T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MONTE CARLO SİMÜLASYON YÖNTEMİ VE MARTİNGALE METODUNUN MATEMATİKSEL FİNANSA UYGULANIŞI

Yüksek Lisans Tezi

BURHANEDDİN İZGİ

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Fatma SENYÜCEL
Eş Danışman: Yrd. Doç. Dr. Coşkun ÇETiN

Mayıs 2010

Burhaneddin İZGİ tarafından hazırlanan MONTE CARLO SİMÜLASYON YÖNTEMİ VE MARTİNGALE METODUNUN MATEMATİKSEL FİNANSA UYGULANIŞI adlı bu tezin yüksek lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr.Fatma Senyücel	Yrd.Doç.Dr.Coşkun Çetin
Tez Yöneticisi	Eş Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan	: Prof.Dr.Fatma Senyücel	
Üye	: Yrd.Doç.Dr.Coşkun Çetin	
Üye	: Doç.Dr.Irini Dimitriyadis	
Üye	: Yrd.Doç.Dr.Nebi Önder	
Üye	: Yrd.Doç.Dr.Ahmet Bakkaloğlu	

Bu tez, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MONTE CARLO SİMÜLASYON YÖNTEMİ VE MARTİNGALE METODUNUN MATEMATİKSEL FİNANSA UYGULANIŞI

Yüksek Lisans Tezi

BURHANEDDİN İZGİ

Anabilim Dalı: Matematik
Programı: Matematik

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Fatma SENYÜCEL
Eş Danışman: Yrd. Doç. Dr. Coşkun ÇETiN

Mayıs 2010

ÖZET

Bu tezin ilk bölümünde Finans Matematiğine girişten, Bono ve Hisse senetlerinden ve bunların değişimlerini inceleyen tek periyotlu modellerden, çok periyotlu modellerden ve finans türevlerinden bahsedeceğiz. İkinci bölümde ise Sürekli modellerden, Brown hareketinden ve özelliklerinden, Stokastik integral ve özelliklerinden, Ito kuralından, Black-Scholes modelinden ve Sürekli zamanlı faiz oranlarından bahsedeceğiz.

Diğer bölümlerde ise genel olarak Avrupai ve Amerikan opsiyonlarının fiyatlandırması için CRR modelinden ve bu modelle Black-Scholes modeli arasındaki ilişkiden, sürekli zamanlı tam market modellerindeki opsiyonlardan, Arbitraj yöntemiyle alım ve satım opsiyonlarından bahsedilecek ve faiz oranı modelleri ve özellikleri anlatılacak, ilgili teoremler üzerinde durulacak ve bu teoremlerin ispatları yapılacaktır. Özellikle Avrupai opsiyonların fiyatlandırması için Martingale Metodu ve Monte Carlo simülasyon yönteminin Matematiksel Finansa uygulanışı anlatılacaktır.

Son bölümde ise tam olmayan marketlerdeki rassal faiz oranlı Avrupai opsiyon fiyatlandırma problemi ele alınıp bu opsiyonun fiyatlandırması Monte Carlo simülasyonu kullanılarak elde edilecektir. Ayrıca hisse senedi için kullanılan Black-Scholes modelinin ve faiz oranı için kullanılan CIR faiz oranı modelinin bazı parametreleri için duyarlılık analizleri yapılacaktır. Ve ilgili duyarlılık analizleri grafikler ve tablolar yardımıyla yorumlanacaktır.

Anahtar Kelimeler : Matematiksel Finans, Martingale Metodu, Monte Carlo Simülasyon Yöntemi, Black-Scholes Modeli, CRR (Cox-Ross-Rubinstein) Modeli, Arbitraj, Avrupai ve Amerikan Opsiyonlar.

APPLICATIONS OF MONTE CARLO SIMULATIONS AND MARTINGALE METHODS TO MATHEMATICAL FINANCE

SUMMARY

In the first chapter, we consider Bond, Stocks, Single-Period models, Multiperiod models and Derivatives. In the second chapter, we also consider Continuous-Time Models, Brownian Motion and its properties, Stochastic Integral and its properties, Itô's Rule, Black-Scholes Model and Continuous-Time Interest Rates.

In other chapters, we generally consider CRR model for pricing of European and American options, and we consider relations between this model and Black-Scholes model, continuous time model for options at the complete markets. We also consider arbitrage relationships for call and put options; Put-Call parity, and interest rate models and their properties. Furthermore, we present some related theorems and prove them. In particular, we explain how Martingale method and Monte Carlo simulations method are used pricing of the European options in Mathematical Finance.

In the last chapter, we present the problem which is pricing of the European options in incomplete markets with random interest rate. We solve this problem by Monte Carlo simulations. In addition, we also provide sensitivity analysis of some of Black-Scholes and CIR models parameters. Finally, we interpret results of those analysis by using figures and tables.

Keywords : Mathematical Finance, Martingale Method, Monte Carlo Simulation Method, Black-Scholes Model, CRR (Cox-Ross-Rubinstein) Model, European Options, American Options.

ÖNSÖZ

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca sürekli bana yol gösteren sıkıntılarımda ve sorunlarımda desteğini benden hiçbir zaman esirgemeyen, ders seçimlerimde yardımcı olan ve yönlendiren danışman hocam Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof.Dr.Fatma Senyücel'e sonsuz teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca gerek ders seçimi aşamasında gerekse Amerikadaki tez çalışmalarım esnasında yardımlarını benden esirgemeyen, sorularıma sürekli sabırlı bir şekilde cevaplar veren, kendi bilgi ve tecrübelerini daima benimle paylaşan, her zaman beni motive eden, desteğini her zaman hissettiğim, eş danışman hocam California State Üniversitesi öğretim üyelerinden Sayın Yrd.Doç.Dr.Coşkun Çetin 'e bu sabırlı ve duyarlı yardımlarından dolayı sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca tez komitesinde bulunan hocalarıma; Sayın Doç.Dr.Irini Dimitriyadis'e, Sayın Yrd.Doç.Dr. Ahmet Bakkaloğlu'na, Sayın Yrd.Doç.Dr.Nebi Önder'e ve tezin yazım aşamasında bana yardımcı olan Araş.Gör.Ayşın Erkan Gürsoy arkadaşıma da teşekkür ederim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca maddi olarak beni destekleyen TUBİTAK (Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu) 'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Hayatım boyunca her koşulda sevgileri ve hoşgörüleriyle beni destekleyip motive eden, bugünlere gelmemdeki en büyük payı olan aileme; başta annem ve babam olmak üzere abime ve ablama sonsuz minnet ve şükranlarımı sunarım.

Mayıs 2010 BURHANEDDİN İZGİ

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu tezde amaç finans piyasasında karşımıza çıkabilecek olan standart veya daha kompleks opsiyonların her iki tarafın üzerinde anlaştığı market fiyatını bulmak olacaktır. Bu fiyatı belirleyebilmek için martingale teknikleriyle, ele aldığımız opsiyon için bir matematiksel ifade elde etmek gerekmektedir. Bu elde edeceğimiz ifadenin eğer varsa analitik çözümünden, yoksa nümerik çözümünden ve bu çözümün özelliklerinden bahsedilecektir.

Finans piyasalarında marketler, tam olan marketler ve tam olmayan marketler olmak üzere ikiye ayrılmaktadır. Eğer üzerinde çalıştığımız market tam ise yukarıda bahsettiğimiz matematiksel ifadeyi elde etme garantisi söz konusudur. Bunun nedeni ise tam marketin oluşum esaslarındandır. Daha açık bir ifadeyle tam marketin başlıca özelliklerinden biridir. Bunun anlamı tam marketlerde alıcı da satıcı da yani kısaca iki tarafta aynı fiyatta buluşabiliyorlar ve anlaşabiliyorlar demektir. Ayrıca tam marketlerde; arbitraj denilen eş zamanlı alım satım durumu, herhangi bir bankaya para transfer işlemi v.s için bir ödeme, kısa vadeli satış veya borçlanma durumu söz konusu değildir. Bu saydığımız özelliklerden arbitraj durumunun oluşabilmesi için markette aşağıda belirttiğimiz koşulların sağlanması gerekmektedir.

$$X^{\delta}(0) = 0, \quad X^{\delta}(T) \geq 0, \quad P[X^{\delta}(T) > 0] > 0, \qquad T > 0$$

(δ: alış verişteki stratejiyi, $X^{\delta}(t)$: t zamanındaki sermayeyi ve P : olasılığı göstermek üzere)

Finans piyasasında ele alabileceğimiz opsiyonlar Avrupai opsiyonlar ve Amerikan opsiyonlar olmak üzere ikiye ayrılır. Bu iki opsiyon çeşidinin başlıca özeliklerinden kısaca bahsedecek olursak; Avrupai opsiyonlar alıcıya sadece kontratta yani üzerinde anlaşılan tarihte opsiyonu alma veya satma hakkı tanır. Fakat Amerikan opsiyonunda ise böyle bir kısıtlama sözkonusu değildir. İşte bu özellikler dahilinde Avrupai opsiyonlar olarak bilinen bazı opsiyonlar için tüm terimlerin sabit olduğu veya rassal olmayan parameterler altında bu kontratın fiyatı için matematiksel ifade olan ve finans marketlerinde herkes tarafından bilinen Black-Scholes formülü denilen açık ifade vardır.

Ayrıca hisse senetleri için kullanacağımız Black-Scholes modeli aşağıdaki gibidir :

$$dS(t) = S(t)\mu dt + S(t)\sigma dW(t), \quad S(0) = s$$

Bu model Samuelson'un öğrencisi olan Robert C. Merton tarafından 1960 'ın sonlarında ve 1970' in başlarında geliştirilmiştir. Bu model aynı zamanda Fischer Black ve Myron Scholes'un 1973 yılında yayınlanan makalelerinde de kullanılmıştır. Bu çalışma sayesinde Robert C. Merton ve Myron Scholes 1997 yılında ekonomi dalında nobel ödülünü almışlardır. Fakat bu dönemden önce 1995'te Fischer Black hastalanıp öldüğü için ödülünü alamamıştır. Ayrıca bu model opsiyon fiyatlarının bulunmasında kolaylık sağlasa da gerçek marketlerde pek kullanılmaz. Çünkü bu model az parametreli ifadeler için güzel sonuçlar verse de parametre sayısını artırdığımızda benzer şekilde güzel sonuçları elde etmek oldukça güçtür. Bu yüzden gerçek marketlerde bu model sadece fikir vermesi açısından kullanılabilinir. Bu modeli tezimizin sonraki bölümlerinde ayrıntılı olarak ele alacağız. Ayrıca bu model bazı kaynaklarda Merton-Black-Scholes modeli olarak geçmektedir (bakınız [1]).

Daha önceden de ifade ettiğimiz gibi tam marketlerde karşımıza çıkacak problemlerin çözüm garantilerinin olmasının en önemli nedeni her kontrat için mutlaka o kontratı karşılayabilecek bir portföy oluşturabilmenin mümkün olmasıdır. Ayrıca tezimizde tam marketlerde standart opsiyonların yanısıra daha karmaşık olan egzotik opsiyonlardan da bahsedeceğiz. Fakat egzotik opsiyon olarak bilinen opsiyonlu kontratlarda çözüm bulmak oldukça zordur. Gerçek marketler tam market olmadığından bu çözümler çok daha karmaşık olabilir. Marketin tam olmamasını sağlayan birçok neden olabilir. Bu durumda iki taraf için de mutabık kalınan fiyat olmayabilir. Bunun nedeni ise iki tarafın da farklı şartlar altında durumlarını değerlendiriyor olmasındandır. Şartlar aynı olsa bile mutabık kalınacak fiyatı bulmak oldukça zor ve zahmetli işlemler gerektirir. Yani bu yüzden tam olmayan marketlerde iki tarafın da mutabık kalacağı fiyatı verecek matematiksel ifadeyi analitik olarak çözmek genelde mümkün değildir. Bu matematiksel ifadenin bazen nümerik olarak Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler(KTDD) yardımıyla çözümü olabilir. Fakat KTDD'lerin yüksek boyutlu problemlerde çözümüne ulaşmak oldukça zor olduğundan simülasyon temelli olan Monte Carlo yöntemini kullanacağız.

Monte Carlo simülasyon yöntemi, Avrupai opsiyonlarının fiyatlarını hesaplamak için kolay ve çok kullanılan esnek yöntemlerden biridir. Benzer şekilde Monte Carlo simülasyon yöntemi Amerikan opsiyonlarının fiyatlandırılmasında da kullanılabilinir. Fakat bu durum Avrupai opsiyonlardaki durum kadar kolay değildir. Tezimizde bu yöntemi Avrupai opsiyonlarının fiyatlandırılmasında kullanacağız, diğer durumlara değinmeyeceğiz. Ayrıca bu yöntem bazı özel fiyatlandırma problemlerinde değişken sayısının arttığı durumlarda daha verimli olmaktadır. Bunun nedeni ise değişken sayısı arttığında bilgisayar destekli hesaplamalar yapılırken diğer birçok metodlarda hesaplamalar değişken sayısına bağlı olarak üstel olarak artarken Monte Carlo simülasyon yönteminde lineer olarak artmakta ve böylece zaman kaybı en aza indirilmektedir (bakınız[13]).

Bu tezde Avrupai opsiyonların tam olmayan marketlerdeki fiyatlarınını bulmak için Monte Carlo simülasyon yöntemini kullanırken opsiyonların fiyatlandırması için Black-Scholes modelinin P^* martingale ölçüsü altındaki

$$dS(t) = S(t)r(t)dt + S(t)\sigma_s dW_1^*(t), \quad S(0) = s$$

dinamiğini kullanacağız. Ayrıca marketimiz tam olmadığından opsiyon fiyatını bulurken faiz oranını temsil eden $r(t)$ rassal olarak değişecektir. Rassal faiz oranı için Cox-Ingersol-Ross tarafından yaklaşık olarak 6 yıllık bir çalışma sonunda bulunan ve geliştirilen ve birçok kaynakta CIR faiz oranı modeli olarak adlandırılan modeli kullanacağız (bakınız [2]).
CIR faiz oranı modeli aşağıdaki gibidir :

$$dr(t) = a[b - r(t)]dt + \sigma_r \sqrt{r(t)} d\hat{W}(t)$$

Bu tezde opsiyon fiyatlarını Monte Carlo simülasyon yöntemiyle bulurken, CIR faiz oranı modelindeki a ve b'nin pozitif olduğu durumlar altında işlemler yapacağız. Ayrıca bu modelde $r(0)$ yani başlangıçtaki faiz oranı eğer 0 'dan büyükse rassal olan faiz oranı hiçbir zaman negatif değerler alamayacaktır. Ayrıca $2ab \geq \sigma_r^2$ şartı sağlanıyorsa faiz oranı olan r(t), her t için pozitif olacaktır. Bu modeli tezimizin sonraki bölümlerinde ayrıntılı olarak ele alacağız.
Ayrıca üzerinde çalıştığımız market tam market olmadığı için CIR faiz oranı modelindeki $\hat{W}(t)$ ve Black-Scholes modelinin P^* ölçüsü altında elde ettiğimiz yeni modelde belirttiğimiz $W_1^*(t)$ arasında korelasyon vardır. Bu korelasyonu ifade eden stokastik diferansiyel denklem :

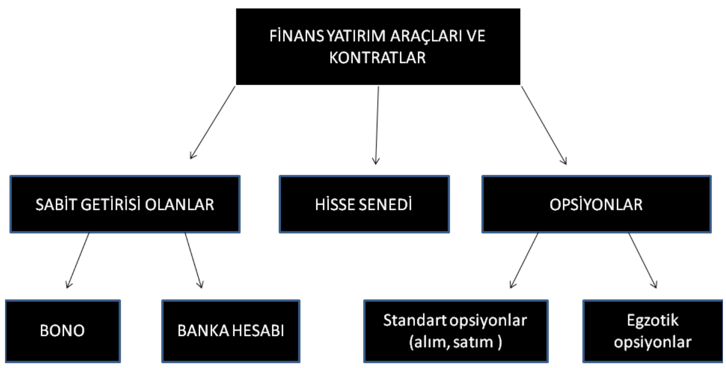
$$d\hat{W} = \rho dW_1^*(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2(t), \quad (\rho \neq \pm 1)$$

Monte Carlo Simülasyon yöntemini kullanırken bu stokastik diferansiyel denklemi de göz önünde bulundurmamız gerekmektedir. Bütün bu koşullar altında ele alacağımız problemin Monte Carlo simülasyonu için gerekli matlab kodlarını yazıp, sonuçları grafiksel ve nümerik olarak elde edeceğiz. Bu sonuçların yanı sıra bazı model parametreleri için de duyarlılık analizi yapıp analiz sonuçlarını da tezimizin son bölümünde ayrıntılarıyla ifade edeceğiz.

BÖLÜM 2

FİNANS MATEMATİĞİNE GİRİŞ

Finans marketlerinde yatırımcı elindeki parayı en iyi şekilde değerlendirmek ister. İşte bu yüzden mevcut sermayeyi hangi oranda, nereye ve ne kadar yatırması gerektiğini bilmek ister. Bu durumda konuyla ilgili uzmanlardan gerekli yardım alınması gerekliliği kaçınılmaz olur. Bu konularda uzmanların izleyeceği yöntemler matematiksel finansın asıl konularınındandır. Matematiksel finansta; elimizdeki yatırım araçlarının ekonomik ve finansal açıdan en verimli olarak kullanılabilmesi temel amaçlar arasındadır. Bu yüzden mevcut sermayeyle yatırım yapmak istediğimizde karşımıza birçok seçenek çıkmaktadır. Genel olarak bunları Finans Yatırım Araçları ve Kontratlar başlığı altında toplmak mümkündür. Bunlar da kendi aralarında sabit gelir getirenler, bonolar, tahviller, hisse senetleri, kontratlar, opsiyonlar ve finans türevleri olarak ayrılabilmektedir.



Şekil 2.1: Finansal Yatırım Araçları ve Kontratların Sınıflandırılması

Ayrıca yatırımcı sermayesinin bır kısmını hisse senedine bir kısmını da sabit getirisi olan ve risksiz olan bonoya yatırabilir. Bu durumda hisse senedine yatırdığı miktarın riskini minimize etmek için o riske karşı kendini güvenceye almak yani kendi portföyünü kendi yapacağı farklı yatırımlarla sigortalamak ister. İşte bu bölümde bono, hisse senedi ve bunların modelleri üzerinde özelllikle de ayrık zamanlı modeller üzerinde duracağız. Sürekli zamanlı modelleri 3. bölümde ele alacağız.

2.1 Bono ve Hisse Senetleri

Bono, alıcısına önceden hesaplanmış belirli bir faiz oranı üzerinden, belirli bir vadeden sonra elde edeceği nominal değeri belirlenmiş bir finansal yatırım aracıdır. Bu yüzden bono getiri garantisi olduğundan risksiz yatırım aracı olarak da isimlendirilir.

Bono kontratlarında iki taraf söz konusudur. Bir taraf belirtilen faiz oranı üzerinden ve belirtilen vadede ödemeyi yapacak olan taraftır, bir başka ifadeyle borçlu taraftır, diğer taraf ise ödemeyi alacak taraf olup alacaklı taraftır. Bonolar faiz oranı ve vadesiyle birlikte bir bütün olarak karakterize edilirler. Ayrıca bonolar vade sürelerine göre de ikiye ayrılırlar. Bir yıldan kısa vadeli olan bonolar kısa vadeli bono olarak isimlendirilirken, vadesi bir yıldan fazla olan bonolar ise uzun vadeli bonolar olarak isimlendirilirler. Bononun şu andaki değeri ve bononun belirtilen vadedeki değeri bilindiği durumlarda faiz oranı, aşağıdaki formül yardımıyla elde edilebilinir. $P(0), P(T)$ ve r sırasıyla bononun şuandaki değerini, bononun belirtilen vadedeki değerini ve faiz oraınını temsil etmek üzere,

$$r = \frac{P(T) - P(0)}{P(0)} \, .$$

Örneğin bir yıl vadeli bir bononun bugünkü değeri 8000 TL ve bir yıl sonraki değeri 10000 TL olsun. Bu durumda bononun yıllık faiz oranı;

$$r = \frac{10000 - 8000}{8000} = 0.25 = \%25$$

olarak bulunur.

Hisse senedi ise alıcıya belirli bir getiri garantisi vermeyen ve risk taşıyan bir finansal yatırım aracıdır. Hisse senedini satan firmanın, durumuna göre hissedarlara ödediği miktar kar payı olarak isimlendirilir. Kar payı, firmanın kazancına bağlı olarak rassal olup önceden bilinemez. İşte kar payının rassal olması ve nominal değer garantisi olmayışı hisse senedini bonodan ayıran en önemli özelliklerdendir.

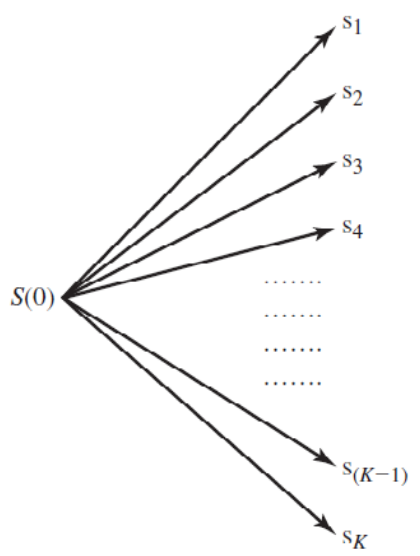
Hisse senedi sahibi hisse senedini vadesinden önce tıpkı bonodaki gibi bir başkasına satabilir. Fakat bonoda vadesinden önceki satışlarda satıcı bononun nominal değerini bildiği için fiyatlandırma işlemi ve satış işlemi gayet kolay olacaktır. Hisse senedinde ise nominal değer önceden bilinemediğinden ve kar payının miktarı da bilinemediğinden bu durum daha zorlu olup, risk teşkil etmektedir. İşte bu yüzden bono risksiz yatırım aracı olarak isimlendirilirken, hisse senedi ise riskli yatırım aracı olarak isimlendirilir. Ayrıca bonoda alacaklı ve borçlu taraf için herhangi bir mali işlem veya fiziksel işlem söz konusu değilken, hisse senedinde durum bundan farklıdır. Çünkü hisse senedini veren firmanın durumuna göre hisse senedi değer kazanacak veya kaybedecektir. Bu yüzden riski en aza indirmek için hisse senedini alan kişinin bu firmanın piyasadaki durumunu her geçen gün aktif olarak takip etmesi gerekmektedir. Ayrıca yatırımcılar hisse senedinin riskini aynı zamanda bono satın alarak azaltmaya çalışırlar. İşte bu durumda yatırımcının, sermayenin hangi oranda ve ne kadarını neye yatırması gerektiğini bilmesi gerekir. Bunun için tek periyotlu ve çok periyotlu modellerin yanısıra sürekli zamanlı modeller de geliştirilmiştir.

2.2 Tek Periyotlu Modeller

Bu bölümde hem hisse senedi hem de bononun değişimini tek periyotlu modelde ele alacağız. Finans marketlerinde bütün teoriler finans yatırım araçlarını modelleme üzerinedir. Tek periyotlu model en kolay modelleme olup, çok periyotlu modeller için temel teşkil ettiğinden hala ilgi odağı olmayı sürdürmektedir.

Tek periyotlu modelde başlangıç zamanı ve son zaman yani vade günündeki zaman olarak sadece iki zaman söz konusudur. Bu yüzden finansal yatırım araçlarının bu modelde değerleri sadece bir kez değişir. Daha ayrıntılı olarak ifade edecek olursak t zamanı ve S genel olarak finansal yatırım aracını veya hisse senedini göstermek üzere $S(0)$, $t = 0$ daki yani bugünkü değeri gösterirken $S(1)$ ise $T = 1$ deki değeri gösterir. Buradan da anlaşılacağı gibi tek periyotlu modellerde yatırım araçlarının değerleri de zamana bağlı olarak bir kere değişir.

Varsayalım ki tek periyotlu modellerde rassal olan $S(1)$, K tane $s_1, s_2, ..., s_K$ gibi farklı değerler alabilsin. Her bir değeri alma olasılığı $p_i = P[S(1) = s_i]$ olup, birbirine eşittir (bakınız şekil 2.2).



Şekil 2.2: Tek Periyotlu model : Hisse senedinin $t = 1$ 'de K tane farklı olası değeri vardır.

Diyelim ki $t = 1$ de dünya genelinde örnek uzayımız $\Omega = \{w_1, ..., w_K\}$ olan K tane farklı muhtemel durum söz konusu olsun. Eğer w_i durumu oluşacaksa $S(1) = s_i$ değerini alacaktır.

Buna karşın B bonoyu veya banka hesabını göstermek üzere, finans piyasalarında bononun başlangıç değeri ($B(0)$) 1 olarak kabul edilir. Bono risksiz bir yatırım aracı olduğundan dolayı $B(1) \geq B(0)$ olacağı açıktır. $B(1)$ bononun $t = 1$ zamanındaki değerini gösterdiğine göre faiz oranı; $r = B(1) - 1$ $\left(r = \frac{B(1)-B(0)}{B(0)}\ ifadesinden\right)$ genel bir formül olarak elde edilecektir.

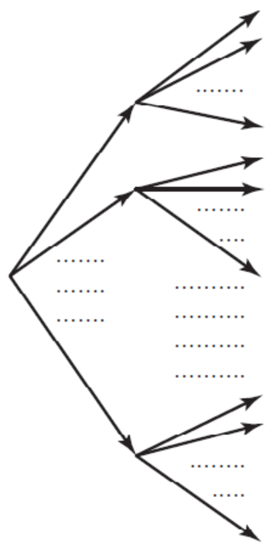
Yatırımcı bu şartlar altında elindeki sermaye için bir portföy belirlemesi gerekir. Yatırımcının başlangıçtaki sermayesi $X(0) = x$ olmak üzere, markette N tane farklı hisse senedi bunun yanı sıra bir de banka hesabı veya bono olsun. Tek periyotlu model üzerinde çalıştığımızdan yatırımcı sadece bir kere yatırım yapacaktır. $\overrightarrow{\delta} = \{\delta_0, ...\delta_N\}$ portföyü, δ_0 ile bonoya yatırılan miktarı ve δ_i $(i = 1, 2.....N)$ ile de hisse senedi sayısını gösterelim. O halde $t = 1$ deki yani periyot sonundaki sermaye

$$X(1) = \delta_0 B(1) + \delta_1 S_1(1) + ... + \delta_N S_N(1)$$

olur. Bu durumda periyot sonunda kar veya zarar $G = X(1) - X(0)$ formülü yardımıyla bulunur.

2.3 Çok Periyotlu Modeller

Bu bölümde hem hisse senedi hem de bononun değişimini çok periyotlu modelde ele alacağız. Çok periyotlu modeller ise tek periyotlu modellerin bir genişlemesidir. Yani zaman aralığının daha küçük parçalara bölünmesi ve her bir zaman aralğı için tek periyotlu modellerin oluşturulmasıyla elde edilen modele çok periyotlu model denir.



Şekil 2.3: Sonlu durumlar için iki periyotlu model

Çok periyotlu modellerde periyodun başlangıç ve bitiş zamanını sırasıyla $t = 0$ ve $t = T$ ile gösterelim. Zamana bağlı olarak $S_i(0), ...S_i(T)$ şeklinde rassal olarak değişmekte olan finans yatırım araçlarının fiyatlarını da S_i dizisiyle gösterelim. Benzer olarak portföy stratejisi $\overrightarrow{\delta}$ de zamana bağlı olarak rassal olarak değişmektedir. Ayrıca $\delta(t)$ de portföyün $[t-1,t)$ aralığındaki değerini göstermektedir. Bunun anlamı ise t zamanında sadece $t-1$ zamanındaki bilgilere sahipken oluşturulan portföydür. Bu durumda $\overrightarrow{\delta}(t)$ portföyü sadece $S_i(t-1)$ değerleri bilinerek oluşturulduğundan, yani t zamanındaki portföy bir önceki zamanın bilgileri kullanılarak oluşturulduğundan tahmini bir portföy süreci olarak isimlendirilir. Bu koşullar altında çok periyotlu modellerde $t-1$ ile t periyodu arasindaki;

Faiz Oranı : $r(t) = \frac{B(t)-B(t-1)}{B(t-1)}$

Sermaye Süreci: $X(t) = \delta_0(t)B(t) + \delta_1(t)S_1(t) + ... + \delta_N(t)S_N(t), \quad t = 1, ..., T$

Sermayenin Kendini Finanse Etme Durumu :

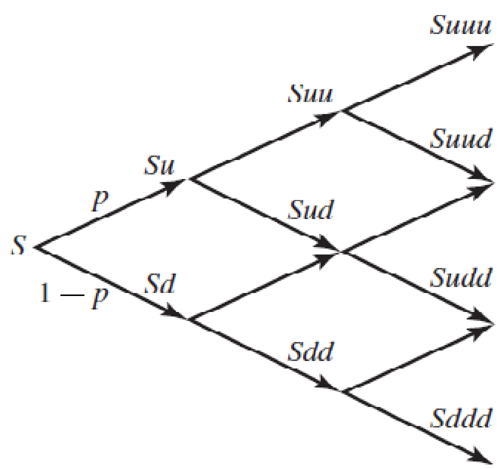
$$X(t) = \delta_0(t+1)B(t) + \delta_1(t+1)S_1(t) + ... + \delta_N(t+1)S_N(t), \quad t = 1, ..., T-1$$

formülleri yarıdımıyla bulunabilinir.

Ayrıca Cox-Ross-Rubinstein binom modeli diye adlandırılan model de vardır. Bu modelde de genellikle bir hisse senedi S, ve her periyotta faiz oranı r sabit olmak koşuluyla bono veya banka hesabı göz önüne alınarak modelleme yapılır. Çok basit olmasına karşın, olasılıksal ve çok periyotlu olmasından dolayı bazen zorluklar teşkil edebilir. Olasılıksal olmasından dolayı her bir periyot sonunda riskli yatırım aracı (hisse senedi gibi) zıplamalı olarak ifade edilen aşağı ve yukarı olmak üzere iki farklı değer alması söz konusudur. Yukarı hareket durumunu **u** ile, aşağı hareket durumunu da **d** ile gösterecek olursak, **d**< **1**+**r** < **u** koşulu altında yukarı ve aşağı doğru hareketler olasılıksal olarak sırasıyla aşşağıdaki gibi olacaktır:

$$p := P[S(t+1) = uS(t)] \qquad q := 1-p = P[S(t+1) = dS(t)]$$

CRR modelinde; $t = 0$ zamanındaki S hisse senedinin yukarı ve aşağı doğru sırasıyla p ve q olasılıkları ile hareketleri için 3 periyot sonundaki durumu şekil 2.4 'teki gibidir.



Şekil 2.4: 3-Periyotlu Binom Modeli

Buradan da anlaşılacağı gibi her bir dönem sonunda hisse senedinin fiyatı **u**'nun etkisiyle artabileceği gibi **d**'nin etkisiyle de azabilir. Ayrıca bu modelde farklı zamanlardaki fiyat değişiminin bağımsız olduğu kabul edilir. Bu yüzden çoğu kaynakta CRR model veya Binom model olarak geçen bu model çok kullanışlı ve basit bir modelleme yöntemi olmasına rağmen sadece yaklaşık sonuçlar vermektedir.

2.4 Finans Türevleri

Finans türevleri bir finansal araçtır. Öyle ki vade zamanındaki ödemenin örneğin hisse senedinin, bononun veya döviz kuru gibi başka değişkenlerin değerlerine bağlı olarak neyin üzerine inşa edildiğini söyler. Tezimizde bu değişkenler hisse senedi ve bono olacaktır. Örneğin X ve Y gibi iki firma kendi aralarında şöyle bir anlaşma yapmış olsunlar: X firması anlaşmanın yapıldığı tarihten itibaren üç ay içerisinde eğer Turkcell 'in hisse senedi fiyatları 60 TL nin üstüne çıkarsa Y firmasına 100 TL ödeyecek, fakat bu anlaşma için Y firması X firmasına anlaşmanın yapıldığı gün 20 TL ödeyecek. Bu örnekten de görüldüğü gibi firmaların finans türevleri hisse senedi iken X firmasının diğerine ödeme yapıp yapmayacağı hisse senedinin fiyatına göre değişmektedir. Yani bir firmanın zararı diğerinin kar hanesine eklenmektedir. Ayrıca finas türevi olarak bonoyu tercih etmiş olsalardı durum böyle olmayacaktı çünkü bonoda hisse senedinde olduğu gibi firmaların aktif bir işlem içerisinde olması gerekmemektedir. Bunun da nedeni bononun genellikle hangi şirketten alındıysa o şirket iflas etmediği sürece artma yani kar eğilimi içerisinde olmasındandır.

Vadeli işlemler olarak bilinen ve çoğu yabancı kaynaklarda "Futures and Forward" olarak geçen işlemler önceden belirlenmiş ilerideki bir tarih için belirli bir fiyattan alma hakkı, satma hakkı veya şartı veriyor (bakınız [1], [3]). Burada iki taraf için de bir mecburiyet söz konusudur. Bu durumda bir taraf kısa pozisyon veya açık pozisyon olarak satma eğilimi içerisinde iken diğer taraf uzun pozisyon veya pozisyon fazlası altında alma eğilimi içerisinde olacaktır.

Bunların yanı sıra opsiyonlar da en kolay tanımıyla sahibine önceden belirlenen fiyat ve tarihte veya belirlenen fiyat ve tarihten önce de bir başkasından satın alma veya bir başkasına satma hakkı tanıyan bir finans yatırım aracıdır. Opsiyonları vadeli işlemlerden ayıran en önemli özellik opsiyon sahibi için burada herhangi bir mecburiyet söz konusu değildir. Bu finans yatırım aracının opsiyon olarak isimlendirilmesinin nedeni de budur. Çoğu yabancı kaynaklarda "Call option" olarak geçen ve opsiyon sahibine alma hakkı tanıyan opsiyonlara alım opsiyonu denir (bakınız [1],[4]). Benzer şekilde çoğu yabancı kaynaklarda "Put option" olarak geçen ve opsiyon sahbine satma hakkı tanıyan opsiyonlara satım opsiyonu denir. Bu iki opsiyon türünün de tanımında en fazla dikkat edilmesi gereken kısım bir hak tanıma kısmıdır. Yani belirlenen süre sonunda o hakkı kullanıp kullanmama opsiyon sahibine kalmış bir durum olup herhangi bir zorunluluk söz konusu değildir. Opsiyon sahiplerinin satın alma işlemi veya satma işlemi sadece belirlenen tarihte yapılabiliniyorsa bu tür opsiyonlara **Avrupai opsiyonlar** denir. Eğer opsiyon sahibi bu satın alma veya satma işlemini önceden belirlenen tarihten önce herhangi bir tarihte yapabiliyorsa bu tür opsiyonlara da **Amerikan opsiyonlar** denir. Bu tezde Amerikan opsiyonları üzerinde pek durmayacağız. Ama Amerikan opsiyonlarına örnek olarak, opsiyon sahibi 1 yıl sonra 450 TL den alma hakkına sahip olduğu herhangi bir hisse senedini 1 yıldan önceki herhangi bir tarhite de alabilir. Eğer opsiyon türü Amerikan değil de Avrupai opsiyon olmuş olsaydı sadece 1 yıl sonunda 450 TL ye alma şansı olacaktı. İşte bu şekilde opsiyon sahibinin opsiyonu almaya veya satmaya karar vermesi durumuna opsiyon sahibinin opsiyonu kullanması veya hayata geçirmesi denir. Çoğu yabancı kaynaklarda ise bu durum "Exercise" olarak isimlendirilir (bakınız [1], [4]). Buna ek olarak özellikle Amerikan opsiyonlar için opsiyon sahibinin opsiyonu kullanma hakkını belirleyen tarihe de **vade** denir. Ayrıca çoğu yabancı kaynaklarda ise "Strike price" veya "Exercise price" olarak geçen ve önceden belirlenen fiyatta opsiyonu kullanma hakkı tanıyan fiyata da **kullanma fiyatı** denir.

Avrupai alım opsiyonları için T vade süresini, S(t) hisse senedinin t zamanındaki değerini, K da kullanma fiyatını göstermek üzere alma hakkı tanıyan alım opsiyonu için eğer T vade süresi sonunda hisse senedinin marketteki fiyatı S(T), kullanma fiyatı olan K dan fazla ise opsiyon sahibi hisse senedini K fiyatından kullanma hakkıyla satıcıdan alarak alım opsiyonunu kullanır. Eğer bunun tersi durum söz konusu ise yani hisse senedinin marketteki fiyatı S(T), kullanma fiyatı olan K dan daha az ise opsiyoun sahibi alım opsiyonunu kullanmayıp almak istediği hisse senedini gidip market değeriyle marketten satın alır. Bu durumda opsiyon sahibinin zararı aynı zamanda opsiyon satıcısının karı sadece alım opsiyonu için kontrat yapılırken ödenen miktar kadardır.

Opsiyon sahibinin hisse senedi alımında izleyeceği strateji:

Eğer S(T) < K ise hisse senedini S(T) market fiyatından alacak,

Eğer S(T) > K ise hisse senedini K kontrattaki kullanma fiyatından alacak.

Her iki durumda da satıcının alıcıya ödeyeceği miktarı belirleyen formül ise şu sekildedir;

$$max[0, S(T) - K] = [S(T) - K]^+$$

Bu formülden de anlaşılacağı gibi eğer S(T) < K ise alıcı opsiyonu kullanmayacağı için satıcının alıcıya ödeyeceği miktar 0 TL dir. Diğer durumda ise satıcının alıcıya ödeyeceği miktar veya kontrattan dolayı alıcı için ödeyeceği miktar sadece $S(T) - K$ kadar olacaktır. Eğer opsiyon olarak alım opsiyonu değil de satım opsiyonu olsaydı ödeme;

$$max[0, K - S(T)] = [K - S(T)]^+$$

formülü yardımıyla bulunacaktı.

Örneğin farzedelim ki İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında bir hisse senedinin şu anki değeri 150 TL olsun. Bir ay sonra aynı hisse senedi için 156 TL, 151 TL ve 147 TL şeklinde 3 farklı olası fiyat söz konusu olsun. Avrupai alım opsiyonu bir aylık vadeyle ve $K = 150\ TL$ kullanma fiyatı ile 6 TL olsun. Yatırımcı elindeki 150 TL 'yi fiyatının artacağını düşündüğü hisse senedine yatırmaya karar vermiş olsun. Bu durumda bir ay sonra yatırımcının bu üç seçenek altındaki kar veya zarar durumu şöyle olacaktır :

1.durum

$$(156 - 150)/150 = 0.04 = \%4$$

2.durum

$$(151 - 150)/150 = 0.006 = \%0.6$$

3.durum

$$(147 - 150)/150 = -0.02 = \% - 2\ .$$

Bunun yanı sıra eğer doğrudan hisse senedi almak yerine alım opsiyonu durumunu denemiş olsaydı $150/6 = 25$ tane kupon alabilecekti. Her bir kupon için hisse senedinin fiyatının 156 TL olduğu durumda satıcının ödeyeceği miktarın 6 TL, 151 TL olduğu durumda 1 TL ve 147 TL olduğu durumda opsiyon kullanılmayacağından satıcının 0 TL ödeyeceğini varsayarsak bu durumda ise kar veya zarar durumu şöyle olacaktır:

1.durum

$$(6\ .\ 25 - 150)/150 = 0 = \%0$$

2.durum

$$(1\ .\ 25 - 150)/150 = -0.83 = \% - 83$$

3.durum

$$(0 - 150)/150 = -1 = \% - 100\ .$$

Bu sonuçlardan da anlaşılacağı gibi yatırımcı eğer alım opsiyonunu kullanılmış olsaydı hisse senedinin fiyatı en üst değeri alıp artsa dahi bu örnek için herhangi bir kar veya zarar durumu söz konusu olmazken, hisse senedinin fiyatı 151 TL veya 147 TL olduğu durumlarda ise çok büyük oranda zarara uğrayacaktı (benzer örnekler için bakınız [4]).

BÖLÜM 3

SÜREKLİ MODELLER

Sürekli zamanlı modeller finans marketlerinde ayrık zamanlı modellemeye göre çok daha fazla tercih edilen ve kullanılan bir yöntemdir. Daha önceden de bahsettiğimiz gibi ayrık zamanlı modelleme, sürekli zamanlı modelleme kadar gerçek hayattaki değerlere yaklaşım yapamamakta ama sadece fikir vermesi anlamında kullanılmaktadır. Gerçek finans marketlerinde değerler rassal olarak değiştiğinden en güzel ve gerçekçi yaklaşımlarda bulunabilmek sürekli zamanlı modelleme yöntemiyle mümkündür. Gerçek piyasalarda fiyatlardaki değişimler çok kısa zaman dilimlerinde gerçekleşebileceğinden sürekli zamanlı modellemede zaman aralıkları da istenildiği kadar küçük alınarak yani hassasiyet arttırılarak gerçek piyasa değerlerine yaklaşım güçlendirilebilinir.

Bunların yanı sıra sürekli zamanlı modellemeyi kullanmak matematiksel anlamda da ciddi işlem kolaylıkları sağlayacağı gibi çok kompleks fiyatlandırma süreçlerinde dahi az sayıda parametreler yardımıyla modellemeyi yapıp kompleks olan fiyatlandırma sürecini kolay bir şekilde yorumlamamıza yardımcı olacaktır. Bu yüzden finans piyasalarında ayrık zamanlı modellemedeki $\Delta t = t_{k+1} - t_k$ zaman aralığı 0 - a giderken ki modelleme olan sürekli zamanlı modeller kullanılır.

Ayrıca bu bölümde ayrıntılı olarak ele alacağımız Merton-Black-Scholes modeline giriş olması açısından bazı ön bilgilere burada değinmekte fayda var. Merton-Black-Scholes modelinde aşağıdaki özelliği sağlayan ve risksiz olan bono **B** veya banka hesabı vardır.

$$B(t) = e^{rt}B(0)$$

Bononun başlangıç değeri 1 TL olarak kabul edildiğinden yani $B(0) = 1$ olduğundan

$$B(t) = e^{rt}$$

olur. Buradaki r > 0 sürekli zamanlı bileşik faiz oranını göstermekte olup sabittir. Risksiz olan bono dışında riskli yatırım aracı olan hisse senedi de bu modelde karşımıza çıkmaktadır. Hisse senedi **S** aşağıdaki özelliği sağlamaktadır :

$$S(t) = S(0)exp\{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}z(t)\} \ .$$

Buradaki μ ve σ sıfırdan büyük olup ($\mu > 0$ ve $\sigma > 0$), sabittirler. z(t) ise standart normal rassal değişkeni göstermektedir. Eğer buradaki σ, 0 'a çok yakın bir değer alır veya 0 'a çok yaklaşırsa riskli olan hisse senedi risksiz olan ve faiz oranı μ olan bono gibi davranacaktır.

Bu gibi bazı denklemlerin çözümünün olup olmadığını bazı koşullar ve teoremler yardımıyla bulmak mümkündür fakat biz genel olarak bu tezde ele alacağımız bütün denklemlerin çözümünün olduğunu ve çözümün tek olduğunu kabul edeceğiz ve diğer durumları incelemeyeceğiz. Bu bölümde ise ayrıntılı olarak; Brown hareketinden ve Brown hareketinin özelliklerinden, stokastik integral ve stokastik integralin özelliklerinden, Itô kuralından, Black-Scholes modelinden ve son olarak da sürekli zamanlı faiz oranlarından bahsedeceğiz.

3.1 Brown Hareketi ve Özellikleri

Sürekli zamanlı modellere temel teşkil eden ve rassal süreçli olan **Brown hareketi** veya **Wiener süreci** olarak isimlendirilen ve de $W(t)$ de t zamanındaki değerini göstermek üzere ilk olarak karşımıza sezgisel olarak ayrık versiyonun limiti olarak şu şekilde;

$$W(t_{k+1}) = W(t_k) + z(t_k)\sqrt{\Delta t}, \qquad W(0) = 0$$

çıkmıştır. $z(t_k)$ ise ortalaması yani $E[z(t_k)] = 0$ ve varyansı yani $Var[z(t_k)] = 1$ olan birbirinden bağımsız standart normal rassal değişkeni göstermektedir. Bu durumda $W(t_{k+1}) - W(t_k)$ da ortalaması 0 ve varyansı Δt olarak normal rassal dağılım gösterir. Bunu gösterecek olursak;

$$W(t_{k+1}) - W(t_k) = z(t_k)\sqrt{\Delta t}$$

idi. O halde beklenen değeri;

$$E[z(t_k)\sqrt{\Delta t}] = \sqrt{\Delta t}E[z(t_k)] = 0$$

olur. Ve varyansı;

$$\begin{aligned} Var[z(t_k)\sqrt{\Delta t}] &= E[(z(t_k)\sqrt{\Delta t} - E[z(t_k)\sqrt{\Delta t}])^2] \\ &= E[z^2(t_k)\Delta t] \\ &= \Delta t E[z^2(t_k)] \\ &= \Delta t \end{aligned}$$

olur. Daha da genelleyecek olursak, k < l için

$$W(t_l) - W(t_k) = \sum_{i=k}^{l-1} z(t_i)\sqrt{\Delta t} \; olur.$$

Bunun anlamı $W(t_l) - W(t_k)$; ortalaması 0, varyansı $t_l - t_k$ olan normal dağılım gösterir demektir. Buradaki süreç çoğu yabancı kaynakta "random walk" olarak geçer (bakınız [1], [5]). Eğer bu ifadenin Δt 'nin 0 a giderkenki limitini alacak olursak random walk olan süreç Brown hareketine yakınsar (bakınız[6]).

Tanım 3.1: (Brown Hareketi)

Tek boyutlu olarak **Brown hareketi** veya **Wiener süreci**; F sigma cebiri olmak üzere ve $W = \{W_t, F; 0 \leq t \leq \infty\}$ olarak (Ω, F, P) olasılık uzayı üzerinde tanımlanan ve $W_0 = 0$, $0 \leq s \leq t$ özelliklerini sağlamak üzere $W_t - W_s$, F_s den bağımsız olarak artar, ortalaması ve varyansı sırasıyla 0 ve $t - s$ tir.

Brown Hareketinin Özellikleri

- $W(t) - W(s)$ ortalaması 0 ve varyansı; $s < t$ için $t - s$ olmak üzere normal dağılım gösterir (bakınız [8]).

- W süreci herhangi bir zaman diliminde $0 \leq t_1 < t_2 < t_3 .... < t_n$ birbirinden bağımısız ve rassal olarak artış gösterir. Yani rasssal olan
  $W(t_2) - W(t_1),\ W(t_3) - W(t_2),\ W(t_4) - W(t_3), ...W(t_n) - W(t_{n-1})$ değişkenler bağımısızdırlar (bakınız [6],[7]).

- $W(0) = 0$

- Örnek yol olarak $\{W(t); t \geq 0\}$, t 'nin sürekli bir fonksiyonudur.

- $E[W_t^4] = 3t^2$ ve $E[|W_t - W_s|^4] = 3|t - s|^2$. Daha genel olarak,

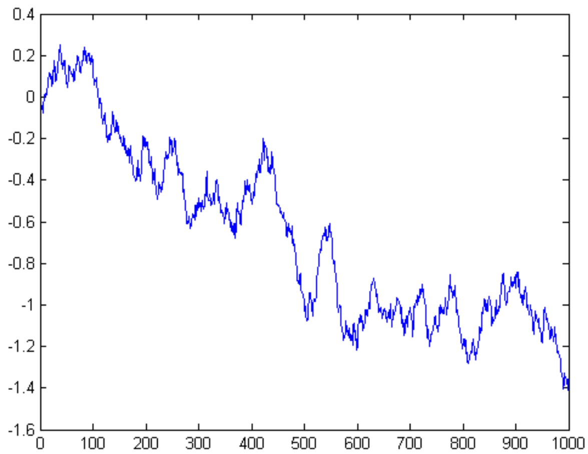
$$E[W_t^{2k}] = \frac{(2k)!}{2^k \ . \ k!}\ t^k$$

  ve

$$E[W_t^{2k+1}] = 0 \ \ k \in Z_+$$

  (bakınız [9]).

Örnek Brown hareketi şekil 3.1 'deki gibidir.



Şekil 3.1: Brown Hareketinin Simülasyonu

Brown hareketinin yolu t zamana göre sürekli olmasına rağmen hiçbir yerde türevlenemez. Bunun nedeni Brown hareketinin artışı normal dağılım göstermesinden dolayı kısa zaman aralıklarında herhangi bir yere sıçrama yapabilir olmasındandır. Bu durumu belirtecek olursak;

$$
\begin{aligned}
E\left[\left(\frac{W(t)-W(s)}{t-s}\right)^2\right] &= \frac{1}{(t-s)^2} \,.\, E[(W(t)-W(s))^2] \\
&= \frac{1}{(t-s)^2} \,.\, (t-s) \\
&= \frac{1}{t-s}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

Buradan da anlaşılacağı gibi s, t-ye giderken limit alınacak olursa ifadenin sonsuzluğa gideceği açıktır.

Tek boyutlu olarak Brown hareketinin Markov süreci olduğu da gösterilebilinir. Markov süreci gelecek zamandaki değerlerin dağılımının, geçmiş ve şimdiki zaman değerlerinin koşulu altında sadece şimdiki değerler yardımıyla tahmin edilebilineceği ve geçmişteki bilgilere gerek olmadığını söyler. Bunun için bugünkü bilgiler ışığı altında koşullu olasılık yardımıyla $W(t)-W(s)$ nin gerçekten de $W(s)$ den bağımsız olduğu gösterilebilinir.

$$
\begin{aligned}
E[W(t) \mid W(s)] &= E[W(t)-W(s) \mid W(s)] + E[W(s) \mid W(s)] \\
&= E[W(t)-W(s)] + E[W(s)] \\
&= W(s)
\end{aligned}
$$

Buradan da anlaşılcağı gibi gelecekteki beklenen değer için Brown Hareketinin, şimdiki ve geçmişteki bilgiler koşulu altında hesaplandığında tam olarak bugünkü değere eşit olduğu açıktır. İşte bu Martingale özelliğidir. Yani, $E[W(t)|W(s)] = W(s)$ tir. Bu Martingale özelliği aynı zamanda Brown harketinin gelecekteki en iyi tahmini değerinin bugünkü değer olduğu şeklinde de yorumlanabilinir. Ayrıca n-boyutlu Brown hareketi de Markov Sürecidir (bakınız [6]).

3.2 Stokastik İntegral ve Özellikleri

Brown hareketi bazı varlıkların fiyatlandırma süreçlerinin modellemesi için tek başına yeterince esnek değildir. Bu yüzden Brown hareketinde bahsettiklerimizi de genelleyerek şu süreci göz önüne alalım.

$$
X(t_{k+1}) = X(t_k) + \mu(t, X(t_k))\Delta t + \sigma(t, X(t_k))\sqrt{\Delta t} z(t_k), \quad X(0) = x
$$

Buradaki $z(t_k)$ standart normal rassal değişken iken μ ve σ zaman değişkeni olan t ve yer değişkeni olan x'e bağlı olan rassal olmayan fonksiyonlardır. Bu ifadenin Δt sıfıra giderken ($L^2(P)$ uzayında) limitini alacak olursak ;

$$
X(t) = x + \int_0^t \mu(u, X(u))du + \int_0^t \sigma(u, X(u))dW(u)
$$

eşitliğini elde ederiz. Bu bağıntı çoğu kaynakta genel olarak,

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt \;+\; \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(0) = x$$

şeklinde ifade edilir. İşte bu ifadeye X difüzyon süreci için, **Stokastik Diferansiyel Denklem** veya kısaca **SDD** denir. SDD 'deki μ amaç fonksiyonunu, σ ise X süreci için difüzyon fonksiyonunu gösterir. Denklemden de anlaşılacağı gibi eğer Brown hareketli olan kısım yani dW olmasaydı veya sıfır olsaydı stokastik diferansiyel denklem, adi diferansiyel denkleme dönüşürdü. Herhangi X sürecinin verilen SDD'yi sağlayıp sağlamayacağı önceden bilinemez. Bu yüzden çözümün varlığından bazı teknik koşullar altında bahsedebiliriz. Finans literatürlerinde $\int_0^t Y(u)dW(u)$ şeklinde olan integral; Y süreci için **Stokastik integral** olarak veya **It$\hat{o}$ integrali** olarak geçer (bakınız [7]). Stokastik integralin bazı teknik özellikleri altında çözümün varlığından bahsedeceğiz ve It$\hat{o}$ integralinin Y'nin bazı şartlar altındaki durumu için martingale olduğundan bahsedeceğiz.

Stokastik İntegralin Teknik Özellikleri

Daha önceden de bahsettiğimiz gibi Brown hareketi integrallenemediğinden dolayı It$\hat{o}$ integrali, normal Lebesgue veya Riemann integrali gibi inşa edilemez. Eğer Brown hareketinin geçmişteki ve şu anki değerleri W(u), u $\leq$ t biliniyorsa, Y süreci için $\int_0^t Y(u)dW(u)$ integrailinin tanımı anlamlı ve mümkün olacaktır. Buradaki Y süreci Brown hareketinden oluşturulan ve geçmişteki bilgilere bağlı olduğundan adaptasyonlu süreç olarak veya bazı yabancı kaynaklarda "adapted" olarak isimlendirilir.

Teorem 3.1 (It$\hat{o}$ İntegral Özellikleri)

Farzedelim ki Y, Brown hareketinden elde edilen bilgilere göre adaptasyonlu bir süreç ve $T > 0$ verilen zaman dilimi olsun. Ayrıca farzedelim ki $E[\int_0^t Y^2(u)du] < \infty$ olsun. O halde,
$M(t) := \int_0^t Y(u)dW(u)$ iyi tanımlıdır yani sonlu bir değeri vardır ve stokastik integral olduğundan dolayı martingale'dir, ortalaması 0 ve de varyans süreci ise $E[\int_0^t Y(u)^2du]$ dir. Başka bir şekilde ifade edecek olursak her s <t için,

- $E\Big[\int_0^t Y(u)dW(u)\Big] = 0$
- $E\Big[\int_0^t Y(u)dW(u) \;\mid W(s), 0 \leq s \leq t\Big] = \int_0^s Y(u)dW(u) \rightarrow$ {Martingale özelliği}
- $E\Big[(\int_0^t Y(u)dW(u))^2\Big] = E\Big[\int_0^t Y^2(u)du\Big] \rightarrow$ {It$\hat{o}$ izometri}

İspat: (Bakınız [7]). $\square$

Brown hareketi göz önüne alındığında stokastik integralin ortalamasının 0 olduğu açıktır. Yukarıdaki martingale ve It$\hat{o}$ izometri özelliklerini kullanarak bir stokastik integralin varyansını kolaylıkla bulabiliriz :

$$
\begin{aligned}
Var\Big[\int_0^t Y(u)dW(u)\Big] &= E\Big[(\int_0^t Y(u)dW(u))^2\Big] - E\Big[\int_0^t Y(u)dW(u)\Big]^2 \\
&= E\Big[(\int_0^t Y(u)dW(u))^2\Big] - 0 \\
&= E\Big[\int_0^t Y^2(u)du\Big] .
\end{aligned}
$$

Itô integralinin martingale özelliğini sağladığını göstermek için, $F(t) = \int_0^t Y(u)dW(u)$ ve s < t olmak üzere $F(s) = \int_0^s Y(u)dW(u)$ olsun. O halde,

$$
F(t) = F(s) + \int_s^t Y(u)dW(u)
$$

olur. Şimdi de W(s) koşullu olasılığı altında beklenen değere bakacak olursak,

$$
\begin{aligned}
E[F(t) \mid W(s)] &= E[F(s) \mid W(s)] + E\Big[\int_s^t Y(u)dW(u) \mid W(s)\Big] \\
&= E[F(s) \mid W(s)] + E\Big[\int_s^t Y(u)dW(u)\Big] \\
&= F(s) + 0 \\
&= F(s) \quad olur.
\end{aligned}
$$

Bu da martingale özelliğini sağladığını gösterir. Şimdi de Teorem 3.1'in Y kazanç sürecini göstermek üzere ayrık zamanlı Y süreci için sağlandığını gösterelim. O halde

$$
M(t_l) := \sum_{j=0}^{l-1} Y(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)], \qquad M(0) = 0
$$

olsun. Her k < l için beklenen değeri hesaplayalım :

$$
\begin{aligned}
E\Big[\sum_{j=k}^{l} Y(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)\Big] &= \sum_{j=k}^{l} E[E\{Y(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j) \mid W(0), ..., W(t_j\}] \\
&= \sum_{j=k}^{l} E[Y(t_j)E\{[W(t_{j+1}) - W(t_j) \mid W(0), ..., W(t_j\}] \\
&= \sum_{j=k}^{l} E[Y(t_j)E\{[W(t_{j+1}) - W(t_j)\}] \\
&= 0 \quad olur. \qquad (3.1)
\end{aligned}
$$

Yani her l için $E[M(t_l)] = 0$ dır. Şimdi de $k < l$ için martingale özelliğini sağladığını gösterelim:

$$
\begin{aligned}
E[M(t_l) \mid W(0), ..., W(t_k\}] &= E\Big[\sum_{j=0}^{k-1} Y(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] \mid W(0), ..., W(t_k)\Big] \\
&+ \ E\Big[\sum_{j=k}^{l-1} Y(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] \mid W(0), ..., W(t_k)\Big] \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} Y(t_j)[W(t_{j+1}) - W(t_j)] + E\Big[\sum_{j=k}^{l-1} Y(t_j)\{W(t_{j+1}) - W(t_j)\}\Big] \\
&= M(t_k) + \mathcal{K} \\
&= M(t_k) \quad olur.
\end{aligned}
$$

<u>**Not:**</u> $\mathcal{K}$ için $W(t_j)$ koşullu olasılığı altında beklenen değeri hesaplanacak olursa $\mathcal{K} = 0$ olacağı açıktır. Sonuç olarak $E[M(t_l) \mid W(0), ..., W(t_k\}] = M(t_k)$ olup martingale özelliği sağlanmış olur.

Şimdi de $M(t_l)$'nin ilk iki terimi için varyansı hesaplayacak olursak,

$$
\begin{aligned}
Var[M(t_l)] &= E[M^2(t_l)] - E[M(t_l)]^2 \\
&= E[M^2(t_l)] \\
&= E[\{Y(t_0)\{W(t_1) - W(t_0)\} + Y(t_1)\{W(t_2) - W(t_1)\}\}^2] \\
&= E[Y^2(t_0)\{W(t_1) - W(t_0)\}^2] + E[Y^2(t_1)\{W(t_2) - W(t_1)\}^2] \\
&+ \ 2 \,.\, E[Y(t_0)Y(t_1)\{W(t_1) - W(t_0)\}\{W(t_2) - W(t_1)\}] \quad olur.
\end{aligned}
$$

Kareli olan ifadelerden birini hesaplayacak olursak,

$$
\begin{aligned}
E[Y^2(t_1)\{W(t_2) - W(t_1)\}^2] &= E[E\{Y^2(t_1)\{W(t_2) - W(t_1)\}^2 \mid W(t_0), W(t_1)\}] \\
&= E[Y^2(t_1)E\{\{W(t_2) - W(t_1)\}^2 \mid W(t_0), W(t_1)\}] \\
&= E[Y^2(t_1)E\{[W(t_2) - W(t_1)]^2\}] \\
&= E[Y^2(t_1) \,.\, \Delta t] \\
&= \Delta t \,.\, E[Y^2(t_1)] \quad olur.
\end{aligned}
$$

Şimdi de diğer terimi hesaplayacak olursak,

$$
\begin{aligned}
E[Y(t_0)Y(t_1)\{W(t_1) - W(t_0)\}\{W(t_2) - W(t_1)\}] &= E[E\{Y_0Y_1\{W_1 - W_0\}\{W_2 - W_1\} \mid W_0, W_1\}] \\
&= E[Y_0Y_1\{W_1 - W_0\}E\{[W_2 - W_1] \mid W_0, W_1\}] \\
&= E[Y_0Y_1\{W_1 - W_0\}E\{W_2 - W_1\}] \\
&= E[Y_0Y_1\{W_1 - W_0\} \,.\, 0] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

O halde sonuç olarak bu elde ettiğimiz sonucu ikiden fazla periyotlar için genelleyecek olursak,

$$E[M(t_l)^2] = E\Big[\sum_{j=0}^{l-1} Y^2(t_j)\Delta t\Big]$$

ifadesini elde ederiz.

3.3 Itô Kuralı

Itô kuralı; difüzyon süreçlerinin hesaplanması veya bir başka ifadeyle difüzyon süreçlerinde işlemler yapmak için kullanılan vezgeçilmez bir araçtır. Itô kuralı standart hesaplamalardaki diferansiyelleme işleminin bir genişletilmesi veya bir genellemesidir. Standart hesaplamalardaki diferansiyel,

$$\frac{d\, f(t, x(t))}{dt} = f_t(t, x(t)) + f_x(t, x(t))\frac{dx(t)}{dt}$$

şeklinde idi. Burdaki f_t, f_x sırasıyla t'ye ve x'ye göre kismi türevleri göstermek üzere bu ifade benzer olarak şu şekilde de,

$$d\, f(t, x(t)) = f_t(t, x(t))dt + f_x(t, x(t))dx(t)$$

yazılabilinir. Itô hesaplamalarında bu eşitliğin sağ kısmında ekstra terim vardır. Bunun nedeni, standart hesaplamalarda bağımısız olan değişkendeki değişimin bu değişkene bağımlı olan diğer değişken üzerindeki etkisini analiz ederken birinci türeve bakmak yani local etkiyi araştırmak yeterli idi. Fakat bağımsız olan değişken eğer Brwon hareketine bağımlı ise bir başka ifadeyele bağımsız olan değişken Brown hareketine göre değişim gösteriyorsa işte bu durumda sadece birinci türeve bakarak analiz yapmak çok doğru bir yaklaşım değildir. Bunun nedeni daha önceden de bahsettiğimiz gibi Brown hareketinin bir sonraki aralıkta herhangi bir yere sıçrama yapabilir olmasındandır. Sonuç olarak analiz yaparken ikinci türevi de dikkate almamız gerekmektedir. Bu durum sezgisel olarak, yeterince küçük $\Delta t > 0$ için ikinci dereceden terimlerin $(W(t+\Delta t) - W(t))^2$, [0,T] aralığındaki toplamı T gibi hareket ettiğinden gözardı edilemezler.

<u>Teorem 3.2</u> (Itô Kuralı)
Farzedelim ki f(t,x), t'ye göre birinci ve x'e göre birinci ve ikinci dereceden türevi olan sürekli bir fonksiyon olsun. Verilen düfüzyon süreci,

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \tag{3.2}$$

olsun. Bu durumda f(t, X(t)) difüzyon süreci,

$$d\, f(t, X(t)) = \big[f_t + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx}\big](t, X(t))dt + f_x(t, X(t))dX(t) \tag{3.3}$$

eşitliğini sağlar.

İspat :

Itô kuralının en kolay durumunu,

$$f(W(t)) - f(0) = \int_0^t f^{'}(W(s))dW(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(W(s))ds \qquad (3.4)$$

veya

$$d\big[f(W(s))\big] = f^{'}(W(t))dW(t) + \frac{1}{2}f^{''}(W(t))dt \qquad (3.5)$$

göz önüne alarak ispatlayalım. $f^{''}$ 'nün var olduğu ve sürekli olduğunu kabul edelim. Aynı zamanda işlemlerde kolaylık olsun diye f 'nin kompakt olduğunu kabul edelim. Bunun anlamı f, $f^{'}$ ve $f^{''}$ 'nün sınırlı olması demektir. İspatta genel olarak herhangi bir verilen g fonksiyonunun sınırı için $\mid g \mid_{max}$ gösterimi kullanılacaktır.

İlk olarak [0,t] aralığını n-eşit parçaya bölecek olursak $0 \leq i \leq n$ için $t_i = it/n$ olur. Ve de (3.4) eşitliğindeki ifadenin sol tarafını,

$$f(W(t)) - f(W(0)) = \sum_{i=1}^{n}[f(W(t_i)) - f(W(t_{i-1}))] \qquad (3.6)$$

olarak gösterelim. Şimdi de toplamın içindeki fark fonksiyonları için Taylor formülünü şu formda kullanacak olursak,

$$f(y) - f(x) = (y-x)f^{'}(x) + \frac{1}{2}(y-x)^2 f^{''}(x) + R(x,y) \qquad (3.7)$$

$R(x,y)$ kalan kısım ise

$$R(x,y) = \int_x^y (y-u)(f^{''}(u) - f^{''}(x))du$$

olur. $f^{''}$ sürekli olduğundan, süreklilik tanımı gereği $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\delta(\varepsilon) > 0$ öyle ki,

$$\mid u - y \mid < \delta \qquad iken \qquad \mid f^{''}(u) - f^{''}(y) \mid < \varepsilon$$

olmalıdır. Eğer $\delta = \mid y - x \mid$ olarak ve de h düzgün sürekli ve sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $\epsilon = h(x,y)$ olarak seçersek,

$$R(x,y) < \int_x^y \mid y - x \mid h(x,y)du = (y-x)^2 h(x,y) \qquad (3.8)$$

olur. Eğer $x = y$ ise $\forall x$ için $h(x,x) = 0$ olacağı açıktır. Ayrıca $W(t_i) = W_i$ olmak üzere (3.6) eşitliğinin sağ tarafı için Taylor formülünü uygulayacak olursak,

$$\begin{aligned} f(W(t)) - f(W(0)) = A_n + B_n + C_n \quad &= \sum_{i=1}^{n} f^{'}(W_{i-1})(W_i - W_{i-1}) \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i-1}^{n} f^{''}(W_{i-1})(W_i - W_{i-1})^2 + C_n \qquad (3.9) \end{aligned}$$

olur. Öyle ki

$$\mid C_n \mid \; \leq \; \sum_{i=1}^{n}(W_i - W_{i-1})^2 h(W_{i-1}, W_i) \qquad (3.10)$$

olduğunda.

Şimdi n sonsuza giderken yani $n \to \infty$ iken A_n olasılıksal olarak (3.4) eşitliğindeki birinci terime yani $\int_0^t f^{'}(W(s))dW(s)$ ifadesine yakınsar.

Şimdi de B_n denklemini şu şekilde

$$B_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^{''}(W_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^{''}(W_{i-1})[(W_i - W_{i-1})^2 - (t_i - t_{i-1})]$$

ifade edecek olursak bu eşitliğin ilk kısmının $n \to \infty$ iken Rieman anlamında (3.4) eşitliğindeki ikinci terime yani $\frac{1}{2}\int_0^t f^{''}(W(s))ds$ ifadesine yakınsadığı açıktır. Bundan sonra (3.4) eşitliğini sağlamak için yapmamız gereken B_n eşitliğinin ikinci kısmının ve C_n 'nin 0-a yakınsadığını göstermek olacaktır. Şimdi B_n 'nin ikinci kısmını

$$B_{n_2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} f^{''}(W_{i-1})[(W_i - W_{i-1})^2 - (t_i - t_{i-1})]$$

olarak gösterelim. B_{n_2} 'nin her bir teriminin çarpımsal olarak beklenen değeri daha önceden (3.1) eşitliğinde yapılanlara benzer olarak,

$$E\big\{f^{''}(W_{i-1})[(W_i - W_{i-1})^2 - (t_i - t_{i-1})] \,.\, f^{''}(W_{j-1})[(W_j - W_{j-1})^2 - (t_j - t_{j-1})]\big\} = 0 \ olur.$$

Çünkü,

$$E[(W_i - W_{i-1})^2] = t_i - t_{i-1}$$

idi. Şimdi bu ifadeyi B_{n_2} için kullanacak olursak,

$$\begin{aligned}
E[B_{n_2}^2] &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} E\{f^{''}(W_{i-1})^2\big[(W_i - W_{i-1})^2 - (t_i - t_{i-1})\big]^2\} \\
&\leq \frac{1}{2} \mid f^{''} \mid_{max}^2 \sum_{i=1}^{n} E\{\big[(W_i - W_{i-1})^2 - (t_i - t_{i-1})\big]^2\} \\
&= \frac{1}{2} \mid f^{''} \mid_{max}^2 \sum_{i=1}^{n} E\{\big[(W_i - W_{i-1})^2 - E\{(W_i - W_{i-1})^2\}\big]^2\} \\
&= \frac{1}{2} \mid f^{''} \mid_{max}^2 \sum_{i=1}^{n} Var\big[(W_i - W_{i-1})^2\big]\ , \quad X = W_i - W_{i-1} \ olsun. \\
&= \frac{1}{2} \mid f^{''} \mid_{max}^2 \sum_{i=1}^{n} Var\big[X^2\big] \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

X Brown hareketi olup ortalaması 0 ve varyansı $\Delta t = t_i - t_{i-1} = \frac{t}{n}$ $dir.$ Brown hareketinin özelliklerini de göz önünde bulundurarak,

$$\begin{aligned}
Var[X^2] &= E[(X^2)^2] - E[X^2]^2 \\
&= E[X^4] - [Var(X)]^2 \\
&= 3\,.\,\frac{t^2}{n^2} - \frac{t^2}{n^2} \\
&= 2\,.\,\frac{t^2}{n^2}
\end{aligned}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu ifadeyi (3.11) eşitliğinde yerine yazacak olursak,

$$
\begin{aligned}
E[B_{n_2}^2] &\leq \frac{1}{2} \mid f^{''} \mid_{max}^2 \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \frac{t^2}{n^2} \\
&= \mid f^{''} \mid_{max}^2 \frac{t^2}{n}
\end{aligned}
$$

Ayrıca Markov eşitsizliğinden yani

$$0 \leq P[B_{n_2}^2 > \lambda] \leq \frac{E[B_{n_2}^2]}{\lambda}$$

yardımıyla n sonsuzluğa giderken yani $n \to \infty$ iken B_{n_2} olasılıksal olarak 0-a yakınsadığı açıktır. Son olarak C_n'nin olasılıksal olarak 0-a yakınsadığı gösterelim. Bunu göstermek için Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden faydalanacağız. Yani (3.10) eşitsizliğine Cauchy-Schwarz eşitsizliğini uygulayacak olursak,

$$E[\mid C_n \mid] \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{E[(W_i - W_{i-1})^4]} \, . \, \sqrt{E[h^2(W_i, W_{i-1})]}$$

ifadesini elde ederiz. $X = W_i - W_{i-1}$ için $E[(W_i - W_{i-1})^4] = E[X^4] = 3.\frac{t^2}{n^2}$ idi. Ayrıca $h(x,y)$ düzgün sürekli olduğundan $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0$ öyle ki $\mid x - y \mid < \delta$ iken $\mid h(x,y) \mid < \varepsilon$ çünkü $h(x,x) = 0$ idi. O halde $h^2(x,y)$ 'yi, $\mathbf{1}$ karakteristik fonksiyon olmak üzere ifade edecek olursak,

$$
\begin{aligned}
h^2(W_i, W_{i-1}) &= h^2(W_i, W_{i-1}) \, . \, \mathbf{1}(\mid W_i - W_{i-1} \mid < \delta) + h^2(W_i, W_{i-1}) \, . \, \mathbf{1}(\mid W_i - W_{i-1} \mid > \delta) \\
h^2(W_i, W_{i-1}) &\leq \varepsilon^2 + h^2(W_i, W_{i-1}) \, . \, \mathbf{1}(\mid W_i - W_{i-1} \mid > \delta) \\
h^2(W_i, W_{i-1}) &\leq \varepsilon^2 + \mid h \mid_{max}^2 \, . \, \mathbf{1}(\mid W_i - W_{i-1} \mid > \delta) \\
E\big[h^2(W_i, W_{i-1})\big] &\leq E\big[\varepsilon^2 + \mid h \mid_{max}^2 \, . \, \mathbf{1}(\mid W_i - W_{i-1} \mid > \delta)\big] \\
E\big[h^2(W_i, W_{i-1})\big] &\leq \varepsilon^2 + \mid h \mid_{max}^2 \, . \, E\big[\mathbf{1} \mid W_i - W_{i-1} \mid > \delta)\big] \\
&= \varepsilon^2 + \mid h \mid_{max}^2 \, . \, P\big[\mid W_i - W_{i-1} \mid > \delta)\big]
\end{aligned}
$$

olur. Burdaki $P\big[\mid W_i - W_{i-1} \mid > \delta)\big]$ ifadesi için Chebyshev eşitsizliğini kullanacak olursak,

$$
\begin{aligned}
E\big[h^2(W_i, W_{i-1})\big] &\leq \varepsilon^2 + \mid h \mid_{max}^2 \, \cdot \, \frac{E\big[\mid W_i - W_{i-1} \mid^2\big]}{\delta^2} \\
&= \varepsilon^2 + \mid h \mid_{max}^2 \, \cdot \, \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{t}{n}
\end{aligned}
$$

Herhangi bir $\epsilon > 0$ için olduğundan $n \to \infty$ için,

$$E[X^4] = 3.\frac{t^2}{n^2} \to 0$$

ve

$$E\big[h^2(W_i, W_{i-1})\big] \leq \varepsilon^2 + \mid h \mid_{max}^2 \, \cdot \, \frac{1}{\delta^2} \cdot \frac{t}{n} \to 0$$

O halde sonuç olarak,

$$E[\mid C_n \mid] \leq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{E[(W_i - W_{i-1})^4]} \, . \, \sqrt{E[h^2(W_i, W_{i-1})]} \to 0 \;\; dir. \;\; \square$$

Bu ispat f, f' ve f'' kapalı ve sınırlı olduğu durumlar için yapılmıştır. Sınırlı olmadığı durumlar için "stopping time" (localization ve mollification) yöntemleri kullanılarak yapılabilinir (Bakınız [7], [10]).

Daha önceden de bahsettiğimiz gibi Itô kuralında, yani (3.3) eşitliğinde de görüldüğü gibi ikinci türev olan f_{xx} ekstra terim mevcuttur. Eğer dX(t) yi yerine yazacak olursak Itô Kuralınının en kullanışlı halini elde ederiz. Ayrıca Itô kuralını uygularken kolaylık sağlaması açısından $dt\ .\ dt = 0$, $dt\ .\ dW = 0$ ve $dW\ .\ dW = dt$ kısaltma formüllerini kullanırız. Böylece (3.2) eşitliğindeki ifadeyi (3.3) eşitliğinde yerine yazacak olursak,

$$\begin{aligned} d\,f(t,X(t)) &= \big[f_t + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx}\big](t,X(t)dt + f_x(t,X(t))[\mu(t,X(t))dt + \sigma(t,X(t))dW(t)] \\ d\,f(t,X(t)) &= \big[f_t(t,X(t)) + \mu f_x(t,X(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 f_{xx}(t,X(t))\big]dt + \sigma f_x(t,X(t))dW \end{aligned}$$

formülünü elde ederiz. Sonuç olarak Itô kuralını en basit olarak şu şekilde

$$df = f_t dt + f_x dX + \frac{1}{2} f_{xx} dX dX$$

ifade edebiliriz.

Örnek 3.1

$Y(t) := W^2(t)$ olmak üzere $Y(t)$ sürecinin dinamiğini bulmak istersek bir başka ifadeyle t zaman olmak üzere, zamanın değişiminin Y üzerindeki etkisine bakacak olursak W Brown hareketi olduğundan dolayı Itô kuralının kullanılması kaçınılmazdır. O halde, $Y(t) = f(W(t))$ olarak düşünecek olursak; $f(x) = x^2$, $f_x(x) = 2x$ ve $f_{xx}(x) = 2$ olur. Bu ifadeleri Itô kuralında yerine yazacak olursak $Y(t)$ sürecinin SDD'si,

$$d(W^2(t)) = 2W(t)dW(t) + dt$$

elde ederiz. Bu ifadeyle

$$2\int_o^t W(u)dW(u) = W^2(t) - t$$

Stokastik integrali aynıdır. Daha önceden belirttiğimiz gibi ve bu örnekte de açıkça görüleceği gibi Stokastik integral (bazı teknik koşullar altında) martingaledir.

Örnek 3.2

$Y(t) := e^{aW(t)+bt}$ olmak üzere $Y(t)$ sürecinin dinamiğini bulalım. Buradaki süreç için $Y(t) = f(t,W(t))$ fonksiyonu olarak düşünecek olursak $f(t,x) = e^{ax+bt}$, $f_t(t,x) = bf(t,x)$, $f_x(t,x) = af(t,x)$ ve $f_{xx}(t,x) = a^2 f(t,x)$ olur. Bu ifadeleri Itô kuralını uygulayarak,

$$dY = \big[b + \frac{1}{2}a^2\big]Y dt + aY dW$$

ifadesini elde ederiz. Eğer $b = -\frac{1}{2}a^2$ olsa amaç fonksiyonu olan $\big[b + \frac{1}{2}a^2\big]Y$ kısmı sıfır olur ve Stokastik diferansiyel denklem, Stokastik integral olarak,

$$Y(t) = Y(0) + \int_0^t aY(u)dW(u)$$

ifadesi elde edilir.

Böylelikle $Y(t)$ süreci martingale olur. Bir başka şekilde ifade edecek olursak, $Y(t) = e^{aW(t)-\frac{1}{2}a^2t}$ süreci martingaledir. Gerçekten de

$$E[Y(t)] = Y(0) = 1$$

veya

$$E[e^{aW(t)-\frac{1}{2}a^2t}] = e^{-\frac{1}{2}a^2t}E[e^{aW(t)}] \Longrightarrow E[e^{aW(t)}] = e^{\frac{1}{2}a^2t}$$

olur.

Her zaman karşımıza tek boyutlu Brown hareketleri çıkmayabilir. Bu yüzden iki veya daha fazla boyutlu Brown hareketleri için de Itô kuralının bilinmesi gerekir. Farzedelim ki $W = (W_1(t), W_2(t))$ iki boyutlu bir Brown hareketi olsun. Bunun anlamı $W_1(t)$ ve $W_2(t)$ birbirinden bağımsız tek boyutlu Brown hareketleridir. Ayrıca

$$dX = \mu_X dt + \sigma_{X,1}dW_1 + \sigma_{X,2}dW_2$$

ve

$$dY = \mu_Y dt + \sigma_{Y,1}dW_1 + \sigma_{Y,2}dW_2$$

süreçleri için ve sırasıyla x ve y'ye göre en az ikinci basamaktan türevleri ve x ve y' ye göre kismi türevleri var olan $f(X(t), Y(t))$ fonksiyonu için iki boyutlu Itô kuralı :

$$df(X,Y) = f_x dX + f_y dY + \frac{1}{2}\big[f_{xx}dXdX + f_{yy}dYdY\big] + f_{xy}dXdY$$

dır. Şimdi dX ve dY ifadelerini yerlerine yazacak olursak ($dW_1 \, . \, dW_2 = 0$ olmak üzere),

$$\begin{aligned}
df(X,Y) &= f_x dX + f_y dY \\
&+ \frac{1}{2}\big[f_{xx}(\mu_X dt + \sigma_{X,1}dW_1 + \sigma_{X,2}dW_2)^2 + f_{yy}(\mu_Y dt + \sigma_{Y,1}dW_1 + \sigma_{Y,2}dW_2)^2\big] \\
&+ f_{xy}\big[(\mu_X dt + \sigma_{X,1}dW_1 + \sigma_{X,2}dW_2) \, . \, (\mu_Y dt + \sigma_{Y,1}dW_1 + \sigma_{Y,2}dW_2)\big] \\
&= f_x dX + f_y dY + \frac{1}{2}f_{xx}\big[\sigma_{X,1}^2 + \sigma_{X,2}^2\big]dt + \frac{1}{2}f_{yy}\big[\sigma_{Y,1}^2 + \sigma_{Y,2}^2\big]dt \\
&+ f_{xy}\big[\sigma_{X,1}\sigma_{Y,1} + \sigma_{X,2}\sigma_{Y,2}\big]dt \;\; olur.
\end{aligned}$$

Bazı uygulamalarda $W_1(t)$ ve $W_2(t)$ birbirine bağımlı olarak karşımıza çıkabilir. Bu durumda her t için $dW_1 \, . \, dW_2 = \rho dt$ olmak üzere Itô kuralı,

$$\begin{aligned}
df(X,Y) &= f_x dX + f_y dY + \big\{\frac{1}{2}\big[\sigma_{X,1}^2 + 2\rho\sigma_{X,1}\sigma_{X,2} + \sigma_{X,2}^2\big]f_{xx} + \frac{1}{2}\big[\sigma_{Y,1}^2 + 2\rho\sigma_{Y,1}\sigma_{Y,2} + \sigma_{Y,2}^2\big]f_{yy} \\
&+ f_{xy}(\sigma_{X,1}\sigma_{Y,1} + \sigma_{X,2}\sigma_{Y,2} + \rho\sigma_{X,1}\sigma_{Y,2} + \rho\sigma_{X,2}\sigma_{Y,1})\big\}dt \;\; olur.
\end{aligned}$$

Son olarak iki sürecin çarpımı için Itô kuralının en genel hali:

$$d(XY) = XdY + YdX + dXdY$$

dır.

Örnek 3.3

$Y(t) := W^2(t).e^{aW(t)}$ olmak üzere Y(t) sürecinin dinamiğini bulalım. Itô kuralını uygulayacak olursak,

$$\begin{aligned} dY &= e^{aW(t)}.d(W^2) + W^2.d(e^{aW}) + d(W^2).d(e^{aW}) \\ &= e^{aW(t)}[2W.dW + dt] + W^2.[a.e^{aW}dW + \frac{1}{2}a^2.e^{aW}dt] \\ &+ [2W.dW + dt]\ .\ [a.e^{aW}dW + \frac{1}{2}a^2.e^{aW}dt] \\ &= e^{aW}\{\big[1 + \frac{1}{2}a^2W^2 + 2Wa\big]dt + \big[2W + aW^2\big]dW\} \end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.3 (Martingale Temsil Teoremi)
Eğer M süreci Brown hareketi W tarafından oluşturulan bilgilerle martingale ise, o halde M sürecinin;

$$M(t) = E_t\big[M(T)\big] = E\big[M(T)\big] + \int_0^t \varphi(u)dW(u)$$

formunda bazı φ (adapted) süreci için gösterimi vardır. Özellikle,

$$M(T) = E\big[M(T)\big] + \int_0^T \varphi(u)dW(u) \ \ dur.$$

İspat: (Bakınız [7], [10]). □

3.4 Black Scholes Modeli

Bir kontratın fiyatı için matematiksel ifade olan ve finans marketlerinde herkes tarafından bilinen Black-Scholes modeli denilen açık ifade vardır. Black-Scholes modeli aşağıdaki gibidir:

$$dS(t) = S(t)\mu dt + S(t)\sigma dW(t), \quad S(0) = s$$

Bu model Samuelson'un öğrencisi olan Robert C. Merton tarafından 1960' ın sonlarında ve 1970' in başlarında geliştirilmiştir. Bu model aynı zamanda Fischer Black ve Myron Scholes'un 1973 yılında yayınlanan makalelerinde de kullanılmıştır. Bu çalışma sayesinde Robert C. Merton ve Myron Scholes 1997 yılında ekonomi dalında nobel ödülünü almışlardır. Fakat bu dönemden önce 1995'te Fischer Black hastalanıp öldüğü için ödülünü alamamıştır. Ayrıca bu model opsiyon fiyatlarının bulunmasında kolaylık sağlasa da gerçek marketlerde pek kullanılmaz. Çünkü bu model sabit parametreli ifadeler için güzel sonuçlar verse de parametre sayısını arttırdığımızda veya şartları genelleştirdiğimizde benzer şekilde güzel sonuçları elde etmek oldukça güçtür. Bu yüzden gerçek marketlerde bu model sadece fikir vermesi açısından kullanılabilinir.
Ekonomik olarak, Brown hareketinin Black-Scholes modelinde kullanılmasının asıl nedeni "random walk hipotezi" dir. Bu hipotez fiyattaki değişimin tamamen rassal olduğunu söyler. Buna

göre CRR modelinin özel olarak ayrık halinde $\Delta t \to 0$ iken Merton-Black-Scholes modeline dönüşeceği gösterilebilinir.

İlk olarak, banka hesabı veya bono olarak risksiz olan yatırım araçları **B** için bileşik faiz oranı $r > 0$ sabit iken aşağıdaki süreci ele alalım :

$$dB(t) = rB(t)dt, \quad B(0) = 1 \; .$$

Bu eşitliğin anlamı $t = 0$ zamanında bankadaki 1 TL'nin,

$$B(t) = e^{rt}$$

eşitliği yardımıyla herhangi bir t zamanındaki değeri bulunabilinir, demektir. Bu finansal yatırım aracının risksiz olarak nitelendirilmesinin nedeni dinamiğinde stokastik bileşenin olmamasındandır. Yani yukarıdaki eşitlikte Brown hareketi olmamasından dolayı bononun gelecekteki değeri bilinmektedir. Risksiz olan yatırım araclarının yanı sıra riskli olarak nitelendirilen hisse senetleri de vardır. Hisse senedi **S** aşağıdaki Merton-Black-Scholes modelini sağlar.

$$dS(t) = S(t)\mu dt + S(t)\sigma dW(t), \quad S(0) = s \tag{3.12}$$

Eğer $\sigma > 0$ sabiti 0-a çok yakın bir değer alırsa, hisse senedi; faiz oranı μ olan risksiz bono gibi davranır. Aslında, hisse senedi için (3.12) eşitliğini ;

$$S(t) = S(0)exp\{\sigma W(t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\} \tag{3.13}$$

şeklinde de ifade edebiliriz. (3.13) eşitliğinin (3.12) eşitliğindeki ifadeye eşit olduğunu göstermek için (3.13) teki ifadeye Itô kuralını uygulayacak olursak;

$$\begin{aligned} f(t, w(t)) &= exp\{\sigma W(t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\} \\ df &= f_t dt + f_w dW + \frac{1}{2} f_{ww} dW dW \\ &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) f dt + \sigma f dW + \frac{1}{2}\sigma^2 f dW dW \\ &= (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2) f dt + \sigma f dW \\ &= \mu f dt + \sigma f dW \quad olur. \end{aligned}$$

(3.13) eşitliğinin diferansiyeli alınacak olursa,

$$dS(t) = S(0)df$$

olur. Yukarıda bulduğumuz df ifadesini yerine yazacak olursak,

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(0)\{\mu f dt + \sigma f dW\} \\ &= S(t)\mu dt + S(t)\sigma dW \end{aligned}$$

olur ki bu da (3.12) deki ifadeyi yani Black-Scholes modelini verir. Black-Scholes modelindeki sabit olan μ hisse senedi için anlık beklenen fiyat artış oranını göstermektedir. Bunun ne anlama geldiğini anlamak için hisse senedi için $\mu = 0$ olmak üzere

$$M(t) = exp(\sigma W(t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$$

ifadesini göz önüne alalım. Bu ifadeye Itô kuralını uygulayacak olursak;

$$dM = \sigma M dW \quad M(0) = 1$$

ifadesini elde ederiz. Bu eşitliğin anlamı ise M'nin stokastik integral süreci olduğudur. Öyle ki,

$$M(t) = 1 + \int_0^t \sigma M(u) dW(u) \ \ 'dur.$$

Bu aynı zamanda martingaledir. Bu yüzden

$$E\big[M(t)\big] = 1, \quad t \geq 0 \ \ elde\ edilir.$$

Bu eşitlik yarıdımıyla hisse senedi için,

$$E\big[S(t)\big] = E\big[sM(t)e^{\mu t}\big] = S(0)e^{\mu t}, \quad s = S(0)$$

eşitliği kolaylıkla elde edilir. Ayrıca önceki bölümlerde Brown hareketinin normal dağılım gösterdiğinden bahsetmistik. O halde $f(t, w(t)) = exp\{\sigma W(t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\}$ ifadesindeki $exp\{\sigma W(t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\}$ ifadesi log-normal dağılım gösterir. Yani hisse senedi $S(t)$ log-normal dağılım gösterir bunun nedeni ise $S(t)$'nin logaritmasının normal dağılım göstermesindendir. Şimdi de hisse senedi $S(t)$'nin ortalamasını ve varyansını bulalım. S(t)'nin ortalaması,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{dS(t)}{S(t)} &= \int_0^t \mu dt + \int_0^t \sigma dW \\
E\left[\int_0^t \frac{dS(t)}{S(t)}\right] &= E\big[\int_0^t \mu dt\big] + E\big[\int_0^t \sigma dW\big] \\
E\left[\int_0^t \frac{dS(t)}{S(t)}\right] &= E\big[\mu t\big] \\
&= \mu t \ \ olur.
\end{aligned}$$

S(t)'nin varyansı,

$$\begin{aligned}
Var\left[\int_0^t \frac{dS(t)}{S(t)}\right] &= E\big[(\int_0^t \frac{dS(t)}{S(t)} - E\{\int_0^t \frac{dS(t)}{S(t)}\})^2\big] \\
&= E\big[(\int_0^t \mu dt + \int_0^t \sigma dW(t) - \mu t)^2\big] \\
&= E\big[(\mu t + \int_0^t \sigma dW(t) - \mu t)^2\big] \\
&= E\big[(\int_0^t \sigma dW(t))^2\big] \\
&= E\big[\int_0^t \sigma^2 du\big] \quad (It\hat{o}\ izometriden) \\
&= E\big[\sigma^2 t\big] \\
&= \sigma^2 t
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Burdaki volatilite parametresi σ, hisse senedinin riskini ölçer. Çok boyutlu Merton-Black-Scholes modelinde N tane hisse senedi ve d tane Brown hareketi olsun (çok boyutlu modellerde en kolay üzerinde çalışılacak model $N = d$ iken dir.) Eğer N tane hisse senedini modelleyecek olursak,

$$dS_i(t) = \mu_i S(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij} S_i(t) dW_j(t), \quad i = 1, ..., N$$

olur. Burdaki σ_{ij} volatilite matrisinin i.satır ve j.sütunundaki hücreyi göstermektedir (Bakınız [1], [7]).

3.4.1 Sermaye Süreci ve Portföy Süreci

Farzedelim ki piyasadaki yatırım araçları Black-Scholes dinamiğini sağlıyor olsun. $\pi(t)$ ile t zamanında hisse senedine yatırılan toplam para miktarını gösterelim. Bunun yanı sıra π yi kısaca portföy süreci olarak isimlendireceğiz. Ayrıca genel olarak negatif değerlerin anlamı yatırımcının hisse senedini vadesinden önce satması yani kısa vadeli satış yapması anlamındadır. Bu koşullar altında farzedelim ki yatırımcı gelecek hakkında herhangi bir tahminde bulunamamakta olsun. O halde π(t); t zamanına kadarki eski bilgiler ışığı altında hesaplanmalıdır. Ayrıca $x > 0$ ile başlangıç yatırım miktarını ve π de portföy stratejisi göstermek üzere $X = X(\pi, x)$ ile de sermaye sürecini gösterelim. Beklenen portföy stratejisi π 'nin kendi kendini finanse etmesidir. O halde t zamanında bankaya yatırılacak miktar ise X(t)-π(t) olur. Bu durumda sermaye süreci olan X;

$$dX = \frac{\pi}{S}\, dS + \frac{X - \pi}{B}\, dB \tag{3.14}$$

denklemini sağlar. Bu denklem sermayedeki X değişimin, hisse senedine yatırılan miktar kadar hisse senedindeki değişimin ve bonoya yatırılan miktar kadar bonodaki değişimin toplamı kadar olduğu, anlamındadır. (3.14) denkleminin integral formu olarak;

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \frac{\pi(u)}{S(u)}\, dS(u) + \int_0^t \frac{X(u) - \pi(u)}{B(u)}\, dB(u)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Ayrıca hisse senedi için Black-Scholes modelini

$$dS(t) = S(t)\mu dt + S(t)\sigma dW(t)$$

ve bono için

$$dB(t) = rB(t)dt$$

denklemlerini (3.14) eşitliğinde yerine yazacak olursak sermaye süreci için,

$$\begin{aligned} dX &= \pi\,(\mu dt + \sigma dW(t)) + (X - \pi)\,(rd(t)) \\ &= \big[rX + \pi(\mu - r)\big]dt + \pi\sigma dW \end{aligned} \tag{3.15}$$

denklemini elde ederiz. Sermaye sürecini bugünkü değerine geri döndürmek için,

$$\bar{X} := e^{-rt}X(t), \qquad \bar{\pi} := e^{-rt}\pi(t)$$

şeklinde tanımlansın ve Itô çarpım kuralını uygulacak olursak,

$$\begin{aligned} d\bar{X} &= (-r)e^{-rt}X(t)dt + e^{-rt}dX(t) + dtdW, \qquad dtdW = 0\ iken \\ &= (-r)e^{-rt}X(t)dt + e^{-rt}\big[(rX + \pi(\mu - r))dt + \pi\sigma dW\big] \\ &= e^{-rt}\big[\pi(\mu - r)dt + \pi\sigma dW\big] \\ &= \bar{\pi}\,(\mu - r)\,dt + \bar{\pi}\,\sigma\,dW \end{aligned} \tag{3.16}$$

sermaye sürecinin bugünkü değerini veren denklemi elde etmiş oluruz.

3.5 Sürekli Zamanlı Faiz Oranları

Faiz oranı temel özelliği itibariyle genel olarak taahhüt tarihinden önce bilinir. Bunun yanı sıra faiz oranı bir sonraki periyotta değişebileceğinden dolayı vaktinden önce bilinemez. Örneğin herhangi bir banka yatırımcısıyla aylık faiz oranı üzerinden bir anlaşma yapabilir fakat bir sonraki ay faiz oranları değişebilir. Benzer olarak bonoya yatırılan bir paranın faiz oranı ve vadesi bilindiğinden dolayı vadesi geldiğinde ne kadar bir getirisi olacağı önceden bilinebilir. Ama yatırımcı elindeki bonoyu vadesinden önce satmaya kalkarsa ne kadardan satılacağını tahmin edemeyeceği gibi ek olarak geri dönüşümü de belirsizdir. Bu belirsizliğin nedeni bononun vadesindeki değeri bilinmesine rağmen, bu süreç içerisinde bononun değeri artış veya azalış eğilimi gösterebilir. Sonuç olarak pratikte bunun nedeni faiz oranının arz ve talebe bağlı olarak stokastik olmasındandır.

Bankadaki herhangi bir paranın **r** faiz oranıyla istenilen bir t zamanındaki değerinin $B(t) = e^{rt}$ eşitliği yardımıyla bulunabileceğinden daha önce de bahsetmiştik. Bu ifadenin diferansiyelini alarak $dB(t) = B(t)rdt$ dinamiğini elde etmiştik. Bu dinamikten de görüleceği gibi faiz oranı sabit olup zamana bağlı değildir. Eğer faiz oranı sabit değil de zamana bağlı olarak stokastik olarak değişecek olursa yukarıda bahsettiğimiz dinamik $dB(t) = B(t)r(t)dt$ şekline dönüşür ve t zamanında bankada bulunan para

$$B(t) = B(0)e^{\int_0^t r(s)ds}$$

eşitliği yardımıyla bulunabilinir. Tarihsel olarak, ilk sabit gelir getiren marketlerde faiz oranının dinamiği sürekli zamanlı modellemede ele alınmıştır. Daha doğrusu faiz oranı r difüzyon süreci olarak

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t)$$

şeklinde modellenmiştir. Ayrık zamanlı modellemede olduğu gibi bu modellemede de faiz oranı risk-nötr ölçüsü altında modellenmiştir. Buradaki W Brown hareketi, risk-nötr ölçüsü altındaki Brown hareketini göstermektedir. Eğer W'nun boyutu bir ise tek-faktörlü model olarak isimlendirilir. Tek-faktörlü model ilk olarak üzerinde çalışılan model olmasına rağmen hala önemini ve popülerliğini korumaktadır. Ayrıca faiz oranı için daha gerçekçi bir modelleme yapmak için iki veya üç faktörlü modelleme yapmak gereklidir. Faiz oranının dinamiği için sürekli zamanlı birçok tek-faktörlü modeller vardır. Bu bölümde ençok bilinen iki model üzerinde duracağız. W standart Brown hareketi olmak üzere, aşağıdaki sürekli zamanlı stokastik faiz oranı r **Vasicek modeli**;

$$dr(t) = a\big[b - r(t)\big]dt + \sigma dW(t)$$

Oldrich Vasicek tarafından 1997 yılında ortaya konulmuştur. Bu modeldeki a, b ve σ pozitif sabitler olmak üzere bu model yabancı kaynaklarda "mean reversion" olarak bilinen ortalamaya dönüş özelliğini sağlamaktadır.

Yani eğer faiz oranı $r(t)$, b den büyük değer alırsa sürüklenme katsayısı olan kısım negatif olacağından faiz oranı $r(t)$, b değerine ulaşıncaya kadar azalacaktır. Eğer faiz oranı b'den daha az bir değer alırsa bu durumun tersi söz konusu olacaktır. Yani kısaca faiz oranı b'nin civarında bir dağılım gösterecektir. Bu modeldeki a sabiti ise $r(t)$'nin b civarındaki dağılımında dengeye gelişteki hız faktörü diye isimlendirilir. Bir diğer en çok bilinen model,

$$dr(t) = a\big[b - r(t)\big]dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

olup, bu model Cox-Ingersoll-Ross tarafından 1985 yılında ortaya konulmuştur. Bu model kısaca **CIR faiz oranı modeli** olarak isimlendirilir. Vasicek ve CIR model arasındaki fark CIR modelinin difüzyon kısmındaki $\sqrt{r(t)}$ kısmıdır. Bu durumun iki sonucu vardır. Birincisi difüzyon kısmın kendisi yani faiz oranı volatilitesi stokastik olmuştur. İkincisi ise faiz oranı hiçbir zaman negatif olamayacaktır. Eğer faiz oranı 0 olursa difizyon kısmı da 0 olacaktır ama sürüklenme katsayısı olan kısım ise pozitif olacağından faiz oranı tekrardan pozitif olacaktır. Vasicek modelindeki sakıncalı kısım ise faiz oranının negatif olabilmesidir.

Ayrıca bu iki model dışında kullanılan Ho-Lee modeli, Hull-White modeli, Black-Derman-Toy modeli ve Doğrusal model gibi sürekli zamanlı faiz oranı modelleri de vardır. Bu modelleri ise 5. bölümde ayrıntılı olarak ele alacağız.

BÖLÜM 4

SÜREKLİ ZAMANLI TAM MARKET MODELLERİNDE OPSİYONLAR

Sürekli zamanlı modeller üzerinde çalışmak basit ayrık zamanlı modeller üzerinde çalışmaktan daha zordur, çünkü sürekli zamanlı modellerde sonsuz durum uzayı vardır. Sürekli zamanlı Brown hareketli modellerde kontratın vade süresi sonundaki değeri $C(T)$, T zamanına kadar olan süredeki Brown hareketinin değerine bağlıdır. Bu genellikle $C(T)$'nin yatırım yapılan varlıkların T zamanına kadar olan süredeki fiyatlarının bilinmesi gerekliliğiyle eşdeğerdir. Bu duruma örnek olarak; difüzyon süreci Brown hareketi tarafından modellenen ve değeri rassal olan $S(T)$ için ve bazı g fonksiyonları için ödemenin $g(S(T))$ olduğu yola-bağımsız (path independent) olan Avrupai opsiyonlar gösterilebilinir. Ayrıca market modelinin tam olması için ayrık zamanlı modellerde de olduğu gibi her kontratın ödemesinin kendini finanse eden (replicate) bir portföyünün olması gerekir. Yani kısaca eğer tam marketlerde çalışıyorsak her kontratı finanse eden mutlaka bir portföyün varlığından söz edebiliriz.

4.1 Arbitraj Yöntemiyle Alım (Call) ve Satım (Put) Opsiyonları

Arbitraj risksiz para kazanmak anlamındadır. Öyle ki örneğin dolar için X ve Y bankaları için eş zamanlı olarak iki ayrı TL paritesi söz konusu olsun. İşte bu durumda doları sözkonusu bankalardan ucuz fiyata verenden alıp yüksek fiyat verene satabiliriz. Bu alış-verişte elde edilen kâra arbitraj denir. Arbitraj durumunun söz konusu olabileceği markette bu olay çok kısa bir zaman diliminde gerçekleşebilir, bu yüzden ani fiyat değişimlerinden etkilenme olacağından arbitraj durumu hemen ortadan kalkabilir. Arbitraj durumunun finans uygulamarı ise Black-Scholes (1973), Merton (1973, 1976, 1977), Cox and Ross (1976), Harrison ve Kreps (1979) ve Harrison ve Pliska (1981) gibi bilim adamları tarafından yapılmıştır. Arbitraj teorilerine göre arbitrajın olmaması için her tek fiyata sahip kontratın, markette finanse (replicate) edilebilmesi gerekir. İşte bu kontratın değeri, kontratın ödemesinin beklenen "discounted" değerine eşittir. Beklenen değer ise "risk-neutral olasılığı" altında veya "equivalent martingale ölçüsü" altında hesaplanır. Şimdi de arbitraj durumunun söz konusu olmaması için alım ve satım opsiyonları arasındaki ilişkiyi inceleyelim. $C(t)$, $c(t)$, $P(t)$ ve $p(t)$ sırasıyla t zamanındaki Amerikan alım opsiyonunu, Avrupai alım opsiyonunu, Amerikan satım opsiyonunu ve Avrupai satım opsiyonlarını göstersinler. Ayrıca S ile hisse senedinin fiyatını, K ile verilen opsiyonun kullanma fiyatını, T ile de vade süresini gösterelim. Şimdi bu değerler için bazı karşılaştırmalar yapıp hangi durumlarda arbitrajın olabileceğini, hangi durumlarda arbitrajın olamayacağını aralarındaki ilişkileri de inceleyecerek gösterelim. İnceleyeceğimiz örnek için statik durumun olduğunu yani sadece bir kere alış-verişin yapılacağını ve faiz oranının pozitif olduğunu kabul edelim. Şimdi ilk olarak Amerikan ve Avrupai alım opsiyonlarında aynı hisse senedi ve vade süresi için,

$$c(t) \leq C(t) \leq S(t)$$

eşitsizliğini yazmak mümkündür. Bu eşitsizliğin ilk kısmı Avrupai alım opsiyonunun hiçbir zaman Amerikan alım opsiyonundan büyük olamayacağını söyler. Bu durum doğrudur çünkü Amerikan alım opsiyonları vade süresinde Avrupai alım opsiyonuyla aynı değere sahip olmasına rağmen ek olarak Amerikan alım opsiyonları vade süresinden önce de kullanılabilir (exercised). Farzedelim ki $c(t) > C(t)$ olsun. Bu durumda Avrupai opsiyonu satıp Amerikan opsiyonunu alabiliriz ve aradaki fiyat farkını ise bankaya yatırabiliriz. Vade süresi dolduğunda elimizdeki Avrupai opsiyon, satmış olduğumuz Amerikan opsiyonuyla aynı değeri alacağından dolayı portföyümüzde bu durumdan dolayı herhangi bir değişim olmayacaktır. Aksine bankaya yatırdığımız farktan dolayı bir kazanç söz konusu olacaktır ki işte bu durum da arbitraj durumudur. Ayrıca eşitsizliğin ikinci kısmı da doğrudur, çünkü alım opsiyonları alıcıya opsiyonun kullanma fiyatı ödenmesi takdirde hisse senedini alma hakkı tanır. Satım opsiyonları için ise benzer şekilde,

$$p(t) \leq P(t) \leq K$$

eşitsizliğini yazmak mümkündür. Eşitsizliğin ilk kısmı Avrupai satım opsiyonunun hiçbir zaman Amerikan satım opsiyonundan büyük olamayacağını söyler, Amerikan ve Avrupai alım opsi- yonlarında belirttiğimiz nedenden dolayı doğrudur. İkinci kısım ise satım opsiyonlarının hiçbir zaman opsiyonun kullanma fiyatından büyük olamayacağını söyler ve doğrudur, çünkü opsiyonun sahibi eğer opsiyon kullanılırsa K TL elde edecek. Aslında Avrupai satım opsiyonundan vadesi dolduğunda en fazla K TL elde edilir. O halde herhangi bir t zamanındaki Avrupai opsiyonun değeri, t süresinde bankaya yatırılan T vaktinde K TL olan paradan daha büyük olamaz öyle ki,

$$p(t) \leq Ke^{-(T-t)}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Aksi takdirde satım ve aradaki farkı $p(t) > Ke^{-(T-t)}$ bankaya yatırırdık. Böylece vade süresinde K TL den daha fazla para bankada elde etmiş olurduk. Bu para, satım opsiyonunun sahibinin opsiyonu kullanmak istediği takdirde yapması gereken ödeme için yeterli olacaktır. Ayrıca bu değişimde elde edeceğimiz hisse senedi değeri ez az sıfır bile olsa aradaki farktan dolayı kazanç sağlamış oluruz ki bu da arbitraj durumudur.
Bir diğer durum ise kar oranı (dividend) ödemeyen hisse senedi için;

$$c(t) \geq S(t) - Ke^{-(T-t)}$$

eşitsizliği yazılabilinir. Bu eşitsizliğin anlamı, kar oranı ödemeyen Avrupai alım opsiyonunun, hisse senedi fiyatı ve K TL nin bugünkü değeri arasındaki farktan büyük olduğudur. Farzedelim ki bu durum doğru olmasın öyle ki

$$c(t) + Ke^{-(T-t)} < S(t)$$

olsun. Bunun anlamı alım opsiyonunun ve nakit paranın toplamı, hisse senedinin fiyatından daha düşük olduğu anlamındadır. Bu durumda aradaki farkı göz önünde bulundurarak arbitraj durumunun olduğu bir portföy oluşturmak mümkündür. Daha doğrusu t zamanında şu iki durumu içeren aşağıdaki stratejiyi göz önüne alalım :

1. Hisse senedini kısa vadeli olarak satalım.
2. Alım opsiyonu alıp aradaki farkı $Ke^{-(T-t)}$ da bankaya yatıralım.

Bu durumda T vade süresinde; 1. durumdan dolayı portföyümüzde $-S(T)$ olacak ve 2. durumdan dolayı eğer $S(T) > K$ olsa, yapılacak ödeme $S(T) - K + K = S(T)$ olur böylece portföy dengelenecektir. Eğer $S(T) \leq K$ olsa kazanç sağlanacağı açıktır. Yani her iki durumda da T vaktinde herhangi bir kayıp olmayacağı gibi (belkide de $S(T) < K$ durumunda kazanç) ve bankaya t zamanında yatırdığımız paradan dolayı kazanç sözkonusu olacaktır ki bu durum arbitraj durumudur. Şunu vurgulamakta fayda var ki, eğer hisse senedi vadesinden önce kâr oranı ödüyorsa bu strateji umduğumuz gibi çalışmayabilir. Bunun nedeni kısa vadeli satışın hisse senedinin kar oranı ödemesini zorunlu kılacak olmasındandır. Bu durumda zararın olmayacağını garanti edemeyiz.
Kar oranı ödemeyen hisse senetlerinde Avrupai satım opsiyonları için,

$$p(t) \geq Ke^{-(T-t)} - S(t)$$

eşitsizliğini yazmak mümkündür. Bu eşitsizlik kar oranı ödemeyen satım opsiyonunun; hiçbir zaman K TL'nin bugünkü değeri ile hisse senedi arasındaki farktan küçük olamayacağını söyler. Farzedelim ki bu durum doğru olmasın, öyle ki,

$$p(t) < Ke^{-(T-t)} - S(t)$$

olsun. Bu durumda t zamanında şu iki durumu içeren,

1.$Ke^{-(T-t)}$ TL borç alalım.
2. Satım opsiyonu ve hisse senedi alalım.

stratejiyi göz önüne alalım. Bu strateji t vaktinde kazanç sağlar veya en kötü ihtimalle T zamanında yani vade süresinde 0 kazanç sağlar. Sonuç olarak bu eşitsizlikler yardımıyla opsiyon fiyatları için bir sınır bulmuş olduk. Bunların sonucu olarak ise Avrupai ve Amerikan alım opsiyonlarının fiyatları arasındaki ilişkiyi şu şekilde ifade edebiliriz : Vade süresine kadar kar oranı ödemeyen Amerikan alım opsiyonunun değeri, aynı hisse senedi ve vade süresi için Avrupai alım opsiyonun değerine eşittir. Şimdi farzedelim ki eşit olmasın. $C(t) \geq c(t)$ olması gerektiğini daha önceden anlattığımız için sadece $C(t) > c(t)$ olduğu durumu kabul edip inceleyelim. [$C(t) < c(t)$ olduğu durumda arbitrajın olacağı durumu daha önceden göstermiştik.] Eğer $C(t) > c(t)$ ise, bu durumda Amerikan alım opsiyonunu satıp, Avrupai alım opsiyonu alabilir ve aradaki farkı bankaya yatırabiliriz. Eğer herhangi bir $\iota \leq T$ vaktinde Amerikan opsiyonu kullanılırsa, bu durumda $S(\iota) - K$ kadar bir ödeme yapmamız gerekir. Bu farkı Avrupai alım opsiyonunu satarak karşılayabiliriz çünkü daha önceden ifade ettiğimiz şu $c(t) \geq S(t) - Ke^{-(T-t)}$ eşitsizlik yardımıyla $c(\iota) \geq S(\iota) - Ke^{-(T-\iota)} \geq S(\iota) - K$ eşitsizliği yazılabilinir. Eğer Amerikan opsiyonu kullanılmaz ise böyle bir farkı kapatma yoluna gitme zorunluluğumuz ortadan kalkar ki bu durum da arbitraj durumudur, o halde $C(t) > c(t)$ olamaz. Buradan çıkarılacak sonuç ise vadesine kadar kar oranı ödemeyen Amerikan alım opsiyonlarının vadesinden önce kullanılmaması gerektiğidir (Bakınız [1]). Son olarak kar oranı ödemeyen hisse senetlerini göz önünde bulunduralım ve bu hisse senetleri için Avrupai alım ve Avrupai satım opsiyonları arasındaki alım - satım paritesi (put-call parity):

$$c(t) + Ke^{-r(T-t)} = p(t) + S(t)$$

diye adlandırılan ilişkiyi incleyelim. Bu eşitlik; alım opsiyonunun değerinin ve K TL'nin bugünkü değerinin toplamının, satım opsiyonunun ve hisse senedinin değerleri toplamına eşit olduğunu söyler. Bu sonucun doğruluğunu vade vaktindeki ödemelere bakmak üzere şu iki stratejiyi göz önüne alarak anlayabiliriz : Alım opsiyonunu elimizde tutup, $Ke^{-r(T-t)}$ TL'yi bankaya yatıralım. Bir de vade vaktinde aynı ödemeye sahip olan satım opsiyonunu ve hisse senedini elimizde tutalım. Sonuçta Avrupai opsiyonları vadesinden önce kullanma hakkımız olmadığından, bu iki durumdaki değerler birbirine eşit olmak zorundadır. Amerikan opsiyonlarında ise alım-satım paritesi geçerli değildir. Bu konu hakkında en fazla söyleyebileceğimiz kar oranı ödemeyen opsiyonlar için;

$$C(t) + Ke^{-r(T-t)} \leq P(t) + S(t)$$

eşitsizliğinin sağlandığıdır. Bu eşitsizlik, Avrupai opsiyonların alım - satım paritesinden ve $P(t) > p(t)$ ve $C(t) = c(t)$ olmasındandır. Şimdi alım - satım paritesini sağlamayan bir örnek üzerinde arbitraj durumunun nasıl oluşacağını gösterelim.

Örnek 4.1

Farzedelim ki hisse senedi S'in bugünkü değeri $S(0) = 48$ TL olsun. Avrupai alım ve satım opsiyonunun S hisse senedi için $T = 3$ ay vade süresindeki kullanma hakkı $K = 45$ TL ve de alım opsiyonu ve satım opsiyonun değeri sırasıyla 4.95 TL ve 0.70 TL olsun. Ayrıca 100 TL nominal değerli 3 aylık T-tahvilini 98.50 TL satın almış olalım. Bu durumda arbitrajın olup olmadığını eğer varsa herhangi bir avatajının olup olmadığını inceleyelim.

İlk olarak $K = 45$ TL nin bugünkü değerini bulabilmek için T-tahvilinden yola çıkacak olursak, $98.5 = 100d$ denkleminden d (discount factor) yani bugünkü değeri bulmak için gerekli katsayıyı bulunursa $d = 0.985$ olduğu görülür. Şimdi de alım-satım paritesindeki eşitliğin sol tarafını bulacak olursak;

$$c(t) + Kd = 49.275 \ \ olur.$$

Benzer şekilde alım-satım paritesinin sağ tarafındaki değeri hesaplayacak olursak;

$$P(t) + S(t) = 48.7 \;\; olur.$$

Burdan da görüleceği gibi paritenin sağ tarafı ile sol tarafı birbirine eşit değil, ayrıca arbitraj durumu söz konusu olduğu açıkca görülür.

4.2 Risk-Nötr Fiyatlandırma ve Martingale Ölçüsü

Daha önceden de bahsettiğimiz gibi elimizdeki kontrat için arbitrajın olmaması, risk-nötr olasılık ölçüsü altında beklenen değer kullanarak kendini finanse (replicate) edebilecek bir stratejinin var olmasını gerektirir. Şimdi de bu durumu martingale ölçüsü yardımıyla Cox-Ross-Rubinstein (CRR) model için gösterelim.

4.2.1 CRR Model

Finansal kontratları fiyatlandırmadaki bilinen en güzel çözüm yöntemi portföy optimizasyon probleminin çözümüdür, öyle ki bu da martingale olasılık ölçüsü kavramıyla ilgilidir. Bilindiği gibi fiyatlandırma bir beklenen değer altında hesaplanır. Fakat buradaki beklenen değer gerçek ölçü (real-word) veya tam (true) ölçü altında değil, yapay olarak nitelendirilecebilecek risk-nötr olasılık ölçüsü veya denk (equivalent) martingale ölçüsü (DMÖ) altında hesaplanır. E_s verilen bilgiler altında koşullu beklenen değeri göstermek üzere, eğer X süreci

$$E_s\big[X(t)\big] = X(s), \quad s \leq t \tag{4.1}$$

eşitliğini sağlıyorsa X' e **martingale** denir. Bu eşitlik X(t)'nin gelecekteki değeri için yapılabilinecek en iyi tahminin, X süreci için bugünkü değeri X(s) olduğu, şeklinde de yorumlanabilinir. Veya kar/zarar terminolojisine göre, martingale süreci ortalama olarak ne kar ne de zarar sağlar, şeklinde de yorumlanabilinir. Özellikle (4.1) eşitliğinde her iki tarafın beklenen değeri alınacak olursa;

$$\begin{aligned} E\big\{E_s\big[X(t)\big]\big\} &= E\big\{X(s)\big\} \\ E\big[X(t)\big] &= E\big[X(s)\big] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik ise martingale sürecinin beklenen değeri zamana göre değişim göstermez, şeklinde yorumlanabilinir. Şimdi eğer hisse senetlerinin bugünkü değerleri $\bar{S}_i$ martingale ise, olasılık ölçüsünün de finansal market modeli için **martingale ölçüsü** olduğunu söyleyeceğiz. Bu tanım ve koşullar altında bir tane hisse senedi için CRR modelinde neler olacağını inceleyelim. Daha önceden de bahsettiğimiz gibi CRR modelde $t+1$ zamanında hisse senedi; u ve d sabitler ve $u > 1 + r > d$ olmak üzere $S(t)u$ veya $S(t)d$ değerlerinden sadece birini alabilirdi ve genellikle $d < 1$ olduğu kabul edilirdi. Bu durumda herhangi bir t zamanında hisse senedinin değerinin $S(t)u$ olma olasılığına p dersek, hisse senedinin $S(t)d$ değerini alma olasılığı da $q := 1 - p$ olur. Martingale ölçüsü altındaki bu olasılıklar, yukarı ve aşşağı doğru hareketlerde sırasıyla p^* ve $q^* := 1 - p^*$ olsun. Bu durumda hisse senedinin bugünkü değeri martingale olur. Öyle ki :

$$S(0) = \bar{S}(0) = E^*\big[\bar{S}(1)\big] = p^* \frac{S(0)u}{1+r} + (1-p^*)\frac{S(0)d}{1+r}$$

Buradaki $E^* = E_0^*$, $t = 0$ daki p^* ve $1 - p^*$ olasılıkları altında koşulsuz beklenen değeri göstermektedir. Bu denklemden p^* çözülecek olursa,

$$p^* = \frac{(1+r)-d}{u-d}\,, \qquad q^* = \frac{u-(1+r)}{u-d} \tag{4.2}$$

kolaylıkla elde edilir. Buradan da görüleceği gibi CRR modeldeki $u > 1 + r > d$ varsayımı p^* ve q^* olasılık değerlerinin pozitif olmasını garantiler. Ek olarak bu denklemler sadece pozitif olasılıklarla martingale ölçüsünü tanımlar. Ayrıca p^* ve q^* kesinlikle pozitif olduklarından dolayı, "real-world" olasılığı altında 0 olasılığa sahip olan bir olay martingale ölçüsü altında da 0 olasılığa sahiptir ve bu durumun tersi de doğrudur. İşte bu iki olasılık ölçüleri birbirine denktir ve p^*, q^* denk martingale ölçüsü (DMÖ) formundadırlar. Gerçek olasılıklarla yani $p, 1-p$ ile risk-nötr olasılıklarını karşılaştırmak için hisse senedinin ortalama getiri oranını μ olarak tanımlarsak,

$$S(0)(1+\mu) = E\big[S(1)\big]$$

denklemini sağlar. Yukarıdaki gibi gerekli işlemler yapıldığında (4.2) denklemlerinin analoğu olan,

$$p = \frac{(1+\mu)-d}{u-d}\,, \qquad q = \frac{u-(1+\mu)}{u-d}$$

denklemler elde edilir. Sonuç olarak risk-nötr uzayı riskli varlıkları için telafisi olmayan bir uzaydır öyle ki riskli varlıklar için ortalama getiri oranı risksiz olan faiz oranına r'ye eşittir.

Aslında yapmak istediğimiz herhangi bir kontratın değeri ile başka yatırım araçları yardımıyla kontratı finanse (replicate) etme ihtimali arasında ilişki kurmaktır. Şimdi δ ile portföydeki hisse senedi sayısını ve $X(0) = x$ ile de başlangıçtaki sermaye miktarını gösterelim. Portföydeki kalan $x - \delta S(0)$ miktarını ise risksiz faiz oranı r olmak üzere bankaya yatıralım. O halde bütçe denklik şartından, $t = 1$ zamanındaki bütçenin bugünkü değeri,

$$\bar{X}(1) = \delta\bar{S}(1) + x - \delta S(0)$$

denklemini sağlar. Hisse senedinin p^* ve $1-p^*$ risk-nötr olasılıkları altında martingale olmasından dolayı $E^*\big[\bar{S}(1)\big] = S(0)$ olur ve sonuç olarak

$$E^*\big[\bar{X}(1)\big] = \delta S(0) + x - \delta S(0) = x \tag{4.3}$$

elde edilir. Bunun anlamı sermaye sürecinin bugünkü değeri DMÖ altında martingaledir. Veya başka bir ifadeyle gelecekteki sermayenin bugünkü değerinin risk-nötr ölçüsü altındaki beklenen değeri başlangıçtaki değerine eşittir, şeklinde de yorumlanabilinir.

Bunlara göre kendi kendini finanse edecek kontrat için şu sonucu elde etmek mümkündür; yatırım aracınının C başlangıç değeri x olmak üzere ve C^u ile kontratın yukarı çıkma durumunda aldığı değeri (hisse senedinin $S(0)u$ değerini aldığı durum) ve C^d ile kontratın alt değer aldığı durumu gösterelim.

Teorem 4.1

C kontratı başlangıç değeri $C(0)$ olmak üzere finanse (replicate) edilebilir ancak ve ancak $E^*\big[\bar{C}\big] = C(0)$ ise.

İspat :

Yukarıdaki anlatılan kısımlarda $X(1) = C$ olduğu durumu zaten gösterdik, öyleki $E^*\big[\bar{X}(1)\big]$ ifadesi başlangıçtaki sermaye miktarına, $x = C(0)$ eşittir. Şimdi bunun tersi olan durumu gösterelim. Farzedelim ki $E^*\big[\bar{C}\big] = C(0)$ olsun öyle ki,

$$E^*\big[\bar{C}\big] = p^*\bar{C}^u + q^*\bar{C}^d = C(0) \tag{4.4}$$

olsun. Bu durumda C kontratı eğer,

$$C^u = \delta S(0)u + \big[D(0) - \delta S(0)\big](1+r), \quad C^d = \delta S(0)d + \big[D(0) - \delta S(0)\big](1+r)\ ise$$

$D(0)$ başlangıç değerli δ^C stratejisi ile finanse (replicate) edilir. İşte bu iki eşitlik yardımıyla $D(0)$ başlangıç değeriyle C kontratını finanse eden ve tekil olan δ stratejisi bulunur. Şimdi (4.2) denklemleri yardımıyla (4.4) 'teki eşitliği hesaplayacak olursak;

$$\begin{aligned}
p^*\left\{\frac{\delta S(0)u}{1+r} + \big[D(0) - \delta S(0)\big]\right\} + (1-p^*)\left\{\frac{\delta S(0)d}{1+r} + \big[D(0) - \delta S(0)\big]\right\} &= C(0)\\
p^*\frac{\delta S(0)}{1+r}[u-d] + [D(0) - \delta S(0)] + \frac{\delta S(0)d}{1+r} &= C(0)\\
\left(\frac{(1+r)-d}{u-d}\right)\frac{\delta S(0)}{1+r}[u-d] + [D(0) - \delta S(0)] + \frac{\delta S(0)d}{1+r} &= C(0)\\
D(0) &= C(0)\ olur.\square
\end{aligned}$$

Böylece $D(0) = C(0)$ olduğu gösterilmiş olunur ki bu da gerçekten $C(0)$'ın başlangıç değeri olan $D(0)$ tarafından finanse (replicate) edilebileceğini gösterir.

Şimdi de risk-nötr olasılığını kullanmadan finanse etmek için risk-nötr yoğunluğu olarak ifade edilen rassal değişkeni şu şekilde tanımlayalım :

$$Z(1) := \begin{cases} p^*/p, & \text{p olasılığı ile} \\ q^*/q, & \text{q olasılığı ile} \end{cases}$$

Bu durumda;

$$\begin{aligned}
E\big[Z(1)\bar{X}(1)\big] &= p\left[\frac{p^*}{p}\big(\delta\frac{S(0)u}{1+r} + x - \delta S(0)\big)\right] + q\left[\frac{q^*}{q}\big(\delta\frac{S(0)d}{1+r} + x - \delta S(0)\big)\right]\\
&= E^*\big[\bar{X}(1)\big] = x \quad olur.
\end{aligned}$$

Bu eşitlik (4.3)' teki ifadeyi başka bir sekilde **sermaye süreci için bütçe sınırı** olarak,

$$E^*\big[\bar{X}(1)\big] = E\big[Z(1)\bar{X}(1)\big] = x$$

şeklinde ifade edebileceğimiz, anlamındadır.

4.2.2 Arbitraj Olmaması İçin Sağlanması Gereken Özellikler

Bu bölümde finanstaki klasik sonuçlardan ve **Varlıkların fiyatlandırmasındaki temel teorem** olarak isimlendirilen teoremden bahsedeceğiz. Ve bu teorem martingale ölçüsünün neden bu denli önemli olduğunu gösterecektir.
Teorem, **"Arbitraj yoktur = En azından bir tane denk martingale ölçüsü (DMÖ) var"** ifadelerinin eşdeğer olduğunu söyler. Bu durum şu teoremde daha açık bir şekilde ifade edilir.

Teorem 4.2

Finans marketlerindeki sonlu rassal sonuçlu ayrık zamanlı modelleri gözönüne alalım. Bu durumda eğer pozitif olasılıklı martingale ölçüsü varsa, bu durumda markette arbitraj yoktur. Tersine, eğer markette arbitraj yoksa, pozitif olasılıklı martingale ölçüsü vardır.

İspat : (Bakınız[1]). □

Bir diğer arbitrajın olmadığı marketler teorisinin sonucu ise şu şekildedir: Teorem ise, **"Market tamdır = Tek denk martingale ölçüsü vardır"** ifadelerinin eşdeğer olduğunu söyler. Bu durum şu teoremde daha açık bir şekilde ifade edilir.

Teorem 4.3

Finans marketlerindeki sonlu rassal sonuçlu ayrık zamanlı modelleri gözönüne alalım. Eğer pozitif olasılıklı tek martingale ölçüsü varsa, market tamdır ve bu markette arbitraj yoktur. Tersine, eğer markette arbitraj yoksa ve market tam ise, o halde pozitif olasılıklı tek martingale ölçüsü vardır.

İspat : (Bakınız[1]). □

Bu iki teoremin bazı versiyonları daha kompleks marketlerde de doğrudur. Şimdi de teorem (4.2)'yi tek periyotlu model için yeniden ifade edelim.

Teorem 4.4

Finans marketlerinde daha önceden ifade ettiğimiz tek periyotlu modeli göz önüne alalım. Eğer kesinlikle pozitif olan risk-nötr olasılığı p_i^* varsa, o halde markette arbitraj yoktur. Tersine, eğer markette arbitraj yoksa, o halde kesinlikle pozitif olan p_i^* risk-nötr olasılığı vardır.

İspat :

($\Rightarrow$) Risk-nötr olasılığının olması arbitrajın olmamasını gerektirir. Bunu göstermek için sermaye sürecinin $t = 1$ zamanındaki değerinin bugünkü değerini veren ifadeyi,

$$\bar{X}(1) = \delta_0 + \sum_{i=1}^{N} \delta_i \bar{S}_i(1)$$

hatırlayalım. Buradaki δ_0 risksiz olan yatırım aracının adetini göstermektedir. O halde

$$E^*\left[\bar{X}(1)\right] = \delta_0 + \sum_{i=1}^{N} \delta_i S(0) = X(0)$$

olur ki bu da 2. bölümde anlattığımız kendi kendini finanse etme durumudur. Bu eşitlik, sermaye sürecinin (bugünkü değerinin), risk-nötr olasılık ölçüsü altında martingale olduğunu söyler. Özellikle farzedelim ki $t = 1$ iken kesinlikle kayıp (zarar) söz konusu olmasın o halde $\bar{X}(1)$ her zaman pozitiftir. Aynı zamanda farzedelim ki dünyanın herhangi bir yerinde bu durum sağlanmış olsun yani pozitif olsun. O halde $E\big[\bar{X}(1)\big] = X(0)$ ifadesi kesinlikle pozitif olmalıdır. Bu zaten başlangıçtaki sermaye miktarının yani yatırım yapılan miktarın pozitif olması demektir. İşte bu arbitrajın olma olasılığının olmadığı anlamındadır. Eğer 0 sermaye süreci ile işe başlarsak yani yatırım yaparsak, bu durumda negatif olmayan veya kesinlikle pozitif olan bir sermaye ile bitirmek söz konusu olmaz.

($\Leftarrow$) Arbitrajın olmaması durumu, risk-nötr olasılık ölçüsünün olmasını gerektirir. Şimdi A kümesi başlangıç yatırım miktarı $X(0) = 0$ olan ve rassal değişken olan $\bar{X}(1)$ elemanlarından oluşan küme olsun. B kümesi de tüm negatif olmayan Y rassal elemanlardan oluşsun, öyle ki $E[Y] \geq a$. İşlemlerde kolaylık olması açısından a sabitini özel olarak 1 seçelim yani $E[Y] \geq 1$ olsun. Bu en azından dünyada bir yerde Y'nin (Y'ler farklı durumlardaki sonuçları göstermek üzere) pozitif olmasını gerektirir. Arbitrajın olmaması A ve B kümelerinin ortak elemanlarının olmamasını yani kesişim kümelerinin boş olmasını gerektirir. A kümesini, K ($\bar{X}(1)$'ın alabileceği değer sayısını göstermek üzere) boyutlu vektör uzayının bir alt uzayı olarak düşünebiliriz. Benzer şekilde B kümesini de K boyutlu vektör uzayının bir alt uzayı olarak düşünebiliriz ve bu alt küme kapalı ve konvekstir. Fonksiyonel analizde **Hahn-Banach teoremi** veya **ayrık hiperdüzlem teoremi** (separating hyperplane teorem) olarak bilinen teorem yardımıyla bu koşullar altında A ve B kümelerini birbirinden ayıran bir düzlem vardır (bakınız [11]). O halde, $d = (d_1, ...d_K)$ vektörü vardır öyleki A kümesindeki her $a = (a_1, ...a_K)$ ve B kümesindeki her $b = (b_1, ..., b_K)$ vektörleri için;

$$\sum_{i=1}^{K} d_i a_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{K} d_i b_i > 0 \tag{4.5}$$

sağlanır. O halde B kümesinden $b_j > 0$ olmak üzere, verilen herhangi bir j $\leq$ K için b_j dışındaki koordinatlarının tümü sıfır olan bir vektörü her zaman seçebiliriz. (4.5) eşitliğindeki ikinci bağıntı $d_j > 0$ olmasını gerektirir, ve bu durum her $j = 1, ..., K$ için doğrudur. Artık pozitif olasılığı şu şekilde tanımlayabiliriz,

$$p_j^* = \frac{d_j}{\sum_{i=1}^{K} d_i}$$

Şimdi bu olasılığın risk-nötr olasılığı olduğunu göstermemiz gerekmektedir. (4.5) ifadesindeki ilk eşitlik her $\vec{a} \in A$ için,

$$\sum_{i=1}^{K} p_i^* a_i = 0 \tag{4.6}$$

olmasını gerektirir. Şimdi şu stratejiyi göz önünde bulunduralım, bankadan $S(0)$ TL kadarlık bir borç aldığımızı ve bu parayla bir tane S kuponu aldığımızı düşünelim. Bu stratejiden de görüleceği gibi başlangıçtaki yatırım miktarı sıfırdır. O halde bu stratejiye göre borçla aldığımız S kuponunun $t = 1$ zamanınındaki değerini bugünkü değeriyle birlikte düşünecek olursak, elimizdeki miktar $-S(0) + \bar{S}(1)$ olur ki bu da A kümesinin elemanıdır. (4.6) eşitliği yardımıyla,

$$\sum_{i=1}^{K} p_i^*[\bar{s}_i - S(0)] = 0$$

olur veya farklı bir şekilde ifade edecek olursak,

$$E^*[\bar{S}(1)] = S(0)$$

Bu da gösteriyor ki, gerçekten, p_i^*, $i = 1, ..., K$ için risk-nötr olasılığıdır. □

Örnek 4.2

Tek periyotlu bir modelde, $r = 0.005$, $S(0) = 100$ TL, $s_1 = 101$ TL ve $s_2 = 99$ TL olsun öyle ki s_1 ve s_2 hisse senedinin $t = 1$ zamanındaki alabileceği değerleri göstermek üzere $u = 1.01$ ve $d = 0.99$ olur. O halde Avrupai opsiyon için ödeme,

$$g[S(1)] = [S(1) - K]^+ = max[S(1) - K, 0]$$

olur. Opsiyonun kullanma fiyatı $K = S(0) = 100\ TL$ için, hisse senedinin değeri yukarı doğru bir hareket gösterip artarsa ödeme 1 TL olacaktır, eğer aşağı doğru bir hareket gösterip azalacak olursa ödeme 0 TL olacaktır. Bu durumlar altında ve δ_0 bono veya bankaya yatırılacak miktarı göstermek üzere, δ_1 de hisse senedi sayısını göstermek üzere kendini finanse eden portföyü bulacak olursak,

$$\delta_0(1 + 0.005) + \delta_1 101 = 1$$

$$\delta_0(1 + 0.005) + \delta_1 99 = 0$$

olur. Bu denklem sisteminin çözümünden $\delta_0 = -49.2537$, $\delta_1 = 0.5$ elde edilir. Bunun anlamı $49.2537\ TL$ bankadan alınan borç miktarını, 0.5 de yarım adet hisse senedi aldığımız ifade eder. O halde kendini finanse eden stratejinin maliyeti,

$$C(0) = \delta_0 + \delta_1 S(0) = 0.746\ TL$$

olur ki bu da alım opsiyonunun değerine eşittir.

Örnek 4.3

Örnek 4.2'deki değerleri göz önüne alalım, $r = 0.005$, $S(0) = 100$ TL, $s_1 = 101$ TL ve $s_2 = 99$ TL ve alım opsiyonunun değeri $C(0) = 0.746$ idi. Şimdi de risk-nötr olasılığını bu örnek için hesaplayalım. Hisse senedinin bugünkü değerinin martingale olabilmesi için, $E^*[\bar{S}(1)] = S(0)$ olmalı veya

$$p^* \frac{101}{1.005} + (1 - p^*) \frac{99}{1.005} = 100$$

olmalı. Bu denklemden $p^* = 0.75$ olarak elde edilir. O halde risk-nötr olasılığı altında alım opsiyonunun bugünkü değerinin beklenen değerini hesaplayacak olursak,

$$E^*[\bar{C}(1)] = p^* \frac{101 - 100}{1.005} = 0.746$$

olur ki bu da zaten Örnek 4.2'deki C(0) kendini finanse eden stratejinin maliyeti olarak veya alım opsiyonunu değeri olarak bulduğumuz değere eşit çıktı (Bakınız teorem 4.1).

4.3 Black Scholes Modeli İçin Martingale Yöntemi

Bu bölümde banka hesabı veya bono için faiz oranı r sabit olmak üzere, S hisse senedi için Black-Scholes modelini,

$$dS = S[\mu dt + \sigma dW]$$

göz önüne alalım. Şimdi de sermaye sürecinin bugünkü değerini $\bar{X}$ martingale yapmak için bazı işlemleri yapmak gereklidir. Bunun için **riskin market değerini (θ)** şu şekilde

$$\theta := \sigma^{-1}(\mu - r)$$

tanımlayalım. Bu ifade riskli ve risksiz olan varlıkların beklenen faiz oranlarını, riskli olan varlıkların volatilitesi ile normalize eder. Şimdi de risk-nötr yoğunluk süreci veya sürekli zamanlı Arrow-Debreu fiyat süreci olarak ifade edilen süreci,

$$Z(t) = exp\{-\theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\}$$

göz önüne alalım. It$\hat{o}$ kuralını uygulayacak olusak;

$$dZ = -\theta Z dW, \quad Z(0) = 1$$

olarak elde edilir. Buradan da anlaşılacağı gibi Z martingale'dir ve beklenen değeri 1'dir. $\bar{X}$ ve Z' nin çarpımı için It$\hat{o}$' nun çarpım kuralını uygulayacak olursak,

$$d(Z\bar{X}) = \bar{Z}[\pi\sigma - \theta X]dW$$

olarak (bu ifadenin elde edilişi tezin son kısmındaki ekler bölümünde vardır) veya

$$Z(t)\bar{X}(t) = x + \int_0^t \bar{Z}(u)[\pi(u)\sigma - \theta X(u)]dW(u)$$

olarak da elde edilir. Bu denklem stokastik integralin teknik koşulları sağladığı durumlar varsayıldığında **Z$\bar{X}$' nin martingale** olduğunu söyler. Martingale özelliğinin sonucu olarak

$$E_t\big[Z(T)\bar{X}(T)\big] = Z(t)\bar{X}(t)$$

elde edilir. O halde bu denklem yardımıyla bütçe sınırı olarak da,

$$E\big[Z(T)\bar{X}(T)\big] = Z(0)\bar{X}(0) = x$$

elde edilir. Bu denklem ise başlangıçtaki sermaye miktarının, normal "true" olasılık ölçüsü altında sermayenin bugünkü değeri ve risk-nötr yoğunluğunun çarpımının beklenen değeri olarak da bulunabileceğini söyler. Ayrıca Cox-Ross-Rubinstein modelindeki duruma benzer olarak ödemesi rassal olarak C olan kontrat ve x başlangıç sermayesi için aşağıdaki teorem geçerlidir.

Teorem 4.5

Başlangıçtaki sermaye miktarı $C(0)$ olmak üzere ve T vade süresindeki rassal ödemesi C olan kontrat finanse edilebilinir ancak ve ancak $E\big[Z(T)\bar{C}\big] = C(0)$ ise.

<u>İspat :</u>

Önceki bölümde, eğer $X(T) = C$ ise $E\big[Z(T)\bar{X}(T)\big]$' nin başlangıçtaki sermaye $x = C(0)$ miktarına eşit olduğunu göstermiştik. Şimdi bunu tersi olduğu durumu inceleyelim yani C kontratının başlangıç değeri $C(0) = E\big[Z(T)\bar{C}\big]$ için finanse eden strateji var olsun. Bu durumda 3. bölümde ifade edilen martingale temsil teoreminden dolayı $E\big[Z(T)\bar{X}(T)\big] = C(0)$ elde edilir.□

Yukarıdaki teoremden de görüleceği gibi rassal olarak verilen tutarı finanse etmek için gerekli miktarı beklenen değer yardımıyla hesaplamak mümkündür. Benzer şekilde difüzyon sürecinin beklenen değeri **Feynman-Kac** kismi türevli diferansiyel denkleminin çözümüyle de bulunabilir.

<u>Teorem 4.6</u> (Feynman-Kac Teoremi)
Farzedelim ki X difüzyon süreci,

$$dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t)$$

olsun. $E_{t,x}$ ise $X(t) = x$ olayı üzerindeki koşullu beklenen değeri göstermek üzere ve verilen g, r, f fonksiyonları için V fonksiyonu,

$$V(t,x) := E_{t,x}\big[e^{-\int_t^T r(u,X(u))du} g(X(T)) + \int_t^T e^{-\int_t^u r(z,X(z))dz} f(u,X(u))du\big]$$

şeklinde tanımlansın. O halde V fonksiyonu,

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 V_{xx} + \mu V_x - rV + f = 0$$

Feyman-Kac kismi türevli diferansiyel denkleminin

$$V(T,x) = g(x)$$

sınır koşulu altında bir çözümüdür.

<u>İspat :</u>

Tanımlanan V fonksiyonunda Itô kuralını uygulayalım. O halde,

$$\begin{aligned}
dV(t,X(t)) &= V_t dt + V_x dX + \frac{1}{2}V_{xx} dX dX \\
dV(t,X(t)) &= V_t dt + V_x \mu dt + V_x \sigma dW + \frac{1}{2}V_{xx}\sigma^2 dt \\
dV(t,X(t)) &= [V_t + V_x\mu + \frac{1}{2}V_{xx}\sigma^2]dt + V_x\sigma dW \\
\int_t^T dV(u,X(u)) &= \int_t^T [V_u + V_x\mu + \frac{1}{2}V_{xx}\sigma^2]du + \int_t^T V_x\sigma dW(u) \\
V(T,X(T)) &= V(t,X(t)) + \int_t^T [V_u + V_x\mu + \frac{1}{2}V_{xx}\sigma^2]du + \int_t^T V_x\sigma dW(u) \;\; olur.
\end{aligned}$$

Şimdi de $r(z) = r(z, X(z))$ olsun ve benzer şekilde $exp\{-\int_t^u r(z)dz\}V(u)$ ifadesi için Itô çarpım kuralını uygulayacak olursak,

$$e^{-\int_t^T r(u)du}V(T,X(T)) = V(t,x) + \int_t^T e^{-\int_t^u r(z)dz}[V_u + V_x\mu + \frac{1}{2}V_{xx}\sigma^2 - rV]du + \int_t^T V_x\sigma dW(u)$$

elde edilir. Ayrıca V(t,x) fonksiyonu Feynman-Kac kismi türevli diferansiyel denklemini sağladığından $V_u + V_x\mu + \frac{1}{2}V_{xx}\sigma^2 - rV = -f$ olur ve sınır koşulu $V(t,x) = g(x)$'tir. Bunları yukarıdaki ifadede yerine yazacak olursak,

$$e^{-\int_t^T r(u)du} g(X(T)) = V(t,x) - \int_t^T e^{-\int_t^u r(z)dz} f(u, X(u))du + \int_t^T V_x \sigma dW(u)$$

Teknik koşullar altında bu ifadenin $E_{t,x}$ koşullu beklenen değeri,

$$E_{t,x}\big[V(t,x)\big] = E_{t,x}\big[e^{-\int_t^T r(u)du} g(X(T)) + \int_t^T e^{-\int_t^u r(z)dz} f(u, X(u))du\big] - E_{t,x}\big[\int_t^T V_x \sigma dW(u)\big]$$

teknik koşullar altında stokastik integralin beklenen değeri sıfır olduğundan,

$$V(t,x) = E_{t,x}\big[e^{-\int_t^T r(u)du} g(X(T)) + \int_t^T e^{-\int_t^u r(z)dz} f(u, X(u))du\big]$$

olur ki bu da zaten teoremde istenilen durumdur. □

4.3.1 Sürekli Zamanlı Risk-Nötr Fiyatlandırması

Ekler bölümünde ifade edilen (A.3) denkleminden Black-Scholes modelinin bazı Brown hareketleri W^* için P^* ölçüsü altındaki hisse senedi fiyat sürecinin,

$$dS = S[rdt + \sigma dW^*]$$

olduğunu biliyoruz. Bunu sağlayan P^* ölçüsü tektir ve bu modelin geçerli olduğu market tamdır. Bu yüzden her kontratın finanse edilecebileceğini ($E^*[\bar{C}]$ var olduğunu kabul ediyoruz ki bu yüzden "**her** kontratın" ifadesini kullanabiliyoruz) tam market özelliklerinden biliyoruz. Sonuç olarak, rassal C ödemeli kontratın değerinin Teorem 4.1'den

$$E^*[\bar{C}] = C(0)$$

olduğunu biliyoruz. Örneğin bazı g fonksiyonları için $C = g(S(T))$ formunda ödemesi olan kontratı ele alalım. O halde bu opsiyonun Merton-Black-Scholes modelindeki fiyatı risk-nötr olasılığı altında $E^*[e^{-rT}g(S(T))]$ 'dır. Ayrıca yukarıda belirttiğimiz süreç dikkatli incelenecek olursa dinamikteki sürüklenme katsayısı olan μ yerine faiz oranı r 'nin geldiği hemen görülür. Sonuç olarak opsiyon fiyatı için, P^* ölçüsü altında Merton-Black-Scholes modeli, hisse senedininin sürüklenme katsayısı olan μ 'ye bağımlı değildir.

4.3.2 CRR Model ve Black-Scholes Modeli Arasındaki İlişki

2. bölümde anlattığımız S değerli bir tane hisse senedi ve sabit faiz r oranlı banka hesabı için Binom CRR modelini hatırlayalım. Bu modeli genelleştirmek için, faiz oranının sürekli bileşik zamanlı faiz oranı olduğunu varsayalım ve Δt ile de iki zaman dilimi arasındaki farkı gösterelim. Model parametreleri ise $u > e^{r\Delta t}$ ve $d < e^{r\Delta t}$ olmak üzere her bir zaman diliminde hisse senedi S(t) yukarı hareket ederek $S(t)u$, aşağı hareket ederek ise $S(t)d$ değerlerini sırasıyla p ve $1-p$ olasılıklarıyla alabilir. Opsiyon fiyatlandırması için p olasılığını bilmemiz gerekmektedir.

Bunun yerine, (4.2) eşitliğinde elde ettiğimiz risk-nötr olasılığını p^* bilmemiz gerekir (market tam olduğu durumda bu olasılık tektir). (4.2) denklemi bileşik faiz oranı için,

$$p^* = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \qquad q^* = 1 - p^* = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d} \tag{4.7}$$

şekline dönüşür. $\left[(1+r) = \lim_{n\to\infty}((1+\frac{r_C}{n})^n)^{\Delta t} = e^{r_C \Delta t}\ olur\right]$. Martingale özelliğini kontrol edecek olursak,

$$E^*[\bar{S}(t)] = e^{-r\Delta t}[p^* uS(t) + q^* dS(t)] = S(0)$$

olur ki bu da martingale özelliğinin sağlandığını gösterir. Önceki bölümde T zamanında rassal olan C TL ödemenin değerinin $C(0) = E^*[e^{-rT}C]$ olduğunu göstermiştik. Özellikle, farzedelim ki T zamanındaki hisse senedinin negatif olmayan bazı g fonksiyonu altındaki değeri için ödemesi, $C = g(S(T))$ şeklinde verilmiş olsun ve de 0 ile T arasında sadece bir periyot olsun. Bu durumda opsiyonun değeri,

$$C(0) = e^{-rT}[p^* g(S(0)u) + (1 - p^*)g(S(0)d)]$$

olur. Daha genel olarak farzedelim ki $t = 0$ ve $t = T$ zamanları arasında n tane periyot olsun. Bu durumda vade süresi T de, k yukarı doğru hareket sayısını ve $n - k$ da aşağı doğru hareket sayısını göstermek üzere, hisse senedinin değeri; $S(0)u^k d^{n-k}$ formunda olabilir. Risk-nötr olasılığı; k tane yukarı doğru hareketin olduğu durumda ve binom olasılığı yardımıyla,

$$P^* = \binom{n}{k}(p^*)^k(1 - p^*)^{n-k}$$

olarak bulunur. O halde opsiyonun fiyatı,

$$C(0) = \sum_{k=0}^{n}\left[e^{-rT}\binom{n}{k}(p^*)^k(1 - p^*)^{n-k} g(S(0)u^k d^{n-k})\right] \tag{4.8}$$

olur. Bu ifadeyi daha kolay olarak binom ağacında, **ters tümevarım** diye adlandırılan yöntemle hesaplamak mümkündür. Bu metodu; opsiyon fiyatlandırması için güzel formülü olmayan daha kompleks yapılar için de genelleyerek, opsiyon fiyatını bilgisayar programları yardımıyla hesaplamak mümkündür. Şimdi opsiyonun $t + \Delta t$ zamanında yukarı doğru hareket ettiği durumdaki değerini $C^u(t + \Delta t)$ ile, aşağı doğru hareket ettiği durumdaki değerini ise $C^d(t + \Delta t)$ ile gösterelim. O halde t zamanındaki opsiyonun değeri, opsiyonun $t + \Delta t$ zamanındaki değeri ve **beklenen değer formülü** yardımıyla:

$$C(t) = E_t^*[e^{-r\Delta t}C(t + \Delta t)] = e^{-r\Delta t}[p^* C^u(t + \Delta t) + (1 - p^*)C^d(t + \Delta t)] \tag{4.9}$$

olarak bulunur. Bu ifadenin doğruluğunu Teorem 4.2 yardımıyla anlamak mümkündür. Bir başka şekilde ifade edecek olursak, t zamanındaki opsiyonun fiyatı C(t); sermaye sürecini finanse edecek değere eşittir ve sermaye sürecinin bugünkü değeri risk-nötr uzayında martingaledir. O halde martingale özelliğinden ve (4.9) eşitliğinin yardımıyla,

$$E_t^*[e^{-r(t+\Delta t)}C(t + \Delta t)] = e^{-rt}E_t^*[e^{-r\Delta t}C(t + \Delta t)] = e^{-rt}C(t)$$

olarak bulunur. Avrupai opsiyonlar için, (4.8) 'deki ifadeyi biraz daha geliştirebiliriz. İlk olarak Avrupai alım opsiyonları için (4.8) 'deki ifade,

$$C(0) = \sum_{k=0}^{n} \{e^{-rT} \binom{n}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{n-k} max[S(0)u^k d^{n-k} - K, 0]\} \tag{4.10}$$

olur. Avrupai opsiyonlarda yukarı doğru hareket gösterip, değeri arttığı takdirde K kullanma fiyatından büyük değer alır aksi takdirde K'den daha az değer alacağından ödeme 0 olur. Kısaca Avrupai opsiyonun n periyot sonunda vadesinin dolacağını düşünelim ve yukarı doğru hareketlerinin sayısını k ile gösterelim, bu durumda $u^k d^{n-k} S(0) > K$ olur. Yukarı doğru hareketlerinin sayısının minimumunu a ile gösterelim, bu durumda (4.10) 'daki ifadeyi ödemenin 0 olduğu kısmı gözardı edecek olursak yani $k = a$'dan başlatacak olursak,

$$C(0) = \sum_{k=a}^{n} \{e^{-rT} \binom{n}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{n-k} [S(0)u^k d^{n-k} - K]\} \tag{4.11}$$

olur. Bu ifadeyi açarak ifade edecek olursak,

$$\begin{aligned} C(0) &= \sum_{k=a}^{n} [e^{-rT} \binom{n}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{n-k} S(0)u^k d^{n-k}] \\ &\quad -e^{-rT} K \sum_{k=a}^{n} [\binom{n}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{n-k}] \end{aligned} \tag{4.12}$$

olur. Bu toplamların içlerindeki ifadeler binom olasılığına benzemektedirler. O halde X_p n tane bağımsız denemenin başarılı olanların sayısını sayan binom rassal değişkeni olsun, p ile de her bir denemenin başarılı olma olasılığını gösterelim. Bu durumda binom olasılığını

$$N(n,p,a) := P[X_p \geq a] = \sum_{k=a}^{n} [\binom{n}{k} (p)^k (1-p)^{n-k}]$$

şeklinde gösterelim. Ayrıca $\Delta t = T/n$ olsun ve başka bir olasılığı ise

$$\tilde{p} = e^{-r\Delta t} u p^* \qquad ve \quad 1 - \tilde{p} = e^{-r\Delta t} d(1-p^*)$$

şekilde tanımlayalım. Bu olasılık yardımıyla (4.12) 'deki eşitliği yeniden ifade edecek olursak,

$$\begin{aligned} C(0) &= \sum_{k=a}^{n} [e^{-r\Delta t n} \binom{n}{k} \left(\frac{\tilde{p}}{e^{-r\Delta t} u}\right)^k \left(\frac{1-\tilde{p}}{e^{-r\Delta t} d}\right)^{n-k} S(0)u^k d^{n-k}] \\ &- e^{-rT} K \sum_{k=a}^{n} [\binom{n}{k} (p^*)^k (1-p^*)^{n-k}] \end{aligned} \tag{4.13}$$

olur ki bu ifade de en kısa haliyle,

$$C(0) = S(0)N(n,\tilde{p},a) - e^{-rT} K N(n,p^*,a) \tag{4.14}$$

şeklinde ifade edilir. Özel olarak

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad \sigma > 0 \quad ve \quad d = \frac{1}{u}$$

şeklinde tanımlar ve binom fomülünün $n \to \infty$ iken limitine bakacak olursak (4.14) 'teki ifadeden Avrupai opsiyonlar için Black-Scholes formülü elde edilir. Buna sonraki bölümlerde tekrar değineceğiz.

4.3.3 Black Scholes KTDD'nin Çıkışı ve İspatı

Merton-Black-Scholes modeli ile kontratın fiyatını hesaplamak için simülasyon yöntemi (6.bölümde değineceğiz) ve (4.3.2) bölümünde bahsettiğimiz Black-Scholes modeline ayrık zamanlı binom modeliyle yaklaşım yöntemi gibi metodlar vardır. Bu bölümde ise Black ve Scholes tarafından 1973 yılında bulunan kismi türevli diferansiyel denklemler yaklaşımı ile kontrat fiyatının nasıl bulunacağını anlatacağız.

Teorem 4.7 (Black-Scholes Denklemi)
Ödemesi $g(S(T))$ olan ve t zamanındaki değeri $C(t, S(t))$ olan opsiyonu göz önüne alalım. $C(t, s)$ fonksiyonu Black-Scholes Kismi türevli diferansiyel denkleminin çözümü olmak ve sınır koşulunu sağlamak üzere,

$$C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 C_{ss} + r(sC_s - C) = 0, \qquad C(T, s) = g(s)$$

olur (tekil çözümünün olduğu durumda).

Teoremin ispatına geçmeden önce yukarıdaki denklem dikkatli olarak incelenecek olursa, sadece sınır koşulunun opsiyonun ödemesi olan $g(S(T))$ 'ye bağımlı olduğu, Black-Scholes KTDD'nin buna bağımlı olmadığı hemen görülür. Ayrıca çözümü opsiyon fiyatını veren bu KTDD hisse senedinin sürüklenme katsayısı olan μ'ye bağımlı değildir. Bunun nedeni ise Black-Scholes modelinin risk-nötr ölçüsü altındaki formunda μ yerine r'nin gelmesidir.

İspat :

Black-Scholes modelininin risk-nötr ölçüsü altındaki formunu göz önüne alarak, $C(t, S(t))$ ifadesine Itô kuralını uygulayalım. O halde,

$$\begin{aligned} dC(t, S(t)) &= C_t dt + C_s dS + \frac{1}{2}C_{ss}dSdS, \qquad dS(t) = S(t)(rdt + \sigma dW^*) \; iken \\ &= C_t dt + C_s S(t) r dt + C_s S(t)\sigma dW^* + \frac{1}{2}C_{ss}S^2(t)\sigma^2 dt \\ &= [C_t + C_s S(t) r + \frac{1}{2}C_{ss}S^2(t)\sigma^2]dt + C_s S(t)\sigma dW^* \quad olur. \end{aligned}$$

Biz $C(t, S(t))$'nin opsiyonu finanse eden portföy değeri olmasını istiyoruz öyle ki başlangıçtaki opsiyonun değeri $X(0) = C(0, S(0))$ olmalı. Bu durumda yatırımcının karşılaşacağı problem; elindeki bu sermayeyi (portföyü) hangi oranda hisse senedine hangi oranda bankaya yatırması gerektiği olacaktır. Daha önceden elde ettiğimiz (3.15) denkleminden sermaye sürecinin,

$$dX = [rX + \pi(\mu - r)]dt + \pi\sigma dW$$

denklemini sağladığını biliyoruz. Sermaye sürecini $W^* = (\frac{\mu - r}{\sigma})t + W$ bağıntısını (ölçü değişimi) göz önünde bulundurarak risk-nötr ölçüsü altında yeniden yazacak olursak;

$$dX = rXdt + \pi\sigma dW^*$$

olur. Yatırımcının bu portföy ile gerçekten opsiyonu finanse ettiğini anlamak için,

$$X(T) = g(S(T)) = C(T, S(T))$$

şartlarının sağlandığını araştırmalıyız. Yatırımcı bu portföy ile yatırım yaptıktan sonra başlangıç sermaye süreci $X(0) = C(0, S(0))$ olmak üzere herhangi bir zamandaki hisse senedine yatırdığı miktarı π^g bulmak ister, yani

$$C(t, S(t)) = X(t) \tag{4.15}$$

iken dC ve dX ifadelerindeki dW^* kısımlarını karşılaştıracak olursak,

$$\pi^g(t) = S(t)C_s(S(t))$$

olması gerekmektedir. Bu sonuçları kullanarak dC ve dX ifadelerindeki dt kısımlarını karşılaştıracak olursak,

$$\begin{aligned} C_t + C_s Sr + \frac{1}{2}C_{ss}S^2\sigma^2 &= rX \\ C_t + C_s Sr + \frac{1}{2}C_{ss}S^2\sigma^2 &= rC \\ C_t + \frac{1}{2}C_{ss}S^2\sigma^2 + r(C_s S - C) &= 0, \qquad C(T, s) = g(s) \;\; olur. \end{aligned}$$

Sonuç olarak eğer C, Black-Scholes denkleminin bir çözümü ise $dC = dX$ olur ve (4.15) denklemi de sağlanmış olur. Ayrıca C, sermaye sürecini arbitraj olmadan finanse ettiğinden $C(T, S(T))$'nin değeri opsiyonun $g(S(T))$ ödemesine eşit olmak zorundadır. □

4.3.4 Black Scholes Formülünün İspatı

Herhangi bir yaklaşım yapmak için elimizde yaklaşım yapmak istediğimiz ifadeye ilişkin bir formülün olması, yani kısaca, elimizdeki problemi modelleyebilmek her zaman işlemleri dahada kolaylaştıracağı gibi olayın daha rahat bir şekilde anlaşılmasına yardımcı olacaktır. İşte bu yüzden Black ve Scholes tarafından 1973 yılında ortaya atılan Black-Scholes formülün akademisyenler tarafından kabul görmesinin en önemli nedeni, Avrupai alım ve satım opsiyonlarının değerlerine yaklaşım yapmak için açık bir formül olarak kullanılabilmesidir. Bu bölümde bu formülünün nasıl elde edildiğinden bahsedeceğiz.

Ayrıca Z standart normal rassal değişken olmak üzere toplam dağılım fonksiyonunu;

$$N(x) := P[Z \leq x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, \quad y = \frac{x - \mu}{\sigma} \; iken$$

şeklinde tanımlayalım (bakınız[12]). Şimdiki zamana t ve hisse senedininin şimdiki değerine s bağlı olan rassal olmayan fonksiyonu da $c(t, s)$ ile gösterelim. Bu durumda Avrupai opsiyonlar için Black-Scholes formülü şu şekildedir:

Teorem 4.8 (Black-Scholes Formülü)

Merton-Black-Scholes modelinde, kullanım fiyatı $K > 0$ ve ödemesi $g(S(T)) = [S(T) - K]^+$ olan Avrupai alım opsiyonunun t zamanındaki değeri,

$$d_1 := \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\big[log(s/K)] + (r + \sigma^2/2)(T-t)\big] \tag{4.16}$$

$$d_2 := \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\big[log(s/K)] + (r - \sigma^2/2)(T-t)\big] = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{4.17}$$

olmak üzere

$$c(t,s) = sN(d_1) - Ke^{-(T-t)}N(d_2)$$

formülü ile bulunur.

İspat :

Bu ispatı $t = 0$ olduğu durum için ve dolayısıyla $W^*(T) - W^*(0) = W^*(T)$ olduğu durum için yapacağız (genel olarak t için ispat ise benzer şekildedir, sadece $W^*(T)$ yerine $W^*(T) - W^*(t)$ almak gerekmektedir). Bu durumda Avrupai alım opsiyonun $t = 0$ yani bugünkü değerini beklenen değer formülü yardımıyla $\big($teorem 4.1'den $E^*[e^{-rT}\{S(T) - K\}^+] = c(t,s)\big)$ ve $\mathbf{1}$ karakteristik fonksiyon olmak üzere hesaplayalım. Bu durumda,

$$E^*[e^{-rT}\{S(T) - K\}^+] = E^*[e^{-rT}S(T)\mathbf{1}_{S(T)>K}] - Ke^{-rT}E^*[\mathbf{1}_{S(T)>K}] \ olur. \tag{4.18}$$

Ayrıca I_1 ve I_2 'yi şu şekilde;

$$I_1 = E^*[e^{-rT}S(T)\mathbf{1}_{S(T)>K}], \qquad I_2 = Ke^{-rT}E^*[\mathbf{1}_{S(T)>K}]$$

tanımlayacak olursak (4.18) eşitliği;

$$E^*[e^{-rT}\{S(T) - K\}^+] = I_1 - I_2 \ olur. \tag{4.19}$$

Diğer taraftan hisse senedinin risk-nötr ölçüsü altındaki değerinin (ekler A.1 de)

$$S(T) = S(0)exp\{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W^*(T)\}$$

olduğunu biliyoruz. Farzedelim ki $S(T) > K$ olsun. Bu varsayımın $W^*(T)$ türünden nasıl bir anlam ifade ettiğini anlamak için bu eşitsizlikte her iki tarafın logaritmasını alacak olursak,

$$\sigma W^*(T) > logK - logs + \frac{1}{2}\sigma^2 T - rT \tag{4.20}$$

olur. Risk-nötr olasılığı altında rassal değişken olan W^*, z standart normal rassal değişken olmak üzere $z\sqrt{T}$ ile aynı normal dağılıma sahiptir. Bu durumda (4.20) eşitsizliğini z türünden yeniden yazacak olursak,

$$\sigma z\sqrt{T} > logK - logs + \frac{1}{2}\sigma^2 T - rT$$

$$z > \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\big(logK - logs + \frac{1}{2}\sigma^2 T - rT\big) = -d_2 \ olur. \tag{4.21}$$

Şimdi de I_2'yi, (4.21) eşitsizliğini ve standart normal dağılımın özelliklerini de göz önünde bulundurarak hesaplaycak olursak,

$$\begin{aligned} E^*[\mathbf{1}_{S(T)>K}] &= P^*[S(T) > K] = P^*[z > -d_2] = P^*[z < d_2] = N(d_2) \\ I_2 &= Ke^{-rT}N(d_2)\ olur. \end{aligned} \tag{4.22}$$

I_1'i hesaplamak için sürekli rassal değişkenler için beklenen değerin tanımını kullanmamız gerekmektedir. O halde $n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$ standart normal yoğunluk fonksiyonu olmak üzere,

$$\begin{aligned} I_1 &= E^*[e^{-rT}s\ exp\{\sigma W^*(T) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)T\}\mathbf{1}_{S(T)>K}] \\ &= sE^*[exp\{\sigma W^*(T) - \frac{1}{2}\sigma^2 T\}\mathbf{1}_{S(T)>K}] \\ &= s\int_{-d_2}^{\infty} exp\{\sigma\sqrt{T}z - \frac{1}{2}\sigma^2 T\}n(z)dz \\ &= \frac{s}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_2}^{\infty} exp\{-\frac{1}{2}(z - \sigma\sqrt{T})^2\}dz. \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $u = z - \sigma\sqrt{T}$ değişken dönüşümünü ve $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T}$ eşitliğini göz önünde bulunduracak olursak,

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{s}{\sqrt{2\pi}}\int_{-d_1}^{\infty} exp\{-\frac{1}{2}u^2\}du \\ I_1 &= sP^*[z > -d_1] = sP^*[z < d_1] = sN(d_1)\ olur. \end{aligned} \tag{4.23}$$

O halde sonuç olarak (4.22) ve (4.23) denklemlerinden (4.19) denklemi sağlanır ve böylece Black-Scholes formülü de sağlanmış olur. □

Ek olarak daha önceden alım-satım paritesinin

$$c(t,s) + Ke^{-r(T-t)} = p(t,s) + s$$

olduğunu biliyoruz. Bu formül yardımıyla satım opsiyonu için Black-Scholes formülünü bulalım.

$$\begin{aligned} p(t,s) &= c(t,s) + Ke^{-r(T-t)} - s \\ &= sN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) + Ke^{-r(T-t)} - s \\ &= s(N(d_1) - 1) + Ke^{-r(T-t)}(1 - N(d_2)) \end{aligned}$$

Ayrıca $\phi(x)$ toplam dağılım fonksiyonu olmak üzere standart normal dağılımın $\phi(x) = 1-\phi(-x)$ özelliğini kullanacak olursak satım opsiyonu için,

$$p(t,s) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - sN(-d_1)$$

olan Black-Scholes formülünü elde etmiş oluruz. Ayrıca Black-Scholes formülünü dikkatli bir şekilde analiz edecek olursak en önemli parametrenin hisse senedi volatilitesi σ olduğu görülür. Bu volatilitenin sadece hisse senedinin fiyatı bilindiği takdirde bulunması zordur, tersi ise oldukça kolay bir durumdur. O halde verilen hisse senedi için gerekli σ değerini bazı yaklaşık değerleri deneyerek veya eski veriler yardımıyla opsiyonun piyasa değerini veren σ'yı bulabiliriz. İşte bu opsiyonun fiyatını belirleyen σ_{imp}'ya; uygulanacak volatilite (implied volatility) denir.

4.3.5 Merton Black Scholes Modeli ve Genelleştirmeleri

Bu bölümde elimizdeki hisse senedinin kar payı ödediğini kabul ederek Black-Scholes modelinin genelleştirme işlemlerini de bu doğrultuda yapacağız. Bu durumda hisse senedi değerinin belirli bir oranı kadar kar payının sürekli olarak ödendiğini farzedelim. Bu sabit olan kar payını q ile gösterelim. O halde $t = 0$ 'dan t zamanına kadar ödenen toplam kar payı $\int_0^t qS(u)du$ olarak verilsin. Bu durumda elimizde bulundurduğumuz hisse senedinin $t = 0$ 'dan t ye kadarki değerini;

$$G(t) := S(t) + \int_0^t qS(u)du \tag{4.24}$$

olacak şekilde tanımlayalım. O halde daha önceki bölümde de ifade ettiğimiz gibi $\pi(t)$ ile hisse senedine yatırdığımız miktarı, $X - \pi(t)$ ile de bankaya yatırılan miktarı gösterecek olursak sermaye süreci,

$$dX = (X - \pi)\frac{dB}{B} + \pi\frac{dG}{S} \tag{4.25}$$

dinamiğini sağlar. (4.24) denklemini göz önünde bulundurak (4.25) denklemini düzenleyelim. O halde sabit μ, σ değerleri ve sabit faiz oranı r altındaki sermaye süreci için,

$$\begin{aligned} dX(t) &= (X - \pi(t))rdt + \pi(t)\frac{dS + qS(t)dt}{S(t)} \\ &= (X - \pi(t))rdt + \pi(t)\frac{[\mu S(t)dt + \sigma S(t)dW] + qS(t)dt}{S(t)} \\ &= (X - \pi(t))rdt + \pi(t)[\mu dt + \sigma dW + qdt] \\ &= \big[rX(t) + \pi(t)(\mu + q - r)\big]dt + \pi(t)\sigma dW \end{aligned} \tag{4.26}$$

dinamiğini elde ederiz. Eğer bu süreci risk-nötr ölçüsü altında, $W^*(t) = W(t) + t(\mu + q - r)/\sigma$ bağıntısını göz önünde bulundurarak ifade edecek olursak,

$$dX(t) = rX(t)dt + \pi(t)\sigma dW^*(t) \tag{4.27}$$

sürecini elde ederiz. Ayrıca bu bağıntı sermaye sürecinin bügünkü değerini risk-nötr ölçüsü altında martingale yapar öyle ki $\bar{X} = e^{-rt}X$ için,

$$d\bar{X}(t) = \bar{\pi}(t)\sigma dW^*(t)) \rightarrow martingale$$

stokastik diferansiyel denklemini elde ederiz. Şimdi de Merton-Black-Scholes modelini bu bağıntıyla birlikte risk-nötr ölçüsü altında düzenleyecek olursak,

$$dS(t) = S(t)[(r - q)dt + \sigma dW^*(t)] \tag{4.28}$$

ifadesini elde ederiz. Bu ifadeden de görüldüğü gibi kar payı ödeyen hisse senedinin normal ölçü altındaki Black-Scholes modeli için sürüklenme katsayısı olan μ'nün yerine risk-nötr ölçüsü altında $r - q$ gelir.

Şimdi de $C(T,s) = g(S(T))$ kontratının değerini bulmak için, (4.28) denklemini de göz önünde bulundurarak $C(t,s)$ fonksiyonunun diferansiyelini alalım. O halde,

$$\begin{aligned} dC(t,s) &= C_t dt + C_s dS + \frac{1}{2} C_{ss} dS dS \\ &= C_t dt + C_s[s[(r-q)dt + \sigma dW^*(t)] + \frac{1}{2} C_{ss} s^2 \sigma^2 dt \\ &= [C_t + \frac{1}{2} C_{ss} s^2 \sigma^2 + C_s s(r-q)]dt + C_s \sigma dW^*(t) \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Şimdi bu ifade ile (4.27) denkleminin dt kısımlarını karşılaştıracak olursak,

$$\begin{aligned} C_t + \frac{1}{2} C_{ss} s^2 \sigma^2 + C_s s(r-q) &= rX, \quad X(t) = C(t,s) \\ C_t + \frac{1}{2} C_{ss} s^2 \sigma^2 + C_s s(r-q) &= rC \\ C_t + \frac{1}{2} C_{ss} s^2 \sigma^2 + C_s s(r-q) - rC &= 0, \quad C(T,s) = g(s) \end{aligned} \tag{4.29}$$

olan Black-Scholes kismi türevli diferansiyel denklemini elde etmiş oluruz.

Son olarak Black-Scholes formülünü elde ederken yaptığımız işlemleri kar payı ödeyen hisse senedi için tekrar uygulayacak olursak,

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}[log(s/K) + (r - q + \sigma^2/2)(T-t)] \tag{4.30}$$

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}[log(s/K) + (r - q - \sigma^2/2)(T-t)] = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{4.31}$$

için

$$c(t,s) = sr^{-q(T-t)} N(d_1) - Ke^{-q(T-t)} N(d_2)$$

olan Black-Scoles formülü elde edilir.

Ayrıca benzer şekilde Merton-Black-Scholes'un diğer uygulamaları olarak; Sıçramalı (Jump) difüzyon, döviz kuru opsiyonlarının (currency options) uygulamaları, futures opsiyonlarının uygulamaları, değişim opsiyonları ve rassal faiz oranlı opsiyon fiyatlandırması örnek olarak gösterilebilinir (bakınız [1]). Biz ileriki bölümlerde değişim opsiyonlarını ve rassal faiz oranlı opsiyon fiyatlandırmasını inceleyeceğiz.

4.3.6 İki Tahvil Üzerindeki Opsiyonlar

Bu bölümde; önceki bölümlerde anlattığımız tek hisse senedi için olan Black-Scholes modelininin iki hisse senedi için genişlemesini yapacağız ve aynı zamanda iki hisse senedi için Black-Scholes denkleminin de genişlemesini elde edeceğiz.

İlk olarak S_1 ve S_2 hisse senetleri için μ_1, μ_2, σ_1 ve σ_2 sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned} dS_1 &= S_1[\mu_1 dt + \sigma_1 dW_1] \\ dS_2 &= S_2[\mu_2 dt + \sigma_2 dW_2] \end{aligned} \tag{4.32}$$

Black-Scholes modellerini göz önüne alalım. B_1 ve B_2 birbirinden bağımsız Brown hareketleri olmak üzere, W_1 ve W_2 Brown hareklerini sırasıyla,

$$W_1 := B_1, \qquad W_2 := \rho B_1 + \sqrt{1-\rho^2}B_2$$

şeklinde tanımlarsak aralarındaki korelasyon ρ, $0 \leq \rho \leq 1$ olur. Bunu korelasyon tanımını, varyansın ve beklenen değerin özelliklerini de kullanarak gösterebiliriz. O halde,

$$\begin{aligned}
kor &= \frac{E[(W_1-E(W_1))(W_2-E(W_2))]}{\sqrt{Var(W_1)Var(W_2)}} \\
&= \frac{E[(B_1-0)(\rho B_1+\sqrt{1-\rho^2}B_2-0)]}{\sqrt{Var(B_1)Var(\rho B_1+\sqrt{1-\rho^2}B_2)}} \\
&= \frac{E[\rho B_1^2+\sqrt{1-\rho^2}B_1B_2]}{\sqrt{Var(B_1).[\rho^2Var(B_1)+(1-\rho^2)Var(B_2)]}} \\
&= \frac{\rho E[B_1^2]+\sqrt{1-\rho^2}E[B_1B_2]}{\sqrt{\rho^2Var^2(B_1)+(1-\rho^2)Var(B_1)Var(B_2)}} \\
&= \frac{\rho E[B_1^2]+\sqrt{1-\rho^2}E[B_1]E[B_2]}{\sqrt{\rho^2Var^2(B_1)+(1-\rho^2)Var(B_1)Var(B_2)}} \\
&= \frac{\rho t+\sqrt{1-\rho^2}.0}{\sqrt{\rho^2t^2+(1-\rho^2)t.t}} \\
&= \rho
\end{aligned}$$

olur. Yani korelasyonun ρ olduğunu göstermiş olduk. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{E[(W_1-E[W_1])(W_2-E[W_2])]}{\sqrt{Var(W_1)Var(W_2)}} \\
&= \frac{E[(W_1-0)(W_2-0)]}{\sqrt{t.t}} \\
&= E[W_1W_2]/t
\end{aligned}$$

olur. O halde her t için $E[W_1(t)W_2(t)] = \rho t$ 'dir. Yukarıdaki korelasyonu da göz önünde bulunduracak olursak (4.32) denklemi,

$$\begin{aligned}
dS_1(t) &= S_1(t)[\mu_1dt+\sigma_1dB_1(t)] \\
dS_2(t) &= S_2(t)[\mu_2dt+\sigma_2\rho dB_1(t)+\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}dB_2(t)] \qquad (4.33)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda portföy süreci $\pi(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t))$ olmak üzere iki boyutludur. O halde gerekli işlemler yapıldığında sermaye süreci;

$$\begin{aligned}
dX(t) &= \frac{\pi_1(t)}{S_1(t)}dS_1(t)+\frac{\pi_2(t)}{S_2(t)}dS_2(t)+\frac{X-(\pi_1+\pi_2)}{B}dB(t) \\
dX(t) &= [rX(t)+\pi_1(t)(\mu_1-r)+\pi_2(t)(\mu_2-r)]dt+\pi_1(t)\sigma_1dW_1+\pi_2(t)\sigma_2dW_2(t)
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Sermaye süreci; $W_i^* = W_i + (\frac{\mu_i-r}{\sigma_i})t$, $(i = 1,2)$ bağıntısını göz önünde bulunduracak olursak, P^* risk-nötr olasılık ölçüsü altında,

$$dX = rXdt+\pi_1\sigma_1dW_1^*+\pi_2\sigma_2dW_2^* \qquad (4.34)$$

olarak elde edilir. Bu bağıntı dahilinde gerekli işlemler yapıldığında sermaye sürecinin bugünkü değerinin $\bar{X}$ martingale olduğu kolaylıkla görülür.

Risk-nötr olasılık ölçüsü altında S_i hisse senetlerinin sürüklenme katsayıları olan μ_i 'ler yerine r gelir. Ayrıca (4.32) denklemlerinden de anlaşılacağı gibi iki hisse senedine karşın iki Brown hareketi olduğundan bu modeller tam market modelleridir. O halde T vade vaktindeki ödemesi C olan kontratın tek değeri vardır ve daha önceden de belirttiğimiz gibi bu değer $E^*[\bar{C}] = C(0)$ formülü ile bulunur. Şimdi farzedelim ki T vade vaktinde kontratın ödemesi hisse senetleri fiyatlarının bir foksiyonu olarak $C = g(S_1(T), S_2(T))$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca hisse senetlerinin değerleri s_1 ve s_2 iken herhangi bir t zamanındaki opsiyonun değerini ise $C(t, s_1, s_2)$ ile gösterelim. Ayrıca

$$dS_1 = S_1[rdt + \sigma_1 dW_1^*], \quad dS_2 = S_2[rdt + \sigma_2 dW_2^*]$$

$$dW_1^* dW_2^* = \rho dt, \quad dW_1^* dt = 0 \quad ve \quad dW_2^* dt = 0$$

ifadelerini göz önünde bulundurarak $C(t, s_1, s_2)$ için iki boyutlu Itô kuralını uygulayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
dC(t, s_1, s_2) &= C_t dt + C_{s_1} ds_1 + C_{s_2} ds_2 + \frac{1}{2}[C_{s_1 s_1} ds_1 ds_1 + C_{s_2 s_2} ds_2 ds_2] + C_{s_1 s_2} ds_1 ds_2 \\
&= C_t dt + C_{s_1}(s_1[rdt + \sigma_1 dW_1^*]) + C_{s_2}(S_2[rdt + \sigma_2 dW_2^*]) \\
&+ \frac{1}{2}[C_{s_1 s_1} s_1^2 \sigma_1^2 dt + C_{s_2 s_2} s_2^2 \sigma_2^2 dt] + C_{s_1 s_2} s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho dt \\
&= \big[C_t + r s_1 C_{s_1} + r s_2 C_{s_2} + \frac{1}{2} C_{s_1 s_1} s_1^2 \sigma_1^2 + \frac{1}{2} C_{s_2 s_2} s_2^2 \sigma_2^2 + C_{s_1 s_2} s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho\big] dt \\
&+ C_{s_1} s_1 \sigma_1 dW_1^* + C_{s_2} s_2 \sigma_2 dW_2^* \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

olur. Teorem 4.7 'dekine benzer olarak $X(T) = C(T, S_1(T), S_2(t))$ olmak üzere (4.34) ve (4.35) denklemlerindeki dt kısımlarını karşılaştıralım. Böylece iki hisse senedi için sınır koşulu $C(T, s_1, s_2) = g(s_1, s_2)$ olan;

$$\begin{aligned}
C_t + r s_1 C_{s_1} + r s_2 C_{s_2} + \frac{1}{2} C_{s_1 s_1} s_1^2 \sigma_1^2 + \frac{1}{2} C_{s_2 s_2} s_2^2 \sigma_2^2 + C_{s_1 s_2} s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho = rX \\
C_t + \frac{1}{2} C_{s_1 s_1} s_1^2 \sigma_1^2 + \frac{1}{2} C_{s_2 s_2} s_2^2 \sigma_2^2 + s_1 s_2 \sigma_1 \sigma_2 \rho C_{s_1 s_2} + r(s_1 C_{s_1} + s_2 C_{s_2} - C) = 0 \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

Black-Scholes kismi türevli diferansiyel denklemini elde etmiş oluruz. Opsiyonun değeri bu kismi türevli diferansiyel denklemin nümerik olarak çözümüyle elde edilebilinir. Ayrıca (4.34) ve (4.35) denklemlerindeki dW_i^* $(i = 1, 2)$ kısımlarını karşılaştıralım. Bu durumda opsiyonu finanse edecek olan iki boyutlu portföy $\pi = (\pi_1, \pi_2)$;

$$\pi_1^g = S_1 C_{s_1} , \qquad \pi_2^g = S_2 C_{s_2}$$

olarak bulunur. Yani opsiyonu finanse edebilmek için sermayenin $\pi_1^g = S_1 C_{s_1}, \pi_2^g = S_2 C_{s_2}$ TL'lik kısmını sırasıyla S_1 ve S_2 hisse senetlerine geri kalan kısmını yani $X - \pi$ TL'yi ise bonoya (veya banka hesabına) yatırmak gerekmektedir.

BÖLÜM 5

SABİT GELİR GETİREN YATIRIM ARAÇLARI

Sabit gelir getiren yatırım araçları olarak banka hesapları, devlet (hazine) bonoları, mortgage'a dayalı sabit getiri araçları örnek olarak gösterilebilinir. Faiz oranı, hisse senedi piyasası için önemli bir faktör olmasına rağmen, sabit gelir getiren yatırım araçları için daha fazla önem teşkil etmektedir. Çünkü faiz oranı değişiminde bono fiyatı, hisse senedine göre daha hassastır. İşte bu yüzden faiz oranını Merton-Black-Scholes modelindeki gibi sabit almak yerine faiz oranı için modelleme yapmak kaçınılmaz olur.
Genel bir prensip olarak; Teorem 4.1'de de ifade ettiğimiz gibi risk-nötr olasılığı altında ve t zamanına kadar olan bilgiler koşulu altında; hisse senedi, bono veya kontratın v.s t zamanındaki değeri, o zamanki (t) beklenen değerine eşittir. Yani farzedelim ki r sürekli zamanlı bileşik faiz oranı olsun, o halde T zamanındaki rassal ödemesi C olan kontratın t zamanındaki değeri yukarıdaki prensipten dolayı,

$$C(t) = E_t^*\left[e^{-\int_t^T r(u)du} C\right] \tag{5.1}$$

formülü yardımıyla hesaplanır. Özellikle T zamanında 1 TL ödeyen bononun t zamanındaki değeri ise,

$$P(t,T) = E_t^*\left[e^{-\int_t^T r(u)du}\right] \tag{5.2}$$

formülü yardımıyla hesaplanır. Ayrıca genel olarak bu bölümde bazı faiz oranı modellerinin ve uygulamalarının üzerinde duracağız (bu bölüm kaynak [1]'den alıntı yapılarak hazırlanmıştır).

5.1 Sürekli Zamanlı Modellerde Faiz Oranları

Bu bölümde sürekli zamanlı faiz oranı modelleri üzerinde durup, bu modellerin bazı özelliklerinden bahsedeceğiz.

<u>Vasicek Modeli</u>

Vasicek modelinin stokastik diferansiyel denklemi;

$$dr = a(b - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

dir. Buradaki a, b, σ pozitif sabitler olmak üzere bu model ortalamaya dönüş (mean reversion) olarak bilinen özelliği sağlamaktadır (bu model 3. bölümde ayrıntılı olarak anlatıldı).

Cox-Ingersoll-Ross Modeli

CIR modelinin stokastik diferansiyel denklemi ise;

$$dr = a(b - r(t))dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$$

dir. Buradaki a, b, σ pozitif sabitlerdir. Ayrıca bu modeli Vasicek modelinden ayıran en önemli özellikten dolayı, yani difüzyon kısmında $\sqrt{r(t)}$ olduğundan faiz oranı hiçbir zaman negatif olamaz (bu model 3. bölümde ayrıntılı olarak anlatıldı).

Ho-Lee Modeli

Ho-Lee modelinin stokastik differansiyel denklemi ise,

$$dr(t) = b(t)dt + \sigma dW(t)$$

dir. Buradaki $b(t)$ market verileri gözlemlenerek elde edilen rassal olmayan fonksiyonu temsil etmektedir.

Hull-White Modeli

Hull-White modelinin stokastik differansiyel denklemi ise,

$$dr(t) = \big[b(t) - ar(t)\big]dt + \sigma dW(t)$$

dir. Hull-White modeli, Vasicek modeline benzemektedir ama sürüklenme katsayısı olan kısımdaki $b(t)$ Vasicek modelindekinin aksine rassal olmayan t zamanına bağlı bir fonksiyondur. Ho-Lee modeline benzer olarak bu model de gerçek market verileri ışığı altında daha esnektir.

Black-Derman-Toy Modeli

Black-Derman-Toy modelinin stokastik differansiyel denklemi ise,

$$dr(t) = r(t)\big[a(t)dt + \sigma dW(t)\big]$$

dir. Black-Derman-Toy modeli, hisse senedi için önceden ifade edilen Black-Scholes modeline benzemektedir ama bu modeldeki sürüklenme katsayısı sabit olmayıp t zamanına bağlı rassal olmayan bir fonksiyondur. Bu modelin ayrık zamanlı modeli ve onun genelleştirmeleri oldukça popülerdir. Sürekli zamanlı modeli ise bazı teorik zorluklar içermektedir (bakınız [1]).

5.2 Doğrusal Modellerde Bono Fiyatlandırması

Daha önceden bir çok modelde de bahsettiğimiz gibi bono fiyatlandırması için açık bir formül bulabiliriz. Bunun nedeni Vasicek, Hoo-Lee, CIR ve Hull-White modellerinin hepsinin Doğrusal (Affine) yapılı modeller olarak isimlendirilen yapıya ait olmalarındandır. Bono fiyatlandırması için doğrusal model; A ve B, t zamana bağlı rassal olmayan fonksiyonlar olmak üzere,

$$P(t, T) = e^{A(t,T) - B(t,T)r(t)}$$

şeklinde tanımlanır. Formülden de görüleceği gibi doğrusal yapılı modelde bono fiyatını veren ifade faiz oranı r nin bir lineer fonksiyonu olur. Buradaki amacımız bu ifadeyi sağlayan A ve B fonksiyonlarını bulmaktır, öyle ki $P(T,T) = 1$ iken $A(T,T) = 0$ ve $B(T,T) = 0$ olması gerekmektedir. Burada ele alacağımız model; daha önceden de faiz oranı r süreci için ifade ettiğimiz

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t)$$

denkleminin sürüklenme katsayısı ve difizyon katsayısının karesi r 'nin bir lineer fonksiyonu olarak,

$$\mu(t,r) = \alpha(t)r + \beta(t) \tag{5.3}$$

$$\sigma^2(t,r) = \gamma(t)r + \delta(t) \tag{5.4}$$

zamana bağlı olmak üzere yukarıdaki şekilde tanımlan model olacaktır. Şimdi P bono fiyatı için Feynman-Kac kısmi türevli diferansiyel denklemini, $q(r)$ kar oranı ve $C(r)$ kontrat olmak üzere,

$$P_t + \frac{1}{2}\sigma^2 P_{rr} + \mu P_r - rP + q = 0, \qquad P(T,r) = C(r)\ iken$$

şeklinde ifade edebiliriz (bakınız[1]). Şimdi de (5.3), (5.4), kar oranı $q = 0$ ve $P_t = (A_t - B_t r)P$, $P_r = -BP$, $P_{rr} = B^2 P$ ifadelerini göz önüne alarak Feyman-Kac denkleminde ifadeleri yerlerine yazalım :

$$\begin{aligned}
(A_t - B_t r)P + \frac{1}{2}B^2\sigma^2 P + (\alpha(t)r + \beta(t))(-BP) - rP + 0 &= 0, \quad P \neq 0 \\
A_t - B_t r + \frac{1}{2}B^2(\gamma(t)r + \delta(t)) - \alpha(t)rB - \beta(t)B - r &= 0 \\
A_t - \beta(t)B + \frac{1}{2}B^2\delta(t) - r\big[1 + B_t + \alpha(t)B - \frac{1}{2}B^2\gamma(t)\big] &= 0
\end{aligned}$$

Parantez dışındaki terimler r'ye bağımlı olmadığından parantezin içindeki kısım her t için 0 olmalıdır. Böylece bu kismi türevli diferansiyel denklem A ve B fonksiyonları için;

$$B_t + \alpha(t)B - \frac{1}{2}B^2\gamma(t) = -1$$

$$A_t = \beta(t)B - \frac{1}{2}B^2\delta(t)$$

iki ayrı adi türevli diferansiyel denkleme dönüşmüş olur. B için verilen adi türevli diferansiyel denklem Ricatti tipinde olduğundan $B(T,T) = 0$ şartını sağlayan tek çözüm elde edilir. Ayrıca A için verilen diferansiyel denklem ise $A(T,T) = 0$ olmak üzere,

$$A(t,T) = -\int_t^T \beta(u)B(u,T)du + \frac{1}{2}\int_t^T B^2(u,T)\delta(u)du$$

şeklinde çözülerek istenilen çözüm bulunur.

Örnek 5.1

Vasicek modelinin $dr(t) = \big[b - ar(t)\big]dt + \sigma dW(t)$ formunda a, b, σ sabitler olmak üzere, (5.3) ve (5.4) denklemlerinden $\alpha = -a$, $\gamma = 0$, $\beta = b$, $\sigma^2 = \delta$ bulunur. O halde Ricatti denklemi $B(T,T) = 0$ olmak üzere

$$B_t - aB = -1$$

şeklinde bulunur. Bu Ricatti denkleminin çözümü için gerekli işlemler yapıldığında çözümün $B(t,T) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$ olduğu kolaylıkla bulunur. Şimdi de A fonksiyonu için çözümü yukarıda verdiğimiz formül yardımıyla bulacak olursak çözümün,

$$A(t,T) = -b\int_t^T B(u,T)du + \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T B^2(u,T)du$$

olduğu görülür. B fonksiyonunu bu denklemde yerine yazıp gerekli işlemler yapıldığında

$$A = \frac{1}{a^2}\left[(B - T + t)(ab - \frac{\sigma^2}{2})\right] - \frac{1}{4a}\sigma^2 B^2$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca buradaki a, b, σ sabitleri market değerleri göz önünde bulundurularak seçilir.

Şimdi de sürekli zamanlı modelde risksiz olan bono veya banka hesabının $dB(t) = B(t)r(t)dt$ dinamiğini sağladığını kabul edelim. Buradaki B süreci lokal tahmin edilebilir süreç olarak isimlendirilir. Bu anlamda dinamikte Brown hareketli bileşen olmadığından dolayı herhangi t zamanı için $r(t)$ biliniyor, demektir. Ayrıca $\Delta B(t)$ 'deki artışın küçük zaman periyotları için yaklaşık bir değerini bulabiliriz. Buradaki faiz oranı **r** nominal faiz oranı olduğundan bu modelleme yardımıyla gerçek faiz oranını ortaya koymak için ilk olarak fiyat dinamiğini modellememiz gerekmektedir. Farzedelim ki ekonomideki genel fiyat seviyesi p,

$$dp(t) = p(t)\big[\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)\big] \tag{5.5}$$

dinamiğini sağlıyor olsun. Eğer μ ve σ sabit ise bu süreç geometrik Brown hareketi olur. Genel olarak normal şartlar altındaki μ ve σ için p süreci,

$$p(t) = p(0)e^{\int_0^t \left[\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right]ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s)} \tag{5.6}$$

şeklinde ifade edilir. (5.6) denkleminin (5.5) denklemine eşit olduğu Itô kuralı yardımıyla gösterilebilir.

$$\begin{aligned}
f &= e^{\int_0^t \left[\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\right]ds + \int_0^t \sigma(s)dW(s)} \ \ olsun. \ O \ halde \\
dp(t) &= p(0)df \ \ olur. \qquad (5.7)\\
df &= \big[\mu(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t)\big]fdt + \sigma(t)fdW(t) + \frac{1}{2}\sigma^2(t)fdW(t)dW(t), \quad dW(t)dW(t) = dt \ iken \\
&= \mu(t)fdt + \sigma(t)fdW(t) \ olur.
\end{aligned}$$

bu ifadeyi (5.7)'de yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}
dp(t) &= p(0)f\mu(t)dt + p(0)f\sigma(t)dW(t) \\
&= p(t)\mu(t)dt + p(t)\sigma(t)dW(t)
\end{aligned}$$

olur ve böylelikle (5.5) denklemi elde edilmiş olunur. Ayrık zamandaki duruma benzer olarak, asıl oran; fiyattaki net değişimin faiz oranıdır. Her bir zaman dilimindeki nominal oran $\frac{dB}{B}$'dir. Benzer olarak risksiz varlıklardaki değişimin fiyat seviyesi tarafından normalleştirilmesi ise

$$\frac{d\left(\frac{B(t)}{p(t)}\right)}{\frac{B(t)}{p(t)}} = \big[r(t) - \mu(t) + \sigma^2(t)\big]dt - \sigma(t)dW(t) \tag{5.8}$$

dir. Bu denklemden de görüleceği üzere tahmin edilebilir dt bileşenleri olmasına karşın aynı zamanda tahmin edilemeyecek olan bileşenleri de vardır. Bunun nedeni ise tahmin edilmesi zor olan enfilasyon bileşenleridir. Şimdi de (5.8) denkleminin sağlandığını It$\hat{o}$ kuralı yardımıyla gösterelim.

$$\begin{aligned}
\frac{B}{p} = Bp^{-1} \to d\left(\frac{B(t)}{p(t)}\right) &= p^{-1}dB + Bdp^{-1} + dBdp^{-1}, \quad dBdp^{-1} = 0\ iken \qquad (5.9)\\
dp^{-1} &= \frac{-1}{p^2}dp + \frac{1}{p^3}dpdp\\
&= \frac{-1}{p^2}p\big[\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)\big] + \frac{1}{p}\sigma^2 dt, \quad V = \frac{1}{p}\ olsun.\\
dV &= -V\big[\mu(t)dt + \sigma(t)dW(t)\big] + V\sigma^2 dt\\
&= V\big[(\sigma^2(t) - \mu(t))dt - \sigma(t)dW(t)\big]
\end{aligned}$$

bu denklemi (5.9)'da yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}
dBV &= V\big[r(t)Bdt + B(\sigma^2(t) - \mu(t))dt - B\sigma(t)dW(t)\big]\\
&= BV\big[(r(t) + \sigma^2(t) - \mu(t))dt - \sigma(t)dW(t)\big], \quad BV = \frac{B(t)}{p(t)}\ idi\\
\frac{d\left(\frac{B(t)}{p(t)}\right)}{\frac{B(t)}{p(t)}} &= \big[r(t) + \sigma^2(t) - \mu(t)\big]dt - \sigma(t)dW(t)
\end{aligned}$$

olur ve böylelikle (5.8) denklemi sağlanmış olur.

5.3 Rassal Faiz Oranı Altında Opsiyon Fiyatlandırması

Rassal faiz oranlı opsiyonların fiyatlandırmasında kullanılan yöntemlerden biri de birim değiştirme (change of numeriare) yöntemidir. Burada yapılan ölçü biriminin değiştirilmesidir. Örneğin elimizdeki varlığın (asset) değeri TL cinsinden ise o halde bizim ölçü birimimiz TL 'dir. Veya diyelim ki elimizdeki varlığın değerini banka hesapı cinsinden yazacak olursak, bu durumda banka hesabı süreci ölçü birimimiz olmuş olur. Bono piyasalarında ise genllikle bono değerleri cinsinden bugünkü değerlere çevirme yöntemi daha uygundur.
Daha doğrusu, farzedelim ki $S(t)$ mevcut varlıklar için fiyatlandırma süreci olsun. Vade süresini T ile sabitleyelim ve vade süresi T 'de $P(T,T) = 1$ olan bonoyu da ölçü birimi olarak kullanalım. Bu durumda varlıkların ileri bir zamandaki değerini $F(t)$ ile gösterelim. İleri bir zamandaki değeri dememizin nedeni ise risksiz olan ve T vadesindeki değeri 1 TL olan bononu bugunkü

değerinin $P(t,T) = e^{-r(T-t)}$ olmasındandır. Bu bilgiler yardımıyla $F(t)$ 'yi tanımlayalım :

$$\begin{aligned} F(t) &:= \frac{S(t)}{P(t,T)} \\ &= S(t)e^{r(T-t)}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Daha genel olarak ifade edecek olursak, Merton-Black-Scholes fiyatlandırma teorisinde banka hesabını ölçü birimi olarak kullandığımız durumlarda, risk-nötr olasılığı altında her varlık martingaledir. Şimdi de S 'nin ölçü birimi olduğu durumlarda her varlığın martingale olduğu olasılığı P^S ile gösterelim. Burada ki P^S, S birimi için risk-nötr olasılığı olarak isimlendirilir. T vadeli bononun ölçü birimi olarak kullanıldığı durumlarda ise benzer olarak risk-nötr olasılığı, T ileri ölçüsü olarak isimlendirilir ve P^T ile gösterilir. Ayrıca gösterimde kolaylık olsun diye bu bölümde risk-nötr olasılığını P ile ve risk-nötr olasılığı altındaki beklenen değeri ise E ile göstereceğiz.

Bu bilgiler ışığı altında beklenen değer E ve beklenen değer E^S arasındaki ilişkiyi gösterelim : Farzedelim ki risk-nötr olasılığı altında $C(t)$ varlıklar için fiyat süreci olsun. Bu durumda,

$$C(t) = E_t\big[e^{-\int_t^T r(u)du}C(T)\big]$$

olur. Bununla birlikte $C(t)/S(t)$, P^S olasılığı altında martingale olduğundan,

$$E_t^S\left[\frac{C(T)}{S(T)}\right] = \frac{C(t)}{S(t)} \tag{5.11}$$

eşitliği elde edilir. Bu son iki eşitliği karşılaştıracak olursak;

$$E_t\big[e^{-\int_t^T r(u)du}C(T)\big] = S(t)E_t^S\left[\frac{C(T)}{S(T)}\right] \tag{5.12}$$

eşitliğini elde ederiz. S ölçü birimi düzgün seçildiği takdirde, bazen bu ifadenin sağ tarafını hesaplamak sol tarafını hesaplamaya göre daha kolay olabilir. Artık rassal faiz oranı altında opsiyon fiyatlandırması için gerekli ve yeterli bilgiler mevcut olduğuna göre opsiyon fiyatlandırmasına geçebiliriz.

F süreci için (5.10) 'daki denklemi ve S valığını göz önüne alalım. Yukarıda da açıkladığımız gibi F süreci P^T olasılığı altında martingale olmalıdır. Bu analizi; P^T olasılığı üzerinde, W^T Brown hareketi olmak üzere ve $\int_0^T \sigma_F^2(u)du$ integrali sonlu olmak üzere zamana bağlı olarak hesaplanmış bazı $\sigma_F(t)$ fonkisyonları için,

$$dF(t) = \sigma_F(t)F(t)dW^T(t) \tag{5.13}$$

modeli üzerinde yapacağız. Modelden de görüleceği gibi sürüklenme katsayısı olan kısım olmadığından (veya 0 olduğundan) F gerçekten de P^T olasılığı altında martingaledir. Bu durumda yukarıdaki süreç için Avrupai alım opsiyonunu

$$C = [S(T) - K]^+$$

hesaplayalım. O halde (4.18) 'deki gösterimi kullanarak $t = 0$ zamanındaki değerini **1** karakteristik fonksiyon ve

$$I_1 = E\left[e^{-\int_0^T r(u)du}S(T)\mathbf{1}_{\{S(T)>K\}}\right]; \quad I_2 = KE\left[e^{-\int_0^T r(u)du}\mathbf{1}_{\{S(T)>K\}}\right] \tag{5.14}$$

olmak üzere,

$$E\left[e^{-\int_0^T r(u)du}\{S(T)-K\}^+\right] = I_1 - I_2 \tag{5.15}$$

formülü yardmıyla hesaplayabiliriz. İlk olarak (5.12) denklemini kullanarak I_1 'i hesaplayalım:

$$\begin{aligned} I_1 &= S(0)E^s\left[\mathbf{1}_{\{S(T)>K\}}\right] \\ &= S(0)P^S[F(T)>K] \\ &= S(0)P^S\left[\frac{1}{F(T)} < \frac{1}{K}\right] \end{aligned} \tag{5.16}$$

Ayrıca $1/F = P/S$, P^S olasılığı altında martingaledir. O halde uygun bir $\gamma(t)$ süreci için,

$$d\left(\frac{1}{F(t)}\right) = \gamma(t)\frac{1}{F(t)}dW^S(t)$$

formundaki stokastik diferansiyel denklemi ele alalım. Diğer taraftan $1/F$ ifadesine (5.13) denklemini de göz önünde bulundurarak Itô kuralını uygulayıp ve sürüklenme katsayısına da $\mu(t)$ dersek,

$$d\left(\frac{1}{F(t)}\right) = \mu(t)dt + \sigma_F(t)\frac{1}{F(t)}[-dW^T(t)]$$

olur. Bu durum Girsanov teoreminin bir sonucudur. Öyleki, stokastik hesaplamalarda, bir olasılık ölçüsünden başka bir denk (equivalent) olasılık ölçüsüne geçiş yapıldığında ($W^T = \frac{F\mu}{\sigma}t - W^S$), difüzyon kısmının işareti haricinde herhangi bir değişiklik olmaz. Bu durumda son iki eşitliği karşılaştıracak olursak, sonuç olarak $\gamma \equiv \sigma_F$ olması gerektiğini görürüz. O halde,

$$d\left(\frac{1}{F(t)}\right) = \sigma_F(t)\frac{1}{F(t)}dW^S$$

olur. Ayrıca (5.10) eşitliğinden $F(0) = S(0)/P(0,T)$ olduğunu hatırlayalım ve (5.16) eşitliğinde $1/F(T) < 1/K$ olduğu durumu incelemek istediğimizden dolayı, yukarıdaki stokastik diferansiyel denklemin sonucu,

$$\frac{1}{F(T)} = \frac{P(0,T)}{S(0)}\, exp\left\{\int_0^T \sigma_F(u)dW^S(u) - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(u)du\right\} < \frac{1}{K} \tag{5.17}$$

olarak kolay bir şekilde hesaplanır. Şimdi de gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra (5.17) eşitliğinin her iki tarafının logaritmasını alacak olursak,

$$log\left(\frac{KP(0,T)}{S(0)}\right) + \left\{\int_0^T \sigma_F(u)dW^S(u) - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(u)du\right\} < 0$$

olur. Sonuç olarak $1/F(T) < 1/K$ eşitsizliğine denk olan

$$\begin{aligned} \int_0^T \sigma_F(u)dW^S(u) &< \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(u)du - log(\frac{KP(0,T)}{S(0)}) \\ \int_0^T \sigma_F(u)dW^S(u) &< log\left(\frac{S(0)}{KP(0,T)}\right) + \frac{1}{2}\int_0^T \sigma^2(u)du \end{aligned} \tag{5.18}$$

eşitsizliğini elde etmiş olduk. Bu kısımda ise stokastik integralin şu özelliğinden faydalanacağız: Eğer $\sigma(t)$ rassal olmayan bir fonksiyon ise $\int_t^T \sigma(u)dW(u)$; beklenen değeri 0 olan normal rassal değişken olup, varyansı ise $\int_t^T \sigma^2(u)du$ (bu integralin sonlu olduğu durumda) dur. O halde artık stokastik diferansiyel denklemi sonlu toplamların limiti olarak ve Itô integral (izometri) kuralını da göz önünde bulundurarak, $\sum_F(T) := \sqrt{\int_0^T \sigma_F^2(u)du}$ şeklinde tanımlayabiliriz. Önceki sonuçtan, P^S olasılığı altındaki normal rassal değişken $\int_0^T \sigma_F(u)dW^S(u)$ ile (z standart normal rassal değişken olmak üzere) $\sum_F(T)z$ aynı dağılıma sahiptir. Eğer (5.18) 'deki ifadeyi z türünden yazacak olursak,

$$z < \frac{1}{\sum_F(T)}\left(log\frac{S(0)}{KP(0,T)} + \frac{1}{2}(\sum{}_F(T))^2\right) := d_1 \tag{5.19}$$

ifadesini elde ederiz. Bu durumda (5.16) eşitliğinin sağ tarafı $S(0)P^S[z < d_1]$ olur. O halde (5.16) eşitliğini standart normal toplam dağılım fonksiyonu N yardımıyla

$$I_1 = S(0)N(d_1) \tag{5.20}$$

şeklinde ifade edebiliriz.

Şimdi de (5.12) 'deki denklemi ve (5.10) 'daki tanımı göz önünde bulundurarak (5.14) 'te tanımladığımız I_2 'yi T vadeli bonoyu ölçü birimi olarak kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned} I_2 &= KP(0,T)E^T\left[\frac{1}{P(T,T)}\mathbf{1}_{\{S(T)>K\}}\right] \\ &= KP(0,T)P^T[F(T) > K] \end{aligned} \tag{5.21}$$

Sonuç olarak (5.13) 'teki stokastik diferansiyel denklemin çözümü yardımıyla,

$$F(T) = \frac{S(0)}{P(0,T)}\,exp\left\{\int_0^T \sigma_F(u)dW^T(u) - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_F^2(u)du\right\}$$

eşitliği elde edilir. I_1 'dekine benzer işlemler yaparak $F(T) > K$ ifadesine denk olan,

$$F(T) > K \to \frac{S(0)}{KP(0,T)}\,exp\left\{\int_0^T \sigma_F(u)dW^T(u) - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_F^2(u)du\right\} > 1$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafının logaritmasını alıp gerekli düzenlemeleri yapacak olursak,

$$\begin{aligned} log\left(\frac{S(0)}{KP(0,T)}\right) &+ \int_0^T \sigma_F(u)dW^T(u) - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_F^2(u)du > 0 \\ -\int_0^T \sigma_F(u)dW^T(u) &< log\left(\frac{S(0)}{KP(0,T)}\right) - \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_F^2(u)du \end{aligned} \tag{5.22}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Benzer şekilde, P^T olasılığı altındaki normal rassal değişken $\int_0^T \sigma_F(u)dW^T(u)$ ile (z standart normal rassal değişken olmak üzere) $\sum_F(T)z$ aynı dağılıma sahiptir. Son olarak (5.22)'deki ifadeyi z türünden yazacak olursak,

$$-z < \frac{1}{\sum_F(T)}\left(log\frac{S(0)}{KP(0,T)} - \frac{1}{2}(\sum{}_F(T))^2\right) := d_2 \tag{5.23}$$

ifadesini elde ederiz. Fakat z standart normal rassal değişken olduğundan, standart normal dağılımın özelliğinden $P^T[z > -d_2] = P^T[z < d_2]$ olduğunu biliyoruz. O halde (5.21) eşitliğini standart normal toplam dağılım fonksiyonu N yardımıyla

$$I_2 = KP(0,T)N(d_2) \tag{5.24}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu hesaplamalar yardımıyla **Merton' un Opsiyon Fiyatlandırması için Genelleştirilmiş Formülü** olarak bilinen aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.1

Bono marketlerinde $P(t,T)$ bononun t zamanındaki değerini ve S varlıkların fiyat sürecini göstermek üzere, $F(t) = S(t)/P(t,T)$ olarak tanımlanan $F(t)$ fonksiyonu, rassal olmayan $\sigma_F(t)$ fonksiyonu için (5.13) eşitliğini sağlasın. O halde sırasıyla (5.19) ve (5.23) deklemlerinde tanımlanan d_1 ve d_2 için $C(0)$ Avrupai alım opsiyonun değeri, $C = [S(T) - K]^+$ olmak üzere,

$$C(0) = S(0)N(d_1) - KP(0,T)N(d_2) \tag{5.25}$$

dir.

Örnek 5.2 (Doğrusal Modelle Alım Opsiyonu Fiyatlandırması)

Alım opsiyonu için T_1 vadeli $P(t,T_1)$ bono ile T_2 vadeli $S(t)$ varlığını göz önüne alalım. Ayrıca $T_1 \leq T_2$ için, $S(t) = P(t,T_2)$, $T = T_1$ olarak gösterecek olursak Avrupai alım opsiyonunun ödemesi,

$$\begin{aligned} C &= [S(T) - K]^+ \\ C &= [P(T_1,T_2) - K]^+ \end{aligned}$$

olacaktır. $F(t)$ süreci ise

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{S(t)}{P(t,T_1)} \\ &= \frac{P(t,T_2)}{P(t,T_1)} \end{aligned}$$

doğrusal modelde rassal olmayan A ve B fonksiyonları için,

$$\begin{aligned} F(t) &= \frac{e^{A(t,T_2)-B(t,T_2)r(t)}}{e^{A(t,T_1)-B(t,T_1)r(t)}} \\ &= e^{A(t,T_2)-A(t,T_1)-[B(t,T_2)-B(t,T_1)]r(t)} \end{aligned}$$

formunda olacaktır. Örnek olarak faiz oranı için CIR

$$dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dW$$

faiz oranı modelini kullanalım. Bu durumda $F(t)$ ifadesine Itô kuralını uygulayacak olursak,

$$\begin{aligned} dF(t) &= F(t)[...]dt + F(t)[-B(t,T_2) + B(t,T_1)]dr \\ dF(t) &= F(t)[...]dt + \sigma\sqrt{r}F(t)[-B(t,T_2) + B(t,T_1)]dW \end{aligned}$$

olur. Buradan da görüleceği gibi ((5.13) eşitliğinden)

$$\sigma_F(t) = -\sigma\sqrt{r}[B(t,T_2) - B(t,T_1)]$$

olup rassal olduğundan, yukarıdaki teorem yardımıyla Avrupai alım opsiyonunun fiyatı bulunamaz. Fakat CIR faiz oranı modeli yerine Vasicek faiz oranı modelini kullanmış olsaydık;

$$\sigma_F(t) = -\sigma[B(t,T_2) - B(t,T_1)]$$

olup, rassal olmayacaktı. Bu durumda yukarıdaki teorem yardımıyla Avrupai alım opsiyonunun fiyatı bulunabilirdi (benzer örnekler için bakınız[1], [3]).

5.4 Tam Olmayan Marketlerde Opsiyon Fiyatlandırması

Önceki bölümlerde de bahsettiğimiz gibi marketler tam olan ve tam olmayan marketler olmak üzere iki kısıma ayrılırlar. Tam marketlerle ilgili özelliklere ve opsiyon fiyatlandırmasına önceki bölümlerde değindik. Bu bölümde tam olmayan marketlerde opsiyon fiyatlandırması üzerinde duracağız.

Gerçek market birçok durumdan dolayı tam değildir. Buna sebep olan etkenlerden bazıları: Brown hareketinin sayısının hisse senedi sayısından fazla olması durumdur. Bu duruma örnek olarak stokastik volatilite modelleri gösterilebilinir. Stokastik volatilite modellerinde, volatilite başka bir Brown haretketine bağlı olarak rassaldır. Bir diğer örnek olarak rassal faiz oranı modelleri gösterilebilinir. Bu durum başka bir ifadeyle, rassal faiz oranının hisse senedi fiyatına kısmi olarak korelasyonlu olması durumudur (Bu modeli tezimizin 6. bölümünde tam olmayan marketlerde opsiyon fiyatının bulunması örneğinde ele alacağız). Ayrıca marketin tam olmaması için bir diğer durum olarak da hisse senedi alım-satımı ile ilgili kısıtlama olması durumudur. Ayrıca para transfer işlemlerinde ücret ödenmesi, kısa vadeli satış veya borçlanmalarda kısıtlama olması, arbitrajın olması, kar payı ödenmesi gibi durumlarda tam olmayan marketin özelliklerindendir. Tam olmayan marketi, tam olan marketten ayıran en önemli özellik ise her kontratı finanse edebilecek bir portföyun varlığından söz edilememesidir. İşte bu yüzden tam olmayan marketlerde işlemler yapmak, tam olan marketlere göre daha zahmetli olup, zordur.

Bu bölümde tam olmayan marketteki hisse senedi için bir, P^* martinalge (risk-nötr) ölçüsü altındaki

$$dS(t) = S(t)(r(t)dt + \sigma_s dW_1^*(t))$$

dinamiğini ve sermaye süreci için de

$$dX = Xr(t)dt + \pi\sigma_s dW_1^*(t)$$

dinamiğini kullanacağız. Ayrıca faiz oranı modeli olarak da,

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma_r \sqrt{r(t)}d\hat{W}$$

CIR faiz oranı modelini ele alacağız (Bu modellerdeki $a, b, r, \sigma_s, \sigma_r$ sıfırdan büyük sabittirler). Ayrıca hisse senedi dinamiğindeki W_1^* Brown hareketi ile faiz oranı modelindeki $\hat{W}$ Brown hareketi arasında bir korelasyon vardır. Bu korelasyonu belirten stokastik diferansiyel denklem:

$$d\hat{W} = \rho dW_1^* + \sqrt{1-\rho^2}dW_2, \qquad (\rho \neq \pm 1).$$

Buradaki $\rho \neq \pm 1$ şartının olmasının nedeni, ρ eğer 1 veya -1 değerini alacak olursa $\hat{W}$ Brown harketi, W_1^* Brown hareketine eşit olur ve bu durumda incelediğimiz durum bir hisse senedi ve bir Brown hareketinin olduğu duruma indirgenmiş olur ve böylelikle market tam olur.

Şimdi önceki bölümlerde de yaptığımız gibi farzedelim ki T vaktinde kontratın ödemesinin hisse senedi ve faiz oranın bir g fonksiyonu olarak $C(T, S(T), r(T)) = g(S(T), r(T))$ şeklinde tanımlansın. Ayrıca portföy hisse senedinin değerini finanse edebiliyor ise $X(T) = C(T, S(T), r(T)) = g(S(T), r(T))$ olmalıdır. Bu durumda yukarıdaki denklemleri de göz önüne alarak $C(t, s, r)$ için iki boyutlu It$\hat{o}$ kuralını uygulayalım:

$$\begin{aligned}
dC(t,s,r) &= C_t dt + C_s dS + \frac{1}{2} C_{ss} dS dS + C_r dr + \frac{1}{2} C_{rr} dr dr + C_{rs} dS dr \\
&= C_t dt + C_s[S(r dt + \sigma_s dW_1^*)] + \frac{1}{2} C_{ss}[S(r dt + \sigma_s dW_1^*)]^2 \\
&+ C_r[a(b-r)dt + \sigma_r \sqrt{r} d\hat{W}] + \frac{1}{2} C_{rr}[a(b-r)dt + \sigma_r \sqrt{r} d\hat{W}]^2 \\
&+ C_{rs}[S(r(t)dt + \sigma_s dW_1^*)][a(b-r)dt + \sigma_r \sqrt{r} d\hat{W}] \\
&= C_t dt + C_s[S(r dt + \sigma_s dW_1^*)] + \frac{1}{2} C_{ss} S^2 \sigma_s^2 dt + C_r[a(b-r)dt + \sigma_r \sqrt{r} d\hat{W}] \\
&+ \frac{1}{2} C_{rr} \sigma_r^2 r dt + C_{rs} S \sigma_r \sigma_s \rho dt \\
&= [C_t + C_s S r + \frac{1}{2} C_{ss} S^2 \sigma_s^2 + C_r a(b-r) + \frac{1}{2} C_{rr} \sigma_r^2 r + C_{rs} S \sigma_r \sigma_s \rho] dt \\
&+ C_s S \sigma_s dW_1^* + C_r \sigma_r \sqrt{r} d\hat{W}
\end{aligned}$$

Şimdi de dC ile dX ifadelerindeki dt kısımlarını karşılaştıralım. Böylece S hisse senedi ve r faiz oranına bağımlı C kontratı için sınır koşulu $C(T, S(T), r(T)) = g(S(T), r(T))$ olan,

$$\begin{gathered}
C_t + C_s S r + \frac{1}{2} C_{ss} S^2 \sigma_s^2 + C_r a(b-r) + \frac{1}{2} C_{rr} \sigma_r^2 r + C_{rs} S \sigma_r \sigma_s \rho = rX \\
C_t + abC_r + \frac{1}{2} S^2 \sigma_s^2 C_{ss} + S \sigma_r \sigma_s \rho C_{rs} + (S C_s + \frac{1}{2} \sigma_r^2 C_{rr} - a C_r - C) r = 0 \qquad (5.26)
\end{gathered}$$

Black-Scholes kismi türevli diferansiyel denklemini elde etmiş oluruz. Şimdi de dC ve dX ifadelerindeki dW kısımlarını $d\hat{W} = \rho dW_1^* + \sqrt{1-\rho^2} dW_2$ korelasyonunu da göz önünde bulundurarak karşılaştıralım:

$$\begin{aligned}
\pi \sigma_s dW_1^* &= C_s S \sigma_s dW_1^* + C_r \sigma_r \sqrt{r} d\hat{W} \\
\pi \sigma_s dW_1^* &= [C_s S \sigma_s + C_r \sigma_r \sqrt{r} \rho] dW_1^* + C_r \sigma_r \sqrt{r(1-\rho^2)} dW_2 \qquad (5.27)
\end{aligned}$$

O halde (5.27) denkleminden de görüldüğü gibi dW_1^* terimlerinin katsayılarını eşitleyebilmek için dW_2 'li olan kısım yani $C_r \sigma_r \sqrt{r(1-\rho^2)}$ 'nin 0 olması gerekmektedir. Fakat $C_r \sigma_r > 0$ ve $dW_2 = z\sqrt{\Delta t} \neq 0$ (z standart normal dağılımlı rassal değişken olmak üzere) olduğundan $\rho = \pm 1$ olmalı ki bu da bizim varsayımımızla yani tam olmayan market olma şartıyla çelişir. Yani sonuç olarak marketimiz tam olmadığından kontratı finanse eden bir portföy π ifadesini elde edemeyiz. Bu durum da zaten tam market olmama şartını destekler. Gerek bu durumdan gerekse (5.26) 'da elde ettiğimiz Black-Scholes kismi türevli diferansiyel denklemi 2 boyutlu olduğundan bu denklemi analitik olarak da nümerik olarak da çözmek oldukça zor. Bu yüzden problemi bilgisayar tabanlı **Monte Carlo Simülasyon** yöntemiyle nümerik olarak çözeceğiz.

BÖLÜM 6

MONTE CARLO SİMÜLASYON YÖNTEMLERİ

Rassal sayılar yardımıyla istatistiksel simülasyonlar Monte Carlo metoduyla yapılır. Monte Carlo, Nicholas Constantine Metropolis (1915-1999) tarafından bulunmuştur ve Stanislaw Ulam tarafından yaygınlaştırılmıştır. Genel olarak Monte Carlo, rassal sayıları yardımıyla tahmini sistemleri modeller. Hücre Simülasyonu, Borsa Modelleri, Opsiyon Fiyatlandırması, Dağılım Fonksiyonları, Sayısal Analiz, Atom ve Moleküler Fiziği, Nükleer Fizik ve Yüksek Enerji Fiziği modellerini test eden simülasyonlar başlıca uygulama alanlarına örnek olarak gösterilebilinir (bakınız [17]). Bu saydığımız modellerde tahminler yapabilmek için rassal sayılar gerekli olduğundan bunun için rassal sayı üreten programı kendimiz yazabileceğimiz gibi bazı paket programların ürettiği rassal sayılar yardımıyla da Monte Carlo simülasyonunu yapabiliriz.

Bu tezde Monte Carlo simülasyon yöntemini Avrupai opsiyonların fiyatlandırmasında kullanacağız. Amerikan opsiyonlarının fiyatlandırılmasındaki kullanımı da benzer olup tezimizde buna değinmeyeceğiz. Monte Carlo simülasyon yöntemi Avrupai opsiyonların hesaplanmasında çok kullanışlı ve kolay bir yöntemdir. Bu yöntem özellikle bazı fiyatlandırma problemlerinde değişken sayısı arttığı durumda daha verimli olmaktadır. Bunun nedeni ise diğer metodlarda değişken sayısının arttığı durumda hesaplamalar üstel olarak artarken, Monte Carlo metodunda ise lineer olarak artmaktadır (bakınız [13]).

Monte Carlo simülasyon yönteminin kullanımı hakkında bazı bilgiler vermek için Y rassal değişkeninin beklenen değerini $E[Y]$ göz önüne alalım. Farzedelim ki beklenen değeri açık bir şekilde hesaplayamıyoruz. Bunun yerine Y rassal değişkeni için beklenen değeri bazı programlarla nümerik metod yardımıyla hesaplayalım. $M :=$ Y rassal değişkenin sayısı olmak üzere bağımsız olan simülasyonlar yardımıyla elde edilmiş olsun. $Y_i :=$ Y rassal değişkeni için simülasyondan elde edilen değeri göstersin. Bu değerlerin (örneklem) ortalaması,

$$\hat{\mu}_Y = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} Y_i \ olsun.$$

Olasılık teorisindeki Büyük Sayılar Yasasını yeterince büyük M sayısı için kullanacak olursak $\hat{\mu}_Y$, Y rassal değişkeninin beklenen değeri $\mu_Y = E[Y]$ için güzel bir yaklaşımdır:

$$E[Y] \approx \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} Y_i$$

O halde eğer varlık sürecinin ve faiz oranının risk-nötr olasılığı altında simülasyonunu yapabilirsek, opsiyonun değerini yaklaşık olarak Monte Carlo metoduyla hesaplayabiliriz. Şimdi $\hat{\mu}_Y$ ifadesinin varyansını bulalım:

$$Var\left[\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} Y_i\right] = \frac{1}{M^2}\sum_{i=1}^{M} Var[Y] = \frac{1}{M} Var[Y] = \frac{1}{M}\sigma_Y^2$$

Bu durumda σ_Y, Y'nin standart sapması olmak üzere standart hata,

$$\frac{1}{\sqrt{M}}\sigma_Y$$

olur (standart hata yaklaşım yapıldığında standart sapma olur). Bu ifadenin anlamı örneğin standart hatayı 10 kat azaltmak için, simülasyon sayısı M'nin 100 katını almak gerekir. Pratikte σ_Y 'nin değeri bilinmez. Ama örneklem (sample) standart sapması ile yaklaşık olarak şu şekilde hesaplanabilir. Farzedelim ki Monte Carlo metodundaki yaklaşık hatayı hesaplamak isitiyoruz. O halde simülasyon sayısı $M = 100$ iken, herbiri için 100 simülasyon yapılan yeterince büyük L (L deneme sayısı olmak üzere) sayısı için, $\hat{\mu} = E[Y]$, deneme sonuçlarının yaklaşık değerleri $E[Y_i] = \hat{\mu}_i$ $(i = 1, 2, ..., L)$ olsun. O halde $\bar{\mu}$, $\hat{\mu}_i$'lerin ortalaması olmak üzere standart hatanın karesi,

$$s_\mu^2 = \frac{1}{L-1}\sum_{i=1}^{L}(\hat{\mu}_i - \bar{\mu})^2$$

formülü yardımıyla yaklaşık olarak hesaplanır. Ayrıca Monte Carlo simülasyon yöntemi dışında iki boyutlu rassal sayıların üretildiği ve simülasyonun yapıldığı durumlar için **Quasi Monte Carlo** yöntemi kullanılır. Örneğin kare üzerinde düzgün dağılım gösteren (U_i, V_i) noktaları yardımıyla simülasyon yapacak olursak, gerçekte düzgün dağılım gösteren bu rassal sayıların kare üzerinde tam karşılıklı olarak düzgün dağılmadığı görülür. Bu durum özellikle rassal sayıların adetinin az olduğu durumda daha fazla göze çarpmaktadır. Bu durumda Monte Carlo simülasyonundaki hatada bir artış meydana gelir. İşte bu sıkıntıyı ortadan kaldırmak için matematikçilerin bulduğu **quasi-rassal sayıları** kullanılılır. Bu sayılar verilen alandaki (aralıktaki, karedeki, küpteki...) boşlukları, mevcut sayıları da göz önüne alarak, düzgün olarak dolduran sayılardır. Ayrıca bu sayılar rassal olmamakla beraber matematiksel metodlar yardımıyla bulunur (bakınız [1], [13]). Bu tezde tek boyutlu rassal sayıları kullanarak simülasyonlar yapacağımızdan tezimizde bunu kullanmayacağız.

6.1 Sürekli Zamanlı Modellerin Ayrık Simülasyonu-Euler Metodu

Bu bölümde Monte Carlo simülasyonunu daha somut olarak nasıl kullanacağımızdan bahsedeceğiz. Simülasyon için herhangi bir paket program (Excel, Matlab, Fortran gibi) kullanmalıyız. Bu tezdeki simülasyonlar için Matlab programından faydalanacağız. İlk olarak sırasıyla risk-nötr ölçüsü altındaki Merton-Black-Scholes dinamiğini ve volatilitenin (veya faiz oranı için de benzer şekilde olabilir) difüzyon sürecini göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} dS(t) &= S(t)[rdt + \sigma(t)dW^*(t)] \\ d\sigma(t) &= \alpha(t, \sigma(t), S(t))dt + \beta(t, \sigma(t), S(t))dW^*(t). \end{aligned}$$

Monte Carlo simülasyon yöntemi bu gibi modeller için çok uygundur. Çünkü bu yöntemde stokastik volatilitenin analitik çözümünü bilmemiz gerekmemektedir. Ayrıca ikinci rassal değişken olan σ, binom modeli (ağacı) ve KTDD yakınsamasının verimliliğini azaltmaktadır. Şimdi farzedelim ki α ve β fonksiyonlarının çözümü tek, S ve σ pozitif süreçler olmak üzere yukarıdaki denklemlerin çözümü (S, σ) olsun. Bu bilgiler yardımıyla şimdi nasıl simülasyon yapacağımızı anlatalım. Tezimizde Monte Carlo simülasyon yöntemini opsiyon fiyatlandırması için kullanacağımızdan, vadesi T olan opsiyonu göz önüne alalım. Bu zaman aralığını yani $[0, T]$ 'yi $\{t_k \mid t_0 = 0, t_N = T,\ k = 0, 1, 2, ..., N\}$ olmak üzere N eşit periyoda bölelim :

$$\Delta t = \frac{T}{N}\ .$$

Ayrıca Brown hareketinin tanımını da göz önünde bulundurarak standart normal rassal değişkeni $z_k,\ k = 1, ..., N$ olarak gösterelim. Brown hareketindeki artışın, ortalaması 0 ve varyansı Δt olan W^* standart normal rassal değişken için, $\Delta W^*(t_k) = W^*(t_{k+1}) - W^*(t_k)$ olduğunu daha önceden belirtmiştik. Sonuç olarak $W^*(t_k)$ değerlerinden oluşan dizi ile $\sqrt{\Delta t} z_k$ değerlerinden oluşan dizi aynı dağılıma sahiptir. Bu durumda Merton-Black-Scholes dinamiğinin simülasyonu,

$$S(t_{k+1}) = S(t_k) + S(t_k)[r\Delta t + \sigma(t_k)\sqrt{\Delta t} z_k]$$

olarak yapılır ve benzer şekilde bu değerler yardımıyla da stokastik volatilitenin simülasyonu da

$$\sigma(t_{k+1}) = \sigma(t_k) + \alpha(t_k, \sigma(t_k), S(t_k))\Delta t + \beta(t_k, \sigma(t_k), S(t_k))\sqrt{\Delta t} z_k$$

olarak yapılır. İşte bu yönteme sürekli zamanlı modellerde **Euler Metodu** denir. Bu işlem sonucunda grafiksel olarak örnek yol veya değişim eğrisi olarak ifade edilen sadece bir eğriyi elde etmiş olacağız. Yani bir simülasyonun $[0, T]$ aralığındaki değişimini görmüş olacağız. Hata payını minimuma indirmek için simülasyon sayısının çok olması gerekmektedir. İşte bu yüzden yukarıdaki simülasyonu M kere tekrarlayacak olursak, bu durumda T vaktinde M tane $S^i(T),\ i = 1, ..., M$ opsiyon değeri bulunacaktır. Herbir yol için i=1,...,N ve de k=1,...,M olmak üzere yeni bir standart normal rassal değişken z_k^i elde etmemiz gerekmektedir. Şimdi de opsiyonun T vaktindeki ödemesi $g(S(T))$ olan fonksiyonu göz önüne alalım. Büyük sayılar yasasından dolayı opsiyonun değerini yaklaşık olarak,

$$C(0) = E^*[e^{-rT} g(S(T))]$$

formülü yardımıyla bulabiliriz. Ortalama olarak da

$$\hat{C}(0) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{M} e^{-rT} g(S^i(T))$$

formülü ile bulunabilinir. Eğer opsiyon fiyatının yaklaşık değerini Monte Carlo simülasyonu ile bulmak yerine Black-Scholes kismi türevli diferansiyel denklemini çözerek bulmak istersek, tek çözümü $C(t, s, \sigma)$ fonksiyonu olan

$$C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 C_{ss} + \frac{1}{2}\beta^2 C_{\sigma\sigma} + s\sigma\beta C_{s\sigma} + \alpha C_\sigma + r(sC_s - C) = 0, \quad C(T, s(T), \sigma(T)) = g(s(T), \sigma(T))$$

kismi türevli diferansiyel denklemi yardımıyla opsiyon fiyatının bulunması gerekir.
Monte Carlo simülasyonunda verimlilik açısından önemli ve dikkat edilmesi gereken noktalardan biri de simülasyon sayısı M ile zaman aralığının sayısı yani periyot sayısı N arasındaki ilişkidir. Daha önceden standart hatayı anlatırken belirttiğimiz gibi standart hata $\sqrt{M}$ ile ters orantılıdır. Herbir periyot için bu hata minimuma indirilmek istendiğinden, birinci mertebeden Euler metodunda; simülasyon sayısı M, periyot sayısı N 'nin karesi kadar olması gerekmektedir (bakınız [1], [13]).

6.2 Milstein Metodu

Euler metodunu Taylor açılımı yardımıyla inceleyecek olursak, bu Euler yaklaşımının sürüklenme katsayısı olan kısmı $O(h) = \Delta t$ olarak genişlerken, difüzyon kısmı ise sadece $O(\sqrt{h})$ olarak genişleme yapacağı görülür. Bu durumda difüzyon kısmındaki yaklaşımda $O(h)$ 'ın katkısının göz ardı edildiği söylenebilir. Bu yüzden sürüklenme katsayısındaki h mertebeli kısım etkisini kaybetmiş olur. Euler metodunu daha sade ve tutarlı hale getirebilmek için difüzyon katsayısındaki kısma odaklanmak gerekir.
Aşağıdaki stokastik diferansiyel denklemi sağlayan X sürecini göz önüne alalım.

$$dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t) \tag{6.1}$$

Bu stokastik diferensiyel denkleme, $Z_1, Z_2, ..., Z_m$ birbirinden bağımsız m-boyutlu standart normal rassal vektör olmak üzere, ayrıca $\hat{X}$; $0 = t_0 < t_1 < .... < t_m$ zaman aralıklarında X'e olan yaklaşımı göstermek üzere ($\hat{X}(0) = X(0)$) $i = 0, 1, ..., m-1$ için Euler metodunu uygulayacak olursak

$$\hat{X}(t_{i+1}) = \hat{X}(t_i) + a(\hat{X}(t_i))[t_{i+1} - t_i] + b(\hat{X}(t_i))\sqrt{t_{i+1} - t_i}Z_{i+1} \tag{6.2}$$

ifadesini elde ederiz.
Yukarıda bahsettiğimiz analizi $m = 1$ durumu için ve (6.1) stokastik diferansiyel denkleminin

$$X(t) = X(0) + \int_0^t a(X(u))du + \int_0^t b(X(u))dW(u) \tag{6.3}$$

formunu göz önüne alarak yapacağız. Euler yaklaşımından sürüklenme katsayısı olan kısım

$$\int_t^{t+h} a(X(u))du \approx a(X(t))h \tag{6.4}$$

ve difüzyon kısmı ise

$$\int_t^{t+h} b(X(u))dW(u) \approx b(X(t))[W(t+h) - W(t)] \tag{6.5}$$

olur. İki durumda da $[t, t+h]$ değişim aralığındaki integraller, yaklaşık olarak t noktasında aldıkları değerlere eşittirler. Yukarıda belirttiğimiz nedenden dolayı difüzyon kısmının yakınsamasını geliştirmek için, $b(X(u))$ ifadesine $[t, t+h]$ değişim aralığında daha iyi bir yaklaşımda bulunmamız gerekir. Böylece $b(X(u))$ ifadesinin açılımının tutarlılığını da sınamış oluruz. Şimdi ilk olarak $b(X(t))$ ifadesine Itô kuralını uygulayalım :

$$\begin{aligned} db(X(t)) &= b^{'}(X(t))dX(t) + \frac{1}{2}b^{''}(X(t))dX(t)dX(t) \\ &= [b^{'}(X(t))a(X(t)) + \frac{1}{2}b^{''}(X(t))b^2(X(t))]dt + b^{'}(X(t))b(X(t))dW(t) \\ &\equiv \mu_b(X(t))dt + \sigma_b(X(t))dW(t) \end{aligned}$$

Şimdi de elde edilen bu stokastik diferansiyel denkleme yani $b(X(t))$ sürecine Euler yaklaşımını uygulayarak $t \leq u \leq t+h$ için $b(X(u))$ yaklaşımını elde edelim :

$$\begin{aligned} b(X(u)) &\approx b(X(t)) + \mu_b(X(t))[u-t] + \sigma_b(X(t))[W(u) - W(t)] \\ &= b(X(t)) + \big(b^{'}(X(t))a(X(t)) + \frac{1}{2}b^{''}(X(t))b^2(X(t))\big)[u-t] \\ &+ b^{'}(X(t))b(X(t))[W(u) - W(t)] \end{aligned}$$

Bu durumda $W(u) - W(t)$ olasılıksal olarak 1/2 mertebeli $O(\sqrt{u-t})$ ile orantılı olarak değişmekte iken sürüklenme katsayısı olan kısım ise 1 mertebeli $O(u-t)$ ile orantılı olarak değişmektedir. Yüksek mertebeli olan kısmı göz ardı edecek olursak,

$$b(X(u)) \approx b(X(t)) + b^{'}(X(t))b(X(t))[W(u) - W(t)], \quad u \in [t, t+h]. \tag{6.6}$$

böylelikle $b(X(u))$ için daha sade bir ifade elde etmiş oluruz. Bu sadeleştirmedeki amaç (6.5)'teki ifadeyi daha sade halde yazmaktır. O halde (6.5) ifadesinde ki $b(X(u))$ yerine (6.6)'da elde ettiğimiz yaklaşımı kullanalım.

$$\begin{aligned} \int_t^{t+h} & b(X(u))dW(u) \\ &\approx \int_t^{t+h} \big(b(X(t)) + b^{'}(X(t))b(X(t))[W(u) - W(t)]\big)dW(u) \\ &= b(X(t))[W(t+h) - W(t)] \\ &\quad + b^{'}(X(t))b(X(t))\left(\int_t^{t+h}[W(u) - W(t)]dW(u)\right) \end{aligned} \tag{6.7}$$

Bu ifadeyi (6.2)'deki gibi daha kullanışlı ve sade hale getirmek için (6.7)'deki integralli kısmı da sadeleştirmemiz gerekmektedir. Bu integrali şu şekilde yazabiliriz :

$$\int_t^{t+h}[W(u) - W(t)]dW(u) = \int_t^{t+h} W(u)dW(u) - W(t)\int_t^{t+h} dW(u) \tag{6.8}$$

Daha kolay bir yazım elde etmek için Y(t) fonksiyonunu

$$Y(t) := \int_0^t W(u)dW(u), \quad Y(0) = 0$$

stokastik integral olarak tanımlayalım. Bu durumda $dY(t) = W(t)dW(t)$ stokastik diferansiyel denklemi elde edilir. Bu stokastik diferansiyel denklemin çözümü ise $Y(t) = \frac{1}{2}W(t)^2 - \frac{1}{2}t$ 'dir. Bu bilgiler ışığı altında (6.8)'deki ifadeyi gerekli düzenlemeleri yaparak yeniden ifade edelim :

$$\begin{aligned} \int_t^{t+h}[W(u) - W(t)]dW(u) &= \int_t^{t+h} W(u)dW(u) - W(t)\int_t^{t+h} dW(u) \\ &= Y(t+h) - Y(t) - W(t)[W(t+h) - W(t)] \\ &= \frac{1}{2}[W(t+h) - W(t)]^2 - \frac{1}{2}h \end{aligned} \tag{6.9}$$

Bu eşitliği (6.7)'de yerine yazacak olursak,

$$\begin{aligned}\int_t^{t+h} b(X(u))dW(u) &\approx b(X(t))[W(t+h)-W(t)] \\ &\quad +\frac{1}{2}b^{'}(X(t))b(X(t))\left([W(t+h)-W(t)]^2-h\right) \qquad (6.10)\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak bu yaklaşımı $X(t+h)$'a yaklaşımda kullanacağız. Böylece Euler yaklaşımını bir adım daha geliştirmiş olduk. $X(t+h)$ için Euler yaklaşımı,

$$X(t+h) \approx X(t) + a(X(t))h + b(X(t))[W(t+h)-W(t)].$$

Milstein 'in 1974 te (Bakınız [13], [14]) bulduğu ve geliştirdiği **Milstein yaklaşım metodu**,

$$\begin{aligned}X(t+h) &\approx X(t) + a(X(t))h + b(X(t))[W(t+h)-W(t)] \\ &\quad +\frac{1}{2}b^{'}(X(t))b(X(t))\left([W(t+h)-W(t)]^2-h\right). \qquad (6.11)\end{aligned}$$

Simülasyonda bu algoritma, sırasıyla $h, 2h, 3h...$ zaman aralıkları için tekrarlanırken, W Brown hareketinin artışı yerine $\sqrt{h}Z_{i+1}$ alınır. Yani sonuç olarak simülasyon için yazılacak algoritma,

$$\begin{aligned}\hat{X}(i+1) &= \hat{X}(i) + a(\hat{X}(i))h + b(\hat{X}(i))\sqrt{h}Z_{i+1} \\ &\quad +\frac{1}{2}b^{'}(\hat{X}(i))b(\hat{X}(i))h(Z_{i+1}^2-1)\ dir. \qquad (6.12)\end{aligned}$$

Sonuç olarak Milstein metodunda, Euler yaklaşım metoduna bir terim eklenerek sürüklenme katsayısı olan kısım ile difüzyon kısmı $O(h)$ ile orantılı olarak değişmektedirler. Ayrıca bu eklenen yeni terimin $\frac{1}{2}b^{'}(\hat{X}(i))b(\hat{X}(i))h(Z_{i+1}^2-1)$ ortalaması 0 olup Euler metodundaki kısım ile aralarında korelasyon yoktur. Çünkü Z_{i+1}^2-1 ile Z_{i+1} arasında korelasyon yoktur. Bu durumu kovaryans tanımını ve Brown hareketinin özelliklerini göz önünde bulunudurarak gösterelim :

$$E[\{(Z_{i+1}^2-1)-0\}\{Z_{i+1-}-0\}] = E[Z_{i+1}^3-Z_{i+1}] = E[Z_{i+1}^3]-E[Z_{i+1}] = 0$$

Korelasyon tanımından Z_{i+1}^2-1 ile Z_{i+1} arasında korelasyonun olmadığı açıktır. Ayrıca Milstein metodunun $\mathcal{R}^d$ gibi çok boyutlu durumları da mevcuttur, fakat tezimizde bunlara değinmeyeceğiz (bakınız [13], [14]).

6.3 Yakınsama Hızı

Bir önceki kısımda ifade ettiğimiz (6.12) eşitliğinden de görüldüğü gibi Euler metodunun geliştirilmesinde difüzyon kısmındaki $O(\sqrt{h})$ yerine $O(h)$ olarak bir genişleme olmuştur. Bu genişlemenin faydasını ve hangi açıdan algoritmayı geliştirdiğini anlamak için ayrıklaştıma yöntemlerini karşılaştırıp aradaki önemi anlamalıyız. Ayrık metodlarda yaklaşımdaki hata paylarının karşılaştırması genel olarak iki kategoride incelenmektedir. Biri dağılıma bağlı olarak yakınsamayı incelerken diğeri sürekli süreçlere yol (pathwise) bazında ayrık süreçler yardımıyla yakınsamayı inceler. Bunlar sırasıyla güçlü ve zayıf yakınsama kriterleridirler.

Farzedelim ki X sürekli zamanlı sürecine herhangi bir $\{\hat{X}(0), \hat{X}(h), \hat{X}(2h)...\}$ ayrık zamanlı süreciyle yaklaşımda bulunalım. Ayrıca zamanı T olarak sabitleyelim ve de $n = [T/h]$ olsun. Bu durumdaki güçlü hata kriterleri ise bir $\|.\|$ vektör normu için

$$E[\|\hat{X}(nh) - X(T)\|], \quad E[\|\hat{X}(nh) - X(T)\|^2]$$

ve

$$E\left[\sup_{0\leq t\leq T} \|\hat{X}(\lfloor t/h \rfloor h) - X(t)\|\right]$$

şeklindedirler. Bu ifadelerin hepsi asıl X değerleri ve bu değerlere yapılan yaklaşım sonucunda elde edilen $\hat{X}$ değerleri arasındaki standart hatayı ölçmektedirler.

Bu durumun zıttı olarak $\mathcal{R}^d$'den $\mathcal{R}$'ye tanımlanan ve genel olarak bazı koşulları (smoothness) sağlayan f fonksiyonu ile zayıf hata kriteri ise

$$\left|E[f(\hat{X}(nh))] - E[f(\hat{X}(T))]\right| \tag{6.13}$$

formundadır. Burada gerekli olan $\hat{X}(nh)$ ve $X(T)$ arasındaki bağıntıda herhangi bir kısıtlama olmaksızın, h azalarak sıfıra giderken (6.13)'teki ifadenin de sıfıra yakınsamasıdır. Buradaki bir diğer husus ise $\hat{X}(nh)$ ve $X(T)$ 'nin aynı olasılık uzayında olması diye bir şart söz konusu değildir. (6.13)'teki hata payını minimize etmek için $\hat{X}(nh)$ ve $X(T)$'nin dağılımlarının birbirine yakın olması gerekmektedir. Opsiyon fiyatlandırma uygulamalarında genellikle zayıf hata kriteri amaca uygun olup, en fazla kullanılandır. Genel olarak yapılan yaklaşımda $\hat{X}$ yardımıyla hesapladığımız opsiyon değerinin X yardımıyla hesaplanan opsiyon değerine yakın bir değer olmasını isteriz.

Belli bir problem hakkında yeterince küçük h değeri için yöntemlerin asimptotik performanslarını karşılaştırmak yerine, hangi hata kriterini kullanacağımızı belirledikten sonra kullandığımız ayrık metottaki hata payı ile başka herhangi bir ayrık metod ile elde edilecek hata paylarını karşılaştırma şansımız olacaktır. Bazı genel şartlar altında, Euler metodu gerek zayıf gerekse güçlü hata kriteri baz alınsın her iki durumda da h azalarak sıfıra giderken, hata payı da benzer şekilde sıfıra gitmektedir. Ayrıca ayrık metodların yakınsamaları, yakınsama hızlarına bakarak da kıyaslanır. Şimdi farzedelim ki $\hat{X}$'ın ayrıklaştırması, güçlü yakınsama hızına sahip olsun ve bu değer $\beta > 0$ ile gösterilsin. Bu durumda bir c sabiti ve yeterince küçük h için

$$E\left[\|\hat{X}(nh) - X(T)\|\right] \leq ch^{\beta} \tag{6.14}$$

olur (bakınız [13], [15]). Zayıf yakınsama hızına β sahip olan ayrıklaştırma metodu için ise bazı c (f ye bağımlı olabilir) sabitleri, yeterince küçük h ve $\mathcal{C}_p^{2\beta+2}$ kümesindeki tüm f fonksiyonları için

$$\left|E[f(\hat{X}(nh))] - E[f(X(T))]\right| \leq ch^{\beta} \tag{6.15}$$

olur (bakınız [13], [15]). Buradaki $\mathcal{C}_p^{2\beta+2}$: $\mathcal{R}^d$'den $\mathcal{R}$'ye tanımlanan ve $0, 1, ..., 2\beta + 2$ mertebeden türeve sahip olan polinomsal sınırlı (polynomially bounded) fonksiyonlardan oluşmaktadır. Yani eğer $g : \mathcal{R}^d \to \mathcal{R}$ fonksiyonu polinomsal sınırlı ise, bazı k ve q sabitleri ve her $x \in \mathcal{R}^d$ için

$$|g(x)| \leq k(1 + \|x\|^q)$$

şartını sağlamalıdır. Gerek (6.14)'teki ifadede gerekse (6.15)'teki ifadede daha büyük β değeri ayrıklaştıma metodundaki hatanın daha hızlı olarak sıfıra yakınsaması anlamına gelmektedir. Aynı metodlarda genel olarak güçlü yakınsama hızları, zayıf yakınsama hızlarına göre daha küçük olur. Örneğin, Euler metodunda genellikle güçlü yakınsama hızının mertebesi 1/2 iken, zayıf yakınsama hızının mertebesi ise 1 dir (bakınız [15]).
Gerek Kloeden ve Platen'in gerekse Talay'ın teoremlerinden de anlaşılacağı gibi (6.12) eşitliğinde ifade ettiğimiz Milstein metodunun sadeleştirmesinin ve bu metodun yüksek boyutlu genelleştirmesinin güçlü yakınsama hızı 1 dir (bakınız [15], [16]).

Yukarıda belirttiğimiz gibi Euler metodunun ve Milstein metodunun güçlü yakınsama hızları sırasıyla 1/2 ve 1 dir. Yani Milstein metodundaki hata Euler metodundaki hataya göre daha hızlı bir şekilde sıfıra yakınsadığından gerçek sonuca daha kısa sürede yaklaşım yapmak için; bir sonraki bölümde Monte Carlo Simülasyon Yöntemini örnek probleme uygularken yapacağımız simülasyonlarda Euler metodu yerine Milstein metodunu kullanacağız.

6.4 Örnek Probleme Uygulanışı ve Simülasyon Sonuçları

Gerçek marketler tam market özelliklerini taşımazlar aksine tam olmayan market özelliklerini taşırlar. İşte bu yüzden bu bölümde şimdiye kadar elde ettiğimiz bilgiler yardımıyla hisse senedi için 3. bölümde anlattığımız Black-Scholes modelini (P^* ölçüsü altında) ve faiz oranı için ise 5. bölümde anlatığımız CIR faiz oranı modelini kullanacağız. Ve bu modeller yardımıyla tam olmayan marketlerde rassal faiz oranı altında Monte Carlo Simülasyon yönteminde Milstein ayrıklaştırma metodunu da kullanarak Avrupai opsiyonlar için alım opsiyonunun değerini bulacağız. Ayrıca bulduğumuz bu alım opsiyonunun değerinin kullandığımız modellerin bazı parametreleri için duyarlılık analizlerini yapıp, yorumlayacağız. Örneğin hisse senedi volatilitesinin σ_s veya faiz oranın volatilitesinin σ_r değişiminin alım opsiyonu üzerindeki etkisi, CIR faiz oranı modelindeki b değerinin değişiminin alım opsiyonu üzerindeki etkisini, hisse senedi ile faiz oranı arasındaki korelasyon katsayısı ρ'nun değişiminin alım opsiyonu üzerindeki etkisini araştırıp, elde edilen verileri grafik ve tablolar yardımıyla yorumlayacağız.

Diğer taraftan Avrupai opsiyonlardaki satım opsiyonu veya Amerikan opsiyonlardaki alım veya satım opsiyonları için de benzer analizler yapılabilinir fakat tezimizde bunlara değinmeyeceğiz. Ayrıca bu tezde yapacağımız tüm simülasyonlar ve analizler için Matlab programından faydalanacağız.
Bu bölümde ele alacağımız örnek problemde hisse senedi için;

$$dS(t) = S(0)[rdt + \sigma_s dW_1^*(t)]$$

faiz oranı için CIR model;

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma_r \sqrt{r(t)} d\hat{W}$$

hisse senedi ve faiz oranı arasındaki korelasyon için ise

$$d\hat{W} = \rho dW_1^* + \sqrt{1-\rho^2}dW_2, \qquad \rho \neq \pm 1$$

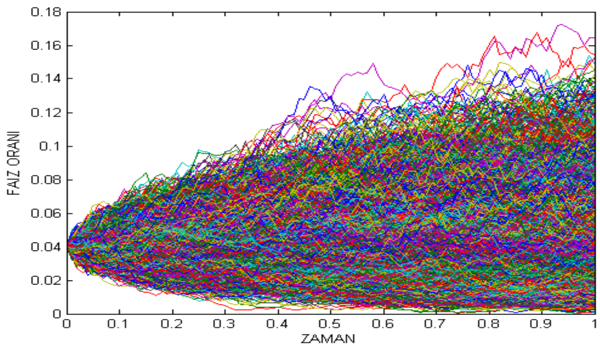
stokastik diferansiyel denklemlerini kullanacağız. Simülasyonda ise bu modellere Milstein ayrıklaştırma metodu uygulayarak elde edilecek olan ayrık formlarını kullanacağız.

PROBLEM: X firmasıyla 0.04 başlangıç faiz oranı üzerinden bugünkü değeri 10 TL ve kullanma fiyatı 12 TL olan hisse senedi için 1 yıl vadeyle Avrupai alım opsiyonu kontratı yapalım. Bu durumda X firması ile vadesi 1 yıl olan Avrupai alım opsiyonu için yapılacak olan kontratın değerini (fair price) bulalım.

Simülasyonda kullanılacak veriler : Bu parametreler simülasyon özellikleri (verimliliği v.s) ve finans piyasasındaki değerler göz önünde bulundurularak seçilmiştir.

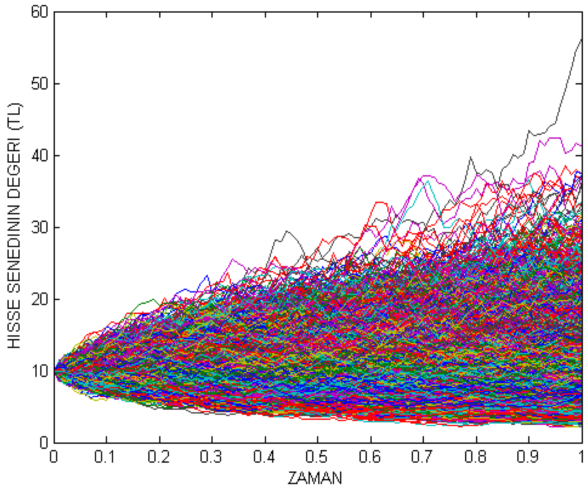
$S(0) = 10$ TL (hisse senedinin bugünkü değeri)
$K = 12$ TL (kullanma fiyatı)
$r(0) = 0.04$ (başlangıç faiz oranı)
$\sigma_s = 0.4$ (hisse senedinin volatilitesi)
$\sigma_r = 0.04$ (faiz oranının volatilitesi)
$a = 0.2$ (CIR modelde ortalamaya dönüş hızı)
$b = 0.08$ (CIR modeldeki uzun vadedeki faiz oranı)
$\rho = 0.2$ (korelasyon katsayısı)
$T = 1$ yıl (vade)
$N = 10000$ (simülasyon sayısı)
$n = 100$ (periyot sayısı)
$\Delta t = \frac{1}{100}$ (her bir periyot arasındaki zaman farkı)

Bu problem için yukarıdaki verilerden de anlaşılacağı gibi 1 yılı 100 periyoda bölerek belirtilen değerler yardımıyla 10000 simülasyon ile 1 yıl vadeli Avrupai alım opsiyonunun değerini bulacağız. Gerekli Matlab kodları yazıldığında rassal faiz oranı için simülasyon sonucu :



Şekil 6.1: Faiz Oranı Simülasyonu

Bu grafikten de görüleceği gibi faiz oranı $T = 1$ 'de 0.04 değerinin üzerinde yığılma daha fazla olduğundan faiz oranı artış eğilimi göstermektedir.
Benzer şekilde hisse senedi için ise simülasyon sonucu :



Şekil 6.2: Hisse Senedi Simülasyonu

Simülasyon sonucundan da görüleceği gibi $T = 1$ 'deki olası hisse senedi fiyatı 10 TL değerinin üzerinde daha fazla yığılma olduğundan hisse senedinin değeri genel olarak artış eğilimi göstermektedir bu da yukarıda bahsettiğimiz faiz oranının artış eğilimi içerisinde olmasını destekleyen bir sonuçtur. O halde önceki bölümlerde bahsettiğimiz yöntemler yardımıyla yani $T = 1$ 'deki hisse senedi değerleri için $K = 12$ TL kullanım fiyatını da göz önünde bulundurarak $[S(T)-K]^+$ ifadesinin bugünkü değerlerinin ortalaması bulunarak alım opsiyonunun değeri bulunur. Gerekli işlemler yapıldığında (Matlab yardımıyla) alım opsiyonunun değeri 1.0963 TL olarak bulunur. Bunun anlamı 1 yıl vadeli hisse senedinin 12 TL kullanım hakkına sahip olmak için yapılacak kontratın değeri 1.0963 TL'dir. Market tam olmadığı için anlaşma olmayabilir. Eğer bir anlaşma yapılacak ise simülasyon sonucunda bulunan bu değer, her iki tarafın da üzerinde anlaşacağı veya anlaşması mümkün olan fiyattır.

Sonuç olarak bu kontrat alıcıya bir fayda sağlayabileceği gibi satıcı için de bir fayda sağlayabilir. Öyle ki eğer $T = 1$ de hisse senedinin değeri finans marketlerinde 12 TL 'den fazla ise alım opsiyonunun sahibi; kullanım fiyatından kontratı yaptığı firmadan hisse senedini satın alabileceği (alıcı için fayda durumu) gibi $T = 1$'de hisse senedinin değeri finans marketlerinde 12 TL 'den daha az ise kontratta herhangi bir zorunluluk olmadığı için piyasadan daha ucuz değerden hisse senedini alabilir (satıcı için fayda durumu). Satıcı için risk durumu daha fazla olduğundan kendini finanse edecek başka yatırımları da göz önünde bulundurması gerekir. İşte bu yüzden simülasyon sonucunda bulunan bu değer (fair price) satıcıya güzel bir fikir verir.
Şimdi de sırasıyla korelasyon katsayısı ρ, hisse senedinin volatilitesi σ_s, faiz oranı volatilitesi σ_r ve uzun vadeli faiz oranı b gibi model parametreleri için duyarlılık analizlerini yapalım.

<u>DUYARLILIK ANALİZİ</u>

1-) Hisse senedi ve faiz oranı arasındaki korelasyon katsayısı ρ 'nun Avrupai alım opsiyonunun fiyatına olan etkisi nedir ?

Bu analizi yapabilmek için simülasyonda kullanacağımız şu parametreleri göz önünde bulunduralım:

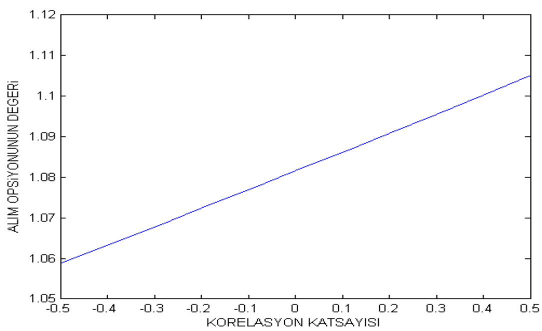
S(0)	K	r(0)	σ_s	σ_r	a	b	T	N	n	Δt
10	12	0.04	0.4	0.12	0.2	0.08	1	10000	100	$\frac{1}{100}$

Bu parametreler yardımıyla ve sırasıyla $\rho = \{-0.5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ değerleri için simülasyon yapıldığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

ρ	C_0
-0.5	1.0588
-0.4	1.0633
-0.3	1.0678
-0.2	1.0723
-0.1	1.0769
0	1.0815
0.1	1.0862
0.2	1.0909
0.3	1.0956
0.4	1.1003
0.5	1.1051

Şekil 6.3: Korelasyon Katsayısı - Alım Opsiyonu

Yukarıdaki tablodan da görüldüğü gibi Avrupai alım opsiyonunun değeri, hisse senedi ve rassal faiz oranı arasındaki korelasyona bağımlı olarak artmaktadır. Simülasyon sonucunda alım opsiyonu ve korelasyon katsayısı grafiğini inceleyelim :



Şekil 6.4: Korelasyon Katsayısı - Alım Opsiyonu

Duyarlılık analizinin ilk sonucu; yukarıdaki grafikten de görüldüğü gibi alım opsiyonunun değeri korelasyon katsayısına bağımlı ve eğrisel olarak artmaktadır. Yukarıdaki grafikten bu artış her ne kadar lineer bir artış gibi görünsede, ρ 'lar arasındaki fark 0.1 değil de 0.2 v.s olarak seçildiğinde artışın eğrisel olarak olduğu daha net bir şekilde görülecektir.

2-) Hisse senedi volatilitesi σ_s 'nin Avrupai alım opsiyonunun fiyatına olan etkisi nedir ?

Bu analizi yapabilmek için simülasyonda kullanacağımız şu parametreleri göz önünde bulunduralım:

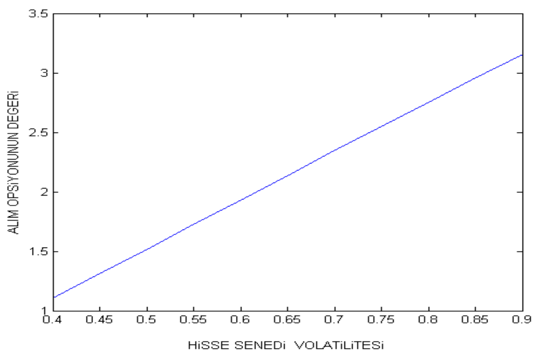
S(0)	K	r(0)	ρ	σ_r	a	b	T	N	n	Δt
10	12	0.04	0.2	0.12	0.2	0.08	1	10000	100	$\frac{1}{100}$

Bu parametreler yardımıyla ve sırasıyla $\sigma_s = \{0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.6, 0.65, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9\}$ değerleri için simülasyon yapıldığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

σ_s	C_0
0.4	1.0963
0.45	1.3009
0.5	1.5069
0.55	1.7136
0.6	1.9207
0.65	2.1277
0.7	2.3343
0.75	2,5405
0.8	2.7460
0.85	2.9509
0.9	3.1548

Şekil 6.5: Hisse Senedi Volatilitesi - Alım Opsiyonu

Yukarıdaki tablodan da görüldüğü gibi Avrupai alım opsiyonunun değeri, hisse senedinin volatilitesine bağımlı olarak artmaktadır. Simülasyon sonucunda alım opsiyonu ve hisse senedi volatilitesi grafiğini inceleyelim :



Şekil 6.6: Hisse Senedi Volatilitesi - Alım Opsiyonu

Duyarlılık analizinin ikinci sonucu; yukarıdaki grafikten de görüldüğü gibi alım opsiyonunun değeri hisse senedi volatilitesine bağımlı ve eğrisel olarak artmaktadır (Benzer şekilde σ_s 'ler arasındaki fark 0.05 değil de 0.3 v.s olarak seçildiğinde artışın eğrisel olarak olduğu daha net bir şekilde görülecektir).

3-) Faiz oranı volatilitesi σ_r 'nin Avrupai alım opsiyonunun fiyatına olan etkisi nedir ?

Bu analizi yapabilmek için simülasyonda kullanacağımız şu parametreleri göz önünde bulunduralım:

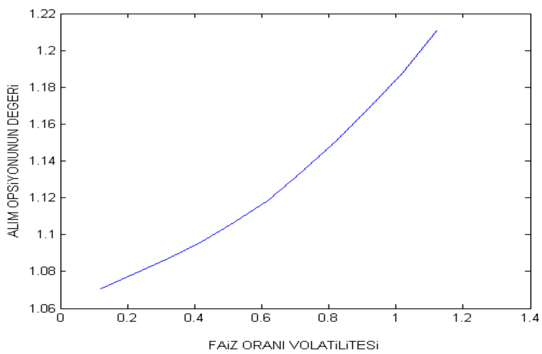
S(0)	K	r(0)	ρ	σ_s	a	b	T	N	n	Δt
10	12	0.04	0.2	0.4	0.2	0.08	1	10000	100	$\frac{1}{100}$

Bu parametreler yardımıyla ve sırasıyla $\sigma_r = \{0.12, 0.22, 0.32, 0.42, 0.52, 0.62, 0.72, 0.82, 0.92, 1.02, 1.12\}$ değerleri için simülasyon yapıldığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

σ_r	C_0
0.12	1.0707
0.22	1.0787
0.32	1.0868
0.42	1.0959
0.52	1.1068
0.62	1.1189
0.72	1.1342
0.82	1.1503
0.92	1.1683
1.02	1.1878
1.12	1.2105

Şekil 6.7: Faiz Oranı Volatilitesi - Alım Opsiyonu

Yukarıdaki tablodan da görüldüğü gibi Avrupai alım opsiyonunun değeri, faiz oranının volatilitesine bağımlı olarak artmaktadır. Simülasyon sonucunda alım opsiyonu ve faiz oranı volatilitesi grafiğini inceleyelim :



Şekil 6.8: Faiz Oranı Volatilitesi - Alım Opsiyonu

Duyarlılık analizinin üçüncü sonucu; yukarıdaki grafikten de görüldüğü gibi alım opsiyonunun değeri faiz oranı volatilitesine bağımlı ve σ_r 'ler arasındaki fark 0.05 değil de 0.1 olarak seçildiğinden artışın eğrisel olduğu rahatlıkla görülmektedir.

4-) CIR modelindeki uzun vadeli faiz oranı b 'nin Avrupai alım opsiyonunun fiyatına olan etkisi nedir ?

Bu analizi yapabilmek için simülasyonda kullanacağımız şu parametreleri göz önünde bulunduralım:

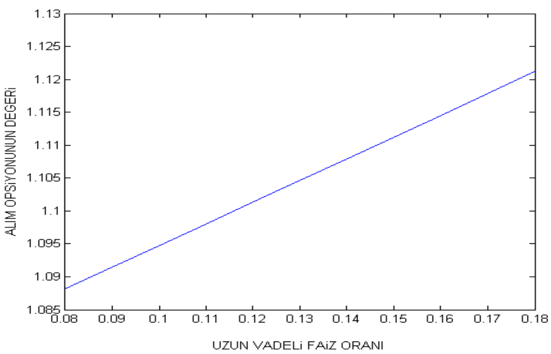
S(0)	K	r(0)	ρ	σ_r	σ_s	a	T	N	n	Δt
10	12	0.04	0.2	0.12	0.4	0.2	1	10000	100	$\frac{1}{100}$

Bu parametreler yardımıyla ve sırasıyla $b = \{0.08, 0.09, 0.1, 0.11, 0.12, 0.13, 0.14, 0.15, 0.16, 0.17, 0.18\}$ değerleri için simülasyon yapıldığında aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

b	C_0
0.08	1.0868
0.09	1.0901
0.1	1.0934
0.11	1.0967
0.12	1.1000
0.13	1.1034
0.14	1.1067
0.15	1.1100
0.16	1.1133
0.17	1.1167
0.18	1.1200

Şekil 6.9: Uzun Vadeli Faiz Oranı - Alım Opsiyonu

Yukarıdaki tablodan da görüldüğü gibi Avrupai alım opsiyonunun değeri, CIR modelindeki uzun vadeli faiz oranı b 'ye bağımlı olarak artmaktadır. Simülasyon sonucunda alım opsiyonu ve uzun vadeli faiz oranı grafiğini inceleyelim :



Şekil 6.10: Uzun Vadeli Faiz Oranı - Alım Opsiyonu

Duyarlılık analizinin dördüncü sonucu; yukarıdaki grafikten de görüldüğü gibi alım opsiyonunun değeri uzun vadeli faiz oranına bağımlı ve eğrisel olarak artmaktadır (Benzer şekilde b 'ler arasındaki fark 0.01 değil de 0.4 v.s olarak seçildiğinde artışın eğrisel olarak olduğu daha net bir şekilde görünecektir).

BÖLÜM 7

SONUÇLAR

6. bölümde ele aldığımız problemden de anlaşılacağı gibi finans piyasasında karşımıza çıkabilecek olan standart veya kompleks opsiyonlar için her iki tarafında üzerinde anlaşabileceği fiyatı (fair price) bulmak kolay bir iş değildir. İşte bu yüzden hisse senedi için ele aldığımız Black-Scholes modeli, faiz oranı için ele aldığımız CIR faiz oranı modelinin yanısıra hisse senedi ve faiz oranı arasındaki korelasyonu da göz önünde bulundurarak elde ettiğimiz bu matematiksel ifadeleri analitik olarak çözmenin mümkün olmadığını ve bu problemin Monte Carlo simülasyon yöntemi ile çözülebileceğini ilgili teoremler ışığı altında göstermiş olduk.
Simülasyon sonuçlarından da anlaşılacağı gibi alım opsiyonunun değeri hisse senedinin volatilitesi σ_s, faiz oranının volatilitesi σ_r, CIR modelindeki uzun vadeli faiz oranı b 'ye ve korelasyon katsayısı ρ 'ya bağımlı olarak eğrisel bir artış göstermektedir. Örneğin korelasyon katsayısı ρ'nun artışı genel olarak faiz oranında bir artışa neden olur. Dolayısıyla hisse senedinin fiyatında da bir artış meydana getirir. Bu durumda alım opsiyonunun değeri de artış gösterir. Bir diğer durum olarak faiz oranının volatilitesindeki artış ise, faiz oranında bir artışa sebebiyet vereceğinden hisse senedinin ve dolayısıyla da alım opsiyonunun değerinin artışına neden olur.
O halde tam olmayan marketlerde alış-veriş yaparaken bu saydığımız parametrelerin önemi yadsınamayacak kadar çoktur. İşte bu yüzden Matematiksel Finansın uygulamalarından biri olarak ele aldığımız tam olmayan marketlerde rassal faiz oranı altında Avrupai alım opsiyonunun fiyatlandırılması problemine benzer olarak Avrupai satım opsiyonu, Amerikan alım veya satım opsiyonlarının da değerleri benzer mantıkla Monte Carlo simülasyon yöntemi ile bulunabilinir. Fakat daha önceden de belirttiğimiz gibi özellikle de Amerikan opsiyonları için alım veya satım opsiyonlarının değerlerini bulmak zordur. Ayrıca marketin tam olmadığı durumlarda ise bu durum daha da zorlaşmaktadır. Bunun en önemli nedenlerinden biri ise Amerikan opsiyonu için işlem yaparken bir yandan da aynı opsiyon için optimizasyonda yapmak gerekmektedir. Çünkü Amerikan opsiyonu Avrupai opsyion gibi sadece vade süresinde kullanılmayıp, vade süresinden önce de kullanılabilinir. İşte bu yüzden Amerikan opsiyonun hangi tarihte en karlı veya bir başka şekilde ifade edecek olursak alım veya satım durumunda kazancın maksimum olacağı tarihi belirlemek ayrı bir problemdir. Bu nedenlerden dolayı Amerikan alım veya satım opsiyonlarının fiyatlarını bulmak için yabancı kaynaklarda " stopping time " diye adlandırılan yöntemden de faydalanmak gerekmektedir (bakınız [1], [13]).

KAYNAKLAR

[1] **Jakša Cvitanić and Fernando Zapatero**, 2004. “ Introduction to the Economics and Mathematics of Financial Markets ”, *MIT Press*

[2] **C. Cox, Jonathan E. Ingersoll, JR and Stephen A. Ross**, 1985. " A Theory of The Term Structure of Interest Rate ", *Economoerica, Vol. 53, No. 2, 385-407*

[3] **John C. Hull**, 2006. " Options, Futures, and Other Derivatives ", *Pearson Prentice Hall*, 6th Edition

[4] **Salih N. Neftci**, 2000. " An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives ", *Academic Press*, 2nd Edition

[5] **Tomas Björk**, 2003. " Arbitrage Theory in Continuous Time ", *Oxford University Press*, 2nd Edition

[6] **Ioannis Karatzas and Steven E. Shreve**, 2000. " Brownian Motion and Stochastic Calculus (Graduate Texts in Mathematics) ", *Springer Verlag*

[7] **Bernt Øksendal**, 2003. " Stochastic Differential Equations An Introduction with Applications " *Springer Verlag*, 6th Edition

[8] **Kai L. Chunga and Ruth J. Williams**, 1990. " An Introduction to Stochastic Integration (Probability and its Applications) ", *Birkhuser Boston*, 2nd Edition

[9] **Avner Friedman**, 1975. " Stochastic Differential Equations and Applications ", *Academic Press, New York*

[10] **Coşkun Çetin**, 2000. " Comparison Theorems for Stochastic Differential Equations and Their Applications ", *Master Thesis, Boğaziçi Üni.*

[11] **A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin**, 1970. " Introductory Real Analysis ", *Prentice Hall, Inc.*

[12] **Sheldon Ross**, 1997. " A First Course in Probability ", *Prentice Hall* , 5th Edition

[13] **Paul Glasserman**, 2004. " Monte Carlo Methods in Financial Engineering (Stochastic Modelling and Applied Probability) ", *Springer Verlag*

[14] **G.N Milstein**, 1974. " Approximate Integration of Stochastic Differential Equations ", *Theory of Probability and its Applications, 19:557-562*

[15] **Peter E. Kloeden and Eckhard Platen**, 1992. " Numerical Solution of Stochastic Differential Equations (Stochastic Modelling and Applied Probability) ", *Springer Verlag*

[16] **D. Talay**, 1982. " How to discretize stochastic differential equations, pp.276 - 292 in Lecture Notes in Mathematics, Vol. 972 ", *Springer-Verlag, Berlin*

[17] **K. Bozkaya**, 2006. " A study on the reliability analysis during preliminary design - A rocket motor example", *Master Thesis, ODTÜ*

EKLER A

Risk-Nötr Yoğunluğunun Z ve $\bar{X}$ Çarpımının Martingale'liği

Sermayedeki değişimin X için, bono B ve hisse senedi S olmak üzere $dX = dB + dS$ olduğunu biliyoruz. π kadarlık yatırımı hisse senedine geriye kalan $X - \pi$ kadarlık kısmıda bonoya yatırdığımız düşünecek olursak,

$$dX = (X - \pi)\frac{dB}{B} + \pi\frac{dS}{S}$$

olur. $dB = Brdt$ ve $dS = S[\mu dt + \sigma dW]$ denklemleri yardımıyla

$$dX = (X - \pi)rdt + \pi[\mu dt + \sigma dW]$$

elde edilir. Bu durumda $\bar{X} = e^{-rt}X$ olduğuna göre It$\hat{o}$ kuralını uygulayacak olursak,

$$\begin{aligned}
d\bar{X} &= -re^{-rt}Xdt + e^{-rt}dX \\
&= -re^{-rt}Xdt + e^{-rt}\big\{(X-\pi)rdt + \pi[\mu dt + \sigma dW]\big\} \\
&= -r\bar{X}dt + e^{-rt}Xrdt + e^{-rt}\pi(\mu - r)dt + e^{-rt}\pi\sigma dW \\
&= -r\bar{X}dt + \bar{X}rdt + e^{-rt}\pi(\mu - r)dt + e^{-rt}\pi\sigma dW \\
&= e^{-rt}\pi[(\mu - r)dt + \sigma dW] \;\; olur. \qquad (A.1)
\end{aligned}$$

Ayrıca $Z(t) = exp\{-\theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\}$ ve $\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}$ olduğundan $dZ = -\theta Z dW$ olur. Şimdi de Z$\bar{X}$ için It$\hat{o}$'nun çarpım kuralını uygulayalım.

$$\begin{aligned}
d(Z\bar{X}) &= Zd\bar{X} + \bar{X}dZ + dZd\bar{X} \\
&= Ze^{-rt}\pi[(\mu - r)dt + \sigma dW] + \bar{X}(-\theta Z dW) + e^{-rt}\pi\sigma(-\theta Z)dt \\
&= \bar{Z}\pi[(\mu - r)dt + \sigma dW] - \bar{X}\theta Z dW - \bar{Z}\pi\sigma\frac{\mu - r}{\sigma}dt \\
&= \bar{Z}\sigma\pi dW - e^{-rt}X\theta Z dW \\
&= \bar{Z}[\sigma\pi - X\theta]dW \;\; olur.
\end{aligned}$$

Veya SDD olarak değilde stokastik integral olarak ifade etmek istersek,

$$\begin{aligned}
\int_0^t d(Z(u)\bar{X}(u)) &= \int_0^t \bar{Z}[\sigma\pi - X\theta]dW(u) \\
Z(t)\bar{X}(t) - Z(0)\bar{X}(0) &= \int_0^t \bar{Z}[\sigma\pi - X\theta]dW(u), \quad Z(0) = 1 \; ve \; \bar{X}(0) = x \\
Z(t)\bar{X}(t) &= x + \int_0^t \bar{Z}[\sigma\pi - X\theta]dW(u) \;\; olur.
\end{aligned}$$

Bu denklemden de analşılacağı gibi Z$\bar{X}$ martingale'dir.

A.1 $\bar{S}$ ve $\bar{X}$ 'nin, P^* Ölçüsü Altında Martingale'liği

Hisse senedi için Black-Scholes formülünü $dS = S[\mu dt + \sigma dW]$ ve $W^*(t) = W(t) + \sigma^{-1}(\mu - r)t$ bağıntısı yardımıyla ölçü değiştirerek (change of measure) ve bu ifadeleri göz önünde bulundurarak sırasıyla $\bar{S}$ ve $\bar{X}$ ifadelerine eşit olan ifadeleri bulalım.

$$\begin{aligned}
S(t) &= S(0)e^{\{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W\}} \quad \rightarrow P \ altinda \\
S(t) &= S(0)e^{\{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma(W^*-\frac{(\mu-r)t}{\sigma}\}} \\
S(t) &= S(0)e^{\{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W^*\}} \quad \rightarrow P^* \ altinda, \ ve \ \ \bar{S}(t) = e^{-rt}S(t) \\
\bar{S}(t) &= S(0)e^{\left\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma W^*\right\}}, \quad K = e^{\{-\frac{1}{2}\sigma^2 t+\sigma W^*\}} \ olsun. \\
d\bar{S}(t) &= S(0)\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 K dt + \sigma K dW^* + \frac{1}{2}\sigma^2 K dW^* dW^*\right] \\
&= S(0)\left[-\frac{1}{2}\sigma^2 K dt + \sigma K dW^* + \frac{1}{2}\sigma^2 K dt\right] \\
&= S(0)\sigma K dW^* \\
&= \bar{S}\sigma dW^* \ \ olur. \qquad (A.2)
\end{aligned}$$

Bu denklemden de anlaşılcağı gibi $\bar{S}$, P^* ölçüsü altında martingale'dir. Ayrıca $S(t) = e^{rt}\bar{S}(t)$ olduğundan bu ifadenin diferansiyelini alacak olursak,

$$\begin{aligned}
dS(t) &= re^{rt}\bar{S}(t)dt + e^{rt}d\bar{S}, \quad (A.2)'den \\
&= rS(t)dt + e^{rt}\bar{S}(t)\sigma dW^* \\
&= rS(t)dt + S(t)\sigma dW^* \\
&= S(t)[rdt + \sigma dW^*] \qquad (A.3)
\end{aligned}$$

Black-Scholes modelinin P ölçüsü altındaki $dS(t) = S(t)[\mu dt + \sigma dW]$ formu ile Black-Scholes modelinin P^* ölçüsü altındaki (A.3) formunu karşılaştıracak olursak, μ yerine faiz oranı olan r nin geldiği hemen görülür. O halde sonuç olarak Black-Scholes modelinin risk-nötr olasılığı altında işlemleri için μ yerine r kullanılacaktır. Şimdi de $\bar{X}$'ın P^* ölçüsü altında martingale olduğunu gösterelim. (A.1) denklemini ve yukarıdaki bağıntıyı göz önünde bulunduracak olursak,

$$\begin{aligned}
d\bar{X} &= \bar{\pi}(\mu - r)dt + \bar{\pi}\sigma dW, \qquad dW^* = dW + \sigma^{-1}(\mu - r)dt \\
&= \bar{\pi}(\mu - r)dt + \bar{\pi}\sigma[dW^* - \sigma^{-1}(\mu - r)dt] \\
&= \bar{\pi}\sigma dW^* \ olur.
\end{aligned}$$

Veya SDD olarak değilde stokastik integral olarak yazacak olursak,

$$\begin{aligned}
\bar{X}(t) &= \bar{X}(0) + \int_0^t \bar{\pi}\sigma dW^*(u) \\
\bar{X}(t) &= x + \int_0^t \bar{\pi}\sigma dW^*(u) \ olur.
\end{aligned}$$

Bu denklemden de anlaşılacağı gibi $\bar{X}$, P^* ölçüsü altında martingale'dir.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : BURHANEDDİN İZGİ

Doğum Yeri : Diyarbakır

Doğum Tarihi : 29/03/1986

Adres : İstanbul Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Mühendisliği, Maslak / İSTANBUL

Eğitim Bilgileri :

- **Lise :** Kenan Evren Anadolu Lisesi (2004)
- **Lisans :** Mimar Sinan Üniversitesi Matematik Bölümü (Ocak 2008)

Başarılar :

- Matematik Bölüm Birinciliği, MSU (2008)
- Üniversite İkinciliği, MSU (2008)
- Yüksek Lisans Başarı Bursu, Tübitak (2008-2010)