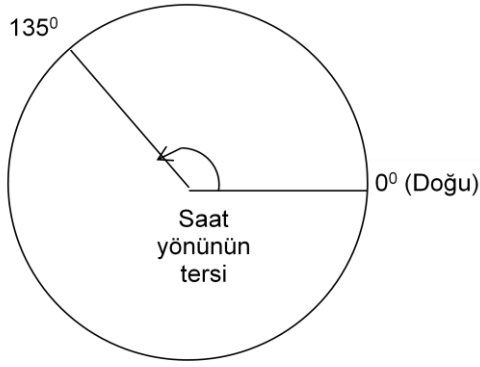
### 2.1. DAİRESEL VERİLERİN ÖZELLİKLERİ

Dairesel verilere ilişkin yönler, uygun biçimde seçilmesi gereken bir sıfır yönüne ve dönüş doğrultusuna göre ölçülen iki boyutlu açılar olarak gösterilir. Sıfır yönü, başlangıç noktasının ve dönüş doğrultusunun saat yönüne veya saat yönünün tersine doğru alınacağını belirtir. Yön kavramında herhangi bir büyüklük söz konusu olmadığından gözlem değerleri merkezi orijin olan bir birim çemberin çevresi üzerinde noktalarla ya da orijini bu noktalarla birleştiren birim vektörlerle gösterilebilir. Buna göre derece cinsinden ölçülmüş tek bir gözlem,  $[0^\circ; 360^\circ]$  aralığında tanımlanan birim vektör olacaktır. Bu dairesel gösterimden dolayı iki boyutlu yönler için gözlemler, dairesel (circular) veri olarak da adlandırılır. Burada  $\theta^\circ$ , vektör ile pozitif  $x$  ekseninin saat yönünde veya saat yönünün tersi yönünde yaptığı açığı gösterir. Vektörün kartezyen koordinatları  $(\cos \theta; \sin \theta)$  ve kutupsal koordinatları  $(1; \theta)$ 'dir. Üç boyutlu yönsel gözlemler ise birim vektör biçimindeki iki açı yardımıyla bir birim kürenin yüzeyi üzerinde gösterilir ve bu gözlemler küresel (spherical) veri olarak adlandırılır.

Yönsel verilerin, hem modelleme hem de istatistiksel tekniklere ilişkin birçok farklı ve yeni özelliği bulunmaktadır. Örneğin; iki boyutlu bir yönün, açı ya da birim vektör biçimindeki sayısal gösteriminin tek bir tane olması beklenmemelidir. Çünkü dairesel gözlem değeri, sıfır yönü ve dönüş pozisyonunun saat yönünde olup olmaması seçimine bağlıdır (Peker, 2002).



**Şekil 2.1.** Kuzey başlangıçlı gözlemin saat doğrultusunda dönüş yönü



**Şekil 2.2.** Doğu başlangıçlı gözlemin saat doğrultusunun tersine doğru dönüş yönü

Şekil (2.1)'de  $315^\circ$ , kuzey yönü sıfır yönü kabul edilerek saat yönüne doğru belirlenirken Şekil (2.2)'de aynı nokta doğu yönü sıfır yönü kabul edilerek saat yönünün ters yönü doğrultusunda belirlenir ve  $135^\circ$ 'ye karşılık gelir. Şekil (2.1) ve Şekil (2.2)'de belirtilen durum küresel veriler için de geçerlidir. Burada üzerinde durulması gereken nokta elde edilen sonuçların, verilen gözlem değerlerinin bir fonksiyonu olmasından dolayı orijin ve dönüş doğrultusu gibi keyfi değerlere bağlı olmamasıdır. Yine bu keyfilikten dolayı doğal bir düzenleme veya sıralama bulunmamasıdır. Başlangıç noktası ile bitiş noktasının çakıştığı yönsel verilerin yöntemlerinde, herhangi iki nokta arasındaki uzaklığın nasıl ölçüleceğine dikkat edilmesi gerekir.

Yönsel veri analizi, tek değişkenli veya çok değişkenli verilerin istatistiksel analiz yöntemlerinden oldukça farklıdır. Yönsel verilerin keyfi yön ve dönüş doğrultusu seçimlerinden dolayı bilinen klasik istatistiksel tekniklerle uygulanması halinde hatalı sonuçlar verir. Dolayısıyla moment üreten fonksiyon, olasılık yoğunluk fonksiyonu ve dağılım fonksiyonu gibi bilinen analitik araçlar da yararsız olmaktadır. Korelasyon, regresyon, yansızlık, kayıp fonksiyonlar, varyans sınırları, güç fonksiyon monotonluğu ve bunların istatistiksel ölçüleri gibi birçok kavram, yönsel veri setleri için yeniden düzenlenerek tanımlanmıştır.

Son yirmi yılda korelasyon, regresyon ve zamana veya konuma bağlı yapıdaki verilerin analizi problemleri üzerinde durularak bu verilerin işlenmesinde kullanılan çeşitli istatistiksel yöntemler geliştirilmiştir. Buna paralel olarak genel istatistik yöntemlerinde ve özellikle parametrik olmayan düzgünleştirme ve örnekleme yöntemlerindeki gelişmeler, veri analizcilerinin denetlemesi güç olan problemlerinde ilerlemelerine katkıda bulunmaktadır.

Dairesel veri analizinde herhangi bir yönsel analiz problemi çeşitli varsayımlarda göz önüne alınarak, dairesel analiz teknikleriyle çözümlenebilecek hale getirilebilir.

Örneğin; herhangi bir mağazanın bir yıl boyunca yaptığı satışlar,  $360^\circ$ 'lik bir daireye her gün için bir açı gelecek şekilde eşit olarak dağıtılır ve geniş zaman süreci için incelenirse satışlarda yıllara göre dairesellik uyarlanmış olur. Böylece basit tekniklerin yönsel veri setlerine uyarlanmasıyla daha karmaşık tekniklerin de kullanılabilmesi sağlanır. Yönsel verilere uygulanan bu teknikler zaman ilerledikçe tüm bilimlerde uygulama alanı yaratmakta ve buna paralel olarak verim artmaktadır (Peker, 2002).

### 2.1.1. Dairesel Ölçümlerin Farklı Birimleri Arasındaki Dönüşümleri

Derece olarak belirtilen  $\theta^\circ$  açısının radyan cinsinden ifadesi,

$$\theta^\circ = \frac{180\theta}{\pi}, \quad 0^\circ < \theta^\circ \leq 360^\circ \quad (2.1)$$

$$\theta = \frac{\pi\theta^\circ}{180}, \quad 0 < \theta \leq 2\pi \quad (2.2)$$

şeklinindedir. Birim yarıçaplı çember üzerindeki herhangi bir yay, çemberin merkezinde bulunan  $\theta$  radyan açısının iki ucunun birleşmesinden oluşuyorsa, yayın uzunluğu  $\theta$  olur. Eksene dayalı verilerin belirli aralıklarda yoğunlaşmasından dolayı  $\left[0^\circ; 360^\circ/h\right]$  aralığında bulunan herhangi bir  $\theta^\circ$ 'nin,

$$\theta^* = \frac{h\pi\theta^\circ}{180} \quad (2.3)$$

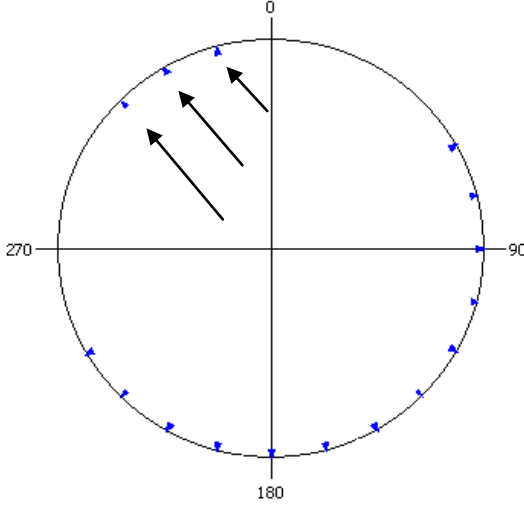
eşitliği ile  $0; 2\pi$  aralığına dönüştürülmesi mümkündür. Eşitlik (2.3)'teki  $h$ , herhangi bir tamsayı değeridir. Ayrıca  $[0^\circ; 180^\circ]$  aralığında değerler alan eksense dayalı veriler,  $[0^\circ; 360^\circ]$  aralığında değerler alan dairesel yüzeye uyarlanarak dönüştürülmek üzere iki ile çarpılır (Peker, 2002).

## 2.2. DAİRESEL VERİ GRAFİKLERİ

Dairesel verilerin açıklanması ve analizine yönelik önemli aşamalardan biri gruplanmış veya gruplanmamış verilerin grafik ve histogramlarının çizilmesidir. Parametre ve istatistiksel hesaplamalardan önceki adımı oluşturan bu çizimlerden, veri seti hakkında bilgi sahibi olma açısından yüksek düzeyde faydalanılırken, hesaplanarak elde edilebilecek bilgilere daha kısa sürede ulaşılması sağlanmaktadır.

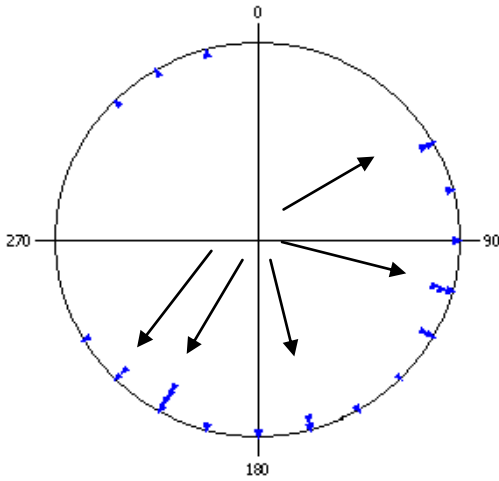
### 2.2.1. Dairesel Ham Veri Grafikleri

Gruplanmamış ve ham halde bulunan verilerin kullandığı grafik türüne Dairesel Ham Veri Grafikleri denir. Dairesel Ham Veri Grafiklerinin en önemli ve en yararlı özelliği, Şekil (2.3)'deki gibi özel olarak incelenmesi gereken aykırı değerleri net bir şekilde ortaya koyabilmesidir.



**Şekil 2.3.** Dairesel verilerin ham veri grafiği

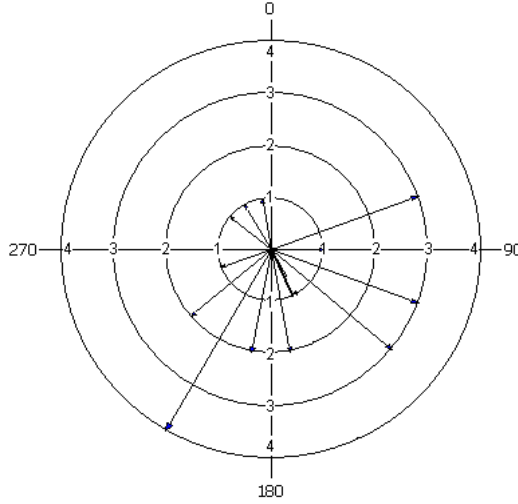
Gruplanmamış veri seti içerisinde herhangi bir gözlemden birden fazla sayıda varsa bu değerler ham veri grafikleri üzerinde Şekil (2.4)'deki gibi üst üste noktalar konularak gösterilir.



**Şekil 2.4.** Bazı noktalarda birden fazla tekrarlanan dairesel verilerin ham veri grafiği

### 2.2.2. Dairesel Kartezyen Grafikleri

Çemberin çevresi üzerindeki gözlenen gruplanmamış verilerle orijinin birleştirilmesi sonucunda, Şekil (2.5)'deki gibi elde edilen birim çember yarıçapları çizilerek vektörlerin birim uzunlukta olduğu ve tekrarlanan verilerin çember dışında ayrıca ifade edildiği Dairesel Kartezyen Grafikleri olarak adlandırılan grafikler çizilir.

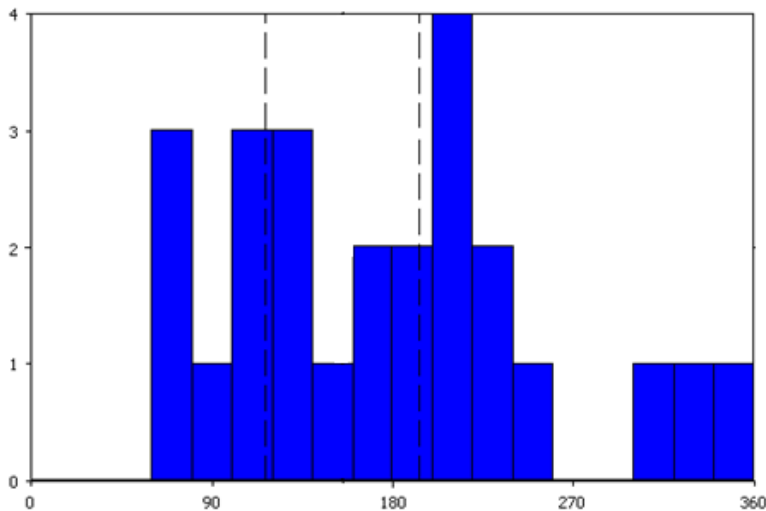


Şekil 2.5. Dairesel verilerin kartezyen grafiği

Gruplanmış verilerde ise belirlenen doğrusal verilerde olduğu gibi sınıf aralığına bölünen verilerin sıklığı, oluşturulan sınıflar sayesinde bulunur.

### 2.2.3. Doğrusal Histogram

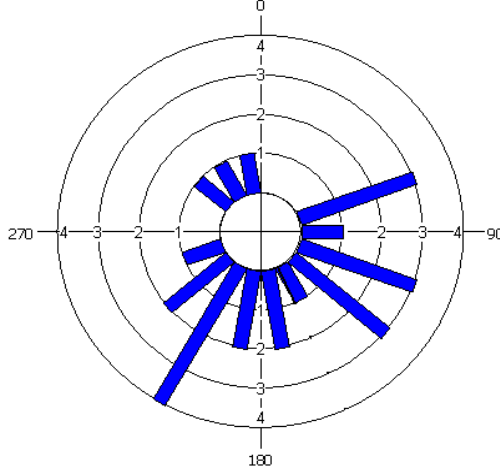
$[0^\circ; 360^\circ]$  aralığında bulunan verilere ilişkin seçilen grup genişliğine bağlı olarak çizilen grafik, doğrusal verilere benzer biçimdedir. Şekil (2.6)'daki gibi yorumlanması kolay olduğu için tercih edilen bu grafik türüne Doğrusal Histogram denir.



Şekil 2.6. Dairesel verilerin doğrusal histogramı

#### 2.2.4. Dairesel Histogram

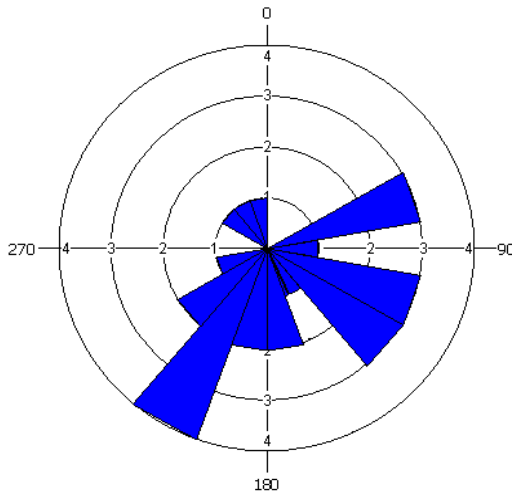
Çemberin çevresine Doğrusal Histogramın sarılmasıyla elde edilen grafik türüne Dairesel Histogram denir. Şekil (2.7)'deki gibi çemberin çevresine kendi sınıf aralığındaki sıklık miktarı ile orantılı ve kendi grup aralığının orta noktası olacak şekilde alana yerleştirilen her bloğun oluşturulması ile çizilir.



Şekil 2.7. Dairesel verilerin dairese histogramı

#### 2.2.5. Gül Şeması

Tepe noktası orijin olmak üzere sınıf aralığının iki ucu bir yay ile birleştirildikten sonra her grubun Şekil (2.8)'deki gibi bir daire dilimi olarak gösterildiği grafiğe Gül Şeması denir. Her dilimin yarıçapı, grubun sıklığının kareköküyle, yani grup sıklığı ile orantılı olarak alınır. Sıklıkların karekökleri ile orantılı alanlar elde edebilmek için sıklıkların karekökleri yarıçap olarak alınmalıdır. Verilerin  $[0^\circ;180^\circ]$  aralığında yer alması durumunda grafik yarım daire diliminde çizilir ve simetriği alınarak tam daire şekline dönüştürülür.



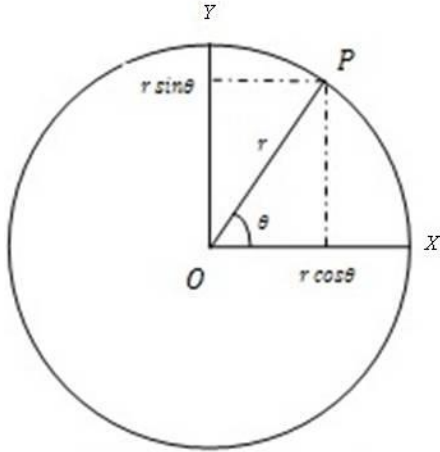
Şekil 2.8. Dairesel verilerin gül şeması

### 3. DAİRESEL TANIMLAYICI İSTATİSTİKLER

Dairesel veriler, birim çemberin çevresi üzerinde açılar ya da noktalar biçiminde gösterilerek iki koordinat değeriyle belirlenir. Bu amaçla, sıfır orijinli ve sıfıra göre  $(X, Y)$  eksenli dik koordinat sistemi kullanılabilir.

Düzlemdeki herhangi bir  $P$  noktası,  $(x, y)$  dik koordinatları ile veya  $(r, \theta)$  kutupsal koordinatları ile Şekil (3.1)'deki gibi gösterilir. Burada  $r$ ,  $P$  noktasının orijine uzaklığını,  $\theta$  ise  $P$  noktasının yönünü göstermektedir.

Özel bir durum olarak sıfır noktası için  $r = 0$  olarak tanımlanır ve bu noktanın yönü belirtilemediği için tanımsızdır.



**Şekil 3.1.** Kutupsal ve dik koordinatlar arasındaki ilişki

Kutupsal koordinatların birbirlerine dönüşümü trigonometrik fonksiyonlarla gerçekleştirilir.  $(r, \theta)$  kutupsal koordinatlarına sahip  $P$  noktası ele alındığında dik koordinatlar,

$$x = r \cos \theta \quad (3.1)$$

$$y = r \sin \theta \quad (3.2)$$

olarak tanımlanır.

Dairesel veri analizinde vektörün uzunluğu değil vektörün yönü ele alındığında kolaylık olması için  $r=1$  olarak kabul edilmektedir. Böylece her bir yöne, birim çemberin çevresi üzerinde bir  $P$  noktası karşılık gelmektedir. Bu nokta, alternatif olarak yalnızca açıyla belirtilir.  $P$  noktası birim çemberin çevresi üzerinde bir nokta ise kutupsal ve dik koordinatlar arasındaki dönüşüm şöyledir.

$$1; \theta \Leftrightarrow (X = \cos \theta, Y = \sin \theta) \quad (3.3)$$

$P_i = x_i, y_i$  olarak ifade edilmesine rağmen bu şekildeki veriler, düzlem üzerinde iki değişkenli veri olarak düşünülmemelidir. Çünkü  $x_i$  ve  $y_i$  değerleri bütünüyle (3.4) nolu eşitliğe bağlıdır. [1]

$$x_i^2 + y_i^2 = 1 \quad \forall i \quad (3.4)$$

### 3.1. DAİRESEL ORTALAMA YÖN, BİLEŞKE UZUNLUĞU ve ORTALAMA BİLEŞKE UZUNLUĞU

#### 3.1.1. Dairesel Ortalama Yön

Dairesel veri setinin ortalama yönünü belirleyebilmek için açıların aritmetik ortalaması hesaplanmak istenilebilir. Fakat dairesel verilerde, örneklem ortalaması, sıfır yönü ve dönüş doğrultusu seçimine güçlü derecede bağımlı olduğundan aritmetik ortalamanın kullanımı uygun değildir. Örneklem ortalamasına bağlı olarak örneklem varyansında da aynı sorunla karşılaşılır. Bu durum dairesel veriler için daha uygun tanımlayıcı istatistiklerin tanımlanması gerektiğini gösterir. Tek bir yöne kümeleşme gösteren bir dairesel veri seti için uygun ve anlamlı bir ortalama yön ölçüsü, gözlem değerlerinin birim vektör olarak düşünülmesi ve bu vektörlerin bileşke yönü kullanılmasıyla belirlenir. Verilen bir dairesel veri seti için ortalama yönün hesaplanması,

$P_i$ : birim çember  $\theta_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) açısına bağlı olarak belirlenen herhangi bir nokta olmak üzere  $\theta_1, \dots, \theta_n$  açılarının ortalama yönü,  $\bar{\theta}; \overline{OP_1}, \dots, \overline{OP_n}$  birim vektörlerinin bileşkesinin yönü olarak tanımlanır.

<sup>1</sup> Jammalamadaka ve Sen Gupta, 2001, Topics in Circular Statistics. p.10.



$P_i$  noktalarının ağırlık merkezleri  $(C, S)$ ,

$$C = \sum_{i=1}^n \cos \theta_i \quad (3.5)$$

$$S = \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \quad (3.6)$$

ve ortalama ağırlık merkezleri  $(\bar{C}, \bar{S})$ ,

$$\bar{C} = \frac{\sum_{i=1}^n \cos \theta_i}{n} \quad (3.7)$$

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^n \sin \theta_i}{n} \quad (3.8)$$

olmak üzere,  $\theta_1, \dots, \theta_n$  açılarının ortalama yönü  $(\bar{\theta})$ ,

$$\bar{\theta} = \begin{cases} \arctan\left(\frac{S}{C}\right) & S \geq 0, C > 0 \\ \arctan\left(\frac{S}{C}\right) + \pi & C < 0 \\ \arctan\left(\frac{S}{C}\right) + 2\pi & S < 0, C \geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & S > 0, C = 0 \\ \text{Tanımsız} & S = 0, C = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

biçiminde tanımlanır (Mardia ve Jupp 2000).

### 3.1.2. Dairesel Bileşke Uzunluğu ve Ortalama Dairesel Bileşke Uzunluğu

Bileşke uzunluğu eşitlik (3.5) ve (3.6)'ya bağlı olarak,

$$R = \|R\| = \sqrt{C^2 + S^2} \quad R \in [0, n] \quad (3.10)$$

olarak veya ortalama yön biliniyorsa,

$$R = \frac{C}{\cos \theta} = \frac{S}{\sin \theta} \quad R \in [0, n] \quad (3.11)$$

olarak hesaplanır.

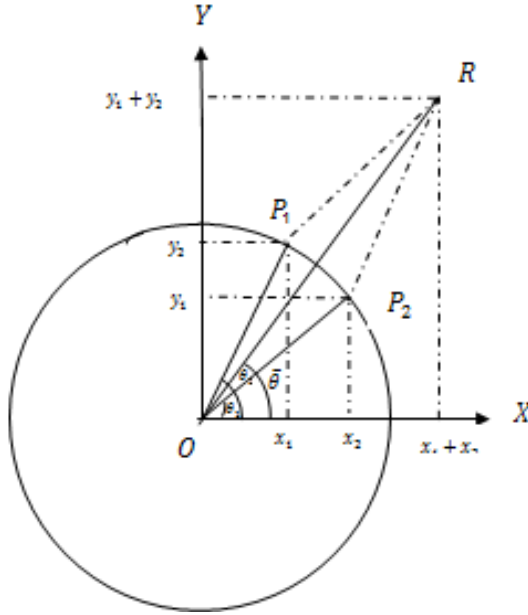
Bileşke uzunluğunun hesaplanmasından yola çıkarak ortalama bileşke uzunluğu,

$$\bar{R} = \frac{R}{n} \quad \bar{R} \in [0, 1] \quad (3.12)$$

olarak hesaplanır (Mardia ve Jupp 2000).

### 3.1.2.1. Dairesel Ortalama Yön, Bileşke Uzunluğu ve Ortalama Dairesel Bileşke Uzunluğunun Genellenmesi

Kesim 3.1.1 ve 3.1.2 kapsamındaki eşitliklerin elde edilebilmesi amacıyla iki dairesel gözlem için ortalama yön ve bileşke vektör uzunluğu Şekil (3.2)'deki gibi bulunduktan sonra genellenerek  $n$  tane dairesel gözlem için genel formüller elde edilir.



**Şekil 3.2.** İki dairesel gözlemin ortalama yön ve bileşke vektörü

Birim çember üzerinde bulunan  $P_1$  ve  $P_2$  noktalarının koordinatları sırasıyla  $(x_1, y_1)$  ve  $(x_2, y_2)$ ,  $X$  eksenine saat yönünün tersi doğrultuda yaptıkları açılar ise  $\theta_1$  ve  $\theta_2$  olsun. Buna göre Şekil (3.2)'de gösterilen vektörlerin boyu, birim çemberin yarıçapı ( $r = 1$ ) olmak üzere,

$$x_1 = r \cos \theta_1 = \cos \theta_1, \quad x_2 = r \cos \theta_2 = \cos \theta_2 \quad (3.13)$$

$$y_1 = r \sin \theta_1 = \sin \theta_1, \quad y_2 = r \sin \theta_2 = \sin \theta_2 \quad (3.14)$$

şeklinde yazılır. İki vektörün birbirine eklenmesiyle oluşturulan bileşke vektör ( $R$ )'ün uzunluğu,

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{x_1 + x_2 \quad ^2 + (y_1 + y_2)^2} \\ &= \sqrt{\left(\sum_{i=1}^2 \cos \theta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^2 \sin \theta_i\right)^2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

olarak elde edilir. Bileşke vektörün yönü ise,

$$\cos \bar{\theta} = \frac{(x_1 + x_2)}{\sqrt{x_1 + x_2 \quad ^2 + (y_1 + y_2)^2}} \quad (3.16)$$

$$\sin \bar{\theta} = \frac{(y_1 + y_2)}{\sqrt{x_1 + x_2 \quad ^2 + (y_1 + y_2)^2}} \quad (3.17)$$

eşitlikleri yardımıyla elde edilir. Eşitliklerdeki  $x_1, y_1, x_2, y_2$  yerine eşitleri konulursa,

$$\cos \bar{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \cos \theta_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^2 \cos \theta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^2 \sin \theta_i\right)^2}} \quad (3.18)$$

$$\sin \bar{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \sin \theta_i}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^2 \cos \theta_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^2 \sin \theta_i\right)^2}} \quad (3.19)$$

elde edilir. Buradan,

$$\tan \bar{\theta} = \frac{\sin \bar{\theta}}{\cos \bar{\theta}} = \frac{\sum_{i=1}^2 \sin \theta_i}{\sum_{i=1}^2 \cos \theta_i} \quad (3.20)$$

ifadesine ulaşılır.  $\bar{\theta}$ 'nın eşitlik (3.20)'den çekilmesiyle,

$$\bar{\theta} = \arctan \left( \frac{\sum_{i=1}^n \sin \theta_i}{\sum_{i=1}^n \cos \theta_i} \right) \quad (3.21)$$

olarak elde edilir. Birim çember üzerinde  $n$  sayıda gözlemin olduğu durumda ise,

$$x_i = \cos \theta_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.22)$$

$$y_i = \sin \theta_i \quad i = 1, \dots, n \quad (3.23)$$

olmak üzere bileşke vektör ( $R$ ) uzunluğu,

$$R = \sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \cos \theta_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right)^2} = \sqrt{C^2 + S^2} \quad (3.24)$$

olarak elde edilir. Ortalama yön ( $\bar{\theta}$ ),

$$\cos \bar{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \cos \theta_i}{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \cos \theta_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right)^2}} = \frac{C}{\sqrt{C^2 + S^2}} \quad (3.25)$$

$$\sin \bar{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n \sin \theta_i}{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^n \cos \theta_i \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^n \sin \theta_i \right)^2}} = \frac{S}{\sqrt{C^2 + S^2}} \quad (3.26)$$

eşitliklerinin kullanılmasıyla,

$$\tan \bar{\theta} = \frac{S}{C} \quad (3.27)$$

olarak elde edilir.  $\bar{\theta}$ 'nin eşitlik (3.27)'den çekilmesiyle ortalama yön,

$$\bar{\theta} = \arctan\left(\frac{S}{C}\right) \quad (3.28)$$

olarak tanımlanır. Verilen bir açı kümesi ilk olarak dik koordinatlara dönüştürülür. Bileşke vektörün hesaplanabilmesi için bu değerler toplanır ve eşitlik (3.28) yardımıyla, verilen açı kümesi için ortalama yön ( $\bar{\theta}$ ) hesaplanmış olur. Bileşke vektörün sıfır uzunluğa sahip olması durumunda ortalama yön bulunamaz.  $R = n$  olması durumunda ise tüm noktalar çakışır. Gruplanmış verilerde bir aralıktaki tüm gözlem değerlerinin o aralığın orta noktası olduğu varsayılır.  $n$  tane gözlemin  $k$  tane sınıfa göre gruplanmış olduğu varsayımı altında,  $i$ . sınıfın orta noktası  $\theta_i$  ve sıklığı  $f_i$ , ( $i = 1, \dots, k$ ) olmak üzere,

$$\bar{C}_n = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \cos \theta_i}{n} \quad (3.29)$$

$$\bar{S}_n = \frac{\sum_{i=1}^k f_i \sin \theta_i}{n} \quad (3.30)$$

elde edilir ve ortalama bileşke uzunluğu,

$$\bar{R}_n = \sqrt{\bar{C}_n^2 + \bar{S}_n^2} \quad (3.31)$$

biçiminde hesaplanır (Mardia ve Jupp 2000).

### 3.2. YOĞUNLAŞMA PARAMETRESİ

Yoğunlaşma parametresi ( $\kappa$ )'nin en çok olabilirlik tahmin edicisi,

$$A_1 \hat{\kappa} = \frac{R}{n} = \bar{R} \quad (3.32)$$

eşitliğinin çözümünden ele edilir. Eşitlik (3.32)'de yer alan  $\bar{R}$ , ortalama bileşke uzunluğunu,  $A_1 \hat{\kappa}$ ,

$$A_1 \hat{\kappa} = \frac{I_1 \hat{\kappa}}{I_0 \hat{\kappa}} \quad (3.33)$$

şeklinde dönüştürülmüş  $I_1 \kappa$  , birinci tür birinci sıra ve  $I_0 \kappa$  , birinci tür sıfırncı sıra olmak üzere iki Bessel fonksiyonunun birbirine oranını ifade etmektedir. Yoğunlaşma parametresinin tahmininde kolaylık sağlaması için uygun bir aralık,

$$\hat{\kappa} = \begin{cases} \frac{2\bar{R} + \bar{R}^3 + \frac{5\bar{R}^5}{6}}{\bar{R}^3 - 4\bar{R}^2 + 3\bar{R}} & \bar{R} < 0,53 \\ -0,4 + 1,39\bar{R} + \frac{0,43}{1-\bar{R}} & 0,53 \leq \bar{R} < 0,85 \\ \frac{1}{\bar{R}^3 - 4\bar{R}^2 + 3\bar{R}} & \bar{R} < 0,85 \end{cases} \quad (3.34)$$

biçiminde hesaplanır (Mardia ve Jupp 2000).

Birinci tür  $p$ . sıra Bessel fonksiyonu ( $I_p \kappa$  ),

$$I_p \kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos p\theta e^{\kappa \cos \theta} d\theta \quad (3.35)$$

veya

$$I_p \kappa = \sum_{r=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\Gamma(p+r+1)\Gamma(r+1)} \right) \left( \frac{\kappa}{2} \right)^{2r+p} \quad (3.36)$$

olarak hesaplanır. Birinci tür  $p$ . sıra Bessel fonksiyonunun,

$$I_p \kappa = \frac{e^{\kappa}}{\sqrt{2\pi\kappa}} \left[ 1 - \frac{(4p^2-1)}{8\kappa} + \frac{4p^2-1}{2(8\kappa)^2} - \frac{4p^2-1}{6(8\kappa)^3} + \dots \right] \quad (3.37)$$

biçimindeki açılımıyla büyük  $\kappa$  değerleri için yaklaşık birinci tür sıfırncı sıra fonksiyon ( $I_0 \kappa$  ),

$$I_0 \kappa \approx \frac{e^{\kappa}}{\sqrt{2\pi\kappa}} \quad (3.38)$$

ve  $A_1 \kappa$  ' nın yaklaşık en çok olabilirlik değeri,

$$A_1 \kappa \approx \left( 1 - \frac{1}{2\kappa} - \frac{1}{8\kappa^2} - \dots \right) \quad (3.39)$$

olarak hesaplanır. Küçük  $\kappa$  değerleri için ise yaklaşık birinci tür sıfırncı sıra fonksiyon ( $I_0 \kappa$ ),

$$I_0 \kappa \approx \left( 1 + \frac{\kappa^2}{4} + \frac{\kappa^4}{64} + \dots \right) \quad (3.40)$$

ve yaklaşık en çok olabilirlik değeri ( $A_1 \kappa$ ),

$$A_1 \kappa \approx \frac{\kappa}{2} \left( 1 - \frac{\kappa^2}{8} + \frac{\kappa^4}{48} - \dots \right) \quad (3.41)$$

olur. Ayrıca  $p=0$  ve  $p=1$  değerlerinden sonra Bessel fonksiyonlarının  $p$ . sıra genellemesi sonucu,

$$I_p \kappa = I_{p-2} \kappa - \frac{2(p-1)}{\kappa} I_{p-1} \kappa \quad (3.42)$$

olarak dönüştürülmüş formda yazılır ve

$$A_p \kappa = A_{p-2} \kappa - \frac{2(p-1)}{\kappa} A_{p-1} \kappa \quad (3.43)$$

olarak tanımlanır (Peker, 2002).

### 3.3. DAİRESEL VARYANS

Dairesel gözlem noktaları aynı yönde büyük yoğunlaşma gösteriyor ise  $R$ ' nin büyüklüğü  $n$  kadar olmaktadır. Eğer veri noktaları herhangi bir yoğunlaşma göstermeden çember üzerinde düzgün bir dağılım gösteriyorsa  $R$ , sıfıra çok yakın bir değer alır.

$P_i$ , birim çember üzerinde  $\theta_i$  açılı bir nokta ve  $\alpha$  sabit bir yön olsun. İlk olarak  $\alpha=0$  olduğu varsayalım ve  $P$  ise çember üzerinde buna karşılık gelen nokta olsun.  $P$  ve  $P_i$  arasındaki dairesel saçılımın bir ölçüsü,  $OP_i$ 'nin  $OP$  ile yaptığı iki açıdan küçük olanıdır. Bu ölçüye dairesel uzaklık ( $\xi$ ) denir ve bu uzaklık eşitlik (3.44) ile açıklanır.

$$\xi_i = \min \theta_i, 2\pi - \theta_i = \pi - |\pi - \theta_i| \quad (3.44)$$

Buna göre birim çember üzerinde  $\pi$ 'den daha uzak iki nokta bulunamayacağı ve her zaman  $[0, \pi]$  aralığında olacağı bilinmektedir.  $(1 - \cos \xi_i)$ ,  $\xi_i$  'nin monoton artan bir fonksiyonu olduğu için

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n (1 - \cos \xi_i)}{n} \quad (3.45)$$

ifadesi,  $P_i$  noktalarının saçılım ölçüsü olarak alınır. Sıfır yönü  $\alpha$  olarak değiştirilirse,

$$D = \frac{\sum_{i=1}^n 1 - \cos(\theta_i - \alpha)}{n} \quad (3.46)$$

olarak elde edilir ve eşitlik (3.46)'nın  $\alpha$ 'ya göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse  $\alpha = \bar{\theta}$  için minimum olduğu görülür.  $\bar{\theta}$  etrafındaki  $D$ ,  $V$  ile gösterildiğinde,

$$V = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\cos \theta_i - \bar{\theta})}{n} \quad (3.47)$$

$R = \frac{C}{\cos \bar{\theta}} = \frac{S}{\sin \bar{\theta}}$  eşitliği kullanılarak örnekleme ait dairesel varyans ( $V$ ),

$$V = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (\cos \theta_i \cos \bar{\theta} + \sin \theta_i \sin \bar{\theta})}{n} \quad (3.48)$$

$$V = 1 - \frac{\cos \bar{\theta} \sum_{i=1}^n \cos \theta_i + \sin \bar{\theta} \sum_{i=1}^n \sin \theta_i}{n} \quad (3.49)$$

$$V = 1 - \frac{C \cos \bar{\theta} + S \sin \bar{\theta}}{n} \quad (3.50)$$

$$V = 1 - \frac{R \cos \bar{\theta} \cos \bar{\theta} + R \sin \bar{\theta} \sin \bar{\theta}}{n} \quad (3.51)$$

$$V = 1 - \frac{R}{n} \quad (3.52)$$

$$V = 1 - \bar{R} \quad (3.53)$$



şeklinde ifade edilir. Dairesel varyans küçüldükçe dağılım homojenleşir ve  $[0,1]$  aralığında değerler alır. Ayrıca  $\bar{R}=0$  ve  $V=1$  olması durumunda dağılımı en büyükleen bir durum söz konusudur.  $n$  birimlik dairesele gözlem ortalama yön etrafında kümelenmiş ise ortalama bileşke uzunluğu 1'e yakın ve dolayısıyla dairesele varyans da 0'a yakın bir değere alacaktır. Ayrıca sıfır yönü değıştirilse bile dairesele varyansın sabit kalması önemli bir özelliktir (Peker, 2002).

### 3.4. DAİRESEL STANDART SAPMA

$\theta$ 'nın değışim aralığının  $[0, 2\pi]$  olduğu ve dairesele varyansın  $[0,1]$  aralığında değere aldđı bilindiğinden, doğrusal standart sapmaya benzerlik gösteren dairesele standart sapmanın  $0, \infty$  aralığındaki uygun dönüşüm,

$$v = \sqrt{-2 \log_e 1-V} = \sqrt{-2 \ln 1-V} \quad (3.54)$$

olarak tanımlanır ve çok küçük dairesele varyans ( $V$ ) değere için,

$$v = \sqrt{2V} \quad (3.55)$$

biçiminde oluşan bir eşitliği mümkün hale getirir. Ayrıca  $\theta$ 'nın değışim aralığı  $[0, 2\pi/l]$  şeklinde ise uygun dönüşüm,

$$v = \frac{\sqrt{-2 \ln 1-V}}{l} \quad (3.56)$$

olarak ifade edilir (Peker, 2002).

### 3.5. DAİRESEL SAÇILIM ÖLÇÜSÜ ve ORTALAMA YÖNÜN DAİRESEL STANDART HATASI

Yayılım ölçülerinden biri olan ve güven aralığı hesaplamalarında, farklı örneklem ortalama yönlerinin karşılaştırılmasında veya birleştirilmesinde sıkça kullanılan dairesele saçılıml ölçüsü,

$$\delta = \frac{1-\rho_2}{2R^2} \quad (3.57)$$

biçiminde tanımlanır ve eşitlik (3.57)'de yer alan merkezi ikinci trigonometrik moment,

$$\rho_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \cos 2 \theta_i - \bar{\theta}}{n} \quad (3.58)$$

şeklinde hesaplanır.

Dairesel saçılım ölçüsünde olduğu gibi güven aralıklarının hesaplanmasında önemli bir rol oynayan ortalama yönün dairesel standart hatası,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\delta}{n}} \quad (3.59)$$

biçiminde ifade edilir (Peker, 2002).

### 3.6. DAİRESEL MEDYAN YÖNÜ

Orta nokta anlamını içeren medyan yönünün bulunabilmesi için veriyi iki eşit gruba bölen medyan eksenini seçilir. Gruplandırılmamış bir veri setinin sıralı bir şekilde dizilmesinden sonra örneklem sayısı tek ise ortadaki eksen üzerindeki veri ile çakışan, çift ise eksenin kapsadığı iki verinin orta noktası alınarak medyan yönü hesaplanır. Gruplanmış bir veri seti için medyan yönü,

$$\tilde{\theta} = l + \frac{\frac{n}{2} - f_0}{f_{+1} - f_0} * h \quad (3.60)$$

şeklinde ifade edilir (Peker, 2002). Eşitlik (3.60)'da yer alan,

$l$  : Medyan sınıfının alt sınırını,

$f_0$  : Medyan sınıfının sıklığını,

$f_{+1}$  : Medyan sınıfından bir sonraki sınıfın sıklığını,

$h$  : Sınıf aralığının uzunluğunu göstermektedir.

### 3.7. DAİRESEL MOD YÖNÜ

Verinin en çok yoğunlaştığı mod yönü, gruplanmamış verilerde en çok tekrarlanan veriyi işaret eder. Aynı sayıda birden fazla veri olmasına bağlı olarak veri setinin birden çok mod yönlü veya tekrarlanan veri sayısının hiç olmamasına bağlı olarak mod yönsüz olarak tanımlanması mümkündür.

Gruplanmış verilerde ise mod yönü,

$$\hat{\theta} = l + \frac{f_0 - f_{-1}}{2f_0 - f_{-1} - f_{+1}} * h \quad (3.61)$$

şeklinde ifade edilir (Peker, 2002). Eşitlik (3.61)'de yer alan,

$l$  : Mod sınıfının alt sınırını,

$f_0$  : Mod sınıfının sıklığını,

$f_{-1}$  : Mod sınıfından bir önceki sınıfın sıklığını,

$f_{+1}$  : Mod sınıfından bir sonraki sınıfın sıklığını,

$h$  : Sınıf aralığının uzunluğunu göstermektedir.

## 4. DAİRESEL OLASILIK DAĞILIMLARI

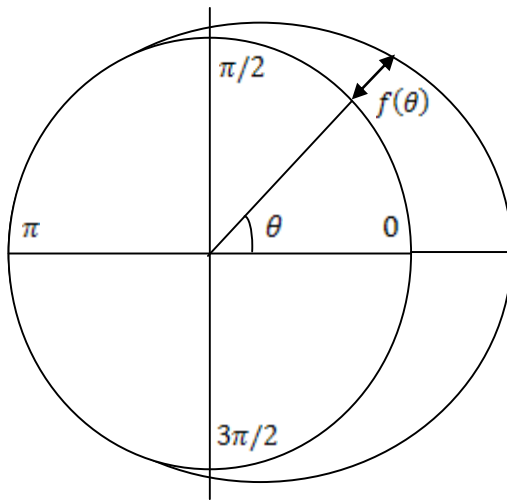
İstatistiksel analizde çok önemli bir yeri olan olasılık dağılım parametrelerinin doğru tahmin edilmesiyle, veri setine ilişkin yeterince bilgi edinilebilir. Toplam olasılığı bir birim çemberin çevresi üzerinde toplanmış olan olasılık dağılımına dairesel olasılık dağılımı denir. Çember üzerindeki her nokta bir yönü ifade etmektedir. Radyan cinsinden ölçülen bir dairesel rastgele değişkeninin değişim aralığı  $[0, 2\pi]$  veya  $-\pi, +\pi$  olarak tanımlanır. Dairesel dağılımlar, sayılabilir yönlerle belirtilen kesikli dağılımlardan ve  $f(\theta)$  olasılık yoğunluk fonksiyonu olmak üzere,

i.  $f(\theta) \geq 0$

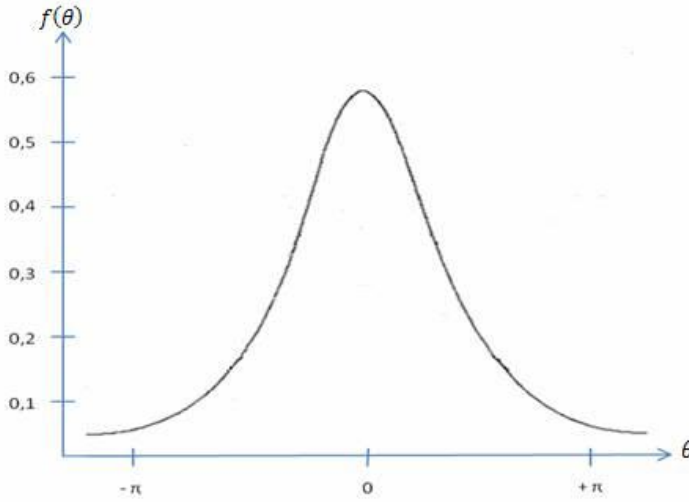
ii.  $\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = 1$

iii.  $f(\theta) = f(\theta + k2\pi) \quad \forall k (k; \text{tamsayı})$

özelliklerine sahip sürekli dağılımlardan oluşur. Dairesel ve doğrusal biçimde mevcut olan sürekli dairesel dağılımların gösterimleri, dairesel olarak Şekil (4.1), doğrusal olarak Şekil (4.2)'deki gibi gösterilir.



**Şekil 4.1.** Sürekli dairesel dağılımın dairesel gösterimi



**Şekil 4.2.** Sürekli dairesel dağılımın doğrusal gösterimi

$\theta$  rastgele değişkeninin dairesel dağılımı,

$$f(\mu + \theta) = f(\mu - \theta), \quad \forall \theta \quad (4.1)$$

özelliğine sahipse,  $(X = \cos \theta, Y = \sin \theta)$  olarak iki boyutlu birim vektör halinde ve  $[0, 2\pi]$  aralığında ortalama yöne göre simetriktir denir. Tercih edilen yön ve mod bir tane ise tek modlu dağılım olarak tanımlanır. Doğru veya düzlem üzerindeki bilinen yöntemlerden yola çıkarak birçok dairesel dağılım türetilebilir (Peker, 2002).

#### 4.1. DÜZGÜN DAĞILIM

Çemberin çevresi üzerinde yer alan toplam olasılık düzgün bir yayılım gösteriyor ise bu dağılıma dairesel düzgün dağılım denir. Tüm yönlerin eşit olarak ve rastgele dağıldığı bu dağılımda tanımlı bir ortalama ve tercih edilen bir yön bulunmamaktadır. Aynı zamanda herhangi bir yöne doğru yoğunlaşma olmamasından dolayı varyans, 1'e eşittir. Bu özelliklerinden dolayı düzgün dağılım dairesel veri analizinde başlangıç modeli olarak temel bir rol oynar. Olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (4.2)$$

olarak tanımlanır. Trigonometrik momentler,

Ortalama yön : Tanımsız

Ortalama bileşke uzunluğu :  $\bar{\rho} = 0$

Dairesel saçılım :  $\delta = \infty$

$$\alpha_p = 0, p \geq 1 \text{ (p. kosinüs momenti)}$$

$$\beta_p = 0, p \geq 1 \text{ (p. sinüs momenti)}$$

olarak tanımlanır (Peker, 2002).

#### 4.2. KOSİNÜS (KARDİOİD) DAĞILIMI

Kardioid dağılım olarak da bilinen bu dağılım tek modlu, iki parametrelili ve ortalama yöne göre simetrik bir dağılımdır. Olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} [1 + 2\bar{\rho} \cos(\theta - \mu)], \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \bar{\rho} \leq \frac{1}{2} \quad (4.3)$$

olarak tanımlanır. Eşitlik (4.3)'de yer alan  $\bar{\rho}$ , ortalama bileşke uzunluğunu ifade etmektedir. Trigonometrik momentler,

Ortalama yön :  $\mu$

Ortalama bileşke uzunluğu :  $\bar{\rho}, < \frac{1}{2}$

Dairesel saçılım :  $\delta = \frac{1}{2\bar{\rho}^2}$

$$\alpha_p = 0, p \geq 2 \text{ (p. kosinüs momenti)}$$

$$\beta_p = 0, p \geq 1 \text{ (p. sinüs momenti)}$$

olarak tanımlanır. Ortalama bileşke uzunluğu sıfıra doğru yaklaşırken ( $\bar{\rho} \rightarrow 0$ ) kardioid dağılım düzgün dağılıma yakınsar (Peker, 2002).

#### 4.3. ÜÇGENSEL (TRIANGULAR) DAĞILIM

$\theta = 0$  için simetrik olan bu dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\theta) = \frac{4 - \pi^2 \bar{\rho} + 2\pi \bar{\rho} |\pi - \theta|}{8\pi}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \bar{\rho} \leq \frac{4}{\pi^2} \quad (4.4)$$

olarak tanımlanır. Eşitlik (4.4)'de yer alan  $\bar{\rho}$ , ortalama bileşke uzunluğunu ifade etmektedir. Trigonometrik momentler,

$$\text{Ortalama yön} \quad : \mu = 0$$

$$\text{Ortalama bileşke uzunluğu} \quad : \bar{\rho}$$

$$\text{Dairesel saçılım} \quad : \delta = \frac{4 - \bar{\rho}}{8[A_1 \kappa]^2}$$

$$\alpha_p = 0, \quad \forall p \quad \text{için (p. kosinüs momenti)}$$

$$\beta_p = 0, \quad \forall p \quad \text{için (p. sinüs momenti)}$$

şeklinde belirtilir (Jammalamadaka ve Sen Gupta, 2001).

#### 4.4. GENEL SARMAL DAĞILIMLAR

Doğru üzerindeki herhangi bir  $X$  rastgele değişkeninin  $2\pi$  moduna dönüştürülmüş  $\theta$  rastgele açısının,  $X$  değişkenine ait olasılık yoğunluk fonksiyonu olan  $g(x)$ 'e sarılarak oluşturulan olasılık yoğunluk fonksiyonu ( $f \theta$ ),

$$f \theta = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(\theta + k2\pi), \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad (4.5)$$

şeklinde tanımlanır (Fisher, 1993).

##### 4.4.1. Sarmal Normal Dağılımı

İki parametrelili, tek modlu ve simetrik bir dağılım olan sarmal normal dağılım, doğru üzerindeki normal dağılımın çember etrafına sarılmasıyla elde edilir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f \theta = \frac{1}{2\pi} \left[ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \bar{\rho}^{p^2} \cos p \theta - \mu \right], \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \bar{\rho} \leq 1 \quad (4.6)$$

olarak ifade edilir. Eşitlik (4.6)'da yer alan  $\bar{\rho} = e^{-\frac{\sigma^2}{2}}$  olarak hesaplanmaktadır.

Trigonometrik momentler,

Ortalama yön :  $\mu$ ,

Ortalama bileşke uzunluğu :  $\bar{\rho}$ ,

Dairesel saçılım :  $\delta = \frac{1 - \bar{\rho}^{-4}}{2\bar{\rho}}$ ,

$$\alpha_p = \bar{\rho}^{p^2}, \quad p \geq 1 \text{ (p. kosinüs momenti)}$$

$$\beta_p = 0, \quad p \geq 1 \text{ (p. sinüs momenti)}$$

şeklinde belirtilir.  $\bar{\rho} \rightarrow 0$ 'a yaklaşırken sarmal normal dağılım, düzgün dağılıma yakınsar (Peker, 2002).

#### 4.4.2. Sarmal Cauchy Dağılımı

Tek modlu ve simetrik bir dağılım olan Sarmal Cauchy Dağılımı, doğru üzerindeki Cauchy dağılımının çember etrafına sarılmasıyla elde edilir. Olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(\theta) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{1 - \bar{\rho}^{-2}}{1 + \bar{\rho}^{-2} - 2\bar{\rho} \cos(\theta - \mu)} \right], \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \bar{\rho} \leq 1 \quad (4.7)$$

olarak tanımlanır. Eşitlik (4.7)'de yer alan  $\bar{\rho} = e^{-\sigma}$  olarak hesaplanmaktadır. Trigonometrik momentler,

Ortalama yön :  $\mu$ ,

Ortalama bileşke uzunluğu :  $\bar{\rho}$ ,

Dairesel saçılım :  $\delta = \frac{1 - \bar{\rho}^{-2}}{2\bar{\rho}}$ ,

$$\alpha_p = \bar{\rho}^p, \quad p \geq 1 \text{ (p. kosinüs momenti)}$$

$$\beta_p = 0, \quad p \geq 1 \text{ (p. sinüs momenti)}$$



şeklinde belirtilir.  $\bar{\rho} \rightarrow 0$ 'a yaklaşırken sarmal Cauchy dağılımı, düzgün dağılıma yakınsar (Peker, 2002).

#### 4.5. DAİRESEL NORMAL (VON MISES) DAĞILIM

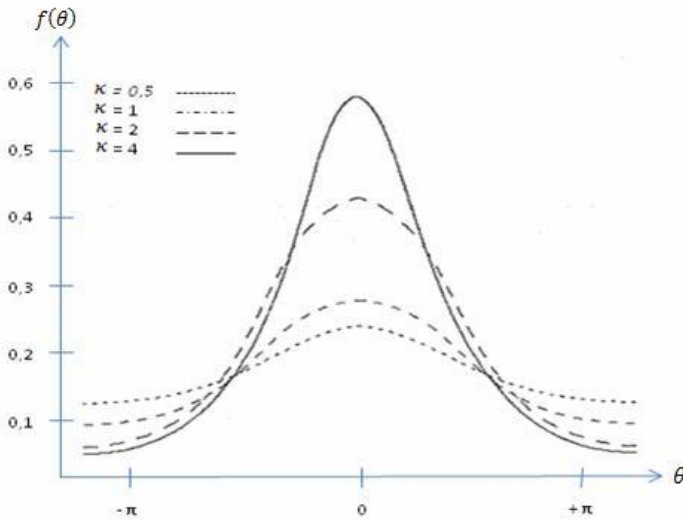
Doğru üzerindeki normal dağılımla benzerliklerini vurgulamak amacıyla üretilen ve simetriklik,  $\mu$  noktasında mod,  $\mu \pm \pi$  noktasında antimod özelliklerine sahip dairesel normal dağılımlı bir  $\theta$  dairesel rastgele değişkeni,

$$f(\theta; \mu, \kappa) = \frac{1}{2\pi I_0 \kappa} e^{\kappa \cos(\theta - \mu)}, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \kappa < \infty, \quad -\pi \leq \mu \leq \pi \quad (4.8)$$

şeklinde gösterilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna ve  $VM(\mu, \kappa)$  şeklinde gösterilen dairesel normal dağılıma sahiptir. Eşitlik (4.8)'de yer alan  $I_0 \kappa$ ,

$$I_0 \kappa = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\kappa \cos(\theta - \mu)} d\theta \quad (4.9)$$

biçiminde tanımlanan ve  $\mu$  ortalama yönü,  $\kappa$  yoğunlaşma parametresini göstermek üzere birinci tür ve sıfır sırasında dönüştürülmüş Bessel fonksiyonunu ifade eder. Yoğunlaşma parametresi ne kadar büyük olursa kitlenin ortalama ve mod yönü olan  $\mu$  etrafında oluşan kümelenme o kadar büyüyecektir. Yoğunlaşma parametresinin ( $\kappa$ ), ortalama yöne ( $\mu$ ) ilişkin yoğunlaşmayı ölçtüğü Şekil (4.3)'de görülmektedir.



Şekil 4.3. Yoğunlaşma parametresinin ortalama yön üzerindeki etkisi

$\kappa = 0$  için  $VM(\mu, \kappa)$  düzgün dağılıma,  $\kappa$ 'nın küçük değerlerinde kardioid dağılıma,  $\kappa > 2$  durumunda sarmal normal dağılıma ve büyük  $\kappa$  değerlerinde ise normal dağılıma yakınsar. Dairesel veri setleri için şekillere dayalı analiz  $\kappa$ 'ya bakılmadan yapılamaz. Normal dağılımdaki varyans etkisi ile dairesel normal dağılımdaki  $1/\kappa$  etkisi hemen hemen aynıdır ve dairesel varyans ile yoğunlaşma parametresinin ilişkisi,

$$V = 1 - \bar{\rho} = 1 - A_1 / \kappa \quad (4.10)$$

biçiminde tanımlanır. Trigonometrik momentler,

$$\text{Ortalama yön} \quad : \mu,$$

$$\text{Dairesel saçılım} \quad : \delta = \frac{1}{\kappa A_1 / \kappa},$$

$$\alpha_p = A_p / \kappa, \quad p \geq 1 \quad (\text{p. kosinüs momenti})$$

$$\beta_p = 0, \quad p \geq 1 \quad (\text{p. sinüs momenti})$$

olarak tanımlanır (Peker, 2002).

#### 4.5.1. Dairesel Normal Dağılımın Parametre Tahminleri

$(\theta_1, \dots, \theta_n)$ ,  $\mu$  ortalama yönlü,  $\kappa$  yoğunlaşma parametrelili ve eşitlik (4.8)'de yer alan olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip Dairesel Normal Dağılımın gözlem seti olmak üzere olabilirlik fonksiyonu ,

$$L(\mu, \kappa | (\theta_1, \dots, \theta_n)) = \frac{1}{[2\pi I_0(\kappa)]^n} e^{\sum_{i=1}^n \kappa \cos(\theta_i - \mu)} \quad (4.11)$$

olarak tanımlanır. Eşitlik (4.11)'de yer alan fonksiyonun logaritmasının alınmasıyla elde edilen Logaritmik Olabilirlik Fonksiyonu,

$$l = \log L = n \log 2\pi I_0(\kappa) + \kappa \sum_{i=1}^n \cos(\theta_i - \mu) - n \log I_0(\kappa) \quad (4.12)$$

$$= n \left[ \log 2\pi I_0(\kappa) + \kappa \bar{R} \cos(\theta_i - \mu) - \log I_0(\kappa) \right] \quad (4.13)$$

biçiminde tanımlanır.

Ortalama yönün, yoğunlaşma parametresinin tahmini için Logaritmik Olabilirlik Fonksiyonunun parametreye göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial l}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^n \cos \theta_i - \mu = 0 \quad (4.14)$$

ve

$$\frac{\partial l}{\partial \kappa} = -n \frac{I_1 \kappa}{I_0 \kappa} + \sum_{i=1}^n \cos(\theta_i - \mu) = 0 \quad (4.15)$$

elde edilir. Eşitlik (4.14)'den,

$$\sum_{i=1}^n \sin \theta_i \cos \mu - \cos \theta_i \sin \mu = 0 \quad (4.16)$$

veya

$$S \cos \mu - C \sin \mu = 0 \quad (4.17)$$

biçiminde hesaplanarak ortalama yön tahmini,

$$\hat{\mu} = \arctan^* \left( \frac{S}{C} \right) = \bar{\theta} \quad (4.18)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (4.18)'deki  $\arctan^*$  fonksiyonuna bağlı olarak hesaplanan ortalama yön, eşitlik (3.9)'da gösterilmiştir. Eşitlik (4.14)'de yer alan  $\sum_{i=1}^n \cos \theta_i - \mu$  ifadesinin bileşke uzunluğuna eşit olduğu bilindiğinden eşitlik (4.15),

$$-n \frac{I_1 \kappa}{I_0 \kappa} + R = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{R}{n} = \bar{R} = \frac{I_1 \kappa}{I_0 \kappa} = A_1(\kappa) \quad (4.20)$$

olarak yeniden düzenlenir.  $\kappa$  'nın maksimum olabilirlik tahmin edicisi olan  $\hat{\kappa}$ ,

$$A_1 \hat{\kappa} = \bar{R} \quad (4.21)$$

$$\hat{\kappa} = A_1^{-1}(\bar{R}) \quad (4.22)$$

olarak hesaplanır (Mardia ve Jupp, 2000).

Eşitlik (4.22)'de yer alan  $\hat{\kappa}$ 'nın yaklaşık hesaplanan değerleri eşitlik (3.34)'deki gibi hesaplanmaktadır.  $\bar{R}$ 'nin bilinmesiyle hesaplanan  $\hat{\kappa}$ , Ek (2)'de verilen tablodan,  $\kappa$ 'nin bilinmesiyle hesaplanan  $R$ , Ek (1)'de verilen tablodan bulunmaktadır.

#### 4.5.2. Dairesel Normal Dağılım İçin Uyum İyiliği Testi

$n$  tane  $\theta$  gözlemine sahip örneklemin dairesel normal dağılıma uyumluluğunu test etmek için  $\mu$  ve  $\kappa$  parametrelerinin bilinme durumlarına göre hesaplamalar yapılır. Test istatistiği hesaplanmadan önce,

$H_0$ : Örneklem dairesel normal dağılıma uyumludur.

$H_1$ : Örneklem dairesel normal dağılıma uyumlu değildir.

hipotezleri kurulur ve bu hipotezlere göre test istatistikleri hesaplanır.

##### 4.5.2.1. $\mu$ ve $\kappa$ 'nin Bilinmemesi Durumunda Uyum İyiliği Testi

$\mu$  ve  $\kappa$  parametrelerinin her ikisi bilinmiyor ise  $\mu$  yerine tahmincisi eşitlik (3.9)'dan ve  $\kappa$  yerine tahmincisi eşitlik (3.34)'den hesaplanarak,

$$z_i = F_{\hat{\kappa}}(\theta_i - \hat{\mu}), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.23)$$

değerleri her bir gözlem için bulunur. Eşitlik (4.23)'de yer alan birikimli sıklık değerleri,

$$F_{\hat{\kappa}}(\theta_i - \hat{\mu}) = \frac{1}{2\pi I_0 \hat{\kappa}} \int_0^{\theta_i - \hat{\mu}} e^{\hat{\kappa} \cos \phi} d\phi \quad (4.24)$$

biçiminde hesaplanır. Eşitlik (4.23)'de hesaplanan  $n$  tane  $z_i$ ,  $z_1 \leq \dots \leq z_n$  biçiminde küçükten büyüğe doğru sıralanır ve test istatistiği,

$$U^2 = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{[z_i - \frac{2i-1}{2n}]^2 - n \left( \frac{z_i - \frac{1}{2}}{2} \right) + 1}{12n} \right] \quad (4.25)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (4.25)'de yer alan  $\bar{z}$ ,

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^n z_i}{n} \quad (4.26)$$

biçiminde hesaplanır (Fisher, 1993).

Eşitlik (4.25)'de hesaplanan test istatistiği, Ek (3)'de yer alan tablodan elde edilen değer ile karşılaştırılır. Şayet  $U^2$  tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.

#### 4.5.2.2. $\mu$ ve $\kappa$ 'nin Bilinmesi Durumunda Uyum İyiliği Testi

$\mu$  ve  $\kappa$  parametrelerinin her ikisi biliniyor ise herhangi bir tahminciye ihtiyaç duyulmadan,

$$z_i = F_{\kappa}(\theta_i - \mu), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.27)$$

değerleri her bir gözlem için hesaplanır. Eşitlik (4.27)'de yer alan birikimli sıklık değerleri,

$$F_{\kappa}(\theta_i - \mu) = \frac{1}{2\pi I_0 \kappa} \int_0^{\theta_i - \mu} e^{\kappa \cos \phi} d\phi \quad (4.28)$$

biçiminde hesaplanır. Eşitlik (4.27)'de hesaplanan  $n$  tane  $z_i$ ,  $z_1 \leq \dots \leq z_n$  biçiminde küçükten büyüğe doğru sıralanır ve test istatistiği ( $U^2$ ), eşitlik (4.25)'den hesaplanarak,

$$U^* = \left( U^2 - \frac{0,1}{n} + \frac{0,1}{n^2} \right) \left( 1 + \frac{0,8}{n} \right) \quad (4.29)$$

biçiminde yeniden düzenlenir (Fisher, 1993).

Eşitlik (4.29)'da hesaplanan test istatistiği, Ek (3)'de yer alan tablodan elde edilen değer ile karşılaştırılır. Şayet  $U^*$  tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.

#### 4.5.2.3. $\mu$ 'nin Bilinmesi ve $\kappa$ 'nın Bilinmemesi Durumunda Uyum İyiliği Testi

$\mu$  parametresi biliniyor ve  $\kappa$  parametresi bilinmiyor ise eşitlik (3.12)'de yer alan  $\bar{R}$  yerine,

$$\bar{R}_0 = \frac{\sum_{i=1}^n \cos \theta_i - \mu}{n} \quad (4.30)$$

hesaplanarak eşitlik (3.34)'de yerine konulması ile  $\kappa$ 'nın yerine tahmincisi hesaplanır ve

$$z_i = F_{\hat{\kappa}}(\theta_i - \mu), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.31)$$

olmak üzere her bir gözlem için  $z_i$  bulunur. Eşitlik (4.31)'de yer alan birikimli sıklık değerleri,

$$F_{\hat{\kappa}}(\theta_i - \mu) = \frac{1}{2\pi I_0 \hat{\kappa}} \int_0^{\theta_i - \mu} e^{\hat{\kappa} \cos \phi} d\phi \quad (4.32)$$

biçiminde hesaplanır (Fisher, 1993).

Eşitlik (4.31)'de hesaplanan  $n$  tane  $z_i$ , değeri,  $z_1 \leq \dots \leq z_n$  biçiminde küçükten büyüğe doğru sıralanır ve test istatistiği ( $U^2$ ), eşitlik (4.25)'den hesaplanır. Eşitlik (4.25)'de hesaplanan test istatistiği Ek (3)'deki tablodan elde edilen değer ile karşılaştırılır. Şayet  $U^2$  tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.

#### 4.5.2.4. $\kappa$ 'nın Bilinmesi ve $\mu$ 'nin Bilinmemesi Durumunda Uyum İyiliği Testi

$\kappa$  parametresi biliniyor ve  $\mu$  parametresi bilinmiyor ise  $\mu$  yerine tahmincisi eşitlik (3.9)'dan hesaplanarak,

$$z_i = F_{\kappa}(\theta_i - \hat{\mu}), \quad i = 1, \dots, n \quad (4.33)$$

değerleri her bir gözlem için bulunur. Eşitlik (4.33)'de yer alan birikimli sıklık değerleri,

$$F_{\kappa}(\theta_i - \hat{\mu}) = \frac{1}{2\pi I_0 \kappa} \int_0^{\theta_i - \hat{\mu}} e^{\kappa \cos \phi} d\phi \quad (4.34)$$

biçiminde hesaplanır (Fisher, 1993).

Eşitlik (4.33)'de hesaplanan  $n$  tane  $z_i$ ,  $z_1 \leq \dots \leq z_n$  biçiminde küçükten büyüğe doğru sıralanır ve test istatistiği ( $U^2$ ), eşitlik (4.25)'den hesaplanır. Eşitlik (4.25)'de hesaplanan test istatistiği, Ek (3)'deki tablodan elde edilen değer ile karşılaştırılır. Şayet  $U^2$  tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.

#### 4.5.3. Dairesel Normal Dağılımda Aykırı Gözlemler İçin Uyuşmazlık Testi

$n$  tane  $\theta$  gözlemine sahip örneklemin herhangi bir aykırı  $\theta_k$  gözleminin dairesel normal dağılımla uyumsuzluğunu test etmek için,

$H_0$ :  $\theta_k$  gözlemi dairesel normal dağılımla uyumludur.

$H_1$ :  $\theta_k$  gözlemi dairesel normal dağılımla uyumlu değildir.

hipotezleri kurulur ve bu hipotezlere göre test istatistiği hesaplanır. Örneklem bileşke uzunluğunun ( $R$ ) eşitlik (3.10)'da hesaplanmasının ardından  $\theta_k$  gözleminin dahil edilmediği bir bileşke uzunluğu ( $R_k$ ), eşitlik (3.10)'daki gibi hesaplanır. Gözlemin, uyumsuzluk konusundaki kararını verecek olan uyumsuzluk test istatistiği,

$$M_n = \frac{R_k - R + 1}{n - R} \quad (4.35)$$

olarak hesaplanır (Fisher, 1993).

Eşitlik (4.35)'de hesaplanan test istatistiği, Ek (4)'deki tablodan elde edilen değer ile uygun anlamlılık seviyesinde karşılaştırılır. Şayet  $M_n$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.

#### 4.5.4. Dairesel Normal Dağılımda Parametre Testleri ve Güven Aralığının Saptanması

Ortalama yön, yoğunlaşma parametresine ilişkin testler uygulanırken ve ortalama yöne ait güven aralığı saptanırken, örneklem veya örneklemelerin sahip olduğu koşullara aynı zamanda parametre tahmincilerinin kullanılabilirliklerine göre hipotezler kurulur. Kurulan bu hipotezlerden sonra test edilecek istatistikler yine

örneklem koşullarına ve parametre tahmincilerinin kullanılabilirliklerine bağlı olarak hesaplanır. Bu bölümde tek, çift ve çok örneklem olması halinde, parametrelerin bilinme durumlarına göre ortalama yön, yoğunlaşma parametresi için hipotezler kurularak test istatistikleri hesaplanacak ve güven aralıkları saptanacaktır.

#### 4.5.4.1. Tek Örneklem Olması Durumunda Uygulanacak Parametre Testleri ve Güven Aralığının Saptanması

Yoğunlaşma parametresi biliniyorsa ortalama yön testi için kurulan çift yönlü hipotez,

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

biçimindedir ve olabilirlik oranı test istatistiği ( $w$ ),

$$w = 2n\kappa(\bar{R} - \bar{C}) \quad (4.36)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (4.36)'da yer alan  $\bar{R}$  ve  $\bar{C}$  değerleri sırasıyla eşitlik (3.12) ve (3.7)'den hesaplanır. Eşitlik (4.36)'da elde edilen test istatistiği, Ek (5)'de verilen  $\chi^2_{1;\alpha/2}$  tablo değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $w$  tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir. Genelde geniş örneklem için hesaplanan ve eşitlik (4.36)'da yer alan test istatistiği,

$$w^* = \left[ 1 - \frac{1}{4n\kappa A(\kappa)} \right] w \quad (4.37)$$

olarak yeniden düzenlenir ve aynı tablo değerleri ile karşılaştırılarak test edilir. Eşitlik (4.37)'de yer alan  $A(\kappa)$ , ortalama bileşke uzunluğunu ( $\bar{R}$ ) ifade ettiğinden, yoğunlaşma parametresi yardımıyla Ek (1)'de verilen tablodan bulunur.

Çift yönlü hipotezin haricinde kurulan tek yönlü hipotezlerde ise alternatif hipotezin;

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

biçiminde olması halinde test istatistiğinin, eşitlik (4.36) veya (4.37)'deki gibi hesaplanmasına paralel olarak karşılaştırılan ve Ek (5)'den bulunan  $\chi^2_{1;\alpha}$  tablo değerinden küçükse sıfır hipotezi red büyükse kabul edilir.

$$H_1 : \mu > \mu_0$$



biçiminde ise test istatistiğinin, eşitlik (4.36) veya (4.37)'deki gibi hesaplanmasına paralel olarak karşılaştırılan Ek (5)'den bulunan  $\chi_{1;\alpha}^2$  tablo değerinden büyükse sıfır hipotezi red küçükse kabul edilir.

Ortalama yöne ilişkin güven aralığının alt ve üst limitleri ise yoğunlaşma parametresi biliniyorsa,  $(1-\alpha)$  anlamlılık düzeyinde,

$$\bar{\theta} \pm \cos^{-1} \left( \frac{1 - \chi_{1;\alpha}^2}{2\kappa R} \right) \quad (4.38)$$

olarak saptanır (Mardia ve Jupp, 2000).

Yoğunlaşma parametresi bilinmiyorsa ortalama yön testi için kurulan çift yönlü hipotez,

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

biçimindedir ve bilinmeyen yoğunlaşma parametresinin yerine tahmincisinin ( $\hat{\kappa}$ ) eşitlik (3.34)'den hesaplanarak kullanılmasıyla, olabilirlik oranı test istatistiği ( $w$ ),

$$w = 2n \left[ \hat{\kappa} \bar{R} - \tilde{\kappa} \bar{C} - \log I_0 \hat{\kappa} + \log I_0 \tilde{\kappa} \right] \quad (4.39)$$

olarak hesaplanır. Fakat eşitlik (4.39)'un hesaplanmasında yaşanan zorluklar nedeniyle test istatistiği yaklaşık olarak,

$$w^* \cong 2n\hat{\kappa}(\bar{R} - \bar{C}) \quad (4.40)$$

biçiminde hesaplanır.

Eşitlik (4.40)'da yer alan  $\bar{R}$  ve  $\bar{C}$  değerleri sırasıyla eşitlik (3.12) ve (3.7)'den hesaplanır. Eşitlik (4.40)'da elde edilen test istatistiği, Ek (5)'de verilen  $\chi_{1;\alpha/2}^2$  tablo değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $w^*$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir. Alternatif hipotezin;

$$H_1 : \mu < \mu_0$$

biçiminde olması halinde test istatistiğinin, eşitlik (4.40)'daki gibi hesaplanmasına paralel olarak karşılaştırılan ve Ek (5)'den bulunan  $\chi_{1;\alpha}^2$  tablo değerinden küçükse sıfır hipotezi red büyükse kabul edilir. Eğer alternatif hipotez,

$$H_1 : \mu > \mu_0$$

biçiminde ise test istatistiğinin, eşitlik (4.40)'daki gibi hesaplanmasına paralel olarak karşılaştırılan ve Ek (5)'den bulunan  $\chi_{1;\alpha}^2$  tablo değerinden büyükse sıfır hipotezi red küçükse kabul edilir.

Ortalama yöne ilişkin güven aralığının alt ve üst limitleri ise yoğunlaşma parametresi bilinmiyorsa  $(1 - \alpha)$  anlamlılık düzeyinde,

$$\bar{\theta} \pm \cos^{-1} \left( \frac{1 - \chi_{1;\alpha}^2}{2\hat{\kappa}R} \right) \quad (4.41)$$

olarak saptanır (Mardia ve Jupp, 2000).

Yoğunlaşma parametresinin testi için kurulan çift yönlü hipotez,

$$H_0 : \kappa = \kappa_0$$

$$H_1 : \kappa \neq \kappa_0$$

biçimindedir ve olabilirlik oranı test istatistiği ( $w$ ),

$$w = 2n \left[ (\hat{\kappa} - \kappa_0) \bar{R} - \log I_0 \hat{\kappa} + \log I_0 \kappa_0 \right] \quad (4.42)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (4.42)'de yer alan  $\bar{R}$  ve  $I_0 \kappa_0$  değerleri sırasıyla eşitlik (3.12) ve (3.38)'den hesaplanır ve yoğunlaşma parametresinin tahmincisi için eşitlik (3.34)'den yararlanır. Test istatistiğinin hesaplanmasında kullanılan parametrelerin, ortalama yönle herhangi bir ilişki olmamasından dolayı ortalama yönün bilinmesi veya bilinmemesi durumu söz konusu değildir. Eşitlik (4.42)'de elde edilen test istatistiği, Ek (5)'de verilen  $\chi_{n-1;\alpha/2}^2$  tablo değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $w^*$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir. Alternatif hipotezin,

$$H_1 : \kappa < \kappa_0$$

biçiminde olması halinde test istatistiğinin, eşitlik (4.42)'deki gibi hesaplanmasına paralel olarak karşılaştırılan ve Ek (5)'den bulunan  $\chi_{n-1;\alpha}^2$  tablo değerinden küçükse sıfır hipotezi red büyükse kabul edilir. Eğer alternatif hipotez,

$$H_1 : \kappa > \kappa_0$$

biçiminde ise test istatistiğinin, eşitlik (4.42)'deki gibi hesaplanmasına paralel olarak karşılaştırılan ve Ek (5)'den bulunan  $\chi_{n-1;\alpha}^2$  tablo değerinden büyükse sıfır hipotezi red küçükse kabul edilir.

Yoğunlaşma parametresine ilişkin güven aralığının alt ve üst limitleri ise  $(1-\alpha)$  anlamlılık düzeyinde,

$$a = \frac{n-R}{\chi_{n-1;1-\alpha/2}^2} \quad (4.43)$$

$$b = \frac{n-R}{\chi_{n-1;\alpha/2}^2} \quad (4.44)$$

olmak üzere,

$$\left[ \frac{1+\sqrt{(1+a)}}{4a}; \frac{1+\sqrt{(1+3b)}}{4b} \right] \quad (4.45)$$

olarak hesaplanır (Mardia ve Jupp, 2000).

#### 4.5.4.2. İki Örneklem Olması Durumunda Uygulanacak Parametre Testleri ve Güven Aralığının Saptanması

Yoğunlaşma parametresi biliniyorsa ortalama yön testi için kurulan çift yönlü hipotez,

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

biçimindedir ve olabilirlik oranı test istatistiği ( $w$ ),

$$w = 2\kappa(R_1 + R_2 - R) \quad (4.46)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (4.46)'da yer alan  $R_1$ ,  $R_2$  ve  $R$  eşitlik (3.24)'den hesaplanır. Eşitlik (4.46)'da elde edilen test istatistiği, Ek (5)'de verilen  $\chi^2_{1,\alpha/2}$  tablo değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $w$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.

Ortalama yöne ilişkin güven aralığının alt ve üst limitleri ise yoğunlaşma parametresi biliniyorsa  $(1 - \alpha)$  anlamlılık düzeyinde,

$$\tau = \mu_1 - \mu_2 \quad (4.47)$$

yerine

$$d = \bar{\theta}_1 - \bar{\theta}_2 \quad (4.48)$$

dönüşümü yapıldıktan sonra,

$$A \kappa^* = A \kappa R_1 \quad A \kappa R_2 \quad (4.49)$$

olarak hesaplanır ve güven aralığı,

$$[d + 180^\circ - v; d + 180^\circ + v] \quad (4.50)$$

olarak belirlenir (Mardia ve Jupp, 2000).

Eşitlik (4.50)'de yer alan  $v$ , eşitlik (4.49)'dan hesaplanan  $A \kappa^*$  'nın Ek (1)'de verilen tablodan  $\kappa^*$  'ın bulunmasından sonra belirlenen anlamlılık düzeyinde Ek (6)'da verilen tabloda  $\kappa^*$  'a karşılık gelen açının elde edilmesiyle saptanır.

Yoğunlaşma parametresi bilinmiyorsa ortalama yön testi için kurulan çift yönlü hipotez,

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

biçimindedir ve olabilirlik oranı test istatistiği ( $w$ ),

$$w = \left[ 1 + \frac{3}{8\hat{\kappa}} \right] \left[ \frac{n-2 (R_1 + R_2 - R)}{n - R_1 - R_2} \right] \quad (4.51)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (4.51)'de yer alan  $\hat{\kappa}$ , eşitlik (3.34)'den ve  $R_1$ ,  $R_2$  ve  $R$  değerleri eşitlik (3.24)'den hesaplanır. Eşitlik (4.51)'de elde edilen test istatistiği, Ek (7)'de verilen  $F_{1,n-2;\alpha}$  tablo değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $w$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.

Ortalama yöne ilişkin güven aralığının alt ve üst limitleri ise yoğunlaşma parametresi biliniyorsa  $(1-\alpha)$  anlamlılık düzeyinde  $d$ , eşitlik (4.48)'deki gibi açığa dönüştürüldükten sonra,

$$A \hat{\kappa}^* = A \hat{\kappa} R_1 A \hat{\kappa} R_2 \quad (4.52)$$

olarak hesaplanır ve eşitlik (4.50)'deki gibi güven aralığı oluşturulur (Mardia ve Jupp, 2000).

Eşitlik (4.50)'de yer alan  $v$ , eşitlik (4.52)'den hesaplanan  $A \hat{\kappa}^*$ 'nin Ek (1)'de verilen tablo değerinden  $\hat{\kappa}^*$ 'ın bulunmasından sonra Ek (8)'de verilen tabloda  $\hat{\kappa}^*$ 'a karşılık gelen  $A^{-1} \bar{R}$ 'nin Ek (6)'da verilen tablodan uygun açının elde edilmesiyle saptanır.

Yoğunlaşma parametresinin testi için kurulan çift yönlü hipotez,

$$H_0 : \kappa_1 = \kappa_2$$

$$H_1 : \kappa_1 \neq \kappa_2$$

biçimindedir ve olabilirlik oranı test istatistiği ( $w$ ),

i)  $\bar{R} < 0,45$  durumunda,

$$w = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{g_1 \bar{2R}_1 - g_2 \bar{2R}_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1 - 4} \quad n_2 - 4}} \right) \quad (4.53)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (4.53)'de yer alan  $g_1 \bar{2R}_i$  fonksiyonu,

$$g_1 \sqrt{2\bar{R}_i} = \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{3}{2}\bar{R}_i} \right) \quad (4.54)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (4.53)'de elde edilen test istatistiği, Ek (9)'da verilen  $z_{\alpha/2}$  tablo değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $w$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.

ii)  $0,45 \leq \bar{R} \leq 0,70$  durumunda,

$$w = \frac{g_2 \bar{R}_1 - g_2 \bar{R}_2}{0,893 \sqrt{\frac{1}{n_1-3} + \frac{1}{n_2-3}}} \quad (4.55)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (4.55)'de yer alan  $g_2 \bar{R}_i$ ,

$$g_2 \bar{R}_i = \sinh^{-1} \left( \frac{\bar{R}_i - 1,089}{0,258} \right) \quad (4.56)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (4.55)'de elde edilen test istatistiği, Ek (9)'da verilen  $z_{\alpha/2}$  tablo değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $w$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.

ii)  $\bar{R} > 0,70$  durumunda,

$$w = \frac{(n_1 - R_1) / (n_1 - 1)}{(n_2 - R_2) / (n_2 - 1)} \quad (4.57)$$

olarak hesaplanır (Mardia ve Jupp, 2000).

Eşitlik (4.57)'de elde edilen test istatistiği, Ek (7)'de verilen  $F_{(n_1-1),(n_2-1);\alpha}$  tablo değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $w$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.

#### 4.5.4.3. Çok Örneklem Olması Durumunda Uygulanacak Parametre Testleri ve Güven Aralığının Saptanması

$q$  tane örneklemin ortalamalarının eşitliği için kurulan çift yönlü hipotez,

$$H_0 : \mu_1 = \dots = \mu_q$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \dots \neq \mu_q$$

biçimindedir. Büyük yoğunlaşma parametresi değerleri için olabilirlik oranı test istatistiği ( $w$ ),

$$w = 2\kappa \sum_{i=1}^q R_i \left[ 1 - \cos(\theta_i - \bar{\theta}) \right], \quad (4.58)$$

küçük yoğunlaşma parametresi değerleri için olabilirlik oranı test istatistiği ( $w$ ),

$$U = \frac{2}{n} \left[ \left( \sum_{i=1}^q R_i \right)^2 - R^2 \right] \quad (4.59)$$

ve uygun katsayı  $c$ ,

$$c = \frac{1}{1 - \frac{\kappa^2}{8} + \frac{q}{2n\kappa^2}} \quad (4.60)$$

olmak üzere,

$$w = c * U \quad (4.61)$$

şeklinde hesaplanır. Eşitlik (4.58) ve (4.61)'de elde edilen test istatistikleri, Ek (5)'de verilen  $\chi_{q-1; \alpha/2}^2$  tablo değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $w$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.

Ortalama yön için güven aralığının  $1 - \alpha$  anlamlılık düzeyinde ikili olarak saptanması, başlık (4.5.4.2)'de yer alan eşitlik (4.48)'den  $d$ 'nin, eşitlik (4.49)'dan  $A \hat{\kappa}^*$ 'in hesaplanmasıyla, eşitlik (4.50)'deki gibi güven aralığının oluşturulup  $v$ 'nin yine aynı tablo değerinden bulunmasıyla mümkündür. Yoğunlaşma parametresinin bilinmemesi durumunda tahminci olarak kullanılan  $\hat{\kappa}$ , eşitlik (3.34)'deki gibi hesaplanır.

Yoğunlaşma parametresinin testi için kurulan çift yönlü hipotez,

$$H_0: \kappa_1 = \dots = \kappa_q$$

$$H_1: \kappa_1 \neq \dots \neq \kappa_q$$

biçimindedir ve olabilirlik oranı test istatistiği ( $w$ ),

i)  $\bar{R} < 0,45$  durumunda,

$$w = \sum_{i=1}^q u_i g_1 \bar{R}_i^2 - \frac{\left[ \sum_{i=1}^q u_i g_1 \bar{R}_i \right]^2}{\sum_{i=1}^q u_i} \quad (4.62)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (4.62)'de yer alan  $g_1 \bar{R}_i^2$  ve  $u_i$  sırasıyla,

$$g_1 \bar{R}_i^2 = \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{3}{2} \bar{R}_i} \right)^2 \quad (4.63)$$

$$u_i = \frac{4(n_i - 4)}{3} \quad (4.64)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (4.62)'de elde edilen test istatistiği, Ek (5)'de verilen  $\chi_{q-1; \alpha/2}^2$  tablo değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $w$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.

ii)  $0,45 \leq \bar{R} \leq 0,70$  durumunda,

$$w = \sum_{i=1}^q u_i g_2 \bar{R}_i - \frac{\left[ \sum_{i=1}^q u_i g_2 \bar{R}_i \right]^2}{\sum_{i=1}^q u_i} \quad (4.65)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (4.65)'de yer alan  $g_2 \bar{R}_i$  eşitlik (4.56)'daki gibi ve  $u_i$ ,

$$u_i = \frac{(n_i - 3)}{0,798} \quad (4.66)$$



olarak hesaplanır. Eşitlik (4.65)'de elde edilen test istatistiği, Ek (5)'de verilen  $\chi_{q-1;\alpha/2}^2$  tablo değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $w$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.

ii)  $\bar{R} > 0,70$  durumunda,

$$w = \frac{1}{(1+o)} \left[ h \log \left( \frac{n - \sum_{i=1}^q R_i}{h} \right) - \sum_{i=1}^q h_i \log \left( \frac{n_i - R_i}{h_i} \right) \right] \quad (4.67)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (4.67)'de yer alan  $h_i$ ,  $h$  ve  $o$  değerleri sırasıyla,

$$h_i = n_i - 1, \quad (4.68)$$

$$h = n - q, \quad (4.69)$$

$$o = \frac{1}{3(q-1)} \left[ \sum_{i=1}^q \left( \frac{1}{h_i} \right) - \frac{1}{h} \right] \quad (4.70)$$

olarak hesaplanır (Mardia ve Jupp, 2000).

Eşitlik (4.67)'de elde edilen test istatistiği, Ek (5)'de verilen  $\chi_{q-1;\alpha/2}^2$  tablo değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $w$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.

#### 4.5.4.3.1. Çok Örneklemli Varyans Analizi Tablosunun Oluşturulması

Gruplanmış verilere uygulanan varyans analizinde birçok testin yapılmasında ve bu testlerin uygulanmasında kolaylık sağlayan varyans analizi tablosu için hesaplanan istatistikler Çizelge (4.1)'de ayrıntılı olarak gösterilmektedir.

**Çizelge 4.1.** Varyans Analizi Formülleri

<b>KAYNAK</b>	<b>Serbestlik Derecesi</b> ( <i>S.D</i> )	<b>Kareler Toplamı</b> ( <i>K.T</i> )	<b>Kareler Ortalaması</b> ( <i>K.O</i> )	<i>F</i>
<b>Gruplar Arasında</b>	$q - 1$	$\sum_{i=1}^q R_i - R$	$\frac{\left( \sum_{i=1}^q R_i - R \right)}{q - 1}$	$\frac{\frac{\left( \sum_{i=1}^q R_i - R \right)}{q - 1}}{\frac{\left( n - \sum_{i=1}^q R_i \right)}{n - q}}$
<b>Gruplar İçinde</b>	$n - q$	$n - \sum_{i=1}^q R_i$	$\frac{\left( n - \sum_{i=1}^q R_i \right)}{n - q}$	
<b>Toplam</b>	$n - 1$	$n - R$		

## 5. DAİRESEL KORELASYON VE DAİRESEL REGRESYON

Yönsel değişkenlerin bir kısmı veya tamamında iki veya çok değişkenli verilere rastlamak mümkündür. Örneğin; Kuşların göçleriyle ilgilenen bir araştırmacı göçün yapıldığı uçuş yönüyle dönüş yönünün, göç anındaki rüzgar yönü ile uçuş yönünün veya bulutların sürüklenme yönü ile rüzgar yönünün ilişkisini inceleyebilir. Medikal alanda araştırmalar yapan bir diğer araştırmacı ise dairesel olarak ölçülen kardiyografik vektör değişkenleri arasındaki ilişkiyi inceleyebilir.

Birçok alanda gerek bazı dönüşümler sonucu gerekse doğrudan elde edilen dairesel verilerle, dairesel analizler yapılır. Yapılan çalışmalar neticesinde kurulan bu ilişkilerin amacı, herhangi bir veya birkaç değişkene ait veri kümesinden hareketle, ilişki kurulan diğer değişkene ait tahmin yapıp yapılamayacağı sorusuna cevap aramaktır. Bu açıdan son zamanlarda dairesel analizler, değişkenler arasındaki istatistiksel veya stokastik bağımsızlığı incelemek için kurulan bu ilişkilere ilgi duyar.

Değişkenlerin tümünün dairesel olması halinde dairesel-dairesel, en az birinin doğrusal olması durumunda doğrusal-dairesel veya dairesel-doğrusal ilişki mevcuttur.

Bu bölümde iki veya çok değişkenli dairesel ve doğrusal ölçümler istatistiksel açıdan ele alınacak ve ilişki düzeylerinin modellenmesi incelenecektir.

### 5.1. DAİRESEL KORELASYON

Dairesel Korelasyon, dairesel değişkenler arasındaki veya doğrusal değişkenlerle dairesel değişkenler arasındaki ilişkinin boyutu ve yönünü istatistiksel anlamda çıkarsamak için kullanılır. Bu aşamada doğrusal ifadelerden hareketle daireselliğe geçiş yapılacaktır. Doğrusal iki değişken  $(X, Y)$  arasındaki korelasyon katsayısı,

$$\rho_{x,y} = \frac{\text{kov } X,Y}{\sqrt{\text{var } X \text{ var } Y}} \quad (5.1)$$

olarak hesaplanır ve

- $1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$ ,
- $\rho_{X,Y} = \rho_{Y,X}$ ,
- $\rho_{X,Y} = 0$  durumunda  $X$  ve  $Y$  değişkenlerinin bağımsızlığının varlığı fakat tersinin olması durumunda geçerli olmaması özelliklerine sahiptir. Değişkenlere ait ilişkiyi belirleyen korelasyon katsayısının hesaplanması, bu değişkenlerin dairesel veya en çok birinin doğrusal olması durumlarında farklılık gösterir (Jammalamadaka ve Sen Gupta, 2001).

### 5.1.1. Dairesel - Dairesel (*Circular - Circular*) Korelasyon

$\alpha$  ve  $\beta$  rastgele dairesel değişkenlerini oluşturan  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  ve  $(\beta_1, \dots, \beta_n)$  kitle gözlemlerinin ortalamaları sırasıyla  $\mu$  ve  $\nu$  olmak üzere Dairesel Korelasyon katsayısı,

- ❖ Kullanılan değişkenler için  $\rho_{\alpha,\beta}$  'nin sıfır yönünde bağımlı olmaması,
- ❖  $\rho_{\alpha,\beta} = \rho_{\beta,\alpha}$
- ❖  $|\rho_{\alpha,\beta}| \leq 1$ ,
- ❖  $\rho_{\alpha,\beta} = 0$  durumunda  $\alpha$  ve  $\beta$  değişkenlerinin bağımsızlığının varlığı fakat tersi söz konusu olduğunda geçerli olmadığı,
- ❖  $\rho_{\alpha,\beta} = 1$  ise  $\alpha = \beta + \text{sabit}(\text{mod } 2\pi)$ ,
- ❖  $\rho_{\alpha,\beta} = -1$  ise  $\alpha = -\beta + \text{sabit}(\text{mod } 2\pi)$ ,
- ❖ Radyan cinsinden ölçülmüş  $(\alpha, \beta)$ 'nin kendi ortalama yönlerinin küçük bir alanda yoğunlaşması sonucu  $\rho_c$   $\alpha, \beta \approx \rho$   $\alpha, \beta$  durumunun oluşması özelliklerine sahiptir ve

$$\rho_{\alpha,\beta} = \frac{E \sin(\alpha - \mu) \sin(\beta - \nu)}{\sqrt{\text{var} \sin(\alpha - \mu) \text{var} \sin(\beta - \nu)}} \quad (5.2)$$

$$= \frac{E[\cos \alpha - \beta - \mu + \nu - \cos(\alpha + \beta - \mu - \nu)]}{2\sqrt{E[\sin^2(\alpha - \mu)]E[\sin^2(\beta - \nu)]}} \quad (5.3)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (5.2)'de yer alan  $E(\sin(\alpha - \mu))$  ve  $E(\sin(\beta - \nu))$  ifadelerinin sıfıra eşit olması halinde doğru üzerinde birinci merkezi moment sıfıra eşittir.

Eşitlik (5.3)'de yer alan  $E(\cos(\alpha - \mu))$ ,  $\alpha$  etrafındaki ortalama yönün yoğunlaşma ölçüsüdür.  $\alpha$  veya  $\beta$  'nin düzgün dağılıma sahip olması,  $\mu$  veya  $\nu$  'nin iyi tanımlanmamasına sebep olur. Bu sorun  $|E \cos \alpha - \beta - \mu + \nu|$  ve  $|E \cos \alpha + \beta - \mu - \nu|$  terimlerinin en büyüklemeyle çözülür. Böylece ortalama yön seçimindeki belirsizlik,  $(\alpha - \beta)$  'nin ortalama yönü yerine  $(\mu - \nu)$  'nin,  $(\alpha + \beta)$  'nin ortalama yönü yerine  $(\mu + \nu)$  'nin yerleştirilmesi ile giderilmiş olur.  $(\alpha - \beta)$  ve  $(\alpha + \beta)$  'nin ortalama vektörel genişlik farkı,

$$\left| E \left[ e^{i(\alpha \pm \beta)} \right] \right| = \mathcal{R}_{\alpha - \beta} - \mathcal{R}_{\alpha + \beta} \quad (5.4)$$

biçiminde gösterilir. Eşitlik (5.2)'nin payında yer alan ifadenin yerine eşitlik (5.4)'deki ifade yerleştirilirse,

$$\rho_c = \frac{\left[ E e^{i\alpha - \beta} - E e^{i\alpha + \beta} \right]}{2\sqrt{E \left[ \sin^2(\alpha - \mu) \right] E \left[ \sin^2(\beta - \nu) \right]}} \quad (5.5)$$

$$= \frac{\mathcal{R}_{\alpha - \beta} - \mathcal{R}_{\alpha + \beta}}{2\sqrt{E \left[ \sin^2(\alpha - \mu) \right] E \left[ \sin^2(\beta - \nu) \right]}} \quad (5.6)$$

olarak hesaplanır. Değişkenlerin örneklem ortalama yön değerleri  $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$  olmak üzere  $n$  hacimli örneklemin dairesel-dairesel korelasyon katsayısı  $(r_{c,n})$ ,

$$r_{c;n} = \frac{\sum_{i=1}^n \sin(\alpha_i - \bar{\alpha}) \sin(\beta_i - \bar{\beta})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sin^2(\alpha_i - \bar{\alpha}) \sum_{i=1}^n \sin^2(\beta_i - \bar{\beta})}} \quad (5.7)$$

biçiminde hesaplanır (Jammalamadaka ve Sen Gupta, 2001).

#### 5.1.1.1. Dairesel - Dairesel Korelasyon Katsayısı Testi

$\alpha$  ve  $\beta$  dairesel değişkenleri arasındaki ilişkinin varlığı,

$H_0$ : Değişkenler arası ilişki vardır.

$H_1$ : Değişkenler arası ilişki yoktur.

olarak kurulan hipotezlerin test edilmesiyle açıklanır. Test istatistiğinin hesaplanabilmesi için,

$$r_t^2 = \frac{\left[ r_{cc}^2 + r_{cs}^2 + r_{sc}^2 + r_{ss}^2 + 2r_1 r_2 r_{cc} r_{ss} - r_{cs} r_{sc} + -2r_1 r_{cc} r_{sc} + r_{cs} r_{ss} - 2r_2 r_{cc} r_{cs} + r_{sc} r_{ss} \right]}{1 - r_1^2 - r_2^2} \quad (5.8)$$

hesaplanır ve örneklem hacmi  $n$  arttıkça istatistik,

$$nr_t^2 \sim \chi_{4;\alpha}^2 \quad (n \rightarrow \infty)$$

olarak test edilir. Elde edilen test istatistiği, Ek (5)'de verilen tablodan bulunan  $\chi_{4;\alpha}^2$  değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $nr_t^2$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir. Eşitlik (5.8)'de yer alan  $r_1, r_2, r_{cc}, r_{cs}, r_{sc}, r_{ss}$  ifadeleri sırasıyla,

$$r_1 = \text{kor}(\cos \alpha, \sin \alpha), \quad (5.9)$$

$$r_2 = \text{kor}(\cos \beta, \sin \beta), \quad (5.10)$$

$$r_{cc} = \text{kor}(\cos \alpha, \cos \beta), \quad (5.11)$$

$$r_{cs} = \text{kor}(\cos \alpha, \sin \beta), \quad (5.12)$$

$$r_{sc} = \text{kor}(\sin \alpha, \cos \beta), \quad (5.13)$$

$$r_{ss} = \text{kor}(\sin \alpha, \sin \beta) \quad (5.14)$$

olarak hesaplanır (Mardia ve Jupp, 2000).

### 5.1.2. Doğrusal – Dairesel (*Linear - Circular*) Korelasyon

Doğrusal  $X; [x_1, \dots, x_n]$  değişkeni ile  $\Theta; [\theta_1 = \cos \theta_1; \sin \theta_1, \dots, \theta_n = \cos \theta_n; \sin \theta]$  dairesel değişkeni tanımlanmış olsun. Dairesel değişken sınıfı adına korelasyon katsayısını en büyük yapacak herhangi bir  $\theta_0$  seçildikten sonra uygulanan,

$$t_i = \cos(\theta_i - \theta_0) \quad (5.15)$$

dönüşümünden sonra  $X;[x_1, \dots, x_n]$  ve  $T;[t_1, \dots, t_n]$  değişkenlerine, eşitlik (5.1)'de yer alan doğrusal korelasyon katsayı hesaplaması uygulandığı zaman,  $n$  hacimli örneklemin doğrusal-dairesel korelasyon katsayısı,

$$r_{(X,T)} = \frac{\text{kov } X, T}{\sqrt{\text{var } X \text{ var } T}} \quad (5.16)$$

olarak hesaplanır (Jammalamadaka ve Sen Gupta, 2001).

#### 5.1.2.1. Doğrusal - Dairesel Korelasyon Katsayısı Testi

$X$  doğrusal ve  $\theta$  dairesel değişkenleri arasındaki ilişkinin varlığı,

$H_0$ : Değişkenler arası ilişki vardır.

$H_1$ : Değişkenler arası ilişki yoktur.

olarak kurulan hipotezlerin test edilmesiyle açıklanır. Test istatistiğinin hesaplanabilmesi için,

$$r_t^2 = \frac{r_{xc}^2 + r_{xs}^2 - 2r_{xc}r_{xs}r_{cs}}{1 - r_{cs}^2} \quad (5.17)$$

hesaplanır ve örneklem hacmi ( $n$ ) arttıkça istatistik,

$$\frac{(n-3)r_t^2}{1-r_t^2} \sim F_{2,(n-3); \alpha} \quad (n \rightarrow \infty)$$

olarak test edilir. Elde edilen test istatistiği, Ek (7)'de verilen tablodan bulunan  $F_{2,(n-3); \alpha}$  değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $\left[ \frac{(n-3)r_t^2}{1-r_t^2} \right] / \left[ 1-r_t^2 \right]$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir. Eşitlik (5.17)'de yer alan  $r_{xc}, r_{xs}, r_{cs}$  ifadeleri sırasıyla,

$$r_{xc} = \text{kor}(X, \cos \theta), \quad (5.18)$$

$$r_{xs} = \text{kor}(X, \sin \theta), \quad (5.19)$$

$$r_{cs} = \text{kor}(\cos \theta, \sin \theta) \quad (5.20)$$

olarak hesaplanır (Mardia ve Jupp, 2000).

### 5.1.3. Dairesel – Doğrusal (*Circular - Linear*) Korelasyon

Dairesel  $\Theta$ ;  $[\theta_1 = \cos \theta_1; \sin \theta_1, \dots, \theta_n = \cos \theta_n; \sin \theta]$  değişkeni ile doğrusal  $X; [x_1, \dots, x_n]$  tanımlanmış olsun. Dairesel değişken sınıfı adına korelasyon katsayısını en büyük yapacak herhangi bir  $\theta_0$  seçildikten sonra eşitlik (5.15)'de yer alan dönüşümün yapıldıktan sonra dönüştürülmüş  $T; [t_1, \dots, t_n]$  ve doğrusal  $X; [x_1, \dots, x_n]$  değişkenlerine ait doğrusal korelasyon katsayısı eşitlik (5.16)'daki gibi hesaplanır.

#### 5.1.3.1. Dairesel - Doğrusal Korelasyon Katsayısı Testi

Dairesel  $\theta$  ve doğrusal  $X$  değişkenleri arasındaki ilişkinin varlığı,

$H_0$ : Değişkenler arası ilişki vardır.

$H_1$ : Değişkenler arası ilişki yoktur.

olarak kurulan hipotezlerin test edilmesiyle açıklanır. Test istatistiğinin hesaplanabilmesi için,

$$r_t^2 = \frac{r_{cx}^2 + r_{sx}^2 - 2r_{cx}r_{sx}r_{cs}}{1 - r_{cs}^2} \quad (5.21)$$

değişikliği sonucu daireysel – doğrusal korelasyon katsayısı hesaplanır. Eşitlik (5.21)'de yer alan  $r_{cx}$ ,  $r_{sx}$ ,  $r_{cs}$  ifadeleri sırasıyla,

$$r_{cx} = \text{kor}(\cos \theta, X), \quad (5.22)$$

$$r_{sx} = \text{kor}(\sin \theta, X), \quad (5.23)$$

$$r_{cs} = \text{kor}(\cos \theta, \sin \theta) \quad (5.24)$$

olarak hesaplanır (Mardia ve Jupp, 2000).

Elde edilen test istatistiği, Ek (7)'de verilen tablodan bulunan  $F_{2,(n-3); \alpha}$  değeri ile karşılaştırılır. Şayet  $[(n-3)r_t^2]/[1-r_t^2]$ , tablo değerinden küçük ise sıfır hipotezi kabul, büyük ise reddedilir.



## 5.2. DAİRESEL REGRESYON

Dairesel regresyon, dairesel değişkenler arasındaki, herhangi bir dairesel değişken ile doğrusal değişken(ler) arasındaki veya herhangi bir doğrusal değişken ile dairesel değişken(ler) arasındaki bağıntıları çözümlenmeyi amaçlar. Bu bağıntıların yoğunlaşma noktası, tek değişkenli verilerin analizinden farklı olarak değişkenler arası kurulan ilişkinin düzeyi yardımıyla verilerdeki açıklama ve önceden kestirim kavramlarıdır. Yönel verilerin kullanıldığı bilimlerde de regresyon çözümlenmesine, kendi içinde oluşturulan istatistiksel teknikler doğrultusunda başvurulur.

### 5.2.1. Dairesel - Dairesel (*Circular - Circular*) Regresyon

$f(\alpha, \beta)$ , birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bağımsız  $\alpha$ ; ( $0 < \alpha$ ) ve bağımlı  $\beta$ ; ( $\beta < 2\pi$ ) değişkenlerinin,  $\alpha$  bilindiğinde  $\beta$  karşılığını veren regresyon denklemi veya  $\alpha$  bilindiğinde  $e^{i\beta}$  vektörünün koşullu beklenen değeri,

$$E e^{i\beta} \setminus \alpha = \rho \alpha e^{i\mu \alpha} \quad (5.25)$$

$$= g_1 \alpha + i g_2 \alpha \quad (5.26)$$

olarak gösterilir. Eşitlik (5.25)'de yer alan  $\mu \alpha$ ,  $\alpha$  bilindiğinde  $\beta$ 'nin koşullu yönel ortalamasını ifade ederken,  $0;1$  aralığında değerler alan  $g \alpha$  ise koşullu yoğunlaşmayı göstermektedir. Eşitlik (5.26)'da yer alan  $g_1 \alpha$  ve  $g_2 \alpha$ ,

$$g_1 \alpha = E \cos \beta \setminus \alpha, \quad (5.27)$$

$$g_2 \alpha = E \sin \beta \setminus \alpha \quad (5.28)$$

şeklinde ifade edilir.  $\beta$  parametresinin yerine kullanılacak tahminci,

$$\mu \alpha = \hat{\beta} = \arctan \left( \frac{g_2 \alpha}{g_1 \alpha} \right) \quad (5.29)$$

olarak hesaplanır.  $\beta$ 'ların yerine kullanılacak en uygun tahminci,  $E \| e^{i\beta} - g(\alpha) \|^2$  değerini en küçükleyen en küçük kareler yöntemi ile bulunur.

$g_1 \alpha$  ve  $g_2 \alpha$  fonksiyonlarının bazı özelliklerinde meydana gelecek olan kayboluş bu tip verilerle elde edilecek tahmini zorlaştırır. Bundan dolayı  $2\pi$  periyotlu  $g_1 \alpha$  ve  $g_2 \alpha$  fonksiyonlarının, fourier serisinden açılarak elde edilen  $m$  dereceli trigonometrik polinomları,

$$g_1 \alpha \approx \sum_{k=0}^m (A_k \cos k\alpha + B_k \sin k\alpha), \quad (5.30)$$

$$g_2 \alpha \approx \sum_{k=0}^m (C_k \cos k\alpha + D_k \sin k\alpha) \quad (5.31)$$

olarak uygun yaklaşık fonksiyonlar adı altında kullanılır. Eşitlik (5.30) ve (5.31)'den yola çıkarak kullanılan genel doğrusal model,

$$\cos \beta = \sum_{k=0}^m (A_k \cos k\alpha + B_k \sin k\alpha) + \epsilon_1, \quad (5.32)$$

$$\sin \beta = \sum_{k=0}^m (C_k \cos k\alpha + D_k \sin k\alpha) + \epsilon_2 \quad (5.33)$$

biçiminde kullanılır (Jammalamadaka ve Sen Gupta, 2001).

Eşitlik (5.32) ve (5.33)'de kullanılan  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$ , ortalama yönü ( $\theta$ ) ve saçılım matrisi ( $\Sigma$ ) olan hata vektörünü göstermektedir.

#### 5.2.1.1. Dairesel – Dairesel Regresyon Katsayılarının ve Saçılım Parametresinin Tahmini

Regresyon denkleminin katsayılarını oluşturan  $A_k, B_k, C_k, D_k$  ( $k = 0, 1, \dots, m$ ) ve saçılım matrisinin ( $\Sigma$ ) tahmini için gerekli olan,  $B_0$  ve  $D_0$ 'ın küçük  $m$  değerleri altında sıfıra eşit olduğu değerlendirildiğinde,

$$Y_{1i} = \cos \beta_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.34)$$

$$Y_{2i} = \sin \beta_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.35)$$

$$\underset{\sim}{Y}^{(1)} = (Y_{11}, \dots, Y_{1n})' \quad (5.36)$$

$$\underset{\sim}{Y}^{(2)} = (Y_{21}, \dots, Y_{2n})', \quad (5.37)$$

$$\underset{\sim}{\epsilon}^{(1)} = (\epsilon_{11}, \dots, \epsilon_{1n})', \quad (5.38)$$

$$\underset{\sim}{\epsilon}^{(2)} = (\epsilon_{21}, \dots, \epsilon_{2n})', \quad (5.39)$$

değerleri ve tasarım matrisi,

$$\underset{n \times (2m+1)}{X} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \alpha_1 & \cos 2\alpha_1 & \cdots & \cos m\alpha_1 & \sin \alpha_1 & \cdots & \sin m\alpha_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \alpha_n & \cos 2\alpha_n & \cdots & \cos m\alpha_n & \sin \alpha_n & \cdots & \sin m\alpha_n \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

olarak hesaplanır. Parametrelerin tahminleri,

$$\underset{\sim}{\lambda}^{(1)} = (A_0, A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m)', \quad (5.41)$$

$$\underset{\sim}{\lambda}^{(2)} = (C_0, C_1, \dots, C_m, D_1, \dots, D_m)' \quad (5.42)$$

formuna indirgenir ve tüm vektörler,

$$\underset{\sim}{Y}^{*'} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{Y}^{(1)'} \\ \vdots \\ \underset{\sim}{Y}^{(2)'} \end{pmatrix}, \quad (5.43)$$

$$\underset{\sim}{\epsilon}^{*'} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\epsilon}^{(1)'} \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\epsilon}^{(2)'} \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

$$\underset{\sim}{\lambda}^{*'} = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{\lambda}^{(1)'} \\ \vdots \\ \underset{\sim}{\lambda}^{(2)'} \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

biçiminde yazılır.

$X^*$  matrisinin yaklaşık değerinin,

$$\underset{\sim}{X}^* \cong \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} \quad (5.46)$$

olarak tanımlanması koşuluyla vektörel gösterimi,

$$\underset{\sim}{Y}^* = \underset{\sim}{X}^* \underset{\sim}{\lambda}^* + \underset{\sim}{\epsilon}^* \quad (5.47)$$

biçiminde yapılır. En küçük kareler yöntemine göre hesaplanan parametre tahminleri,

$$\underset{\sim}{\hat{\lambda}}^{(1)} = \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{X}^{-1} \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{Y}^{(1)}, \quad (5.48)$$

$$\underset{\sim}{\hat{\lambda}}^{(2)} = \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{X}^{-1} \underset{\sim}{X}' \underset{\sim}{Y}^{(2)} \quad (5.49)$$

olarak hesaplanır. Uzun süren işlemlerin daha basite indirgenmesi için  $\alpha$  değerlerinin çember üzerine,

$$\alpha_i = \frac{2\pi(i-1)}{n} \quad (5.50)$$

biçiminde dönüştürülerek yerleştirilmesinden sonra parametre tahminleri,

$$\widehat{A}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \beta_i, \quad (5.51)$$

$$\widehat{A}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \beta_i \cos j\alpha_i, \quad (5.52)$$

$$\widehat{B}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \cos \beta_i \sin j\alpha_i, \quad (5.53)$$

$$\widehat{C}_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \beta_i, \quad (5.54)$$

$$\widehat{C}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \beta_i \cos j\alpha_i, \quad (5.55)$$

$$\widehat{D}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \beta_i \sin j\alpha_i \quad (5.56)$$

olarak hesaplanır.

Saçılım matrisi olarak tanımlanan kovaryans matrisinin yansız bir tahmini,

$$R_0 \ i, j = \tilde{Y}^{i'} \tilde{Y}^j - \tilde{Y}^{i'} X' X^{-1} X' \tilde{Y}^j \quad (5.57)$$

$$= \tilde{Y}^{i'} (I - M) \tilde{Y}^j \quad (5.58)$$

olmak üzere

$$\hat{\Sigma} = \frac{R_0 \ i, j}{n - (2m + 1)} \quad (5.59)$$

eşitliği ile hesaplanır ve bu tahminden diğer parametrelerin standart hataları hesaplanır (Jammalamadaka ve Sen Gupta, 2001).

#### 5.2.1.2. Trigonometrik Polinom Derecesinin (m) Belirlenmesi

Polinom regresyonunda kullanılan önemli bir diğer parametre ise polinom derecesidir. Burada, pratikte derece sayısının belirlenmesinde kullanılan pek çok yöntemden iki tanesi verilecektir.

❖  $m$  artırıldığında hata kareler toplamının azalışını tayin etmek polinom derecesinin değerini belirlemede öncelikli düşüncedir.

Trigonometrik polinomun  $m+1$  . derecede sütun değerleri,  $[\cos^{m+1} \alpha_1, \dots, \cos^{m+1} \alpha_n]'$  ve  $[\sin^{m+1} \alpha_1, \dots, \sin^{m+1} \alpha_n]'$  biçiminde tanımlanır. Aynı şekilde  $m+2$  . ve  $2m+3$  . derecede  $X$  matrisine sütun olarak eklendikten sonra artırılmış matris,

$$X_{(1)} = (X : W)P \quad (5.60)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlik (5.60)'da yer alan  $W$  ,

$$W = \begin{bmatrix} \cos^{m+1} \alpha_1 & \sin^{m+1} \alpha_1 \\ \vdots & \vdots \\ \cos^{m+1} \alpha_n & \sin^{m+1} \alpha_n \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

olarak tanımlanan  $m+1$  dereceli matrisi,  $P$  ise  $m+2$  ve  $2m+3$  . dereceli terimlerin  $W$  matrisine yerleştirildiği permütasyon matrisini göstermektedir.

Elde edilen model,

$$\tilde{Y}^{(1)} = X_{(1)} \lambda_{(1)}^{(1)} + \tilde{\epsilon}^{(1)} \quad (5.62)$$

$$\tilde{Y}^{(2)} = X_{(1)} \lambda_{(1)}^{(2)} + \tilde{\epsilon}^{(2)} \quad (5.63)$$

olarak yazılır ve  $\lambda_{(1)}^{(1)}$ ,  $\lambda_{(1)}^{(2)}$  biçiminde tanımlanan  $2m+3 \times 1$  boyutlu vektörlerin yaklaşık katsayı tahminleri,

$$\hat{\lambda}_{(1)}^{(i)} = X_{(1)}' X_{(1)}^{-1} X_{(1)}' Y^{(i)} \quad i = 1, 2 \quad (5.64)$$

olarak hesaplanır. Eşitlik (5.64)'de yer alan  $X_{(1)}' X_{(1)}$  matrisinin yaklaşık değeri,

$$[X_{(1)}' X_{(1)}] \cong P' \begin{bmatrix} X'X & X'W \\ W'X & W'W \end{bmatrix} P \quad (5.65)$$

olarak yazılır. Eşitlik (5.65)'de yer alan  $\begin{bmatrix} X'X & X'W \\ W'X & W'W \end{bmatrix}$  matrisinin tersi,

$$\begin{bmatrix} X'X & X'W \\ W'X & W'W \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (X'X)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (X'X)^{-1} X'W \\ -I \end{bmatrix} H^{-1} \begin{bmatrix} (X'X)^{-1} X'W \\ -I \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

olarak yazılır. Eşitlik (5.66)'da yer alan  $H$ ,

$$H = W'W - W'X(X'X)^{-1}X'W \quad (5.67)$$

$$= W'(I - M)W \quad (5.68)$$

olarak hesaplanır. Hesaplanan değerler yerlerine konduğunda en küçük kareler tahmincileri,

$$\hat{\lambda}_{(1)}^{(i)} = P(X'X)^{-1} P P' \begin{bmatrix} X' \\ \vdots \\ W' \end{bmatrix} Y^{(i)} \quad (5.69)$$

$$= P' \begin{bmatrix} (X'X)^{-1} X' Y^{(i)} - (X'X)^{-1} X' N (I - M) Y^{(i)} \\ H^{-1} W' (I - M) Y^{(i)} \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

olarak matris formunda hesaplanır ve eşitlik (5.70)'de yer alan  $N$  ise,

$$N = WH^{-1}W' \quad (5.71)$$

olarak tanımlanır. Buradan modelin hata kareler toplamı,

$$\tilde{Y}'(I-M)N(I-M)Y^{(i)} - \tilde{Y}'(X:W)P\hat{\lambda}_{(1)}^{(i)} = \tilde{Y}'(I-M)Y^{(i)} - \tilde{Y}'(I-M)N(I-M)Y^{(i)} \quad (5.72)$$

olarak hesaplanır ve eklenen terimler tarafından  $\hat{\lambda}_{(1)}^{(i)}$ 'ye karşılık gelen hata terimler toplamı,

$$\tilde{Y}'(I-M)N(I-M)Y^{(i)} \geq 0$$

biçiminde azaltılmış olur.  $m+1$  dereceli terimin tespiti yapılırken öncelikle azalış hesaplanır. Eğer bu azalış miktarı anlamlı bir genişliğe sahipse modelin  $m+1$  terimi içerdiğine karar verilir ve yeni bir  $\hat{\lambda}_{(1)}^{(i)}$  hesaplaması yapılır (Jammalamadaka ve Sen Gupta, 2001).

❖ Kısmi korelasyon oranı düşünüldüğünde,  $\beta$  tahminlerinin doğruluk oranını artırma girişimi doğrusal analizle benzerlik gösterir. Doğrusal analizde,  $Y$ 'yi tahminleyen  $X_1, \dots, X_k$  tane tahminciden ziyade  $X_1, \dots, X_p$  tane tahmincinin varlığı, ( $p > k$ ) olmak üzere hata kareler ortalamasındaki orantılı azalışı sağlamak için daha avantajlıdır. Bu durum,

$$\rho_{k+1, \dots, p}^2(1, \dots, k) = \frac{\rho_{0(1, \dots, p)}^2 - \rho_{0(1, \dots, k)}^2}{1 - \rho_{0(1, \dots, k)}^2} \quad (5.73)$$

olarak gösterildiği zaman çoklu korelasyon katsayısının karesi  $\rho_{0(1, \dots, m)}^2$ ,

$$\rho_{0(1, \dots, m)}^2 = \frac{\tilde{\sigma}_0' C^{-1} \tilde{\sigma}_0}{\sigma_Y^2} \quad (5.74)$$

biçiminde hesaplanır. Eşitlik (5.74)'de yer alan  $\tilde{\sigma}_0$  ve  $C$  matrisleri sırasıyla,

$$\sigma_0 = \text{kov}(Y, X_1, \dots, X_m)', \quad (5.75)$$

$${}_{m \times m} C = \text{kov}(X_1, \dots, X_m) \quad (5.76)$$

olarak tanımlanır. Örneklem momentleri dikkate alındığında tahmin,

$$\hat{\rho}_i^2 = \frac{\hat{\lambda}^{i'} (X'X) \hat{\lambda}^i}{Y^{i'} Y^i} = \frac{Y^{i'} M Y^i}{Y^{i'} Y^i}, \quad i = 1, 2. \quad (5.77)$$

biçiminde tanımlanır ve  $m+1$  ile  $m$  dereceli regresyon kareler toplamındaki oransal azalış,

$$\hat{\rho}_i^2 = \frac{\hat{\rho}_{i_{o(m+1)}}^2 - \hat{\rho}_{i_{o(m)}}^2}{1 - \hat{\rho}_{i_{o(m)}}^2} \quad i = 1, 2. \quad (5.78)$$

olarak gösterilir. Eğer tüm  $\hat{\rho}_i^2$  değerleri yeterli genişliğe sahipse, yüksek dereceli terimlerin modelde yer almasına karar verilir (Jammalamadaka ve Sen Gupta, 2001).

#### 5.2.1.2.1. Trigonometrik Polinom Derecesinin Belirlenmesinde Kullanılan Asimptotik Test

Başlık (5.2.1.1)'de saçılım matrisinin tahmin değeri,  $\sigma_i^2$ 'nin yerine yansız bir tahminci olarak kullanılabilirliğinden,

$$\left( \frac{n-2m+1}{R_0} \right)_{i,i} \left( \hat{\lambda}^i - \lambda^i \right)' (X'X) \left( \hat{\lambda}^i - \lambda^i \right) \sim \chi_{(2m+1)}^2$$

biçiminde bir yakınsama tanımlanır.  $\lambda_{(1)}^{(i)}$ 'nin son iki bileşeni,

$${}_{m} \lambda_{(1)}^{(i)} = \left[ \lambda_{(1)_{2m+2}}^{(i)} \quad \lambda_{(1)_{2m+3}}^{(i)} \right] \quad (5.79)$$

olarak tanımlandığında,  $\sigma_i^2 H^{-1}$  saçılım matrisli  ${}_{m} \lambda_{(1)}^{(i)}$ 'nin yansız bir tahmincisi,

$${}_{m} \hat{\lambda}_{(1)}^{(i)} = H^{-1} W (I - M) \lambda_{(1)}^{(i)} \quad (5.80)$$

olarak bulunur.



$H_0^i : \lambda_{(1)}^{(i)} = 0$  hipotezi altında tanımlanan test istatistiği  $T^{(i)}$ ,

$$T^{(i)} = \left( \frac{n-2m+1}{R_0, i, 2} \right) {}_m \hat{\lambda}_{(1)}^{(i)'} H {}_m \hat{\lambda}_{(1)}^{(i)} \quad (5.81)$$

$$= [n-2m+1] \frac{\begin{bmatrix} \lambda^{i'} & I-M & N(I-M) \lambda^i \\ \sim & & \sim \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} \lambda^{i'} & I-M & \lambda^i \\ \sim & & \sim \end{bmatrix}} \quad (5.82)$$

olarak hesaplanır.  $i=1$  ve  $i=2$  durumlarının her ikisinde birden sıfır hipotezinin, Ek (5)'de bulunan  $\chi^2_{2,\alpha}$  tablo değerinden küçük olması sonucu kabulü gerçekleşirse,  $m$  derecesi o noktada saptanmış olur (Jammalamadaka ve Sen Gupta, 2001).

### 5.2.2. Dairesel – Doğrusal (*Circular - Linear*) Regresyon

Doğrusal  $Y$  bağımlı değişkenine karşı,  $T$  periyotlu dairesel bağımsız  $\alpha$  değişkeninin oluşturduğu periyodik görüntülü basit model,

$$Y = A_0 + A_1 \cos \omega(\alpha - \alpha_0) \quad (5.83)$$

biçiminde tanımlanır. Eşitlik (5.83)'de yer alan  $A_0$ , ortalama seviyeyi,  $A_1$ , genişletici katsayısını,  $\omega$ ,  $2\pi/T$  periyotlu sıklığı ve  $\alpha_0$ , ulaştırıcıyı ifade eder.

$$Y = A_0 + A_1 \cos(\omega\alpha - \varphi) \quad (5.84)$$

formunda da yazılabilen eşitlik (5.84)'de yer alan  $\varphi$ ,

$$\varphi = \omega\alpha_0 \quad (5.85)$$

olarak gösterilir ve  $Y$  bağımlı değişkenini en büyükleyen değer olarak adlandırılır.

$$Y_i = A_0 + A_1 \cos \omega\alpha_i - \varphi_i + \epsilon_i \quad (5.86)$$

olarak tanımlanan doğrusal modelde sabitler, en küçük kareler metodu ile belirlenir ve model,

$$Y = A_0 + A_1 \cos \omega\alpha - \varphi_1 + A_2 \cos 2\omega\alpha - \varphi_2 + \dots + A_k \cos k\omega\alpha - \varphi_k \quad (5.87)$$

biçiminde çoklu yönsel sıklıklar ile genellenir. Dönem başı bir tepe noktası ve dip noktası mevcut olabilir. Fakat sinüsel eğri bu salınımların biçimini bozar. Bu şekilde tepe ve dip noktalar birbirlerini uzun dönemde eşit aralıklarla takip etmez. Bu durum ise çarpık salınımlara dayandırılır ve bu salınımlar,

$$Y = A_0 + A_1 \cos(\psi + \nu \cos \psi) \quad (5.88)$$

biçiminde yazılan modelde kullanılan,

$$\psi = \omega \alpha - \varphi \quad (5.89)$$

terimi ile yumuşatılır. Ayrıca modelde yer alan  $\nu$ 'nin sıfıra eşit olması halinde basit bir kosinüs eğrisi elde edilir. Fakat sıfırdan sapmalar meydana geldikçe daha çarpık grafikler oluşur. Bu yüzden  $\nu$ 'ye çarpıklık parametresi denir. Genelde  $[-30^\circ; 30^\circ]$  aralığında değerler alan çarpıklık parametresinin bu aralığın dışında değerler alması sonucu pürüzsüz grafikler elde edilemeyecektir. Ulaştırıcı olarak bilinen  $\psi = \psi_0$ ,  $A_0 + A_1$  ifadesini en büyükleyen açıdır ve  $\psi_0$ ,

$$\frac{dy}{d\psi} = -\sin \psi + \nu \cos \psi \quad 1 - \nu \sin \psi = 0 \quad (5.90)$$

olarak belirlenir ve  $\psi_0 + \nu \cos \psi_0 = 0$  iken birinci faktör sıfıra eşitlenirse,  $\psi_0$  eşitliği açıklamak için çözülür. Bu modelde tepe noktasının ardından çukur noktaya doğru uzaklık  $\zeta$ ,

$$\zeta = \pi - 2\psi_0 \quad (5.91)$$

eşitliği ile ifade edilir. Bozulmanın diğer bir türü ise sinüsel saçılımın, bir dönemde iki çukur arasında bir tepe noktasının bulunması sebebiyle sivriliğinin ve düzgünlüğünün bozulmasının oluşumu olarak tanımlanır. Bu yapıya uygun modelleme,

$$Y = A_0 + A_1 \cos(\psi + \nu_1 \cos \psi) \quad (5.92)$$

olarak ifade edilir. Eşitlik (5.92)'de yer alan  $\nu_1$ ,  $-\pi/3; \pi/3$  aralığı ile sınırlandırılmış olup saçılımda meydana gelebilecek ikincil bir tepe ve çukur noktadan sakınan bir parametredir. Böylece  $Y$  periyodik fonksiyonunun, dairesel  $\alpha$  değişkenine bağımlı olması durumunda kullanılan bir model oluşturulur (Jammalamadaka ve Sen Gupta, 2001).

### 5.2.3. Doğrusal – Dairesel (*Linear - Circular*) Regresyon

Doğrusal-Dairesel modelleme, bağımsız  $X$  doğrusal değişkeni ile bağımlı  $\theta$  dairesel değişkeninin etkileşiminin oluşturduğu bir modeldir. Bu model,  $\theta$  değişkeninin ya ortalama yön ya yoğunlaşma ya da her ikisinin birden  $X$  değişkenine bağımlılığının sağlanması ile oluşturulur. Ortalama yön için,

$$\mu = \mu_0 + \sum \beta_j x_j \pmod{2\pi} \quad (5.93)$$

modeli öngörülür. Doğrusal  $X$  değişkenine, dairesel  $\theta$  değişkeninin sadece ortalama yönünün değil aynı zamanda saçılım ve yoğunlaşmasının da bağlı olduğu varsayımı altında,  $(\theta_1, X_1), \dots, (\theta_n, X_n)$  gözlem setleri,  $\theta_i \setminus X_i = x_i \sim VM(\mu_i, \kappa_i)$   $i = 1, \dots, n$  biçiminde tanımlanır.  $\theta_i \sim VM(\mu_i, \kappa_i)$  olarak tanımlanan,  $\kappa$  yoğunlaşma parametrelili dairesel normal dağılımın,  $x$  gözlemlerine bağımlı olmaması durumunda ortalama yön,

$$\mu_i = \mu + g \underset{\sim}{\beta}' \underset{\sim}{x}_i \quad (5.94)$$

olarak modellenir. Eşitlik (5.94)'de yer alan  $g(\dots)$ ,  $-\pi; \pi$  aralığında değerler alan kaldıraç fonksiyonu olarak adlandırılır. Ayrıca kaldıraç fonksiyonunun  $\underset{\sim}{\beta}$ 'dan yoksun olabilmesi durumu,

$$g(x) = 2 \arctan \left[ |x|^2 \operatorname{sgn}(x) \right] \quad (5.95)$$

örneği ile gösterilir.  $\underset{\sim}{x}$ 'e  $\mu$  veya  $\kappa$  parametrelerinden herhangi birinin içerdiği özellik verilirse, gerekli tahminleri elde etmek üzere daraltma iterasyonu veya nümerik algoritmayı kullanan en çok olabilirlik (Maximum Likelihood) metoduna başvurulur (Jammalamadaka ve Sen Gupta, 2001).

## 6. UYGULAMA

Çalışma, Ulusal İMKB 100 endeksine yön veren değişkenler için bir öncü uyarı modeli tanımlamaya yöneliktir. Yönsel veri özellikleri taşıyan değişkenler yardımıyla yatırımcılar için riski azaltabilecek bir alternatif öneri amaçlanmıştır.

### 6.1. AMAÇ VE KAPSAM

Günümüzde uygulanan yatırım stratejilerinin bilimsel ve sistematik bir şekilde yürütülmesinin amacı, karı maksimize etmeye çalışılırken diğer yandan da kaybetme riskini minimize etmektir. Hisse senedi, vadeli işlem (future) piyasaları gibi riski diğer yatırım araçlarına göre daha fazla olan piyasalarda geliştirilen analiz yöntemleri ile oynak ve trendi çok belirgin olmayan durumlarda dahi doğru yatırım kararları alınabilir hale gelmiştir. Bilgisayar teknolojisindeki hem yazılım hem de donanım konusundaki gelişmeler, yayınlanmış faydalı kitaplar ve makaleler bilinçli ve sistematik yatırımcıların piyasayı tanımlamalarını ve doğru zamanda doğru karar verme yeteneğini daha da kolaylaştırmıştır. Genel olarak bilindiği gibi hisse senedi piyasasında değerli bilgi ve haberler düzgün bir şekilde yayılmamakta, tersine yanlış yönlendiren, test edilmemiş, abartılmış haberler çok hızlı bir şekilde yatırımcıya ulaşmakta ve büyük çoğunluğun yanlış kararlar almasına sebep olmaktadır. Piyasa her zaman yatırımcıdan daha erken bir zamanda ve daha doğru olan bilgiye ulaşarak, genelde sıradan bir mantığın tersine hareket etmektedir. Bu nedenle, duygusal olarak verilen kararlarla karın maksimize edilmesi çok zor olacaktır.

Disiplinli takip kadar doğru edinilmiş bilgi de büyük önem taşımaktadır. Başarılı bir analiz için, öncelikle geçmişte başarılı metotlar uygulamış olan yatırımcıların tecrübelerinden faydalanmak gerekmektedir. Geçmişe dönük yapılan çalışmalardan çıkarılan en önemli sonuç, piyasanın bazı davranış şekilleri özellikle de uzun dönemli tepkileri zaman içerisinde çok büyük değişiklikler göstermediği yönündedir. Gelecekte yaşanacak olaylar geçmişte yaşananlardan çok farklı olsa bile, piyasanın bu olaylara verdiği tepkiler geçmişteki tepkilere benzer tepkilere benzerdir. Piyasa hareketlerini tanımlamak amacıyla oluşturulmuş olan teknik analiz, yöntem ve göstergeleri, hisse senetlerinin geçmişte gördükleri en düşük, en yüksek ve kapanış fiyatı ile işlem hacmi verilerinden faydalanarak gelecekte o hisselerin

izleyeceği trend hakkında yorumlar yapmayı mümkün kılmıştır. Hisse senetlerinin fiyat verilerinden yola çıkılarak oluşturulmuş göstergelerin dışında, piyasayı bir bütün halinde değerlendiren ve piyasadaki değişimleri ölçmemize yarayan teknik yapılar oluşturulmuştur. Market göstergeleri olarak da adlandırılan bu gösterge grubu, birebir hisse senetleri ile değil, piyasanın bütünü ile ilgilenmektedir.

Bir hisse senedine ait olan kısıtlı sayıda veriler, en düşük, en yüksek, kapanış fiyatı, işlem hacmi ve hisse senedi hakkında yayınlanmış raporlardan meydana gelmektedir. Oysa bir bütün olarak piyasa ele alındığında, o gün sonunda düşenlerin, yeni yüksek yapanların sayısı, bono ihaleleri ve faiz oranları gibi pek çok göstergenin hisse senedi fiyatlarını etkilediği görülebilir. Market göstergeleri, fiyat ve işlem hacminden daha fazla bilgiyi içerdiği için teknik analize derinlik katmaktadır. Market göstergelerinin mantığı, pek çok hisse senedinin kendisi ile ilgili özel bir durumu yoksa piyasanın toplu halde izlediği yönde hareket ettiği varsayımına dayandırılmaktadır. Eğer piyasada bir yükseliş varsa hisse senetlerinin pek çoğu bu yükseliş trendini izleyecektir. Ters durumda yani piyasa düşüş trendinde ise pek çok hisse senedi de düşüş gösterecektir. Bu korelasyonu göz önünde bulunduran teknik analistler, özellikle farklı ülkelerin hisse senetlerini de portföyleri içerisine alan fon yöneticileri, piyasanın genel gidişatını göz önünde bulundurarak yapılan yatırımların daha fazla kar getireceğine ve daha az risk taşıdığına inanmaktadırlar. Örneğin, "Top Down Approach" olarak bilinen bir yaklaşım modeline göre, bir ülkenin hisse senedi piyasasına girmek isteyen yatırımcılar, öncelikle söz konusu piyasanın genel gidişatına bakarak sektörel incelemeleri yaptıktan sonra şirketlerin hisse senedini değerlendirir ve satın alma kararını verirler. Bu sürecin başlangıcında yani piyasa trendini belirleme aşamasında kullanılan metotlardan biri de market göstergeleridir.

Teknik analiz, çeşitli yöntemlerle piyasanın duygusal boyutunu inceleyen bir metotlar topluluğudur. Yatırımcıların güven ve beklentilerindeki değişiklikler fiyata yansımakta ve fiyattaki hareketler de trendi oluşturmaktadır. Geçmiş yıllarda piyasanın genel hareketini (trendini) belirlemek amacıyla çok sayıda market göstergesi tanımlanmıştır. Bunlar, genel olarak genişlik (breadth), duygu (sentiment) ve parasal (monetary) göstergeler olarak üç ana grupta toplanmaktadır.

Küresel krizin boyutlarının genişlemesiyle birlikte birçok ülke için daha farklı yapıda göstergelere ihtiyaç duyulmuştur. Krizle birlikte özellikle az gelişmiş ülkelerin finans piyasaları ağır darbeler alarak birçok iflasa tanıklık etmiştir. Sermaye piyasalarının en önemli ayağı olan borsalar için daha hassas uyarı verebilecek öncü değerler birçok araştırmacının ilgisini çekmektedir.

Borsalar, tıpkı insanlar gibi yasayan canlı organizmalardır. Kendine özgü kuralları, belli olaylar karşısında duygusal etkilenmeleri ile diğer borsalardan farklı karakter özelliklerine sahiptirler. Dünyanın belirli bir kesiminde oluşan krize karşılık New York, Tokyo, Atina ve İstanbul borsaları değişik dozlarda tepkiler verebilmektedirler. Ekonomik göstergelerdeki ani değişimler, ülkemizin stratejik konumu, sıkça yaşanan siyasi krizler, Türk insanının duygusal yapısı ve daha pek çok faktör borsayı oldukça yakından ilgilendirmektedir. Ülkemizde hisse senetleri piyasasının yeterli derinliğe ulaşamaması, riskin oldukça yüksek olması ve spekülatif işlemlerin sıkça yaşanması, yatırımcıyı olumsuz etkilemektedir. Ayrıca dünya borsalarındaki her tür hareketlenme karşısında İMKB yönünü değiştirebilmekte ve yatırımcılar diğer borsadaki iniş ve çıkışları takip etmek zorunda kalmaktadır.

Çalışmada Ulusal İMKB-100 endeksini etkilediği düşünülen birçok değişken arasından yönsel analize uygunluk gösteren 7 tanesi ele alınmıştır. İMKB üzerinde etkili değişkenlerden öncü olabilecekler belirlenerek, yatırımcılar için bir alternatif gösterge oluşturulmaya çalışılmıştır. Uygulamada 28.08.2006 – 09.06.2008 dönemi için ele alınan veriler, S-Plus 6.1 (Circstat 2.0), Oriana 2.0, E-Views 6.0, Statistixl 1.8, SPSS 16.0, NCSS 2007 paket programları kullanılarak analiz edilmiştir. Ayrıca uygulamanın önemli bir bölümünde kullanılan S-Plus 6.1. programına ait Circstat 2.0 eklentisinin yazılım kodları Ek (9)'da verilmiştir. Borsa verilerinin yönsel bir veri seti oluşturduğu ve bu sistemde değerlendirilmesi gerekliliğinden yola çıkarak, Ulusal İMKB 100 endeksine yön veren göstergeleri araştırmaya yönelik yapılan uygulamada kullanılan değişkenler şöyledir:

- ❖ **BRENT:** İngiliz Brent petrol varil fiyatı
- ❖ **FTSE 100:** İngiltere'nin 100 büyük sermayeli şirket hisselerinden oluşturulan endeks
- ❖ **MSCI TR:** Morgan Stanley'in gelişmekte olan piyasalarda nitelendirdiği Türkiye için oluşturduğu endeks
- ❖ **CBOE OIX:** Chigago Board Options Exchange'in belirlediği petrol endeksi
- ❖ **RTSI:** Russian Trading System Stock Exchange'in belirlediği Rusya'nın 50 büyük sermayeli şirketinin hisselerinden oluşturulan endeksi
- ❖ **BUX:** Macaristan'ın Budapeşte merkezli stok endeksi
- ❖ **S&P 500:** Standard and Poor's'un Chigago merkezli ABD'de bulunan büyük sermayeli şirketlerin hisselerinden oluşturulan endeksi

## 6.2. DEĞİŞKENLERİN DURAĞANLIK ANALİZLERİ

Uygulamada ele alınan değişkenler birer zaman serisi olduğundan öncelikle ADF testi uygulanarak durağanlıkları araştırılmıştır. ADF (Augmented Dickey Fuller) testi durağanlık analizleri Çizelge (6.1)'de gösterilmiştir.

**Çizelge 6.1.** ADF Testi Durağanlık Analizi

DURAĞANLIK TEST DEĞİŞKENİ	DÜZEY SEVİYESİ		BİRİNCİ FARK	
	ADF	OLASILIK (p*)	ADF	OLASILIK (p*)
<b>İMKB U-100</b>	<b>1.1886</b>	<b>0.9105</b>	<b>1.2164</b>	<b>0.0000</b>
<b>BRENT</b>	<b>1.7778</b>	<b>0.7136</b>	<b>1.8901</b>	<b>0.0000</b>
<b>FTSE E-100</b>	<b>1.9166</b>	<b>0.6436</b>	<b>1.2421</b>	<b>0.0000</b>
<b>MSCI TR</b>	<b>1.2451</b>	<b>0.8986</b>	<b>1.2179</b>	<b>0.0000</b>
<b>CBOE OIX</b>	<b>-0.7627</b>	<b>0.8277</b>	<b>5.4267</b>	<b>0.0000</b>
<b>RTSI</b>	<b>-2.7483</b>	<b>0.2179</b>	<b>-1.7366</b>	<b>0.0000</b>
<b>BUX</b>	<b>-1.2837</b>	<b>0.8900</b>	<b>1.8225</b>	<b>0.0000</b>
<b>S&amp;P 500</b>	<b>-2.2048</b>	<b>0.2050</b>	<b>-2.1521</b>	<b>0.0000</b>

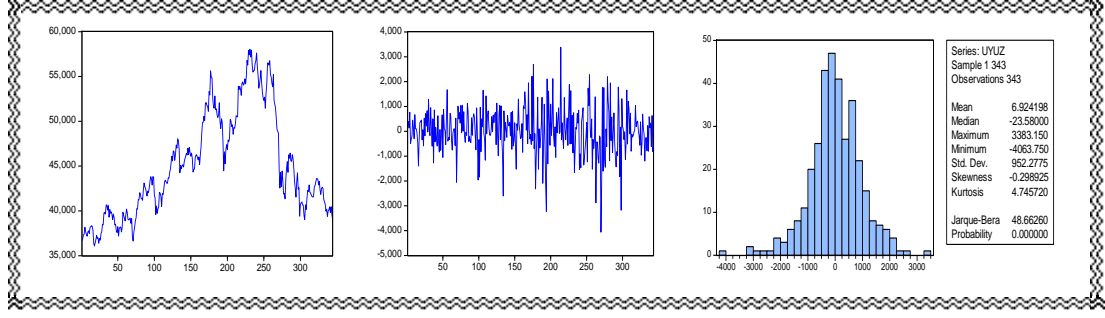
\* Mac Kinnon (1996) tek yönlü olasılık değeri.

Değişkenler için durağanlık analizleri yapılırken seriler mevsimsel etkilerden arındırılmış, kriz ve politika değişim dönemleri istatistiksel anlamlılığa göre dikkate alınmış ve model seçiminde trend ve sabit bileşenleri anlamlı olduğu sürece modele dahil edilmiştir. Gecikme uzunluğu seçiminde otokorelasyonun kalktığı minimum gecikme uzunluğu seçilmiştir. Değişkenlerin Çizelge (6.1)'de yer alan ADF durağanlık test sonuçlarına göre, tüm değişkenler % 5 anlam düzeyinde ve birinci farkta [I(1)] durağan hale gelmiştir. Bu yüzden ele alınacak bağımlı ve bağımsız değişkenlere ait tüm gözlem değerleri,

$$X_t^* = X_t - X_{t(-1)} \quad (6.1)$$

biçiminde birinci farkı alınarak kullanılmıştır. Fark alınmadan önce ve alındıktan sonra görülen değişimi tespit etmek için her değişkene ait grafiksel gösterimleri, normal dağılıma uygunluk testi olan Jarque-Berra testi istatistik sonuçları sırasıyla verilmiştir.

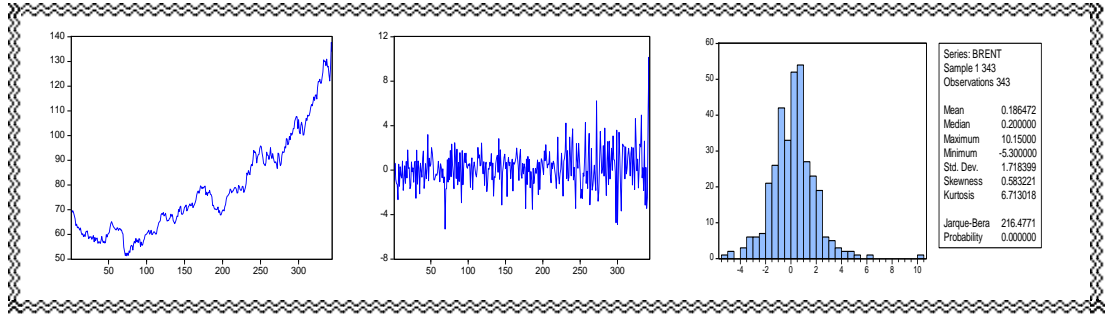
## ❖ İMKB U-100:



**Şekil 6.1.** İMKB U-100 değişkeninin durağanlık aşamaları

İMKB U-100 değişkeninin Şekil (6.1)'de yer alan ham verilerine ait ilk grafiğinde verilerin durağan olmadığı, birinci farkı alınarak çizilen ikinci grafiğinde durağan hale geldiği ve gözlemlerin % 5 anlam düzeyinde Jarque-Berra testinin olasılık değeri ile desteklenerek normal dağıldığı üçüncü grafikte gösterilmiştir.

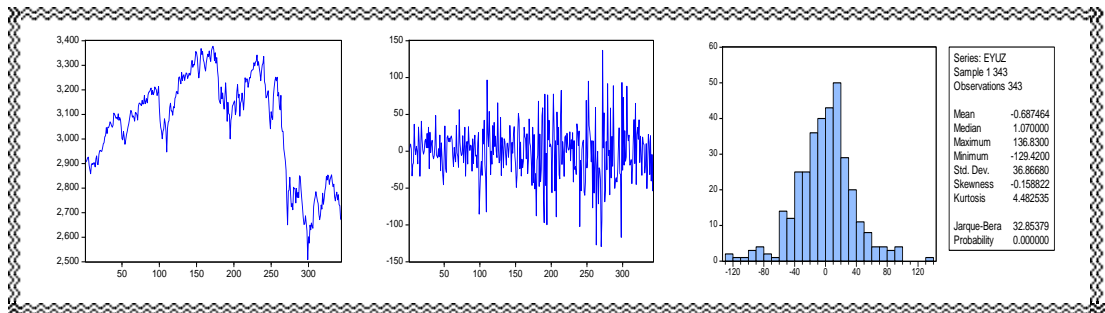
## ❖ BRENT:



**Şekil 6.2.** BRENT değişkeninin durağanlık aşamaları

BRENT değişkeninin Şekil (6.2)'de yer alan ham verilerine ait ilk grafiğinde verilerin durağan olmadığı, birinci farkı alınarak çizilen ikinci grafiğinde durağan hale geldiği ve gözlemlerin % 5 anlam düzeyinde Jarque-Berra testinin olasılık değeri ile desteklenerek normal dağıldığı üçüncü grafikte gösterilmiştir.

## ❖ FTSE 100:

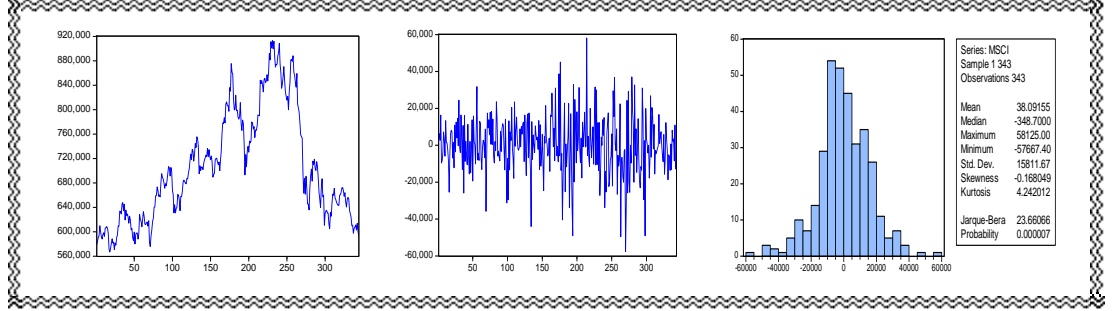


**Şekil 6.3.** FTSE 100 değişkeninin durağanlık aşamaları



FTSE 100 değişkeninin Şekil (6.3)'de yer alan ham verilerine ait ilk grafiğinde verilerin durağan olmadığı, birinci farkı alınarak çizilen ikinci grafiğinde durağan hale geldiği ve gözlemlerin % 5 anlam düzeyinde Jarque-Berra testinin olasılık değeri ile desteklenerek normal dağıldığı üçüncü grafikte gösterilmiştir.

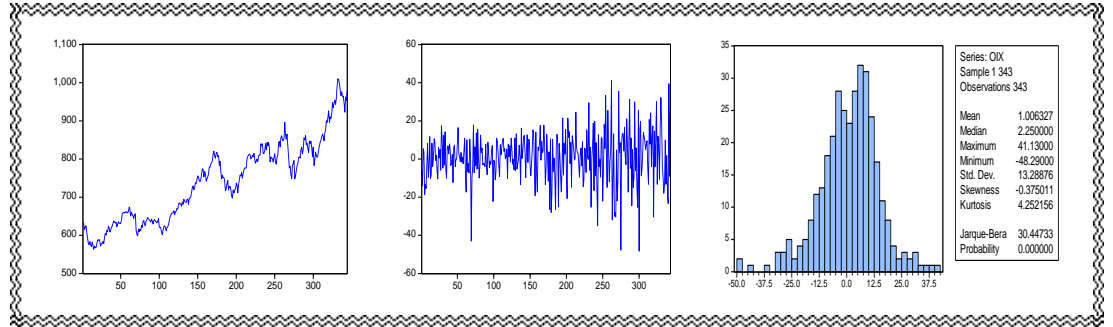
#### ❖ MSCI TR:



Şekil 6.4. MSCI TR değişkeninin durağanlık aşamaları

MSCI TR değişkeninin Şekil (6.4)'de yer alan ham verilerine ait ilk grafiğinde verilerin durağan olmadığı, birinci farkı alınarak çizilen ikinci grafiğinde durağan hale geldiği ve gözlemlerin % 5 anlam düzeyinde Jarque-Berra testinin olasılık değeri ile desteklenerek normal dağıldığı üçüncü grafikte gösterilmiştir.

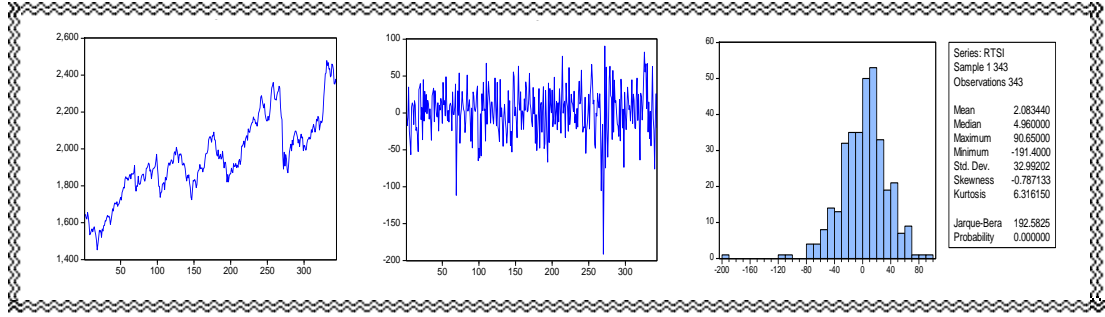
#### ❖ CBOE OIX:



Şekil 6.5. CBOE OIX değişkeninin durağanlık aşamaları

CBOE OIX değişkeninin Şekil (6.5)'de yer alan ham verilerine ait ilk grafiğinde verilerin durağan olmadığı, birinci farkı alınarak çizilen ikinci grafiğinde durağan hale geldiği ve gözlemlerin % 5 anlam düzeyinde Jarque-Berra testinin olasılık değeri ile desteklenerek normal dağıldığı üçüncü grafikte gösterilmiştir.

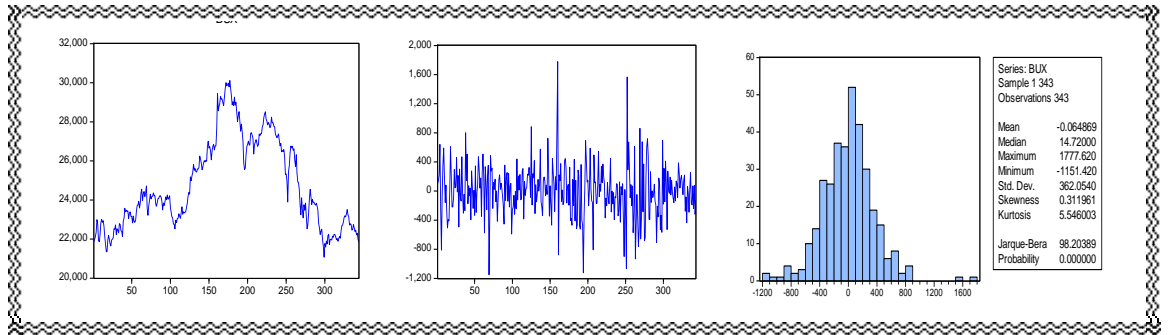
## ❖ RTSI:



**Şekil 6.6.** RTSI değişkeninin durağanlık aşamaları

RTSI değişkeninin Şekil (6.6)'da yer alan ham verilerine ait ilk grafiğinde verilerin durağan olmadığı, birinci farkı alınarak çizilen ikinci grafiğinde durağan hale geldiği ve gözlemlerin % 5 anlam düzeyinde Jarque-Berra testinin olasılık değeri ile desteklenerek normal dağıldığı üçüncü grafikte gösterilmiştir.

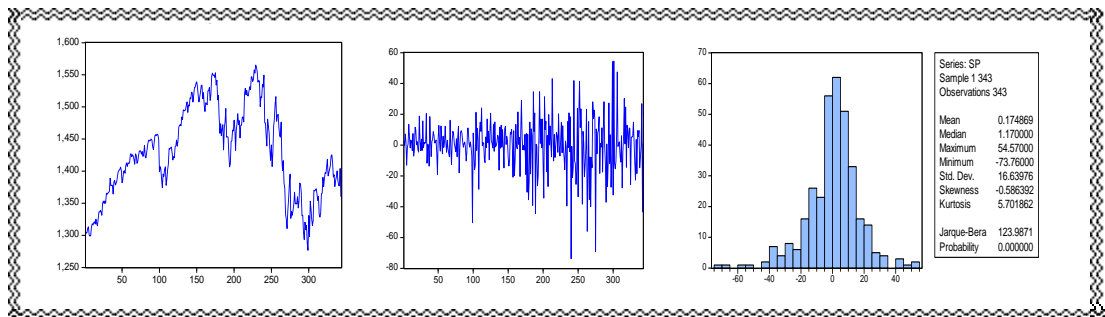
## ❖ BUX:



**Şekil 6.7.** BUX değişkeninin durağanlık aşamaları

BUX değişkeninin Şekil (6.7)'de yer alan ham verilerine ait ilk grafiğinde verilerin durağan olmadığı, birinci farkı alınarak çizilen ikinci grafiğinde durağan hale geldiği ve gözlemlerin % 5 anlam düzeyinde Jarque-Berra testinin olasılık değeri ile desteklenerek normal dağıldığı üçüncü grafikte gösterilmiştir.

## ❖ S&P 500:



**Şekil 6.8.** S&P 500 değişkeninin durağanlık aşamaları

S&P 500 değişkeninin Şekil (6.8)'de yer alan ham verilerine ait ilk grafiğinde verilerin durağan olmadığı, birinci farkı alınarak çizilen ikinci grafiğinde durağan hale geldiği ve gözlemlerin % 5 anlam düzeyinde Jarque-Berra testinin olasılık değeri ile desteklenerek normal dağıldığı üçüncü grafikte gösterilmiştir.

### 6.3. DAİRESEL DÖNÜŞÜM UYGULAMALARI

Birinci farklarında durağan olan bu serilerin ele alınan dönemde en büyük ve en küçük değerleri arasında yönsel olarak hareket ettiği düşünöldüğünde tüm değişkenlere ait gözlemler bir çember üzerinde belirtilir. Böylece değişkenlere ait gözlemler,

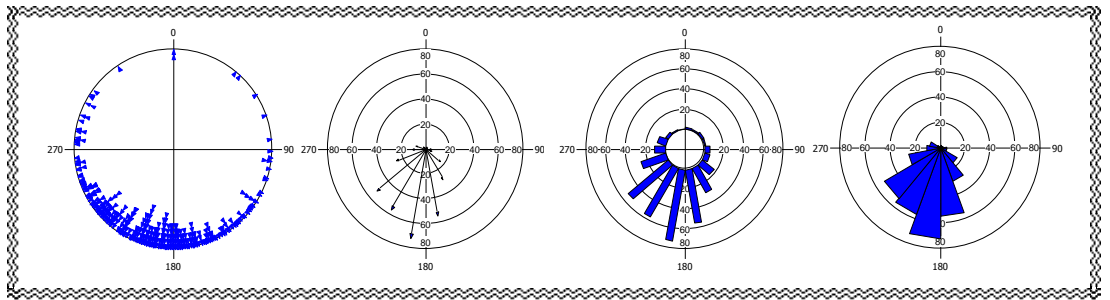
$$\theta_i = \left[ \frac{X_t^* - \min X^*}{\max X^* - \min X^*} \right] * 360 \quad (6.2)$$

dönüşümü ile açısai olarak derece cinsinden tanımlanır ve eşitlik (2.2)'den radyan cinsine dönüştürölür. Eşitlik (6.2)'de yer alan  $X^*$  değişkeni, birinci farkları alınarak  $X_t^*$  gözlemlerinin oluşturduğu seriyi ifade etmektedir.

### 6.4. DEğİŞKENLERİN DAİRESEL GRAFİK GÖSTERİMLERİ

Bu bölümde uygulamaya dahil edilen değişkenlerin türlerine göre grafiksel gösterimleri sırasıyla verilmiştir.

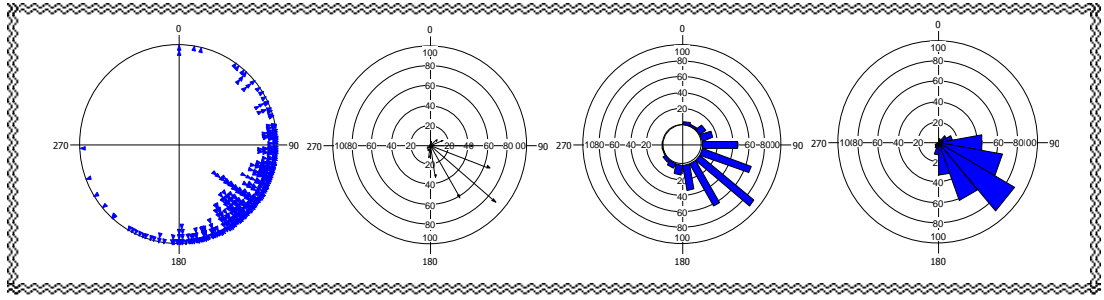
#### ❖ İMKB U-100:



Şekil 6.9. İMKB U-100 değişkeninin dairesel grafik türleri

Şekil (6.9)'da İMKB U-100 değişkenine ait ilk grafik dairesel ham veri grafiğini, ikinci grafik dairesel kartezyen grafiğini, üçüncü grafik dairesel histogramı ve dördüncü grafik ise gül şemasını göstermektedir.

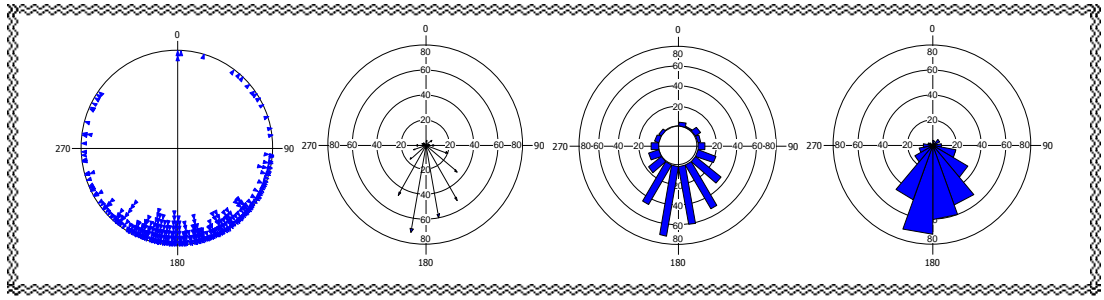
❖ **BRENT:**



**Şekil 6.10.** BRENT değişkeninin dairesel grafik türleri

Şekil (6.10)'da BRENT değişkenine ait ilk grafik dairesel ham veri grafiğini, ikinci grafik dairesel kartezyen grafiğini, üçüncü grafik dairesel histogramı ve dördüncü grafik ise gül şemasını göstermektedir.

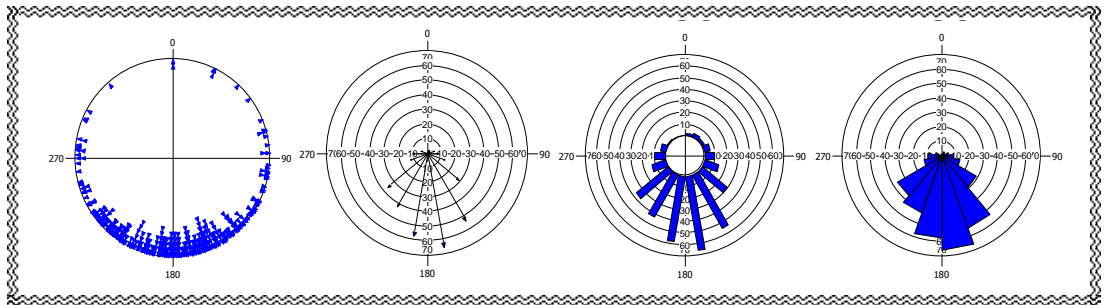
❖ **FTSE 100:**



**Şekil 6.11.** FTSE 100 değişkeninin dairesel grafik türleri

Şekil (6.11)'de FTSE 100 değişkenine ait ilk grafik dairesel ham veri grafiğini, ikinci grafik dairesel kartezyen grafiğini, üçüncü grafik dairesel histogramı ve dördüncü grafik ise gül şemasını göstermektedir.

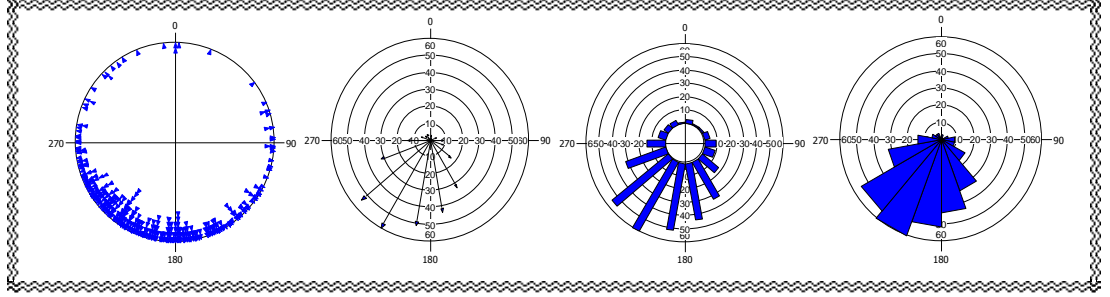
❖ **MSCI TR:**



**Şekil 6.12.** MSCI TR değişkeninin dairesel grafik türleri

Şekil (6.12)'de MSCI TR değişkenine ait ilk grafik dairesel ham veri grafiğini, ikinci grafik dairesel kartezyen grafiğini, üçüncü grafik dairesel histogramı ve dördüncü grafik ise gül şemasını göstermektedir.

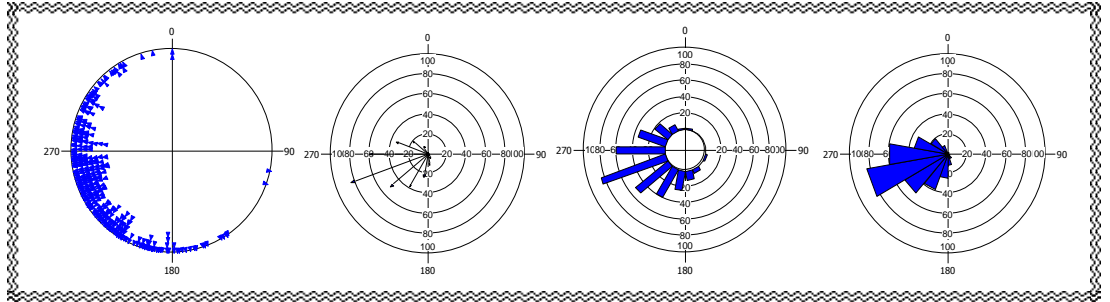
❖ **CBOE OIX:**



**Şekil 6.13.** CBOE OIX değişkeninin dairesel grafik türleri

Şekil (6.13)'de CBOE OIX değişkenine ait ilk grafik dairesel ham veri grafiğini, ikinci grafik dairesel kartezyen grafiğini, üçüncü grafik dairesel histogramı ve dördüncü grafik ise gül şemasını göstermektedir.

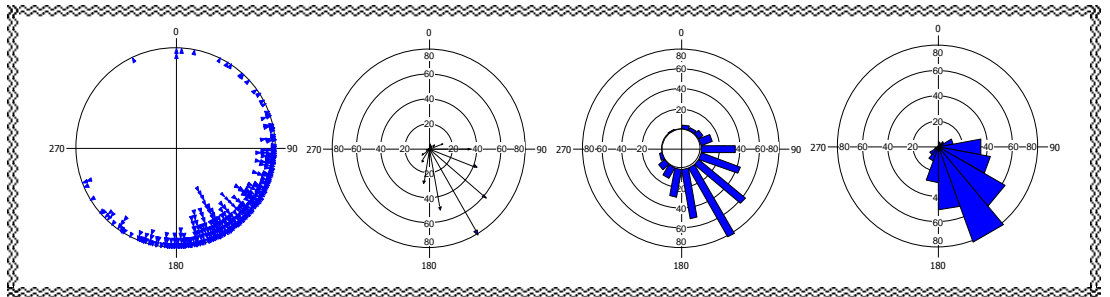
❖ **RTSI:**



**Şekil 6.14.** RTSI değişkeninin dairesel grafik türleri

Şekil (6.14)'de RTSI değişkenine ait ilk grafik dairesel ham veri grafiğini, ikinci grafik dairesel kartezyen grafiğini, üçüncü grafik dairesel histogramı ve dördüncü grafik ise gül şemasını göstermektedir.

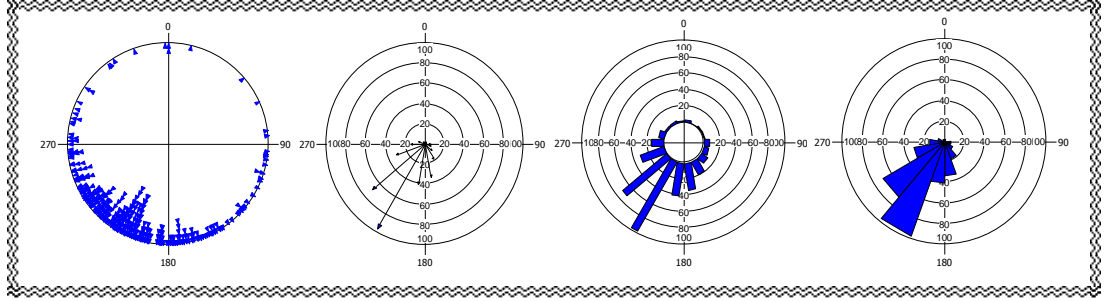
❖ **BUX:**



**Şekil 6.15.** BUX değişkeninin dairesel grafik türleri

Şekil (6.15)'de BUX değişkenine ait ilk grafik dairesel ham veri grafiğini, ikinci grafik dairesel kartezyen grafiğini, üçüncü grafik dairesel histogramı ve dördüncü grafik ise gül şemasını göstermektedir.

#### ❖ S&P 500:



Şekil 6.16. S&P 500 değişkeninin dairesel grafik türleri

Şekil (6.16)'da S&P 500 değişkenine ait ilk grafik dairesel ham veri grafiğini, ikinci grafik dairesel kartezyen grafiğini, üçüncü grafik dairesel histogramı ve dördüncü grafik ise gül şemasını göstermektedir.

## 6.5. DEĞİŞKENLERİN DAİRESEL TANIMLAYICI İSTATİSTİKLERİ

Bu bölümde uygulamaya dahil edilen değişkenlerin merkezi ve saçılım ölçülerinin tanımlayıcı istatistikleri Çizelge (6.2)'de verilmiştir.

Çizelge 6.2. Dairesel Tanımlayıcı İstatistikler

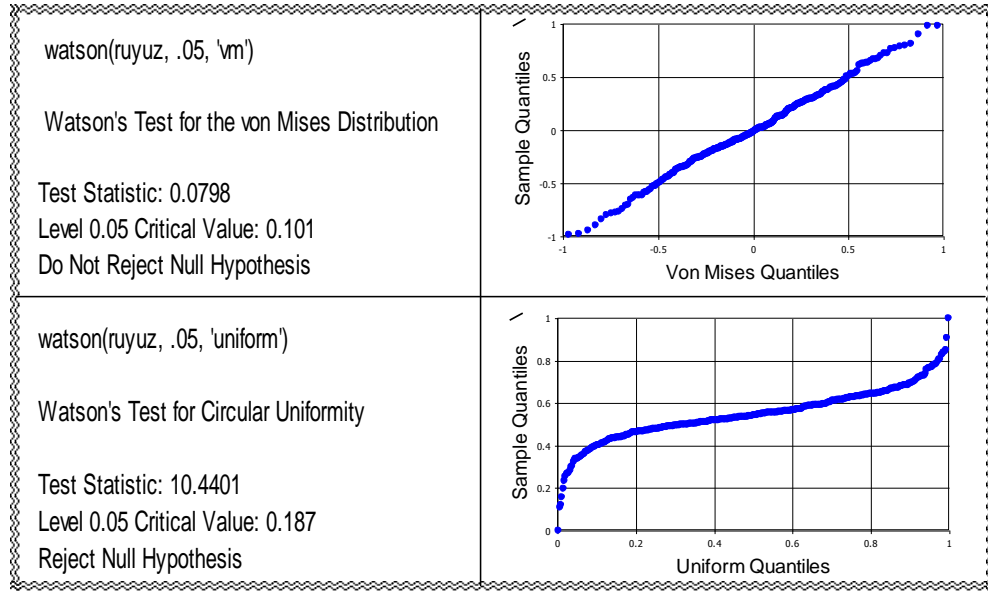
	U-100	BRENT	E-100	MSCI TR	OIX	RTSI	BUX	SP 500
Ortalama Yön ( $\mu$ -radyan)	3.45317	2.21391	3.05415	3.14598	3.50859	4.34136	2.46005	3.66209
Ortalama Yön ( $\mu$ -derece)	197.852°	126.847°	174.99°	180.251°	201.027°	248.741°	140.951°	209.822°
Ortalama bileşke Uzunluğu (r)	0.746	0.806	0.711	0.713	0.674	0.785	0.764	0.752
Medyan (derece)	195.601°	128.155°	176.315°	177.865°	204.84°	250.756°	142.569°	210.816°
Yoğunlaşma parametresi	2329	2938	2075	2086	1856	2694	2484	2382
Dairesel Varyans	0.254	0.194	0.289	0.287	0.326	0.215	0.236	0.248
Dairesel Standart Sapma (derece)	43.876°	37.622°	47.336°	47.174°	50.884°	39.842°	42.035°	43.222°
Ortalamanın Standart Hatası (derece)	2.347°	2.01°	2.547°	2.537°	2.765°	2.127°	2.245°	2.311°
$\mu$ için 95% Güven Aralığı (-/+ derece)	193.25° 202.454°	122.906° 130.789°	169.997° 179.983°	175.277° 185.226°	195.606° 206.449°	244.571° 252.912°	136.549° 145.353°	205.292° 214.352°
$\mu$ için 99% Güven Aralığı (-/+ derece)	191.805° 203.9°	121.668° 132.027°	168.428° 181.552°	173.714° 186.788°	193.903° 208.152°	243.261° 254.221°	135.166° 146.735°	203.869° 215.775°

## 6.6. DEĞİŞKENLERİN DAĞILIM TESTLERİ ve GRAFİKSEL GÖSTERİMLERİ

Uygulamada kullanılan değişkenlerinin radyan cinsine dönüştürülmüş gözlemlerine ait dağılımlarının tespiti için kullanılan Watson Uyum İyiliği testi ve bu testte ait uyum grafikleri bu bölümde gösterilmiştir.

### ❖ İMKB U-100:

İMKB U-100 değişkenine ait dairesel normal dağılım (Von Mises) ve dairesel düzgün dağılım (Circular Uniform) uyum iyiliği test istatistikleri, karar aşamaları ve uyum grafikleri Şekil (6.17)'de gösterilmiştir.

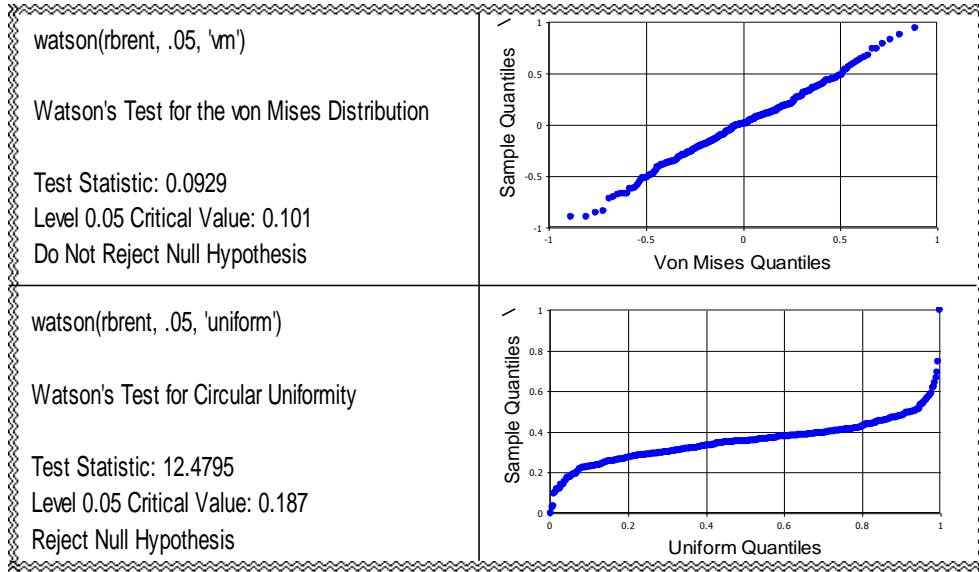


**Şekil 6.17.** İMKB U-100 değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri

İMKB U-100 değişkeninin Şekil (6.17)'de yer alan ilk Watson uyum iyiliği testinde, dağılımın dairesel normal dağılıma (Von Mises) uygun olduğunu varsayan sıfır hipotezinin reddedilemediği gösterilmiş, dairesel düzgün (Circular Uniform) dağılmadığı ise ikinci Watson uyum iyiliği testi sıfır hipotezinin reddedilmesi ile anlaşılmıştır. Bu testlere ait olan grafiklerin karşılaştırılması ile test sonuçları desteklenmektedir.

### ❖ BRENT:

BRENT değişkenine ait dairesel normal dağılım (Von Mises) ve dairesel düzgün dağılım (Circular Uniform) uyum iyiliği test istatistikleri, karar aşamaları ve uyum grafikleri Şekil (6.18)'de gösterilmiştir.

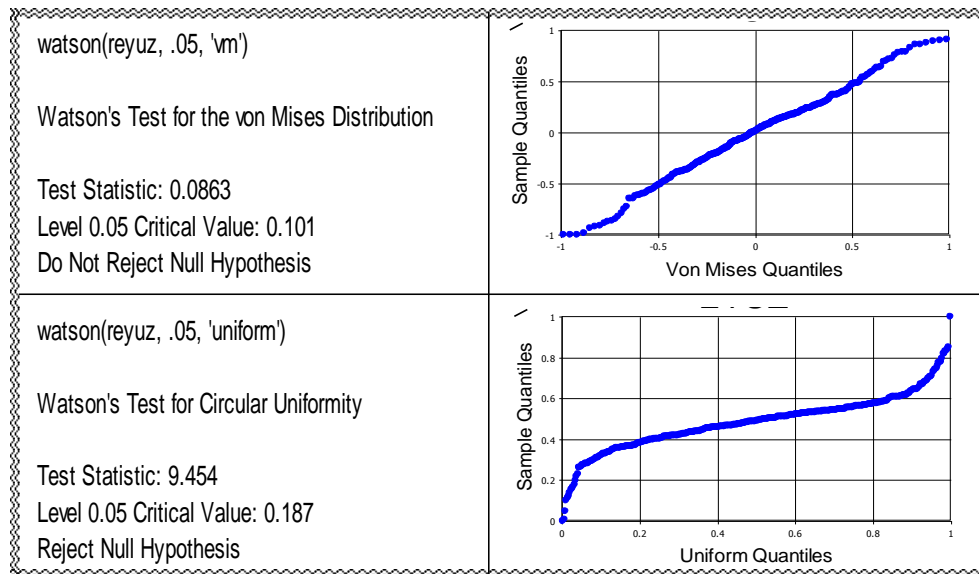


**Şekil 6.18.** BRENT değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri

BRENT değişkeninin Şekil (6.18)'de yer alan ilk Watson uyum iyiliği testinde, dağılımın dairesel normal dağılıma (Von Mises) uygun olduğunu varsayan sıfır hipotezinin reddedilemediği gösterilmiş, dairesel düzgün (Circular Uniform) dağılmadığı ise ikinci Watson uyum iyiliği testi sıfır hipotezinin reddedilmesi ile anlaşılmıştır. Bu testlere ait olan grafiklerin karşılaştırılması ile test sonuçları desteklenmektedir.

❖ **FTSE 100:**

FTSE 100 değişkenine ait dairesel normal dağılım (Von Mises) ve dairesel düzgün dağılım (Circular Uniform) uyum iyiliği test istatistikleri, karar aşamaları ve uyum grafikleri Şekil (6.19)'da gösterilmiştir.



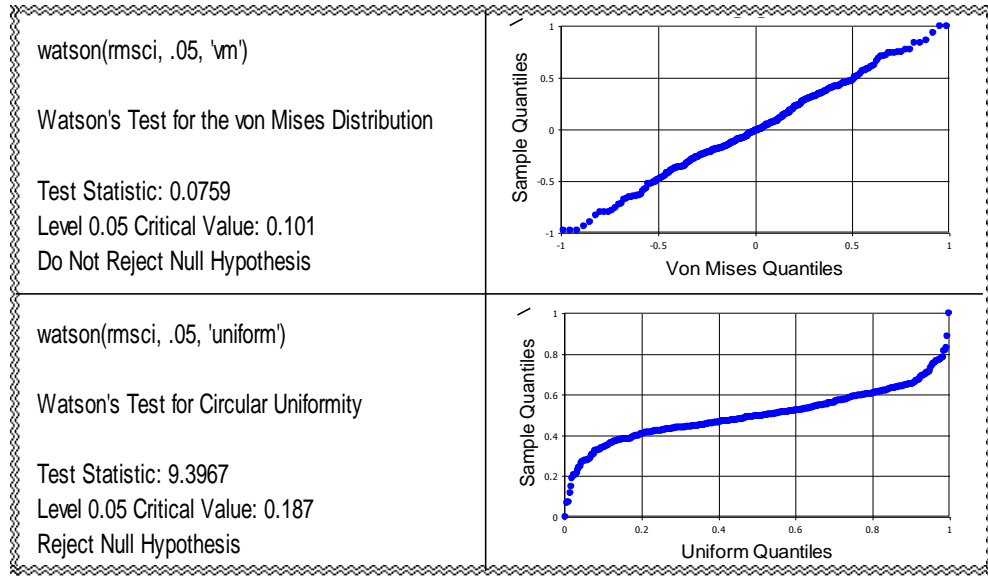
**Şekil 6.19.** FTSE 100 değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri



FTSE 100 değişkeninin Şekil (6.19)'da yer alan ilk Watson uyum iyiliği testinde, dağılımın dairesel normal dağılıma (Von Mises) uygun olduğunu varsayan sıfır hipotezinin reddedilemediği gösterilmiş, dairesel düzgün (Circular Uniform) dağılmadığı ise ikinci Watson uyum iyiliği testi sıfır hipotezinin reddedilmesi ile anlaşılmıştır. Bu testlere ait olan grafiklerin karşılaştırılması ile test sonuçları desteklenmektedir.

❖ **MSCI TR:**

MSCI TR değişkenine ait dairesel normal dağılım (Von Mises) ve dairesel düzgün dağılım (Circular Uniform) uyum iyiliği test istatistikleri, karar aşamaları ve uyum grafikleri Şekil (6.20)'de gösterilmiştir.

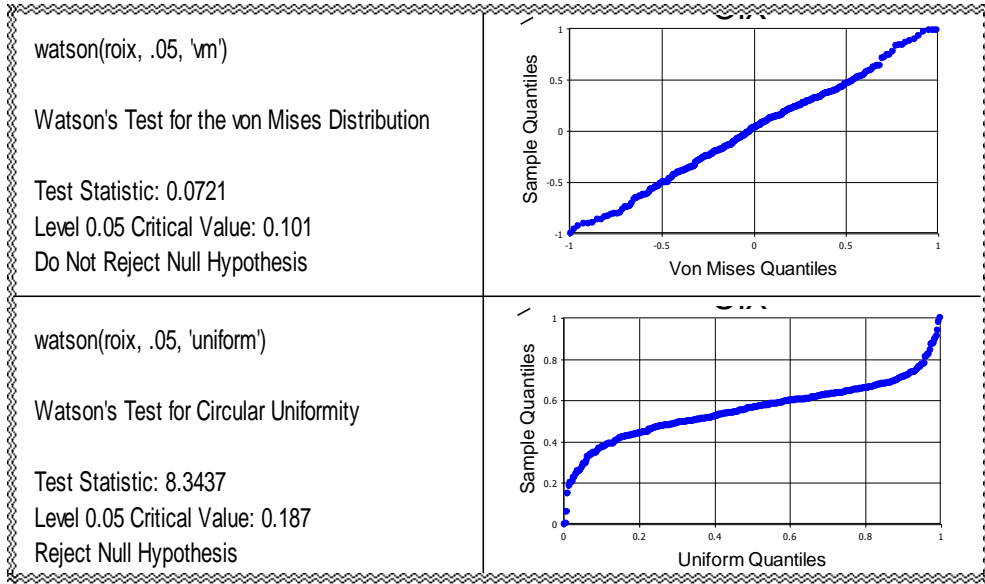


**Şekil 6.20.** MSCI TR değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri

MSCI TR değişkeninin Şekil (6.20)'de yer alan ilk Watson uyum iyiliği testinde, dağılımın dairesel normal dağılıma (Von Mises) uygun olduğunu varsayan sıfır hipotezinin reddedilemediği gösterilmiş, dairesel düzgün (Circular Uniform) dağılmadığı ise ikinci Watson uyum iyiliği testi sıfır hipotezinin reddedilmesi ile anlaşılmıştır. Bu testlere ait olan grafiklerin karşılaştırılması ile test sonuçları desteklenmektedir.

❖ **CBOE OIX:**

CBOE OIX TR değişkenine ait dairesel normal dağılım (Von Mises) ve dairesel düzgün dağılım (Circular Uniform) uyum iyiliği test istatistikleri, karar aşamaları ve uyum grafikleri Şekil (6.21)'de gösterilmiştir.

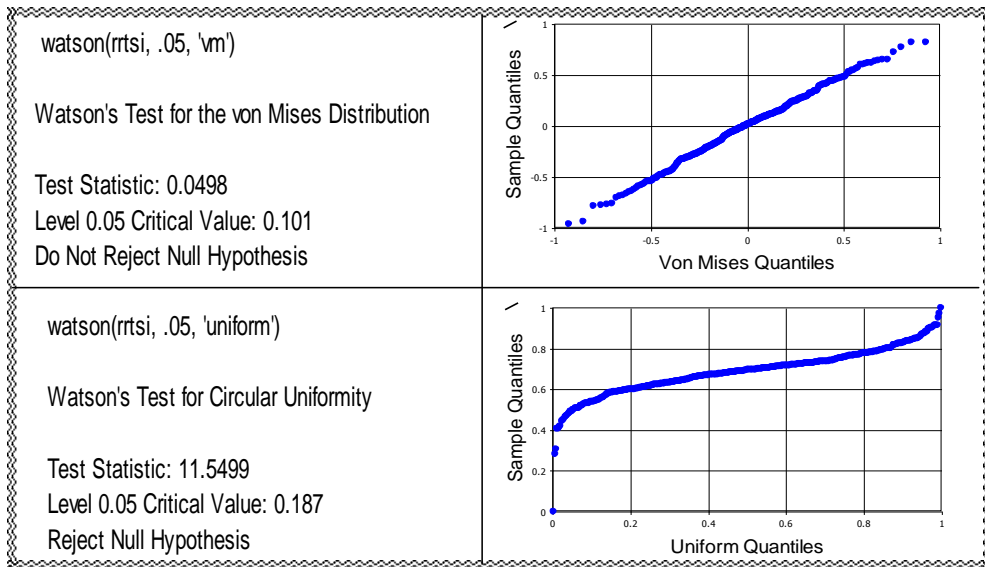


**Şekil 6.21.** CBOE OIX değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri

CBOE OIX değişkeninin Şekil (6.21)'de yer alan ilk Watson uyum iyiliği testinde, dağılımın dairesel normal dağılıma (Von Mises) uygun olduğunu varsayan sıfır hipotezinin reddedilemediği gösterilmiş, dairesel düzgün (Circular Uniform) dağılmadığı ise ikinci Watson uyum iyiliği testi sıfır hipotezinin reddedilmesi ile anlaşılmıştır. Bu testlere ait olan grafiklerin karşılaştırılması ile test sonuçları desteklenmektedir.

❖ **RTSI:**

RTSI değişkenine ait dairesel normal dağılım (Von Mises) ve dairesel düzgün dağılım (Circular Uniform) uyum iyiliği test istatistikleri, karar aşamaları ve uyum grafikleri Şekil (6.22)'de gösterilmiştir.

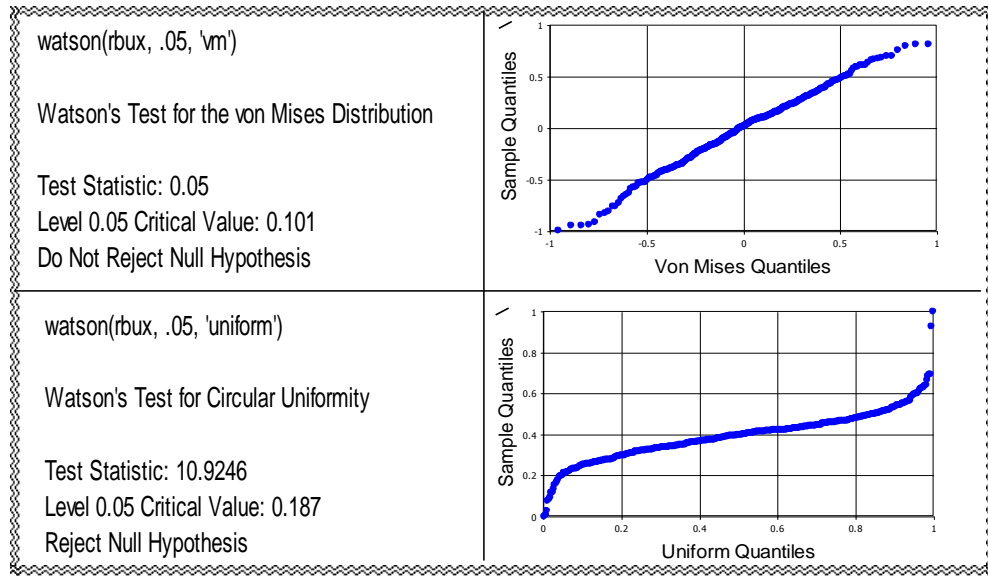


**Şekil 6.22.** RTSI değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri

RTSI değişkeninin Şekil (6.22)'de yer alan ilk Watson uyum iyiliği testinde, dağılımın dairesel normal dağılıma (Von Mises) uygun olduğunu varsayan sıfır hipotezinin reddedilemediği gösterilmiş, dairesel düzgün (Circular Uniform) dağılmadığı ise ikinci Watson uyum iyiliği testi sıfır hipotezinin reddedilmesi ile anlaşılmıştır. Bu testlere ait olan grafiklerin karşılaştırılması ile test sonuçları desteklenmektedir.

❖ **BUX:**

BUX değişkenine ait dairesel normal dağılım (Von Mises) ve dairesel düzgün dağılım (Circular Uniform) uyum iyiliği test istatistikleri, karar aşamaları ve uyum grafikleri Şekil (6.23)'de gösterilmiştir.

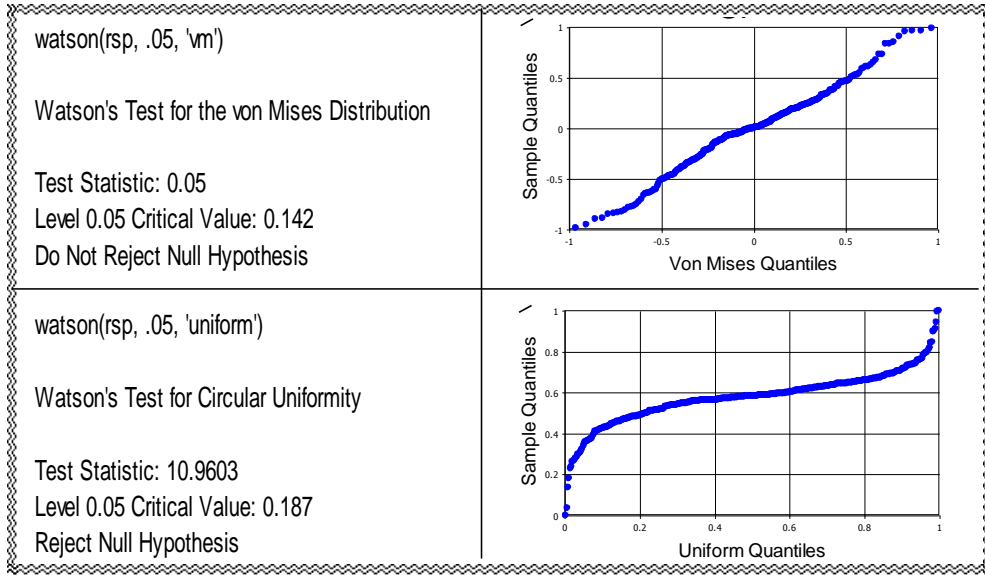


**Şekil 6.23.** BUX değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri

BUX değişkeninin Şekil (6.23)'de yer alan ilk Watson uyum iyiliği testinde, dağılımın dairesel normal dağılıma (Von Mises) uygun olduğunu varsayan sıfır hipotezinin reddedilemediği gösterilmiş, dairesel düzgün (Circular Uniform) dağılmadığı ise ikinci Watson uyum iyiliği testi sıfır hipotezinin reddedilmesi ile anlaşılmıştır. Bu testlere ait olan grafiklerin karşılaştırılması ile test sonuçları desteklenmektedir.

❖ **S&P 500:**

S&P 500 değişkenine ait dairesel normal dağılım (Von Mises) ve dairesel düzgün dağılım (Circular Uniform) uyum iyiliği test istatistikleri, karar aşamaları ve uyum grafikleri Şekil (6.24)'de gösterilmiştir.



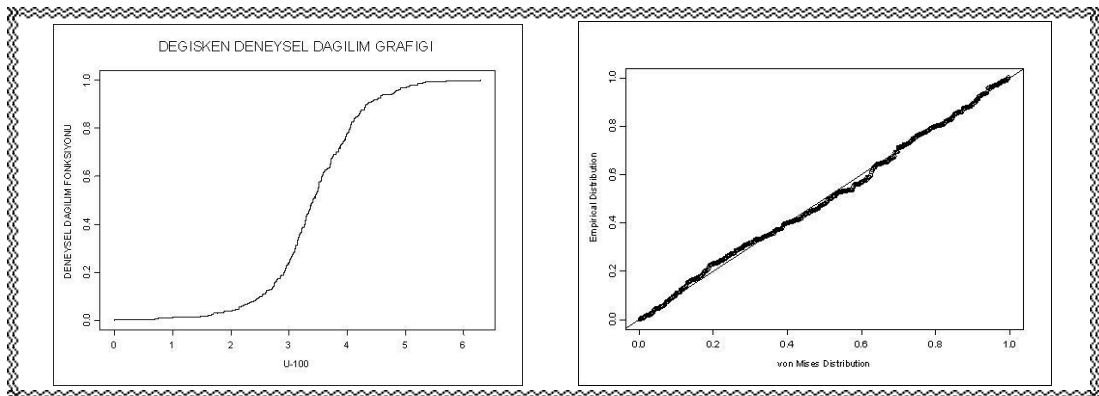
**Şekil 6.24.** S&P 500 değişkeninin karşılaştırmalı uyum iyiliği test ve grafikleri

S&P 500 değişkeninin Şekil (6.24)'de yer alan ilk Watson uyum iyiliği testinde, dağılımın dairesel normal dağılıma (Von Mises) uygun olduğunu varsayan sıfır hipotezinin reddedilemediği gösterilmiş, dairesel düzgün (Circular Uniform) dağılmadığı ise ikinci Watson uyum iyiliği testi sıfır hipotezinin reddedilmesi ile anlaşılmıştır. Bu testlere ait olan grafiklerin karşılaştırılması ile test sonuçları desteklenmektedir.

## 6.7. DEĞİŞKENLERİN DENEYSEL DAĞILIM FONKSİYONLARI ve DAĞILIM UYUM GRAFİKLERİ

Uygulamada kullanılan değişkenlere ait radyan cinsine dönüştürülmüş gözlemlerin, deneysel dağılım grafikleri ve değişken dağılımının parametreleri ile türetilmiş dairesel normal dağılım (Von Mises ) uyum grafikleri bu bölümde gösterilmiştir.

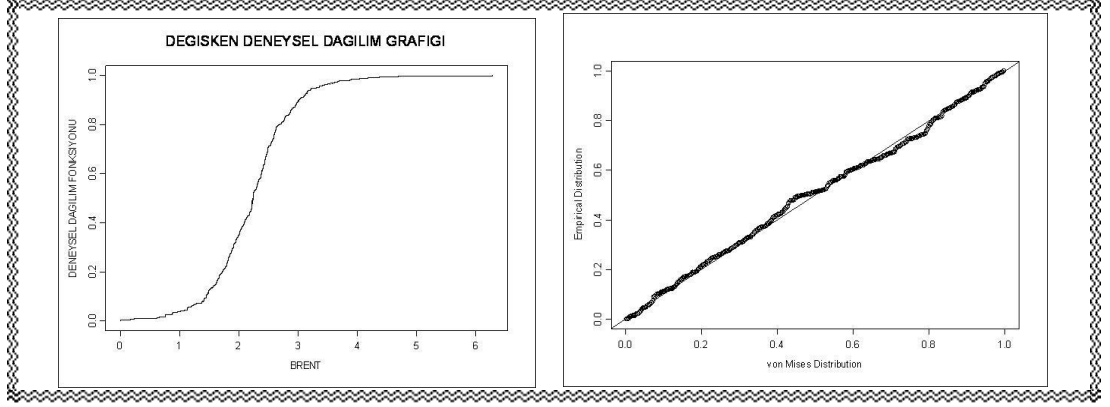
### ❖ İMKB U-100:



**Şekil 6.25.** İMKB U-100 değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği

Şekil (6.25)'de ilk olarak çizilen İMKB U-100 değişkeni deneysel dağılım grafiğinin, türetilmiş dairesel normal (Von Mises) dağılımla uyum sağladığı, çizilen ikinci grafikte gösterilmiştir.

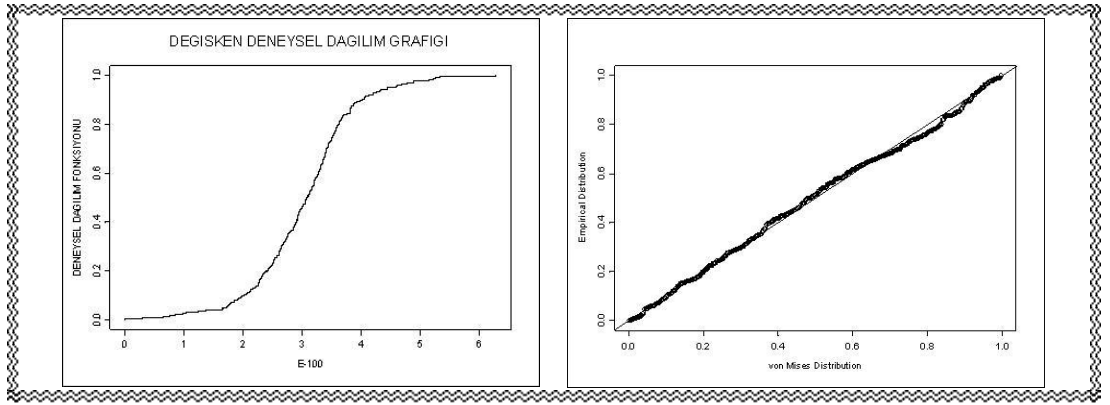
❖ **BRENT:**



**Şekil 6.26.** BRENT değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği

Şekil (6.26)'da ilk olarak çizilen BRENT değişkeni deneysel dağılım grafiğinin, türetilmiş dairesel normal (Von Mises) dağılımla uyum sağladığı, çizilen ikinci grafikte gösterilmiştir.

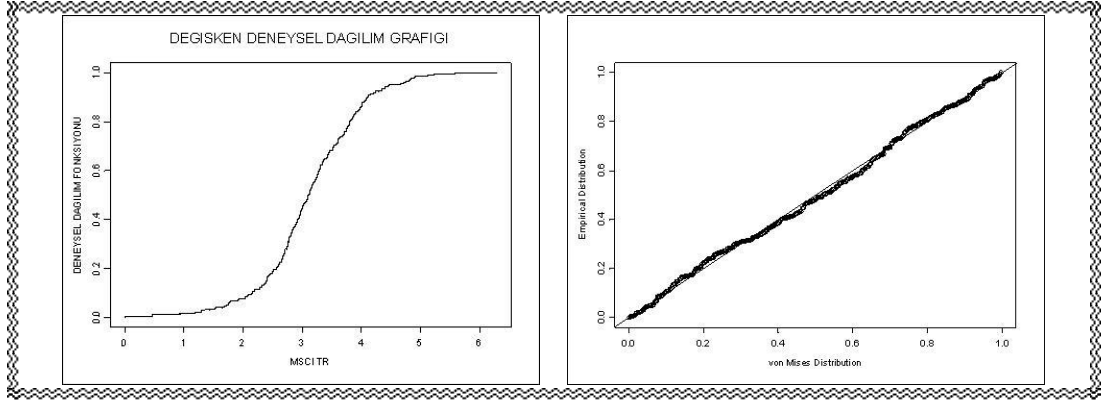
❖ **FTSE 100:**



**Şekil 6.27.** FTSE 100 değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği

Şekil (6.27)'de ilk olarak çizilen FTSE 100 değişkeni deneysel dağılım grafiğinin, türetilmiş dairesel normal (Von Mises) dağılımla uyum sağladığı, çizilen ikinci grafikte gösterilmiştir.

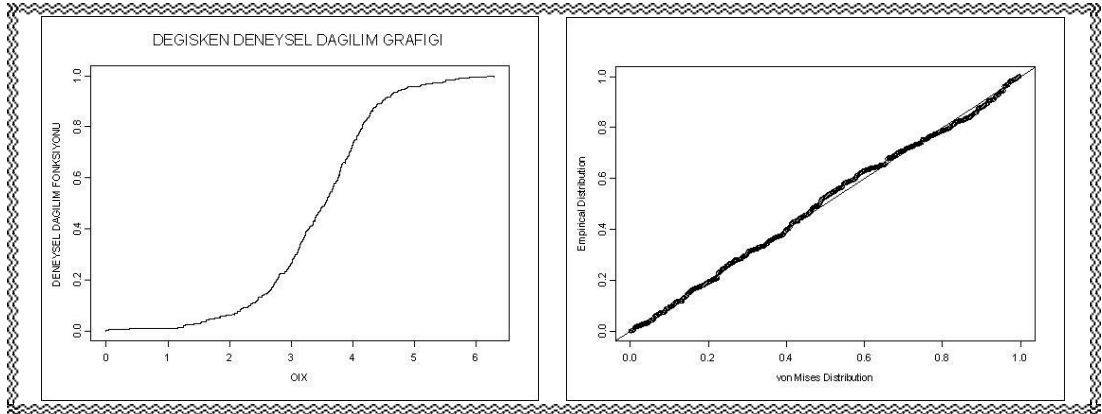
❖ **MSCI TR:**



**Şekil 6.28.** MSCI TR değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği

Şekil (6.28)'de ilk olarak çizilen MSCI TR değişkeni deneysel dağılım grafiğinin, türetilmiş dairesel normal (Von Mises) dağılımla uyum sağladığı, çizilen ikinci grafikte gösterilmiştir.

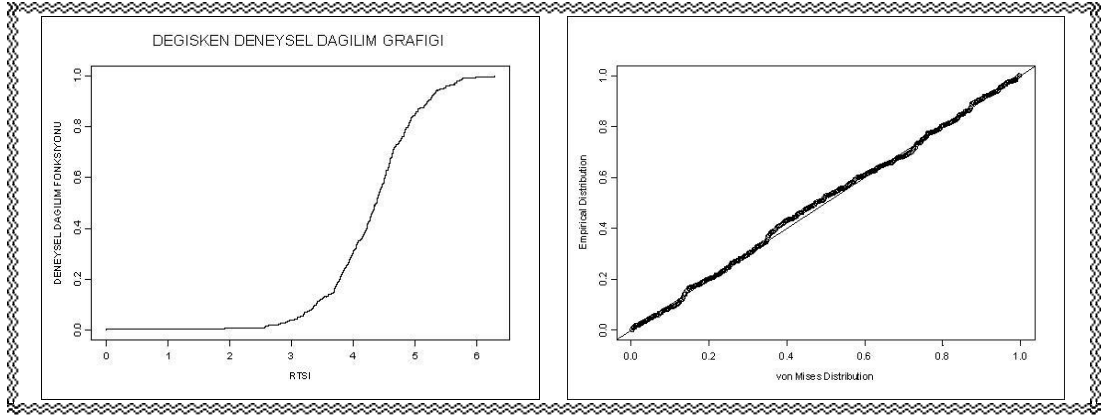
❖ **CBOE OIX:**



**Şekil 6.29.** CBOE OIX değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği

Şekil (6.29)'da ilk olarak çizilen CBOE OIX değişkeni deneysel dağılım grafiğinin, türetilmiş dairesel normal (Von Mises) dağılımla uyum sağladığı, çizilen ikinci grafikte gösterilmiştir.

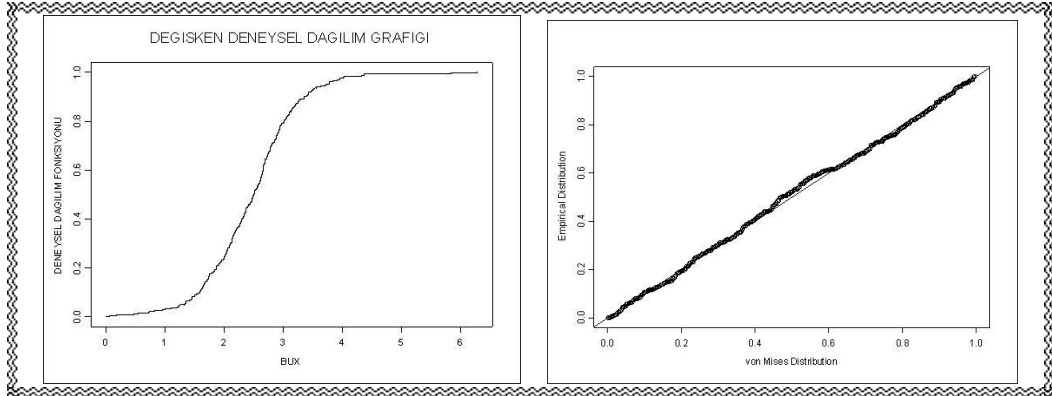
❖ **RTSI:**



**Şekil 6.30.** RTSI değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği

Şekil (6.30)'da ilk olarak çizilen RTSI değişkeni deneysel dağılım grafiğinin, türetilmiş dairesel normal (Von Mises) dağılımla uyum sağladığı, çizilen ikinci grafikte gösterilmiştir.

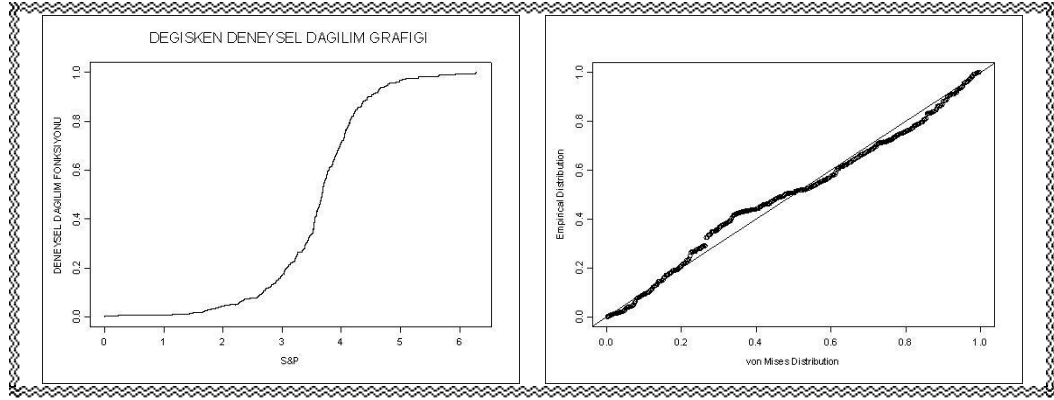
❖ **BUX:**



**Şekil 6.31.** BUX değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği

Şekil (6.31)'de ilk olarak çizilen BUX değişkeni deneysel dağılım grafiğinin, türetilmiş dairesel normal (Von Mises) dağılımla uyum sağladığı, çizilen ikinci grafikte gösterilmiştir.

## ❖ S&P 500:



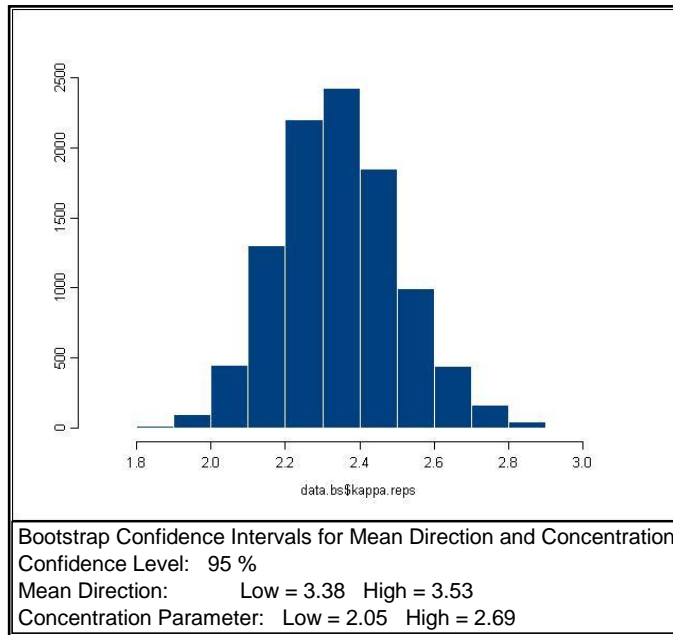
**Şekil 6.32.** S&P 500 değişkeninin deneysel dağılım grafiği ve türetilmiş dağılımla uyum grafiği

Şekil (6.32)'de ilk olarak çizilen S&P 500 değişkeni deneysel dağılım grafiğinin, türetilmiş dairesel normal (Von Mises) dağılımla uyum sağladığı, çizilen ikinci grafikte gösterilmiştir.

## 6.8. DEĞİŞKENLERİN BOOTSTRAP YÖNTEMİYLE ÖRNEKLEME ANALİZLERİ

Uygulamada kullanılan değişkenlere ait veri kümesinden 10.000'er adet gözlem, bootstrap yöntemi ile örneklemin temsil gücünü ölçmeye yönelik olarak simüle edilmiş, ortalama yön ve yoğunlaşma parametresinin güven aralığı % 5 anlamlılık düzeyinde grafiksel olarak bu bölümde gösterilmiştir.

## ❖ İMKB U-100:

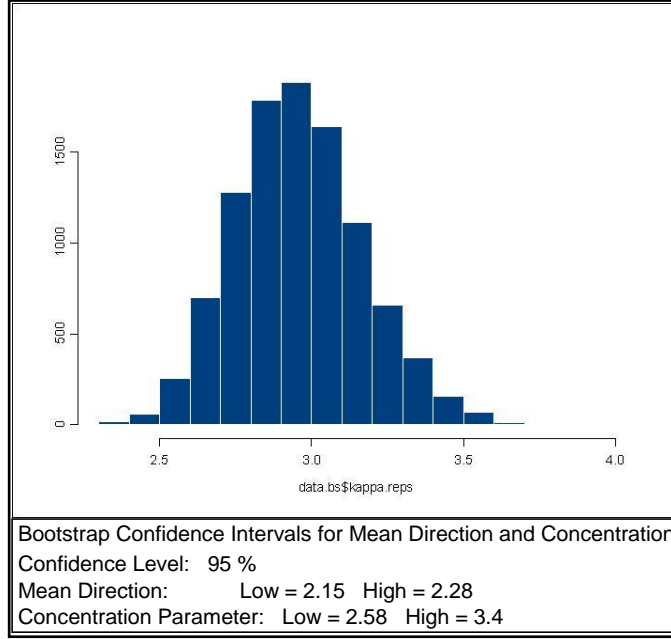


**Şekil 6.33.** İMKB U-100 değişkeninin bootstrap örnekleme analizi



İMKB U-100 değişkeninin 10.000 gözleme dayalı bootstrap simülasyonu sonucu, ortalama yönün ve yoğunlaşma parametresinin, alınan örnekleme ilişkin hesaplanan güven aralığı değerleri içerisinde kaldığı ve normal dağılıma yaklaştığı Şekil (6.33)'de görülmektedir. Böylece örneklemin temsil gücünün yüksek olduğu gözlenmiştir.

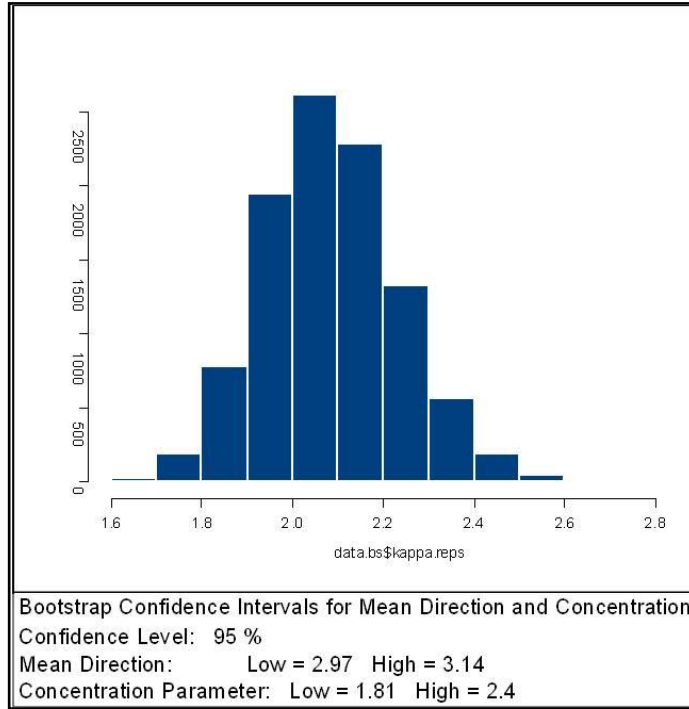
❖ **BRENT:**



**Şekil 6.34.** BRENT değişkeninin bootstrap örnekleme analizi

BRENT değişkeninin 10.000 gözleme dayalı bootstrap simülasyonu sonucu, ortalama yönün ve yoğunlaşma parametresinin, alınan örnekleme ilişkin hesaplanan güven aralığı değerleri içerisinde kaldığı ve normal dağılıma yaklaştığı Şekil (6.34)'de görülmektedir. Böylece örneklemin temsil gücünün yüksek olduğu gözlenmiştir.

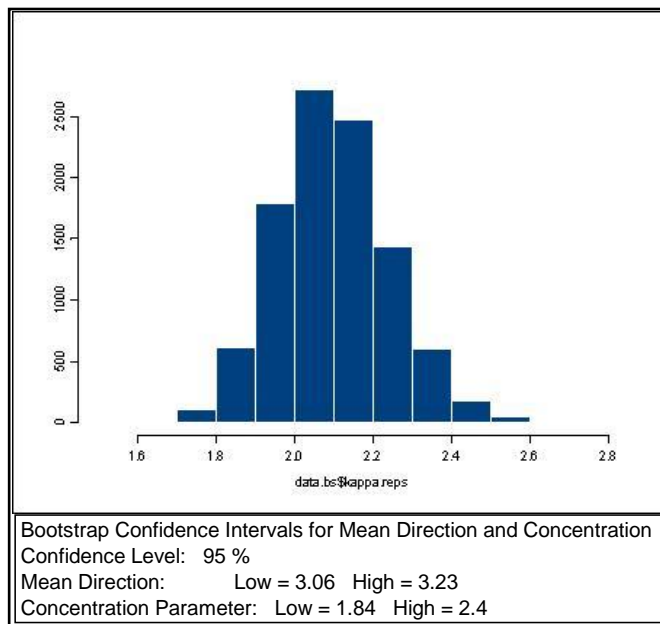
❖ **FTSE 100:**



**Şekil 6.35.** FTSE 100 değişkeninin bootstrap örnekleme analizi

FTSE 100 değişkeninin 10.000 gözleme dayalı bootstrap simülasyonu sonucu, ortalama yönün ve yoğunlaşma parametresinin, alınan örnekleme ilişkin hesaplanan güven aralığı değerleri içerisinde kaldığı ve normal dağılıma yaklaştığı Şekil (6.35)'de görülmektedir. Böylece örneklemin temsil gücünün yüksek olduğu gözlenmiştir.

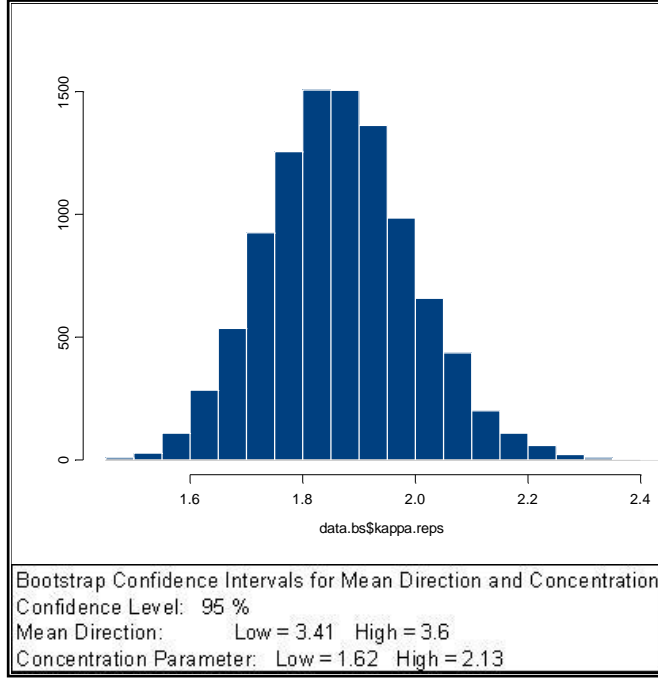
❖ **MSCI TR:**



**Şekil 6.36.** MSCI TR değişkeninin bootstrap örnekleme analizi

MSCI TR değişkeninin 10.000 gözleme dayalı bootstrap simülasyonu sonucu, ortalama yönün ve yoğunlaşma parametresinin, alınan örnekleme ilişkin hesaplanan güven aralığı değerleri içerisinde kaldığı ve normal dağılıma yaklaştığı Şekil (6.36)'da görülmektedir. Böylece örneklemin temsil gücünün yüksek olduğu gözlenmiştir.

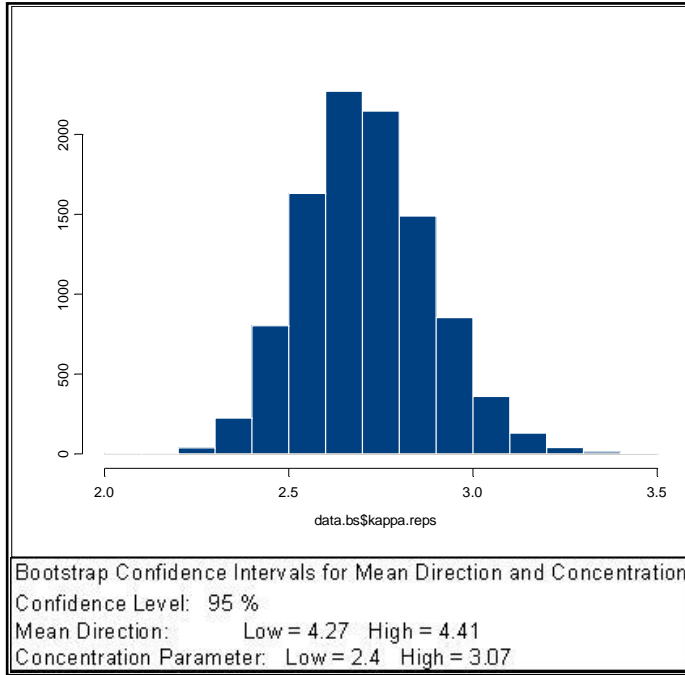
❖ **CBOE OIX:**



**Şekil 6.37.** CBOE OIX değişkeninin bootstrap örnekleme analizi

CBOE OIX değişkeninin 10.000 gözleme dayalı bootstrap simülasyonu sonucu, ortalama yönün ve yoğunlaşma parametresinin, alınan örnekleme ilişkin hesaplanan güven aralığı değerleri içerisinde kaldığı ve normal dağılıma yaklaştığı Şekil (6.37)'de görülmektedir. Böylece örneklemin temsil gücünün yüksek olduğu gözlenmiştir.

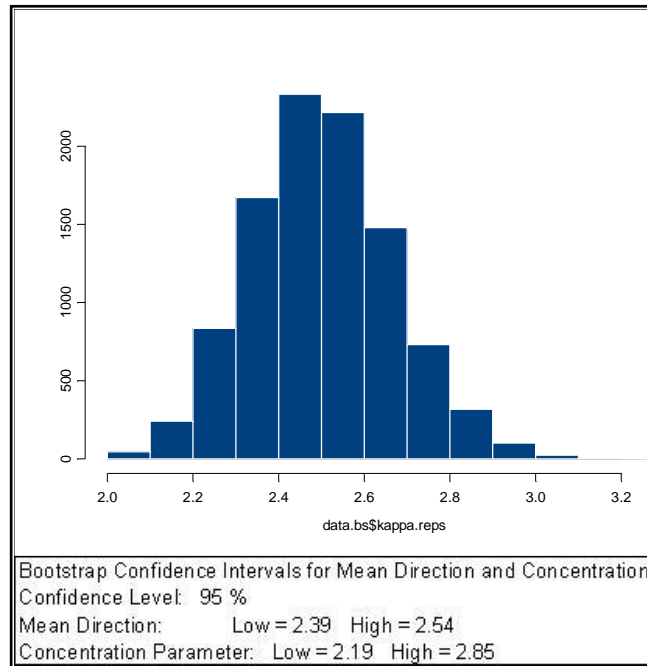
❖ **RTSI:**



**Şekil 6.38.** RTSI değişkeninin bootstrap örnekleme analizi

RTSI değişkeninin 10.000 gözleme dayalı bootstrap simülasyonu sonucu, ortalama yönün ve yoğunlaşma parametresinin, alınan örnekleme ilişkin hesaplanan güven aralığı değerleri içerisinde kaldığı ve normal dağılıma yaklaştığı Şekil (6.38)'de görülmektedir. Böylece örneklemin temsil gücünün yüksek olduğu gözlenmiştir.

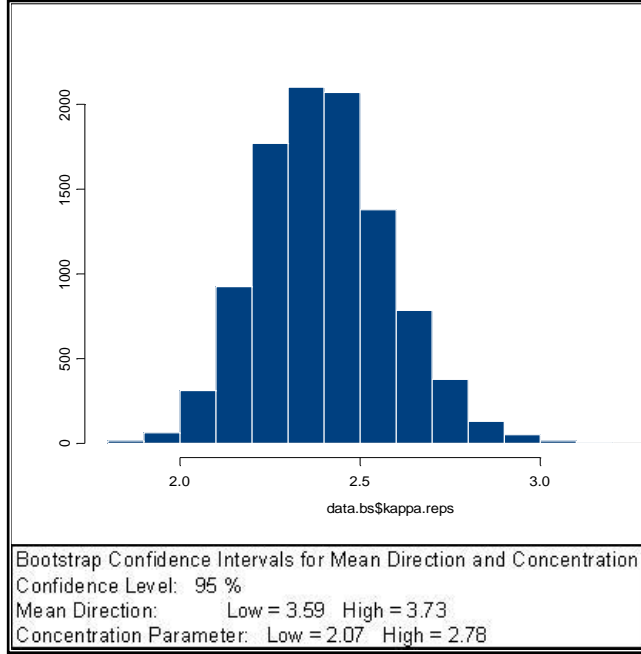
❖ **BUX:**



**Şekil 6.39.** BUX değişkeninin bootstrap örnekleme analizi

BUX değişkeninin 10.000 gözleme dayalı bootstrap simülasyonu sonucu, ortalama yönün ve yoğunlaşma parametresinin, alınan örnekleme ilişkin hesaplanan güven aralığı değerleri içerisinde kaldığı ve normal dağılıma yaklaştığı Şekil (6.39)'da görülmektedir. Böylece örneklemin temsil gücünün yüksek olduğu gözlenmiştir.

❖ **S&P 500:**



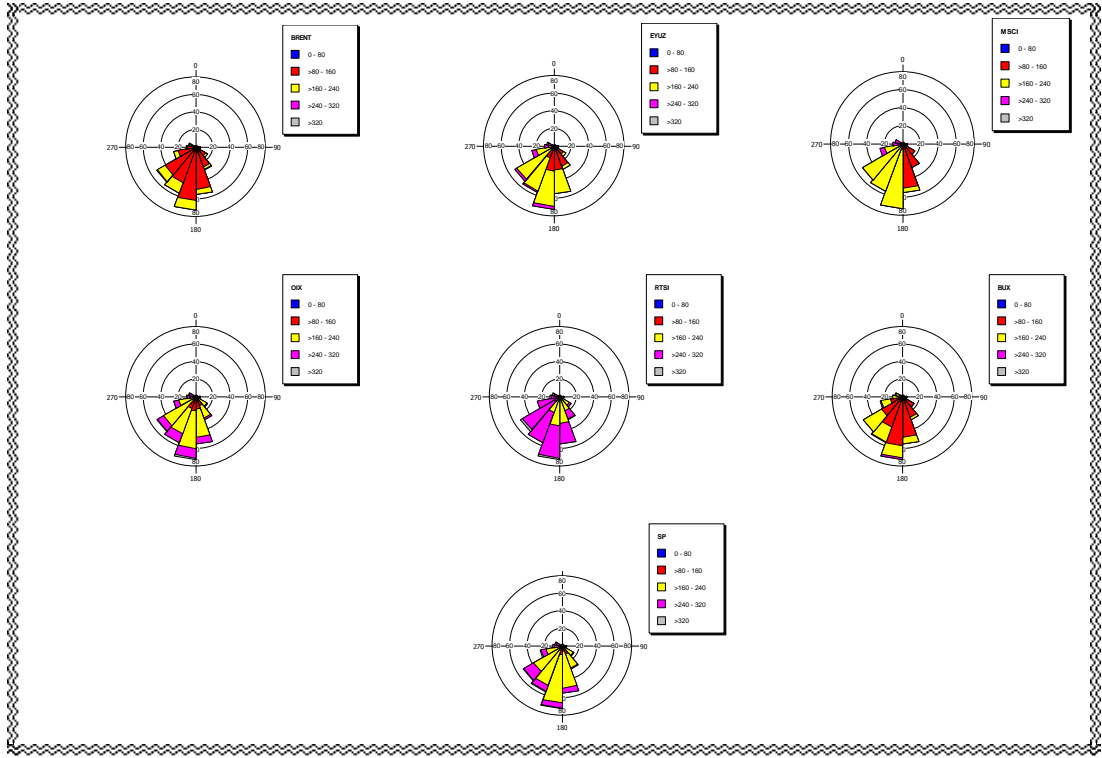
**Şekil 6.40.** S&P 500 değişkeninin bootstrap örnekleme analizi

S&P 500 10.000 gözleme dayalı bootstrap simülasyonu sonucu, ortalama yönün ve yoğunlaşma parametresinin, alınan örnekleme ilişkin hesaplanan güven aralığı değerleri içerisinde kaldığı ve dağılımın normal dağılıma yaklaştığı Şekil (6.40)'da görülmektedir. Böylece örneklemin temsil gücünün yüksek olduğu gözlenmiştir.

### 6.9. İMKB U-100 DEĞİŞKENİYLE DİĞER DEĞİŞKENLERİN DAĞILIM, ÖRTÜŞÜM ve KARŞILAŞTIRMALI GRAFİKLERİ

Uygulamada bağımlı değişken olarak kullanılacak olan İMKB U-100 değişkeni ile bağımsız değişken olarak kullanılacak olan diğer değişken gözlemlerinin ikili gül şeması örtüşüm grafikleri, ikili nokta dağılım grafikleri, dağılım fonksiyonu örtüşüm grafikleri, deneysel dağılım fonksiyonu karşılaştırma grafikleri ve homojenlik test istatistikleri bu bölümde gösterilmiştir.

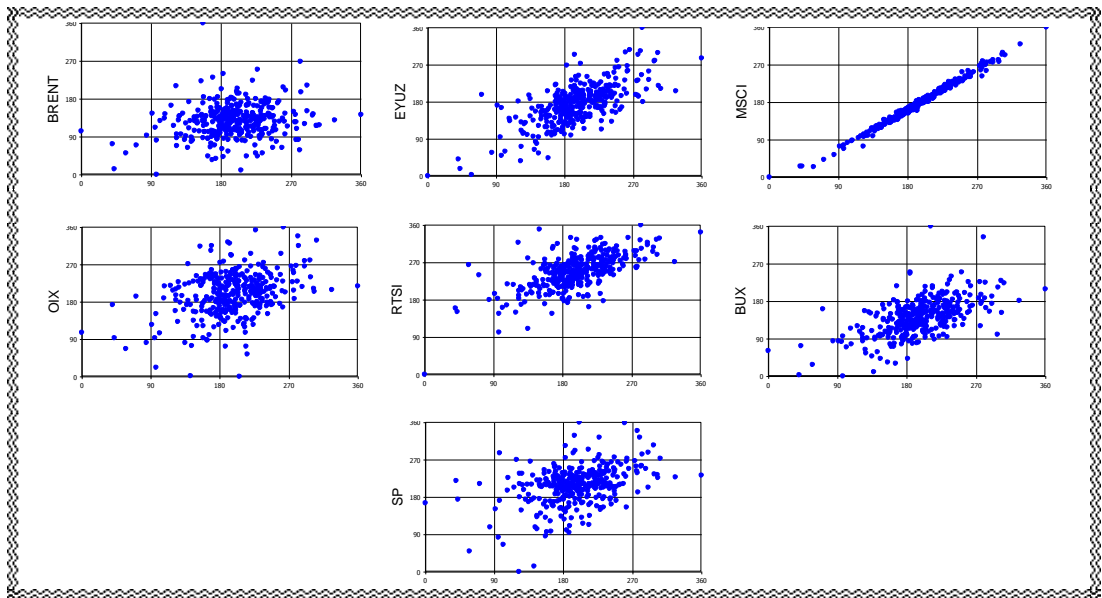
## 6.9.1. İkili Gül Şeması Örtüşüm Grafikleri



Şekil 6.41. İMKB U-100 değişkeninin diğer değişkenlerle gül şeması örtüşüm grafikleri

Şekil (6.41), bağımsız olarak değerlendirilecek değişkenlerin hangi açı değerlerinde İMKB U-100 değişkeni ile örtüştüğünü göstermektedir.

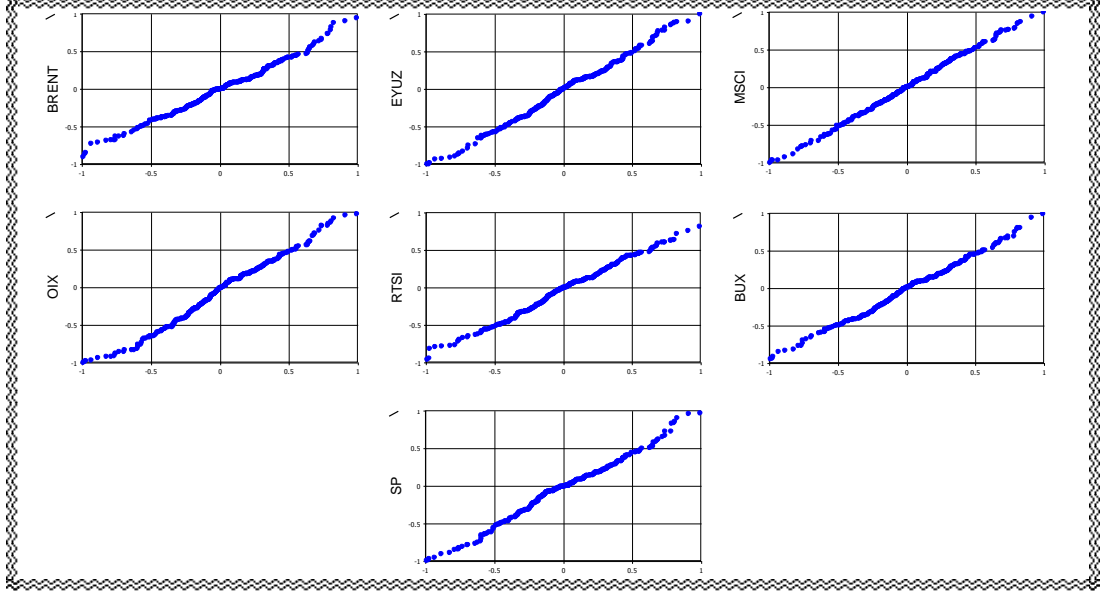
## 6.9.2. İkili Nokta Dağılım Grafikleri



Şekil 6.42. İMKB U-100 değişkeninin diğer değişkenlerle ikili nokta dağılım grafikleri

Şekil (6.42), bağımsız olarak değerlendirilecek değişkenlerin İMKB U-100 değişkeni ile nokta dağılımını göstermektedir.

### 6.9.3. İkili Dağılım Fonksiyonu Örtüşüm Grafikleri



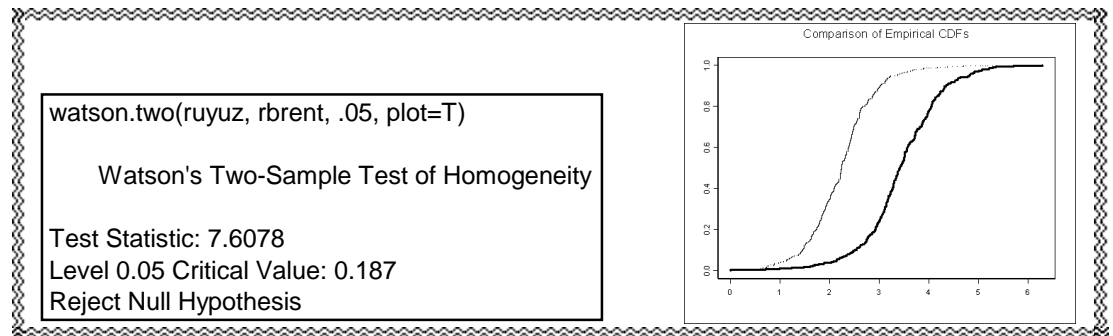
Şekil 6.43. İMKB U-100 değişkeninin diğer değişkenlerle fonksiyonel örtüşüm grafikleri

Şekil (6.43), bağımsız olarak değerlendirilecek değişkenlerin dağılım fonksiyonu ile İMKB U-100 değişkeninin dağılımı fonksiyonunu karşılaştırarak göstermektedir.

### 6.9.4. Deneysel Dağılım Fonksiyonu Karşılaştırma Grafikleri ve Homojenlik Test İstatistikleri

Uygulamada kullanılan değişkenler için koşullu deneysel dağılım fonksiyonlarının aynı kitleden gelip gelmediği % 5 anlam düzeyinde Watson İki Örneklem Homojenlik Testi sonucu belirlenmiş ve grafikler bu test sonucu çizilmiştir.

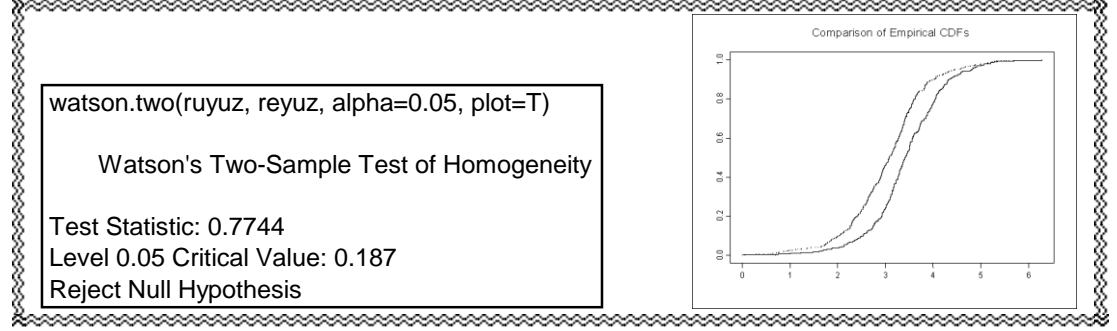
#### ❖ İMKB U- 100 & BRENT:



Şekil 6.44. İMKB U-100 & BRENT değişkenlerinin deneysel dağılım analizi

İMKB U-100 ve BRENT değişkenlerine ait gözlemlerin farklı kitlelerden alındığının gösterilmesi, Şekil (6.44)'de yer alan % 5 anlam düzeyinde Watson İki Örneklem Homojenlik Testi sıfır hipotezinin reddedilmesinden ve karşılaştırmalı deneysel dağılım grafiğinde ki farklılıktan anlaşılmaktadır.

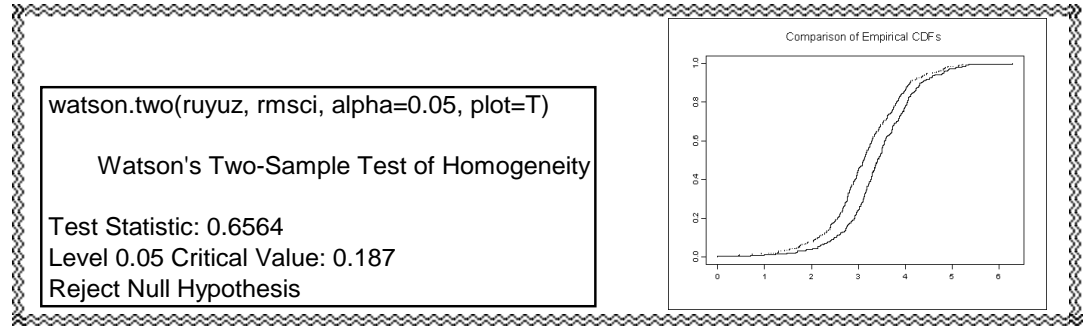
❖ **İMKB U- 100 & FTSE 100:**



**Şekil 6.45.** İMKB U-100 & FTSE 100 değişkenlerinin deneysel dağılım analizi

İMKB U-100 ve FTSE 100 değişkenlerine ait gözlemlerin farklı kitlelerden alındığının gösterilmesi, Şekil (6.45)'de yer alan % 5 anlam düzeyinde Watson İki Örneklem Homojenlik Testi sıfır hipotezinin reddedilmesinden ve karşılaştırmalı deneysel dağılım grafiğinde ki farklılıktan anlaşılmaktadır.

❖ **İMKB U- 100 & MCSI TR:**

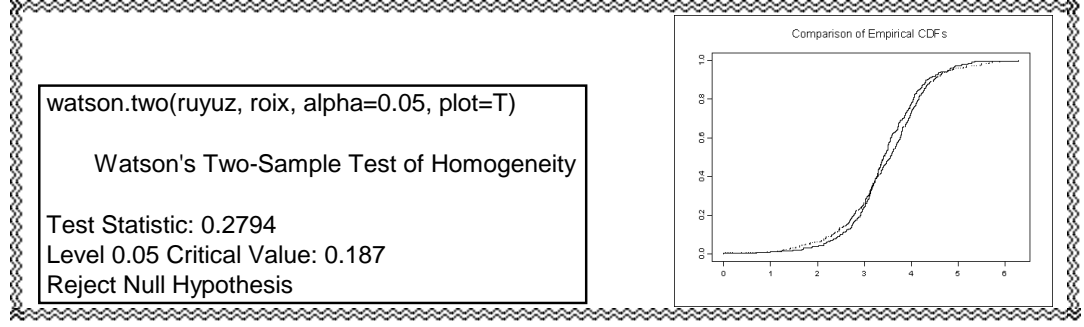


**Şekil 6.46.** İMKB U-100 & MSCI TR değişkenlerinin deneysel dağılım analizi

İMKB U-100 ve MSCI TR değişkenlerine ait gözlemlerin farklı kitlelerden alındığının gösterilmesi, Şekil (6.46)'da yer alan % 5 anlam düzeyinde Watson İki Örneklem Homojenlik Testi sıfır hipotezinin reddedilmesinden ve karşılaştırmalı deneysel dağılım grafiğinde ki farklılıktan anlaşılmaktadır.



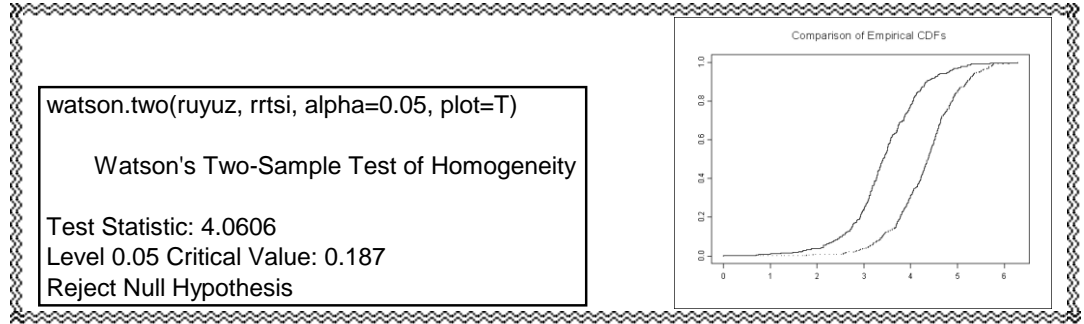
❖ **İMKB U- 100 & CBOE OIX:**



**Şekil 6.47.** İMKB U-100 & CBOE OIX değişkenlerinin deneysel dağılım analizi

İMKB U-100 ve CBOE OIX değişkenlerine ait gözlemlerin farklı kitlelerden alındığının gösterilmesi, Şekil (6.47)'de yer alan % 5 anlam düzeyinde Watson İki Örneklem Homojenlik Testi sıfır hipotezinin reddedilmesinden ve karşılaştırmalı deneysel dağılım grafiğinde ki farklılıktan anlaşılmaktadır.

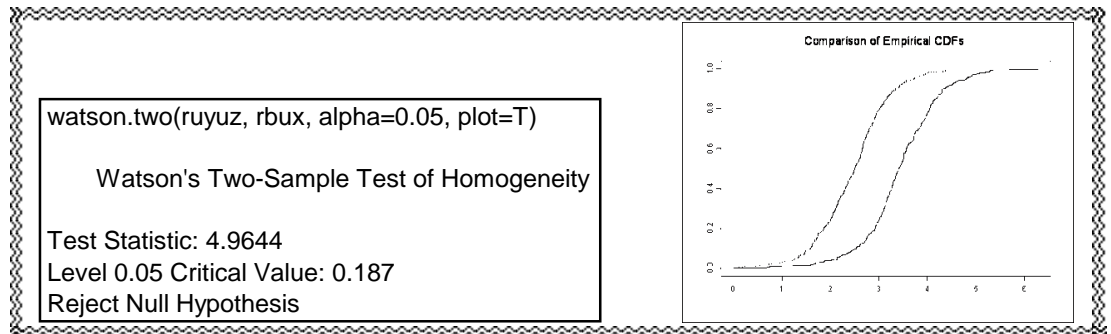
❖ **İMKB U- 100 & RTSI:**



**Şekil 6.48.** İMKB U-100 & RTSI değişkenlerinin deneysel dağılım analizi

İMKB U-100 ve RTSI değişkenlerine ait gözlemlerin farklı kitlelerden alındığının gösterilmesi, Şekil (6.48)'de yer alan % 5 anlam düzeyinde Watson İki Örneklem Homojenlik Testi sıfır hipotezinin reddedilmesinden ve karşılaştırmalı deneysel dağılım grafiğinde ki farklılıktan anlaşılmaktadır.

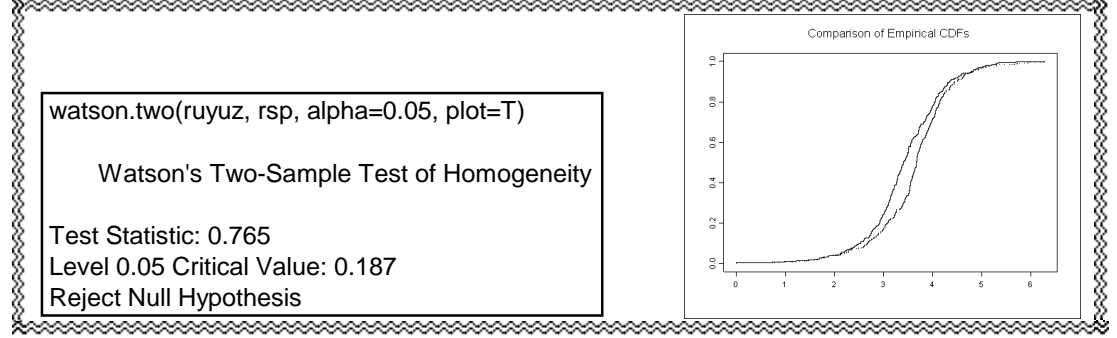
❖ **İMKB U- 100 & BUX:**



**Şekil 6.49.** İMKB U-100 & BUX değişkenlerinin deneysel dağılım analizi

İMKB U-100 ve BUX değişkenlerine ait gözlemlerin farklı kitlelerden alındığının gösterilmesi, Şekil (6.49)'da yer alan % 5 anlam düzeyinde Watson İki Örneklem Homojenlik Testi sıfır hipotezinin reddedilmesinden ve karşılaştırmalı deneysel dağılım grafiğinde ki farklılıktan anlaşılmaktadır.

#### ❖ İMKB U- 100 & S&P 500:

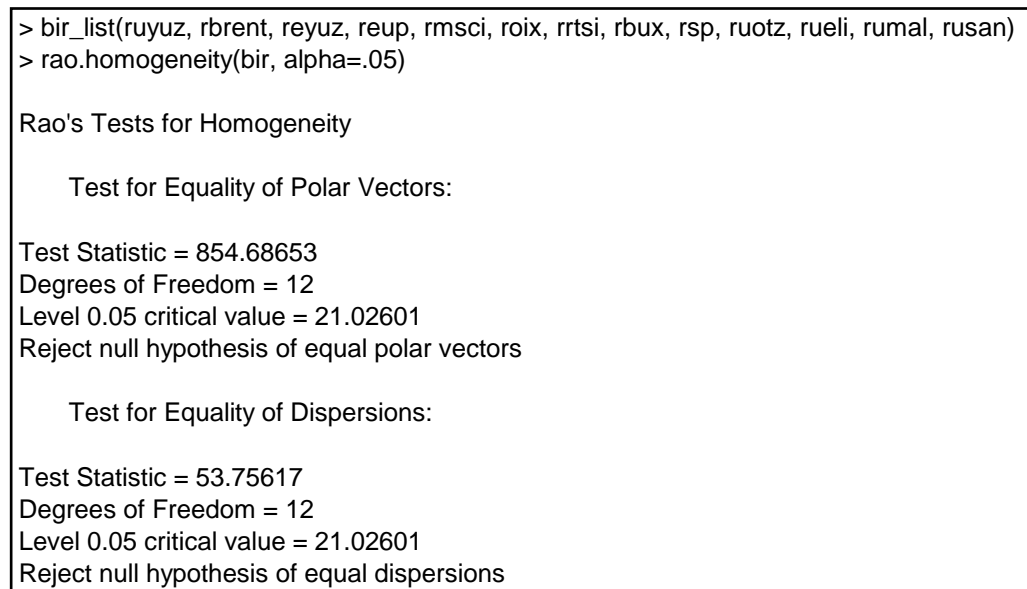


**Şekil 6.50.** İMKB U-100 & S&P 500 değişkenlerinin deneysel dağılım analizi

İMKB U-100 ve S&P 500 değişkenlerine ait gözlemlerin farklı kitlelerden alındığının gösterilmesi, Şekil (6.50)'de yer alan % 5 anlam düzeyinde Watson İki Örneklem Homojenlik Testi sıfır hipotezinin reddedilmesinden ve karşılaştırmalı deneysel dağılım grafiğinde ki farklılıktan anlaşılmaktadır.

## 6.10. BİRLEŞİK HOMOJENLİK TESTLERİ

Kutupsal koordinatların ve değişken saçılımlarının eşitliğini test eden Rao Homojenlik Testi, % 5 anlam seviyesinde uygulanmıştır.



**Şekil 6.51.** Birleştirilmiş değişkenlerin Rao Homojenlik Testleri

Birleşik olarak ele alınan değişkenlerin kutupsal koordinatların ve saçılımlarının eşit olmadığı Şekil (6.51)'de yer alan Rao Homojenlik Testi sıfır hipotezlerinin reddedilmesinden anlaşılmaktadır. Böylece örneklemelerin ayrı kitleleri temsil ettiği gözlenmiştir.

### 6.11. İMKB U-100 DEĞİŞKENİYLE DİĞER DEĞİŞKENLERİN DAİRESEL KORELASYON KATSAYISI ve GEÇERLİLİK TEST İSTATİSTİKLERİ

Bu bölümde radyan cinsi üzerinden tanımlanan İMKB U-100 değişkeni ile diğer değişkenlerin ilişki düzeyini belirlemek için korelasyon katsayıları hesaplanmış ve hesaplanan korelasyon katsayılarının % 5 anlamlılık düzeyinde geçerliliği test edilmiştir.

#### ❖ İMKB U- 100 & BRENT:

```
> circ.cor(ruyuz,rbrent,T)
  r      test.stat  p.value
0.1330186 2.389614 0.01686607
```

**Şekil 6.52.** İMKB U-100 & BRENT değişkenlerinin ilişki analizi

İMKB U-100 ve BRENT değişkenleri arasında yaklaşık % 13 oranında ilişki hesaplanmış ve bu ilişki Şekil (6.52)'de % 5 anlamlılık düzeyinde geçerlilik kazanmıştır.

#### ❖ İMKB U- 100 & FTSE 100:

```
> circ.cor(ruyuz,reyuz,T)
  r      test.stat  p.value
0.6280799 10.04281 0
```

**Şekil 6.53.** İMKB U-100 & FTSE 100 değişkenlerinin ilişki analizi

İMKB U-100 ve FTSE 100 değişkenleri arasında yaklaşık % 62 oranında ilişki hesaplanmış ve bu ilişki Şekil (6.53)'de % 5 anlamlılık düzeyinde geçerlilik kazanmıştır.

#### ❖ İMKB U- 100 & MSCI TR:

```
> circ.cor(ruyuz,rmsci,T)
  r      test.stat  p.value
0.9929663 13.14326 0
```

**Şekil 6.54.** İMKB U-100 & MSCI TR değişkenlerinin ilişki analizi

İMKB U-100 ve MSCI TR değişkenleri arasında yaklaşık % 99 oranında ilişki hesaplanmış ve bu ilişki Şekil (6.54)'de % 5 anlamlılık düzeyinde geçerlilik kazanmıştır.

❖ **İMKB U- 100 & CBOE OIX:**

```
> circ.cor(ruyuz,roix,T)
   r      test.stat  p.value
0.2696272 4.969126 6.725523e-007
```

**Şekil 6.55.** İMKB U-100 & CBOE OIX değişkenlerinin ilişki analizi

İMKB U-100 ve CBOE OIX değişkenleri arasında yaklaşık % 27 oranında ilişki hesaplanmış ve bu ilişki Şekil (6.55)'de % 5 anlamlılık düzeyinde geçerlilik kazanmıştır.

❖ **İMKB U- 100 & RTSI:**

```
> circ.cor(ruyuz,rtsi,T)
   r      test.stat  p.value
0.5918785 9.337848    0
```

**Şekil 6.56.** İMKB U-100 & RTSI değişkenlerinin ilişki analizi

İMKB U-100 ve RTSI değişkenleri arasında yaklaşık % 59 oranında ilişki hesaplanmış ve bu ilişki Şekil (6.56)'da % 5 anlamlılık düzeyinde geçerlilik kazanmıştır.

❖ **İMKB U- 100 & BUX:**

```
> circ.cor(ruyuz,rbux,T)
   r      test.stat  p.value
0.5487685 8.934925    0
```

**Şekil 6.57.** İMKB U-100 & BUX değişkenlerinin ilişki analizi

İMKB U-100 ve BUX değişkenleri arasında yaklaşık % 55 oranında ilişki hesaplanmış ve bu ilişki Şekil (6.57)'de % 5 anlamlılık düzeyinde geçerlilik kazanmıştır.

❖ **İMKB U- 100 & S&P 500:**

```
> circ.cor(ruyuz,rsp,T)
   r      test.stat  p.value
0.3286274 5.511221 3.563533e-008
```

**Şekil 6.58.** İMKB U-100 & S&P 500 değişkenlerinin ilişki analizi

İMKB U- 100 ve S&P 500 değişkenleri arasında yaklaşık % 32 oranında ilişki hesaplanmış ve bu ilişki Şekil (6.58)'de % 5 anlamlılık düzeyinde geçerlilik kazanmıştır.

### 6.12. İMKB U-100 DEĞİŞKENİYLE DİĞER DEĞİŞKENLERİN DAİRESEL REGRESYON ANALİZİ ve GEÇERLİLİK TEST İSTATİSTİKLERİ

Bu bölümde, radyan olarak tanımlanan bağımlı İMKB U-100 değişkeni ile bağımsız olarak nitelendirilen diğer değişkenlerin ayrı ayrı üç düzey baz alınarak dairesel-dairesel regresyon yöntemi ile modellenmesi üzerinde durulmuştur. Her bir değişkenle kurulacak modelleme aşamasında, gösterge düzeylerini belirlemek için % 1, % 5 ve % 10 anlamlılık seviyeleri dikkate alınmıştır. Bu anlamlılık seviyelerinde bağımlı İMKB U-100 değişkeni ile kurulacak bağımsız değişkenli trigonometrik polinomlu modellerin birinci, ikinci ve üçüncü düzeylerinde hesaplanan test istatistikleri sonucu anlamlılıkları belirlenmiştir. Ayrıca oluşturulan tüm modellerde  $\alpha$  bağımsız,  $\theta$  bağımlı değişkeni ifade etmektedir. Anlamlı bulunan modellerin her düzeyde oluşturulan iki ayrı trigonometrik polinomu için hesaplanan parametreler, eşitlik (5.30) ve (5.31)'de yine düzeylerine göre açılarak yerlerine yerleştirildikten sonra elde edilen değerlerin eşitlik (5.29)'da yerlerine yerleştirilmesi ile tahmin değerleri hesaplanmakta ve gerçek değerlerden farkları alınarak artık değerleri oluşturulmaktadır. Ayrıca çizelgelerde yer alan,

**rho:**  $\alpha$  değeri verildiğinde tahmini  $\theta$  değerlerinden oluşan serinin yoğunlaşma parametresi tahminlerinin kareler ortalamasının karekökünü,

**A.k:** Dairesel artıkların kosinüs değerleri ortalamasını,

**kappa:** Dairesel artıkların dairesel normal (Von Mises) dağılımından geldiği varsayımı altında, yoğunlaşma parametresinin en çok olasılık (Maximum Likelihood) tahmincisini ifade etmektedir.

Çizelgelerde gösterilen ve olasılık değerlerinden de anlaşılan beyaz zeminli modelin belirtilen düzeyde anlamsız olduğunu, pembe zeminli modelin % 1 anlam seviyesinde belirtilen düzeyde anlamlı olduğunu, mavi zeminli modelin % 5 anlam seviyesinde belirtilen düzeyde anlamlı olduğunu, sarı zeminli modelin ise % 10 anlam seviyesinde belirtilen düzeyde anlamlı olduğunu ifade etmektedir. Her model için oluşturulan trigonometrik polinomlara göre hesaplanan olasılık değerlerinden en az birinin belirtilen anlamlılık seviyesinden düşük değer alması, modelin belirtilen düzeyde geçerli olduğu işareti vermektir. Birden fazla anlam seviyelerinde geçerli olan modeller için en düşük anlam seviyesi dikkate alınmıştır.

❖ **İMKB U- 100 & BRENT:**

Çizelge (6.3)'de katsayıları ve istatistikleri verilen, birinci ve ikinci düzeyde anlamsız bulunan modellerin, % 5 anlam seviyesinin üçüncü düzeyinde anlamlı bulunmasından dolayı kutupsal ekseninde üçüncü dönüşte BRENT değişkeninin İMKB U-100 değişkeni ile modellenebileceği yapılan test sonucu gösterilmiştir.

**Çizelge 6.3.** Bağımlı İMKB U-100 ve bağımsız BRENT değişkenlerinin düzeylere göre regresyon analizleri

1. DÜZEY			2. DÜZEY			3. DÜZEY		
rho:	A.k:	kappa:	rho:	A.k:	kappa:	rho:	A.k:	kappa:
0.7530541	0.7503612	2.365491	0.7538104	0.7517564	2.377111	0.7543508	0.7526792	2.384856
katsayı:			katsayı:			katsayı:		
	1	2		1	2		1	2
(Sabit)	-0.58573805	-0.16148713	(Sabit)	-0.53656399	-0.1409974	(Sabit)	-0.51049866	-0.16472391
cos.alfa	0.13207725	0.1834677	cos.alfa1	0.19054325	0.26710573	cos.alfa1	0.21335571	0.26617582
sin.alfa	-0.09358437	0.03336131	cos.alfa2	-0.01629162	0.05893289	cos.alfa2	-0.05553214	0.14647221
			sin.alfa1	-0.17036208	0.04351735	cos.alfa3	-0.03532101	0.04938868
			sin.alfa2	-0.05737639	-0.04538141	sin.alfa1	-0.21969991	0.10364179
						sin.alfa2	-0.09848897	-0.02222785
						sin.alfa3	0.01121367	-0.0518051
olasılık:			olasılık:			olasılık:		
	p1	p2		p1	p2		p1	p2
	0.69779920	0.6090561		0.69779920	0.6090561		0.02882202	0.016052

❖ **İMKB U- 100 & FTSE 100:**

Çizelge (6.4)'de katsayıları ve istatistikleri verilen, % 1 anlam seviyesinin birinci düzeyinde anlamlı bulunan modellerin, ikinci ve üçüncü düzeyde anlamsız bulunmasından dolayı kutupsal ekseninde birinci dönüşte FTSE 100 değişkeninin İMKB U-100 değişkeni ile modellenebileceği yapılan test sonucu gösterilmiştir.

**Çizelge 6.4.** Bağımlı İMKB U-100 ve bağımsız FTSE 100 değişkenlerinin düzeylere göre regresyon analizleri

1. DÜZEY			2. DÜZEY			3. DÜZEY		
rho:	A.k:	kappa:	rho:	A.k:	kappa:	rho:	A.k:	kappa:
0.8492927	0.8512888	3.676218	0.8544973	0.8543426	3.7452	0.8563213	0.8557638	3.778325
katsayı:			katsayı:			katsayı:		
	1	2		1	2		1	2
(Sabit)	-0.3698488	-0.1198386	(Sabit)	-0.322372	-0.11352534	(Sabit)	-0.311362397	-0.13779261
cos.alfa	0.4574863	0.202772	cos.alfa1	0.59414983	0.23652217	cos.alfa1	0.626727511	0.17510797
sin.alfa	-0.2598836	0.5601843	cos.alfa2	0.13459344	0.04686298	cos.alfa2	0.198545439	-0.02898358
			sin.alfa1	-0.27171327	0.67826043	cos.alfa3	0.065428195	-0.05638037
			sin.alfa2	-0.02810083	0.13245859	sin.alfa1	-0.283224197	0.71389205
						sin.alfa2	-0.037068669	0.21752933
						sin.alfa3	-0.007234964	0.08732264
olasılık:			olasılık:			olasılık:		
	p1	p2		p1	p2		p1	p2
	0.001764114	0.00768256		0.183853	0.1219386		0.7936469	0.9873243

❖ **İMKB U- 100 & MSCI TR:**

Çizelge (6.5)'de katsayıları ve istatistikleri verilen, % 1 anlam seviyesinin birinci, ikinci, üçüncü düzeylerinde modellerin anlamlı bulunmasından dolayı kutupsal eksende her üç dönüşte de MSCI TR değişkeninin İMKB U-100 değişkeni ile modellenebileceği yapılan test sonucu gösterilmiştir.

**Çizelge 6.5.** Bağımlı İMKB U-100 ve bağımsız MSCI TR değişkenlerinin düzeylere göre regresyon analizleri

1. DÜZEY			2. DÜZEY			3. DÜZEY		
rho:	A.k:	kappa:	rho:	A.k:	kappa:	rho:	A.k:	kappa:
0.9962635	0.9966227	148.299	0.9968033	0.9968747	160.2364	0.9968892	0.9969473	164.0385
katsayı:			katsayı:			katsayı:		
	1	2		1	2		1	2
(Sabit)	-0.0836767	-0.03688244	(Sabit)	-0.0636747	-0.04694604	(Sabit)	-0.060998696	-0.05391213
cos.alfa	0.8801999	0.26516455	cos.alfa1	0.92776761	0.2442016	cos.alfa1	0.936292514	0.23020733
sin.alfa	-0.2831374	0.90861908	cos.alfa2	0.04087228	-0.01338568	cos.alfa2	0.057603824	-0.02993076
			sin.alfa1	-0.30211901	0.95829607	cos.alfa3	0.017533818	-0.01307001
			sin.alfa2	-0.01822372	0.05520741	sin.alfa1	-0.304367871	0.97044851
						sin.alfa2	-0.021439497	0.07937645
						sin.alfa3	-0.000822245	0.02051966
olasılık:			olasılık:			olasılık:		
	p1	p2		p1	p2		p1	p2
	6.98395E-09	1.3145E-13		0.02193958	0.005356475		0.002822746	0.000324429

❖ **İMKB U- 100 & CBOE OIX:**

Çizelge (6.6)'da katsayıları ve istatistikleri verilen, % 10 anlam seviyesinin birinci, ikinci düzeylerinde modellerin anlamlı, üçüncü düzeyde anlamsız olmasından dolayı kutupsal eksende birinci ve ikinci dönüşte CBOE OIX değişkeninin İMKB U-100 değişkeni ile modellenebileceği yapılan test sonucu gösterilmiştir.

**Çizelge 6.6.** Bağımlı İMKB U-100 ve bağımsız CBOE OIX değişkenlerinin düzeylere göre regresyon analizleri

1. DÜZEY			2. DÜZEY			3. DÜZEY		
rho:	A.k:	kappa:	rho:	A.k:	kappa:	rho:	A.k:	kappa:
0.7655464	0.7639841	2.483849	0.769346	0.7677946	2.519044	0.770812	0.7675284	2.516553
katsayı:			katsayı:			katsayı:		
	1	2		1	2		1	2
(Sabit)	-0.6132884	-0.13629769	(Sabit)	-0.58830933	-0.13491495	(Sabit)	-0.603386299	-0.135728134
cos.alfa	0.16070329	0.04399891	cos.alfa1	0.21831751	0.02870649	cos.alfa1	0.174802728	0.023650808
sin.alfa	-0.01842378	0.26737321	cos.alfa2	0.03620082	-0.05951315	cos.alfa2	-0.036092484	-0.073761357
			sin.alfa1	0.03841902	0.37156206	cos.alfa3	-0.063711403	-0.016925385
			sin.alfa2	0.07892898	0.11112131	sin.alfa1	0.009086132	0.370186991
						sin.alfa2	0.026509431	0.110918252
						sin.alfa3	-0.068472599	-0.004185827
olasılık:			olasılık:			olasılık:		
	p1	p2		p1	p2		p1	p2
	0.1644955	0.06491346		0.08549146	0.9481767		0.2099948	0.428916

❖ **İMKB U- 100 & RTSI:**

Çizelge (6.7)'de katsayıları ve istatistikleri verilen, % 10 anlam seviyesinin birinci, üçüncü düzeylerinde ve % 5 anlam seviyesinin ikinci düzeyinde anlamlı olmasından dolayı kutupsal ekseninde her üç dönüşte de RTSI değişkeninin İMKB U-100 değişkeni ile modellenebileceği yapılan test sonucu gösterilmiştir.

**Çizelge 6.7.** Bağımlı İMKB U-100 ve bağımsız RTSI değişkenlerinin düzeylere göre regresyon analizleri

1. DÜZEY			2. DÜZEY			3. DÜZEY		
rho:	A.k:	kappa:	rho:	A.k:	kappa:	rho:	A.k:	kappa:
0.8358265	0.8321723	3.318871	0.8376746	0.8329395	3.331704	0.8390627	0.8339893	3.34944
katsayı:			katsayı:			katsayı:		
	1	2		1	2		1	2
(Sabit)	-0.2723403	0.01035381	(Sabit)	-0.318447058	0.17987179	(Sabit)	-0.27533735	0.12751387
cos.alfa	0.4198092	-0.40371478	cos.alfa1	0.340791878	-0.21074077	cos.alfa1	0.47459268	-0.28357314
sin.alfa	0.4346588	0.48366606	cos.alfa2	-0.007022555	-0.05705346	cos.alfa2	0.13097508	-0.04082317
			sin.alfa1	0.382728459	0.72472401	cos.alfa3	-0.01433898	0.04777758
			sin.alfa2	-0.063788394	0.16823574	sin.alfa1	0.3877442	0.64907
						sin.alfa2	0.05625597	0.07657367
						sin.alfa3	0.13088691	-0.01572413
olasılık:			olasılık:			olasılık:		
	p1	p2		p1	p2		p1	p2
	0.5448725	0.08572179		0.0413731	0.8719903		0.08657748	0.1567159

❖ **İMKB U- 100 & BUX:**

Çizelge (6.8)'de katsayıları ve istatistikleri verilen, birinci ve ikinci düzeyde anlamsız bulunan modellerin, % 5 anlam seviyesinin üçüncü düzeyinde anlamlı bulunmasından dolayı kutupsal ekseninde üçüncü dönüşte BUX değişkeninin İMKB U-100 değişkeni ile modellenebileceği yapılan test sonucu gösterilmiştir.

**Çizelge 6.8.** Bağımlı İMKB U-100 ve bağımsız BUX değişkenlerinin düzeylere göre regresyon analizleri

1. DÜZEY			2. DÜZEY			3. DÜZEY		
rho:	A.k:	kappa:	rho:	A.k:	kappa:	rho:	A.k:	kappa:
0.8183349	0.8131923	3.03217	0.8205588	0.8183521	3.104726	0.8219336	0.8207299	3.13943
katsayı:			katsayı:			katsayı:		
	1	2		1	2		1	2
(Sabit)	-0.3992123	-0.1228104	(Sabit)	-0.47541933	-0.21307091	(Sabit)	-0.462632112	-0.208528032
cos.alfa	0.2226778	0.442586	cos.alfa1	0.16213932	0.37795388	cos.alfa1	0.197472517	0.340211703
sin.alfa	-0.3710597	0.3256946	cos.alfa2	0.05633621	0.07619049	cos.alfa2	0.089944176	-0.009111593
			sin.alfa1	-0.21739679	0.51357209	cos.alfa3	-0.009424029	-0.013619342
			sin.alfa2	0.1035052	0.12165876	sin.alfa1	-0.239956017	0.503869394
						sin.alfa2	0.037939896	0.19264857
						sin.alfa3	-0.061233367	0.101153762
olasılık:			olasılık:			olasılık:		
	p1	p2		p1	p2		p1	p2
	0.1544871	0.15241		0.4600953	0.239088		0.01402591	0.2086341



❖ **İMKB U- 100 & S&P 500:**

Çizelge (6.9)'da katsayıları ve istatistikleri verilen, % 1 anlam seviyesinin birinci düzeyinde, % 5 anlam seviyesinin ikinci düzeyinde modellerin anlamlı, üçüncü düzeyde anlamsız olmasından dolayı kutupsal eksende birinci ve ikinci dönüşte S&P 500 değişkeninin İMKB U-100 değişkeni ile modellenebileceği yapılan test sonucu gösterilmiştir.

**Çizelge 6.9.** Bağımlı İMKB U-100 ve bağımsız S&P 500 değişkenlerinin düzeylere göre regresyon analizleri

1. DÜZEY			2. DÜZEY			3. DÜZEY		
rho:	A.k:	kappa:	rho:	A.k:	kappa:	rho:	A.k:	kappa:
0.773933	0.7727897	2.566697	0.7788331	0.7791183	2.629718	0.7821361	0.7817363	2.656707
katsayı:			katsayı:			katsayı:		
	1	2		1	2		1	2
(Sabit)	-0.5661385	-0.12537578	(Sabit)	-0.58135396	-0.071948882	(Sabit)	-0.543269718	-0.05254229
cos.alfa	0.25531112	-0.02978354	cos.alfa1	0.22028272	0.076330552	cos.alfa1	0.270517648	0.09509411
sin.alfa	-0.06103939	0.32798522	cos.alfa2	-0.01299183	-0.003292182	cos.alfa2	-0.030834449	-0.04418191
			sin.alfa1	-0.09483562	0.506983693	cos.alfa3	-0.089534092	-0.07774473
			sin.alfa2	-0.04351994	0.203663831	sin.alfa1	-0.002525103	0.55181195
						sin.alfa2	0.13281608	0.28727723
						sin.alfa3	0.12067739	0.04055835
olasılık:			olasılık:			olasılık:		
	p1	p2		p1	p2		p1	p2
	0.650761	0.00837809		0.0113638	0.3977969		0.1252048	0.1507992

Belirtilen düzeylerde ve verilen anlam seviyelerinde geçerli olan modellerin daha iyi saptanabilmesi için birleşik gösterimi Çizelge (6.10)'da verilmiştir.

**Çizelge 6.10.** Birleşik Model Geçerlilik Tablosu

GÖSTERGE	DÜZEY		
	1	2	3
BRENT			5%
FTSE E-100	1%		
MSCI TR	1%	1%	1%
CBOE OIX	10%	10%	
RTSI	10%	5%	10%
BUX			5%
S&P 500	1%	5%	

Belirli periyodik aralıklarla çember etrafında gerçekleştirdiği dönüş sonucu bağımlı değişken ile modellenen bağımsız değişkenin gösterge olarak nitelendirilebilmesi için asgari düzey ve düşük hata seviyelerinde anlamlı olması, bu anlamlılık

düzeylerinde istikrar sağlayarak birlikte yapılacak sürekli dönüşleri oluşturması gerekmektedir.

Üç düzeyde incelenen ve toplu olarak Çizelge (6.10)'da gösterilen modellerin bağımsız değişkenleri gösterge olarak ele alındığında,

- I. MSCI TR
- II. RTSI
- III. S&P 500
- IV. CBOE OIX
- V. FTSE 100
- VI. BRENT
- VII. BUX

olarak etki sıralaması yapılmaktadır.

Bu göstergelerin oluşturulduğu etki sıralı modeller yaklaşık katsayılarıyla Çizelge (6.11), (6.12), (6.13), (6.14), (6.15), (6.16), (6.17)'de gösterilmiştir. Bu çizelgelerde yer alan modeller, geçmiş konularda anlatılan dönüşümler vasıtasıyla yapılacak tahminleri mümkün kılmaktadır. Ayrıca gösterge içi model sıralamalarında yine olasılık değerleri dikkate alınmıştır.

**Çizelge 6.11. IMKB U-100 & MCSI TR Etki Sıralı Modellemeleri**

I.	$M_1$	$g_1(\alpha)=$	$-0,09 + 0,88 \cos \alpha - 0,28 \sin \alpha$
		$g_2(\alpha)=$	$-0,04 + 0,27 \cos \alpha + 0,91 \sin \alpha$
	$M_3$	$g_1(\alpha)=$	$-0,06 + 0,94 \cos \alpha + 0,31 \sin \alpha + 0,06 \cos 2\alpha - 0,02 \sin 2\alpha + 0,02 \cos 3\alpha - 0,0008 \sin 3\alpha$
		$g_2(\alpha)=$	$-0,06 + 0,23 \cos \alpha + 0,97 \sin \alpha - 0,03 \cos 2\alpha + 0,08 \sin 2\alpha - 0,01 \cos 3\alpha + 0,02 \sin 3\alpha$
	$M_2$	$g_1(\alpha)=$	$-0,07 + 0,93 \cos \alpha - 0,3 \sin \alpha + 0,04 \cos 2\alpha - 0,02 \sin 2\alpha$
		$g_2(\alpha)=$	$-0,05 + 0,25 \cos \alpha + 0,96 \sin \alpha - 0,02 \cos 2\alpha - 0,06 \sin 2\alpha$

**Çizelge 6.12. IMKB U-100 & RTSI Etki Sıralı Modellemeleri**

II.	$M_2$	$g_1(\alpha)=$	$-0,32 + 0,34 \cos \alpha + 0,38 \sin \alpha - 0,007 \cos 2\alpha - 0,06 \sin 2\alpha$
		$g_2(\alpha)=$	$0,18 - 0,21 \cos \alpha + 0,73 \sin \alpha - 0,06 \cos 2\alpha + 0,17 \sin 2\alpha$
	$M_1$	$g_1(\alpha)=$	$-0,27 + 0,42 \cos \alpha + 0,43 \sin \alpha$
		$g_2(\alpha)=$	$0,01 - 0,41 \cos \alpha + 0,49 \sin \alpha$
	$M_3$	$g_1(\alpha)=$	$-0,28 + 0,48 \cos \alpha + 0,39 \sin \alpha + 0,13 \cos 2\alpha + 0,06 \sin 2\alpha - 0,02 \cos 3\alpha + 0,13 \sin 3\alpha$
		$g_2(\alpha)=$	$0,13 - 0,29 \cos \alpha + 0,65 \sin \alpha - 0,05 \cos 2\alpha + 0,08 \sin 2\alpha + 0,05 \cos 3\alpha - 0,02 \sin 3\alpha$

**Çizelge 6.13. IMKB U-100 & S&P 500 Etki Sıralı Modellemeleri**

III.	$M_1$	$g_1(\alpha)=$	$-0,57 + 0,26 \cos \alpha - 0,06 \sin \alpha$
		$g_2(\alpha)=$	$-0,12 - 0,03 \cos \alpha + 0,33 \sin \alpha$
	$M_2$	$g_1(\alpha)=$	$-0,58 + 0,22 \cos \alpha - 0,1 \sin \alpha - 0,01 \cos 2\alpha - 0,04 \sin 2\alpha$
		$g_2(\alpha)=$	$-0,07 - 0,08 \cos \alpha + 0,51 \sin \alpha - 0,003 \cos 2\alpha + 0,20 \sin 2\alpha$

**Çizelge 6.14. IMKB U-100 & CBOE OIX Etki Sıralı Modellemeleri**

IV.	$M_1$	$g_1(\alpha)=$	$-0,61 + 0,16 \cos \alpha - 0,02 \sin \alpha$
		$g_2(\alpha)=$	$-0,14 + 0,05 \cos \alpha + 0,27 \sin \alpha$
	$M_2$	$g_1(\alpha)=$	$-0,59 + 0,22 \cos \alpha + 0,04 \sin \alpha + 0,04 \cos 2\alpha + 0,08 \sin 2\alpha$
		$g_2(\alpha)=$	$-0,14 - 0,083 + 0,37 \sin \alpha - 0,06 \cos 2\alpha + 0,11 \sin 2\alpha$

**Çizelge 6.15.** İMKB U-100 & FTSE 100 Etki Sıralı Modellemeleri

V.	$M_1$	$g_1(\alpha)=$	$-0,37 + 0,46 \cos \alpha - 0,26 \sin \alpha$
		$g_2(\alpha)=$	$-0,12 + 0,2 \cos \alpha + 0,56 \sin \alpha$

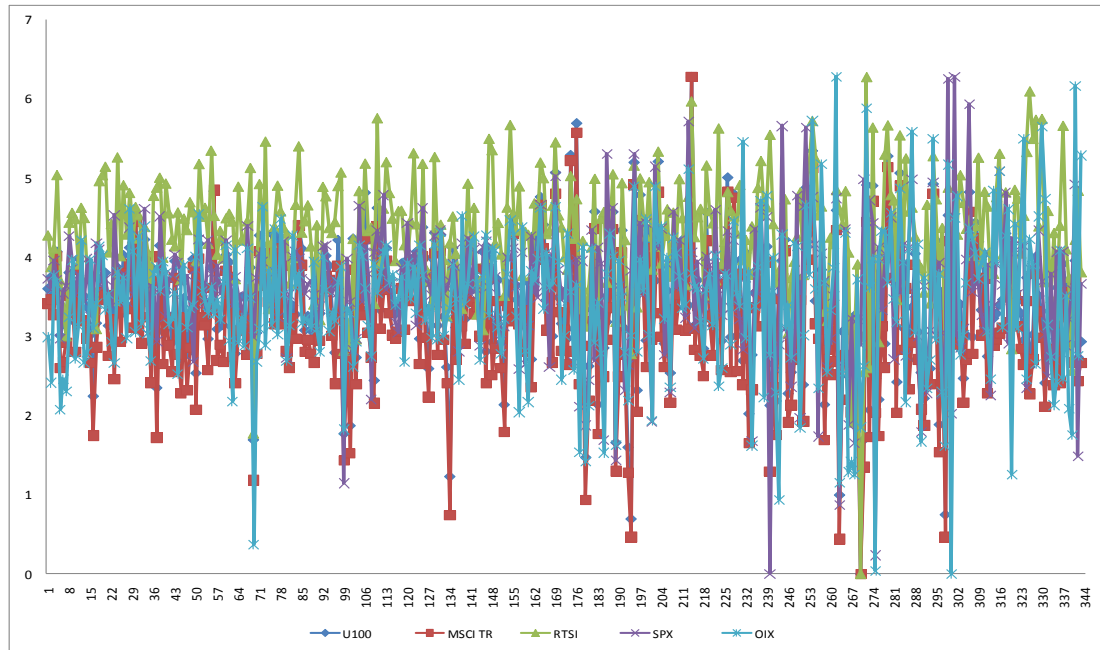
**Çizelge 6.16.** İMKB U-100 & BRENT Etki Sıralı Modellemeleri

VI.	$M_3$	$g_1(\alpha)=$	$-0,51 + 0,21 \cos \alpha - 0,22 \sin \alpha - 0,06 \cos 2\alpha - 0,1 \sin 2\alpha - 0,04 \cos 3\alpha + 0,01 \sin 3\alpha$
		$g_2(\alpha)=$	$0,17 + 0,27 \cos \alpha + 0,1 \sin \alpha + 0,15 \cos 2\alpha - 0,02 \sin 2\alpha + 0,05 \cos 3\alpha - 0,05 \sin 3\alpha$

**Çizelge 6.17.** İMKB U-100 & BUX Etki Sıralı Modellemeleri

VII.	$M_3$	$g_1(\alpha)=$	$-0,46 + 0,2 \cos \alpha - 0,24 \sin \alpha + 0,09 \cos 2\alpha + 0,04 \sin 2\alpha - 0,01 \cos 3\alpha - 0,06 \sin 3\alpha$
		$g_2(\alpha)=$	$-0,21 + 0,34 \cos \alpha + 0,5 \sin \alpha - 0,01 \cos 2\alpha + 0,19 \sin 2\alpha - 0,02 \cos 3\alpha + 0,1 \sin 3\alpha$

Etkileşimleri dikkate alındığında MSCI TR, RTSI, S&P 500 ve CBOE OIX göstergelerinin öncelikli olduğu söylenebilir. Şekil (6.59)'da, yüksek etkileşimli göstergelerin İMKB U-100 ile eş zamanlı tepkiler verdiği gösterilmiş ve elde edilen modelleri destekler nitelikte sonuçlara ulaşılmıştır.



**Şekil 6.59.** İMKB U-100 ile yüksek etkileşimli göstergeler grafiği

## 7. SONUÇLAR ve TARTIŞMA

Dairesel istatistikler, çok yönlü kullanım alanları ve verilerin analizine için uygun dönüşümleri ile son dönemlerde hızla gelişme göstermektedir. Doğrudan yöne bağlı kalınmadan elde edilebilecek verilerin analizinde, gerekli varsayımların sağlanması durumunda, bu teknikler de uygulamacılar için kullanışlı olmaktadır. Dairesel çözümleme tekniklerinin, farklılığının ötesinde uygulanan alanlarda bilinen tekniklerden daha sağlam ve gizli kalmış sonuçları gözler önüne serdiği bilinmektedir. Özellikle, sürekli artış veya azalış göstererek tekrar aynı seviyede değerler alan ve böylece dairesel bir yapı oluşturan parasal olguların birer zaman serisi oluşturması sonucu dairesel istatistik tekniklerin bu alanda da kullanımının uygun olduğu görülmektedir.

Piyasa ekonomisinin en önemli unsurlarından biri sermaye piyasası ve en önemli kurumlarından bir tanesi de menkul kıymetler borsasıdır. Menkul kıymetler borsasında işlem gören menkul kıymetlerin değerlerinde meydana gelen değişiklikler, ülke ekonomisindeki gelişmeleri çok kısa bir sürede yansıtmaya özelliğine sahiptir ve bu açıdan en riskli yatırım aracı hisse senetleridir. Diğer yatırım araçlarının gelecek dönemlerdeki getirilerini belirlemek, hisse senetlerinin gelecek dönemlerdeki getirilerini belirlemekten daha kolaydır. Sermaye piyasalarının gelişmesinde çok önemli bir role sahip olan borsalar, özellikle tasarrufların hisse senetleri yolu ile ekonomiye kazandırılması ve büyük sermayelerin oluşabilmelerine imkan sağlamaktadırlar. Ekonominin daha sağlıklı bir yapıya kavuşabilmesi ve sermaye mülkiyetinin tabana yayılabilmesi, küçük tasarruf sahiplerinin borsaya gelmesi ile mümkün olacaktır. Türk borsasının gelişim süreci incelendiğinde, ulaştığı seviye başarı olarak kabul edilse de henüz gelişimini tamamlamamış olması en önemli engellerden birisi olarak kabul edilmektedir.

Hisse senedi fiyatlarına etki eden faktörleri incelemek, başarılı bir yatırım stratejisi için son derece önemlidir. Yatırımcı hisse senetlerine yatırım yaparken birçok faktörü göz önünde bulundurmalıdır. Çünkü bu faktörlerin hareketine göre hisse senedi fiyatları değişme gösterecektir. Bir kısım faktörlerdeki değişiklik hisse senedi fiyatlarını yükseltirken bir kısmı da hisse senedi fiyatlarını düşürecektir. Eğer yatırımcı hisse senedi fiyatını etkileyen faktörleri dikkate almazsa, vereceği yatırım

kararında hataya düşecektir. Hisse senetlerinin fiyatları ekonomik, politik, siyasi ve psikolojik pek çok faktör tarafından etkilenmektedir. Bu faktörlerin ve fiyatları etkileme oranlarının neler olduğunun tespit edilebilmesi yatırımcıya oldukça önemli kazançlar sağlayacaktır.

Yatırımcıların sadece yerli piyasaya bağlı kalmadan tasarruflarını gerçekleştirdiği günümüzde, dış piyasa sinyallerinin de takip edilmesi gerektiği bilinmektedir. Dolayısıyla, bu sinyallerin yarattığı hareketliliklerin, hangi yönlerden geldiği ve nasıl bir etki oluşturduğu konusu yatırımcılar için büyük önem arz etmektedir. Günden güne değişen yatırım anlayışının, içeriği farklılaşan portföylerin ve küresel ekonominin beraberinde getirdiği dış piyasalara artan bağımlılığın sonucunda yatırımcıların ihtiyaç duyduğu en önemli araçlardan birisi öncü nitelikteki göstergelerdir. Bu göstergelerin ortaya çıkarılmasını amaçlayan uygulamada kullanılan tüm değişkenlere, ileriye yönelik tahminleme yetisini kazandırabilmek için durağanlaştırma analizleri yapılmış ve birinci farklarda tüm değişkenlerin durağan olduğu sonucuna varılmıştır.

Ele alınan dönemde her değişkenin artış ve azalışlarıyla aynı seviyede değerler almasında ötürü alınan birinci farkların dairesel moda dönüşümü sağlanmış ve çember üzerine yerleştirilmesiyle çizilen grafiksel gösterimlerin bilinen gösterimlerden farklı olduğu ve tanımlayıcı istatistiklerin de buna bağlı olarak farklılık gösterdiği gözlenmiştir. Yapılan testler sonucu tüm değişkenlerin dairesel normal dağılıma uyum sağladığı, hem elde edilen verilerin testleri hem de simule edilen dağılımlarla karşılaştırılması sonucu görülmüş ve grafiksel gösterimlerle bu uyum desteklenmiştir.

Tüm örneklemelerin kitlelerini temsil gücünün yüksek oranlarda olduğu yapılan bootstrap simulasyon analizleri neticesinde gözlenmiştir. Benzer kaynaklardan gelip gelmediğini öğrenmek için yapılan hem ikili hem çoklu homojenlik testleri sonucu hiçbir değişkenin aynı kaynaktan alınmadığı anlaşılmış ve her değişkenin farklı karakteristik yapılarından ötürü bağımsız olduğu sonucuna varılarak bu durum grafiklerle gösterilmiştir. İMKB U-100' ün diğer değişkenler ile ikili ilişkilerinin katsayısı hesaplanarak bu ilişkilerin geçerli ilişkiler olduğu testler sonucu belirlenmiştir. İlişki çözümlemesi aşamasında ise İMKB U - 100 endeksi ile MSCI TR, RTSI, S&P 500 ve CBOE OIX değişkenlerinin yüksek oranda etkileşime girdiği yapılan regresyon analizleri sonucu gözlenmiş ve oluşturulan modellerden yola çıkarak yapılan tahminlerle bu değişkenlerin girdiği etkileşim grafikte gösterilerek sinyal verici niteliğinde göstergeler olduğu kanıtlanmıştır.

Avrupa Birliği lkelerinin iç piyasada oluşturduğu etkiyi görmek için özellikle İngiliz kaynaklı BRENT ve FTSE 100 ve Macaristan kaynaklı BUX değişkenleri uygulamada kullanılmış fakat bilinenin aksine gösterge niteliğinde değişkenler olmadığı gözlenmiştir. Ağırlıklı olarak MSCI TR, S&P 500 ve CBOE OIX değişkenleri ile uygulamada kullanılan Amerika kökenli petrol ve piyasa endekslerinin daha öncelikli etkisi görülmüş ve Rus kaynaklı RTSI değişkeninin listede ikinci basamakta olması çarpıcı bir sonuç olarak değerlendirilmektedir.

Hem yerli hem de yabancı yatırımcıların rol aldığı ülkemizin menkul kıymetler piyasasında, dünyanın herhangi bir yerinde meydana gelen olayın etkisi, küresel ekonominin varlığı sonucu görülmektedir. Bu sistemin bir parçası olmasından ötürü mevcut piyasamızda, Amerika kökenli endekslerin etkisi her ne kadar daha yüksek düzeyde görülse de doğudan gelen akım olarak nitelendirdiğimiz Rus piyasalarının etkisi de bir o kadar önem arz etmektedir. Çok yönlü olması önceliği ile uygulamada kullanılan değişkenlerden elde edilen göstergeler, etkileşimlerin çok farklı ve çok yönlü olabileceği bir dünya piyasasının zamanla oluştuğunu farklı açılarıyla gözler önüne sermektedir.

## KAYNAKLAR

- Ajne, B.**, 1968. A Simple Test for Uniformity of a Circular Distrubition, *Biometrika*, Great Britain, **January**, 343-354.
- Collet, D.**, 1980. Outliers in Circular Data, *Journal of Applied Statistics*, **29**, 50-56.
- Dalkır, M.**, 2008. Revisiting Stock Market Index Correlations, *Finance Research Letters, USA*, 1-24.
- Downs, T.D., Mardia, K.V.**, 2002. Circular Regression, *Biometrika*, Great Britain, **89/3**, 683-696.
- Fisher, N.I.**, 1993. Statistical Analysis of Circular Data, Cambridge University Press, Great Britain.
- Fisher, N.I.**, 1983. A Correlation Coefficient for Circular Data, *Biometrika*, Great Britain, **70**, 327-332.
- Fisher, N.I., Lewis, T., Embleton B.J.J.**, 1986. Statistical Analysis of Spherical Data, Cambridge University Press, Great Britain.
- Gill, J., Hangartner, D.**, 2008. Circular Data in Political Science and How to Handle It, *American Political Science Association USA*, **August**, 1-24.
- Gumbel, E.J.**, 1954. Applications of Circular Normal Distrubition, *American Statistical Assocation, USA*, **June**, 267-296.
- Gumbel, E.J., Greenwood, J.A., Durand, D.**, 1953. The Circular Normal Distrubition: Theory and Tables, *Journal of American Statistical Assocation, USA*, **March**, 131-152.
- Hughes, G., Mardia, K.V., Taylor, C. C.**. Circular Time Series with Application to Protein Conformations, *Universty of Leeds, Great Britain*, **May**, 146-149.
- Hussin, A.G.**, 2006. Hypothesis Testing of Ordinary Linear Circular Regression, *Journal of Applied Sciences Research, USA*, **3/3**, 185-188.
- Jammalamadaka, S.R., Gatto, R.**, 2006. The Generalized von Mises Distribution, *USA*, **January**, 1-14.
- Jammalamadaka, S.R., Gorla, M.N.**, 2004. A Test of Goodness of Fit based on Gini's Index of Spacings, *USA*, **February**, 1-11.
- Jammalamadaka, S.R., Kozubowski T.J.**. A New Family of Circular Models: The Wrapped Laplace Distributions, *USA*, 1-19.
- Jammalamadaka, S.R., Kozubowski T.J.**. New Families of Wrapped Distributions for Modeling Skew Circular Data, *USA*, 1-12.



- Jammadalamaka, S.R., Lund, U.J.**, 2006. The Effect of Wind Direction on Ozone Levels: A Case Study, *Environ Ecol Stat*, USA, **13**, 287-298.
- Jammalamadaka, S.R., Mangalam, V.**, 2008. A General Censoring for Circular Data, *Statistical Metodology*, USA, 1-10.
- Jammalamadaka, S.R., SenGupta, A.** 2001. Topics in Circular Statistics, World Scientific Press, London.
- Jentsch, U., Ivanova, G.**, 2006. Circular Correlation Methods for The Anaysis Of Oscillations in Dependent Time Series, *IEEE EMBS, France*, **March**, 1981-1984.
- Johnson, R.A., Wehrly, T.**, 1978. Some Angular Linear Distrubitions and Related Regression Models, *Journal of American Statistical Assocation*, USA, **73**, 602-606.
- Kato, S.**, 2006. A Circular - Circular Regression Model, *Fundamental Science and Technology Forum*, Keio University, March 26.
- Kato, S., Shimizu, K., Shieh, G. S.**, 2006. A Circular-Circular Regression Model, *KSTS/RR-6/006, Japan*, **May**, 1-14.
- Lund, U.J.** 1999. Least Circular Distance Regression for Directional Data, *Journal of Applied Statististics*, **26/6**, 723-733.
- Lund, U.J.** 2002. Tree-Based Regression for A Circular Response, *Communications in Statististics*, **31/9**, 1549-1560.
- Mardia, K.V., Jupp, P.E.**, 2000. Directional Statistics, Academic Press, London
- Peker, K.Ö.**, 2002. Dairesel Veriler ve Ardışık Testlerde Kullanımı, *Doktora Tezi*, A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir.
- Peker, K.Ö., Bacanlı S.**, 2004. Dairesel Verilere Uygulanan Tanımlayıcı İstatistiksel Yöntemler ve Meteorolojik Bir Uygulama, *Anadolu Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, Eskişehir, **5/1**, 115-122.
- Ravidran, P., Ghosh, S.K.**. Bayesian Analysis of Circular Data Using Wrapped Distrubitions, *Institute of Statistics Mimeo Series*, USA, **2564**, 1-20.
- Rivest, L.P.**, 1996. A Decentred Predictor for Circular - Circular Regression, *Biometrika*, Great Britain, **84/3**, 717-726.
- SenGupta, A., Ugwuowo, F.I.**, 2006. Assymetric Circular – Linear Multivariate Regression Models with Applications to Environmental Data, *Environ Ecol Stat*, USA, **13**, 299-309.
- Stephens, M.A.**, 2001. Tests For Randomness of Directions Against Two Circular Alternatives, *Journal of American Statistical Assocation*, USA, 129-143.
- Wilson, V.L.**, 2005. Application of Circular Statistics to Psychological Functioning, *Educational Research Exchange of Texas A&M University*, 1-25.

## EKLER

**EK 1.** Dairesel Normal Dağılımda (von Mises) Verilen Yoğunlaşma Parametresi Değerleri İçin Ortalama Bileşke Uzunluğu değerleri

$\kappa$	$\bar{\rho}$	$\kappa$	$\bar{\rho}$	$\kappa$	$\bar{\rho}$
0.0	0.00000	3.5	0.84110	7.0	0.92553
0.1	0.04994	3.6	0.84616	7.1	0.92663
0.2	0.09950	3.7	0.85091	7.2	0.92770
0.3	0.14834	3.8	0.85537	7.3	0.92874
0.4	0.19610	3.9	0.85956	7.4	0.92975
0.5	0.24250	4.0	0.86352	7.5	0.93072
0.6	0.28726	4.1	0.86726	7.6	0.93168
0.7	0.33018	4.2	0.87079	7.7	0.93260
0.8	0.37108	4.3	0.87414	7.8	0.93350
0.9	0.40984	4.4	0.87732	7.9	0.93438
1.0	0.44639	4.5	0.88033	8.0	0.93524
1.1	0.48070	4.6	0.88320	8.1	0.93607
1.2	0.51278	4.7	0.88593	8.2	0.93688
1.3	0.54267	4.8	0.88853	8.3	0.93767
1.4	0.57042	4.9	0.89101	8.4	0.93844
1.5	0.59613	5.0	0.89338	8.5	0.93919
1.6	0.61990	5.1	0.89565	8.6	0.93993
1.7	0.64183	5.2	0.89782	8.7	0.94064
1.8	0.66204	5.3	0.89990	8.8	0.94134
1.9	0.68065	5.4	0.90190	8.9	0.94202
2.0	0.69777	5.5	0.90382	9.0	0.94269
2.1	0.71353	5.6	0.90566	9.2	0.94398
2.2	0.72803	5.7	0.90743	9.4	0.94521
2.3	0.74138	5.8	0.90913	9.6	0.94639
2.4	0.75367	5.9	0.91078	9.8	0.94752
2.5	0.76500	6.0	0.91236	10	0.94860
2.6	0.77545	6.1	0.91389	12	0.95730
2.7	0.78511	6.2	0.91536	15	0.96607
2.8	0.79404	6.3	0.91678	20	0.97467
2.9	0.80231	6.4	0.91816	24	0.97937
3.0	0.80999	6.5	0.91949	30	0.98319
3.1	0.81711	6.6	0.92078	40	0.98739
3.2	0.82375	6.7	0.92202	60	0.99163
3.3	0.82993	6.8	0.92323	120	0.99582
3.4	0.83570	6.9	0.92440	$\infty$	1.00000

**EK 2. Dairesel Normal Dağılımda (von Mises) Verilen Ortalama Bileşke Uzunluğu Değerleri İçin Tahmini Yoğunlaşma Parametresi Değerleri**

$\bar{\rho}$	$\hat{\kappa}$	$\bar{\rho}$	$\hat{\kappa}$	$\bar{\rho}$	$\hat{\kappa}$
0.00	0.00000	0.35	0.74783	0.70	2.01363
0.01	0.02000	0.36	0.77241	0.71	2.07685
0.02	0.04001	0.37	0.79730	0.72	2.14359
0.03	0.06003	0.38	0.82253	0.73	2.21425
0.04	0.08006	0.39	0.84812	0.74	2.28930
0.05	0.10013	0.40	0.87408	0.75	2.36930
0.06	0.12022	0.41	0.90043	0.76	2.45490
0.07	0.14034	0.42	0.92720	0.77	2.54686
0.08	0.16051	0.43	0.95440	0.78	2.64613
0.09	0.18073	0.44	0.98207	0.79	2.75382
0.10	0.20101	0.45	1.01022	0.80	2.87129
0.11	0.22134	0.46	1.03889	0.81	3.00020
0.12	0.24175	0.47	1.06810	0.82	3.14262
0.13	0.26223	0.48	1.09788	0.83	3.30114
0.14	0.28279	0.49	1.12828	0.84	3.47901
0.15	0.30344	0.50	1.15932	0.85	3.68041
0.16	0.32419	0.51	1.19105	0.86	3.91072
0.17	0.34503	0.52	1.22350	0.87	4.17703
0.18	0.36599	0.53	1.25672	0.88	4.48876
0.19	0.38707	0.54	1.29077	0.89	4.85871
0.20	0.40828	0.55	1.32570	0.90	5.3047
0.21	0.42962	0.56	1.36156	0.91	5.8522
0.22	0.45110	0.57	1.39842	0.92	6.5394
0.23	0.47273	0.58	1.43635	0.93	7.4257
0.24	0.49453	0.59	1.47543	0.94	8.6104
0.25	0.51649	0.60	1.51574	0.95	10.2716
0.26	0.53863	0.61	1.55738	0.96	12.7661
0.27	0.56097	0.62	1.60044	0.97	16.9266
0.28	0.58350	0.63	1.64506	0.98	25.2522
0.29	0.60625	0.64	1.69134	0.99	50.2421
0.30	0.62922	0.65	1.73945	1.00	$\infty$
0.31	0.65242	0.66	1.78953		
0.32	0.67587	0.67	1.84177		
0.33	0.69958	0.68	1.89637		
0.34	0.72356	0.69	1.95357		

**EK 3. Dairesel Normal Dağılımın (von Mises) Uyum İyiliği Testi için Kritik Değerleri**

k	Anlamlılık seviyesi $\alpha$							
	0.500	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
	<u>Durum 1: <math>\mu</math> ve k her ikisi biliniyorsa</u>							
	0.069	0.105	0.131	0.152	0.187	0.222	0.268	0.304
	<u>Durum 2: <math>\mu</math> biliniyor, k bilinmiyorsa</u>							
0.0	0.047	0.071	0.089	0.105	0.133	0.163	0.204	0.235
0.50	0.048	0.072	0.091	0.107	0.135	0.165	0.205	0.237
1.00	0.051	0.076	0.095	0.111	0.139	0.169	0.209	0.241
1.50	0.053	0.080	0.099	0.115	0.144	0.173	0.214	0.245
2.00	0.055	0.082	0.102	0.119	0.147	0.177	0.217	0.248
4.00	0.058	0.086	0.107	0.124	0.153	0.183	0.224	0.255
$\infty$	0.059	0.089	0.110	0.127	0.157	0.187	0.228	0.259
	<u>Durum 3: <math>\mu</math> bilinmiyor, k biliniyorsa</u>							
0.0	0.047	0.071	0.089	0.105	0.133	0.163	0.204	0.235
0.50	0.048	0.072	0.091	0.107	0.135	0.165	0.205	0.237
1.00	0.051	0.076	0.095	0.111	0.139	0.169	0.209	0.241
1.50	0.053	0.080	0.100	0.116	0.144	0.174	0.214	0.245
2.00	0.055	0.082	0.103	0.119	0.148	0.177	0.218	0.249
4.00	0.057	0.085	0.106	0.122	0.151	0.181	0.221	0.253
$\infty$	0.057	0.085	0.105	0.122	0.151	0.180	0.221	0.252
	<u>Durum 4: <math>\mu</math> ve k her ikisi bilinmiyorsa</u>							
0.0	0.030	0.040	0.046	0.052	0.061	0.069	0.081	0.090
0.50	0.031	0.042	0.050	0.056	0.066	0.077	0.090	0.100
1.00	0.035	0.049	0.059	0.066	0.079	0.092	0.110	0.122
1.50	0.039	0.056	0.067	0.077	0.092	0.108	0.128	0.144
2.00	0.043	0.061	0.074	0.084	0.101	0.119	0.142	0.159
4.00	0.047	0.067	0.082	0.093	0.113	0.132	0.158	0.178
$\infty$	0.048	0.069	0.084	0.096	0.117	0.137	0.164	0.184

**EK 4. Dairesel Normal Dağılım (von Mises) Örneklem İçin Uyuşmazlık Testi**

Kritik  $M_n$  Değerleri

$\alpha$	Örneklem Hacmi (n)										
	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
0.05	0.661	0.73	0.731	0.714	0.680	0.648	0.611	0.583	0.528	0.464	0.387
0.01	0.661	0.75	0.774	0.776	0.763	0.743	0.708	0.683	0.629	0.564	0.474

**EK 5.** Ki-kare ( $\chi^2_{s.d.;\alpha}$ ) Dağılımı Kritik Değerleri

S.D	0.99	.95	0.9	0.1	0.05	0.01
1	0.000	0.004	0.016	2.706	3.841	6.635
2	0.020	0.103	0.211	4.605	5.991	9.210
3	0.115	0.352	0.584	6.251	7.815	11.345
4	0.297	0.711	1.064	7.779	9.488	13.277
5	0.554	1.145	1.610	9.236	11.070	15.086
6	0.872	1.635	2.204	10.645	12.592	16.812
7	1.239	2.167	2.833	12.017	14.067	18.475
8	1.646	2.733	3.490	13.362	15.507	20.090
9	2.088	3.325	4.168	14.684	16.919	21.666
10	2.558	3.940	4.865	15.987	18.307	23.209
11	3.053	4.575	5.578	17.275	19.675	24.725
12	3.571	5.226	6.304	18.549	21.026	26.217
13	4.107	5.892	7.042	19.812	22.362	27.688
14	4.660	6.571	7.790	21.064	23.685	29.141
15	5.229	7.261	8.547	22.307	24.996	30.578
16	5.812	7.962	9.312	23.542	26.296	32.000
17	6.408	8.672	10.085	24.769	27.587	33.409
18	7.015	9.390	10.865	25.989	28.869	34.805
19	7.633	10.117	11.651	27.204	30.144	36.191
20	8.260	10.851	12.443	28.412	31.410	37.566
21	8.897	11.591	13.240	29.615	32.671	38.932
22	9.542	12.338	14.041	30.813	33.924	40.289
23	10.196	13.091	14.848	32.007	35.172	41.638
24	10.856	13.848	15.659	33.196	36.415	42.980
25	11.524	14.611	16.473	34.382	37.652	44.314

**EK 6. Dairesel Normal Dağılımda (von Mises) Verilen Yoğunlaşma Parametresine Karşılık Gelen Açısıl Dönüşüm Değerleri**

$\kappa$	$\alpha = 0.001$	0.01	0.05	0.1	$\kappa$	$\alpha = 0.001$	0.01	0.05	0.1
0.0	0.1	0.6	2.9	5.7	4.6	71.1	102.4	123.4	133.2
0.1	0.2	2.0	10.0	19.9	4.7	73.2	103.5	124.1	133.8
0.2	0.2	2.2	11.1	22.1	4.8	75.2	104.6	124.8	134.3
0.3	0.2	2.5	12.4	24.6	4.9	77.1	105.6	125.5	134.9
0.4	0.3	2.8	13.9	27.5	5.0	78.8	106.6	126.2	135.4
0.5	0.3	3.2	15.7	30.8	5.2	82.0	108.4	127.4	136.4
0.6	0.4	3.6	17.7	34.5	5.4	84.9	110.1	128.5	137.3
0.7	0.4	4.1	20.1	38.7	5.6	87.5	111.7	129.6	138.2
0.8	0.5	4.7	22.9	43.3	5.8	89.8	113.2	130.6	139.0
0.9	0.5	5.4	26.0	48.3	6.0	92.0	114.5	131.5	139.7
1.0	0.6	6.2	29.6	53.5	6.2	94.0	115.8	132.4	140.5
1.1	0.7	7.2	33.6	58.9	6.4	95.8	117.0	133.3	141.1
1.2	0.8	8.3	38.1	64.3	6.6	97.6	118.2	134.1	141.8
1.3	1.0	9.6	42.9	69.6	6.8	99.2	119.2	134.8	142.4
1.4	1.1	11.2	47.9	74.8	7.0	100.7	120.3	135.5	143.0
1.5	1.3	13.1	53.1	79.6	7.2	102.1	121.2	136.2	143.6
1.6	1.6	15.3	58.4	84.1	7.4	103.5	122.2	136.9	144.1
1.7	1.8	17.9	63.5	88.3	7.6	104.7	123.0	137.5	144.6
1.8	2.2	20.8	68.4	92.1	7.8	105.9	123.9	138.1	145.1
1.9	2.6	24.2	73.0	95.6	8.0	107.1	124.7	138.7	145.6
2.0	3.0	28.0	77.3	98.8	8.2	108.2	125.5	139.2	146.0
2.1	3.6	32.1	81.3	101.7	8.4	109.2	126.2	139.8	146.5
2.2	4.3	36.6	84.9	104.3	8.6	110.2	126.9	140.3	146.9
2.3	5.1	41.2	88.3	106.7	8.8	111.2	127.6	140.8	147.3
2.4	6.0	46.0	91.3	109.0	9.0	112.1	128.2	141.2	147.7
2.5	7.2	50.7	94.1	111.0	9.2	113.0	128.9	141.7	148.0
2.6	8.5	55.2	96.7	112.9	9.4	113.8	129.0	142.1	148.4
2.7	10.1	59.6	99.1	114.6	9.6	114.7	130.1	142.6	148.8
2.8	12.1	63.6	101.3	116.2	9.8	115.4	130.6	143.0	149.1
2.9	14.3	67.4	103.3	117.7	10.0	116.2	131.2	143.4	149.4
3.0	16.9	70.9	105.1	119.1	10.5	118.0	132.5	144.3	150.2
3.1	19.9	74.2	106.9	120.4	11.0	119.6	133.7	145.2	150.9
3.2	23.2	77.1	108.5	121.6	11.5	121.1	134.8	146.0	151.6
3.3	26.9	79.9	110.0	122.8	12.0	122.5	135.8	146.7	152.2
3.4	30.8	82.4	111.4	123.8	12.5	123.8	136.8	147.5	152.8
3.5	34.9	84.8	112.7	124.9	13.0	125.0	137.7	148.1	153.4
3.6	39.1	86.9	114.0	125.8	14	127.2	139.3	149.3	154.4
3.7	43.2	89.0	115.2	126.7	15	129.2	140.8	150.4	155.3
3.8	47.1	90.8	116.3	127.6	20	136.5	146.3	154.5	158.7
3.9	50.9	92.6	117.3	128.4	30	144.9	152.7	159.3	162.7
4.0	54.5	94.3	118.3	129.2	40	149.7	156.4	162.1	165.0
4.1	57.8	95.8	119.3	129.9	50	153.0	159.0	164.0	166.6
4.2	60.9	97.3	120.2	130.7	100	161.1	165.2	168.7	170.6
4.3	63.7	98.7	121.0	131.3	$z_{\alpha} = 3.291$ 2.576 1.960 1.645				
4.4	66.3	100.0	121.9	132.0					
4.5	68.8	101.2	122.7	132.6					

**EK 7.  $F_{n_1, n_2; \alpha}$  Dağılımı Kritik Değerleri**

$\alpha = 0.05$											
GRUP İÇİ S.D.	GRUPLAR ARASI S.D.										
	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24	$\infty$
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.68	4.53	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.00	3.84	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.57	3.41	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.28	3.12	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.07	2.90	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	2.91	2.74	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.79	2.61	2.41
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.69	2.51	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.60	2.42	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.53	2.35	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.48	2.29	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.42	2.24	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.38	2.19	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.34	2.15	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.31	2.11	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.28	2.08	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.25	2.05	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.23	2.03	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.20	2.01	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.18	1.98	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.16	1.96	1.71
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.15	1.95	1.69
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.13	1.93	1.67
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.12	1.91	1.66
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.10	1.90	1.64
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.09	1.89	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.00	1.79	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	1.92	1.70	1.39
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	1.88	1.65	1.33
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.85	1.63	1.28
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.83	1.61	1.26
$\infty$	3.84	3.00	2.61	2.37	2.22	2.10	2.01	1.94	1.75	1.52	1.00

$\alpha = 0.01$											
GRUP İÇİ S.D.	GRUPLAR ARASI S.D.										
	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24	$\infty$
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	9.89	9.47	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.72	7.31	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.47	6.07	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.67	5.28	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.11	4.73	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.71	4.33	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.40	4.02	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.16	3.78	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	3.96	3.59	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	3.80	3.43	3.01
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.67	3.29	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.55	3.18	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.46	3.08	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.37	3.00	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.30	2.92	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.23	2.86	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.17	2.80	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.12	2.75	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.07	2.70	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.03	2.66	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	2.99	2.62	2.17
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	2.96	2.58	2.13
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	2.93	2.55	2.10
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	2.90	2.52	2.07
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	2.87	2.49	2.04
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	2.84	2.47	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.66	2.29	1.81
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.50	2.12	1.60
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.42	2.03	1.50
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.37	1.98	1.43
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.34	1.95	1.38
$\infty$	6.64	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.19	1.79	1.00

**EK 8.** Tahmini Yoğunlaşma Parametresine ( $\hat{\kappa}^* = x$ ) Karşılık Gelen  $A^{-1}(\bar{R}) = A^{-1}(x)$  Değerleri

$x$	$A^{-1}(x)$	$x$	$A^{-1}(x)$	$x$	$A^{-1}(x)$
0.00	0.000	0.35	0.748	0.70	2.014
0.01	0.020	0.36	0.772	0.71	2.077
0.02	0.040	0.37	0.797	0.72	2.144
0.03	0.060	0.38	0.823	0.73	2.214
0.04	0.080	0.39	0.848	0.74	2.289
0.05	0.100	0.40	0.874	0.75	2.369
0.06	0.120	0.41	0.900	0.76	2.455
0.07	0.140	0.42	0.927	0.77	2.547
0.08	0.161	0.43	0.954	0.78	2.646
0.09	0.181	0.44	0.982	0.79	2.754
0.10	0.201	0.45	1.010	0.80	2.871
0.11	0.221	0.46	1.039	0.81	3.000
0.12	0.242	0.47	1.068	0.82	3.143
0.13	0.262	0.48	1.098	0.83	3.301
0.14	0.283	0.49	1.128	0.84	3.479
0.15	0.303	0.50	1.159	0.85	3.680
0.16	0.324	0.51	1.191	0.86	3.911
0.17	0.345	0.52	1.223	0.87	4.177
0.18	0.366	0.53	1.257	0.88	4.489
0.19	0.387	0.54	1.291	0.89	4.859
0.20	0.408	0.55	1.326	0.90	5.305
0.21	0.430	0.56	1.362	0.91	5.852
0.22	0.451	0.57	1.398	0.92	6.540
0.23	0.473	0.58	1.436	0.93	7.426
0.24	0.495	0.59	1.475	0.94	8.610
0.25	0.516	0.60	1.516	0.95	10.272
0.26	0.539	0.61	1.557	0.96	12.766
0.27	0.561	0.62	1.600	0.97	16.927
0.28	0.584	0.62	1.645	0.98	25.252
0.29	0.606	0.64	1.691	0.99	50.242
0.30	0.629	0.65	1.739		
0.31	0.652	0.66	1.790		
0.32	0.676	0.67	1.842		
0.33	0.700	0.68	1.896		
0.34	0.724	0.69	1.954		



### EK 9. Normal Dağılım ( $z_\alpha$ ) Olasılık Değerleri

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
-3,1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-2,9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-2,8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2,7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2,6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2,5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2,4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2,3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2,2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2,1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-1,9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-1,8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1,7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1,6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1,5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1,4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1,3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1,2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1,1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-0,9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-0,8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0,7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0,6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0,5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0,4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0,3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0,2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0,1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0,1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0,2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0,3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0,4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0,5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0,6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0,7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0,8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0,9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1,1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1,2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1,3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1,4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1,5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1,6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1,7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1,8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1,9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2,1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2,2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2,3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2,4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2,5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2,6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2,7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2,8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2,9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3,1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993

**EK 10. S-Plus Paket Programı Circstat Eklentisi Dairesel İstatistik Yazılım Kodları**

A1	Birinci ve sıfırncı sıra Bessel fonksiyonları oranı
A1inv	Birinci ve sıfırncı sıra Bessel fonksiyonları oranının tersi
change.pt	Nokta değişim Testi
circ.cor	Açısal değişkenlerin dairesel korelasyon katsayısı
circ.disp	Dairesel saçılım ölçüsü
circ.mean	Ortalama yön
circ.plot	Dairesel veri grafiği
circ.range	Dairesel dizilim
circ.lin.reg	Dairesel - Doğrusal regresyon
circ.reg	Dairesel - Dairesel regresyon
circ.summary	Dairesel tanımlayıcı istatistik özetleri
dcard	Kosinüs (Cardioid) dağılım yoğunluk fonksiyonu
deg	Derece cinsinden gösterim
dmixedvm	Karma Dairesel Normal (Von Mises) dağılım yoğunluk fonksiyonu
dtri	Üçgensel (Triangular) dağılım yoğunluk fonksiyonu
dvm	Dairesel normal (Von Mises) dağılım yoğunluk fonksiyonu
dwrpcauchy	Sarmal Cauchy dağılımı yoğunluk fonksiyonu
dwrpnorm	Sarmal normal dağılım yoğunluk fonksiyonu
est.kappa	Tahmini yoğunlaşma parametresi
est.rho	Tahmini ortalama bileşke uzunluğu
I.0	Sıfırncı sıra birinci tip Bessel fonksiyonu
I.1	Birinci sıra birinci tip Bessel fonksiyonu
I.p	p-inci sıra birinci tip Bessel fonksiyonu
kuiper	Kuiper dağılım testi
plot.edf	Deneysel dağılım fonksiyon grafiği
pp.plot	Dairesel normal (Von Mises) dağılım olasılık grafiği
pvm	Kümülatif dairesel normal dağılım olasılık tahmini
r.test	Rayleigh tek mod alternatifli genel düzgünlük testi
rad	Radyan cinsinden gösterim
rao.homogeneity	Rao homojenlik testi
rao.spacing	Rao düzgünlük testi
rcard	Kosinüs (Cardioid) dağılımı rasgele genelleştirimi
rmixedvm	Karma Dairesel Normal (Von Mises) dağılım rasgele genelleştirimi
rose.diag	Gül şeması
rtri	Üçgensel (Triangular) dağılım rasgele genelleştirimi
rvm	Dairesel normal (Von Mises) dağılım rasgele genelleştirimi
rwrpcauchy	Sarmal Cauchy dağılımı rasgele genelleştirimi
rwrpnorm	Sarmal normal dağılım rasgele genelleştirimi
rwrpstab	Sarmal adımsal dağılım rasgele genelleştirimi
trig.moment	Trigonometrik moment hesaplaması
v0.test	Alternatif ortalama yön ile düzgünlük testi
vm.bootstrap.ci	Dairesel normal (Von Mises) dağılım bootstrap örnekleme
vm.ml	Dairesel normal (Von Mises) dağılım en çok olabirlik tahminleme
watson	Watson uyum iyiliği testi
watson.two	Watson iki örneklem uyum iyiliği testi
wrpcauchy.ml	Sarmal normal dağılım en çok olabirlik tahminleme

## **ÖZGEÇMİŞ**

Deniz AYBER, 06.03.1982' de Bitlis'in Tatvan İlçesinde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Tatvan'da tamamladı. 2000 yılında Tatvan Anadolu Lisesi'nden mezun olduktan sonra aynı yıl başladığı Selçuk Üniversitesi İstatistik Bölümünde iki yıl eğitim gördü ve 2002 yılında Ege Üniversitesine yatay geçiş yaparak 2004 yılında lisans eğitimini bitirdi. 2007 yılında Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Bölümüne giriş yaptı ve hala devam etmektedir.