



**T.C.  
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANABİLİM DALI**

**DİLİM GEOMETRİDE LİNEER ANİZOTROPİK NÖTRON  
TRANSPORT DENKLEMİ İÇİN CHEBYSHEV POLİNOMU  
YAKLAŞIMI VE ÖZDEĞER SPEKTRUMLARI**

**Ahmet UĞUZ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**KAHRAMANMARAŞ  
HAZİRAN – 2007**



T.C.  
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANABİLİM DALI

**DİLİM GEOMETRİDE LİNEER ANİZOTROPİK NÖTRON  
TRANSPORT DENKLEMİ İÇİN CHEBYSHEV POLİNOMU  
YAKLAŞIMI VE ÖZDEĞER SPEKTRUMLARI**

Ahmet UĞUZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KAHRAMANMARAŞ  
HAZİRAN – 2007

T.C.  
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANABİLİM DALI

**DİLİM GEOMETRİDE LİNEER ANİZOTROPİK NÖTRON TRANSPORT  
DENKLEMİ İÇİN CHEBYSHEV POLİNOMU YAKLAŞIMI VE  
ÖZDEĞER SPEKTRUMLARI**

Ahmet UĞUZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kod No:

Bu Tez 28 / 06 / 2007 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oy Birliği  
İle Kabul Edilmiştir.

.....  
Doç. Dr.  
Fikret ANLI  
DANIŞMAN

.....  
Doç. Dr.  
Mükerrem KURTOĞLU  
ÜYE

.....  
Yrd. Doç. Dr.  
Ümit ALVER  
ÜYE

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylıyorum.

Prof. Dr. Özden GÖRÜCÜ  
Enstitü Müdürü

Bu çalışma ..... tarafından desteklenmiştir.  
Proje No: .....

**Not:** Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

## İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER .....	I
ÖZET .....	II
ABSTRACT .....	III
ÖNSÖZ .....	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ .....	V
ŞEKİLLER DİZİNİ .....	VI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ .....	VII
1. GİRİŞ .....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR .....	6
3. MATERYAL VE METOT .....	9
3.1. Legendre Polinomları .....	9
3.2. Chebyshev Polinomları .....	13
3.2. Nötron Transport Eşitliği .....	18
3.2.1. Lineer Anizotropik Saçılmalı Nötron Transport Eşitliği .....	22
3.3. Legendre Polinomu Yaklaşımı: $P_N$ Metodu .....	23
3.4. Chebyshev Polinomu Yaklaşımı: $T_N$ Metodu .....	28
4. BULGULAR VE TARTIŞMA .....	34
5. SONUÇ .....	41
KAYNAKLAR .....	42
ÖZGEÇMİŞ .....	43

T.C.  
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
FİZİK ANABİLİM DALI

## YÜKSEK LİSANS TEZİ

## ÖZET

DİLİM GEOMETRİDE LİNEER ANİZOTROPİK NÖTRON TRANSPORT  
DENKLEMİ İÇİN CHEBYSHEV POLİNOMU YAKLAŞIMI VE ÖZDEĞER  
SPEKTRUMLARI

Ahmet UĞUZ

DANIŞMAN : Doç. Dr. Fikret ANLI

Yıl : 2007 Sayfa : 43

JÜRİ : Doç. Dr. Fikret ANLI  
: Doç. Dr. Mükerrerem KURTOĞLU  
: Yrd. Doç. Dr. Ümit ALVER

Tek boyutlu dilim geometride, tek hızlı ve lineer anizotropik saçılmalı durumda nötron transport denklemi değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak çözülmüştür. Nötronların dağılımını temsil eden çözüm fonksiyonu, konuma ve açığa bağlı olacak şekilde iki fonksiyonun çarpımı şeklinde tanımlanmıştır. Konuma bağlı kısım eksponansiyel bir fonksiyon, açığa bağlı kısım ise Legendre veya Chebyshev Polinomları olarak seçilmiştir. Çözüm fonksiyonu içerisindeki konuma bağlı kısım, nötron akı momentlerini temsil eder. Akı momentleri ile ilgili diferansiyel denklemler Legendre Polinomları ve Chebyshev Polinomlarının I. tipi kullanarak elde edilmiştir. Bu diferansiyel denklemler, Legendre Polinomları kullanılarak elde edilmişse kullanılan yöntem  $P_N$  yaklaşımı, Chebyshev Polinomlarının I. Tipi kullanılarak elde edilmiş ise kullanılan yöntem  $T_N$  yaklaşımı olarak adlandırılmıştır. Her iki yaklaşımdan elde edilen diferansiyel denklemler,  $c_0$  ve  $c_1$  (çarpışma başına ortaya çıkan ortalama nötron sayısı)'in farklı değerleri için çözülmüş ve elde edilen  $v$  özdeğerleri karşılaştırma yapmak için aynı tablolarda sunulmuştur.

Sonuç olarak, her iki metod( $P_N$  ve  $T_N$ )a göre elde edilen sonuçların mükemmel bir uyum içinde oldukları görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Transport denklemi, Legendre polinomları, Chebyshev polinomları

UNIVERSITY OF KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM  
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES  
DEPARTMENT OF PHYSICS

MSc THESIS

ABSTRACT

EIGENVALUE SPECTRUM FOR CHEBYSHEV POLYNOMIAL  
APPROXIMATION OF THE NEUTRON TRANSPORT EQUATION WITH  
LINEARLY ANISOTROPIC SCATTERING IN SLAB GEOMETRY

Ahmet UĞUZ

SUPERVISOR : Associate Prof. Dr. Fikret ANLI

Year : 2007 Pages : 43

JURY : Associate Prof. Dr. Fikret ANLI  
: Associate Prof. Dr. Mükerrerem KURTOĞLU  
: Assist. Prof. Dr. Ümit ALVER

In one-dimensional slab geometry, the neutron transport equation was solved in one-speed and linearly anisotropic scattering by implementing the method of separation of variables. The solved function which represents distribution of neutrons is defined in the form of multiplication of the functions; one of which is relied on the position and one of which is relied upon the angle. The part which depended on the position selected as an exponential function; on the other hand the part that was relied upon the angle was chosen as Legendre polynomials or Chebyshev polynomials. The part that is subject to the position in solved function displays the neutron flux moments. The differential equations regarding the flux moments was obtained by using Legendre polynomials and Chebyshev polynomials of the first kind. If the differential equations, in respect of the flux moments, are obtained by implementing Legendre polynomials, the method used is called  $P_N$  approximation; if it is obtained by using Chebyshev polynomials of the first kind, the method exploited is named  $T_N$  approximation. The differential equations obtained as a result of both approximation were solved for different values of  $c_0$  and  $c_1$  (where  $c$  is the number of secondary neutrons per collision) and the obtained  $\nu$  eigenvalues were presented in the same tables to make a comparison.

As a conclusion the result obtained in respect of two methods ( $P_N$  and  $T_N$ ), is seen in an excellent coherent.

Key Words: Transport equation, Legendre polynomials, Chebyshev polynomials

**ÖNSÖZ**

Bu tez, nükleer reaktör fiziğinde anizotropik saçılmalı ortamda tek boyutlu nötron transport denkleminin hem Legendre Polinomları hem de Chebyshev Polinomları kullanılarak çözülebileceğini ve her iki çözümün de birbiri ile uyumlu olduğunu göstermek için hazırlanmıştır.

Bu tez çalışmasının her aşamasında benden yardımlarını esirgemeyen ve araştırma sevgisi aşılayan danışman hocam Doç. Dr. Fikret ANLI'ya , bilgisayar hesaplamalarında yardımcı olan Arş. Gör. Ahmet BÜLBÜL'e, bilgilerini benimle paylaşan fizik bölümünün değerli öğretim elemanlarına en içten teşekkürlerimi sunarım.

Haziran – 2007  
KAHRAMANMARAŞ

Ahmet UĞUZ

## ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Legendre Polinomları .....	10
Çizelge 3.2. I. Tip Chebyshev Polinomları .....	15
Çizelge 3.3. Ortogonal Polinomlar İçin Tekrarlama Bağlıları .....	16
Çizelge 4.1. $P_N$ ve $T_N$ Yaklaşımı $c_0 = 0$ ve $0 \leq c_1 < 1$ için $\nu$ Özdeğerleri .....	35
Çizelge 4.2. $P_N$ ve $T_N$ Yaklaşımı $c_0 = 0.25$ ve $0 \leq c_1 < 1$ için $\nu$ Özdeğerleri .....	35
Çizelge 4.3. $P_N$ ve $T_N$ Yaklaşımı $c_0 = 0.50$ ve $0 \leq c_1 < 1$ için $\nu$ Özdeğerleri .....	36
Çizelge 4.4. $P_N$ ve $T_N$ Yaklaşımı $c_0 = 0.75$ ve $0 \leq c_1 < 1$ için $\nu$ Özdeğerleri .....	36
Çizelge 4.5. $P_N$ ve $T_N$ Yaklaşımı $c_0 = 0.99$ ve $0 \leq c_1 < 1$ için $\nu$ Özdeğerleri .....	37
Çizelge 4.6. $P_N$ ve $T_N$ Yaklaşımı $c_0 = 1.01$ ve $0 \leq c_1 < 1$ için $\nu$ Özdeğerleri .....	37
Çizelge 4.7. $P_N$ ve $T_N$ Yaklaşımı $c_0 = 1.25$ ve $0 \leq c_1 < 1$ için $\nu$ Özdeğerleri .....	38
Çizelge 4.8. $P_N$ ve $T_N$ Yaklaşımı $c_0 = 1.50$ ve $0 \leq c_1 < 1$ için $\nu$ Özdeğerleri .....	38
Çizelge 4.9. $P_N$ ve $T_N$ Yaklaşımı $c_0 = 1.75$ ve $0 \leq c_1 < 1$ için $\nu$ Özdeğerleri .....	39
Çizelge 4.10. $P_N$ ve $T_N$ Yaklaşımı $c_0 = 2.00$ ve $0 \leq c_1 < 1$ için $\nu$ Özdeğerleri .....	39



**ŞEKİLLER DİZİNİ**

<b>Şekil 3.1. Küresel Koordinatlar .....</b>	<b>20</b>
<b>Şekil 3.2. Birim Vektörler .....</b>	<b>21</b>

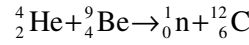
**SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ**

$\sigma_T$	: Toplam diferansiyel tesir kesiti
$\sigma_S$	: Diferansiyel saçılma tesir kesiti
$\mu$	: Açı değişkeni ( $-1 \leq \mu \leq 1$ , $\mu = \cos\theta$ )
$D$	: Difüzyon sabiti
$a$	: Kritik yarı kalınlık
$\psi(x, \mu)$	: Hücre açısal akısı
$v$	: Özdeğer
$A_N(v)$ ve $G_N(v)$	: Özfonksiyonlar
$P_N(\mu)$	: Legendre polinomu
$T_N(\mu)$	: I. tip Chebyshev polinomu
$\phi_N(x)$ ve $\Phi_N(x)$	: Nötron akı momentleri
$L$	: Difüzyon uzunluğu
$c_0$ ve $c_1$	: Çarpışma başına ortaya çıkan ortalama nötron sayıları

## 1. GİRİŞ

Fransız fizikçi H. Becquerel'in 1896 yılında radyoaktiviteyi keşfetmesinden sonra atomun ve çekirdeğin yapısı hakkında önemli gelişmeler olmuştur. Becquerel, radyoaktivite konusundaki çalışmalarıyla 1903 Nobel ödülünü de kazanmıştır. Becquerel'in çekirdek yapısının daha iyi anlaşılmasından 15 yıl önceki keşfi belki de çekirdek fiziğinin başlangıcı olmuştur.

1911 yılında E. Rutherford'un  $\alpha$  ışınlarının ince altın plakadan saçılması deneyi sonucunda atom çekirdeğini keşfetmesi sonraki yıllarda nükleer fizik alanında önemli gelişmelere imkan tanımıştır. Rutherford'un öğrencilerinden J. Chadwick'in 1932 yılında nötronu keşfine kadar çekirdeğin proton ile bir miktar elektrondan oluştuğu varsayılmıştı. Chadwick, atomun çekirdeğinde proton ile birlikte yüksüz ve kütlesi hemen hemen protonun kütlesine eşit olan parçacığın nötron olduğunu şu reaksiyonu gözlemlemesi ile ispat etti:

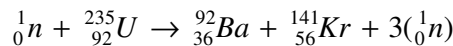


Atomların, moleküllerin veya elementer parçacıkların yapısını incelemekte en çok başvurulan deneysel yöntem saçılmadır. Rutherford'un ve Chadwick'in yaptığı deneyler de birer saçılma deneyidir. Bu yöntemde sabit tutulan bir hedef parçacık üzerine belli bir enerjiye sahip diğer bir parçacık (mermi) gönderilir ve saçılan parçacıkların yön ve enerjileri gözlenir. Mermi ile hedef arasındaki etkileşme potansiyeli, saçılan parçacıkların açısal dağılımını ve enerjilerini etkileyen başlıca faktörlerdir.

Atom çekirdeğinin yapısı çekirdek çarpışmaları ile incelenmektedir. Bu olay, bazen ağır bir çekirdeğin, elektron, proton, nötron, döteryum gibi parçacıklarla veya diğer hafif çekirdeklerle bombardıman edilmesi ya da iki ağır çekirdeğin hızlandırıcılarda hızlandırılarak çarpıştırılması şeklinde olur. İlk hızlandırıcının 1931 yılında E. O. Lawrence ve M. S. Livingston tarafından yapılmasından sonra mermi parçacıklarının daha yüksek enerjili olarak hızlanmasını sağlayan hızlandırıcılar kısa bir zaman içerisinde yapıldı. Hızlandırıcılar hem çekirdek fiziğinin hem de nükleer fiziğin gelişiminde önemli bir paya sahiptir.

Hızlandırıcılarda üretilen yüksek enerjili parçacıkların hedef çekirdek üzerine salınmasıyla 1939 yılına kadar bir çok çekirdek reaksiyonu keşfedilmişti. Fakat bu reaksiyonlardan hiçbiri hedef çekirdeğin kütlesinden çok farklı yeni bir çekirdek oluşturuyordu. Reaksiyon sonucunda ya bir gama ışını ya da hafif bir parçacık fırlatılıyordu.

Alman bilim adamları Otto Hahn ve Fritz Strassman 1939 yılı başlarında Uranyumu ( $Z = 92$ ) nötronlarla bombardıman ederek ilk nükleer fisyonu gerçekleştirdiler. Nükleer fisyon,  ${}^{235}_{92}\text{U}$  gibi ağır bir çekirdeğin daha küçük iki çekirdeğe bölünmesi ile meydana gelir. Hahn ve Strassman reaksiyon ürünleri arasında iki orta kütleli elementin Baryum ve Kripton olduğunu keşfettiler. Ürünler arasında iki veya üç gibi farklı sayıda nötronlar da olabilmekteydi. Bu tip bir reaksiyon ,



şeklindedir. Bu olayın nükleer enerji üretimi bakımından iki önemli sonucu vardır:

Her bir olayda yaklaşık olarak 200 MeV'lik bir enerji açığa çıkması bunlardan birincisidir. Tipik bir kimyasal reaksiyonda (örneğin kömürün yanmasında) birkaç eV veya tipik bir alfa bozunmasında 4-9 MeV enerji açığa çıktığı düşünülürse bunun ne kadar büyük bir enerji olduğu anlaşılır. 450 gram  $^{235}\text{U}$  fisyonundan elde edilen ısı,  $10^3$  ton kömürün verdiği ısıya eşdeğerdir. Reaksiyon sonucunda enerji çıkışı çok hızlı oluyorsa şiddetli bir patlamaya yol açar; yavaş oluyorsa bu enerji su buharı ve dolayısıyla elektrik üretiminde kullanılabilir.

Sonuçlardan ikincisi ise her bir fisyon reaksiyonu başına ortalama olarak 2.5 nötron açığa çıkmasıdır. Açığa çıkan bu nötronlar, diğer çekirdekleri fisyonla maruz bırakmak için tetikleyebilir. Hesaplamalar, zincir reaksiyon kontrol edilmediğinde (yani işlem yavaş bir şekilde yürümediğinde),  $^{235}\text{U}$  çekirdeğinin 1 kg'dan açığa çıkan enerjinin, 20 tonluk TNT'nin patlamasıyla oluşan enerjiye eşit olduğunu göstermiştir. Bu tabii ki atom bombasının yapılmasında temel prensiptir. Yani kontrolsüz fisyon reaksiyonu. Bu durumda reaksiyon bir kez başladıktan sonra, her fisyon sonunda üretilen nötronların yeni fisyonlara yol açtığı zincirleme reaksiyonlar oluşur. Bunun mümkün olduğunu 1942 yılında gören Enrico Fermi 50 ton uranyum ve uranyum oksit kullanarak dünyanın ilk nükleer reaktörünü kurmuştur.

Bir nükleer reaktör, kendi kendine yeten zincirleme reaksiyon olarak bilinen reaksiyonları kontrol altında tutmak ve düzenli bir şekilde devamını sağlamak için düzenlenmiş bir sistemdir. Fisyon olayı göz önüne alındığında ortamdaki nötronların sürekli artacağı düşünülebilir. Bu durum atom bombalarında olmaktadır. Reaktörlerde fisyon nötronlarının daha fazla fisyonla neden olmamalarının iki sebebi vardır. Birincisi nötronların fisyon yapmayan reaksiyonlarla yakalanması yani soğurulmasıdır. Buna, yakıt içinde bulunan fisyonla uğramayan çekirdek, yapı malzemeleri, soğutucu akışkan ve yavaşlatıcılar sebep olur. İkinci neden ise reaktör kalbinden belli bir yüzde oranında nötronların kaçmasıdır. Bu kaçışların az olması için kalp yüzey-hacim oranının küçük yani kalp boyutlarının büyük olması gerekir.

Her fisyonda ortalama 2.5 nötron çıkıyor olması tek başına zincirleme reaksiyonun devamını sağlayamaz. Önemli olan parametre, her fisyonda çıkan nötronların uyaracağı yeni fisyonların  $k$  sayısıdır. Reaktör işleyişinin seviyesini belirten bu yararlı parametre ( $k$ ), tekrar üretme sabiti adını alır. Bu sabit, başka bir olaya sebep olacak her bir fisyon olayında ortaya çıkan ortalama nötron sayısı olarak tanımlanır. Zincir reaksiyon sonucunda ortamdaki nötronların sayısı zamanla değişmiyorsa ( $k = 1$  ise) reaktörün kritik olduğu söylenir. Nötronların sayısı zamanla azalıyor ise ( $k < 1$  ise) reaktör kritik altıdır ve reaksiyon durur. Nötronların artması durumunda ise ( $k > 1$  ise) reaktörün kritik değerinin üstünde olduğu söylenir ve reaksiyon gittikçe artar.  $k$  parametresini, nötron yutan maddelerin ortama sokulması ya da çıkarılmasıyla değiştirmek mümkündür ki bu malzemeler genelde çubuk şeklinde olduklarından kontrol çubukları adını alır.

Reaktörlerde fisyon sonucunda açığa çıkan nötronların enerjilerinin düzenlenmesi reaksiyonun devamlılığı için önemlidir. Fisyon sonucunda üretilen nötronlar yaklaşık olarak 2 MeV'lik kinetik enerji ile fırlarlar. Bu kadar yüksek enerjili nötronların diğer  $^{235}\text{U}$  çekirdekleri tarafından yakalanabilmeleri için yavaşlatılarak termal nötron haline

getirilmeleri gerekir. Çünkü nötronların yakalanma olasılığı enerjisinin azalmasıyla artmaktadır. Nötronlar, yakıtı kuşatan moderatörler (yavaşlatıcılar) tarafından yavaşlatılır. Oda sıcaklığındaki nötronların ortalama kinetik enerjileri 0.04 eV olup bu nötronlara termal nötronlar denir. Termal nötronlar, kapalı bir kap içerisinde bulunan gaz moleküllerinin difüzyonuna benzer bir hız dağılımına sahiptirler.

Nötronlar çekirdeklerle yaptıkları çarpışmalar sonucunda reaktör içerisinde yayılırlar. Bunun sonucu olarak, reaktörün bir noktasındaki nötronlar, farklı bir noktada, farklı bir enerji ile ortaya çıkabilirler. Yani nötronlar bir konumdan başka bir konuma transfer olmuşlardır. Nötronların bu davranışları “Nötron Transport Teori” nin konusu olmuştur. Transport Teori yüksüz parçacıkların hareketini açıklamakta Boltzman Denklemi olarak da bilinen Lineer Transport Denklemi kullanır. Bu denklem, reaktör fiziğinin yanı sıra radyoaktif kaynakların zırhlanması, astrofizik, deniz bilimleri, plazma fiziği, gazların kinetik teorisi gibi birçok alanda kullanılmaktadır.

Nötron Transport Teori nötronların davranışlarını konum, açı, enerji ve zaman değişkenlerine bağlı olarak inceler. Nötronların saçılmaları izotropik ise açı değişkeni olmayacağı için difüzyon teorisi kullanılır. Bu durumda gazlardaki moleküller yerine nötronlar geçer. Eğer saçılma izotropik değilse açığa bağlı bir hesaplama gerekecektir. Tüm nötronların aynı hızla hareket ettiği varsayılırsa tek-hızlı grup teorisi yaklaşımı yapılmış olur. Eğer nötronların hızlarının değişken olduğu dikkate alınırsa ortam belli sayıda aralıklara bölünerek çok-hızlı grup teorisi yaklaşımı yapılır.

Nötron transport denkleminin çözümünde en önemli faktörlerden biri uygun bir nötron dağılım fonksiyonu tanımlamaktır. Nötronların kinetik enerjileri arttıkça ya da fisyonu katılan çekirdek kütlesi arttıkça saçılma gittikçe anizotropik olur. Bu yüzden bu gibi durumlarda saçılma olayının ayrıntılı yapısı gerektiği için nötronun dağılımı ile ilgili çalışma daha karmaşık hal alır.

Nötron transport denkleminin çözümü için birçok yöntem geliştirilmiştir: Case yöntemi, SGF (Spektral Green Fonksiyonu) yöntemi, DD (Diamond-Difference) yöntemi ve  $C_N$ ,  $F_N$ ,  $H_N$ ,  $P_N$ ,  $S_N$ ,  $T_N$ ,  $U_N$  yöntemleri bunlardan başlıcalarıdır. Bu yöntemler kritiklik, albedo, Milne problemlerine uygulanabilmektedir. Reaktörlerin kritik kalınlığının ikincil nötron sayısına bağlılıklarının bulunması kritiklik problemi, ortam sınırından dışarıya çıkan nötron akısının ortam sınırından içeriye giren nötron sayısına oranı albedo problemi, ortam dışında nötron akısının sıfır olduğu uzaklığın hesaplanması Milne problemi olarak adlandırılır.

Nükleer reaktörlerde, nötronların enerjilerinin düzenlenerek fisyon reaksiyonlarının düzenli bir şekilde yürütülmesi ve güç düzeyinin kontrol edilmesi açısından nötron akısının reaktör içerisindeki dağılımının tam olarak bilinmesi gerekir. Nötron akısının özelliklerinin belirlenmesi, nötron transport teorisinin en popüler konularından birisidir. Bu nedenle nötron akısını temsil eden dağılım fonksiyonun konuma ve açığa bağlı olarak çözülmesi önem kazanır. Nötron dağılım fonksiyonunun bağlı olduğu özdeğerlerin hesaplanması için ortogonal polinomlar kullanılabilir. Legendre polinomları ve Chebyshev polinomları kullanılarak hesaplamalar yapılmıştır. Elde edilen sayısal sonuçlar birbirine çok yakındır.

Bu çalışmada, öncelikle genel haliyle tek gruplu zamandan bağımsız nötron transport eşitliği tanımlandı. Bu eşitlikte tanımlanan diferansiyel saçılma tesir kesiti, geleneksel bir yöntem olarak kabul edilen Legendre polinomları cinsinden seriye açıldı. Legendre polinomları için tanımlanan addition teoreminden de yararlanılarak çözümlene yapıldı. Bu çözüm sonucunda nötron transport eşitliği tek boyutlu dilim geometride lineer nötron transport eşitliği olarak ifade edildi. Saçılmanın izotropik veya anizotropik olduğu durumlarda kullanılacak lineer nötron transport eşitlikleri elde edilerek bu eşitlikler hakkında bilgi verildi.

Bu çalışmanın amacı, tek boyutlu dilim geometride lineer anizotropik nötron transport eşitliğinin çözümü için hem Legendre polinomlarının hem de I. tip Chebyshev polinomlarının kullanılabilmesini göstermektir. Ayrıca hesaplamalarda (özdeğer, difüzyon uzunluğu, difüzyon sabiti hesaplamalarında), Legendre polinomlarını kullandığımız ve  $P_N$  yaklaşımı olarak adlandırdığımız yöntem ile I. tip Chebyshev polinomlarını kullandığımız ve  $T_N$  yaklaşımı olarak adlandırdığımız yöntemin çok yakın sonuçlar verdiğini ortaya koymaktır. Bunun için çarpışma başına ortaya çıkan nötron sayılarına ( $c_0$  ve  $c_1$ 'e) hem  $P_N$  yaklaşımında hem de  $T_N$  yaklaşımında aynı değerleri vererek bu değerlere karşılık gelen  $\nu$  özdeğerlerini hesaplandı. Bu özdeğerlerin uyumlu olup olmadıklarını kolayca karşılaştırabilecek tablolar düzenlendi. Bunun yanında, difüzyon uzunluğu, difüzyon sabiti gibi çeşitli reaktör parametrelerinin de her iki yöntemle de hesaplanabileceği gösterildi.

İlk olarak özdeğer hesaplamaları için dilim geometride lineer anizotropik saçılmalı durumda nötron transport eşitliğinin Legendre polinomları kullanılarak çözümlenmesi yapıldı. Bu yöntem  $P_N$  yaklaşımı olarak adlandırıldı. Çözüm için eşitlikteki açılmalı akı fonksiyonu  $\psi(x, \mu)$ , Legendre polinomları serisine açılarak ifade edildi. Bu polinomlar için tanımlanan tekrarlama bağıntısı ve ortagonallik özelliği de dikkate alınarak akı momentleri ile ilgili diferansiyel eşitlikler elde edildi. Bu diferansiyel eşitliklerin çözümü için eksponansiyel bir fonksiyon önerildi. Önerilen eksponansiyel fonksiyon diferansiyel eşitliklerde kullanılarak özdeğerlerin hesaplanabileceği birbirine bağlı analitik denklemler elde edildi. Birbirine bağlı olan bu analitik denklemler çözülerek ve çarpışma başına ortaya çıkan nötron sayılarına ( $c_0$  ve  $c_1$ 'e) çeşitli değerler verilerek  $\nu$  özdeğerleri hesaplandı.  $P_N$  yaklaşımında özdeğerlerin hesaplanmasında kullanılan  $c_0$  ve  $c_1$  sayılarının aynı değerleri,  $T_N$  yaklaşımı ile hesaplanacak özdeğerler için de kullanıldı. Aynı  $c_0$  ve  $c_1$  sayıları için her iki yöntemden elde edilen özdeğerler birlikte aynı tablolarda sunuldu.

İkinci olarak I. tip Chebyshev polinomları kullanılarak dilim geometride lineer anizotropik saçılmalı durumda nötron transport eşitliğinin çözümlenmesi yapıldı. Bu yöntem ise  $T_N$  yaklaşımı olarak adlandırıldı. Bu çözümlene yönteminde, eşitlikteki açılmalı akı fonksiyonu  $\psi(x, \mu)$ , I. tip Chebyshev polinomları serisine açılarak ifade edildi. Bu polinomlar için tanımlanan tekrarlama bağıntısı ve ortagonallik özelliği de dikkate alınarak  $T_N$  momentleri olarak da adlandırılan akı momentleri ile ilgili diferansiyel eşitlikler elde edildi. Bu diferansiyel eşitliklerin çözümü için  $P_N$  yönteminde önerdiğimiz fonksiyona benzer eksponansiyel bir fonksiyon önerildi. Önerilen eksponansiyel

fonksiyon diferansiyel eşitliklerde kullanılarak özdeğerlerin hesaplanabileceği birbirine bağlı analitik denklemler elde edildi. Birbirine bağlı olan bu analitik denklemler çözülerek ve çarpışma başına ortaya çıkan nötron sayılarına ( $c_0$  ve  $c_1$ 'e)  $P_N$  yaklaşımındaki değerlerinin aynısı verilerek  $\nu$  özdeğerleri hesaplandı. Tartışma ve bulgular bölümünde  $\nu$  özdeğerleri ile ilgili değerlendirmeler yapıldı.

Transport eşitliğinin çözümünde ve  $P_N$  yaklaşımı metodunda Legendre polinomlarını kullanacağımız için öncelikle bu polinomların özelliklerini hatırlatmak yararlı olacaktır. Daha sonra da Chebyshev polinomlarının özelliklerinden bahsedilecektir.

## 2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Nükleer reaktörlerde, nötronların enerjilerinin düzenlenerek fisyon reaksiyonlarının düzenli bir şekilde yürütülmesi ve güç düzeyinin kontrol edilmesi açısından nötron akısının reaktör içerisindeki dağılımının tam olarak bilinmesi gerekir. Konunun önemine binaen fisyonu giren ve fisyonun çıkan nötronların oluşturduğu akının konuma ve açıya bağlı olarak çözümlenmesinde birçok yöntem geliştirilmiştir.

Nötron transport denklemi ile Davison (1958), Legendre polinomlarını kullanarak ilk olarak kritik kalınlık ve kritik yarıçap hesaplamaları yapmıştır. Transport teorisinde karşılaşılan başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümü için tekil özfonksiyonların uygulanması Davison ve Wigner tarafından önerildi; ancak Van Kampen ilk olarak uyguladı.

Nötron transport denkleminin Chebyshev polinomlarının birinci tipi ile çözülebileceğini ilk defa Conkie (1959), önermiştir. Yabushita (1961), çalışmasında durulma (relaxation) sabitinin Chebyshev polinomlarının birinci tipi ile ilişkisini ve bu ilişkiyi kullanarak reaktör kritikliği için gerekli şartları incelemiştir. Bulgularını kullanarak elde ettiği son nokta uzunluklarının  $P_N$  yaklaşımından elde edilen sonuçlarla uyum içinde olduğunu göstermiştir. Conkie, çalışmasında nötron açısal akısını Chebyshev polinomları cinsinden seriye açarak soğurma tesir kesitlerinin varlığında Milne problemini çözümlenmiştir. Hem  $T_N$  hem de  $P_N$  metodunu kullanarak yaptığı çözümlenmelerde bulunduğu sonuçların konvansiyonel olarak tam kabul edilen sonuçlar ile uyumlu olduğunu göstermiştir.

Temel yarı kalınlık hesaplamaları için Mitsis (1963), Case ve Zaweifel (1967), ilk olarak farklı özdeğerleri elde ettiler. Daha sonra Kaper (1974), temel yarı kalınlığı yaptığı çalışmada düzenli bir şekilde sıraladı. Pahor (1967), nümerik bir metod olan Chandrasekhar metodu yaklaşımını kullanarak transport teorisine yeni bir fikir sundu. Yüksek durumlu  $c$  özdeğerleri Kerner (1967) ve Kschwendt (1971), tarafından kritik dilim için hesaplandı. İnönü (1973), şiddetli anizotropik saçılma problemini, değişik geometrilerde çözmek çok zor olduğu için anizotropik saçılım için ileri-geri saçılım modelini geliştirdi. Bundan sonra birçok araştırmacı ileri-geri saçılım modelini, transport denklemini çözmek için kullandı. Fisyon sonucunda nötronların saçılmasına, nötronların enerjilerinin etkilerini Brockmann (1974), yaptığı bir çalışma ile açıkladı.

Nötron transport teorisinde kuadratik anizotropik saçılmalı durum ile ilgili çok az çalışma yapılmıştır. Bu konudaki ilk çalışmayı Lathrop ve Leonard (1965), yaptılar. Lineer ve kuadratik anizotropik saçılma ile ilgili en detaylı hesaplamalar Sjöstrand (1976-1978) tarafından yapılmıştır. Dahl ve Sjöstrand (1979), Carlvik'in metodunu boşluk sınır koşullarında integral denkleminde uygulayarak lineer anizotropik saçılımda özdeğerleri altıncı duruma kadar hesapladılar. Daha öncesinde Dahl ve Sjöstrand (1978), kompleks özdeğerleri kullanarak nötron transport denkleminde nümerik sonuçlar elde etmişlerdi. Brockmann (1981), hem homojen hem de heterojen problemler için elde edilen nötron transport denklemi kritiklik sonuçlarının güvenilir olduğunu yaptığı çalışmada göstermiştir. Ayrıca değişik metodlar kullanarak nümerik transport teorisinde anizotropik saçılım ile ilgili bir çalışma yaptı. Bu çalışmadan elde ettiği sonuçların diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla uyumlu olduğunu gösterdi.



Lewis ve Miller (1984), uzaysal hücre adımı büyüdükçe çözümlemede negatif akı değerlerinin meydana geldiğini gösteren bir çalışma yaptılar. Aranson, Lee ve Dias (1984), Legendre polinomlarını kullanarak kritik yarı kalınlık ve kritik yarıçap hesaplamalarını geliştirmek için yaptıkları çalışma sonucunda buldukları değerlerin önceki hesaplamalarla uyumlu olduklarını gösterdiler.

Grup içi saçılma, kaynak ve özdeğer problemleri için Williams (1985), ileri-geri saçılım kanununu kullanarak elde ettiği çözüm sonuçları ile tek boyutlu sistemler için iki gruplu nötron transport eşitliğinin çözümünden elde ettiği sonuçları karşılaştırdı. Her iki sonuç birbirleriyle uyumlu idi. Riyait ve Ackroyd (1987), şiddetli anizotropik saçılımlı tek boyutta çok gruplu nötron transport problemlerini test ederek nümerik sonuçlar elde ettiler. De Barros ve Larsen (1990), bütün hesaplamalarda uzaysal yuvarlatma hatalarından bağımsız olduğunu ispatladıkları yeni bir sayısal yöntem geliştirdiler. Bu metotla elde ettikleri sonuçların daha güvenilir olduğunu yaptıkları hesaplamalarda gösterdiler. Kohut (1993), daha önce Dahl ve Sjöstrand (1978), tarafından yapılan çalışmayı geliştirerek nümerik hesaplamalarda kompleks özdeğerler kullandı ve uyumlu sonuçlar elde etti.

Atalay (1995), daha önce Mitsis (1963) tarafından yapılan çalışmaya ek olarak yayınladığı makalesinde öz fonksiyon metodu ile anizotropik saçılma durumunu inceledi. Lineer anizotropik saçılmada tek boyutlu transport operatörünün kritiklik özdeğerlerinin davranışı ile ilgili temel çalışmaların çoğu Sahni (1995,1997) tarafından ortaya çıkarılmıştır. Yıldız (1998), Legendre polinomlarını kullanarak kritik yarı kalınlık ve kritik yarıçap hesaplamalarını geliştirmek için  $P_N$  metodu ile ilgili çalışmalar yaptı.

Dilim geometri için kritik kalınlık veya küresel ve silindirik geometri için kritik yarıçap hesaplamasında kullanılan metod sadece  $P_N$  yaklaşımı değildir. Kaşkaş, Tezcan ve Güleçyüz (2000), sonsuz ortamda Green fonksiyonlarını temel alan tekil özfonksiyonlar yaklaşımını kullanarak dilim ve küresel geometride kritik kalınlıkları hesapladılar. Taylor açılımına bağlı sayısal tekniklerin çoğu yuvarlatma hatalarını içermektedir. Kaşkaş, Tezcan ve Güleçyüz, bu metotta Spektral Green Fonksiyonu içeren standart olmayan yardımcı eşitlik ile alışık olduğumuz nötron transport denklemini hücre kenarı açılma akılarına bağlı olarak çözümler.

Legendre polinomları kullanarak yapılan ilk kritik kalınlık hesaplamaları küresel geometriye açıklık getirmiyordu. Daha sonra Sahni ve Sharma (2000), yaptıkları çalışmada bir kural önererek küresel geometride küresel harmonik momentleri belirlediler. Nötron transport teorisinde  $P_N$  yaklaşımını kullanarak çözümler yapmak neredeyse geleneksel bir yöntem haline gelmiştir. Yıldız (2001),  $P_N$  metodunu kullanarak tek boyutlu dilim geometride anizotropik saçılmalı durum için Marshak sınır şartını dikkate alarak yaptığı çalışmada sistemin kritik olabilmesi için  $c_0$  özdeğerlerini hesaplamıştır. Yıldız, çalışmasında ileri-geri saçılmayı temsil eden bir saçılma fonksiyonu kullanarak tek boyutlu küresel geometride  $P_N$  yaklaşımını kullanarak kritik yarıçap hesaplaması da yapmıştır.

Yansıtılabilir durum için Atalay ve Yıldız (2002), yansıtma katsayısındaki azalma ve artış durumlarının kritik yarı kalınlığa etkisi üzerine çalıştılar. Yansıtma katsayısı arttıkça

kritik yarı kalınlığın azaldığını gösterdiler. Atalay (2004), Fourier mod analizini kullanarak tek enerjili nötron transport denkleminde kritiklik çözümlerini yansıtımlı dilim ve küre için yaptı. Nümerik hesaplamalarda, Fourier mod analizinin ve  $P_N$  metodunun benzer sonuçlar verdiğini gösterdi.

Yaşa ve ark. (2006), dilim geometride nötron transport eşitliğinin çözümünde Chebyshev polinomlarını ( $T_N$  metodu) kullanarak çeşitli  $c$  değerleri için  $P_N$  metodunun verdiği sonuçlarla uyumlu bir özdeğer spektrumunu elde ettiler. Anlı ve ark. (2006), yaptıkları çalışmanın ilkinde tek enerjili, izotropik saçılmalı durumda kritik dilim problemi için Chebyshev polinomlarını ( $T_N$  metodu) kullandılar ve çeşitli  $c$  değerleri için Mark ve Marshak sınır şartlarını dikkate alarak kritik yarı kalınlık hesaplamaları yaptılar. Buldukları nümerik sonuçların,  $P_N$  metodunun verdiği sonuçlarla uyumlu olduğunu gösterdiler. İkinci çalışmalarında ise tek enerjili, izotropik saçılmalı durumda kritik yarı kalınlık problemi için yine Chebyshev polinomlarını ( $T_N$  metodu) kullanarak çeşitli  $c$  ve yansıma katsayıları ( $R$ ) değerleri için Marshak sınır şartlarını dikkate alarak kritik yarı kalınlık hesaplamaları yaptılar. Elde ettikleri nümerik sonuçların,  $P_N$  metodunun verdiği sonuçlarla uyumlu olduğunu gösterdiler. Anlı ve ark. tek enerjili, izotropik saçılmalı durumda kritik dilim problemi için Chebyshev polinomlarını ( $U_N$  metodu) kullandılar ve çeşitli  $c$  değerleri için Mark ve Marshak sınır şartlarını dikkate alarak kritik yarı kalınlık hesaplamaları yaptılar. Buldukları nümerik sonuçların,  $P_N$  metodunun verdiği sonuçlarla uyumlu olduğunu gösterdiler.

### 3. MATERYAL VE METOT

#### 3.1. Legendre Polinomları

Fizikte Legendre diferansiyel denkleminin küresel simetriye sahip sınır değer problemlerinin çözümlerinde karşılaşılr. Schrödinger dalga denkleminin küresel koordinatlarda değişkenlere ayırma yöntemiyle çözümünden elde edilen ve Legendre diferansiyel denkleminin olarak adlandırılan denklem,  $k$  bir sabit,  $m$  de bir tamsayı olmak üzere aşağıdaki gibidir.

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left( k - \frac{m^2}{\sin^2\theta} \right) \Theta = 0 \quad (3.1)$$

Bu denklemde  $\mu = \cos\theta$  dönüşümü yapıldığında

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2\Theta}{d\mu^2} - 2\mu \frac{d\Theta}{d\mu} + \left( k - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right) \Theta = 0 \quad (3.2)$$

olur.  $\theta$  açısı  $[0, \pi]$  aralığında değiştiği için  $\mu$  değişkeni  $[-1, 1]$  aralığında tanımlıdır. Denklem (3.2)'de  $\Theta = P(\mu)$  dönüşümü yapıldığında

$$(1 - \mu^2)P''(\mu) - 2\mu P'(\mu) + \left( k - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right)P(\mu) = 0, \quad (-1 \leq \mu \leq 1) \quad (3.3)$$

elde edilir. (3.3) denkleminin, bağlı Legendre diferansiyel denkleminin, denkleminin çözümleri ise bağlı Legendre polinomları olarak adlandırılır. Denklem (3.3)'de  $m = 0$  iken, denklem Legendre diferansiyel denkleminin olarak bilinir. Legendre diferansiyel denkleminin yaygın olarak bilinen formu ise  $k = n(n+1)$  olmak üzere, aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(1 - \mu^2)P_n''(\mu) - 2\mu P_n'(\mu) + n(n+1)P_n(\mu) = 0 \quad (3.4)$$

Denklem (3.4)'ün çözümünü sağlayan  $P_n(\mu)$  ifadeleri Legendre polinomları adını alır.

$P_n(\mu)$  polinomları, üretme fonksiyonu denilen  $\sqrt{1 - 2\mu t + t^2}$  şeklindeki bir fonksiyonun,  $t$ 'nin kuvvet açılımı yardımıyla da tanımlanabilir. Bu polinomlar için üretme fonksiyonu,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\mu t + t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) t^n, \quad |\mu| \leq 1, |t| < 1 \quad (3.5)$$

şeklinde dir.

Legendre polinomlarını, yukarıda yapılan tanımların dışında başka biçimlerde de tanımlamak mümkündür. Rodrigues formülü denilen aşağıdaki bağıntı bu polinomları elde etmekte oldukça kullanışlıdır.

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \left( \frac{d}{d\mu} \right)^n (\mu^2 - 1)^n \quad (3.6)$$

Legendre polinomlarından ilk birkaç tanesi Çizelge 3.1’de verilmiştir.

Çizelge 3.1. Legendre Polinomları

$P_0(\mu) = 1$
$P_1(\mu) = \mu$
$P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$
$P_3(\mu) = \frac{1}{2}(5\mu^3 - 3\mu)$
$P_4(\mu) = \frac{1}{8}(35\mu^4 - 30\mu^2 + 3)$
$P_5(\mu) = \frac{1}{8}(63\mu^5 - 70\mu^3 + 15\mu)$
$P_6(\mu) = \frac{1}{16}(231\mu^6 - 315\mu^4 + 105\mu^2 - 5)$
$P_7(\mu) = \frac{1}{16}(429\mu^7 - 693\mu^5 + 315\mu^3 - 35\mu)$
$P_8(\mu) = \frac{1}{128}(6435\mu^8 - 12012\mu^6 + 6930\mu^4 - 1260\mu^2 + 35)$

Bu polinomları elde edebileceğimiz bir diğer yöntem ise tekrarlama bağıntısı olarak bilinen

$$(2n + 1) \mu P_n(\mu) = (n + 1) P_{n+1}(\mu) + n P_{n-1}(\mu) \quad (3.7)$$

eşitliğini kullanmaktır. Bu bağıntı kullanılarak  $n$ 'in çeşitli değerleri için  $P_n(\mu)$  polinomları kolayca bulunabilir. Örneğin  $P_0(\mu) = 1$  ve  $P_1(\mu) = \mu$  değerlerini kullanarak  $n = 1$  için  $P_2(\mu)$ 'yi kolaylıkla bulabiliriz.

$$3\mu P_1(\mu) = 2 P_2(\mu) + P_0(\mu) \quad (3.8)$$

(3.8) eşitliğinden

$$P_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1) \quad (3.9)$$

elde edilir.

(3.5) eşitliği ile tanımlanan üretim fonksiyonu yardımıyla  $\mu$ ' nun  $0, \pm 1$  özel değerleri için Legendre polinomlarının aşağıdaki gibi tanımlanacağı biraz işleme görülebilir.

$$P_n(1) = 1$$

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

$$P_{2n}(0) = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$$

$$P_{2n+1}(0) = 0$$

(3.5) eşitliği ile tanımlanan üretim fonksiyonu ve (3.7) eşitliği ile tanımlanan tekrarlama bağıntısı kullanılarak Legendre polinomları için diferansiyel eşitliklerden ilki

$$P'_{n+1}(\mu) + P'_{n-1}(\mu) = 2\mu P'_n(\mu) + P_n(\mu) \quad (3.10)$$

şeklinde elde edilebilir.

Bu polinomlar için diğer diferansiyel eşitlikler aşağıda verilmiştir

$$P'_{n+1}(\mu) - P'_{n-1}(\mu) = (2n+1)P_n(\mu) \quad (3.11)$$

$$P'_{n+1}(\mu) = (n+1)P_n(\mu) + \mu P'_n(\mu) \quad (3.12)$$

$$P'_{n-1}(\mu) = -nP_n(\mu) + \mu P'_n(\mu) \quad (3.13)$$

$$(1-\mu^2)P'_n(\mu) = nP_{n-1}(\mu) - n\mu P_n(\mu) \quad (3.14)$$

veya (3.14) eşitliği

$$(1-\mu^2)P'_n(\mu) = (n+1)\mu P_n(\mu) - (n+1)P_{n+1}(\mu) \quad (3.15)$$

şeklinde de yazılabilir.

Legendre polinomları için ortogonalite (diklik) bağıntısı;

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{2}{2n+1}, & n = m \end{cases} \quad (3.16)$$

şeklinde tanımlanır. Polinomun bu özelliği, verilen bir  $f(\mu)$  fonksiyonunu Legendre polinomları cinsinden seriye açma işleminde oldukça kullanışlıdır. Bir  $f(\mu)$  fonksiyonu Legendre polinomları cinsinden seriye açılırken;

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\mu) \quad (3.17)$$

şeklinde yazılabilir. (3.17) eşitliğinin her iki yanını  $P_m(\mu)$  ile çarpılıp  $[-1, 1]$  aralığında integrali alındığında;

$$\frac{2}{2n+1} a_m = \int_{-1}^1 f(\mu) P_m(\mu) d\mu \quad (3.18)$$

eşitliği elde edilir. (3.18) eşitliği;

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^1 f(\mu) P_m(\mu) d\mu \quad (3.19)$$

şeklinde yazılarak  $a_n$  katsayıları belirlenir.

Örneğin  $v$  bir sabit olmak üzere  $f(\mu) = \frac{1}{v-\mu}$  fonksiyonunu Legendre polinomları cinsinden seriye açalım. Bunun için önce  $a_n$  katsayılarını belirleyelim. (3.19) eşitliğine göre ;

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(\mu) P_0(\mu) d\mu = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right) \quad (3.20)$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \int_{-1}^1 f(\mu) P_1(\mu) d\mu = \frac{3v}{2} \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right) - 3 \quad (3.21)$$

$$a_2 = \frac{5}{2} \int_{-1}^1 f(\mu) P_2(\mu) d\mu = \frac{5(3v^2-1)}{4} \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right) - \frac{15}{2}v \quad (3.22)$$

elde edilir. Diğer  $a_n$ 'ler de bu şekilde hesaplandıktan sonra (3.17) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} f(\mu) &= \frac{1}{v-\mu} = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right) + \frac{3v\mu}{2} \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right) - 3\mu \\ &+ \frac{5(3v^2-1)(3\mu^2-1)}{8} \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right) - \frac{15v(3\mu^2-1)}{4} + \dots \end{aligned} \quad (3.23)$$

şeklinde  $f(\mu)$  fonksiyonu Legendre polinomları cinsinden seriye açılmış olur.

Denklem (3.3) ile verilen bağılı Legendre diferansiyel denkleminin çözümlerinin bağılı Legendre polinomları olarak adlandırıldığını daha önce belirtmiştik.  $m$  pozitif bir tamsayı olmak üzere  $P_n^m(\mu)$  ile gösterilen bağılı Legendre polinomları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$P_n^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m}{d\mu^m} P_n(\mu) \quad (3.24)$$

### 3.2. Chebyshev Polinomları

Chebyshev polinomları özel küresel polinomlardır (Arfgen, Weber, 1995). Bu polinomlarının en önemli özelliği nümerik analizlerde kullanılmasıdır. Chebyshev polinomları, Chebyshev diferansiyel denklemi olarak bilinen

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 y}{d\mu^2} - \mu \frac{dy}{d\mu} + n^2 y = 0 \quad (3.25)$$

eşitliğin çözümlerinden ortaya çıkmaktadır. (3.25) eşitliğinin iki bağımsız çözümü mevcuttur. Bu iki bağımsız çözüm;

$$T_n(\mu) = \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m n!}{(n-2m)!(2m)!} (1 - \mu^2)^m \mu^{n-2m} \quad (3.26)$$

$$U_n(\mu) = \sum_{m=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^m (n-m)!}{(n-2m)! m!} (2\mu)^{n-2m} \quad (3.27)$$

şeklinde verilir. (3.26) ve (3.27) eşitlikleri sırasıyla Chebyshev polinomlarının I. Tipi ve II. Tipi olarak bilinir.

Ultraküresel veya Gegenbauer polinomları için genel olarak üretme fonksiyonu,

$$\frac{1}{(1 - 2\mu t + t^2)^\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^\lambda(\mu) t^n, \quad |\mu| \leq 1, |t| < 1 \quad (3.28)$$

ile verilir. Legendre ve Chebyshev polinomları Gegenbauer polinomlarının özel halleridir. (3.28) eşitliğinde  $\lambda = 1/2$  olarak seçilirse Legendre polinomlarının üretme fonksiyonu elde edilir. Eğer  $\lambda = 1$  olarak seçilirse II. tip Chebyshev polinomlarının üretme fonksiyonu elde edilir. (3.28) eşitliğinde  $\lambda = 1$  için  $C_n^1(\mu) = U_n(\mu)$  ile gösterilir. Bu durumda II. tip Chebyshev polinomları için üretme fonksiyonu,

$$\frac{1}{(1 - 2\mu t + t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(\mu) t^n, \quad |\mu| \leq 1, |t| < 1 \quad (3.29)$$

ile verilir.

(3.28) eşitliğinde  $\lambda = 0$  olarak seçilirse güç bir durum ortaya çıkar ve üretici fonksiyon 1 sabitine indirgenir. Bu güç durumdan kurtulabilmek için önce (3.28) eşitliğinin her iki yanının  $t'$ ye göre türevi alındıktan sonra  $\lambda$  yerine sıfır yazılır.

$$\frac{-\lambda(-2\mu + 2t)}{(1 - 2\mu t + t^2)^{\lambda+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n^{\lambda}(\mu) t^{n-1} \quad (3.30)$$

(3.30) eşitliği,

$$\frac{\mu - t}{(1 - 2\mu t + t^2)^{\lambda+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} \left[ \frac{C_n^{\lambda}(\mu)}{\lambda} \right] t^{n-1} \quad (3.31)$$

şeklinde de yazılabilir. Burada,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{C_n^0(\mu)}{\lambda} = C_n^0(\mu) \quad (3.32)$$

ile tanımlanır.  $t'$ ye göre türev alınmasındaki amaç (3.32) eşitliğinden anlaşılacağı gibi belirsiz bir form oluşturmaktır. (3.31) eşitliğinin her iki yanı önce  $2t$  ile çarpılıp sonra her iki yana  $1 = (1 - 2\mu t + t^2)/(1 - 2\mu t + t^2)$  eklenirse,

$$\frac{1-t^2}{1-2\mu t+t^2} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} C_n^0(\mu) t^n \quad (3.33)$$

elde edilir. (3.33) eşitliğine göre Chebyshev polinomlarının I. tipi,

$$T_n(\mu) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{n}{2} C_n^0(\mu), & n > 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

ile tanımlanır. Buna göre I. tip Chebyshev polinomlarının üretme fonksiyonu için,

$$\frac{1-t^2}{1-2\mu t+t^2} = T_0(\mu) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(\mu) t^n, \quad |\mu| \leq 1, |t| < 1 \quad (3.35)$$

eşitliği yazılır.

Biz bu çalışmada I. tip Chebyshev polinomlarını kullanacağımız için I. tip Chebyshev polinomlarının özelliklerini vermeyeceğiz.

Chebyshev polinomları trigonometrik biçimde de ifade edilebilir.  $\mu = \cos \theta$  olmak



üzere I. tip Chebyshev polinomları;

$$T_n(\mu) = \cos n\theta = \cos n(\arccos \mu), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \quad (3.36)$$

şeklinde yazılabilir.

I. tip Chebyshev polinomlarını, yukarıda yapılan tanımların dışında başka biçimlerde de tanımlamak mümkündür.  $T_n(\mu)$  için tanımlanan Rodrigues bağıntısı aşağıda verilmiştir.

$$T_n(\mu) = \frac{(-1)^n \pi^{1/2} (1-x^2)^{1/2}}{2^n (n-\frac{1}{2})!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n-1/2}] \quad (3.37)$$

I. tip Chebyshev polinomlarından ilk birkaç tanesi Çizelge 3.2’de verilmiştir.

Çizelge 3.2. I. Tip Chebyshev Polinomları

$T_0(\mu) = 1$
$T_1(\mu) = \mu$
$T_2(\mu) = 2\mu^2 - 1$
$T_3(\mu) = 4\mu^3 - 3\mu$
$T_4(\mu) = 8\mu^4 - 8\mu^2 + 1$
$T_5(\mu) = 16\mu^5 - 20\mu^3 + 5\mu$
$T_6(\mu) = 32\mu^6 - 48\mu^4 + 18\mu^2 - 1$
$T_7(\mu) = 64\mu^7 - 112\mu^5 + 56\mu^3 - 7\mu$
$T_8(\mu) = 128\mu^8 - 256\mu^6 + 160\mu^4 - 32\mu^2 + 1$
$T_9(\mu) = 256\mu^9 - 576\mu^7 + 432\mu^5 - 120\mu^3 + 9\mu$

I. tip Chebyshev polinomlarını elde edebileceğimiz bir diğer yöntem ise tekrarlama bağıntısı olarak bilinen

$$T_{n+1}(\mu) - 2\mu T_n(\mu) + T_{n-1}(\mu) = 0 \quad (3.38)$$

eşitliğini kullanmaktır. Bu bağıntı kullanılarak  $n$ 'in çeşitli değerleri için  $T_n(\mu)$  polinomları kolayca bulunabilir. Örneğin  $T_0(\mu) = 1$  ve  $T_1(\mu) = \mu$  değerlerini kullanarak  $n = 1$  için  $T_2(\mu)$  'yi kolaylıkla bulabiliriz.

$$T_2(\mu) - 2\mu T_1(\mu) + T_0(\mu) = 0 \quad (3.39)$$

(3.39) eşitliğinden,

$$T_2(\mu) = 2\mu^2 - 1 \quad (3.40)$$

olarak bulunur.

$Z_n(x)$  herhangi bir ortogonal polinom olmak üzere ortogonal polinomlar için tekrarlama bağıntılarının elde edilebileceği katsayılar Çizelge 3.3’de verilmiştir.

Çizelge 3.3. Ortogonal Polinomlar İçin Tekrarlama Bağıntıları

$$Z_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)Z_n(x) - C_n Z_{n-1}(x)$$

	$Z_n(x)$	$A_n$	$B_n$	$C_n$
Legendre	$P_n(x)$	$\frac{2n+1}{n+1}$	0	$\frac{1}{n+1}$
Chebyshev I	$T_n(x)$	2	0	1
Ötelenmiş Chebyshev I	$T_n^*(x)$	4	-2	1
Chebyshev II	$U_n(x)$	2	0	1
Ötelenmiş Chebyshev II	$U_n^*(x)$	4	-2	1
Laguerre	$L_n(x)$	$\frac{-1}{n+1}$	$\frac{2n+1}{n+1}$	$\frac{-n}{n+1}$
Hermite	$H_n(x)$	2	0	$2n$

Bu çizelgeden yararlanılarak Legendre, Chebyshev, Laguerre ve Hermite polinomlarının çeşitli mertebeleri hesaplanabilir.

Ayrıca Chebyshev polinomlarının I. tipini elde etmenin başka bir yolu da aşağıda verilen kare matris determinantını kullanarak istenilen  $n$  değeri için  $n \times n$ ’lik matrisin determinantını hesaplamaktır.

$$T_n(\mu) = \det \begin{bmatrix} \mu & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\mu & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\mu & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2\mu & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\mu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\mu \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

(3.35) eşitliği ile tanımlanan üretme fonksiyonu yardımıyla  $\mu$ ’ nun  $0, \pm 1$  özel değerleri için Chebyshev polinomlarının I. tipinin aşağıdaki gibi tanımlanacağı biraz işlemle görülebilir.

$$T_n(1) = 1$$

$$T_n(-1) = (-1)^n$$

$$T_{2n}(0) = (-1)^n$$

$$T_{2n+1}(0) = 0$$

Ayrıca bu polinomlar için

$$T_n(\mu) = (-1)^n T_n(-\mu) \quad (3.42)$$

şeklinde tanımlanan bir denklik bağıntısı da kullanılmaktadır.

I. tip Chebyshev polinomları için eşitlik (3.35)'de verilen üretme fonksiyonunun her iki yanının  $\mu$ 'ya göre türevi alınıp, eşitliğin düzenlenmesi ile elde edilebilen diferansiyel eşitlikler aşağıda verilmiştir.

$$(1 - \mu^2)T_n'(\mu) = -n\mu T_n(\mu) + nT_{n-1}(\mu) \quad (3.43)$$

$$(1 - \mu^2)T_n''(\mu) - \mu T_n'(\mu) + n^2 T_n(\mu) = 0 \quad (3.44)$$

Klasik ortogonal polinomlarda olduğu gibi I. tip Chebyshev polinomları da  $(1 - \mu^2)^{-1/2}$  ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldır. Bu polinomlar için ortogonalite (diklik) bağıntısı;

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(\mu) T_m(\mu)}{\sqrt{1 - \mu^2}} d\mu = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0 \\ \pi, & n = m = 0 \end{cases} \quad (3.45)$$

ile verilir. Polinomun bu özelliği, verilen bir  $f(\mu)$  fonksiyonunu I. tip Chebyshev polinomları cinsinden seriye açmada oldukça kullanışlıdır. Bir  $f(\mu)$  fonksiyonu I. tip Chebyshev polinomları cinsinden seriye açılırken;

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_n(\mu) \quad (3.46)$$

şeklinde yazılabilir. (3.46) eşitliğinin her iki yanını  $\frac{T_m(\mu)}{\sqrt{1 - \mu^2}}$  ile çarpılıp  $\mu$  üzerinden  $[-1, 1]$  aralığında integrali alındığında;

$$\frac{\pi}{2} C_m = \int_{-1}^1 \frac{f(\mu) T_m(\mu)}{\sqrt{1 - \mu^2}} d\mu, \quad n = m \neq 0 \quad (3.47)$$

elde edilir. (3.47) eşitliği;

$$C_m = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\mu) T_m(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}} d\mu, \quad n = m \neq 0 \quad (3.48)$$

şeklinde yazılarak  $C_m$  katsayıları belirlenir.  $n = m = 0$  iken

$$C_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}} d\mu, \quad n = m = 0 \quad (3.49)$$

olur.

Örneğin  $v$  bir sabit olmak üzere  $f(\mu) = \frac{1}{v-\mu}$  fonksiyonunu bu kez de I. tip

Chebyshev polinomları cinsinden seriye açalım. Bunun için yine önce  $C_n$  katsayılarını belirleyelim. (3.49) ve (3.48) eşitliklerine göre ;

$$C_0 = \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right) \quad (3.50)$$

$$C_1 = \frac{2v}{\pi} \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right) - \frac{4}{\pi} \quad (3.51)$$

$$C_2 = \frac{2(2v^2-1)}{\pi} \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right) - \frac{8v}{\pi} \quad (3.52)$$

elde edilir. Diğer  $C_n$ 'ler de bu şekilde hesaplandıktan sonra (3.46) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} f(\mu) = \frac{1}{v-\mu} &= \frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right) + \frac{2v\mu}{\pi} \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right) - \frac{4\mu}{\pi} \\ &+ \frac{2(2v^2-1)(2\mu^2-1)}{\pi} \ln\left(\frac{v+1}{v-1}\right) - \frac{8v(2\mu^2-1)}{\pi} + \dots \end{aligned} \quad (3.53)$$

şeklinde  $f(\mu)$  fonksiyonu I. tip Chebyshev polinomları cinsinden seriye açılmış olur.

### 3.3. Nötron Transport Eşitliği

Tek gruplu ve zamandan bağımsız transport eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir (Bell, G.I., Glasstone, S., 1970).

$$\Omega \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \Omega) + \sigma_T \psi(\mathbf{r}, \Omega) = \int_{\Omega'} \sigma_s(\Omega \cdot \Omega') \psi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + Q/2 \quad (3.54)$$

(3.54) eşitliği, Boltzmann integro-diferansiyel eşitliği olarak da adlandırılır. Bu eşitlikte;

- $Q$  : Dış kaynak terimi,  
 $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$  : Açısal dağılım fonksiyonu,  
 $\sigma_T$  : Toplam diferansiyel tesir kesiti,  
 $\sigma_s(\Omega \cdot \Omega')$  : Diferansiyel saçılma tesir kesiti,  
 $\Omega'$  : Çarpışma öncesi geliş doğrultusundaki birim vektör,  
 $\Omega$  : Çarpışma sonrası gidiş doğrultusundaki birim vektör,  
 $d\Omega'$  : Katı açısı,

olarak ifade edilir.

Fisyon için, hedef çekirdek bombardıman edildiğinde her zaman çekirdek reaksiyonu gerçekleşmeyebilir. Gelen parçacık ile hedef çekirdeğin etkileşerek bir çekirdek reaksiyonu verme olasılığı, o reaksiyonun tesir kesiti olarak tanımlanır ve  $\sigma$  ile gösterilir.

Hedef çekirdeklere gelen parçacıklar, çekirdeklerle tek bir tip reaksiyon yapmayı farklı tipte reaksiyonlar yapabiliyorlarsa bu durumda her bir reaksiyon için tesir kesiti genellikle birbirinden farklı olacaktır. Bu farklı tesir kesitlerinin her birine, kısmi tesir kesiti denir. Kısmi tesir kesitlerinin toplamına da toplam tesir kesiti adı verilir. Birim katı açısı başına düşen tesir kesiti ise diferansiyel saçılma tesir kesiti olarak adlandırılır. Bu tanımlamalara göre sırasıyla saçılma diferansiyel tesir kesiti ve toplam diferansiyel tesir kesiti,

$$\sigma_s(\Omega \cdot \Omega') = \frac{d\sigma}{d\Omega'} \quad (3.55)$$

$$\sigma_T = \int_{\Omega'} \frac{d\sigma}{d\Omega'} \quad (3.56)$$

eşitlikleri ile verilir.

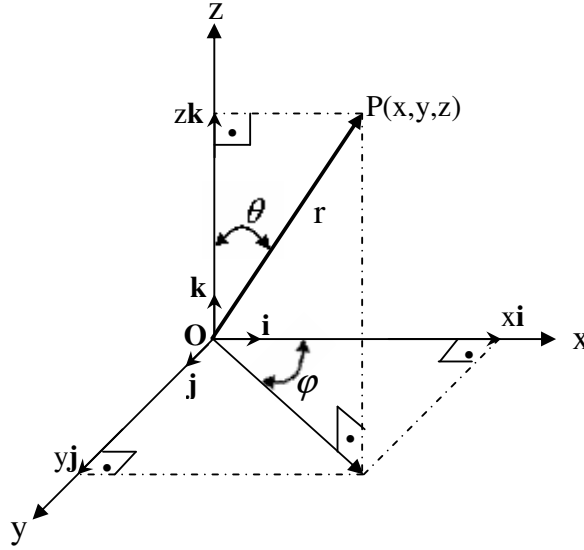
$\Omega'$  ve  $\Omega$  birim vektörlerini, küresel koordinat sisteminde ifade edebilmek amacıyla öncelikle Şekil 3.1'deki gibi küresel koordinat sistemi üzerinde bir  $\mathbf{r}$  konum vektörünün bileşenleri göstermek yararlı olacaktır.

En genel hali ile küresel geometride konum vektörü;

$$\mathbf{r} = |\mathbf{r}| \sin\theta \cos\varphi \mathbf{i} + |\mathbf{r}| \sin\theta \sin\varphi \mathbf{j} + |\mathbf{r}| \cos\theta \mathbf{k} \quad (3.57)$$

bağıntısı ile verilmektedir.  $\mathbf{r}$  vektörü doğrultusundaki çarpışma sonrası birim vektör,

$$\Omega = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = \sin\theta \cos\varphi \mathbf{i} + \sin\theta \sin\varphi \mathbf{j} + \cos\theta \mathbf{k} \quad (3.58)$$



Şekil 3.1 Küresel Koordinatlar

ile ifade edilir. Bu eşitlikte  $\cos\theta = \mu$  olarak seçilirse;  $\sin\theta = \sqrt{1-\mu^2}$  olur. Öyleyse (3.58) eşitliği;

$$\mathbf{\Omega} = \sqrt{1-\mu^2} \cos\varphi \mathbf{i} + \sqrt{1-\mu^2} \sin\varphi \mathbf{j} + \mu \mathbf{k} \quad (3.59)$$

şeklinde yazılabilir. Benzer şekilde hedefe geliş doğrultusundaki konum vektörü de

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'| \sin\theta' \cos\varphi' \mathbf{i} + |\mathbf{r}'| \sin\theta' \sin\varphi' \mathbf{j} + |\mathbf{r}'| \cos\theta' \mathbf{k} \quad (3.60)$$

şeklinde ifade edilir. Bu doğrultudaki çarpışma öncesi birim vektör ise;

$$\mathbf{\Omega}' = \frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|} = \sin\theta' \cos\varphi' \mathbf{i} + \sin\theta' \sin\varphi' \mathbf{j} + \cos\theta' \mathbf{k} \quad (3.61)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik için de  $\cos\theta' = \mu'$  olarak seçilirse;  $\sin\theta' = \sqrt{1-\mu'^2}$  olur ve (3.61) eşitliği aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\mathbf{\Omega}' = \sqrt{1-\mu'^2} \cos\varphi' \mathbf{i} + \sqrt{1-\mu'^2} \sin\varphi' \mathbf{j} + \mu' \mathbf{k} \quad (3.62)$$

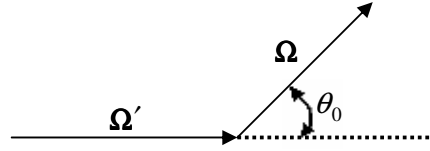
$\mathbf{A}$  ve  $\mathbf{B}$  gibi iki vektörün arasındaki açı  $\alpha$  ise bu iki vektörün skaler çarpımı

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \cos\alpha \quad (3.63)$$

bağıntısı ile verilir.

$\mathbf{\Omega}'$  ile  $\mathbf{\Omega}$  birim vektörleri arasındaki açı  $\theta_0$ , Şekil 3.2'de gösterilmiştir. (3.59) ve (3.62) eşitliklerinde verilen bu iki birim vektörün skaler çarpımı  $\mu_0$  ile gösterilirse

$$\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}' = \mu_0 = \cos \theta_0 = \mu \mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\varphi - \varphi') \quad (3.64)$$



Şekil 3.2 Birim Vektörler

Diferansiyel saçılma tesir kesiti  $\sigma_s(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}')$ 'yi, transport eşitliğinin çözümü için  $P_n(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}')$  Legendre polinomları cinsinden seriye açmak, alışlagelmiş bir yöntemdir. Bu seri,

$$\sigma_s(\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}') = \sigma_s(\mu_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \sigma_{sn} P_n(\mu_0), \quad -1 \leq \mu_0 \leq 1 \quad (3.65)$$

bağıntısı ile verilmektedir. Bu eşitlikte yer alan  $P_n(\mu_0)$ , addition teoremine göre;

$$P_n(\mu_0) = P_n(\mu) P_n(\mu') + 2 \sum_{m=1}^n \frac{(n-m)!}{(n+m)!} P_n^m(\mu) P_n^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi') \quad (3.66)$$

şeklinde yazılabilir. (3.66) eşitliği, (3.65)'de yerine yazılıp, elde edilen eşitliğin her iki yanının  $\varphi'$  üzerinden  $[0, 2\pi]$  aralığında integrali alınırsa;

$$\int_0^{2\pi} \sigma(\mu_0) d\varphi' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \sigma_{sn} P_n(\mu) P_n(\mu') \quad (3.67)$$

sonucuna ulaşılır.

(3.54) eşitliğindeki katı aç integrali;

$$\int d\mathbf{\Omega}' = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sin\theta' d\theta' d\varphi' = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 d(\cos\theta') d\varphi' = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 d(\mu') d\varphi' \quad (3.68)$$

ile verilir. (3.67) ve (3.68) eşitlikleri, (3.54)'de yerine yazılırsa;

$$\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) + \sigma_T \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \sigma_{sn} P_n(\mu) P_n(\mu') \psi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}') d\mu' + Q/2 \quad (3.69)$$

elde edilir. Burada  $Q$  dış kaynağı temsil etmektedir. (3.69) eşitliğinde yer alan  $\mathbf{\Omega} \cdot \nabla \psi$ , düzlem geometride

$$\Omega \cdot \nabla \psi = \mu \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3.70)$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca  $\mu = \Omega \cdot \hat{x}$  ve  $\mu' = \Omega' \cdot \hat{x}$  'dir. Burada  $\hat{x}$ , x doğrultusundaki birim vektördür.

(3.69) eşitliğindeki  $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$  açısal akısının, azimutal simetriye sahip olduğu yani  $\varphi$  açısından bağımsız olduğu kabul edilirse  $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$ , düzlem geometride

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = \psi(x, \mu) \quad (3.71)$$

olarak yazılabilir. (3.70) ve (3.71) eşitlikleri, (3.69)'de kullanılırsa tek gruplu ve tek boyutlu dilim geometride dış kaynaktan bağımsız lineer nötron transport eşitliği,

$$\mu \frac{d\psi(x, \mu)}{dx} + \sigma_T \psi(x, \mu) = \int_{-1}^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \sigma_{sn} P_n(\mu) P_n(\mu') \psi(x, \mu') d\mu' \quad (3.72)$$

şeklinde yazabilir. (3.72) eşitliğin ikinci kısmındaki toplam ifadesi açılırsa;

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\psi(x, \mu)}{dx} + \sigma_T \psi(x, \mu) &= \frac{1}{2} \sigma_{s0} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' + \frac{3}{2} \sigma_{s1} \mu \int_{-1}^1 \mu' \psi(x, \mu') d\mu' \\ &+ \frac{5}{2} \sigma_{s2} \left( \frac{3}{2} \mu^2 - \frac{1}{2} \right) \int_{-1}^1 \left( \frac{3}{2} \mu'^2 - 1 \right) \psi(x, \mu') d\mu' + \dots \end{aligned} \quad (3.73)$$

elde edilir. (3.72) eşitliği sadece  $n = 0$  için

$$\mu \frac{d\psi(x, \mu)}{dx} + \sigma_T \psi(x, \mu) = \frac{1}{2} \sigma_{s0} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' \quad (3.74)$$

şeklinde düzenlenirse bu eşitliğe dış kaynaktan bağımsız lineer izotropik saçılmalı nötron transport eşitliği denir.

### 3.2.1. Lineer Anizotropik Saçılmalı Nötron Transport Eşitliği

(3.72) eşitliğindeki toplam ifadesi  $n = 1$ 'e kadar açılırsa elde edilen eşitliğe dış kaynaktan bağımsız lineer anizotropik saçılmalı nötron transport eşitliği denir. Yani tek gruplu ve tek boyutlu dilim geometride dış kaynaktan bağımsız lineer anizotropik saçılmalı nötron transport eşitliğini,

$$\begin{aligned} \mu \frac{d\psi(x, \mu)}{dx} + \sigma_T \psi(x, \mu) &= \frac{1}{2} \sigma_{s0} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu' + \frac{3}{2} \sigma_{s1} \mu \int_{-1}^1 \mu' \psi(x, \mu') d\mu' \\ -1 \leq \mu \leq 1, \quad -a \leq x \leq a \end{aligned} \quad (3.75)$$



şeklinde yazabiliriz. Bu eşitlikteki  $\mu$ , nötron doğrultusunu belirleyen bir parametre olup nötron doğrultusunun x-ekseni ile yaptığı açının kosinüsünü,  $\sigma_{s0}$  ve  $\sigma_{s1}$  diferansiyel saçılma tesir kesitinin sırasıyla ilk ve ikinci bileşenlerini temsil etmektedir.

Eğer (3.72) eşitliğindeki toplam ifadesi  $n = 2$  veya 2'den büyük değerlere kadar açılırsa bu eşitliklere yüksek mertebeden dış kaynaktan bağımsız lineer anizotropik saçılmalı nötron transport eşitliği denir.

### 3.3. Legendre Polinomu Yaklaşımı: $P_N$ Metodu

(3.75) eşitliğinde bulunan  $\psi(x, \mu)$ , açılmal akı fonksiyonunun tanım aralıkları  $-1 \leq \mu \leq 1$ ,  $-a \leq x \leq a$  ile verilen iki değişkene bağlıdır.  $\psi(x, \mu)$  fonksiyonunu, birisi  $x$ 'e, diğeri  $\mu$ 'ya bağlı olacak şekilde iki değişkenin çarpımı şeklinde yazılabilir. Bu metotta açılmal akı fonksiyonu  $\psi(x, \mu)$ , Legendre polinomları cinsinden aşağıdaki gibi seriye açılabilir.

$$\psi(x, \mu) = \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \phi_n(x) P_n(\mu), \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad -a \leq x \leq a \quad (3.76)$$

(3.76) eşitliğindeki  $\phi_n(x)$ 'ler, akı momentleri olarak adlandırılır. Bu eşitlikteki  $P_n(\mu)$ 'ler ise Legendre polinomlarıdır. Legendre polinomları serisine bağlı olarak ifade edilen (3.76) eşitliğinin, (3.75) eşitliğinde kullanılarak çözümlenmesi yöntemine  $P_N$  metodu denir.

$$\begin{aligned} & \mu \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \frac{d\phi_n(x)}{dx} P_n(\mu) + \sigma_T \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \phi_n(x) P_n(\mu) \\ &= \frac{\sigma_{s0}}{2} \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \phi_n(x) \int_{-1}^1 P_n(\mu') d\mu' + \frac{3\sigma_{s1}}{2} \mu \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \phi_n(x) \int_{-1}^1 \mu' P_n(\mu') d\mu' \end{aligned} \quad (3.77)$$

(3.77) eşitliğinde,

$$\int_{-1}^1 P_n(\mu') d\mu' = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (3.78)$$

ve

$$\int_{-1}^1 \mu' P_n(\mu') d\mu' = \begin{cases} \frac{2}{3}, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases} \quad (3.79)$$

olduğu için bu eşitlik;

$$\sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \frac{d\phi_n(x)}{dx} \mu P_n(\mu) + \sigma_T \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \phi_n(x) P_n(\mu) = \frac{\sigma_{s_0}}{2} \phi_0(x) + \frac{3\sigma_{s_1}}{2} \mu \phi_1(x) \quad (3.80)$$

şeklinde yazılabilir. (3.80) eşitliğinde, eşitlik (3.7)'de verilen Legendre polinomları için tekrarlama bağıntısı kullanılarak elde edilen eşitliğin her iki yanını  $P_m(\mu)$  ile çarpılıp  $\mu$  üzerinden  $[-1, 1]$  aralığında integrali alınırsa;

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \frac{n+1}{2} \frac{d\phi_n(x)}{dx} \int_{-1}^1 P_{n+1}(\mu) P_m(\mu) d\mu + \sum_{n=0}^N \frac{n}{2} \frac{d\phi_n(x)}{dx} \int_{-1}^1 P_{n-1}(\mu) P_m(\mu) d\mu \\ & + \sigma_T \sum_{n=0}^N \frac{2n+1}{2} \phi_n(x) \int_{-1}^1 P_n(\mu) P_m(\mu) d\mu \\ & = \frac{\sigma_{s_0}}{2} \phi_0(x) \int_{-1}^1 P_m(\mu) d\mu + \frac{3\sigma_{s_1}}{2} \phi_1(x) \int_{-1}^1 \mu P_m(\mu) d\mu \end{aligned} \quad (3.81)$$

eşitliği elde edilir. (3.81) eşitliğinde  $m$ 'ye sıfırdan itibaren pozitif tamsayı değerleri verilerek ve eşitlik (3.16)'de verilen Legendre polinomları için diklik bağıntısı ile (3.78) ve (3.79) eşitliklerinde tanımlanan özellikler dikkate alınarak  $\phi_n(x)$  akı momentleri ile ilgili diferansiyel denklemler elde edilebilir.

$$m = 0 \Rightarrow \frac{d\phi_1(x)}{dx} + \sigma_T \phi_0(x) = \sigma_{s_0} \phi_0(x) \quad \rightarrow \quad P_0 \text{ yaklaşımı} \quad (3.82)$$

$$m = 1 \Rightarrow \frac{d\phi_0(x)}{dx} + 2 \frac{d\phi_2(x)}{dx} + 3\sigma_T \phi_1(x) = 3\sigma_{s_1} \phi_1(x) \rightarrow P_1 \text{ yaklaşımı} \quad (3.83)$$

$$m = 2 \Rightarrow 2 \frac{d\phi_1(x)}{dx} + 3 \frac{d\phi_3(x)}{dx} + 5\sigma_T \phi_2(x) = 0 \quad \rightarrow \quad P_2 \text{ yaklaşımı} \quad (3.84)$$

$$m = 3 \Rightarrow 3 \frac{d\phi_2(x)}{dx} + 4 \frac{d\phi_4(x)}{dx} + 7\sigma_T \phi_3(x) = 0 \quad \rightarrow \quad P_3 \text{ yaklaşımı} \quad (3.85)$$

$$m = 4 \Rightarrow 4 \frac{d\phi_3(x)}{dx} + 5 \frac{d\phi_5(x)}{dx} + 9\sigma_T \phi_4(x) = 0 \quad \rightarrow \quad P_4 \text{ yaklaşımı} \quad (3.86)$$

$$m = 5 \Rightarrow 5 \frac{d\phi_4(x)}{dx} + 6 \frac{d\phi_6(x)}{dx} + 11\sigma_T \phi_5(x) = 0 \quad \rightarrow \quad P_5 \text{ yaklaşımı} \quad (3.87)$$

Sonuç olarak, akı momentleri için genel bir ifade;

$$n \frac{d\phi_{n-1}(x)}{dx} + (n+1) \frac{d\phi_{n+1}(x)}{dx} + (2n+1)\sigma_T \phi_n(x) = \sigma_{s0} \phi_0(x) \delta_{n0} + 3\sigma_{s1} \phi_1(x) \delta_{n1},$$

$$-a \leq x \leq a, \quad n \geq 0 \quad (3.88)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $\delta_{mn}$  Kronecker deltası olarak bilinir ve özelliği aşağıda belirtilmiştir.

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (3.89)$$

Eşitlik (3.88)'den anlaşılacağı gibi  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N$  olmak üzere sonlu sayıda birbiri ile bağıntılı  $N+1$  tane  $\phi_n(x)$  akı momentleri ile ilgili diferansiyel denklem mevcuttur.  $P_{N+1}(\mu)$  polinomu,  $N$ 'nin büyük değerleri için hızlı salınımlar sergilemektedir yani  $-1 \leq \mu \leq 1$  aralığında  $N+1$  kez işaret değiştirmektedir. Bu durumda  $\phi_{N+1}(x)$ , büyük  $N$  değerleri için oldukça küçük olmaktadır. Buna göre  $\phi_{N+1}(x) = 0$  yaklaşımı uygun bir çözüm olacaktır. Bu çözüm yöntemi  $P_N$  yaklaşımı olarak bilinir. Aynı durum Chebyshev polinomlarının hem birinci hem de ikinci tipi için de geçerlidir.

Difüzyon yaklaşımında,  $N \geq 1$  değerleri için akı momentlerinin  $\phi_{N+1}(x) = 0$  olduğu kabul edilir.  $P_1$  yaklaşımında,  $n = 0$  ve  $n = 1$  için (3.88) eşitliği sırasıyla;

$$\frac{d\phi_1(x)}{dx} + \sigma_T \phi_0(x) = \sigma_{s0} \phi_0(x) \quad (3.90)$$

$$\frac{d\phi_0(x)}{dx} + 3\sigma_T \phi_1(x) = 3\sigma_{s1} \phi_1(x) \quad (3.91)$$

şeklinde yazılabilir.  $c_0 = \frac{\sigma_{s0}}{\sigma_T}$  ve  $c_1 = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_T}$  olmak üzere sırasıyla (3.90) ve (3.91) eşitlikleri;

$$\frac{d\phi_1(x)}{dx} + \sigma_T(1-c_0)\phi_0(x) = 0 \quad (3.92)$$

$$\frac{d\phi_0(x)}{dx} + 3\sigma_T(1-c_1)\phi_1(x) = 0 \quad (3.93)$$

şeklinde düzenlenebilir. (3.92) ve (3.93) eşitliklerindeki  $\phi_0(x)$  nötron skaler akısını,  $\phi_1(x)$  ise  $x$  doğrultusundaki nötron akısını temsil eder. (3.93) eşitliği,

$$\phi_1(x) = -\frac{1}{3\sigma_T(1-c_1)} \frac{d\phi_0(x)}{dx} \quad (3.94)$$

şeklinde yazılabilir.

Genel geometride, nötron skaler akısı ile nötron akımı arasında Fick's kanununa göre,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -D\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad (3.95)$$

ile tanımlanan bir ilişki vardır. (3.95) eşitliğinde  $D$ , difüzyon sabitidir. Fiziksel olarak tek boyutta (3.95) eşitliği (3.94) eşitliğine eşdeğerdir. (3.94) eşitliği, (3.92) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$\frac{d^2\phi_0(x)}{dx^2} - 3\sigma_T^2(1-c_0)(1-c_1)\phi_0(x) = 0 \quad (3.96)$$

sonucu elde edilir ki (3.96) eşitliği dış kaynaktan bağımsız nötron difüzyon eşitliği adını alır. Sonuç olarak  $P_1$  yaklaşımına göre difüzyon sabiti ve difüzyon uzunluğu sırası ile,

$$D = \frac{1}{3\sigma_T(1-c_1)} \quad (3.97)$$

$$L = \frac{1}{\sigma_T\sqrt{3(1-c_0)(1-c_1)}} \quad (3.98)$$

olarak bulunur.

Eşitlik (3.88) ile verilen birbiri ile kulpajlı denklem sisteminin çözümü için

$$\phi_n(x) = A_n(v)\exp(\sigma_T x/v), \quad -a \leq x \leq a \quad (3.99)$$

şeklinde tanımlanan bir eşitlik önerilebilir. (3.99) eşitliği, (3.88) eşitliğinde yerine yazılarak çözümlene yapılırsa bütün  $A_n(v)$  özfonksiyonları için analitik ifadeler bulmak mümkün olur;

$$A_0(v) = 1 \quad (3.100a)$$

$$A_1(v) + v(1-c_0)A_0(v) = 0 \quad (3.100b)$$

$$A_0(v) + 2A_2(v) + 3v(1-c_1)A_1(v) = 0 \quad (3.100c)$$

$$2A_1(v) + 3A_3(v) + 5vA_2(v) = 0 \quad (3.100d)$$

$$3A_2(v) + 4A_4(v) + 7vA_3(v) = 0 \quad (3.100e)$$

$$4A_3(v) + 5A_5(v) + 9vA_4(v) = 0 \quad (3.100f)$$

.....

Buna göre  $A_n(v)$  'ler için genel bir tekrarlılama bağıntısı,

$$nA_{n-1}(v) + (n+1)A_{n+1}(v) + (2n+1)vA_n(v) = \nu c_0 A_0(v) \delta_{n0} + 3\nu c_1 A_1(v) \delta_{n1},$$

$$n \geq 0, \quad (3.101)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $v$ 'lar özdeğerleri,  $A_n(v)$  'ler de özfonksiyonları temsil etmektedir.  $\nu$  özdeğerlerinin hesaplanması için iki yöntem vardır. Bunlardan ilki  $A_{N+1}(v) = 0$  denklemini çözmektir. Örneğin  $N = 1$  için eşitlik (3.100c)'de  $A_2(v) = 0$  olmalıdır. Bu durumda  $A_2(v) = 0$  denklemin kökleri

$$\nu = \pm \frac{1}{\sqrt{3(1-c_0)(1-c_1)}} \quad (3.102)$$

olarak bulunur. (3.102) eşitliğinde çarpışma başına ortaya çıkan nötron sayılarına ( $c_0$  ve  $c_1$  'e) değerler verilerek  $P_1$  yaklaşımına göre  $\nu$  özdeğerleri hesaplanabilir.

İkinci yöntem ise (3.101) eşitliğini kullanarak  $A_n(v)$  'lerin katsayılarından oluşan  $(N+1) \times (N+1)$  elemanlı bir kare matris oluşturmak ve bu matrisin determinantını sifıra eşitleyerek  $\nu$  özdeğerlerini hesaplanmaktadır. Eşitlik (3.101)'i kullanarak oluşturulan denklemler, matris cebiri kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$|M(\nu)| \mathbf{A} = 0 \quad (3.103)$$

$$\begin{bmatrix} \nu(1-c_0) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3\nu(1-c_1) & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5\nu & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7\nu & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (2n+1)\nu \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.104)$$

Çarpışma başına ortaya çıkan nötron sayılarına ( $c_0$  ve  $c_1$  'e) çeşitli değerler verilerek  $P_2$ ,  $P_5$ ,  $P_6$  ve  $P_{10}$  yaklaşımları için  $\nu$  özdeğerleri hesaplanmıştır.  $P_N$  yaklaşımı olarak adlandırılan bu yöntemle özdeğerlerin hesaplanmasında kullanılan  $c_0$  ve  $c_1$  sayılarının aynı değerleri,  $T_N$  yaklaşımı ile hesaplanacak özdeğerler için de kullanılmıştır. Bu

$\nu$  özdeğerleri için tablolar oluşturulmuştur. Aynı  $c_0$  ve  $c_1$  sayıları için her iki yöntemden elde edilen özdeğerler birlikte aynı tablolarda bulgular ve tartışma bölümünde sunulmuştur.  $\nu$  özdeğerleri ile ilgili yorumlar sonraki bölümde verilecektir.  $\nu$  özdeğerleri akı momentlerinin hesaplanmasında kullanılır.

### 3.4. Chebyshev Polinomu Yaklaşımı: $T_N$ Metodu

Bu yöntemde, (3.75) eşitliği ile verilen dış kaynaktan bağımsız lineer anizotropik saçılmalı nötron transport eşitliğinde yer alan açısız akı fonksiyonu  $\psi(x, \mu)$ , I. tip Chebyshev polinomları cinsinden aşağıdaki gibi seriye açılabilir.

$$\psi(x, \mu) = \frac{\Phi_0(x)T_0(\mu)}{\pi\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{2}{\pi\sqrt{1-\mu^2}} \sum_{n=1}^N \Phi_n(x)T_n(\mu), \quad -1 \leq \mu \leq 1, \quad -a \leq x \leq a \quad (3.105)$$

(3.105) eşitliğindeki  $\Phi_n(x)$ 'ler, akı momentleridir. Bu eşitlikteki  $T_n(\mu)$ 'ler ise I. tip Chebyshev polinomlarıdır. I. tip Chebyshev polinomları serisine bağlı olarak ifade edilen (3.105) eşitliğinin, (3.75) eşitliğinde kullanılarak çözümleme yapılması yöntemine  $T_N$  metodu denir.

$$\begin{aligned} \mu \left[ \frac{T_0(\mu)}{\pi\sqrt{1-\mu^2}} \frac{d\Phi_0(x)}{dx} + \frac{2}{\pi\sqrt{1-\mu^2}} \sum_{n=1}^N T_n(\mu) \frac{d\Phi_n(x)}{dx} \right] + \sigma_T \left[ \frac{\Phi_0(x)T_0(\mu)}{\pi\sqrt{1-\mu^2}} \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi\sqrt{1-\mu^2}} \sum_{n=1}^N \Phi_n(x)T_n(\mu) \right] = \frac{\sigma_{s0}}{2} \int_{-1}^1 \left[ \frac{\Phi_0(x)T_0(\mu')}{\pi\sqrt{1-\mu'^2}} + \frac{2}{\pi\sqrt{1-\mu'^2}} \sum_{n=1}^N \Phi_n(x)T_n(\mu') \right] d\mu' \\ + \frac{3\sigma_{s1}}{2} \mu \int_{-1}^1 \left[ \frac{\Phi_0(x)T_0(\mu')}{\pi\sqrt{1-\mu'^2}} + \frac{2}{\pi\sqrt{1-\mu'^2}} \sum_{n=1}^N \Phi_n(x)T_n(\mu') \right] \mu' d\mu' \quad (3.106) \end{aligned}$$

(3.106) eşitliğinde

$$\int_{-1}^1 \frac{T_0(\mu')}{\sqrt{1-\mu'^2}} d\mu' = \pi \quad (3.107)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(\mu')}{\sqrt{1-\mu'^2}} d\mu' = 0, \quad n \geq 1 \quad (3.108)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\mu' T_0(\mu')}{\sqrt{1-\mu'^2}} d\mu' = 0 \quad (3.109)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\mu' T_n(\mu')}{\sqrt{(1-\mu'^2)}} d\mu' = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n=1 \\ 0, & n>1 \end{cases} \quad (3.110)$$

oldukları için bu eşitlik

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \frac{d\Phi_0(x)}{dx} \frac{\mu T_0(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{d\Phi_n(x)}{dx} \frac{\mu T_n(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} + \frac{\sigma_T}{\pi} \frac{\Phi_0(x) T_0(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} \\ & + \frac{2\sigma_T}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\Phi_n(x) T_n(\mu)}{\sqrt{1-\mu^2}} = \frac{\sigma_{s_0}}{2} \Phi_0(x) + \frac{3\sigma_{s_1}}{2} \mu \Phi_1(x) \end{aligned} \quad (3.111)$$

şeklinde yazılabilir. (3.111) eşitliğinde, eşitlik (3.38)'de verilen I. tip Chebyshev polinomları için tekrarlıma bağıntısı kullanılarak elde edilen eşitliğin her iki yanını  $T_m(\mu)$  ile çarpılıp  $\mu$  üzerinden  $[-1, 1]$  aralığında integrali alındığında;

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \frac{d\Phi_0(x)}{dx} \int_{-1}^1 \frac{\mu T_0(\mu) T_m(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}} d\mu + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \frac{d\Phi_n(x)}{dx} \left[ \int_{-1}^1 \frac{T_{n+1}(\mu) T_m(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}} d\mu \right. \\ & \left. + \int_{-1}^1 \frac{T_{n-1}(\mu) T_m(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}} d\mu \right] + \frac{\sigma_T \Phi_0(x)}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_0(\mu) T_m(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}} d\mu + \frac{2\sigma_T}{\pi} \sum_{n=1}^N \Phi_n(x) \int_{-1}^1 \frac{T_n(\mu) T_m(\mu)}{\sqrt{(1-\mu^2)}} d\mu \\ & = \frac{\sigma_{s_0} \Phi_0(x)}{2} \int_{-1}^1 T_m(\mu) d\mu + \frac{3\sigma_{s_1} \Phi_1(x)}{2} \int_{-1}^1 \mu T_m(\mu) d\mu \end{aligned} \quad (3.112)$$

eşitliği elde edilir. (3.112) eşitliğinde  $m$ 'ye sıfırdan itibaren pozitif tamsayı değerleri verilerek ve eşitlik (3.45)'de verilen I. tip Chebyshev polinomları için diklik bağıntısı ile (3.107), (3.108), (3.109) ve (3.110) eşitliklerinde tanımlanan özellikler dikkate alınarak  $\Phi_n(x)$  akı momentleri ile ilgili diferansiyel denklemler elde edilebilir.

$$m=0 \Rightarrow \frac{d\Phi_1(x)}{dx} + \sigma_T \Phi_0(x) = \sigma_{s_0} \Phi_0(x) \rightarrow T_0 \text{ yaklaşımı} \quad (3.113)$$

$$m=1 \Rightarrow \frac{d\Phi_0(x)}{dx} + \frac{d\Phi_2(x)}{dx} + 2\sigma_T \Phi_1(x) = 2\sigma_{s_1} \Phi_1(x) \rightarrow T_1 \text{ yaklaşımı} \quad (3.114)$$

$$m=2 \Rightarrow \frac{d\Phi_1(x)}{dx} + \frac{d\Phi_3(x)}{dx} + 2\sigma_T \Phi_2(x) = -\frac{2}{3} \sigma_{s_0} \Phi_0(x) \rightarrow T_2 \text{ yaklaşımı} \quad (3.115)$$

$$m=3 \Rightarrow \frac{d\Phi_2(x)}{dx} + \frac{d\Phi_4(x)}{dx} + 2\sigma_T \Phi_3(x) = -\frac{6}{5} \sigma_{s_1} \Phi_1(x) \rightarrow T_3 \text{ yaklaşımı} \quad (3.116)$$

$$m = 4 \Rightarrow \frac{d\Phi_3(x)}{dx} + \frac{d\Phi_5(x)}{dx} + 2\sigma_T \Phi_4(x) = -\frac{2}{15} \sigma_{s_0} \Phi_0(x) \rightarrow T_4 \text{ yaklaşımı (3.117)}$$

$$m = 5 \Rightarrow \frac{d\Phi_4(x)}{dx} + \frac{d\Phi_6(x)}{dx} + 2\sigma_T \Phi_5(x) = -\frac{6}{21} \sigma_{s_1} \Phi_1(x) \rightarrow T_5 \text{ yaklaşımı (3.118)}$$

Sonuç olarak akı momentleri için genel bir ifade;

$$\frac{d\Phi_{n+1}(x)}{dx} + \frac{d\Phi_{n-1}(x)}{dx} + 2\sigma_T \Phi_n(x) = \left[ \frac{1+(-1)^n}{1-n^2} \right] \sigma_{s_0} \Phi_0(x) + 3 \left[ \frac{(-1)^n - 1}{n^2 - 4} \right] \sigma_{s_1} \Phi_1(x),$$

$$-a \leq x \leq a, \quad n \geq 3 \quad (3.119)$$

şeklinde yazılabilir.  $n < 3$  için (3.113), (3.114), (3.115) eşitlikleri ve  $n \geq 3$  için (3.119) eşitliği dikkate alındığında  $N+1$  tane  $\Phi_n(x)$  akı momentleri ile ilgili diferansiyel denklem mevcuttur.

Difüzyon yaklaşımında,  $N \geq 1$  değerleri için akı momentleri  $\Phi_{N+1}(x) = 0$  olduğu varsayılır.  $P_N$  metodunda,  $n = 1$  durumunun difüzyon yaklaşımına eşdeğer olduğu gösterilmişti. Benzer şekilde  $T_N$  metodunda da  $n = 1$  durumunun difüzyon yaklaşımına benzer sonuçlar verdiği gösterilebilir. Bu kural,  $n = 1$  için  $T_1$  yaklaşımında, (3.114) eşitliğinde kullanılırsa;

$$\frac{d\Phi_0(x)}{dx} + 2\sigma_T \Phi_1(x) = 2\sigma_{s_1} \Phi_1(x) \quad (3.120)$$

elde edilir.  $c_0 = \frac{\sigma_{s_0}}{\sigma_T}$  ve  $c_1 = \frac{\sigma_{s_1}}{\sigma_T}$  olmak üzere (3.113) ve (3.120) eşitlikleri sırasıyla,

$$\frac{d\Phi_1(x)}{dx} + \sigma_T (1 - c_0) \Phi_0(x) = 0 \quad (3.121)$$

$$\frac{d\Phi_0(x)}{dx} + 2\sigma_T (1 - c_1) \Phi_1(x) = 0 \quad (3.122)$$

şeklinde düzenlenebilir. Eşitlik (3.122)'den nötron akısı, skaler akıya bağlı olarak

$$\Phi_1(x) = -\frac{1}{2\sigma_T (1 - c_1)} \frac{d\Phi_0(x)}{dx} \quad (3.123)$$

şeklinde yazılabilir. Önceki bölümde genel geometride, nötron skaler akısı ile nötron akımı arasında tanımlanan Fick's kanunu, (3.95) eşitliği ile verilmişti. Tek boyutta (3.95) eşitliği (3.123) eşitliğine eşdeğerdir. (3.123) eşitliği, (3.122) eşitliğinde yerine yazılırsa;



$$\frac{d^2\Phi_0(x)}{dx^2} - 2\sigma_T^2(1-c_0)(1-c_1)\Phi_0(x) = 0 \quad (3.124)$$

sonucu elde edilir ki (3.124) eşitliği dış kaynaktan bağımsız nötron difüzyon denklemi olarak adlandırılır. Sonuç olarak  $T_1$  yaklaşımına göre difüzyon sabiti ve difüzyon uzunluğu sırasıyla

$$D = \frac{1}{2\sigma_T(1-c_1)} \quad (3.125)$$

$$L = \frac{1}{\sigma_T\sqrt{2(1-c_0)(1-c_1)}} \quad (3.126)$$

olarak bulunur.  $T_1$  ve  $P_1$  yaklaşımlarından elde edilen difüzyon sabitlerinin ve difüzyon uzunluklarının karşılaştırması aşağıda verilmiştir.

<u>Yaklaşım</u>	<u>Difüzyon Sabiti</u>	<u>Difüzyon Uzunluğu</u>
$T_1$	$D = \frac{1}{2\sigma_T(1-c_1)}$	$L = \frac{1}{\sigma_T\sqrt{2(1-c_0)(1-c_1)}}$
$P_1$	$D = \frac{1}{3\sigma_T(1-c_1)}$	$L = \frac{1}{\sigma_T\sqrt{3(1-c_0)(1-c_1)}}$

Eşitlik (3.119) ile verilen birbiri ile kulpajlı denklem sisteminin çözümü için

$$\Phi_n(x) = G_n(v) \exp(\sigma_T x/v), \quad -a \leq x \leq a \quad (3.127)$$

şeklinde tanımlanan bir eşitlik önerilebilir. (3.127) eşitliği,  $n < 3$  durumları için (3.113), (3.114), (3.115) eşitliklerinde;  $n \geq 3$  durumları için (3.119) eşitliğinde kullanılarak çözümlene yapılırsa bütün  $G_n(v)$  'ler için analitik ifadeler bulmak mümkün olur.

$$G_0(v) = 1 \quad (3.128a)$$

$$G_1(v) = -v(1-c_0)G_0(v) \quad (3.128b)$$

$$G_0(v) + G_2(v) = -2v(1-c_1)G_1(v) \quad (3.128c)$$

$$G_1(v) + G_3(v) + 2vG_2(v) = -\frac{2}{3}vc_0G_0(v) \quad (3.128d)$$

$$G_2(v) + G_4(v) + 2vG_3(v) = -\frac{6}{5}vc_1G_1(v) \quad (3.128e)$$

$$G_3(v) + G_5(v) + 2vG_4(v) = -\frac{2}{15}vc_0G_0(v) \quad (3.128f)$$

.....

Buna göre  $G_n(v)$  'ler için genel bir tekrarlamaya bağıntısı,

$$G_{n+1}(v) + 2vG_n(v) + G_{n-1}(v) = \left[ \frac{1+(-1)^n}{1-n^2} \right] v c_0 G_0(v) + 3 \left[ \frac{(-1)^n - 1}{n^2 - 4} \right] v c_1 G_1(v),$$

$$n \geq 3, \quad (3.129)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $v$ 'lar özdeğerleri,  $G_n(v)$  'ler de özfonksiyonları temsil etmektedir.  $v$  özdeğerlerinin hesaplanması için  $P_N$  metodunda olduğu gibi yine iki yöntem vardır. Bunlardan ilki  $G_{N+1}(v) = 0$  denklemini çözmektir. Örneğin  $N = 1$  için eşitlik (3.128c)'de  $G_2(v) = 0$  olmalıdır. (3.128a) ve (3.128b) eşitlikleri, (3.128c) eşitliğinde kullanılırsa

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{2(1-c_0)(1-c_1)}} \quad (3.130)$$

olarak bulunur. (3.130) eşitliğinde çarpışma başına ortaya çıkan nötron sayılarına ( $c_0$  ve  $c_1$  'e) değerler verilerek  $T_1$  yaklaşımına göre  $v$  özdeğerleri hesaplanabilir.

İkinci yöntem ise  $n < 3$  durumları için (3.128b), (3.128c), (3.128d) eşitliklerini ve  $n \geq 3$  için (3.129) eşitliğini kullanarak  $G_n(v)$  'lerin katsayılarından oluşan  $(N+1) \times (N+1)$  elemanlı bir kare matris oluşturmak ve bu matrisin determinantını sifıra eşitleyerek  $v$  özdeğerlerini hesaplamaktır. Bu eşitlikleri kullanarak oluşturulan denklemler, matris cebiri kullanılarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$|M(v)| \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (3.131)$$

$$\begin{bmatrix} v(1-c_0) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2v(1-c_1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{2}{3}vc_0 & 1 & 2v & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{6}{5}vc_1 & 1 & 2v & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1+(-1)^n}{1-n^2}vc_0 & 3\frac{(-1)^n-1}{n^2-4}vc_1 & 0 & 0 & \dots & 2v \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ \vdots \\ G_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.132)$$

$T_N$  yaklaşımı olarak adlandırılan bu yöntemle özdeğerler hesaplanırken,  $P_N$  metodu

yardımı ile özdeğerlerin hesaplanmasında kullanılan çarpışma başına ortaya çıkan nötron sayılarının ( $c_0$  ve  $c_1$ 'in) aynı değerleri kullanılmıştır.  $T_2$ ,  $T_5$ ,  $T_6$  ve  $T_{10}$  yaklaşımları için  $\nu$  özdeğerleri hesaplanmıştır. Aynı  $c_0$  ve  $c_1$  sayıları için her iki yöntemden elde edilen özdeğerler, birlikte aynı tablolarda bulgular ve tartışma bölümünde sunulmuştur.

#### 4. BULGULAR VE TARTIŞMA

(3.75) eşitliği içinde yer alan  $\sigma_T$  (toplam diferansiyel tesir kesiti),  $\sigma_{s0}$  (diferansiyel saçılma tesir kesitinin ilk bileşeni) ve  $\sigma_{s1}$  (diferansiyel saçılma tesir kesitinin ikinci bileşeni) terimlerinin birimi  $cm^{-1}$  dir. Reaktör fiziğinde  $\frac{1}{\sigma_T}$  niceliği ortalama serbest yol (mean free path) olarak bilinir ve nötronların etkileşme olmadan önceki aldıkları yol ortalaması olarak tanımlanır. Bu çalışmada yapılan tüm sayısal hesaplamalarda  $\sigma_T = 1 cm^{-1}$  alınmıştır.

Nötron transport denklemini çözmek için geliştirilmiş birçok yöntem vardır. Bu çalışmada önce Legendre polinomları kullanılarak anizotropik saçılmalı durum için nötron transport eşitliği elde edildi. Hem  $P_N$  hem de  $T_N$  metodunda nötronların dağılımını temsil eden çözüm fonksiyonu  $\psi(x, \mu)$ , konuma ve açıya bağlı olan iki fonksiyonun çarpımı şeklinde tanımlandı. Konuma bağlı kısım ekspanansiyel bir fonksiyon, açıya bağlı kısım ise  $P_N$  metodunda Legendre Polinomları serisi,  $T_N$  metodunda I. tip Chebyshev Polinomları serisi olarak seçildi. Bu önerilen çözüm fonksiyonları nötron transport eşitliğinde kullanılarak akı momentleri elde edildi. Akı momentlerinin çözümü için uygun matematiksel varsayımlar kullanıldı. Böylece hem  $P_N$  hem de  $T_N$  yönteminde nötron transport denklemi için asimptotik ve sürekli çözümler elde edildi.  $\nu$  özdeğerlerinin hesaplanmasında Maple9 bilgisayar programından yararlanıldı. Hesaplamalarda virgülden sonra beşinci basamağa kadar yuvarlama yapıldı. Her iki yöntemle ( $c_0$  ve  $c_1$ 'in çeşitli değerleri için) hesaplanan  $\nu$  özdeğerleri çizelgeler halinde verildi.

$\nu$  özdeğerleri,  $P_N$  metodunda  $A_N(\nu) = 0$  denkleminin çözümünden,  $T_N$  metodunda ise  $G_N(\nu) = 0$  denkleminin çözümünden elde edilmiştir. N çift sayı ise hem  $A_N(\nu_j) = 0$  hem de  $G_N(\nu_j) = 0$  denkleminin çözümünden elde edilen N tane kök  $\pm \nu_j$  çiftleri halindedir ve bu kökler, 0 orijin noktasına göre simetriktir. Eğer N tek sayı ise hem  $A_N(\nu_j) = 0$  hem de  $G_N(\nu_j) = 0$  denkleminin köklerinden bir tanesi sıfır olup (N-1) tanesi  $\pm \nu_j$  çiftleri halindedir. Yani (N-1) tane kök, 0 orijin noktasındaki köke göre simetriktir. Örneğin N=5 için köklerden birisi  $\nu = 0$  iken, diğerleri ise  $\nu_1 = -\nu_4$ ,  $\nu_2 = -\nu_3$  değerlerini alır. Her iki denklemin çözümünden de elde edilen  $\pm \nu_j$  özdeğerleri için pozitif  $\nu_j$  özdeğerleri, negatif  $\nu_j$  özdeğerlerinin simetriği olduğu için çizelgelerde sadece pozitif  $\nu_j$  özdeğerleri gösterildi.

Eğer  $0 < c_0 < 1$  ise Çizelge 4.1, Çizelge 4.2, Çizelge 4.3, Çizelge 4.4 ve Çizelge 4.5'de görüldüğü gibi bütün özdeğerler gerçel olup bir çifti 1'den büyük olabilmektedir. Diğerleri ise  $-1 < \nu < 1$  aralığındadır. Bu aralıktaki özdeğerlere sürekli özdeğerler ve bu özdeğerlere karşılık gelen çözümlere de sürekli çözümler denir. Bu sonuca göre  $0 < c_0 < 1$  için,  $-1 < \nu < 1$  aralığının dışındaki özdeğerlerin  $1 < \nu < \infty$  aralığında değişeceği açıktır.  $\nu > 1$  özdeğerlerinin tekabül ettiği çözümlere de asimptotik çözümler denir.

Çizelge 4.1.  $c_0 = 0$  ve  $0 \leq c_1 < 1$  İçin,  $T_N$  ve  $P_N$  Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

	$c_1$	N=2		N=5		N=6		N=10	
		$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$
$c_0 = 0.00$	0.99	7.07106	5.77350	7.75437 0.72090 0.00	7.75338 0.62933 0.00	7.75339 0.84370 0.27023	7.75338 0.76634 0.24760	7.75338 0.96283 0.77365 0.48411 0.15806	7.75339 0.93437 0.73996 0.45845 0.15027
	0.80	1.58113	1.29099	1.77614 0.70376 0.00	1.76942 0.61663 0.00	1.77058 0.83254 0.26815	1.76972 0.75577 0.24595	1.76976 0.96092 0.76780 0.47973 0.15775	1.76976 0.93166 0.73422 0.45473 0.15001
	0.50	1.00000	0.81649	1.18542 0.66690 0.00	1.16675 0.59144 0.00	1.17774 0.80175 0.26475	1.17085 0.73044 0.24327	1.17287 0.95380 0.75335 0.47154 0.15727	1.17265 0.92253 0.72060 0.44787 0.14959
	0.00	0.70710	0.57735	0.95105 0.58778 0.00	0.90617 0.53846 0.00	0.96592 0.70710 0.25881	0.93246 0.66120 0.23861	0.98768 0.89100 0.70710 0.45399 0.15643	0.97390 0.86506 0.67941 0.43339 0.14887

Çizelge 4.2.  $c_0 = 0.25$  ve  $0 \leq c_1 < 1$  İçin,  $T_N$  ve  $P_N$  Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

	$c_1$	N=2		N=5		N=6		N=10	
		$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$
$c_0 = 0.25$	0.99	8.16496	6.66666	8.43924 0.73497 0.00	8.43848 0.64351 0.00	8.43849 0.84963 0.28470	8.43848 0.77393 0.26012	8.43849 0.96362 0.77791 0.49239 0.16384	8.43848 0.93562 0.74447 0.46647 0.15553
	0.80	1.82574	1.49071	1.91919 0.72266 0.00	1.91423 0.63433 0.00	1.91496 0.84158 0.28321	1.91439 0.76630 0.25894	1.91441 0.96221 0.77364 0.48929 0.16364	1.91441 0.93362 0.74029 0.46387 0.15536
	0.50	1.15470	0.94280	1.25997 0.69618 0.00	1.24649 0.61609 0.00	1.25306 0.82050 0.28077	1.24878 0.74855 0.25700	1.24961 0.95766 0.76357 0.48357 0.16332	1.24953 0.92760 0.73074 0.45913 0.15508
	0.00	0.81649	0.66666	0.98011 0.63284 0.00	0.94414 0.57515 0.00	0.98800 0.74735 0.27644	0.96217 0.69615 0.25362	0.99763 0.91340 0.73001 0.47129 0.16277	0.98827 0.88646 0.70100 0.44913 0.15461

Çizelge 4.3.  $c_0 = 0.50$  ve  $0 \leq c_1 < 1$  İçin,  $T_N$  ve  $P_N$  Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

	$c_1$	N=2		N=5		N=6		N=10	
		$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$
$c_0 = 0.50$	0.99	10.0000	8.16496	9.66524 0.75263 0.00	9.66473 0.66128 0.00	9.66473 0.85738 0.30169	9.66473 0.78382 0.27465	9.66473 0.96470 0.78358 0.50252 0.17023	9.66473 0.93733 0.75045 0.47622 0.16132
	0.80	2.23606	1.82574	2.18195 0.74547 0.00	2.17889 0.65588 0.00	2.17926 0.85263 0.30085	2.17895 0.77934 0.27396	2.17896 0.96385 0.78106 0.50076 0.17013	2.17896 0.93613 0.74797 0.47476 0.16123
	0.50	1.41421	1.15470	1.40817 0.73055 0.00	1.40044 0.64539 0.00	1.40325 0.84134 0.29946	1.40128 0.76958 0.27285	1.40147 0.96154 0.77554 0.49758 0.16996	1.40146 0.93300 0.74269 0.47216 0.16108
	0.00	1.00000	0.81649	1.05072 0.69231 0.00	1.02887 0.62117 0.00	1.04992 0.80173 0.29699	1.03662 0.74094 0.27088	1.04565 0.94595 0.75845 0.49096 0.16968	1.04374 0.91623 0.72734 0.46685 0.16083

Çizelge 4.4.  $c_0 = 0.75$  ve  $0 \leq c_1 < 1$  İçin,  $T_N$  ve  $P_N$  Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

	$c_1$	N=2		N=5		N=6		N=10	
		$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$
$c_0 = 0.75$	0.99	14.1421	11.5470	12.6510 0.77548 0.00	12.6508 0.68419 0.00	12.6508 0.86793 0.32199	12.6508 0.79720 0.29175	12.6508 0.96630 0.79149 0.51514 0.17733	12.6508 0.93986 0.75868 0.48823 0.16771
	0.80	3.16227	2.58198	2.83766 0.77307 0.00	2.83646 0.68235 0.00	2.83656 0.86624 0.32174	2.83646 0.79567 0.29152	2.83646 0.96599 0.79063 0.51455 0.17730	2.83646 0.93943 0.75782 0.48776 0.16768
	0.50	2.00000	1.63299	1.80538 0.76850 0.00	1.80279 0.67899 0.00	1.80340 0.86283 0.32132	1.80290 0.79271 0.29116	1.80291 0.96532 0.78897 0.51355 0.17725	1.80291 0.93852 0.75621 0.48696 0.16764
	0.00	1.41421	1.15470	1.29443 0.75791 0.00	1.28829 0.67187 0.00	1.29160 0.85379 0.32060	1.28919 0.78562 0.29051	1.28950 0.96322 0.78500 0.51163 0.17718	1.28946 0.93582 0.75244 0.48546 0.16756

Çizelge 4.5.  $c_0 = 0.99$  ve  $0 \leq c_1 < 1$  İçin,  $T_N$  ve  $P_N$  Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

	$c_1$	$N=2$		$N=5$		$N=6$		$N=10$	
		$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$
$c_0 = 0.99$	0.99	70.7106	57.7350	57.9655 0.80479 0.00	57.9655 0.71349 0.00	57.9655 0.88231 0.34564	57.9655 0.81527 0.31131	57.9655 0.96874 0.80251 0.53034 0.18491	57.9655 0.94369 0.76995 0.50252 0.17449
	0.80	15.8113	12.9099	12.9615 0.80478 0.00	12.9615 0.71348 0.00	12.9615 0.88230 0.34564	12.9615 0.81527 0.31131	12.9615 0.96874 0.80251 0.53034 0.18491	12.9615 0.94369 0.76995 0.50252 0.17449
	0.50	10.0000	8.16496	8.19770 0.80478 0.00	8.19768 0.71348 0.00	8.19768 0.88228 0.34565	8.19768 0.81526 0.31131	8.19768 0.96873 0.80251 0.53033 0.18491	8.19768 0.94369 0.76995 0.50252 0.17449
	0.00	7.07106	5.77350	5.79675 0.80476 0.00	5.79672 0.71346 0.00	5.79673 0.88224 0.34566	5.79672 0.81525 0.31131	5.79672 0.96873 0.80251 0.53033 0.18491	5.79672 0.94369 0.76994 0.50251 0.17449

Çizelge 4.6.  $c_0 = 1.01$  ve  $0 \leq c_1 < 1$  İçin,  $T_N$  ve  $P_N$  Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

	$c_1$	$N=2$		$N=5$		$N=6$		$N=10$	
		$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$
$c_0 = 1.01$	0.99	70.7106 <i>i</i>	57.7350 <i>i</i>	57.5036 <i>i</i> 0.80767 0.00	57.5036 <i>i</i> 0.71636 0.00	57.5036 <i>i</i> 0.88378 0.34784	57.5036 <i>i</i> 0.81711 0.31311	57.5036 <i>i</i> 0.96901 0.80365 0.53177 0.18558	57.5036 <i>i</i> 0.94411 0.77110 0.50385 0.17508
	0.80	15.8113 <i>i</i>	12.9099 <i>i</i>	12.8582 <i>i</i> 0.80767 0.00	12.8582 <i>i</i> 0.71636 0.00	12.8582 <i>i</i> 0.88379 0.34783	12.8582 <i>i</i> 0.81710 0.31311	12.8582 <i>i</i> 0.96901 0.80364 0.53177 0.18558	12.8582 <i>i</i> 0.94411 0.77110 0.50385 0.17508
	0.50	10.0000 <i>i</i>	8.16496 <i>i</i>	8.13238 <i>i</i> 0.80766 0.00	8.13236 <i>i</i> 0.71635 0.00	8.13236 <i>i</i> 0.88380 0.34782	8.13236 <i>i</i> 0.81710 0.31311	8.13236 <i>i</i> 0.96901 0.80364 0.53177 0.18558	8.13236 <i>i</i> 0.94411 0.77110 0.50385 0.17508
	0.00	7.07106 <i>i</i>	5.77350 <i>i</i>	5.75056 <i>i</i> 0.80764 0.00	5.75053 <i>i</i> 0.71634 0.00	5.75054 <i>i</i> 0.88382 0.34781	5.75053 <i>i</i> 0.81709 0.31311	5.75053 <i>i</i> 0.96901 0.80363 0.53178 0.18558	5.75053 <i>i</i> 0.94411 0.77109 0.50385 0.17508

$i = \sqrt{-1}$

Çizelge 4.7.  $c_0 = 1.25$  ve  $0 \leq c_1 < 1$  İçin,  $T_N$  ve  $P_N$  Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

	$c_1$	$N=2$		$N=5$		$N=6$		$N=10$	
		$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$
$c_0 = 1.25$	0.99	14.1421i	11.5470i	10.3314i 0.84980 0.00	10.3310i 0.75832 0.00	10.3310i 0.90629 0.37760	10.3310i 0.84495 0.33707	10.3310i 0.97365 0.82117 0.55129 0.19409	10.3310i 0.95129 0.78845 0.52190 0.18264
	0.80	3.16227i	2.58198i	2.32323i 0.84503 0.00	2.32194i 0.75445 0.00	2.32201i 0.90358 0.37679	2.32196i 0.84172 0.33664	2.32196i 0.97291 0.81916 0.55040 0.19404	2.32196i 0.95016 0.78669 0.52112 0.18260
	0.50	2.00000i	1.63299i	1.47917i 0.83941 0.00	1.47790i 0.74966 0.00	1.47829i 0.90052 0.37559	1.47807i 0.83792 0.33598	1.47806i 0.97213 0.81676 0.54915 0.19395	1.47806i 0.94895 0.78452 0.52003 0.18254
	0.00	1.41421i	1.15470i	1.05388i 0.83307 0.00	1.05308i 0.74393 0.00	1.05422i 0.89722 0.37378	1.05367i 0.83365 0.33497	1.05359i 0.97135 0.81401 0.54743 0.19381	1.05359i 0.94772 0.78199 0.51849 0.18244

$i = \sqrt{-1}$

Çizelge 4.8.  $c_0 = 1.5$  ve  $0 \leq c_1 < 1$  İçin,  $T_N$  ve  $P_N$  Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

	$c_1$	$N=2$		$N=5$		$N=6$		$N=10$	
		$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$
$c_0 = 1.50$	0.99	10.0000i	8.16496i	6.33953i 0.91638 0.00	6.33786i 0.82442 0.00	6.33786i 0.94584 0.41704	6.33786i 0.89273 0.36772	6.33786i 0.98500 0.85095 0.57671 0.20400	6.33786i 0.96796 0.81633 0.54497 0.19136
	0.80	2.23606i	1.82574i	1.46251i 0.88822 0.00	1.45939i 0.80058 0.00	1.45993i 0.92799 0.41261	1.45982i 0.87253 0.36525	1.45978i 0.97876 0.83915 0.57209 0.20374	1.45978i 0.95911 0.80630 0.54113 0.19117
	0.50	1.41421i	1.15470i	0.94868i 0.86602 0.00	0.94729i 0.78005 0.00	0.94995i 0.91482 0.40683	0.94925i 0.85661 0.36185	0.94895i 0.97505 0.82910 0.56659 0.20334	0.94895i 0.95352 0.79720 0.53641 0.19088
	0.00	1.00000i	0.81649i	0.68501i 0.84808 0.00	0.68549i 0.76224 0.00	0.69169i 0.90494 0.39939	0.69010i 0.84395 0.35723	0.68916i 0.97271 0.82082 0.56027 0.20273	0.68913i 0.94987 0.78932 0.53082 0.19043

$i = \sqrt{-1}$



Çizelge 4.9.  $c_0 = 1.75$  ve  $0 \leq c_1 < 1$  İçin,  $T_N$  ve  $P_N$  Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

	$c_1$	N=2		N=5		N=6		N=10	
		$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$
$c_0 = 1.75$	0.99	8.16496i	6.66666i	4.26487i 1.03023 0.00	4.25973i 0.93736 0.00	4.25970i 1.02384 0.46803	4.25974i 0.98322 0.40561	4.25974i 1.02562 0.89514 0.60677 0.21505	4.25974i 1.01880 0.85475 0.57189 0.20101
	0.80	1.82574i	1.49071i	1.05316i 0.93288 0.00	1.04952i 0.85071 0.00	1.05258i 0.95556 0.45379	1.05219i 0.90753 0.39780	1.05183i 0.98746 0.86184 0.59469 0.21435	1.05183i 0.97186 0.82785 0.56197 0.20050
	0.50	1.15470i	0.94280i	0.70096i 0.88645 0.00	0.70159i 0.80485 0.00	0.71105i 0.92623 0.43831	0.70931i 0.87195 0.38844	0.70776i 0.97764 0.83965 0.58227 0.21332	0.70774i 0.95758 0.80804 0.55133 0.19974
	0.00	0.81649i	0.66666i	0.51253i 0.85727 0.00	0.51576i 0.77417 0.00	0.53210i 0.90968 0.42169	0.52916i 0.85053 0.37745	0.52598i 0.97357 0.82534 0.57007 0.21179	0.52590i 0.95124 0.79425 0.54043 0.19859

$i = \sqrt{-1}$

Çizelge 4.10.  $c_0 = 2$  ve  $0 \leq c_1 < 1$  İçin,  $T_N$  ve  $P_N$  Yaklaşımlarının Karşılaştırılması

	$c_1$	N=2		N=5		N=6		N=10	
		$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$	$T_N$	$P_N$
$c_0 = 2.00$	0.99	7.07106i	5.77350i	2.75779i 1.26046 0.00	2.74234i 1.16828 0.00	2.74219i 1.21256 0.53164	2.74248i 1.18945 0.45101	2.74248i 1.19750 0.92860 0.63761 0.22727	2.74248i 1.19693 0.88651 0.59969 0.21162
	0.80	1.58113i	1.29099i	0.79681i 0.97548 0.00	0.79561i 0.90043 0.00	0.80659i 0.98466 0.49769	0.80521i 0.94415 0.43272	0.80349i 1.00012 0.88401 0.61607 0.22579	0.80349i 0.98909 0.84824 0.58184 0.21054
	0.50	1.00000i	0.81649i	0.54498i 0.90203 0.00	0.54954i 0.82448 0.00	0.57165i 0.93532 0.46756	0.56840i 0.88433 0.41392	0.56414i 0.97993 0.84841 0.59565 0.22371	0.56409i 0.96114 0.81698 0.56422 0.20898
	0.00	0.70710i	0.57735i	0.40261i 0.86338 0.00	0.40949i 0.78238 0.00	0.44005i 0.91287 0.44005	0.43585i 0.85503 0.39478	0.42943i 0.97415 0.82852 0.57755 0.22076	0.42923i 0.95218 0.79775 0.54790 0.20673

$i = \sqrt{-1}$

$c_0 = 0$  iken  $c_1 = 0$  ise Çizelge 4.1'de görüldüğü gibi  $\nu$  özdeğerleri gerçel olup hepsi 1'den küçüktür yani süreklidir.  $c_0 = 0$  iken  $c_1 > 0$  ise yine Çizelge 4.1'de görüldüğü gibi özdeğerler gerçel olup bir çifti 1'den büyük olabilmektedir.

$c_0 > 1$  iken Çizelge 4.6, Çizelge 4.7, Çizelge 4.8, Çizelge 4.9 ve Çizelge 4.10'da görüldüğü gibi özdeğerlerin bir çifti kompleks olup bunlar asimptotik köklerdir. Kompleks özdeğerler  $\pm i\infty$  aralığında değişmektedir. Diğerleri ise yine  $-1 < \nu < 1$  aralığında reel sayı olmaktadır.

Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6'daki sonuçlara dikkat edilirse aynı metodun aynı N. yaklaşımı için hesaplanan sonuçların hemen hemen birbirleri ile örtüşükleri görülür. Örneğin Çizelge 4.5'de  $c_1 = 0.99$  için  $T_6$  yaklaşımından hesaplanan sürekli özdeğerler içerisinde büyük olanı  $\nu = 0.88231$  iken Çizelge 4.6'da  $c_1 = 0.99$  için  $T_6$  yaklaşımından hesaplanan sürekli özdeğerler içerisinde büyük olanı  $\nu = 0.88378$  'dir. Yine Çizelge 4.5'de  $c_1 = 0.80$  için  $P_{10}$  yaklaşımından hesaplanan sürekli özdeğerler içerisinde en büyük olanı  $\nu = 0.94369$  iken Çizelge 4.6'da  $c_1 = 0.80$  için  $P_{10}$  yaklaşımından hesaplanan sürekli özdeğerler içerisinde en büyük olanı  $\nu = 0.94411$  'dir. Çizelge 4.5'in  $c_0 = 0.99$  ve Çizelge 4.6'ın  $c_0 = 1.01$  için düzenlenmiş olduğuna dikkat edilirse bu iki tablonun  $c_0 = 1$ 'e göre simetrik olduğu düşünülebilir. Bunun sebebi  $c_0$ 'ın, her iki çizelgede de 1'e çok yakın değerde olmasıdır. Çizelge 4.5'de hem  $c_0$  hem de  $c_1$  aynı anda 1'e yaklaştıkça asimptotik özdeğerlerin çok büyük değerler aldığı görülmektedir. Yine Çizelge 4.6'da hem  $c_0$  hem de  $c_1$ 'in ikisi birlikte 1 civarında olduğunda, kompleks özdeğerler de çok büyük değerler almaktadır. Bunun nedeni (3.102) ve (3.130) eşitliklerinden anlaşılacağı gibi  $c_0$  ve  $c_1$ , 1'e yaklaştıkça  $\nu$ 'nin sonsuza gideceği gerçeğidir.

Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6'da dikkat çekici bir diğer nokta ise aynı N yaklaşımında  $c_1$  değerleri 0.00'dan 0.99'a artarken  $P_N$  metodundan hesaplanan sürekli özdeğerlerin hemen hemen nerdeyse hiç değişmemesi ve yine aynı şekilde  $T_N$  metodundan hesaplanan sürekli özdeğerlerin de hemen hemen nerdeyse hiç değişmemesidir. Bu durum N = 10 yaklaşımında belirgin bir şekilde görülmekte olup daha büyük N yaklaşımlarında da net bir şekilde görüleceği açıktır. Örneğin Çizelge 4.5'de  $T_{10}$  yaklaşımında sürekli özdeğerlerin  $c_1 = 0.00$  için aldıkları değerler ile  $c_1 = 0.50$ ,  $c_1 = 0.80$  ve  $c_1 = 0.99$  için aldıkları değerler aynı olmaktadır. Bu durum  $P_{10}$  yaklaşımı için de geçerlidir. Öyleyse büyük N yaklaşımları için  $c_0$ 'ın aldığı değerler 1 civarında ise  $c_1$ 'in değerlerinin büyüklüğü, sürekli özdeğerlerin alacağı sonuçları etkilememektedir.  $c_1$ 'in anizotropi terimi olduğu düşünülürse, büyük N yaklaşımlarında  $c_0$ , 1 civarında değerler aldığı anda sistemin izotropik ya da anizotropik olma durumu arasında fark olmayacaktır.

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada, dilim geometride, dış kaynağın olmadığı, tek boyutlu, aynı enerjili anizotropik saçılmalı nötron transport denkleminin çözümü için Legendre polinomu yaklaşımı ve I. tip Chebyshev polinomu yaklaşımı kullanılarak özdeğer hesaplamaları yapıldı. I. tip Chebyshev polinomlarının özelliklerinin Legendre polinomlarının özelliklerine benzer olması ve her iki polinomun argümanlarının  $[-1, 1]$  aralığında değişiyor olması anizotropik saçılmalı nötron transport denkleminin çözümünün I. tip Chebyshev polinomları ile de yapılabileceği fikrini ortaya çıkardı. Nötron dağılımını temsil eden fonksiyon, bu polinomlar cinsinden seriye açılıp anizotropik saçılmalı nötron transport denkleminde kullanıldığında akı momentleri ile ilgili diferansiyel denklemler elde edildi. Bu diferansiyel denklemler çözülerek özdeğerler hesaplandı.

$c_1 = 0$  için saçılma izotropik olur. Yani saçılma her yöne aynı ihtimal ile gerçekleşmektedir. Çizelgelerin son satırında ( $c_1 = 0$  iken) verilen özdeğerler, izotropik saçılmalı nötron transport denklemini kullanılarak elde edilen özdeğerlere eşittir.

Bütün tablolarda  $c_1$  değerleri arttıkça  $\nu$  değerlerinin de arttığı görülmektedir.  $c_1$  artarken çift sayı olan  $N$  değerleri de artıyorsa  $-1 < \nu < 1$  aralığındaki özdeğerler yani sürekli özdeğerler sınır değerlere ( $1'e$  ve  $-1'e$ ) daha çok yaklaşırken bunların içerisinde en küçük kökler ise sifıra yaklaşmaktadır. Yani  $N \rightarrow \infty$  giderken sürekli özdeğerlerin sayısı da artacağı için  $-1 < \nu < 1$  aralığını tamamen dolduracaklardır.

Çizelgeler dikkatlice incelendiğinde  $P_N$  ve  $T_N$  yönteminden elde edilen asimptotik çözümlerin özellikle  $N = 5$  yaklaşımından sonra hemen hemen neredeyse birbirine eşit olduğu görülür. Yine aynı şekilde  $N$ 'nin çok büyük değerlerinde sürekli özdeğerlerin de giderek birbirine eşit olduğu görülmektedir. Yani  $N$  arttıkça sonuçlar arasındaki uyumluluk da artmaktadır. Her iki yöntemle de hesaplanan özdeğerlerin birbiri ile uyumlu olması  $T_N$  yaklaşımının geçerliliğini doğrulamaktadır. Kısacası I. tip Chebyshev polinomu ( $T_N$ ) yaklaşımının nötron transport denkleminin çözümünde ve çeşitli reaktör parametrelerinin (difüzyon uzunluğu, difüzyon sabiti v.b.) hesaplanmasında kullanılabileceği açıktır.

**KAYNAKLAR**

- ANLI, F., YAŞA, F., GÜNGÖR, S., ÖZTÜRK, H. 2006a.  $T_N$  Approximation to Neutron Transport Equation and Application to Critical Slab Problem. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 101: 129-134.
- \_\_\_\_\_, 2006b.  $T_N$  Approximation to Reflected Slab and Computation of The Critical Half Thicknesses. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 101: 135-140.
- ANLI, F., BÜLBÜL, A., YAŞA, F. (Baskıda).  $U_N$  Approximation to Neutron Transport Equation and Application to Critical Slab Problem. K.S.Ü. Kahramanmaraş
- ARFKEN, G. B., WEBER, H. J. 1995. Mathematical Methods For Physicists. Academic Pres, London, 4. edition, 1028s.
- ATALAY, M. A. 1997. The Reflected Slab and Sphere Criticality Problem With Anisotropic Scattering In One-Speed Neutron Transport Theory. Progress In Nuclear Energy, 31: 229-252.
- \_\_\_\_\_, 2004 Fourier Mode Analysis of Reflected Slab and Sphere Criticality. Progress In Nuclear Energy, 44: 253-262.
- ATALAY, M. A., YILDIZ, C. 2002.  $P_N$  Critically Solutions Neutron Transport Equation With Anisotropic Scattering In Reflected Homogeneous Slab and Sphere. Kerntechnik, 67: 276-283.
- BELL, G. I., GLASSTONE, S. 1970. Nuclear Reactor Theory. Van Nostrand Reinhold Company, United States of America, 619s.
- CASE, K. M., ZWEIFEL, P. F. 1967. Linear Transport Theory. Addison-Wesley Publishing Company, United States of America, 342s.
- SIEWERT, C. E. 2001. The Critical Problem High-Order Anisotropic Scattering. Annals of Nuclear Energy, 28: 825-829.
- YAŞA, F., ANLI, F., GÜNGÖR, S. 2006. Eigenvalue Spectrum With Chebyshev Polynomial Approximation of The Transport Equation In Slab Geometry. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 1: 51-57.
- YILDIZ, C. 1999. Influence of Anisotropic Scattering on The Size of Time-Dependent Sytems In Monoenergetic Neutron Transport. Journal of Physics D: Applied Physics, 32: 317-325.
- \_\_\_\_\_, 2001. The Spherical Harmonics Method For Anisotropic Scattering In Neutron Transport Theory. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 71: 25-37.

**ÖZGEÇMİŞ**

1977 yılında Mersin'in Silifke ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Silifke'de tamamladı. 1993 yılında girdiği Selçuk Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Fizik Öğretmenliği bölümünden 1997'de bölüm ikincisi olarak mezun oldu. Aynı yıl içerisinde Milli Eğitim Bakanlığı'nda fizik öğretmeni olarak göreve başladı. Bakanlık tarafından yapılan Fen Liselerine Öğretmen Seçme Sınavını kazanarak 2004 yılında Osmaniye Fen Lisesi'ne fizik öğretmeni olarak atandı. Halen bu görevini sürdürmektedir.