T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KUANTUM MATRİS GRUPLARI VE h DEFORMASYONU
YÜKSEK LİSANS TEZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kerem DEMİR

Matematik Anabilim Dalı
Matematik Programı

Tez Danışmanı: Yard.Doç.Dr. Nebi ÖNDER

Aralık 2009

Kerem DEMİR Tarafından hazırlanan KUANTUM MATRİS GRUPLARI VE h DEFORMASYONU adlı bu Tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylıyorum.

Yard.Doç.Dr. Nebi ÖNDER

Tez Yöneticisi

Bu Çalışma,jurimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Yard.Doç.Dr. Nebi ÖNDER(Danışman)

Üye: Yard.Doç.Dr. Ahmet BAKKALOĞLU

Üye: Yard.Doç.Dr.Funda H.SEZGİN(MSGSU İstatistik)

Üye: Yard.Doç.Dr.Sezai MAKAS

Üye: Yard.Doç.Dr.Semra ERPOLAT(İstatistik)

İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana yol gösteren ve yoğun iş temposuna rağmen istediğim her an bilimsel, akademik ve manevi anlamda benden desteklerini esirgemeyen Sayın Yardımcı Doçent Dr. Salih ÇELİK ve Sayın Yardımcı Doçent Dr. Nebi ÖNDER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca yazılması konusunda bana yardımcı olan sevgili meslektaşım Erdoğan GÜLER'e şükranlarımı sunarım.

Aralık 2009 Kerem DEMİR

QUANTUM MATRİX GROUPS AND h DEFORMATİON

(M.Sc.Thesis)

Kerem DEMİR

MIMAR SINAN FINE ARTS UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

December 2009

ABSTRACT

$GL(n, \boldsymbol{C})$General linear matrix group considers two different deformations. One of them is a deformation and the other one is h deformation. These quantum groups affect on xy=qyx relations with q plane and xy-yx=hy^2 relations with h plane. $GL(n, \boldsymbol{C})$ Quantum Deformation of general linear matrix group is shown wi $th\ GL_q(n, \boldsymbol{C})$. Features of quantum groups have been researched in this study. How the conventional matrix groups are deformed have been touched on and some of the quantum features T' matrix belonging to obtained $GL_q(2, \boldsymbol{C})$ group has been illustrated. By scrutinizing $T' \in GL_q(2, \boldsymbol{C})$matrix commutation relations between the components of the matrix have been found out. New formulas related to quantum determinant of this quantum have been calculated. Also, adverse of quantum matrix has been researched. It is seen that the deformation parameter of $(T')^{-1}$ matrix is q^{-1} and the structure of $GL_q(2, \boldsymbol{C})$ quantum group has been researched. It is seen that distinctively selected R_q matrix provides $R_q T_1' T_2' = T_2' T_1' R_q$ equation and conventional communication relations. Acquiring a new h deformation from the obtained $GL(n, \boldsymbol{C})$ q deformation is among the aims of the study. It deformation of $GL(2, \boldsymbol{C})$ has been obtained by using a singular limit of a transformation from a deformation of $GL(2, \boldsymbol{C})$. Also, h deformation plane which provides xy-yx=hy^2relation for components and consists of X vectors. $T' = gT g^{-1}$ transformation of T' matrix belonging to $GL(2, \boldsymbol{C})$ and commutation relations between the elements of $T \in GL_h(2, \boldsymbol{C})$ matrix have been found and arranged for q$\rightarrow 1$ limit. Also, the determinant of $T \in GL_h(2, \boldsymbol{C})$ matrix and adverse formulas have been calculated. And also considering Rq Matrix, Rh matrix has been calculated for q$\rightarrow 1$ limit.

KUANTUM MATRİS GRUPLARI VE h DEFORMASYONU

(Yüksek Lisans Tezi)

Kerem DEMİR

MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Aralık 2009

ÖZET

$GL(n, \boldsymbol{C})$ genel lineer matris grubu iki farklı deformasyon kabul eder. Bunlardan birisi q deformasyonu diğeri de h deformasyonudur. Bu kuantum grupları xy=qyx bağıntısı ile q düzlemi ve xy-yx=hy^2 bağıntısı ile de h düzlemi üzerine etki eder. $GL(n, \boldsymbol{C})$ Genel lineer matris grubunun kuantum deformasyonu $GL_q(n, \boldsymbol{C})$ ile gösterilir. Bu çalışmada $GL_q(2, \boldsymbol{C})$ kuantum grubunun özellikleri incelenmiştir. Klasik matris gruplarının deformasyonlarının nasıl yapıldığına değinilmiş ve elde edilen $GL_q(2, \boldsymbol{C})$ grubuna ait bir T' matrisinin Bazı kuantum özellikleri anlatılmıştır. Ayrıca $T' \in GL_q(2, \boldsymbol{C})$ matrisi incelenerek bu matrisin elemanları arasındaki komutasyon bağıntıları bulunmuştur. Bu matrisin kuantum determinantına ait yeni formüller hesaplanmıştır. Ayrıca kuantum matrisinin tersi incelenmiştir.$(T')^{-1}$ Matrisinin deformasyon parametresinin q^{-1} olduğu görülmüş ve $GL_q(2, \boldsymbol{C})$ kuantum grubunun bilinen anlamda grup yapısı incelenmiştir. Özel olarak seçilmiş R_q matrisinin $R_q T_1' T_2' = T_2' T_1' R_q$ Eşitliği ile bilinen komutasyon bağıntılarını sağladığı görülmüştür. Elde edilen $GL(n, \boldsymbol{C})$ nin q deformasyonunda yeni bir h deformasyonu elde etmek çalışmanın amaçlarındandır. $GL(2, \boldsymbol{C})$ nin q deformasyonundan bir transformasyonun singüler limiti kullanılarak $GL(2, \boldsymbol{C})$ nin h deformasyonu elde edilmiştir. ayrıca bileşenlerin xy-yx=hy^2 bağıntılarını sağlayan X vektörlerinin oluşturduğu h deforme düzlem tanıtılmıştır. $GL_q(2, \boldsymbol{C})$ Grubuna ait T' matrisinin $T' = gT\,g^{-1}$ dönüşümü ile $T \in GL_h(2, \boldsymbol{C})$ matrisinin elemanları arasında sağlanan komutasyon bağıntıları bulunmuş ve q$\rightarrow 1$ limiti için yeniden düzenlenmiştir. Ayrıca $T \in GL_h(2, \boldsymbol{C})$ matrisinin determinantı ve tersine ait yeni formüller hesaplanmıştır. Ayrıca R_q matrisinden

yola çıkarak R_h matrisi tekrar q$\to 1$ limiti için yeniden hesaplanmıştır. Bu çalışmada $GL_q(2)$ nin bir alt grubu olan $SU_q(2)$ Üniter kuantum matris grupları tanıtılmıştır.

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{GL(n,C)}$: Genel Lineer Matris Grubu

$\mathbf{GL_q(n,C)}$: Genel Lineer Matris Grubunun Kuantum Deformasyonu

$\mathbf{GL_h(n,C)}$: Genel Lineer Matris Grubunun h Deformasyonu

$\mathbf{SL(n,C)}$: Özel Lineer Matris Grubu

M_n(K) : Elemanları K cisminden alınan Matris Grubu

Dq (T') : T' Kuantum Matrisinin Determinantı

Rq (2,0) : İki Boyutlu Kuantum Düzlem

$SU_q(2,0)$: İki Boyutlu Üniter Matris Grubu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Kuantum grubu terimi ilk kez V.Drinfeld*[3]* tarafından kullanılmıştır. $GL(2,\boldsymbol{C})$ grubu iki farklı deformasyon kabul eder. Bunlardan birisi Drinfeld*[3]in* q deformasyonu diğeri de Jordanian [2,4,5,6] 'ın *h*- deformasyonudur. Kuantum grupları konformal alan teorisi, lineer olmayan integre edilebilir modeller ve düğüm teorisi gibi konularda uygulama alanı bulmuştur. Bu yapılar, elemanları komutatif olmayan ve belirli komutasyon bağıntılarını sağlayan matris grupları olarak düşünülebilir.

Bu çalışmada aşağıdaki sıra izlenmiştir.

Bölüm 1'de temel kavramlardan bahsedilmiş ve klasik matris grupları hakkında bilgiler verilmiştir.

Bölüm 2'de $GL(2)$'nin q deformasyonundan bahsedilmiş ve bir $T' \in GL_q(2,\boldsymbol{C})$ matrisinin bazı kuantum özellikleri bulunmuştur.

Bölüm'3 de ise $GL(2)$'nin q deformasyonundan bir transformasyonun singüler limiti kullanılarak $GL(2)$'nin *h* deformasyonu elde edilmiştir.

Çalışma boyunca üslü harfler q deforme objelerini gösterecektir.

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Bölüm 2 ve Bölüm 3 de sıkça kullanılacak genel kavramlar açıklanacaktır.

1.1: Tanım

A boş olmayan bir küme ve $(K, +, \cdot)$ bir cisim olsun.

Aşağıdaki özellikleri sağlayan *A* kümesine *K* cismi üzerinde bir vektör uzayı denir.

A. Her $u, v \in A$ için $(u,v) \rightarrow u \oplus v$ ile gösterilen ve vektör toplamı denen,

$A \, x \, A \to A$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri göstersin;

1. Her $u, v \in A$ için $u \oplus v = v \oplus u$ (değişme)
2. Her $u, v, w \in A$ için $u \oplus (v \oplus w) = (u \oplus v) \oplus w$ (birleşme)
3. Her $u \in A$ için $u \oplus O_v = O_v \oplus u = u$ olacak şekilde bir $O_v \in A$ vardır (O_v tektir ve O_v'ye sıfır vektör denir)
4. He $u \in A$ için $u \oplus u' = u' \oplus u = O_v$ olacak şekilde bir $u' \in A$ vardır. (u' elemanı tek olup, $(-u)$ ile gösterilir ve u'nun negatifi olarak adlandırılır.)

B. Her $a \in K$ ve her $v \in A$ için $(a, v) \to a \odot v$ ile gösterilen, skalarle çarpım diye adlandırılan $K \, x \, A \to A$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri göstersin;

5. Her $a \in K$ ve her $u, v \in A$ için $a \odot (u \oplus v) = (a \odot u) \oplus (a \odot v)$
6. Her $a, b \in K$ ve her $u \in A$ için $(a \oplus b) \odot u = (a \odot u) \oplus (b \odot u)$
7. Her $a, b \in K$ ve her $u \in A$ için $a \odot (b \odot u) = (a \odot b) \odot u$

8. 1_k, K cisminin birimi olmak üzere, Her $u \in A$ için $1_k \odot u = u$'dur.

A, K cismi üzerinde bir vektör uzayı ise, A'nın elemanlarına vektör, K'nın elemanlarına skaler denir.

$\mathcal{R}$ Reel sayılar cismi üzerindeki bir vektör uzayına reel vektör uzayı, C kompleks sayılar cismi üzerindeki bir vektör uzayına da kompleks vektör uzayı denir.

1.2: Tanım

C, Kompleks sayılar cismi olmak üzere, A, C üzerinde bir vektör uzayı olsun.

Eğer her $a, b, c \in A$ ve $\lambda \in$ **C** için;

$$a \cdot (b+c) = ab + ac \qquad (a+b) \cdot c = ac + bc$$

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$$

olacak şekilde bir $(a,b) \to ab$ çarpma tasviri mevcut ise A'ya bir **C** cebiri denir.

Eğer her $a, b, c \in A$ için $(ab)c = a(bc)$ ise A ya asosyatif cebir ve eğer $ab = ba$ oluyorsa A'ya komutatif cebir denir.

Eğer $A \neq \emptyset$ olmak üzere, her $a \in A$ için;

$$ae = a = ea$$

olacak şekilde bir tek $e \in A$ elemanı varsa A'ya bir birim elemanlı cebir denir.

$M_n(K)$ ile elemanları K cisminden alınan nxn tipindeki matrislerin cümlesini gösterelim. Aşikar olarak $M_n(K)$ bir vektör uzayıdır. Üstelik her $A \in M_n(K)$ için tanımlanan cebir şartları sağlandığından $M_n(K)$ bir cebir ve çarpımı asosyatif olduğundan bir asosyatif cebirdir. Üstelik nxn tipindeki I_n birim matrisi de $M_n(K)$ cebirine ait olduğundan $M_n(K)$, bir unital cebirdir.

1.3: Tanım

1.3 $K \in \{R, C\}$ olmak üzere $M_n(K)$ cebirindeki invertibıl matrislerin genel lineer grubunu $GL(n, \boldsymbol{K})$ ile gösterelim. Bu durumda $GL(n, \boldsymbol{K})$ genel lineer grubu, $M_n(K)$ uzayının bir alt cümlesidir.

$GL(2, \boldsymbol{R})$, $M_2(\boldsymbol{R})$ vektör uzayındaki invertibil elemanların cümlesidir. O halde;

$$GL(2, \boldsymbol{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a, b, c, d \in \boldsymbol{R}; ad - bc \neq 0 \right\}$$

olur. Sonuç olarak;

$GL(n, \boldsymbol{R}) = \{A \in M_n(\boldsymbol{R}), DetA \neq 0\}$

$$GL(n,\boldsymbol{C}) = \{A \in M_n(\boldsymbol{C}), DetA \neq 0\}$$

yazılabilir.

1.4: Tanım

$GL(n,\boldsymbol{K})$ grubundaki determinantı 1 olan matrislerin grubuna özel lineer grup denir ve $SL(n,\boldsymbol{K})$ ile gösterilir.

$$SL(n,\boldsymbol{K}) = \{A \in GL(n,\boldsymbol{K}), DetA = 1\}$$

$A \in GL(n,\boldsymbol{C})$ olmak üzere;

$$A^{+} = (A^{*})^{T}\ ve\ A \cdot A^{+} = I = A^{+} \cdot A$$

şartını sağlayan matrislere uniter matris denir ve bu matrislerin grubu $U(n)$ ile gösterilir. $U(n)$ grubunda determinantı 1 olan matrisler özel uniter grup adını alır.

BÖLÜM 2

$GL_q(2)$ Kuantum Grubu

Bir düzlemin kuantum deformasyonuna kuantum düzlem denir ve $R_q(2,0)$ ile gösterilir. $X' \in R_q(2,0)$ ve X' nün bileşenleri $X' = (x', y')^t$ olmak üzere, bu bileşenler;

$$x'y' = qy'x' \tag{2.1}$$

bağıntısını sağlar.

Bu kuantum düzlemin, dual kuantum düzlemi de $R_q(0,2)$ ile gösterilir. $Y' \in R_q(0,2)$ ve Y' nün bileşenleri $Y' = (\theta', \varphi')^t$ olmak üzere, bu bileşenler;

$$\begin{gathered} \theta'^2 = 0 = \varphi'^2 \\ \theta'\varphi' + q^{-1}\varphi'\theta' = 0 \end{gathered} \qquad (2,2$$

bağıntılarını sağlar.

Buna göre bir $T' = (T'_{ij}) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in GL(2, \boldsymbol{C})$ matrisinin deformasyonu yapılırken;

$$\tilde{X} = T'X' \text{ ve } \tilde{Y} = T'X' \qquad (2,3)$$

olmak üzere T' nün matris elemanlarıyla X' ve Y' vektörlerinin bileşenlerinin komutatif olduğu kabul edilir.

(2,3) ün birinci denkleminden;

$$\tilde{x} = a'x' + b'y' \qquad \tilde{y} = c'x' + d'y'$$

$$\tilde{x}\tilde{y} = q\tilde{y}\tilde{x}$$

$x'\ ve\ y'$ ile matris elemanlarının komutatif olduğu kabul edildiğinden;

$$\tilde{x}\tilde{y} = a'c'x'^2 + a'd'x'y' + b'c'y'x' + b'd'y'^2$$

$$\tilde{y}\tilde{x} = c'a'x'^2 + d'a'y'x' + c'b'x'y' + d'b'y'^2$$

ifadesinden;

$$a'c'x'^2 + a'd'x'y' + b'c'y'x' + b'd'y'^2 =$$

$$q(c'a'x'^2 + d'a'y'x' + c'b'x'y' + d'b'y'^2)$$

olur ki karşılıklı eşitlemelerden;

$$a'c' = qc'a' \qquad\qquad b'd' = qd'b'$$

olduğu görülür. Benzer hesaplamalarla;

$$a'd'x'y' + q^{-1}b'c'x'y' = q(q^{-1}d'a'x'y' + c'b'x'y')$$

$$a'd' + q^{-1}b'c' = d'a' + qc'b'$$

$$a'd' = d'a' + (q - q^{-1})b'c'$$

$$a'd' = d'a' + rb'c' \qquad\qquad r = q - q^{-1}$$

elde edilir.

(2.3) ün diğer denklemini kullanarak benzer hesaplamalar yapılır. Şöyle ki;

$$\tilde{\theta} = a'\theta' + b'\varphi' \qquad\qquad \tilde{\varphi} = c'\theta' + d'\varphi'$$

olmak üzere;

$$\tilde{\theta}\tilde{\varphi} + q^{-1}\tilde{\varphi}\tilde{\theta} = 0$$

$$(a'\theta' + b'\varphi') \cdot (c'\theta' + d'\varphi') + q^{-1}(c'\theta' + d'\varphi') \cdot (a'\theta' + b'\varphi') = 0$$

$$a'c'\theta'^2 + a'd'\theta'\varphi' + b'c'\varphi'\theta' + b'd'\varphi'^2 + q^{-1}(c'a'\theta'^2 + c'b'\theta'\varphi' + d'a'\varphi'\theta' + d'b'\varphi'^2) = 0$$

$$a'd'\theta'\varphi' + b'c'\varphi'\theta' + q^{-1}(c'b'\theta'\varphi' + d'a'\varphi'\theta') = 0$$

$$a'd'\theta'\varphi' - qb'c'\theta'\varphi' + q^{-1}c'b'\theta'\varphi' + q^{-1}qd'a'\theta'\varphi' = 0$$

$$a'd' - qb'c' + q^{-1}c'b' - d'a' = 0$$

$$a'd' = d'a' + (q - q^{-1})b'c'$$

olur.

Sonuç olarak bir $T' \in GL_q(2, \boldsymbol{C})$ matrisinin matris elemanları arasında sağlanan komutasyon bağıntıları;

$$T = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

olmak üzere;

$$a'b' = qb'a' \qquad\qquad a'c' = qc'a'$$

$$b'd' = qd'b' \qquad\qquad c'd' = qd'c' \qquad\qquad (2,4)$$

$$b'c' = c'b' \qquad\qquad a'd' - qd'a' = rb'c'$$

şeklindedir.

Şimdi elemanları (2.4) bağıntılarını sağlayan T' kuantum matrisinin kuantum determinatlarını bulalım. Eğer T' nün a' elemanının tersi varsa, bu T' matrisinin bir ayrışımı, Crout redaksiyonu kullanılarak,

$$T' = \begin{bmatrix} a' & 0 \\ c' & d' - c'(a')^{-1}b' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & (a')^{-1}b' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Buna göre; ikinci matrisin determinantı 1 olduğundan, T' kuantum matrisinin determinantı (2,4) bağıntıları yardımıyla;

$$Dq(T') = a'(d' - c'(a')^{-1}b')$$

$$= a'd' - qc'b' \qquad (2,5)$$

$$= d'a' + (q - q^{-1})bc - qc'b'$$

$$= d'a' - q^{-1}c'b' \qquad (2,6)$$

şeklinde bulunur.

<u>Tanım:</u> Sabit q- parametresi ile (2,4) şeklinde q- komutasyonu bağıntılarını sağlayan ve kuantum determinantı sıfırdan farklı olan bütün T' matrislerinin oluşturduğu grup $GL_q(2, C)$ ile gösterilir. Bu gruba, kuantum grubu ve T' matrisine de q parametreli (kuantum) matrisi denir.

Not olarak, her *i, j* =1,2 için;

$$T'_{ij} \cdot Dq(T') = Dq(T') \cdot T'_{ij} \tag{2,7}$$

dir. Yani $Dq(T')$, T'matrisinin tüm elemanları ile komutatiftir. Bu (2,4) bağıntıları kullanılarak bulunabilir.

Şöyle ki T'_{ij} matrisinde $i = j = 1$ alarak;

$a' \cdot Dq(T') = Dq(T') \cdot a'$ olduğunu gösterelim. (2,5) ve (2,6) eşitliğinden;

$$a' \cdot (d'a' - q^{-1}c'b') = (a'd' - qc'b') \cdot a'$$

$$a'd'a' - q^{-1}a'c'b' = a'd'a' - qc'b'a'$$

$$q^{-1}a'c'b' = qc'b'a'$$

$$c'a'b' = qc'b'a'$$

$$qc'b'a' = qc'b'a'$$

olur ki bu eşitliği T' matrisinin diğer matris elemanlarıyla da kolaylıkla bulabiliriz

Şimdi $T' \in GL_q(2, C)$olmak üzere, T' matrisinin kuantum tersini bulalım.

$$T' \cdot (T')^{-1} = I = (T')^{-1} \cdot T'$$

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' & y' \\ z' & t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a'x' + b'z' = 1 \qquad a'y' + b't' = 0$$

$$c'x' + d'z' = 0 \qquad c'y' + d't' = 1$$

olur.

$$c'a'x' + c'b'z' = c' \qquad\qquad qc'a'x' + qc'b'z' = qc'$$

$$a'c'x' + a'd'z' = 0 \qquad\qquad qc'a'x' + a'd'z' = 0$$

$$qc'b'z' - a'd'z' = qc'$$

$$(qc'b' - a'd')z' = qc'$$

$$z = \frac{qc\prime}{-Dq(T\prime)}$$

$$z = -qc[Dq(T')]^{-1}$$

olur ki ters matrisin diğer elemanları benzer işlemlerle bulunduğunda ters matris.

$$(T')^{-1} = [Dq(T')]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} d' & -q^{-1} \\ -qc' & a' \end{bmatrix} \qquad (2,8)$$

şeklinde bulunur. O halde $(T')^{-1}$ ters matrisinin deformasyon parametresi q^{-1} olup, $(T')^{-1} \in GL_{q^{-1}}(2, \boldsymbol{C})$'dir. Dolayısıyla $GL_q(2, \boldsymbol{C})$ kuantum grubu bilinen manada grup değildir, $GL_q(2, \boldsymbol{C})$ kuantum grubu, $Dq(T') = 1$ seçmekle $SL_q(2, \boldsymbol{C})$ grubuna indirgenir. $SL_q(2, \boldsymbol{C})$ kuantum grup yapısına sahiptir.

Not olarak özel seçilmiş;

$$Rq = \begin{bmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{bmatrix} \qquad r = q - q^{-1} \tag{2,9}$$

olmak üzere;

$$RqT_1{}'T_2{}' = T_2{}'T_1{}'Rq \tag{2,10}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada;

$$T_1' = T' \otimes I = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a' & 0 & b' & 0 \\ 0 & a' & 0 & b' \\ c' & 0 & d' & 0 \\ 0 & c' & 0 & d' \end{bmatrix} \tag{2,11a}$$

$$T_2' = I \otimes T' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a' & b' & 0 & 0 \\ c' & d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' & d' \end{bmatrix} \tag{2,11b}$$

dir. Buna göre;

$$T_1'T_2' = \begin{bmatrix} a'^2 & a'b' & b'a' & b'^2 \\ a'c' & a'd' & b'c' & b'd' \\ c'a' & c'b' & d'a' & d'b' \\ c'^2 & c'd' & d'c' & d'^2 \end{bmatrix} \qquad \text{ve} \qquad T_2'T_1' = \begin{bmatrix} a'^2 & b'a' & a'b' & b'^2 \\ c'a' & d'a' & c'b' & d'b' \\ a'c' & b'c' & a'd' & b'd' \\ c'^2 & d'c' & c'd' & d'^2 \end{bmatrix}$$

$$RqT_2'T_1' = \begin{bmatrix} q^{-1}a'^2 & q^{-1}a'b' & q^{-1}a'b' & q^{-1}b'^2 \\ a'c' - rc'a' & a'd' - rc'b' & b'c' - rd'a' & b'd' - rd'b' \\ c'a' & c'b' & d'a' & d'b' \\ q^{-1}c'^2 & q^{-1}c'd' & q^{-1}d'c' & q^{-1}d'^2 \end{bmatrix}$$

$$T_2'T_1'Rq = \begin{bmatrix} q^{-1}a'^2 & b'a' & a'b' - rb'a' & q^{-1}b'^2 \\ q^{-1}c'a' & d'a' & c'b' - rd'a' & q^{-1}d'b' \\ q^{-1}a'c' & b'c' & a'd' - rb'c' & q^{-1}b'd' \\ q^{-1}c'^2 & d'c' & c'd' - rd'c' & q^{-1}d'^2 \end{bmatrix}$$

Olup, Bu eşitliklerin (2,4) bağıntısını sağladığı görülür.

BÖLÜM 3

$GL_q(2)$ nin h-deformasyonu

3.1. $R_h(2,0)$ h Deforme Düzlemi

Bu kısımda Bölüm 2'de tanıtılan kuantum düzlemler kullanılacak, $g = \begin{bmatrix} 1 & \frac{h}{q-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ singüler transformasyonu ile $q \to 1$ limitinde h-deforme düzlemler elde edilecektir.

$$X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \in Rq(2,0)$$

$Y' = \begin{pmatrix} \theta' \\ \varphi' \end{pmatrix} \in Rq(0,2)$ olmak üzere $q \to 1$ limitinde singüler;

$$g = \begin{bmatrix} 1 & \frac{h}{q-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

matrisiyle,

$$X' = gX\,,\; Y' = gY \quad (3.1.2)$$

eşitliklerini tanımlayalım. Bu durumda yeni

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \text{ve} \qquad Y = \begin{pmatrix} \theta \\ \varphi \end{pmatrix}$$

vektörlerinin bileşenleri,

$$x' = x + \frac{h}{q-1}y \qquad y' = y \quad (3.1.3)$$

$$\theta' = \theta + \frac{h}{q-1}\varphi \qquad \varphi' = \varphi \quad (3.1.4)$$

olup, aşağıda yazılan bağıntıları sağlar.

$$xy = qyx + hy^2 \tag{3.1.5}$$

$$\theta^2 = h\varphi\theta, \qquad \varphi^2 = 0, \qquad \theta\varphi + q^{-1}\varphi\theta = 0 \tag{3.1.6}$$

Örneğin;

$$x'y' = (x + \tfrac{h}{q-1}y) \cdot y \tag{3.1.7a}$$

$$y'x' = y \cdot (x + \tfrac{h}{q-1}y) \tag{3.1.7b}$$

olup,

$x'y' = qy'x'$ olduğundan

$$\left(x + \tfrac{h}{q-1}y\right) \cdot y = qy\left(x + \tfrac{h}{q-1}y\right)$$

$$xy + \tfrac{h}{q-1}y^2 = qyx + q\tfrac{h}{q-1}y^2$$

$$xy = qyx + q\tfrac{h}{q-1}y^2 - \tfrac{h}{q-1}y^2$$

$$xy = qyx + \tfrac{h}{q-1}y^2(q-1)$$

$$xy = qyx + hy^2$$

çıkar ki bu (3.1.5) bağıntısını verir.

$\theta'\varphi' + q^{-1}\varphi'\theta' = 0$ olduğundan

$$\left(\theta + \tfrac{h}{q-1}\varphi\right) \cdot \varphi + q^{-1}\varphi \cdot \left(\theta + \tfrac{h}{q-1}\varphi\right) =$$

$\theta\varphi + \frac{h}{q-1}\varphi^2 + q^{-1}\varphi\theta + h\frac{q^{-1}}{q-1}\varphi^2 = 0$ olup,

$\theta\varphi + q^{-1}\varphi\theta = 0$ çıkar ki bu da (3.1.6)'daki bağıntıları sağlar. Şimdi $q \to 1$ limitinde;

$$xy = yx + hy^2 \tag{3.1.8}$$

$$\theta\varphi + \varphi\theta = 0, \qquad \varphi^2 = 0, \qquad \theta^2 = h\varphi\theta \tag{3.1.9}$$

bağıntılarını elde ederiz.

3.1.1 Tanım: Bileşenleri $xy = yx + hy^2$ bağıntılarını sağlayan $X = \binom{x}{y}$ vektörlerinin oluşturduğu düzleme h- deforme düzlemi denir ve $R_h(2,0)$ ile gösterilir. Benzer şekilde bileşenleri

$\theta\varphi + \varphi\theta = 0$, $\varphi^2 = 0$, $\theta^2 = h\varphi\theta$ bağıntılarını sağlayan $Y = \binom{\theta}{\varphi}$ vektörlerinin oluşturduğu (dual) düzleme de h- deforme (dual) düzlem denir ve $R_h(0,2)$ ile gösterilir.

3.2. h- Deformasyonu

$GL_q(2)$ üzerindeki (3.1.2)'ye tekabül eden transformasyon

$$T' = gTg^{-1} \tag{3.2.1}$$

olsun. T' nün matris elemanları

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{h}{q-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{h}{q-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

İşleminden

$$\begin{aligned} a' &= a + \frac{h}{q-1}c \quad & b' &= b + \frac{h}{q-1}(d-a) - \frac{h^2}{(q-1)^2}c \\ c' &= c & d' &= d - \frac{h}{q-1}c \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

şeklinde bulunur. Bulunan bu ifadeleri (2.4) gereğince düzenleyelim.

$$\left.\begin{aligned} a'b' &= ab + \frac{h}{q-1}a(d-a) - \frac{h^2}{(q-1)^2}ac + \frac{h}{q-1}cb + \frac{h^2}{(q-1)^2}c(d-a) - \frac{h^3}{(q-1)^3}c^2 \\ b'a' &= ba + \frac{h}{q-1}(d-a)a - \frac{h^2}{(q-1)^2}ca + \frac{h}{q-1}bc + \frac{h^2}{(q-1)^2}(d-a)c - \frac{h^3}{(q-1)^3}c^2 \end{aligned}\right\}$$

(3.2.3a)

$$\left.\begin{aligned} a'c' &= ac + \frac{h}{q-1}c^2 \\ c'a' &= ca + \frac{h}{q-1}c^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.2.3b}$$

$$\left.\begin{aligned} a'd' &= ad - \frac{h}{q-1}ac + \frac{h}{q-1}cd - \frac{h^2}{(q-1)^2}c^2 \\ d'a' &= da - \frac{h}{q-1}ca + \frac{h}{q-1}dc - \frac{h^2}{(q-1)^2}c^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.2.3c}$$

$$\left.\begin{aligned} b'c' &= bc + \frac{h}{q-1}(d-a)c - \frac{h^2}{(q-1)^2}c^2 \\ c'b' &= cb + \frac{h}{q-1}c(d-a) - \frac{h^2}{(q-1)^2}c^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.2.3d}$$

$$\left.\begin{aligned} b'd' &= bd - \frac{h}{q-1}bc + \frac{h}{q-1}(d-a)d - \frac{h^2}{(q-1)^2}(d-a)c - \frac{h^2}{(q-1)^2}cd + \frac{h^3}{(q-1)^3}c^2 \\ d'b' &= db - \frac{h}{q-1}cb + \frac{h}{q-1}d(d-a) - \frac{h^2}{(q-1)^2}c(d-a) - \frac{h^2}{(q-1)^2}dc + \frac{h^3}{(q-1)^3}c^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.2.3e}$$

$$\left.\begin{aligned} c'd' &= cd - \frac{h}{q-1}c^2 \\ d'c' &= dc - \frac{h}{q-1}c^2 \end{aligned}\right\} \tag{3.2.3f}$$

olur. (2.4) bağıntısında

$$a'c' = qc'a'$$

olduğundan (3.2.3b)'deki eşiti yerine yazılırsa

$$ac + \frac{h}{q-1}c^2 = qca + \frac{qh}{q-1}c^2$$

$$ac = qca + \frac{h}{q-1}c^2(q-1)$$

$$ac = qca + hc^2 \tag{3.2.4a}$$

elde edilir.

$c'd' = qd'c'$ ile (3.2.3f)'deki eşiti yerine yazılırsa

$$cd - \frac{h}{q-1}c^2 = qdc - \frac{qh}{q-1}c^2$$

$$cd = qdc + \frac{h}{q-1}c^2(1-q)$$

$$cd = qdc - hc^2 \qquad (3.2.4b)$$

sonucu çıkar.

$b'c' = c'b'$ ile (3.2.3d) eşiti yerine yazıldığında

$$bc + \frac{h}{q-1}(d-a)c - \frac{h^2}{(q-1)^2}c^2 = cb + \frac{h}{q-1}c(d-a) - \frac{h^2}{(q-1)^2}c^2$$

olur. Buradan

$$bc = cb + \frac{h}{q-1}(cd - ca - dc + ac)$$

(3.2.4a) ve (3.2.4b) eşitlikleri yerine yazıldığında

$$bc = cb + h(dc + ca)$$

veya

$$bc = cb + q^{-1}h(cd + ac) \qquad (3.2.4c)$$

Sonucu çıkar.

$a'd' - d'a' = rb'c'$ ile (3.2.3c) ve (3.2.3d) ifadeleri yerine yazıldığında

$$ad - \frac{h}{q-1}ac + \frac{h}{q-1}cd - \frac{h^2}{(q-1)^2}c^2 - da + \frac{h}{q-1}ca - \frac{h}{q-1}dc + \frac{h^2}{(q-1)^2}c^2$$

$$= r\left[(bc + \frac{h}{q-1}(d-a)c - \frac{h^2}{(q-1)^2}c^2)\right]$$

olup;

$$ad - da + \frac{h}{q-1}(ca - ac + cd - dc) = \frac{q^2-1}{q}\left(bc + \frac{h}{q-1}(d-a)c - \frac{h^2}{(q-1)^2}c^2\right)$$

veya

$$ad = da + rbc + \frac{h}{q}dc - hqca - h^2c^2 \tag{3.2.4d}$$

sonucu çıkar.

$a'b' = qb'a'$ ile (3.2.3a) yerine yazılırsa

$$ab + \frac{h}{q-1}a(d-a) - \frac{h^2}{(q-1)^2}ac + \frac{h}{q-1}cb + \frac{h^2}{(q-1)^2}c(d-a) - \frac{h^3}{(q-1)^3}c^2$$

$$= qba + \frac{qh}{q-1}(d-a)a - \frac{qh^2}{(q-1)^2}ca + \frac{qh}{q-1}bc + \frac{qh^2}{(q-1)^2}(d-a)c - \frac{qh^3}{(q-1)^3}c^2$$

olur ki, ortak paranteze alındığında;

$$ab = qba - ha^2 + had - hqbc - h^2cd \tag{3.2.4e}$$

sonucu çıkar.

$b'd' = qd'b'$ ile (3.2.3e) yerine yazıldığında

$$bd - \frac{h}{q-1}bc + \frac{h}{q-1}(d-a)d - \frac{h^2}{(q-1)^2}(d-a)c - \frac{h^2}{(q-1)^2}cd + \frac{h^3}{(q-1)^3}c^2$$

$$= qdb - \frac{hq}{q-1}cb + \frac{hq}{q-1}d(d-a) - \frac{h^2q}{(q-1)^2}c(d-a) - \frac{h^2q}{(q-1)^2}dc + \frac{h^3q}{(q-1)^3}c^2$$

olur ki ortak parantez alındığında

$$bd = qdb + hd^2 - had + hqcb + h^2cd \tag{3.2.4f}$$

sonucu çıkar.

(3.2.4a-f) bağıntıları $q \to 1$ limiti için sırayla yazıldığında

$$ac = ca + hc^2 \tag{3.2.5a}$$

$$cd = dc - hc^2 \tag{3.2.5b}$$

$$bc = cb + h(cd + ac) \tag{3.2.5c}$$

$$ad = da + hdc - hca - h^2c^2 \tag{3.2.5d}$$

$$ab = ba - ha^2 + had - hcb - h^2cd \tag{3.2.5e}$$

$$bd = db + hd^2 - had + hcb + h^2cd \tag{3.2.5f}$$

bağıntıları bulunur.

Şimdi ise matrisin determinantını (2,5) deki

$$D' = a'd' - qc'b'$$

formülüne göre hesaplayalım.

(3.2.3c) ve (3.2.3d) formüllerine göre;

$$D' = ad - \frac{h}{q-1}ac + \frac{h}{q-1}cd - \frac{h^2}{(q-1)^2}c^2 - qcb - \frac{hq}{q-1}c(d-a) + \frac{h^2q}{(q-1)^2}c^2$$

$$D' = ad - qcb + \frac{h}{q-1}(cd - qcd + qca - ac) + \frac{h^2}{(q-1)^2}(qc^2 - c^2)$$

$$D' = ad - qcb + \frac{h}{q-1}(cd - qcd + qca - ac) + \frac{h^2}{(q-1)^2}c^2(q-1)$$

İfadesinde gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$D' = ad - qcb - hcd \qquad (3.2.6a)$$

Bağıntısı çıkar. Bulunan bu determinant da $q \to 1$ limiti için yeniden yazılırsa

$$D_h = ad - cb - hcd \qquad (3.2.6b)$$

Sonucu çıkar.

Matrisin determinantı bu kez de (2,6) daki $D' = d'a' - q^{-1}b'c'$ formülüne göre hesaplandığında

$$D' = da - \frac{h}{q-1}ca + \frac{h}{q-1}dc - \frac{h^2}{(q-1)^2}c^2 - q^{-1}(bc + \frac{h}{q-1}(d-a)c - \frac{h^2}{(q-1)^2}c^2)$$

olur ki, gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$D' = da - q^{-1}bc + hq^{-1}dc \qquad (3.2.6c)$$

bağıntısı çıkar. $q \to 1$ limiti için yeniden yazılırsa;

$$D_h = da - bc - hdc \qquad (3.2.6d)$$

sonucu çıkar.

$T \in GL_h(2)$ ise T matrisinin tersini bulalım.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$ax + bz = 1 \qquad ay + bt = 0$$

$$cx + dz = 0 \qquad cy + dt = 1$$

İfadelerinden işlemler yapıldığında

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d+ch}{D_h} & \frac{-b+hd+h^2c-ha}{D_h} \\ -\frac{c}{D_h} & \frac{a-hc}{D_h} \end{bmatrix}$$

veya

$$T^{-1} = {D_h}^{-1} \begin{bmatrix} d+ch & -b+hd+h^2c-ha \\ -c & a-hc \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

3.3. Üniter Kuantum Grupları

$SU_q(2)$, $GL_q(2)$ nin alt grubu olmak üzere bu grubun matris eşleniğini inceleyelim. $SU_q(2)$ üniter kuantum grubu olmak üzere; $A \in SU_q(2)$ ve A^* , A matrisinin matris eşleniği ise ,

$$A^*.A^T = I \text{ ve } D_q(A) = 1$$

bağıntılarını sağlasın.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad , \quad A^* = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ c^* & d^* \end{pmatrix}$$

olsun.Bu durumda $A^* = (A^T)^{-1}$ eşitliğinden

$$A^* = \begin{pmatrix} d & -q^{-1}c \\ -qb & a \end{pmatrix}$$

olur. Bu durumda ;

$$\begin{aligned} a^* &= d \\ b^* &= -q^{-1}c \\ c^* &= -qb \\ d^* &= a \end{aligned}$$

çıkar. Böylece

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -qb^* & a^* \end{pmatrix}$$

alabiliriz. (2,5) ve (2,6) dan

$D_q(A) = ad - qcb$ ve $D_q(A) = da - q^{-1}cb$ olduğundan

$$aa^* + q^2 bb^* = 1 = a^*a + b^*b$$

Bağıntılarını yazarız.Bu bağıntılar yardımıyla,

$aa^* - q^2 a^* a = 1 - q^2$ olurki

$$b^*b = 1 - a^*a$$

$$= q^{-2}(1 - aa^*)$$

olarak bulunur.

3.4. R_h Matrisinin Elde Edilmesi

Bölüm (2.9) da tanımlanan R' matrisi

$$R' = \begin{bmatrix} q^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{bmatrix}$$ olmak üzere;

$$R'T_1'T_2' = T_2'T_1'R'$$

İdi. Bu denklemde $T' = gTg^{-1}$ olduğu kullanılırsa;

$$R' \cdot (gTg^{-1} \otimes 1) \cdot (1 \otimes gTg^{-1}) = (1 \otimes gTg^{-1}) \cdot (gTg^{-1} \otimes 1) \cdot R'$$

$$R' \cdot (gTg^{-1} \otimes gTg^{-1}) = (gTg^{-1} \otimes gTg^{-1}) \cdot R'$$

$$R' \cdot (g \otimes g) \cdot (T \otimes T) \cdot (g^{-1} \otimes g^{-1}) = (g \otimes g) \cdot (T \otimes T) \cdot (g^{-1} \otimes g^{-1}) \cdot R'$$

$$(g \otimes g)^{-1} \cdot R' \cdot (g \otimes g) \cdot (T \otimes T) = (T \otimes T) \cdot (g \otimes g)^{-1} \cdot R' \cdot (g \otimes g)$$

olup;

$R_{h,q} = (g \otimes g)^{-1} \cdot R' \cdot (g \otimes g)$ ve $R_h = \lim_{q \to 1} R_{h,q}$

İfadesinden

$$R_h \cdot (T \otimes I) \cdot (I \otimes T) = (I \otimes T) \cdot (T \otimes I) \cdot R_h$$

$$R_h T_1 T_2 = T_2 T_1 R_h$$

bulunur. Burada;

$$R_{h,q} = (g \otimes g)^{-1} \cdot R' \cdot (g \otimes g) = \begin{bmatrix} q^{-1} & -\frac{h}{q} & h & \frac{h^2}{q} \\ 0 & 1 & -r & -h \\ 0 & 0 & 1 & \frac{h}{q} \\ 0 & 0 & 0 & q^{-1} \end{bmatrix}$$

olup;

$$R_h = \lim_{q \to 1} R_{h,q} = \begin{bmatrix} 1 & -h & h & h^2 \\ 0 & 1 & 0 & -h \\ 0 & 0 & 1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4

SONUÇLAR

Bu çalışmada Genel Lineer Matris Grubunun düzlemler üzerine olan etkisi incelenmiştir. Bir $T^{'} \in GL_q(2,C)$ seçilerek bu matrisin kuantum Özellikleri ispat edilmiştir.Ayrıca bu Matrisin elemanları arasında komütasyon bağıntıları bulunmuştur.Matrisin determinantına ve tersine ait yeni formüller hesaplanmıştır.Ayrıca matrisin tersinin grup yapısı incelenmiştir. Daha önceki çalışmalarda özel olarak seçilmiş R_q matrisinin bulunan bir eşitlik ile komutasyon bağıntılarını sağladığı ispat edilmiştir .Ayıca $T \in GL_h(2,C)$ matrisi seçilmiş ve bu matrisin elemanları arasında komutasyon bağıntıları bulunmuştur. Bulunan sonuçlar q$\rightarrow 1$ limiti için yeniden düzenlenmiştir. Bu matrisinde determinantına ve tersine ait yeni formüller bulunmuştur.

KAYNAKLAR

[1] Çelik, S. "Kuantum Matris Grupları ve q-Osilatörleri, Doktora Tezi İstanbul Teknik Üniversitesi;1992,

[2] Demidov E E ,Manin Yu I, Mukhin E E and Zhdanovich D V 1990 Prog.Theor.Phys.Suppl.

102 203

[3] Drinfeld VG, "Quantum Group" ,Proc.Int.Long.Of Math.,Berkeley, 798 (1986)

[4] Faddeev L D and Pyatov P N 1994 The differential calculus on quantum linear groups Prepint hepth / 9402070

[5] Karimipour V 1994 Lett. Math. Phys. 30 87

[6] Kupershmidt B A 1992 J.Phys. A:Math. Gen. 25 L 1239

ÖZGEÇMİŞ

Kerem DEMİR 1972 yılında istanbul'da doğdu.Orta Öğrenimini Gelenbevi Ortaokulunda, liseyi Pertevniyal Lisesinde bitirdi.1990 yılında Mimar Sinan Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 1994 yılında mezun oldu.1997 yılında aynı üniversitenin Fen Bilimleri Enstitüsünde Matematik bölümü Yüksek Lisansına başladı.15 yıldır İstanbul da çeşitli eğitim kurumlarında matematik öğretmenliği yapmaktadır.

ARALIK 2009 **KEREM DEMIR**