T.C.
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

SHCRÖDINGER DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN SPEKTRUMU

DEMET ÇANGA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KAHRAMANMARAŞ

EYLÜL-2006

T.C.
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

SHCRÖDINGER DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN SPEKTRUMU

DEMET ÇANGA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KAHRAMANMARAŞ

EYLÜL-2006

T.C.

KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

SHCRÖDINGER DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN SPEKTRUMU

DEMET ÇANGA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kod No:

Bu Tez 06/ 09/ 2006 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oy birliği ile kabul edilmiştir.

……………	..………	..……….
Yrd.Doç.Dr.	**Yrd.Doç.Dr.**	**Yrd.Doç.Dr.**
Özkan KARAMAN	**Hanifi BİNİCİ**	**YaşarASLAN**
DANIŞMAN	**ÜYE**	**ÜYE**

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

……………….
Prof. Dr. Özden GÖRÜCÜ
Enstitü Müdürü

Bu çalışma Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Araştırma Projeleri Yönetim birimi başkanlığı tarafından desteklenmiştir.

İÇİNDEKİLER

KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİMDALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZET

SCHRÖDINGER DİFERANSİYEL DENKLEMİNİN SPEKTRUMU

DEMET ÇANGA

DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Özkan KARAMAN

YIL: 2006 SAYFA: 30

JÜRİ: Yrd. Doç. Dr. Özkan KARAMAN
Yrd. Doç. Dr. Hanifi BİNİCİ
Yrd. Doç. Dr. Yaşar ASLAN

Bu çalışmada, L ile L_2 (R) uzayında schrödinger denklemi yardımı ile

$$y^n + q(x)y - \lambda^2 y = 0 \ , \qquad 0 \le x < \infty$$

operatörü tanıtacağız. Burada q,R **üzerinde sürekli diferensiyellenebilen ve** $y'(0) - ay(0) = 0$ **şartını gerçekleyen kompleks değerli bir fonksiyondur.**

Birinci bölümde, bu çalışmanın kapsamından bahsedildi.

İkinci bölümde, spektral analizin temel tanımları ve önemli teoremlerine yer verilmiştir. Ayrıca daha önceden elde edilmiş sonuçlarda ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde, L operatörünün özel ve jost çözümleri hakkında bilgi verilmiş ve bu çözümlerin özelliklerinden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, L_λ diskre spektrumundan bahsedilerek L_λ reel öz değerlerinin olmadığı gösterildi.

Beşinci bölümde, spektrum, resolvent, resolvent kümesi, sürekli spektrum tanımlandı. L_λ **operatörünün resolventi, öz değerleri ve spektral tekillikleri araştırıldı.**
2006, 30 sayfa
Anahtar kelimeler: Spektral analiz, Jost çözümü, Öz değer, Spektral tekillik

UNIVERSITY OF KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM
ISTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MSc THESIS

ABSTRACT

THE SPECTRUM OF SCHRÖDINGER DIFFERANTIAL EQUATION

DEMET ÇANGA

SUPERVISOR: Asst.Prof.Dr. Özkan KARAMAN

Year: 2006 Pages: 30

Jury: Asst. Prof. Dr. Özkan KARAMAN
Asst. Prof. Dr. Hanifi BİNİCİ
Asst. Prof. Dr. Yaşar ASLAN

In thıs study, we denote the operator genareted in this space $L_2(R)$ by the schrödinger equation $y^n + q(x)y - \lambda^2 y = 0$, $0 \le x < \infty$
by L , where q is complex valued function, continuously differantiable on R satisfying the condition $y'(0) - ay(0) = 0$

In the first Chapter, this study's concept is mentioned.

In the second Chapter, some basic definitions and main theorems on spectral analysis have been given. Also some earlier results are mentioned.

In the third Chapter, the special and Jost solutıons of the operator L are defined and its properties are examined.
In the fourth Chapter, the discrete spectrum of the operator L_λ are given and its properties are examined.

In the fifth Chapter, spectrum, resolvent, resolvent set, continuos spectrum are defined. And the resolvent, the eingenvalues and spectral singularities of the operator L_λ are investigated.

2006, pages 30
Key Words: Spectral analysis, Jost solutıon, eigenvalue, spectral singularities

ÖNSÖZ

Matematik, fizik ve fonksiyonel analizin birçok problemi için, diferansiyel operatörlerin spektrumunun ve öz fonksiyonlarının bulunması gerekir. Diferansiyel operatörün tanım bölgesine ait olan keyfi fonksiyonların, bu operatörün öz fonksiyonlarına göre seri ya da integral açılımı biçiminde ifade edilmesi önemlidir. Örneğin kısmi türevli denklemlerin belirli başlangıç ve sınır koşullarını gerçekleyen çözümleri Fourier yöntemi ile bulunurken bu tip problemlerle karşılaşılır. Bu durum diferansiyel operatörler birçok matematikçinin dikkatini çekmiş ve bu konuda çok sayıda çalışma yapılmıştır.

Bu çalışmaların hepsi, diferansiyel operatörlerin spektrumlarının araştırılmasına, öz fonksiyonlara göre spektral açılımının bulunmasına; yani spektral analizin incelenmesine aittir. Diferansiyel operatörlerin spektral analizine ilişkin çalışmalar, Kuantum Mekaniği için büyük önem taşımaktadır. Kuantum mekaniğinin birçok problemlerinin çözümlerinde spektral analiz temel oluşturmuştur. Bu nedenle, Schrödinger denkleminin spektral özelliklerinin incelenmesi gerekmektedir.

Yüksek lisans eğitimi boyunca değerli bilgi ve deneyimlerinden yararlandığım çalışmalarımın yönlendirilmesinde bana yardımcı olan, yakın ilgisini esirgemeyen değerli danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Özkan KARAMAN'a şükranlarımı sunmayı bir borç bilir, saygılar sunarım. Ayrıca yardımlarından dolayı çok kıymetli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Yaşar ASLAN'a en içten saygı ve teşekkürlerimi arz ederim. Çalışmalarım boyunca manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve bana yardımcı olan herkese sonsuz teşekkürler ederim.

KAHRAMANMARAŞ **Demet ÇANGA**
EYLÜL - 2006

SİMGELER DİZİNİ

R	**: Reel Sayılar Cümlesi**
C	**: Kompleks Sayılar Cümlesi**
R*	**: R/ {0}**
$\mathbf{R}_{+}$	**:** $[0,\infty)$
D(A)	**: A operatörünün tanım cümlesi**
R(A)	**: A operatörünün değer cümlesi**
W[f_1, f_2 **]**	**:** f_1 **ve** f_2 **çözümlerinin Wronskianı**
$o(1)$	**: Sonsuz küçük değerler**
R_λ **(L)**	**: L operatörünün resolventi**
$\sigma(L)$	**: L operatörünün spektrumu**
$\sigma_d(L)$	**: L operatörünün diiskret spektrumu**
$\sigma_c(L)$	**: L operatörünün diskret spektrumu**
$\sigma_{ss}(L)$	**: L operatörünün spektral tekillikleri**
L^*	**: L operatörünün adjointi**
$L_2(0,\infty)$	**:** $\left\{ f : \int_0^\infty |f(x)|^2 dx < \infty \right\}$
ℓim	**:** L_2 **' nin normu anlamında yakınsaklık**

1.GİRİŞ

1.1. Çalışmanın kapsamı:

$L_2(0,\infty)$ uzayında tanımlı

$$L_y = -y'' + q(x)y, \qquad x \in R_+ = (0,\infty)$$

diferansiyel ifadesi ve $y'(0) - a\lambda y(0) = 0$ sınır koşulu yardımı ile üretilen operatörü L ile gösterelim. Burada q kompleks değerli bir fonksiyon ve $a \in C$ dir. L operatörünün spektral analizinin incelenmesine ilk olarak 1954 yılında Naimark tarafından başlanmıştır. Naimark L operatörünün spektrumunun sürekli spektrum, öz değer ve spektral tekilliklerden oluştuğu göstermiştir. Spektral tekillikler, öz değer olmayan sürekli spektrum üzerinde yer alan resolventin çekideğinin kutuplarıdır.

Naimark'ın sonucu Kemp (1958) tarafından tüm reel eksen üzerinde tanımlı diferansiyel operatörlere, Gasymov (1968) tarafından üç boyutlu schrödinger operatörlere genişletilmiştir.

Spektral analizde çok önemli bir adımda da Pavlov (1967) tarafından atılmıştır. L operatörünün spektral tekilliklerinin yapısının potansiyel fonksiyonunun sonsuzluktaki davranışına bağlı olduğu gösterilmiş ve L_0 operatörünün baş fonksiyonları kullanılarak spektral açılımı elde edilmiştir. Pavlov'un çalışması spektral tekilliklerinin dikkate alınarak spektral açılımın verildiği ilk çalışmadır.
Hruscev (1984) tarafından da L_0 operatörünün spektral tekilliklerinin yapısının potansiyel fonksiyon sonsuzluktaki azalma hızına bağımlılığı problemi incelenmiştir.

L operatörünün spektal analizinde spektral tekilliklerinin önemli rol oynadığı Lyance (1967 (a-b)) tarafından gösterilmiştir. Lyance, aynı zamanda spektral açılımında spektral tekilliklerin etkisini de incelemiştir.

Rölativistik Kuantum mekaniğinde

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \qquad , \ x \in (-\infty,\infty)$$

denklemi, kütlesi sıfır olan parçacığın schrödinger denklemidir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1 Ön bilgiler

Bu bölümde daha sonra kullanılacak tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1. D_1 ve D_2 ortak noktaları olan herhangi iki bölge ve f_1, D_1 bölgesinde analitik olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $D_1 \cap D_2$ arakesitinde bulunan her z noktası için $f_1(z) = f_2(z)$ olacak biçimde D_2 bölgesinde analitik bir f_2 fonksiyonu bulunuyorsa f_2 fonksiyonuna f_1 fonksiyonunun D_1 bölgesinden D_2 bölgesine analitik devamı denir.

Tanım 2.1.2. f fonksiyonu bir D bölgesinde tanımlanmış olsun. Eğer $\forall z_1, z_2 \in D$ için

$$|f(z_1) - f(z_2)| \leq M|z_1 - z_2|^{\alpha} \quad , \qquad 0 < \alpha \leq 1$$

eşitsizliği gerçekleniyorsa bu eşitsizliği sağlayan f fonksiyonu D bölgesinde α. basamaktan Hölder koşulunu sağlıyor denir.

Tanım 2.1.3. (Hilbert uzayı) Herhangi bir küme H olsun ve aşağıdaki koşullar sağlansın.

1) **H** kompleks bir lineer uzaydır.

2) $\langle , \rangle$ **:H × H** $\rightarrow$ **C** fonksiyonu verildiğinde $x, y \in$ H eleman çiftine karşılık gelen kompleks sayı $\langle x, y\rangle$ olmak üzere her x , y , z $\in$ H için

a. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

b. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

c. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ (her λ kompleks sayısı için)

d. $\langle x, x\rangle \geq 0; \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0; \left(\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}\right)$

3) $d(x, y) = \|x - y\|$ metriğine göre **H** tamdır.

4) Her $n \in N$ için H kümesinde n sayıda lineer bağımsız eleman vardır. Yani, H sonsuz boyutludur.

Bu takdirde $\langle , \rangle$ **:H × H** $\rightarrow$ **C** fonksiyonuna iç çarpım fonksiyonu, 1- 4 şartlarını sağlaması durumunda H lineer uzayına Soyut Hilbert uzayı, 1 -3 şartlarını sağlanması halinde de uzaya Üniter Hilbert Uzayı denir.

Tanım 2.1.4. ($L^2[a,b]$ uzayı) Aşağıdaki şekilde tanımlanan uzaya $L^2[a,b]$ uzayı denir.

$$L^2[a,b] = \left\{ x(t) : \int_a^b [x(t)]^2\, dt < \infty \right\}$$

Bu uzay reel ise iç çarpım fonksiyonu

$$\langle f(x), g(x) \rangle = \int_a^b f(x) g(x) dx$$

şeklinde tanımlanır. Burada f(x) ve g(x) reel fonksiyonlardır.

Tanım 2.1.5. (Öz değer, Öz fonksiyon) L sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu takdirde L operatörünün tanım kümesinde,

$$L_y = \lambda y$$

olacak şekilde bir $y \neq 0$ fonksiyonu varsa λ sayısına L operatörünün öz değeri, y fonksiyonuna ise λ öz değerine karşılık gelen öz fonksiyon denir.

Tanım 2.1.6. (O ve o sembolleri)

1) **i.** $z \to \alpha$ için $f(z) = O(1)$ in manası, α noktasında civarında $|f(z)|$ sınırlıdır demektir.

ii. Eğer $z \to \alpha$ $\dfrac{f(z)}{g(z)} = O(1)$ ise bu takdirde $f(z) = O(|g(z)|)$ yazılır.

2) **i**. $z \to \alpha$ için $f(z) \to 0$ ise bu takdirde $f(z) = o(1)$

ii. Eğer $z \to \alpha$ $\dfrac{f(z)}{g(z)} \to 0$ ise bu takdirde $f(z) = o(|g(z)|)$

Tanım 2.1.7. (Analitik fonksiyon) Bir $f(z)$ kompleks fonksiyonu kompleks düzlemin keyfi bir z_0 noktasının δ komşuluğunun tüm noktalarında türevlenebilirse $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında *analitikdir* denir. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ ’ ye *tam fonksiyon* denir.

Teorem 2.1.8. Eğer $f \in L_1(-\infty,\infty)$ ise,

$$g(\lambda) = \int_0^\infty f(x) e^{-i\lambda x}\, dx$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir. $f \in L_2(-\infty,\infty)$ olduğunda ise N>0 olmak üzere;

$$g_N(\lambda) = \int_{-N}^{N} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx$$

yazılır**.**

Teorem 2.1.9. (Green fonksiyonu)

$L = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)$ olmak üzere bir $[a,b]$ aralığında

$$L[y] = -f(x) \tag{2.1}$$

homojen olmayan lineer diferansiyel denklem ve

$$a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0 \tag{2.2}$$

$$b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0 \tag{2.3}$$

Homojen sınır koşulları ile verilen lineer iki nokta sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, $b_1^2 + b_2^2 \neq 0$ $[a,b]$ aralığında f ve g sürekli ve p^2 nin türevlenebilir ve aralığın her noktasında sıfırdan farklı olduğunda kabul edilecektir. Bir $G(x,\xi)$ fonksiyonu bulunabilir. Öyle ki (2.1), (2.2), (2.3) ile verilen homojen olmayan sistemin çözümü

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi)\,d\xi$$

ile verilir. $G(x,\xi)$ fonksiyonuna **Green fonksiyonu** denir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. L Operatörünün Özel Çözümleri:

3.1.1. $\ell y = -y'' + q(x)y$ Denkleminin Çözümleri Hakkında:

Tanım kümesi;

$$\ell y = -y'' + q(x)y \ , \quad 0 \le x < \infty \tag{3.1}$$

diferansiyel ifadesi göz önüne alınsın. Burada q(x) fonksiyonu kompleks değerli bir fonksiyondur. (3.1) ifadesi ve

$$y'(0) - a\lambda y(0) = 0 \tag{3.2}$$

Sınır koşullarının kullanılması ile ($a \in C$, $a = \pm i$, $a \neq 0$) $L_2(0,\infty)$ uzayında L operatörünün tanım kümesi D ile gösterilsin. $\forall$ y $\in$ D için;

i) y' var ve mutlak sürekli

ii) $\ell y \in L_2(0,\infty)$

iii) $y'(0) - a\lambda y(0) = 0$

olsun. Aşikardır ki; $\overline{D} = L_2(0,\infty)$ olur.

L ile $L : L_2(0,\infty) \to L_2(0,\infty)$

olan ve $\forall$ y$\in$ D için;

$$Ly = \ell(y)$$

gibi tanımlanan operatörü gösterelim. L ile ilgili olarak

$$L(y) = \lambda^2 y \tag{3.3}$$

$$y'(0) - a\lambda y(0) = 0 \tag{3.4}$$

Sınır değer problemini göz önüne alalım. (3.1) denklemine kütlesi 0 olan statik (durgun) q potansiyeline sahip schrödinger denklemi denir. Şimdi, kabul edelim ki;

$$\int_0^\infty x|q(x)|dx < \infty \tag{3.5}$$

koşulunu gerçeklesin. Burada q(x) fonksiyonu ve a sayısı reel olduğu zaman L operatörünün spektral özellikleri [5]' te incelenmiştir.

Teorem 3.2.

[5] koşulunun gerçeklenmesi durumunda (3.1) denkleminin sırasıyla $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im}\lambda < 0$ düzleminde

$$\lim_{x\to\infty} e^{\pm}(x,\lambda).e^{\mp i\lambda x} = 1 \tag{3.6}$$

koşulunu gerçekleyen

$$e^{\pm}(x,\lambda) = e^{\pm i\lambda x} + \int_x^{\infty} \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda} q(t)e^{\pm}(t,\lambda)dt \tag{3.7}$$

şeklinde bir çözüme sahiptir. Bu çözüm sırasıyla $\operatorname{Im}\lambda > 0$ ve $\operatorname{Im}\lambda < 0$ da λ'nın analitik fonksiyonudur ve reel eksene dek süreklidir.

İspat:

(3.1) denklemi

$$e^{+''} + \lambda^2 e^{+} = q(x)e^{+}$$

biçiminde yazılsın.

$e^{+''} + \lambda^2 e^{+} = 0$ homojen denkleminin genel çözümü

$$e^{+} = c_1 e^{i\lambda x} + c_2 e^{-i\lambda x}$$

biçiminde yazılabilir.

$y'' + \lambda^2 y = q(x)y$ denkleminin genel çözümü ise

$$e^{+} = c_1(x)e^{i\lambda x} + c_2(x)e^{-i\lambda x}$$

biçiminde arayalım. Buradan;

$$e^{+'} = c_1'(x)e^{i\lambda x} + c_2'(x)e^{i\lambda x} + i\lambda c_1(x)e^{i\lambda x} - i\lambda c_2(x)e^{-i\lambda x}$$

elde edilir.

$$c_1'(x)e^{i\lambda x} + c_2'(x)e^{-i\lambda x} = 0 \tag{3.8}$$

olduğunu kabul edelim.

$$e^{+''}(x) = i\lambda(c_1'(x)e^{i\lambda x} - c_2'(x)e^{-i\lambda x}) - \lambda^2 \underbrace{(c_1(x)e^{i\lambda x} + c_2(x)e^{-i\lambda x})}_{e^{+}(x)}$$

O halde;

$$\underbrace{e^{+''} + \lambda^2 e^{+}}_{q(x).f} = i\lambda\left\{c_1{}'(x)e^{i\lambda x} + c_2{}'(x)e^{-i\lambda x}\right\}$$

olur. Bu eşitlik (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$i\lambda c_1'(x)e^{i\lambda x} - i\lambda c_2'(x)e^{-i\lambda x} = q(x)f \tag{3.9}$$

olur. (3.8) ve (3.9) eşitliklerinden

$$c_1(x) = -\frac{1}{2i\lambda}\int_0^\infty q(t)f(t)e^{-i\lambda t}\,dt + a_1 \tag{3.10}$$

$$c_2(x) = \frac{1}{2i\lambda}\int_0^\infty q(t)f(t)e^{i\lambda t}\,dt + a_2 \quad \text{elde edilir.} \tag{3.11}$$

Bu değerlerin $e^{+} = c_1(x)e^{i\lambda x} + c_2(x)e^{-i\lambda x}$ denkleminde yerine yazılması ile

$$e^{+} = a_1(x)e^{i\lambda x} + a_2(x)e^{-i\lambda x} - \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}q(t)e(t)\,dt$$

bulunur.

$$\lim_{x\to\infty} e^{+}(x,\lambda).e^{-i\lambda x} = 1$$

koşulunun sağlanması ile için $a_1 = 1$ ve $a_2 = 0$ elde edilir. O halde $e(x,t)$ çözümü

$$e^{+}(x,t) = e^{+i\lambda x} - \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}q(t)e(t,\lambda)\,dt$$

biçimindedir. Gerçekten

$$e^{+'}(x,t) = i\lambda e^{i\lambda x} - \int_x^\infty \cos\lambda(x-t)q(t)e^{+}(t,\lambda)\,dt \tag{3.12}$$

$$e^{+''}(x,t) = -\lambda^2 e^{i\lambda x} + q(x)e^{+}(x,\lambda) - \lambda\int_x^\infty \sin\lambda(x-t)q(t)e^{+}(x,\lambda) \tag{3.13}$$

ifadeleri (3.1) dekleminde yerlerine yazılırsa

$$-e^{+''}(x,t) + q(x)e^{+}(x,\lambda) = \lambda^2 e^{+}(x,\lambda) \quad \text{elde edilir.} \tag{3.14}$$

Benzer olarak (3.1) denkleminin bir çözümü;

$-e^{-''}(x,\lambda)+q(x)e^{-}(x,\lambda)=\lambda^2 e^{-}(x,\lambda)$ olduğunu da gösterebiliriz. (3.15)

Jost Çözümler

Teorem 3.3. Eğer $\int_0^\infty x|q(x)|dx<\infty$ koşulu var ise bu durumda $f^{\pm}(x,\lambda)$ çözümü aşağıdaki gibi gösterilir.

$$f^{\pm}(x,\lambda)=e^{\pm i\lambda x}+\int_x^\infty K^{\pm}(x,t)e^{\pm i\lambda t}dt \qquad x\geq 0, \quad im\lambda \geq 0 \tag{3.16}$$

Burada K(x,t) bir volterra tipi integral denkleminin bir çözümüdür. x ve t'ye göre sürekli diferansiyellenebilirdir. Bundan dolayı $K^{\pm}(x,t)$ aşağıdaki eşitsizlikleri gerçekler.

$$|K(x,t|\leq \frac{1}{2}\sigma(\frac{x+t}{2})e^{\sigma_1(x)} \tag{3.17}$$

$$|K_x(x,t)|,|K_t(x,t)|\leq \frac{1}{4}\left|q(\frac{x+t}{2})\right|+ce^{\sigma(x)}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)0\leq K\leq t<\infty \tag{3.18}$$

Burada

$$\sigma(x)=\int_x^\infty |q(t)|dt \quad , \quad \sigma_1(x)=\int_x^\infty q(t)dt \tag{3.19}$$

olarak tanımlanır.

İspat:

$$e^{\pm}(x,t)=e^{\pm i\lambda x}-\int_x^\infty \frac{\sin\lambda(x-t)}{\lambda}q(t)e^{\pm}(t,\lambda)dt \quad ;(\text{im}\,\lambda\geq 0) \tag{3.20}$$

integral denklemi ile

$f^{\pm}(x,\lambda)=e^{\pm i\lambda x}+\int_x^\infty K^{\pm}(x,t)e^{\pm i\lambda t}dt$ ifadesini göz önüne alalım. Buradan

$$\int_x^\infty K^{\pm}(x,t)e^{\pm i\lambda}dt=\int_x^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda}q(s)\left\{e^{\pm i\lambda s}+\int_s^\infty K^{\pm}(s,u)e^{\pm i\lambda u}du\right\}ds \tag{3.21}$$

$$= \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} q(s) e^{\pm i\lambda s} ds + \int_x^\infty q(s)ds \int_s^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{\pm i\lambda u} K^\pm(s,u)du \qquad (3.22)$$

elde edilir.

$$\int_x^\infty \frac{Sin\lambda(s-x)}{\lambda} q(s) e^{\pm i\lambda s} = J_1$$

$$\int_x^\infty q(s)ds \int_s^\infty \frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{\pm i\lambda s} K^\pm(s,u)du = J_2 \text{ diyelim.} \qquad (3.23)$$

$$\frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{\pm i\lambda s} = \frac{1}{2}\int_s^{2s-x} e^{\pm i\lambda t} dt$$

$$\frac{\sin\lambda(s-x)}{\lambda} e^{\pm i\lambda u} = \frac{1}{2}\int_{u-(s-x)}^{u+(s-x)} e^{\pm i\lambda t} dt \qquad (3.24)$$

ifadeleri sırasıyla J_1 ve J_2 eşitliklerinde yerlerine konup integral sırası değiştirilirse

$$J_1 = \frac{1}{2}\int_x^\infty q(s)ds \int_x^{2s-x} e^{\pm i\lambda t} dt = \frac{1}{2}\int_x^\infty e^{\pm i\lambda} \left\{ \int_{s=\frac{t+x}{2}}^\infty q(s)ds \right\} dt$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\int_x^\infty q(s)ds \int_s^\infty K^\pm(s,u)du \int_{u-(s-x)}^{u+(s-x)} \frac{1}{2} e^{-i\lambda t} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_x^\infty e^{\pm i\lambda t} \left\{ \int_x^{\frac{x+t}{2}} q(s)ds \int_{t+x-s}^{t-(x-s)} K^\pm(s,u)du + \int_{\frac{x+t}{2}}^\infty q(s)ds \int_s^{t-(x-s)} K^\pm(s,u)du \right\} dt$$

elde edilir. Fourier integralinin gösteriminin tekliğinden;

$$K^\pm(x,t) = \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty q(s)ds + \frac{1}{2}\int_x^{\frac{x+t}{2}} q(s)ds \int_{t+x-s}^{t-(x-s)} K^\pm(s,u)du + \frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^\infty q(s)ds \int_s^{t-(x-s)} K^\pm(s,u)du \qquad (3.25)$$

elde edilir.

$$K_0^{\pm}(x,t)=\frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}q(t)dt \tag{3.26}$$

$$K_m^{\pm}(x,t)=\frac{1}{2}\int_{x}^{\frac{x+t}{2}}q(s)ds\int_{t+x-s}^{t-(x-s)}K^{\pm}{}_{m-1}(s,u)du+\frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}q(s)ds\int_{s}^{t-(x-s)}K^{\pm}{}_{m-1}(s,u)du \quad . \tag{3.27}$$

$K^{\pm}(x,t)=\sum_{m=0}^{\infty}K^{\pm}{}_m(x,t)$ olarak tanımlayalım. (3.28)

Teorem 3.2.' nin ispatına benzer olarak;

$$\left|K_0(x,t)\right|\le\frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}\left|q(s)\right|ds=\frac{1}{2}\sigma\left[\frac{x+t}{2}\right] \tag{3.29}$$

elde ederiz. Yine aynı şekilde;

$$\left|K_1(x,t)\right|\le\frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}\left|q(s)\right|ds\int_{t+x-s}^{t+s-x}\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{s+u}{2}\right)du+\frac{1}{2}\int_{\frac{x+t}{2}}^{\infty}\left|q(s)\right|ds\int_{s}^{t+s-x}\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{s+u}{2}\right)du\le$$

$$\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\int_{x}^{\infty}s\left|q(s)\right|ds=\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\sigma_1(x)$$

yani;

$$\left|K_1(x,t)\right|\le\frac{1}{2}\sigma\left[\frac{x+t}{2}\right]\sigma_1(x) \tag{3.30}$$

elde ederiz. Tümevarım metodundan dolayı

$$\left|K_m(x,t)\right|\le\frac{1}{2}\sigma\left[\frac{x+t}{2}\right]\frac{\sigma_1{}^m(x)}{m!} \qquad (m=0,\ 1\ ,2\ ,\dots) \tag{3.31}$$

elde edilir. Son eşitsizlikten ve (3.28) tanımından

$$\left|K(x,t)\right|\le\frac{1}{2}\sigma\left[\frac{x+t}{2}\right]e^{\sigma_1(x)} \quad \text{elde edilir.} \tag{3.32}$$

$$\left|K_x(x,t)\right|,\left|K_t(x,t)\right| \le \frac{1}{4}\left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| + \frac{1}{4}e^{\sigma_1(x)}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\int_x^{\frac{x+t}{2}}|q(s)|ds +$$

$$+\frac{1}{4}e^{\sigma_1(x)}\int_x^{\infty}|q(s)|\sigma\left(\frac{2s+t-x}{2}\right)ds \le \frac{1}{4}\left|q\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| + \frac{1}{2}e^{\sigma_1(x)}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\sigma(x) \tag{3.33}$$

eşitsizliği de kolaya gösterilebilir. Burada Wronskian x'den bağımsız olduğundan

$$f^+(x,\lambda) = e^{i\lambda x}[1+o(1)] \quad , \qquad \lambda \in C_+, x \in [0,\infty), x \to \infty$$

$$f^{+'}(x,\lambda) = i\lambda e^{i\lambda x}[1+o(1)] \ , \qquad \lambda \in C_+, x \in [0,\infty), x \to \infty$$

$$f^-(x,\lambda) = e^{i\lambda x}[1+o(1)] \ , \qquad \lambda \in C_-, x \in [0,\infty), x \to \infty$$

$$f^{-'}(x,\lambda) = -i\lambda e^{-i\lambda x}[1+o(1)] \ , \qquad \lambda \in C_-, x \in [0,\infty), x \to \infty$$

Bu çözümlerin Wronskiani aşağıdaki gibidir.

$$W[f^+(x,\lambda), f^-(x,\lambda)] = f^+(x,\lambda)f^{-'}(x,\lambda) - f^{+'}(x,\lambda)f^-(x,\lambda)$$

$$W[f^+(x,\lambda), f^-(x,\lambda)] = [1+o(1)](-i\lambda x - i\lambda x) = -2i\lambda$$

ya da

$$f^+ = e^{+i\lambda x}[1+o(1)]$$

$$f^- = e^{-i\lambda x}[1+o(1)]$$

$$\begin{aligned}
W[f^+(x,\lambda), f^-(x,\lambda)] &= f^+(x,\lambda)f^{-'}(x,\lambda) - f^{+'}(x,\lambda)f^-(x,\lambda) \\
&= \lim_{x\to\infty}[f^+(x,\lambda)f^{-'}(x,\lambda) - f^{+'}(x,\lambda)f^-(x,\lambda)] \\
&= e^{i\lambda x}(-i\lambda e^{-i\lambda x}) - i\lambda e^{i\lambda x}e^{-i\lambda x} \\
&= -i\lambda - i\lambda \\
&= -2i\lambda
\end{aligned}$$

$\operatorname{Im}\lambda = 0$, $W[f^+(x,\lambda), f^-(x,\lambda)] = -2i\lambda$ olur. (3.34)

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1 Lemma 4.2. L_λ operatörünün Diskre spektrumu:

q(x)'in bir kompleks fonksiyon ve (3.2) şartını sağladığını farz edelim.

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 y \qquad \textbf{(3.1)}$$

Diferansiyel denkleminin $\operatorname{Im}\lambda = 0$'da $\varphi(0,\lambda) = 1$ **ve** $\varphi'(0,\lambda) = a\lambda$ koşulunu gerçekleyen $\varphi(x,\lambda)$ çözümü vardır ve tektir. Bu çözüm λ nın tam fonksiyonu olup

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{d_1(\lambda)}{-2i\lambda} f^+(x,\lambda) + \frac{d(\lambda)}{2i\lambda} f^-(x,\lambda)$$

dekleminde yerine yazıldığında aşağıdaki gibi olduğu görülür.

$$-2i\lambda\varphi(x,\lambda) = d(\lambda) f^-(x,\lambda) - d_1(\lambda) f^+(x,\lambda) \qquad (4.1)$$

Burada $d(\lambda) = f^{+'}(0,\lambda) - a\lambda f^+(0,\lambda)$

$$d_1(\lambda) = f^{-'}(0,\lambda) - a\lambda f^-(0,\lambda) \qquad (4.2)$$

İspat:

$f^+(x,\lambda)$ ve $f^-(x,\lambda)$ çözümleri sırasıyla (3.1) denkleminin λ 'nın analitik fonksiyonu ve reel eksene dek süreklidir.

$f^+(x,\lambda)$, $f^-(x,\lambda)$ çözümleri $\operatorname{Im}\lambda = 0$ (reel eksen) üzerinde her bir çözümü olup lineer bağımsız iki çözümü olduğundan, reel eksen üzerinde her bir çözüm lineer kombinasyon olarak yazılabileceğinden

$$\varphi(x,\lambda) = c_1 f^+(x,\lambda) + c_2 f^-(x,\lambda) \qquad (4.3)$$

Başlangıç değerlerini yerlerine yazarak, $x = 0$ için

$$\varphi(0,\lambda) = c_1 f^+(0,\lambda) + c_2 f^-(0,\lambda) = 1$$

$$\varphi'(0,\lambda) = c_1 f_x^{\,+}(0,\lambda) + c_2 f_x^{\,-}(0,\lambda) = a\lambda \qquad (4.4)$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f^-(0,\lambda) \\ a\lambda & f_x^{\,-}(0,\lambda) \end{vmatrix}}{-2i\lambda} = \frac{f_x^{\,-}(0,\lambda) - a\lambda f^-(0,\lambda)}{-2i\lambda} \quad \text{yani;} \quad c_1 = \frac{d_1(\lambda)}{-2i\lambda} \text{ olur.}$$

Benzer şekilde;

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} f^+(0,\lambda) & 1 \\ f_x^+(0,\lambda) & a\lambda \end{vmatrix}}{-2i\lambda} = \frac{\alpha\lambda f^+(0,\lambda) - f_x^+(0,\lambda)}{-2i\lambda}$$

$$= \frac{f_x^+(0,\lambda) - \alpha\lambda f^+(0,\lambda)}{2i\lambda} = \frac{d(\lambda)}{2i\lambda}$$

O halde $c_1 = \dfrac{d_1(\lambda)}{-2i\lambda}$, $c_2 = \dfrac{d(\lambda)}{2i\lambda}$ (4.5)

Bu değerleri alıp (4.3) denkleminde yerine yazarsak,

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{d_1(\lambda)}{-2i\lambda} f^+(x,\lambda) + \frac{d(\lambda)}{2i\lambda} f^-(x,\lambda) \tag{4.6}$$

$2i\lambda\varphi(x,\lambda) = d(\lambda) f^-(x,\lambda) - d_1(\lambda) f^+(x,\lambda)$ olur ki burada

$$\begin{aligned} d(\lambda) &= f^{+'}(0,\lambda) - \alpha\lambda f^+(0,\lambda) \\ d_1(\lambda) &= f^{-'}(0,\lambda) - \alpha\lambda f^-(0,\lambda) \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{x\to\infty} f^+(x,\lambda).e^{-i\lambda x} = 1 \quad ; \quad \lambda \in \overline{C_+} \\ &\lim_{x\to\infty} f^-(x,\lambda).e^{-i\lambda x} = 1 \quad ; \quad \lambda \in \overline{C_-} \end{aligned} \tag{4.8}$$

sınır koşullarını gerçekleyen çözümleri sırasıyla $f^+(x,\lambda), f^-(x,\lambda)$ ile gösterilsin.

Burada

$$\begin{aligned} \overline{C_+} &= \{\lambda : \lambda \in C, \operatorname{Im}\lambda \geq 0\} \\ \overline{C_-} &= \{\lambda : \lambda \in C, \operatorname{Im}\lambda \leq 0\} \end{aligned} \tag{4.9}$$

şeklinde olup, bu çözümler aşağıdaki şekildedir.

$$f^+(x,\lambda) = e^{+i\lambda x} + \int_x^\infty K^+(x,t) e^{+i\lambda +} dt; \qquad \operatorname{Im}\lambda \geq 0 \tag{4.10}$$

$$f^-(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}+\int_x^{\infty}K^-(x,t)e^{-i\lambda t}dt; \qquad \operatorname{Im}\lambda \le 0 \tag{4.11}$$

burada f^+, f^- çözümleri sırasıyla (3.1) denklemi, λ'nın analitik fonksiyonu ve reel eksene dek süreklidir. Bu çözümler aşağıdaki asimptotik özellikleri gerçeklesin.

$$\begin{aligned} f^{\pm}(x,\lambda) &= e^{\pm i\lambda x}\left[1+o(1)\right], \quad \lambda\in\overline{C_{\pm}}, \quad x\to\infty \\ f_x^{\pm}(x,\lambda) &= e^{\pm i\lambda x}\left[\pm i\lambda x+o(1)\right], \quad \lambda\in\overline{C_{\pm}}, \quad x\to\infty \end{aligned} \tag{4.12}$$

Yine benzer olarak (3.1) diferansiyel denklemi (3.2) sınır koşulu gerçeklemesi halinde;

$$\lim_{x\to\infty} g^+(x,\lambda)e^{+i\lambda x}=1, \quad \lambda\in\overline{C_+} \tag{4.13}$$

$$\lim_{x\to\infty} g^-(x,\lambda)e^{-i\lambda x}=1, \quad \lambda\in\overline{C_-} \tag{4.14}$$

Sınır koşulunu gerçekleyen çözümleri g $^+(x,\lambda), g^-(x,\lambda)$ ile gösterilsin.

$$g^{\pm}(x,\lambda)=e^{\mp i\lambda}\left[\pm 1+o(1)\right], \quad \lambda\in\overline{C_{\pm}} \ \mathrm{x}\to\infty \tag{4.15}$$

$$g_x^{\pm}(x,\lambda)=e^{\mp i\lambda}\left[\pm i\lambda x+o(1)\right], \quad \lambda\in\overline{C_{\pm}} \ x\to\infty \tag{4.16}$$

Şimdi (3.2) denkleminin kapalı üst çözümleri göz önüne alalım. $f^+(x,\lambda), g^+(x,\lambda)$' nın Wronskianine bakalım.

$$W\left[f^+(x,\lambda),g^+(x,\lambda)\right]=f^+(x,\lambda)g^{+'}(x,\lambda)-f^{+'}(x,\lambda)g^+(x,\lambda)$$

Wronksian x'den bağımsız olduğundan sağ taraftan limite geçilirse

$$W\left[f^+(x,\lambda),g^+(x,\lambda)\right]=\lim_{x\to\infty}\left\{f^+(x,\lambda)g^{+'}(x,\lambda)-f^{+'}(x,\lambda)g^+(x,\lambda)\right\}$$

$$=-2i\lambda$$ elde edilir.

Lemma 4.2.

q(x)'in bir kompleks fonksiyon (3.2) şartını sağladığını farz edelim.

$$-y''+q(x)y=\lambda^2 y \tag{3.1}$$

Diferansiyel denkleminin $\varphi(0,\lambda)=1$ **ve** $\varphi'(0,\lambda)=a\lambda$ koşulunu gerçekleyen $\varphi(x,\lambda)$ çözümü vardır ve tektir.

$\lambda \neq 0$ için $f^{+}(x,\lambda), g^{+}(x,\lambda)$ $\operatorname{Im}\lambda > 0$ bölgesinde (3.1) denkleminin temel çözümlerini oluştururlar. Şimdi bundan yararlanarak, (3.1) denkleminin kapalı üst düzlemde (3.2) sınır koşulunu gerçekleyen çözümü bulalım. Bu çözüm

$\psi^{+}(x,\lambda)=c_1 f^{+}(x,\lambda)+c_2 g^{+}(x,\lambda)$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$ şeklinde aransın.

$$\psi^{+}(0,\lambda)=c_1 f^{+}(0,\lambda)+c_2 g^{+}(0,\lambda)=1$$
$$\psi^{+'}(0,\lambda)=c_1 f^{+'}(0,\lambda)+c_2 g^{+'}(0,\lambda)=a\lambda$$

$$c_1=\frac{\begin{vmatrix}1 & g^{+}\\ a\lambda & g^{+'}\end{vmatrix}}{W[f^{+},g^{+}]}=\frac{g^{+'}(0,\lambda)-\alpha\lambda g^{+}(0,\lambda)}{-2i\lambda}=\frac{d_1^{+}(\lambda)}{-2i\lambda} \tag{4.17}$$

$$c_2=\frac{\begin{vmatrix}f^{+} & 1\\ f^{+'} & a\lambda\end{vmatrix}}{W\left[f^{+},g^{+}\right]}=\frac{(\alpha\lambda f^{+}(0,\lambda)-f^{+'}(0,\lambda)}{-2i\lambda}=\frac{d^{+}(\lambda)}{2i\lambda} \tag{4.18}$$

$$c_1=\frac{d_1^{+}(\lambda)}{-2i\lambda},\quad c_2=\frac{d^{+}(\lambda)}{2i\lambda}$$

şeklinde seçilmelidir. Dolayısıyla (3.1) diferansiyel denklemini gerçekleyen çözümü

$$\psi^{+}(x,\lambda)=\frac{d_1^{+}(\lambda)}{-2i\lambda}f^{+}(0,\lambda)+\frac{d^{+}(\lambda)}{2i\lambda}g^{+}(0,\lambda) \tag{4.19}$$

$$\psi^{+}(x,\lambda)=\frac{d^{+}(\lambda)g^{+}(x,\lambda)-d_1^{+}(\lambda)f^{+}(x,\lambda)}{2i\lambda}$$ şeklinde bulunur. (4.20)

Lemma 4.3.

Benzer olarak $\operatorname{Im}\lambda<0$ bölgesinde $f^{-}(x,\lambda), g^{-}(x,\lambda)$ (3.1) denklemini gerçeklemesi halinde;

$$g^{-'}(0,\lambda)-\alpha\lambda g^{-}(0,\lambda)=d_1^{-}(\lambda)$$
$$f^{-'}(0,\lambda)-\alpha\lambda f^{-}(0,\lambda)=d^{-}(\lambda)$$
olmak üzere (4.21)

Denkleminin genel çözümleri olup, (3.2) sınır koşulunu gerçekleyen

$$\psi^-(x,\lambda)=\frac{d_1^-(\lambda)}{2i\lambda}f^-(x,\lambda)-\frac{d^-(\lambda)}{2i\lambda}g^-(x,\lambda) \text{ şeklindedir.} \tag{4.22}$$

Yine $W\left[f^+(x,\lambda),f^-(x,\lambda)\right]=-2i\lambda$ olduğundan $\lambda\neq 0$ için $f^+(x,\lambda),f^-(x,\lambda)$, $\operatorname{Im}\lambda=0$ bölgesindeki çözümleri daha önce ispatlamıştık.

Lemma 4.4.

q(x)'in bir kompleks fonksiyon (3.2) şartını sağladığını farzedelim.

$$-y''+q(x)y=\lambda^2 y \tag{3.1}$$

Diferansiyel denkleminin $\varphi^+(0,\lambda)=1$ **ve** $\varphi^{+'}(0,\lambda)=a\lambda$ koşulunu gerçekleyen $\varphi(x,\lambda)$ çözümü vardır ve tektir.

$\operatorname{Im}\lambda=0$ olması halinde L_λ operatörünün reel öz değerleri yoktur.

İspat :

Kabul edelim ki; λ öz değer ve $\operatorname{Im}\lambda=0$ olsun. (3.1) denkleminin temel çözümler sistemi olan $f^+(x,\lambda)$ .ve $f^-(x,\lambda)$ çözümlerini göz önüne alalım. Bu çözümlerin

$$W\left[f^+(x,\lambda),f^-(x,\lambda)\right]=-2i\lambda$$

olduğundan yine $\lambda\neq 0$ için $f^+(x,\lambda)$ ve $f^-(x,\lambda)$, $\operatorname{Im}\lambda=0$ bölgesinde (3.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluştururlar. Bu denklemin keyfi bir $y(x,\lambda)$ çözümü reel eksende

$$y=c_1 f^+(x,\lambda)+c_2 f^-(x,\lambda)\,,\ \operatorname{Im}\lambda=0$$

şeklindedir. $f^+(x,\lambda)$ ve $f^-(x,\lambda)$ çözümlerinin daha önce verilen asimptotik eşitlikleri kullanılırsa aşağıdaki asimptotik eşitlikler elde edilir.

$$y=c_1e^{i\lambda x}+c_2e^{-i\lambda x}+o(1)\,,\ x\to\infty\ ,$$

$y(x,\lambda)$ çözümü $L_2(0,\infty)$ uzayından olabilmesi için $c_1=c_2=0$ olmalıdır. Buradan $y(x,\lambda)\equiv 0$ olur. Bu ise λ 'nın öz değer olması ile çelişir. O halde $\operatorname{Im}\lambda=0$ olması durumunda L operatörünün öz değeri yoktur.

5.SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1. L Operatörünün Resolventi ve Spektrumu

5.1.1. L Operatörünün Resolventi ve Spektrumu Hakkında

A operatörü H hilbert uzayında tanımlanmış herhangi bir operatör ve A'nın tanım kümesi H içinde yoğun olsun. $R_\lambda(A)$, $\sigma(A)$, $\rho(A)$, $\sigma_c(A)$, $\sigma_r(A)$ ile sırasıyla A operatörünün resolventi, resolvent cümlesi, spektrumu, diskret spektrumu, sürekli spektrumu ve rezidü (kalan) spektrumu gösterilsin.

Tanım 5.1.2. Eğer $R_\lambda(A) = (A-\lambda I)^{-1}$ operatörü var, sınırlı ve tüm H hilbert uzayında tanımlı ise bu operatöre A operatörünün resolventi denir.

Tanım 5.1.3.

$$\rho(A) = \left\{ \lambda : \lambda \in C \quad ; \begin{array}{l} R_\lambda(A)\text{ var} \\ R_\lambda(A)\, sınırlı \quad operatör \\ \overline{D(R_\lambda(A))} = H \end{array} \right\}$$

Tanım 5.1.4. $\sigma(A) = C / \rho(A)$

Tanım 5.1.5. $\sigma_d(A) = \{\lambda : \lambda \in C ve R_\lambda(A)\, yoktur.\}$

Tanım 5.1.6.

$$\sigma_c(A) = \left\{ \lambda : \lambda \in C \quad ; \begin{array}{l} R_\lambda(A)\text{ var} \\ R_\lambda(A)\, sınırsı \quad operatör \\ \overline{D(R_\lambda(A))} = H \end{array} \right\}$$

Tanım 5.1.7.

$$\sigma_r(A) = \left\{ \lambda : \lambda \in C \quad ; \begin{array}{l} R_\lambda(A)\text{ var} \\ R_\lambda(A)\, sınırlı \quad operatör \\ \overline{D(R_\lambda(A))} \neq H \end{array} \right\}$$

$Ax = \lambda x$ denklemi göz önüne alınsın. (5.1)

Tanım 5.1.2.'den (5.1) denkleminin yalnızca x=0 çözümünün var olması halinde λ sayılarının A operatörünün resolvent cümlesine ait olduğu açıktır. (5.1) denkleminin $x \neq 0$ çözümünün var olması halinde bunlara karşılık gelen λ'lar A operatörünün diskret spektrumuna aittir.

Teorem 5.1.8.

$$\sigma_d(L) = \{\lambda : \lambda \in C^+, d^+(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda : \lambda \in C^-, d^-(\lambda) = 0\} \quad (5.2)$$

$$C_+ = \{\lambda : \lambda \in C, im\lambda > 0\}$$

$$C_- = \{\lambda : \lambda \in C, im\lambda < 0\}$$

$$\psi^+(x,\lambda) = c_1 f^+(x,\lambda) + c_2 g^+(x,\lambda)$$

$$\left\{c_1 f^{+'}(0,\lambda) + c_2 g^{+'}(0,\lambda\right\} - \alpha\lambda\left\{c_1 f^+(0,\lambda) + c_2 g^+(0,\lambda)\right\} = 0$$

$$c_1 \underbrace{\left\{f^{+'}(0,\lambda) - \alpha\lambda f^+(0,\lambda)\right\}}_{d^+(\lambda)} - c_2 \underbrace{\left\{g^{+'}(0,\lambda) - \alpha\lambda g^+(0,\lambda)\right\}}_{d_1^+(\lambda)} = 0$$

$$2i\lambda\psi^+(x,\lambda) = d_1^+(\lambda) f^+(x,\lambda) - d^+(\lambda) g^+(x,\lambda) \quad (5.3)$$

$$2i\lambda\psi^-(x,\lambda) = d_1^-(\lambda) f^-(x,\lambda) - d^-(\lambda) g^-(x,\lambda) \quad (5.4)$$

İspat :

Diskret spektrumun tanımından görülmektedir ki; $\lambda \in \sigma_d(L)$ için L operatörünün resolventi yoktur. Şimdi (4.20) ve (4.22) ifadelerini göz önüne alalım.

$$\psi^+(x,\lambda) = \frac{d_1^+(\lambda)}{2i\lambda} f^+(x,\lambda) - \frac{d^+(\lambda)}{2i\lambda} g^+(x,\lambda)$$

$$\psi^-(x,\lambda) = \frac{-d_1^-(\lambda)}{2i\lambda} f^-(x,\lambda) + \frac{d^-(\lambda)}{2i\lambda} g^-(x,\lambda)$$

$\psi^+(x,\lambda), \psi^-(x,\lambda)$ çözümleri sırasıyla C_+ ve C_-'de L operatörlerinin $L_2(0,\infty)$ uzayında çözümü olması için sınırsız çözümleri baş katsayısı olan $d^{\pm}(\lambda) = 0$ olmalıdır. Buradan

$$\sigma_d(L) = \{\lambda; \lambda \in C_+, d^+(\lambda) = 0\} U \{\lambda; \lambda \in C_-, d^-(\lambda) = 0\} \text{ sonucu elde edilir.} \quad (5.5)$$

Sonuç 5.1.9.

λ sayılarının L operatörünün öz değeri olması için gerek ve yeter şart $\lambda \in C_+$ için $d^+(\lambda) = 0$ veya $\lambda \in C_-$ için $d^-(\lambda) = 0$ olmasıdır.

5.2. L operatörünün Resolvent Cümlesi ve Sürekli Spektrumu:

Resolvent kümesi ve L $_{\lambda}$ operatörünün resolventi sırasıyla $\rho^*(L_\lambda)$, (L $_{\lambda}$)ile gösterilir.

Teorem 5.2.1.

a) $\rho^*(L_\lambda) = \rho^+(L_\lambda) \cup \rho^-(L_\lambda)$ olsun.

$$\rho^*(L_\lambda) = \begin{Bmatrix} \lambda : \mathrm{Im}\,\lambda > 0, & d^+(\lambda) \neq 0 \\ \lambda : \mathrm{Im}\,\lambda < 0, & d^-(\lambda) \neq 0 \end{Bmatrix} \tag{5.6}$$

ise şimdi biz

$$\rho^+(L_\lambda) = \{\lambda : \mathrm{Im}\lambda > 0, d^+(\lambda) \neq 0\} \subset \rho(L_\lambda)$$

olduğunu gösterelim.

.

b) $\forall \lambda \in \rho^+(L_\lambda)$, $R(L_\lambda)$ resolventi bir integral operatörü olup

$$(R_\lambda f)(x) = \int_0^\infty G(x,t,\lambda) f(t)dt \tag{5.7}$$

biçimindedir. Burada Im $\lambda > 0$ için

$$G_1^+(x,t,\lambda) = \frac{f^+(x,\lambda)S^+(t,\lambda)}{d^+(\lambda)} \tag{5.8}$$

$$G_2^+(x,t,\lambda) = \begin{cases} 0 & ;0 \le t \le x \\ -\dfrac{f^+(x,\lambda)g^+(t,\lambda)}{2i\lambda} + \dfrac{f^+(t,\lambda)g^+(x,\lambda)}{2i\lambda} & ;x \le t < \infty \end{cases} \tag{5.9}$$

İspat:

Öncelikle $im\lambda > 0$ olduğunu farz edelim. a) şıkkının ispatının (5.9) dan elde edilemeyeceği aşikardır. Bu yüzden ilk önce b) şıkkını ispatlarız.

b) Öncelikle ispat açık üst düzlem için yapılsın. Benzer olarak açık alt düzlem içinde yapılabilir. Şimdi (3.1) diferansiyel denkleminin $f^{+}(x,\lambda),\ g^{+}(x,\lambda)$ çözümlerini göz önüne alalım. Bu çözümler açık üst düzlemde (3.1) diferansiyel denkleminin temel çözümlerini oluşturduklarından teoremin ispatını yapmak için parametrelerin değişim yöntemini kullanıldı.

Kabul edelim ki tanım cümlesi f(x) olsun, herhangi bir sonlu kısımda 0'larının dışında olduğunu farz edelim. L_{λ} 'nın resolventini bulabilmek $f(x)\in L_2(0,\infty)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
&-y''+q(x)y-\lambda^2 y=f(x)\\
&y'(0)-\alpha\lambda y(0)=0
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

homojen olmayan denklemi çözelim.

$f^{+}(x,\lambda)$ ve g $^{+}(x,\lambda)$, (2.1) homojen denkleminin kapalı üst düzlemdeki temel çözümleri olduğundan

$$y_c(x,\lambda)=c_1 f^{+}(x,\lambda)+c_2 g^{+}(x,\lambda) \tag{5.11}$$

eşitliği (3.1)denkleminin bir genel çözümü olarak yazılabilir. (5.10)denkleminin genel bir çözümü için ise;

$$y(x,\lambda)=c_1(x)f^{+}(x,\lambda)+c_2(x)g^{+}(x,\lambda) \tag{5.12}$$

biçiminde aransın. (5.12) ifadesinin türevleri alınıp (5.10) ifadesinde yerine konursa,

$$y'(x,\lambda)=c_1'(x)f^{+}(x,\lambda)+c_2'(x)g^{+}(x,\lambda)+\ c_1(x)f^{+\prime}(x,\lambda)+c_2(x)g^{+\prime}(x,\lambda) \tag{5.13}$$

olur. Şimdi,

$$c_1'(x)f^{+}(x,\lambda)+c_2'(x)g^{+}(x,\lambda)=0 \tag{5.14}$$

olduğunu kabul edelim.

$$y'(x,\lambda)=c_1(x)f^{+\prime}(x,\lambda)+c_2(x)g^{+\prime}(x,\lambda)$$

$$y''(x,\lambda)=c_1'(x).f^{+\prime}(x,\lambda)+c_2'(x)g^{+\prime}(x,\lambda)+\ c_1(x)f^{+\prime\prime}(x,\lambda)+c_2(x)g^{+\prime\prime}(x,\lambda) \tag{5.15}$$

olur. Son eşitlik (5.10)'da yerine yazılırsa

$$c_1'(x)f^{+'}(x,\lambda)+c_2'(x)g^{+'}(x,\lambda)=f(x) \text{ bulunur.} \tag{5.16}$$

(5.14) ve (5.16) eşitliklerinden aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$c_1'(x)f^{+}(x,\lambda)+c_2'(x)g^{+}(x,\lambda)=0$$

$$c_1'(x)f^{+'}(x,\lambda)+c_2'.(x)g^{+'}(x,\lambda)=f(x) \tag{5.17}$$

$W\left[f^+,g^+\right]=-2i\lambda$ olduğu hatırlanarak, ve (5.17) sisteminin çözümünden;

$$c_1'(x)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & g^+ \\ f(x) & g^{+'} \end{vmatrix}}{W\left[f^+,g^+\right]}=\frac{g^{+'}(x,\lambda)0-g^+(x,\lambda)f(x)}{-2i\lambda}$$

$$c_1'(x)=\frac{1}{2i\lambda}f(x)g^+(x,\lambda) \tag{5.18}$$

$$c_2'(x)=\frac{\begin{vmatrix} f^+ & 0 \\ f^{+'} & f(x) \end{vmatrix}}{W\left[f^+,g^+\right]}=\frac{f^+(x,\lambda)f(x)-f^{+'}.0}{-2i\lambda}$$

$$c_2'(x)=-\frac{1}{2i\lambda}f(x)f^+(x,\lambda) \tag{5.19}$$

$c_1'(x)$ ve $c_2'(x)$' in integralleri alınarak;

$$\int_x^\infty c_1'(x)dx=\frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty f(t).g^+(t,\lambda)dt \quad \text{ve düzenlersek}$$

$$c_1(x)=\alpha-\frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty f(t).g^+(t,\lambda)dt \quad \text{elde edilir} \tag{5.20}$$

$$\int_x^\infty c_2'(x)dx=-\frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty f(t)f^+(t,\lambda)dt \quad \text{ve düzenlersek}$$

$$-c_2(x)+\beta=-\frac{1}{2i\lambda}\int_x^\infty f(t).f^+(t,\lambda)dt$$

$$c_2(x) = \beta + \frac{1}{2i\lambda}\int_x^{\infty} f(t).f^+(t,\lambda)dt$$ elde edilir. (5.21)

Bu ifadelerin

$$y = c_1(x)f^+(x,\lambda) + c_2(x)g^+(x,\lambda)$$

denkleminde yerlerine yazılması ile;

$y'(0,\lambda) - a\lambda y(0) = 0$ şartının sağlanması ile

$$y(x) = \alpha f^+(x,\lambda) + \beta g^+(x,\lambda) - \frac{1}{2i\lambda} f^+(x,\lambda)\int_0^{\infty} f(t)g^+(t,\lambda)dt +$$

$$\frac{1}{2i\lambda} g^+(x,\lambda)\int_0^{\infty} f(t)f^+(t,\lambda)dt \qquad (5.22)$$

$$-a\lambda \,/\; y(0,\lambda) = \alpha f^+(0,\lambda) + \beta g^+(0,\lambda) - \frac{1}{2i\lambda} f^+(0,\lambda)\int_0^{\infty} f(t)g^+(t,\lambda)dt + \frac{1}{2i\lambda} g^+(0,\lambda)\int_0^{\infty} f(t)f^+(t,\lambda)dt$$

$$1 \,/\; y'(0,\lambda) = \alpha f^{+'}(0,\lambda) + \beta g^{+'}(0,\lambda) - \frac{1}{2i\lambda} f^{+'}(0,\lambda)\int_0^{\infty} f(t)g^+(t,\lambda)dt + \frac{1}{2i\lambda} g^{+'}(0,\lambda)\int_0^{\infty} f(t)f^+(t,\lambda)dt$$

Eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa

$$\alpha\left\{\underbrace{f^{+'}(0,\lambda) - a\lambda f^+(0,\lambda)}_{d^+(\lambda)}\right\} + \beta\left\{\underbrace{g^{+'}(0,\lambda) - g^+(0,\lambda)}_{d_1^+(\lambda)}\right\} - \frac{1}{2i\lambda} d^+(\lambda)\int_0^{\infty} f(t)g^+(t,\lambda)dt + \frac{1}{2i\lambda} d_1^+(\lambda)\int_0^{\infty} f(t)f^+(t,\lambda)dt = 0$$

$$S(t,\lambda) = -\frac{d^+(\lambda)}{2i\lambda} g^+(t,\lambda) + \frac{d_1^+(\lambda)}{2i\lambda} f^+(t,\lambda)$$ olmak üzere; (5.23)

$$\alpha d^+(\lambda) + \beta d_1^+(\lambda) - \frac{1}{2i\lambda}\int_0^{\infty} S^+(t,\lambda)f(t)dt = 0$$

α ve β 'yı (5.22)' de yerine yazarsak

$\alpha = \dfrac{1}{d^+(\lambda)}\displaystyle\int_0^{\infty} S^+(t,\lambda)f(t)dt$, $\beta = 0$ olur.

$$y(x) = \frac{f^+(x,\lambda)}{d^+(\lambda)}\int_0^{\infty} g^+(x,\lambda)f(t)dt - \frac{1}{2i\lambda} f^+(x,\lambda)\int_x^{\infty} f(t)g^+(t,\lambda)dt + \frac{1}{2i\lambda} g^+(x,\lambda)\int_x^{\infty} f(t)f^+(t,\lambda)dt$$

$$y(x,\lambda)=\int_0^\infty G^+(x,t,\lambda)\,f(t)dt \tag{5.24}$$

açık üst düzlemi için Green fonksiyonudur. Burada;

$$G_1^+(x,t,\lambda)=\frac{S^+(t,\lambda)f^+(x,\lambda)}{d^+(\lambda)} \tag{5.25}$$

$$G_2^+(x,t,\lambda)=\begin{cases}0 & ;0\le t<x\\ -\dfrac{f^+(x,\lambda)g^+(t,\lambda)}{2i\lambda}+\dfrac{g^+(x,\lambda)f^+(t,\lambda)}{2i\lambda} & ;x\le t<\infty\end{cases} \tag{5.26}$$

$$G^+(x,t,\lambda)=G_1^+(x,t,\lambda)+G_2^+(x,t,\lambda) \tag{5.27}$$

şeklindedir.

Lemma 5.2.2.

Benzer olarak aynı işlemler açık alt düzlem içinde yapılabilir. Açık alt düzlem için Green fonksiyonu;

$$y(x,\lambda)=\int_0^\infty G^-(x,t,\lambda)\,f(t)dt, \qquad im\lambda\le 0$$ elde edilir.

Burada

$$G_1^-=\frac{f^-(x,\lambda)S^-(t,\lambda)}{d^-(\lambda)} \tag{5.28}$$

$$G_2^-=\begin{cases}0 & ;0\le t<x\\ -\dfrac{f^-(x,\lambda)g^-(t,\lambda)}{2i\lambda}+\dfrac{g^-(x,\lambda)f^-(t,\lambda)}{2i\lambda} & ;x\le t<\infty\end{cases} \tag{5.29}$$

$$G^-(x,t,\lambda)=G_1^-(x,t,\lambda)+G_2^-(x,t,\lambda) \tag{5.30}$$

Bu yüzden aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left|R(x,t,\lambda)\right| \leq \frac{c(x)\exp(-\left|x-t\right|\operatorname{Im}\lambda)}{\left|d(\lambda)\right|} \tag{5.31}$$

Burada $c(x) = c\exp\{x\sigma(0) + \sigma_1(0)\}$; $c > 0$

Teorem 5.2.3. $\lambda \in (-\infty, \infty)$ için;

$$\left\|R_\lambda^{\ +}(L)\right\| \geq \frac{C_\lambda}{\left|d^+(\lambda)\right|\sqrt{\operatorname{Im}\lambda}} \tag{5.32}$$

eşitsizliğini gerçekleyen $C_\lambda > 0$ sabiti bulunur. Bu eşitsizlik her bir λ için $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $|\lambda| \geq \delta$ bölgesinde gerçeklenir. Özel olarak λ resolvent cümlesinin elemanı olmak üzere $\lambda \to \lambda_0 \in (-\infty, \infty)$ ise bu durumda

$\left\|R_\lambda^{\ +}\right\| \to 0$ olur.

İspat:

Kabul edelim ki; (5.27) ifadesinde $G_2^{\ +}(x,t,\lambda)$=0 olsun, bu durumda

$$g_b(x) = \begin{cases} S^+(x,\lambda) & ;0 \leq x \leq b \\ 0 & ;b \leq x < \infty \end{cases} \tag{5.33}$$

olarak tanımlanırsa;

$$\int_0^\infty |g_b(x)|^2\,dx = \int_0^\infty \left|S^+(x,\lambda)\right|^2 dx < \infty$$

ve dolayısıyla; $g_b(x) \in L_2(0,\infty)$ olur.

$$(R_\lambda^{\ +}g_b)(x) = \int_0^\infty G_1^{\ +}(x,t,\lambda)g_b(t)dt = \int_0^b G_1^{\ +}(x,t,\lambda)S^{\pm}(t,\lambda)dt$$

olduğundan

$$(R_\lambda^{\ +}g_b)(x) = \int_0^b \frac{f^+(x,\lambda)}{d^+(\lambda)}\left|S^+(t,\lambda)\right|^2 dt = \frac{f^+(x,\lambda)}{d^+(\lambda)}\left\|g_b\right\|^2 \tag{5.34}$$

elde edilir. Burada,

$$f^{+}(x,\lambda) = e^{i\lambda x} + o(1)$$

$$\left|f^{+}(x,\lambda)\right| > \frac{1}{2} e^{-\operatorname{Im}\lambda x} \qquad |\lambda| \to \infty$$

Eşitsizlikleri yerlerine yazılırsa;

$$\int_0^b \left|f^{+}(x,\lambda)\right|^2 dx \geq \frac{1}{4}\int_0^b e^{-2x\operatorname{Im}\lambda} dx = -\frac{1}{8\operatorname{Im}\lambda x} e^{-2x\operatorname{Im}\lambda}\Big|_0^b = \frac{1}{8\operatorname{Im}\lambda x} e^{-2b\operatorname{Im}\lambda} \tag{5.35}$$

elde edilir.

$$\left\|R_\lambda^{+} g_b\right\|^2 \geq \frac{\left\|g_b\right\|^2}{\left|d^{+}(\lambda)\right|^2} \frac{1}{8\operatorname{Im}\lambda} e^{-2b\operatorname{Im}\lambda}$$

eşitsizliğinden;

$$C_\lambda = \frac{\sqrt{\left\|g_b{}^2\right\| e^{-b\operatorname{Im}\lambda}}}{2\sqrt{2}}$$ olmak üzere;

$$\left\|R_\lambda^{+}(L)\right\| \geq \frac{C_\lambda}{\left|d^{+}(\lambda)\right|\sqrt{\operatorname{Im}\lambda}} \quad \text{elde edilir.} \tag{5.36}$$

Teorem 5.2.4. $\lambda \in (-\infty,\infty)$ için;

$$\left\|R_\lambda^{-}(L)\right\| \geq \frac{C_\lambda}{\left|d^{-}(\lambda)\right|\sqrt{\operatorname{Im}\lambda}}$$

eşitsizliğini gerçekleyen $C_\lambda > 0$ sabiti bulunur. Bu eşitsizlik her bir λ için $\operatorname{Im}\lambda < 0$, $|\lambda| \geq \delta$ bölgesinde gerçeklenir. Özel olarak λ resolvent cümlesinin elemanı olmak üzere $\lambda \to \lambda_0 \in (-\infty,\infty)$ ise bu durumda

$\left\|R_\lambda^{-}\right\| \to 0$ olur.

İspat: Teorem 5.2.3'e benzer olarak yapılır

Tanım 5.2.5. L operatörünün tanım kümesinden alınan bir f fonksiyonu ve L operatörünün dualinden olan bir g fonksiyoneli için

$$(Lf, g) = (f, L^{*}g) \tag{5.37}$$

eşitliğini sağlanıyorsa bu durumda L^{*}'a L operatörünün adjointi denir.

Teorem 5.2.6. L operatörünün sürekli spektrumu

$$\sigma_c(L) = (0,\infty)$$

şeklindedir.

İspat:

$$(0,\infty) \subset \sigma_c(L)$$

olduğu açıktır.

$\lambda \in (0,\infty)$ için; $R_\lambda(L)$ vardır ve sınırsız olması Teorem 5.2.4 'den aşikardır. $\forall\lambda \in (0,\infty)$ için;

$$\overline{D(R_\lambda(L))} = L_2(0,\infty) \tag{5.38}$$

olduğu gösterilirse teorem ispat edilmiş olur. (5.38) 'i ispat etmek için

$$\overline{R(L-\lambda I)} = L_2(0,\infty) \tag{5.39}$$

olduğu gösterilmelidir.

$$L_2(0,\infty) = \overline{R(L-\lambda I)} \oplus d(L^* - \lambda I)$$

şeklindedir.

$d(L^* - \lambda I)$ cümlesi $L^* - \lambda I$ operatörünün çekirdeğidir. L^* ise operatörünün adjointidir. (5.39) eşitliğini ispat etmek için aşağıdaki sınır probleminin ancak $y \equiv 0$ çözümünün olduğunu göstermek gerekir.

$$\begin{aligned} &-y'' + \overline{q(x)}y = \lambda^2 y \\ &y'(0) - a\lambda y(0) = 0 \end{aligned} \tag{5.40}$$

(5.40) ile gösterilen operatörün öz değerleri olmadığından

$$d(L^* - \lambda I) = \{0\}$$

olur. O halde ,

$$\sigma_c(L) = (0,\infty)$$

olduğunu gösterir.

Teorem 5.2.7. $R^* = [0,\infty)$ olmak üzere; L operatörünün spektral tekilliklerinin cümlesi

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda : \lambda \in R^*, d^+(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda : \lambda \in R^*, d^-(\lambda) = 0\}$$ şeklindedir.

İspat:

L operatörünün $d^+(\lambda)$, $d^-(\lambda)$ fonksiyonlarının reel eksendeki sıfırlarının resolventinin çekirdeğinin kutupları olduğu aşikardır. Bu sıfırları sürekli spektrum üzerindedir. Kabul eldim ki; $d^+(\lambda) = 0$ ve $\operatorname{Im}\lambda = 0$ olsun. Bu durumda (3.1) denkleminin keyfi bir $y(x,\lambda)$ çözümü

$$y(x,\lambda) = c_1 f^+(x,\lambda) + c_2 f^-(x,\lambda)\,; \ \operatorname{Im}\lambda = 0$$

$$y(x,\lambda) = c_1 e^{\operatorname{Im}\lambda x} + c_2 e^{-\operatorname{Im}\lambda x} + o(1), \quad x \to \infty$$

şeklindedir.

$y(x,\lambda)$ çözümü $L_2(0,\infty)$ uzayında olması için; gerek ve yeter şart $c_1 = c_2 = 0$ olmalıdır. Bu λ 'nın öz değeri olmamaktadır. Aynı zamanda resolventin çekirdeğinin kutbu olduğundan resolvent cümlesine ait değildir. Bu tip noktalara spektral tekillikler de denilmektedir. Burada λ L operatörünün spektral tekilliklerine aittir.

$d^-(\lambda) = 0$ ve $\operatorname{Im}\lambda = 0$ olması durumunda da benzer ispat yapılabilir.

Sonuç:

$$\sigma_c(L) = (0,\infty)$$

$$\sigma_d(L) = \{\lambda : \lambda \in C_+, d^+(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda : \lambda \in C_-, d^-(\lambda) = 0\}$$

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda : \lambda \in R^*, d^+(\lambda) = 0\} \cup \{\lambda : \lambda \in R^*, d^-(\lambda) = 0\}$$

KAYNAKLAR

AGRANOVICH, Z.S. , MARCHENKO ,V.A. 1964. The Inverse Problem in scattering theory, NewYork and London

AKHIEZER, N.I. ,GLAZMAN, I.M. 1961. Theory of Linear Operators in Hilbert Space.Volume 1, Frederic Ungar Publishing Co, New -York . Translated from the Russien by M. Nestell, Southern Missiona Collage.

BAIRAMAOV, E., ÇAKAR, Ö. AND KRALL, A.M. 1999(a). Spectrum and Spectral singularities of a Quadratic Pencil of a Schrödinger Operators with a genaral boundary condition. Journal of Differantial Equations.151; 252-267

BAIRAMAOV,E., ÇAKAR, Ö. AND KRALL, A.M. 1999(b). Eigenfunction expansion for a Quadratic Pencil of a Schrödinger Operators with spectral singularities .Journal of Differantial Equations, 151; 268-289.

BAIRAMAOV, E., ÇAKAR, Ö., ÇELEBİ, A.O. 1997. Quadratic Pencil of a Schrödinger Operators with spectral singularities: Discrete spectrum and a Prencipal functions. Journal Of Mathematical Analiysis and Aplications, 216; 303-320

BEREZANSKI, Y.M. 1968. Expansion in eigenfunctions of selfadjoint operators. AMS, Providence, R.I.

GASYMOV, M.G.1968. Expansion in terms of the solutions of scaretting theory problem for the non-selfadjoint Schrödinger equations. Sov. Math. Dokl. 9, 390-393

GASYMOV, M.G. , MAKSUDOV, F.G. 1972. The principal part of the resolvent of non-selfadjoint operators in neighbourhood of spectral singularities. Functional Anlysis and its Aplications. 6. 185-192.

HRUSCEV , S.V. 1984. Spectral Singularities of Dissipative Schrödinger operator with rapidly decreasing potential. Indiana Univ.Math. Jour . , 33, 313-338.

LYANTSE, V.E. On a differantial operator with spectral singularites,
I . Mat .Sbornik . 1964, 64(106), 4, P.521-561
II. Mat .Sbornik .1964, 65(107), 1, P.47-103(Russian)

LYANTSE , V.E .1966. Expansion in principial function for an operator with the spectral singularities
I. Revue .Roum de .Math. pures et Appl. XI ,8,P.921-950
II. Revue . Roum .de.Math . puers et Appl. XI, 10, P.1187-1224

MARCHENKO, V.A. 1977. Scattering theory of Sturm-Liouville operators and its aplications. Naukovo Dumka, Kiev, (Russian).

MURSALOV, R.S. 1991. The Scattering Theory of the Sturm-Liouville operator with spectral parameter in the boundary conditions. Ph.D tesis. Baku. (Russian).

NAIMARK, M.A. 1954. Investigation of the spectrum and expansion in eigenfunctions of nonselfadjoint differential operator of 2nd order on the half-axis.Trudy Moskov Mat. Obshch. 181-270. (Russian).

NAIMARK, M.A. 1969. Linear differential operators. II Ungar, New York,

PAVLOV, B.S. 1967. The non-self adjoint Schrödinger operator in “ Topics in Mathematical and Physics’’. Consultants Bureau, NewYork. Vol.1, pp.87-114

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Kahramanmaraş'ta doğdum. İlköğrenimimi ve ortaöğrenimimi Kahramanmaraş'ta tamamladım.1999 'da Süleyman Demirel Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandım. Buradan 2. dönemde Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi'ne yatay geçiş yaptım. 2003 yılında mezun oldum. 2004 yılından girmiş olduğum Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde yüksek lisans öğrencisi olarak eğitimime devam etmekteyim.