T.C.
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OKTANYONLAR VE E_8 GRUBU

AYHAN KILINÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KAHRAMANMARAŞ 2011

T.C.
KAHRAMANMARAŞ SÜTÇÜ İMAM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OKTANYONLAR VE E_8 GRUBU

AYHAN KILINÇ

Bu tez,
Matematik Anabilim Dalında
YÜKSEK LİSANS
derecesi için hazırlanmıştır.

KAHRAMANMARAŞ 2011

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü öğrencisi Ayhan KILINÇ tarafından hazırlanan "OKTANYONLAR VE E_8 GRUBU" adlı bu tez, jürimiz tarafından 28/07/2011 tarihinde oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÇİTİL (DANIŞMAN) ....
Matematik Anabilim Dalı
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

Prof. Dr. Murat ALP (ÜYE) ....
Matematik Ana Bilim Dalı
Niğde Üniversitesi

Doç. Dr. Hüseyin YILDIRIM (ÜYE) ....
Matematik Anabilim Dalı
Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. M. Hakkı ALMA ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ayhan KILINÇ

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, şekillerin kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanundaki hükümlere tabidir.

OKTANYONLAR VE E_8 GRUBU
(YÜKSEK LİSANS TEZİ)

AYHAN KILINÇ

ÖZ

Oktanyonlar ve Lie Grupları matematiğin birçok dalında olduğu gibi diğer bilim dallarında özellikle fizik alanında önemli bir yere sahiptir. İstisnai Lie Grupları ise Lie Grupları içerisinde özellikle ülkemizde az bilinen ve daha az çalışılmış bir konudur. Bu konunun önemini artıran bu grupların hem cebirsel hem de topolojik yapıya sahip olmasıdır. Amacımız bu yapıların cebirsel, topolojik ve geometrik durumlarını derleyip düzenleyerek

bu alanda araştırma yapacak olanlara yardımcı olmaktır.

Anahtar Kelimeler: Oktanyonlar,İstisnai Gruplar,Kuaterniyonlar

Kahramanmaraş Sütçü İmam Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı, Temmuz, 2011
Danışman: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÇİTİL
Sayfa Sayısı: 29

OCTANIONS and E_8 GROUP

(MSc THESIS)

AYHAN KILINÇ

ABSTRACT

As well as in the other sciences especially in Physics, the Octonions and Lie Groups possess a significant position in many disciplines of mathematics. Among the Lie Groups, the exceptional Lie Groups are the least known and the least studied ones particularly in our country. What increases the importance of this subject is that these Groups have both algebraic and topological structure. Our aim is to provide assistance for the people who are going to do research in this field by compiling and organizing the algebraic, topological and geometrical status of these groups.

Key Words: Octonions, Exceptional Groups, Quaternions

The University of Kahramanmaraş Sütçü İmam

Institute of Science

Department of Mathematics, July, 2011

Supervisor: Assoc.Prof.Dr. Mehmet ÇİTİL

Total Pages: 29

OKTANYONLAR VE E_8 GRUBU

ÖZET

Oktanyonlar, matematik dünyamızda lisansüstü düzeyine kadar hemen hemen hiç karşılaşmadığımız, adını bile duymadığımız bir sayı sistemidir. Lisansüstü düzeyde bile, matematiğin çoğu dallarında karşımıza çıkmaz. Bu durum, oktanyonların önemsiz veya matematikte pek yeri olmadığı anlamına gelmez. Aksine birçok konuda önemli yer işgal eder. Cebir, Cebirsel Topoloji, Geometri gibi dallardaki pek çok araştırmada karşımıza çıkar. Özellikle yakın zamanlardaki Lie grupları ile ilgili çalışmalarda önemli yer tutar.

Bu Lie grupları içerisinde istisnai(exceptional) Lie grupları olarak adlandırılan G_2, F_4, E_6, E_7 ve E_8 son yıllarda yoğun ilgi çeken gruplardır. Bilindiği üzere Lie gruplarının önemli özelliği olan hem cebirsel hem de topolojik yapıya sahip olmalarıdır.

E_8 grubu ise Lie grubu olup, istisnai Lie gruplarından en büyük olarak kabul edilen, en çok ilgi çekendir.Bu konuyu internette araştırma yaparak rahatlıkla bulabileceğimiz bir yazıyla anlatalım.

Amerikalı ve Fransız matematikçiler, 100 yıldan uzun zaman önce bulunan E_8 adlı matematiksel yapının sırrını çözdüler.
Amerikan Matematik Enstitüsü'nün açıklamasında, Amerikalı ve Fransız matematikçilerden oluşan grubun, Norveçli matematikçi Sophus Lie tarafından 1887'de bulunan ve Lie grubu adı verilen matematiksel yapının E_8 adlı bölümünün sırrını çözdüğü belirtildi.

Amerikan Matematik Enstitüsü Bilim Komisyonu Başkanı ve Princeton Üniversitesi Matematik Profesörü Peter Sarnak, Lie'nin simetriyi incelerken bulduğu bu matematiksel yapının sırrının anlaşılmasının çok önemli bir gelişme olduğunu belirtti. Sarnak, bu sayede, bilgisayarla karmaşık problemlerin çözülmesi için yapılan hesaplamaların kolaylaşacağını ifade etti.

E_8'in sırrının anlaşılmasıyla, cebir, geometri, sayı kuramları, fizik ve kimya alanında ilerleme kaydedileceğini belirten Sarnak, E_8'in "şifresinin çözülmesinin" gelecek nesillerin matematik ve fizikçileri için çok büyük imkânlar sağlayacağını söyledi. 4 yıl boyunca süren araştırmaları yürüten ekibin başında bulunan, Marıland Üniversitesi

Matematik Profesörü Jeffrey Adams da "100 yıldan uzun zaman önce bulunan E_8'i, bugüne kadar kimsenin anlayamayacağını sanıyorduk" dedi.

Bilim adamları, E_8'in gizeminin çözülmesini sağlamak için yapılan tüm hesaplamaların kağıda yazılması halinde, bu kağıtların Manhattan büyüklüğünde bir bölgenin yüzölçümüne denk geleceğini söylediler. Bilim adamları, sırrı çözmek için yeni matematik tekniklerinden ve bilgisayarların sadece birkaç yıl önce geliştirilen hesaplama kapasitesinden faydalandıklarını belirttiler.E_8'in şifresinin çözülmesi için bilgisayarda yapılan hesaplamaların 60 gigabyte yer kapladığı kaydedildi.

OCTANIONS and E_8 GROUP

SUMMARY

Octonion is a number system which we hear about and never encounter in the mathematical world until postgraduate education. We do not encounter it even in postgraduate education in many mathematical disciplines. However, this does not mean that octonions are less important or do not play any role in mathematics. On the contrary, it plays an important role in many subjects. We encounter it in many researches within the disciplines such as algebra, algebraic topology and geometry. It particularly occupies an important place within recent studies on Lie groups.

G_2, F_4, E_6, E_7 and E_8, which were referred as exceptional Lie groups among these Lie groups, are groups which have drawn great attention in recent years. As known, the important feature of Lie groups is that they possess both algebraic and topological structures.

E_8 is a Lie group which is regarded as the largest among Lie groups and draws most attention. We will discuss this issue with an explanation which you can easily access on the Internet.

American and French mathematicians resolved the mystery of the mathematical structure E_8 which was discovered more than 100 years ago.

American Institute of Mathematics stated that a group comprising of American and French mathematicians resolved the mystery of E_8, which was a part of the mathematical structure referred to as Lie group discovered by Norwegian mathematician Sophus Lie in 1887.

Peter Sarnak, Head of Science Committee in American Institute of Mathematics and Professor of Mathematics at University of Princeton, states that it is a really important development to understand the mystery of this mathematical structure discovered by Lie while he was examining symmetry. Sarnak added that now it would be easier to do calculations on computer to solve complex problems.

Stating that progress will be made in algebra, geometry, number theories, physics and chemistry after resolving the mystery of E_8, Sarnak said that ‘resolving the code’ of E_8 would provide great opportunities for mathematicians and physicists of future generations. “We thought nobody could understand E_8 which was discovered more than 100 years ago,” said Jeffrey Adams, Professor of Mathematics at University of Maryland and who supervised the team that conducted research for 4 years.

Scientists stated that if all calculations to resolve the mystery of E_8 were written on a paper, these would correspond to surface area of a region as large as Manhattan. Scientists stated that they benefited from new mathematical techniques and calculation capacities of computers which were developed only a few years ago. It is noted that 60 GB space was needed for calculations on computer to solve the code of E_8.

TEŞEKKÜR

Bu konuda çalışmam noktasında gelişimci ve yönlendirici tavsiyelerde bulunan, gerek tezin oluşumunda, gerekse çalışmaların her aşamasında değerli katkılarını ve bilgilerini esirgemeyen sayın hocam: Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÇİTİL’e minnetlerimi ve saygılarımı sunuyorum.

Ayrıca gerek ders aşamasında gerekse tez aşamasında katkıları bulunan Sütçü İmam Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı çok değerli Öğretim Üyelerine ve Araştırma Görevlilerine teşekkürlerimi sunuyorum.

Ayhan KILINÇ

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

H : Kuaterniyonlar kümesi

R : Reel Sayılar kümesi

C : Kompleks Sayılar kümesi

O : Oktanyonlar kümesi

S^n : Modülü 1 olan Kuaterniyonların çarpım grubu

SU(n) : Determinantı 1 olan kompleks n x n üniter matrisler grubu

R^n: Toplamsal Oklid Uzayı

op^n : Oktanyonsal Projeksiyon

1.GİRİŞ

Tam olarak dört tane bölme(division) cebiri vardır. Reel sayılar ($\mathbb{R}$) , Kompleks sayılar ($\mathbb{C}$), Kuaterniyonlar ($\mathbb{H}$) ve Oktanyonlar($\mathbb{O}$). Reel sayılar, ailenin geçimini sağlayan, hepimizin bel bağlayarak güvendiğimiz, tamamıyla düzenli olan alandır. Kompleks sayılar biraz daha yanar dönerdir ancak yinede ailenin saygı duyulması gereken küçük kardeşidir: düzenli değillerdir, fakat cebirsel olarak tamdırlar. Komütatif olmayan Kuaterniyonlar, önemli aile toplantılarından dışlanmış olan dış merkezli kuzenlerdir. Ancak Oktanyonlar hiç kimsenin gitmesine izin vermediği ailenin yaşlı ve çılgın amcasıdır.

Matematikçilerin çoğunluğu Hamilton'un Kuaterniyonları nasıl icat ettiğine dair hikayeyi duymuştur. 1835 yılında 30 yaşındayken kompleks sayıların doğal sayıların çiftleri olarak nasıl ele alınması gerektiğini keşfetmiştir. C ve 2- boyutlu geometri arasındaki ilişkiden oldukça etkilenmiş olarak 3-boyutlu geometride benzer bir rol oynayacak olan daha büyük bir cebir bulmak için yıllarca uğraşmıştır. Modern dilde 3-boyutlu normlu bölme cebiri(division) aramaktaymış gibi görünmektedir. Arayışı 1843 yılında zirveye ulaşmıştır. Daha sonra oğluna şunu yazmıştır " Yukarıda bahsi geçen ayın başlarında sabah erken saatlerde her gün kahvaltıya gelirken küçük kardeşin William Edwin ve sen bana şunu sorardınız: "Söyle baba, üçüzleri çarpabiliyor musun? İşte o zaman ben ise hep sadece kafamı üzgünce sallayarak cevap vermek zorunda kalırdım: "Hayır sadece toplayabiliyorum ve çıkartabiliyorum". Tabiî ki sorun 3-boyutlu bir bölme cebirinin(division) olmayışıydı. Gerçekten 4 boyutlu cebire ihtiyacı vardı.

En sonunda 16 Ekim 1843'te Dublin'de İrlanda Kraliyet Akademisi toplantısına gitmek için Royal kanal boyunca eşiyle beraber yürürken anlık keşfini yaptı. "Yani o zaman ve orada o olağanüstü güçlü düşünceyi terk ettim ve bundan ortaya çıkan kıvılcımlar *i, j, k*, arasındaki temel denklemlerdi, bunlar ise tam da benim her zaman kullandığım gibiydiler." Bu denklemleri Brougham Köprüsünün taşlarına oydu:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Bu hikâyenin çok iyi bilinmesinin bir sebebi Hamilton'ın hayatının geri kalan kısmını Kuaterniyonlar ve bunların geometrideki uygulanışına tutkun olarak geçirmiş olmasıdır . Ve bir süre Kuaterniyonlar moda olmuştur. Dublin'de zorunlu bir sınav konusu olmuştur ve bazı Amerikan Üniversitelerinde öğretilen tek ileri düzey matematik konusu olmuşlardır. Bizim şu anda R^3 teki sayıllar ve vektörler ile yapmakta olduğumuz şeylerin büyük bir çoğunluğu o zaman gerçek ve hayali Kuaterniyonları kullanılması ile yapılmaktaydı. Bir Kuaterniyonlar Okulu geliştirildi, bu ise Hamilton'ın ölümünden sonra Endhinburglu Peter Taight ve Harvard'lı Benjamin Peirce tarafından yönetildi. Taight Kuaterniyonlar hakkında sekiz tane kitap yazdı ve bunların fiziğe uygulanışına vurgu yaptı. Gibbs nokta çarpımları ve çapraz çarpımlara ilişkin modern bir ifade icat ettiği zaman Taight bunu bir "hermafrodit canavarlığı" olarak kınadı. Vektörlerin diğer tarafına ağırlık veren Kelvin ve Heaviside gibi aydınlar arasında bir dizi polemik savaşı oldu. Nihayetinde Kuaterniyonlar asla üstesinden gelemediği bir itibar kaybına uğradı ve kaybetti.

Daha az bilineni Hamilton'ın kolejden arkadaşı olan John T. Graves tarafından Oktanyonların keşfidir. Başlarda Hamilton'ın kompleks sayıları ve üçlüleri düşünmesine sebep olan Graves'in cebire duyduğu ilgidir. Bu kader yürüyüşünün hemen ertesi günü Hamilton Graves'e Kuaterniyonları anlatan sekiz sayfalık bir mektup gönderdi. Graves 26 Ekim tarihinde yanıt verdi, Hamilton'a cesur fikrinden dolayı iltifatlarda bulundu ancak şunu da ekledi "Bu sistemde halen beni endişelendiren bir şey var. Ben halen hayali üretimlere ilişkin ne kadar özgür olduğumuz konusunda açık ve net bir görüşüm yok ve bunlara doğaüstü özellikler yüklemek konusunda da öyle" Ve şunu sordu: Alaşımın ile üç poundluk altın yapabilirsen o noktada neden durasın ki?"

Graves altın parçası niteliğindeki kendi çalışmalarına başladı. 26 Aralık tarihinde Hamilton'a yeni 8 boyutlu cebiri açıklayan bir mektup yazdı, kendisi buna "oktavlar" demiştir. Bunların normlu bölme cebiri(division) olduğunu gösterdi ve sekiz mükemmel karenin iki toplamının çarpımını, diğer sekiz mükemmel karenin toplamı olarak ifade etmek için bunları kullandı, yani: sekiz kare teoremi.

1844 Ocak ayında Graves Hamilton'a kendi çalışmasını genişletmiş olduğu üç mektup gönderdi. "2^m –ion" Genel teorisini dikkate aldı ve 16 boyutlu normlu bölme cebirini (division) yapılandırmaya çalıştı ancak "beklenmedik bir aksaklık" ile karşılaştı ve bunun mümkün olup olmayacağı konusunda şüpheye düştü. Hamilton, Graves'in çalışmasını yayınlamayı teklif etti ancak kendi Kuaterniyonlar çalışması ile meşgul olduğundan bunu bir kenara koymaya devam etti. Temmuz ayında Graves'e Oktanyonlar çağrışımsal olmadığına işaret eden bir yazı yazdı: "Eğer A, B, C Kuaterniyonlar ise $A \cdot BC = AB \cdot C$'dir ama senin oktavlarında genellikle böyle değil". Aslında Hamilton "çağrışımsal" terimini ilk olarak o sıralarda icat etti böylece de muhtemelen Oktanyonlar bu konseptin önemini açıklığa kavuşturmak konusunda önemli bir rol oynadı.

Bu arada Cambridge'den yeni mezun olan genç Arthur Cayley, Hamilton bunların varlığını ilan ettiğinden beri Kuaterniyonları düşünmekteydi. Kuaterniyonlar ve hipereliptik fonksiyonlar arsında bir ilişki arar gibiydi. 1845 yılının martında felsefe dergisinde: Rev. B. Bronwin'e cevaben Jacobi'nin Eliptik Fonksiyonları ve Kuaterniyonlar Hakkında" başlıklı bir çalışma yayınladı. Bu çalışmanın büyük bir kısmı Cayley'in eliptik fonksiyonlar hakkındaki çalışmasındaki hataları işaret eden bir tekzip girişimiydi. Göründüğü kadarıyla sonradan gelen bir fikir olarak, Oktanyonların kısa tanımına takılı kalmıştı. Aslında, bu çalışma öylesine çok hatayla doluydu ki, Oktanyonlar kısmı dışında toplu çalışmalarında gözardı edilmişti.

Yayımcılara yenilmiş birisi olarak, Graves kendi çalışmalarından aynı derginin sonraki sayısında yayınlanacak olan bir tanesine Oktanyonları 1843 Noelinden bu yana bildiğini söylediği bir not eklemiştir. 14 Temmuz 1847'de Hamilton, İrlanda Kraliyet Akademisinin yayınlarına Graves'in önceliğini doğrulayan küçük bir notla katkıda bulundu. Ancak çok geç kalmıştı. Oktanyonlar "Cayley sayıları" olarak bilinir hale gelmişti. Bundan da daha kötüsü Graves daha sonra sekiz kare teorisinin C.F. Degen tarafından 1818 yılında zaten keşfedilmiş olduğunu öğrendi.

Oktanyonlar, Kuaterniyonlar ile kıyaslandığından neden bu kadar fazla karanlıkta bırakılarak zayıflatılmıştı? Ancak bunun sebebi de geometri ve fizikte belirli ve net bir uygulamalarının olmamasıydı. Birim Kuaterniyonlar SU(2) grubunu oluşturur bu ise SO (3) rotasyon grubunu iki defa kapsar. Bu durum bunları rotasyonlar ve açısal momentum konusuna, özellikle kuantum mekaniği bağlamında uygun hale getirmektedir. Bu günlerde bu Clifford cebirlerinin özel durumları olarak ele alınmaktadır. Pek çoğumuz Hamilton'ın her ikisine de yapmış olduğu kozmik atfı yapmıyoruz ancak bunlar büyük resmi görmek için uygundur.

Diğer taraftan Oktanyonlar buna uygun değildir. Geometri ile olan ilişkileri 1925 yılında Elie Cartan "trialite (üçlülüğü)" yani vektörler ve spinörler arasında 8 boyutlu Öklid uzayındaki simetriyi tarif edene kadar oldukça belirsiz olmuştur . Bunların fizik ile olan potansiyel ilişkisi 1934 yılında Jordan, von Neuman ve Wigner'in kuantum mekaniğinin temelleri hakkındaki çalışmasında fark edilmiştir . Ancak, Jordan ve diğerleri tarafından, oktonionik (Oktanyon) kuantum mekaniğinin nükleer ve partikül fiziğine uygulanması konusundaki çalışmaları çok az başarıya ulaşmıştır. Bu yönlerdeki çalışmalar, 1980lerde Oktanyonların string teorisinin bazı merak edilen özelliklerini açıkladığı keşfedilinceye kadar oldukça yavaş ilerlemiştir. Klasik süperstring için olan Lagrange denklemi Minkowski'nin sadece 3, 4, 6 ve 10 boyutlu olan uzay zamanındaki vektörler ve spinörler arasındaki bir ilişkiyi kapsar. Bu sayıların r, c, h, ve o nun boyutlarından 2 fazla olduğuna dikkat ediniz. Göreceğimiz gibi, bu tesadüf değildir. Özet olarak,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) &\cong \mathfrak{so}(2,1)\\
\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) &\cong \mathfrak{so}(3,1)\\
\mathfrak{sl}(2,\mathbb{H}) &\cong \mathfrak{so}(5,1)\\
\mathfrak{sl}(2,\mathbb{O}) &\cong \mathfrak{so}(9,1)
\end{aligned}$$

izomorfizmleri bize bu boyutların birindeki bir spinörü ilgili bölme cebirinin (division) bir çift elemanı olarak ele alma imkanı verir. Bu süperstring Lagrange denklemlerinden en ümit verici olan şey, bu 10 boyutlu Oktanyonsal olanının temel fiziğin gerçekçi bir teorisi için aday olmasıdır. Ancak Oktanyonlar halen gerçek dünyayı anlamakta faydalı olup olmadığına ilişkin bir kanıt yoktur. Sadece sonuç olarak bu sorunun bir şekilde çözülmesini ümit edebiliyoruz.

Fizikteki olası rolü yanında Oktanyonlar, aksi halde izole ve açıklanamaz gibi görünen cebirsel yapıları birleştirdiği için önemlidir. Açıklayacağımız şekilde, Oktanyonsal projeksiyon uzayda O çağrışımsal olmadığı için, op^n sadece $n \leq 2$ için anlam ifade eder. Bunun anlamı, reel, karmaşık ve kuaterniyonik projektif uzay ile ilişkili olan çeşitli yapıların sadece $n \leq 2$ için oktonionik analoglarının olmasıdır.

Basit Lie cebiri bu fenomenle ilgili olarak güzel bir örnektir. Klasik basit Lie cebirlerinin 3 adet sonsuz ailesi vardır, bunlar projektif uzay rp^n ,cp^n ve hp^n izometri gruplarından gelirler. Yine 5 istisnai basit Lie cebiri vardır. Bunlar Killing ve Cartan tarafından 1800 lerin sonunda keşfedilmişlerdir. O zaman bu istisnaların önemi gizemini saklamıştır: bunlar yapı olarak bilinen simetri grupları olarak ortaya çıkmamışlardır. Sadece daha sonra Oktanyonlar ile olan bağlantıları açığa kavuşmuştur. Bunların 4 tanesinin o, o c, h o ve o o projektif düzlemler üstündeki izometri gruplarından geldiği ortaya çıkmıştır. Kalan ise Oktanyonların otomorfizm grubudur.

Basit formal olarak reel Jordan cebirlerinin sınıflandırılması da diğer bir iyi örnektir. Bunun birlikte bunların çeşitli sonsuz aileleri yanında, istisnai bir Jordan cebiri de vardır, bu ise 3x3 Hermetian Oktanyonsal Matristen oluşmaktadır. Bu Jordan cebirindeki minimal projeksiyonlar $\mathbb{O}P^2$ noktalarına karşılık gelmektedir ve bu cebirin otomorfizm grubu $\mathbb{O}P^n$ nin izometri grubu ile aynıdır.

Oktanyonlar aynı zamanda topoloji ile şaşırtıcı bir ilişkisi vardır. 1957 yılında, Raoul Bott, O (n) için $n \to \infty$ endükleyici limiti olan O (∞), topolojik grubunun homotopi gruplarını hesaplamıştır. Bott, bunların 8 periyodu ile tekrarlandığını ispatlamıştır:

$$\pi_{i+8}(\mathrm{O}(\infty)) \cong \pi_i(\mathrm{O}(\infty)).$$

Bu ise Bott periyodikliği olarak bilinir. Ayrıca ilk 8 i de hesaplamıştır:

$$\begin{aligned}
\pi_0(\mathrm{O}(\infty)) &\cong \mathbb{Z}_2 \\
\pi_1(\mathrm{O}(\infty)) &\cong \mathbb{Z}_2 \\
\pi_2(\mathrm{O}(\infty)) &\cong 0 \\
\pi_3(\mathrm{O}(\infty)) &\cong \mathbb{Z} \\
\pi_4(\mathrm{O}(\infty)) &\cong 0 \\
\pi_5(\mathrm{O}(\infty)) &\cong 0 \\
\pi_6(\mathrm{O}(\infty)) &\cong 0 \\
\pi_7(\mathrm{O}(\infty)) &\cong \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Buradaki kaybolmayan homotopi gruplarının R, C, H ve O boyutlarından bir boyut az olan boyutlarda gerçekleştirdiğine dikkat ediniz. Bu tesadüf değildir. Normlu bölme cebirinde normun bir elementi ile sol çarpım cebirinin ortogonal dönüşümünü tanımlamaktadır ve bu sebeple O (∞) elemanıdır. Bu ise bize S^0, S^1, S^3 ve S^7 için O (∞) kürelerinden haritalar vermektedir ve bu haritalar o boyutlardaki homotopi gruplarını oluşturmaktadır.

Elimizde bu varken, O (∞) homotopi gruplarında 8 periyottaki tekrarın bir bakıma Oktanyonlar sebebiyle olduğunu düşünebilir. Bunun aksine, Bott periyodikliği, n-küresinin üstünde doğrusal olarak kaç tane nokta şeklinde bağımsız düzgün vektör alanının bulunabileceği sorusuyla yakından ilişkilidir. Sadece n+1=1, 2, 4, veya 8 olduğunda bu n vektör alanları var olmaktadır ve bu reeller üstündeki bölme cebirlerinin sadece bu boyutlarda oluşabileceğini göstermektedir.

Bu bölümdeki bilgiler için kaynak olarak Baez'den ve Wen-Log Lin'den yararlanılmıştır.

2.OKTANYONLAR

2.1 Temel Kavramlar

Konuya başlamadan önce bazı tanımları yerine oturtalım. Bizim için bir vektör uzayı her zaman reel sayılar cismi üstünde sonlu-boyutlu bir modül olacaktır. Bir *A* cebiri, $A \times A \rightarrow$

A haritasının çarpım denilen iki doğrusallılığına sahip olacaktır ve birim denen sıfır olmayan $1 \in A$ elemanı yani m(1, a) = m (a, 1) = a olacaktır. Her zaman olduğu gibi, *m(a,b)* yi *ab* olarak kısaltmaktayız. Cebirlerimizin çağrışımsal olduğunu varsaymıyoruz! Bu şekilde rahatlıkla verilen cebirdeki reel sayıların bu cebirin $\alpha \rightarrow \alpha 1$ haritasının elemanları olarak sayacağız.

Bir *A* cebiri *ab*=0 ile a.b olması halinde bir bölme cebiridir(division), o zaman ya a=0 ya da b=0'dır. Eşit olarak, soldaki ve sağdaki çarpım işlemleri sıfır olmayan her hangi bir eleman ile ters çevirilebilir değil ise A bölme cebiridir(division). Bir normlu bölme cebiri(division), aynı zamanda ||ab|| = ||a|| . ||b|| şeklindeki normlu vektör alanı olan bir *A* cebiridir. Bu ise A'nın bölme cebiri(division) ve ||1|| = 1 olduğunu gösterir.

Bazı incelikleri özellikle vurgulamak gerekir. Sıfır olmayan herhangi bir $a \in A$ için $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ ile $a^{-1} \in A$ elemanı varsa, bir *A* cebrinin çarpımsal ters olduğunu söyleyebiliriz. Eğer bölme cebiri(division) varsa, bir birleşmeli cebir çarpımsal terse sahiptir. Ancak, bu birleşik olmayan cebirler için geçersizdir!. Öte yandan, Kuaterniyonları alarak ve sonucu biraz değiştirerek, çarpım tablosunun kalanını değiştirmeden bırakırken, bazı küçük sıfırdan farklı reel sayılar ε için $i^2 = -1 + \varepsilon j$ ayarlayarak çarpımsal ters olmadan da bir bölme cebir(division) oluşturabilir. *i* elemanı daha sonra hem sağ ve sol terse sahip olur ama bunlar eşit değildir.

İlişkilendirmenin üç seviyesi vardır. Eğer herhangi bir eleman tarafından üretilen alt cebir birleşmeli ise bu cebir güç ilişkiseldir. Herhangi iki eleman tarafından üretilen alt cebir birleşmeli ise bu alternatiftir. Nihai olarak, herhangi bir üç eleman tarafından üretilen alt cebir birleşmeli ise, cebir birleşmelidir.

Göreceğimiz gibi, Oktanyonlar birleşmeli değil, alternatiftir. Böyle bir şey nasıl kontrol edilebilir? Emil Artin'in bir teoremine göre, tüm a, b $\in A$ için elimizde

(1) (aa)b = a(ab), (ab)a = a(ba), (ba)a = b(aa)

var ise, bir *A* cebiri alternatiftir

Aslında, bu denklemlerin herhangi ikisi kalan birini işaret ediyorsa, genellikle ilk ve sonuncu "alternatif" tanımı olarak alınır. Herhangi hususu görmek için, herhangi bir cebirin

[a,b,c] = (ab)c – a(bc)

verilmiş olması kaydıyla, çağrışımcı olarak adlandırılan bir

$$[.,.,.] : A^3 \rightarrow A$$

Üç hatlı haritası vardır

[a,b] = ab – ba komütatörü, komutatiflikteki başarısızlığı ölçerken, çağrışımcı çağrışımcılıktaki başarısızlığı ölçmektedir. Şimdi, komütatör, bu iki argüman ne zaman değişse işareti değiştiği anlamına gelen, değişken bir bilineer haritadır:

$$[a, b] = - [b,a]$$

veya, bunlar eşit olduğu zaman sıfırlanan eşdeğeri:

$$[a,a] = 0$$

Bu, çağrışımcının da değişip değişmediği sorusunu gündeme getiriyor. Aslında, bu A'nın alternatif olduğu durumda kesin olarak tutar! (1)'deki her denklemin çağrışımcının belli bir argümanlar çifti sıfıra eşit olduğu zaman çağrışımcının sıfırlandığını veya aynı şekilde, bu argümanlar çifti açıldığında işaretini değiştirdiğini söylemesinin sebebi budur. Ancak, bizim *i.* ve *j.* argümanları değiştirdiğimiz zaman çağrışımcının işaretini değiştirip değiştirmediğine ve *j.*ve *k.* argümanları değiştirdiğimiz zaman işaretini değiştirdiğine dikkat etmemiz gerekir. Böylece herhangi iki denklem bir üçüncüyü gösterir.

Şimdi R, C, H ve O’da bu kadar büyük olan şeyin olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 2. 1.1 Sadece R, C, H ve O normlu bölme cebirleridir.

Teorem 2. 1.2 Sadece R, C, H ve O değişimli bölme cebirleridir.

İlk teorem Hurwitz’in 1898 tarihli bir çalışmasına kadar geri gider. Bu çalışma daha sonra pek çok yönde, örneğin, cebirin diğer alanları üzerinde genelleştirildi. İkinci teoreminin bir versiyonu lemmalı Adam Zorn tarafından yapılan 1930 tarihli bir çalışmada görünür. Bu iki teoremin modern ispatları için Schafer’in çağrışımsal olmayan cebirler hakkındaki mükemmel kitabına bakınız.

R, C, H ve O’nun tek bölme cebirleri(division) olduğunu belirtmemize rağmen bunun doğru olmadığını da unutmamak gerekir: Örneğin, biz zaten çarpımsal tersi olmayan 4 boyutlu bölme cebirlerini (division) almak için bir yol tarif ettik. Ancak, elimizde olan:

Teorem 2.1.3 *Tüm bölme cebirleri*(division) 1*;* 2*;* 4 *veya* 8 *boyutuna sahiptir.*

Bu 1958 yılında Kervaire ve Bott Milnor tarafından bağımsız olarak kanıtlandı. Ancak, bizim ana odak noktamızı takip eden şey bölme cebirleri(division) hakkındaki genel sonuçlar olmayacaktır. Bunun yerine, oktanyonların özel özelliklerine dikkat çekeceğiz.

2.2. Oktanyonların Teşkili

Oktanyonları kurmanın en temel yolu, bunların çarpım tablosunu vermektir. Oktanyonlar, 1 bazında 8 boyutlu olup, $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ ve bunların çarpma elemanları, *i.* satırdaki elemanın j. sütunundaki elemanla çarpımı sonucunu tanımlayan bu tabloda verilmiştir:

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Tablo 1. Oktanyonlar Çarpım Tablosu

Maalesef, bu tablo neredeyse tamamen yanlış yönlendiricidir! Bundan kolayca öğrenilebilecek tek ilginç husus:

$e_1, \ldots, e_7$ -1'in kare kökleridir,

e_i ve e_j , $i \neq j$ olduğunda, değişmeli değildir:

$e_i = - e_j e_i$

- **endeks dönüşüm özdeşliği**:

$e_i e_j = e_k \Longrightarrow e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1}$

ki, burada göstergeleri canlı Z_7 olarak düşünüyoruz ve

- **endeks eşleştirme özdeşliği**:

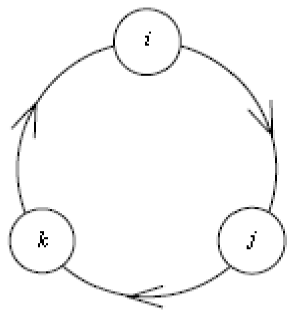
$e_i e_j = e_k \Longrightarrow e_{2i} e_{2j} = e_{2k}$ gibi tek saçma sonuç ile birlikte, bu gerçekler bütün çarpım tablosunu kurtarmak için yeterlidir. Ancak, biz gerçekten oktanyonun sonucunu hatırlamak için daha iyi bir yol istiyoruz. Oktanyonların çarpımında da matrislerin çarpımında olduğumuz kadar rahat olmamız gerekir! Ve sonuç olarak, oktanyonlar için onların kendilerine özgü özelliklerini ve diğer matematiksel fikirler ile nasıl uyum sağladıkları konusunda daha kavramsal bir yaklaşım istiyoruz. Aşağıda, güzel bir anımsatıcı ile başlayarak ve biraz daha derine, daha kavramsal olanlara inerek, kadar çalışma, Oktanyon çarpımının biraz daha fazla açıklamasını yapacağız.

2.2.1 Fano Düzlemi

$\mathbb{H}$ kuaterniyonları, 1*; i; j; k* bazında 4-boyutlu bir cebirdir. Sonucu tanımlamak için bir çarpım tablosu verebilirdik, ama şunu hatırlamak daha kolay:

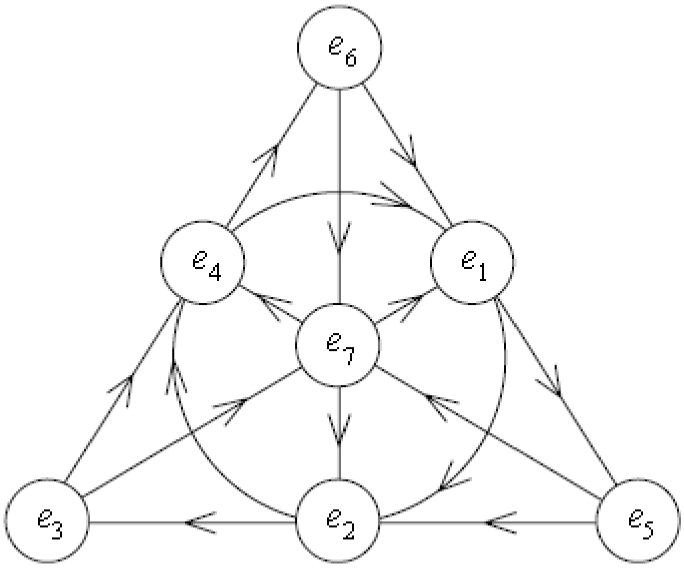
- 1 çarpımsal özdeşliktir.
- *i; j;* ve *k* -1'in kare kökleridir,
- elimizde $ij = k$, $ji = -k$ vardır ve tüm özdeşlikler bu devirsel (*i; j; k*) permütasyonlarından elde edilir.

Son kuralı bir resimle özetleyebiliriz:



Dairenin etrafında saat yönünde giderek iki elemanı çarptığımızda, bir sonrakini buluruz: örneğin, $ij = k$. Ama saat yönünün tersinden giderek çarpma yaparsak, bir sonrakini eksi buluruz: örneğin, $ji = -k$.

Oktanyonların nasıl çarpılacağını hatırlamak için aynı türde bir resmi kullanabiliriz:



Bu Fano planı, 7 nokta ve 7 çizgili küçük bir düzenektir. Çizgiler üçgenin kenarları, yükseklikleri ve tüm kenarların orta noktalarını içeren dairedir. Farklı noktaların her bir çifti eşsiz bir hat üzerinde bulunur. Her çizgi üç nokta içerir ve bu üçlülerin her birisi oklarla gösterilen dairevi bir sıralamaya sahiptir. Eğer $e_i, e_j,$ and e_k dairevi olarak bu şekilde sıralanırsa; o zaman

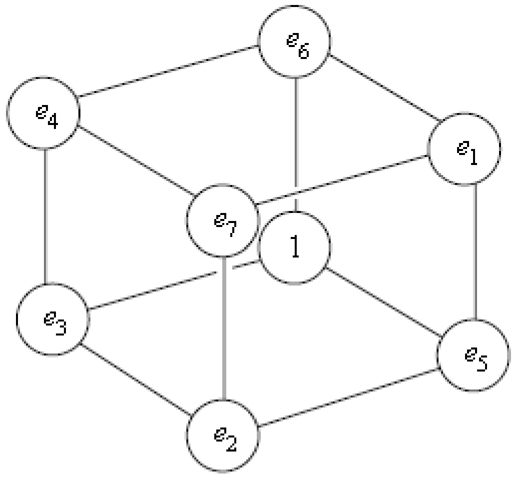
$$e_i e_j = e_k, \qquad e_j e_i = -e_k.$$

Bu kurallar ile birlikte:

- 1 çarpım özdeşliği,
- $e_1; : : : ; e_7$ -1'in kareköküdür,

Fano düzlemi tamamen Oktanyonların cebir yapısını tanımlar. Endeks katlama resme üçüncü bir tura yaptırarak çevirmeye karşılık gelir.

Bu, kesinlikle düzgün bir hatırlatıcıdır ama bunun arkasında gözlemlenen daha derin bir şey var mı? Evet! Fano düzlemi 2 elemanlı $\mathbb{Z}_2$ üzerindeki projektif düzlemdir. Başka bir deyişle, o $\mathbb{Z}_2^3$ vektör uzayındaki kökenden geçen çizgilerden oluşur. Bu çizgilerin her birisi sıfır olmayan tek bir eleman içerdiğinden, Fano düzleminin yedi $\mathbb{Z}_2^3$ elemanından oluştuğunu da düşünebiliriz. $\mathbb{Z}_2^3$deki kökenin $1 \in \mathbb{O}$ karşılık geldiğini düşünürsek, aşağıdaki Oktanyon resmini elde ederiz:



Bu 3 boyutlu vektör uzayının kökeni üzerinden geçen düzlemlerin, $\mathbb{O}$ izomorfikten kuaterniyonlara giden alt cebirleri; kökenden geçen çizgiler izomorfikten karmaşık sayılara giden alt cebiri ve kökenin kendisi izomorfikten reel sayılara giden alt cebiri verir.

Burada gerçekten elimizde olan şey, Oktanyonların saptırılmış bir cebir grubu olduğuna dair bir tanımlamadır. Herhangi bir *G* grubu verildiğinde, $\mathbb{R}[G]$ cebir grubu gerçek katsayılı *G* elemanlarının tüm sonlu formal lineer kombinasyonlarından oluşur. Bu *G*'den gelen sonuçla çağrışımlı bir cebirdir. Yeni bir

$$\star : \mathbb{R}[G] \times \mathbb{R}[G] \to \mathbb{R}[G]$$

Sonucu tanımlayarak bu sonucu saptırmak için herhangi bir

$$\alpha : G^2 \to \{\pm 1\}$$

fonksiyonunu kullanabiliriz;

burada:

$$g \star h = \alpha(g,h)\; gh,$$

olup $g, h \in G \subset \mathbb{R}[G]$'dir. Bu yeni sonucun çağrışımsal olmasını garanti edecek α içeren bir denklemi tespit edilebilir. Bu durumda biz α'ya bir `2-cocycle'diyoruz. Eğer α belli bir ekstra denklemi karşılıyorsa, * sonucu da komütatif olacaktır ve biz α'ya bir `istikrarlı 2-cocycle 'diyoruz. Örneğin, $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2]$ grup cebiri, $\mathbb{R}$'nin 2 kopyasının bir sonucuna izomorfiktir, ama biz onu karmaşık sayılar elde etmek için stabil bir 2-cocyle tarafından saptırabiliriz. $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2^2]$ gurup cebiri, $\mathbb{R}$'nin 4 kopyasının bir sonucuna izomorfiktir, ama biz onu kuaterniyonlar elde etmek için stabil bir 2-cocycle tarafından saptırabiliriz. Benzer şekilde, $\mathbb{R}[\mathbb{Z}_2^3]$ gurup cebiri, $\mathbb{R}$'nin 8 kopyasının bir sonucudur ve aslında bu bölümde yapmış olduğumuz şey bize bu cebir grubunu Oktanyonlar elde etmek için saptırmamızı sağlayan bir α fonksiyonu tanımlamaktır. Oktanyonlar çağrışımsal olmadığı için, bu fonksiyon bir 2-cocycle değildir. Ancak, onun sınırdaşı, yeni bir birleştirici tanımlamayı ve onu bir simetrik monoidal kategori haline getirerek $\mathbb{Z}_2^3$ kademeli vektör uzayı kategorisi örmeyi sağlayan bir "stabil 3-cocycle"dır [4]. Bu simetrik monoidal kategorideOktanyonlar bir komütatif monoid nesnedir. Daha az teknik terimlerle: Bu kategori Oktanyonların komütatif ve ilişkisel olduğu bir bağlam sağlar! Şu ana kadar bu fikir yeni kullanılmaya başladı.

2.2.2 Cayley-Dickson Yapısı

Her birisinin neden bir sonrakinin içine sığdığını izah eden normlu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ bölme cebirlerinin(division) bir yapısına sahip olmak güzel olurdu. Bu yapının neden $\mathbb{H}$'nin komutatif ve $\mathbb{O}$'nun birleşimsel olmadığını açıklasa iyi olurdu. Hatta bu yapı ilk dördünde olduğu gibi, her defasında boyut olarak ikiye katlanmak suretiyle normlu bölme cebirleri(division) ile sonsuz bir cebir dizisi verseydi daha iyi olurdu. Aslında, böyle bir yapı vardır: Buna Cayley-Dickson yapısı denir.

Hamilton'un da belirttiği gibi, karmaşık sayı $a + bi$, (a, b) reel sayılarının bir çifti olarak düşünülebilir. Ayrıca bileşen-şeklinde yapılır ve çarpma şöyle olur:

$$(a; b)(c; d) = (ac - db; ad + cb):$$

Ayrıca karmaşık bir sayının eşitlemesini

$$(a; b)^* = (a; -b):$$

ile tanımlayabiliriz.

Şimdi karmaşık sayılara elimizde olduğundan, kuaterniyonları da benzer bir şekilde tanımlayabiliriz. Bir kuaterniyon bir karmaşık sayılar çifti olarak düşünülebilir. Toplama bileşen şeklinde yapılır ve çarpma şöyle olur:

(2) $(a, b)(c, d) = (ac - db^* \; a^*d + cb):$

Bu aynı karmaşık sayıların çarpımı için kullandığımız formülümüz gibidir ama içeriğine bir çift conjugate konulmuştur. Bunları önceki formüle dâhil ettiğimizde hiçbir şey değişmez çünkü bir reel sayının conjugate sadece kendisidir. Bir kuaterniyonun eşini de

(3) $(a; b)^* = (a^*, -b):$

İle tanımlayabiliriz.

Şimdi bir Oktanyonu bir çift kuaterniyon olarak tanımlayabiliriz. Daha önce olduğu gibi, formül (2) ve (3)ü kullanarak bunları toplayıp çarpabiliriz. Eski cebirlerden yenisini çıkarmak için kullanılan bu hileye **Cayley-Dickson yapısı** denir.

Neden reel sayılar, karmaşık sayıların, kuaterniyonların ve Oktanyonların çarpımsal tersi vardır? Ben bunu reel sayılar için aşikâr kabul ediyorum. Karmaşık sayılar için,

$$(a; b)(a; b)^* = (a; b)^*(a; b) = k(1; 0)$$

kontrol edilebilir;

Burada k bir reel sayı, yani (a, b) normunun karesidir. Bunun anlamı, her ne zaman $(a; b)$ sıfır olmayan bir sayı ise, çarpımsal tersi $(a; b)^*/k$'tir. Aynı şeyin kuaterniyonlar ve sekizeyler için de geçerli olup olmadığı kontrol edilebilir..

Ama bu da tabii ki şu soruyu ortaya çıkarır: Cayley-Dickson yapısı ile neden her biri bir öncekinden elde edilen *sonsuz* bir bölme cebirleri dizisi yoktur? Cevap, yapıyı her uyguladığımızda, cebirimizin biraz daha kötüleşmesidir. Öncelikle her elemanın kendi eşi olduğunu kaybederiz, sonra komutatifliği kaybederiz, sonra birleşmeyi kaybederiz ve son olarak da biz bölme cebir özelliğini kaybederiz.

Bunu açıkça anlamak için, biraz daha formal olmak yardımcı olur. Bir ***-cebiri**, konjugasyon ile donatılmış bir A cebiri olarak tanımlayalım; yani

Tüm $a; b \in A$ için $A \rightarrow A$ ile bir

$$a^{**} = a,\ (ab)^* = b^*a^*$$

reel-lineer harita. Eğer *a* cebirinin her bir elemanı için $a = a^*$ ise bir *-cebirinin reel olduğunu söyleyebiliriz. Eğer $b \in A$ için $a + a^* \in \mathbb{R}$ ve sıfır olmayan tüm $aa^* = a^*a > 0$ bir *-cebirinin güzel bir şekilde normlandığını söyleyebiliriz. Eğer *A* güzel bir şekilde normlanmış ise,

$$\mathrm{Re}(a) = (a + a^*)/2 \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{Im}(a) = (a - a^*)/2,$$

eder ve

$$\|a\|^2 = aa^*,$$

ile *A* üzerinde bir norm tanımlarız.

Eğer *A* güzel bir şekilde normlanmış ise,

$$a^{-1} = a^*/\|a\|^2$$

ile verilen bir çarpımsal tersi vardır.

Eğer *A* güzel bir şekilde normlanmış ve alternatif ise, *A* normlanmış bir bölme cebiridir (division). Bunu görmek için, lütfen herhangi bir $a, b \in A$ için 4 *a, b, a*, b** elemanının, Im(*a) ve* Im(b) ile çıkarılan birleşik cebirin içinde yer aldığına dikkat ediniz, böylece

$$\|ab\|^2 = (ab)(ab)^* = ab(b^*a^*) = a(bb^*)a^* = \|a\|^2\|b\|^2$$

Herhangi *-cebir *A* ‘dan başlayarak, Cayley-Dickson yapısı yeni bir *-cebir *A’* verir. *A’* elemanları $(a, b) \in A^2$ çiftleridir ve çarpım ve konjugasyon, (2) ve (3) denklemleri kullanılarak tanımlanır. Aşağıdaki önermeler Cayley-Dickson yapısının tekrarlanarak uygulanmasının etkisini gösterir:

Önerme2. 2.1. *A* asla reel değildir.

Önerme2.2. 2. *A* reel (ve bundan dolayı komütatif) $\Leftrightarrow$ *A’* komütatif

Önerme2. 2.3. *A* komütatif ve birleşmeli $\Leftrightarrow$ *A'* birleşmeli

Önerme2.2. 4. *A* birleşmeli ve iyi normlanmış $\Leftrightarrow$ *A'* alternatif ve güzel bir şekilde normlanmış

Önerme 2.2.5. *A* iyi normlanmış $\Leftrightarrow$ *A'* güzel bir şekilde normlanmış

Bu önermelerden:

R bir reel komütatif birleşmeli iyi normlanmış *-cebiridir

$\Leftrightarrow$ C bir komütatif birleşmeli iyi normlanmış *-cebiridir

$\Leftrightarrow$ H birleşmeli iyi normlanmış *-cebiridir

$\Leftrightarrow$ O iyi normlanmış *-cebiridir

ve bu nedenle R, C, H ve O normlanmış bölme cebirleridir (division). Aynı zamanda Oktanyonların, ne reel, ne komütatif, ne de çağrışımsal olduğunu gösterir.

Biz Oktanyonlar için Cayley-Dickson işlemini uygulamaya devam edersek, 16, 32, 64, ve devamındaki boyutlarda *-cebirlerinin bir dizisini elde ederiz. Bunların ilkine, muhtemelen 16-boyutlu olduğu gerçeğine atıfta bulunan, **sedenyonlar** denir. Yukarıdaki sonuçlardan bu dizideki tüm *-cebirlerinin güzel bir şekilde normlanmış olduğunu, ama reel, ne komütatif, ne de alternatif olduğunu gösterir. Bunların hepsi güzel bir şekilde normlanmış olduğundan, hepsinin çarpımsal tersleri vardır. Ama bunlar bölme cebirleri (division) değildir çünkü açık bir hesaplama sedenyonlar ve bundan dolayı da tüm geri kalanların sıfır bölenlere sahip olduğunu göstermektedir. Aslında, sedenyonlardaki normun sıfır bölenleri istisnai Lie grubu G_2'ye homeomorf olan bir altuzay oluştururlar.

Cayley-Dickson yapısı R, H, C, O dizini ve bu cebirlerinin temel özellikleri elde etmek için güzel bir yol sağlar. Ama bu yapının anlamı nedir? Bunu cevaplamak amacıyla, tüm $a, b \in A$ için *A'* yı, aşağıdaki ilişkileri ile birlikte $i^2 = -1$ denklemini karşılayan bir i elemanının *A* ya bir eklenti oluşturduğu cebir olarak tanımlamak daha iyi olur:

$$a(ib)=i(a^*b),\ (ai)b=(ab^*)i,\ (ia)(bi^{-1})=(ab)^*$$

A elemanları üzerindeki orijinal konjugasyonu ve $i^*=-i$ eşitliğini kullanarak *A'* yı

*-cebirine dönüştürürüz. Her bir *A'* elemanının bazı $a,\ b \in A$ için özel olarak $i^*=-i$ şeklinde yazılıp yazılmayacağı ve (a,b)=a+*i*b eşitliğini kurduğumuzda Cayley-Dickson yapısının tanımının bizim önceki tanımımıza eşit olup olmadığını kolayca kontrol edebiliriz.

(4)'teki ilişkilerin önemi nedir? Basitçe şöyle: *Bunlar konjugasyon bakımından düşünüldüğünde bunlarda konjugasyon kapsamına girerler!* Bu `konjugasyon ' kelimesinin çifte anlamını ifade eden bir cinastır. Gerçekte demek istediğim şey, bunların *A* daki * işleminin *i* deki konjugasyonu ifade ettikleridir. Özellikle, elimizde tüm $a \in A$ için

$$\alpha^*=(ia)i^{-1}=i(ai^{-1})$$

bulunmaktadır. *A'* birleşmeli olduğu zaman, (4)'teki ilişkilerin herhangi birisinin diğer ikisini ima ettiğine dikkat ediniz. Yani *A'* birleşmeli olmadığı zaman, biz gerçekten her üç ilişkiye de ihtiyaç duyarız.

Cayley-Dickson yapısının bu yorumu R ile başlayan yapıyı tekrarlayarak uyguladığımızda ne olduğunu görmeyi daha kolay bir hale getirir. R de * işlemi hiçbir şey yapmaz, bu durumda Cayley-Dickson yapısını *i* konjugasyonunun R elemanları üzerinde hiçbir etkisinin olmaması gerekir. R komütatif olduğundan, C = R' komütatif demektir. Ama C artık reel değildir çünkü $i^* =- i$ dir.

Sonra, Cayley-Dickson yapısını C ye uygulayalım. C bir komütatif olduğundan C deki işlem bir otomorfizmdir. Ne zaman elimizde bir α otomorfizmi ile donatılmış bir çağrışımsal *A* cebiri olsa, tüm $a \in A$ için

$$\alpha(a)=\alpha a\alpha^{-1}$$

ile o zaman *A* yı, ters çevrilebilir bir *x* elemanını daha büyük bir birleşmeli cebire genişletebilirsiniz. C birleşmeli olduğundan, bunun anlamı, C'=H birleşmelidir. Ama C reel olmadığından, H komütatif olamaz çünkü yeni eklenen *i* elemanındaki konjügasyonun önemsiz sayılmayacak bir etkisi olmalıdır.

Son olarak, Cayley-Dickson yapısını H ye uygulayalım. H bir komütatif olmadığından, H deki * işlemi bir otomorfizm değil, ancak bir karşı otomorfizmdir. Bu, bizim onu daha büyük bir çağrışımsal cebirin bazı elemanları konjugasyon olarak ifade edemeyeceğimiz anlamına gelir. Böylece H' = O birleşmeli olmamalıdır.

Bu bölümdeki bilgiler için kaynak olarak Baez, Yaylı, Hacısalihoğlu, Whitehead, Karacan, Walery ve Loday'dan yararlanılmıştır.

3. LİE GRUPLARI VE E_8

3.1. LİE Grupları

Tanım 3.1.1 Bir G cümlesi aşağıdaki şartları sağlarsa G ye Lie grubu denir:

1.)G bir analitik manifolddur,

2.)G bir gruptur,

3.)μ:GxG $\rightarrow$ G ,$\mu(x, y)=xy^{-1}$ olarak tanımlı tasvir analitiktir.

Şayet G hem bir grup hem de bir topolojik uzay olmak üzere yukarıdaki 3.) deki tasvirler sürekli ise G ye ***topolojik grup*** denir.

Bu tanımlara göre her Lie grubu bir topolojik gruptur. Literatürde bazan Lie grupları, analitik gruplar diye de adlandırılır.

Örnek 3.1.1 G=R^n bir Lie grubudur. Gerçekten de;

1.)G nin özdeşlik tasviri yardımıyla analitik manifold olduğu kolayca gösterilir..

2.)(G,+) bir gruptur.

3.)μ:GxG$\rightarrow$G ,$\mu(x,y)= xy^{-1}=x-y$ tasviri analitiktir.

Örnek 3.1.2 G=GL(n,R)= $\{$ A : detA$\neq 0\}$ matris çarpımı işlemine göre bir grup olup üstelik bir Lie grubudur.

Çözüm. GL(n,R) nin bir manifold yapısı vardır. Gerçekten $(a_{ij})\in$ GL(n,R) ise

$$x_{i+n(j-1)}=a_{ij}$$

olarak tanımlanırsa,

$$\begin{array}{ccc} GL(n,R) & \longrightarrow & R^{n^2} \\ (a_{ij}) & \longrightarrow & (x_k) \end{array}$$

bir injeksiyondur.

Böylece GL(n,R), R^{n^2} nin bir altcümlesi ile özdeşlenir. Tersi olan veya olmayan tüm matrislerin cümlesini R^{n^2} ile özdeşlersek, bu takdirde det : $R^{n^2} \to R$ fonksiyonu analitik olup, lineer cebirden de GL(n,R)≅$\det^{-1}(R^*)$ dir. Burada $R^*=\{x\in R\colon x\neq 0\}$dir. Böylece GL(n,R) R^{n^2} nin bir açık altcümlesidir. Dolayısıyla bir analitik manifolddur.

Şimdi μ:GxG$\to$G, λ:G$\to$G sırasıyla $\mu(x,y)=xy^{-1}$ ve ,$\lambda(x)=x^{-1}$ olmak üzere bunların analitik olduğunu kontrol edelim.

$\mu((a_{ij})(b_{ij}))=\mu(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})$ olduğundan μ bir polinom fonksiyon olup dolayısıyla analitiktir.

Cramer kuralından λ da bir rasyonel fonksiyon olarak alınıp determinantı alınırsa λ nin analitik olduğu görülür.

GL(n,R) nin matris çarpımı işlemine göre bir grup olduğu açıktır.

Örnek 3.1.3 $S^1=R/Z$ olmak üzere S^1 birim çemberi bir Lie grubudur. Daha önce S^1 in analitik manifold olduğunu göstermiştik. Şimdi farklı bir yol ile kısaca tekrar gösterelim.

$S^1=\{x\in R^2 \mid \sum_{i=1}^{2} x_i^2 =1\}$ olmak üzere $S^1\cong R/Z$ dir. Gerçekten (R,+) bir Abel grubu ve Z, R nin normal altgrubudur.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S^1 \\ R/Z \arrow[ur, dotted] & \end{tikzcd}$$

$f(t)=(cos2\pi t,sin2\pi t)$ olarak tanımlanırsa f bir epimorfizma ve Çek$f$=Z dir. Dolayısıyla 1. İzomorfizm teoreminden $R/Z\cong S^1$ dir. Açık olarak R bir Lie grubu ve Z bir diskret normal altgruptur. Z diskret olduğundan R/Z, R üzerinde bir manifold yapısına sahiptir. Z, R/Z grubunda normal olup, analitiklik lokal bir özelik olduğundan R/Z analitikliği elde edilir. Dolayısıyla S^1 analitik manifolddur.

$u=(x_1, y_1)$, $v=(x_2, y_2) \in S^1$, $u.v=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$ olarak tanımlı işlemle $(S^1, .)$ bir gruptur. $u^{-1}=(x_1,-y_1)$dir. Dolayısıyla $\mu(u,v)=u.v$ ve $\lambda(u)= u^{-1}$ tasvirleri analitiktir. O halde S^1 bir Lie grubudur.

Örnek 3.1.4 $T^n= S^1 x\, S^1 x ... x S^1=R^n/Z^n$ n-boyutlu tor grubu bir Lie grubudur.

Lie grupları teorisi çalışırken uygun bir nokta bulmak çok önemlidir. Bu nokta özdeş eleman noktasıdır.

Şimdi bir tabloda cebirsel ve topolojik özellikleriyle Lie grubu örnekleri verelim:

LİE GRUP	**AÇIKLAMASI**	**ÖZELİKLERİ**
R^n	Toplamsal Öklid Uzayı	Abelyen, basit irtibatlı, kompakt değil
$S^1=R/Z$	$\lvert z \rvert=1$, $z\in C$ olan sayıların çarpımsal grubu	Abelyen, irtibatlı, kompakt, basit irtibatlı değil
GL(n,R)	Tersinir nxn reel matrisler grubu	İrtibatlı değil, kompakt değil
O(n,R)	Reel ortogonal matrisler grubu	İrtibatlı değil, kompakt
SO(n,R)	Determinantı 1 olan reel ortogonal matrisler grubu	$n \geq 2$ için irtibatlı, kompakt n=3 ve $n \geq 5$ için basit irtibatlı değil. Simple ve semisimple
U(n)	Kompleks nxn üniter matrisler grubu	n=1 için S^1 e izomorf. n>1 için basit irtibatlı ve kompakt.
SU(n)	Determinantı 1 olan kompleks nxn üniter matrisler grubu	$n \geq 2$ için basit irtibatlı, kompakt. Simple ve semisimple.
S^3	Modülü 1 olan kuaterniyonların çarpım grubu	Basit irtibatlı, kompakt

Klasik grupların yaygın olanları şunlardır:

a) U(n) üniter grup, $U(n)=\{A: \overline{A}^t=A^{-1} \}$

b) SU(n) özel üniter grup, $SU(n)=\{A: \overline{A}^t=A^{-1}$ ve $\det A=1\}$

c) O(n) ortogonal grup, O(n)={A: $A^t=A^{-1}$}

d) SO(n) özel ortogonal grup, SO(n)={A: $A^t=A^{-1}$ ve detA=1}

e) Sp(n) simpletik grup, Sp(n)={A: $\overline{A}^t=A^{-1}$}

Tanım 3.1.2 $H \leq G$ olsun. G nin özdeş elemanını içeren her bir $U \subset G$ açık altcümlesi için $H \subset U$ ise, H ya G nin ***en dar altgrubu*** denir.

Sonuç 3.1.1 Bir G Lie grubu hiçbir dar altgruba sahip değildir.

Lemma 3.1.1 G komutatif ise çek(*exp*), G nin diskret bir altgrubudur.

Lie grubunun temelindeki manifold kompakt ise Lie grubuna kompakt Lie grubu ve benzer şekilde temeldeki manifold irtibatlı ise Lie grubuna irtibatlı Lie grubu denir.

E_n (n=6,7,8), F_4 veya G_2 kompakt irtibatlı Lie gupları olup bunlar ***exceptional Lie grupları olarak*** adlandırılır.

Bu bölümdeki bilgiler için kaynak olarak Çitil ve Loday,J.L.,'den yararlanılmıştır.

3.2 E_8 Grubu

E_8 boyutla, E_8 istisnai Lie gruplarının en büyüğü ve bazı açılardan en gizemlisidir. Bir grubu anlamak için en kolay yol, onu zaten anlaşılan bir yapının simetrileri olarak gerçekleştirmektir. Tüm basit Lie grupları içinde, E_8, önemsiz olmayan en küçük temsili bileşik temsil olan sadece bir tanesidir. Bu, lineer cebir kapsamında, E_8'in, en basit şekilde, kendi Lie cebirinin simetrilerinin grubu olarak tanımlanması demektir! Bu kısır döngüden çıkışın bir yolu E_8'i Riemann manifoldunun izometrileri olarak tanımlamak olacaktır. Daha önce de bahsedildiği gibi, E_8 $(\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2$ olarak adlandırılan 128 boyutlu bir manifoldun izometri grubudur. Ama ne yazık ki, kimse E_8'i tanımlamadan $(\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})\mathbb{P}^2$nin nasıl tanımlanacağını biliyor görünmemektedir. Bu nedenle bu grup biraz gizemli kalmaktadır.

Halen, E_8'i ele alabilmemiz için, onun Lie cebiri ile başlamamız gerekmektedir. Bunu üç eşdeğerde sihirli kare yapının herhangi birini kullanarak tanımlayabiliriz. Vinberg yapısı aşağıdakini vermektedir:

$$\mathfrak{e}_8 = \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{O}\otimes\mathbb{O}).$$

Tits yapısı aşağıdakini vermektedir:

$$\mathfrak{e}_8 \cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{O})\otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{O})).$$

Barton-Sudbery yapısı aşağıdakini vermektedir:

(1)
$$\begin{aligned}\mathfrak{e}_8 &\cong \mathfrak{tri}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{tri}(\mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})^3\\ &\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O}\otimes\mathbb{O})^3.\end{aligned}$$

$\mathfrak{e}_8$ boyutunu saymak için bunlardan herhangi birini kullanabiliriz, örneğin sonuncusu şunu verir

$$\dim \mathfrak{e}_8 = 28 + 28 + 3\cdot 8^2 = 248.$$

Üçlülüğün önemini vurgulamak için, (24) denklemini şu şekilde yeniden yazabiliriz:

(2)
$$\mathfrak{e}_8 \cong \mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8) \oplus (V_8\otimes V_8) \oplus (S_8^+\otimes S_8^+) \oplus (S_8^-\otimes S_8^-).$$

Burada Lie çarpımı $\mathfrak{so}(8)$ ve bunun üç tane 8-boyutlu indirgenemez temsili ile ilgili doğal haritalardan oluşturulur. Özellikle, $\mathfrak{so}(8)\oplus\mathfrak{so}(8)$ bir Lie alt cebiridir ve $\mathfrak{so}(8)$'in ilk kopyası $V_8\otimes V_8$, $S_8^+\otimes S_8^+$, ve $S_8^-\otimes S_8^-$ deki ilk faktöre etki ederken ikinci kopya bunların her birisindeki ikinci faktör üzerinde etki eder. Bunun $\mathfrak{f}_4$ tanımlaması ile karşılaştırılması gerekir.

Şimdi, denklem göstermektedir ki;

$$\mathfrak{so}(16) \cong \mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8) \oplus (V_8 \otimes V_8).$$

1 denklemi ile birlikte, bu, $\mathfrak{e}_8$ nin bir Lie alt cebiri olarak $\mathfrak{so}(16)$ içerdiğini göstermektedir. Aslında bu doğrudur da! Daha da iyisi, soldan sağa dönüş temsili $\mathfrak{so}(16)$ yı $\mathfrak{so}(8) \oplus \mathfrak{so}(8)$ ile sınırlandırırsak, şu şekilde çözülür

$$S_{16}^+ \cong (S_8^+ \otimes S_8^+) \oplus (S_8^- \otimes S_8^-),$$

Böylece şunu elde ederiz

(3) $$\mathfrak{e}_8 \cong \mathfrak{so}(16) \oplus S_{16}^+$$

veya daha Oktanyon bir ifadeyle,

$$\mathfrak{e}_8 \cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^2$$

Burada, reel iç çarpım uzayı *V* nin çarpık eşlenik reel-lineer dönüşümünün Lie cebirini ifade etmek için $\mathfrak{so}(V)$ kullanırız.

(3) denklemi hakkında gerçekten kayda değer bir şey de deki $\mathfrak{e}_8$ Lie çarpımının tamamen $\mathfrak{so}(16)$ ve S_{16}^+ içeren doğal haritalardan oluşturulmuş olmasıdır:

$$\mathfrak{so}(16) \otimes \mathfrak{so}(16) \to \mathfrak{so}(16), \qquad \mathfrak{so}(16) \otimes S_{16}^+ \to S_{16}^+, \qquad S_{16}^+ \otimes S_{16}^+ \to \mathfrak{so}(16)$$

Bunlardan birincisi, $\mathfrak{so}(16)$ içindeki Lie çarpımı, ikincisi $\mathfrak{so}(16)$nın soldan sağa temsilinin etkisi, ve üçüncüsü de bu uzayları ikilileriyle tanımlamak için ikinciden elde edilen, $\mathfrak{so}(16)$ ve S_{16}^+nın doğal iç çarpımı kullanarak elde edilir. Aslında bu $\mathfrak{e}_8$i tanımlamak için çok etkili bir yoldur. Bu yaklaşımı alırsak, Jacobi özdeşliğini doğrulamamız gerekir:

$$[[a, b], c]] = [a, [b, c]] - [b, [a, c]].$$

a; b; c nin üçü de $\mathfrak{so}(16)$ içerisinde bulunduğu zaman, bu $\mathfrak{so}(16)$ için Jacobi özdeşliğidir. Bunlardan ikisi $\mathfrak{so}(16)$ içerisinde bulunduğu zaman, bu, spinörlerin aslında $\mathfrak{so}(16)$ nın bir temsilini oluşturdukları gerçeğine döner. İkilik sayesinde aynısı sadece birisinin $\mathfrak{so}(16)$ içerisinde bulunduğu zaman da doğrudur. Böylece *a, b, c* nin tamamının S_{16}^+ içerisinde bulunduğu durumu dikkat için de yeterlidir. Bu 16 sayısıyla ilgili her özel şeyi kullanan tek durumdur. Ne yazık ki, bu noktada bir kaba kuvvet hesaplama gerekli gibi görünüyor. Sıkıntıyı en aza indirgeyen iki yaklaşımı görmek için Adams ile Green, Schwarz ve Witten tarafından yazılan kitaplara bakınız. Daha kavramsal bir yaklaşım bulmak iyi olurdu.

$\mathfrak{e}_8$den başlayarak, E_8 i bu Lie cebiri ile basitçe Lie grubuna bağlı olarak tanımlayabiliriz. Adams tarafından da gösterildiği gibi, $\mathfrak{so}(16) \subset \mathfrak{e}_8$ Lie alt cebiri ile çıkarılan E_8 in alt grubu Spin(16)= Z_2 dir. Bu bizim **oktonyonik projektif düzlemi**

$$(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2 = E_8 / (\mathrm{Spin}(16)/\mathbb{Z}_2)$$

ile tanımlamamızı sağlar.

(3) denkleminde, bu manifoldun herhangi bir noktasındaki teğet uzayı $S_{16}^{+} \cong (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^2$ e izomorfiktir. Bu kısmen ona neden 'octooctonionic projektif düzlem' denildiğini açıklamaktadır çünkü bir projektif düzlem için olağan aksiyomları karşılıyor gibi görünmemektedir.

Octooctonionic projektif düzlem üzerine, grup etkisi ortalama tekniği ile bir E_8 değişmezi Riemann metriği koyabiliriz. O zaman ortaya çıkan

$$E_8 \cong \mathrm{Isom}((\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2)$$

Ve bundan dolayı

$$\mathfrak{e}_8 \cong \mathfrak{isom}((\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2)$$

Özetle, elimizde aşağıdaki E_8 Oktanyon tanımlar:

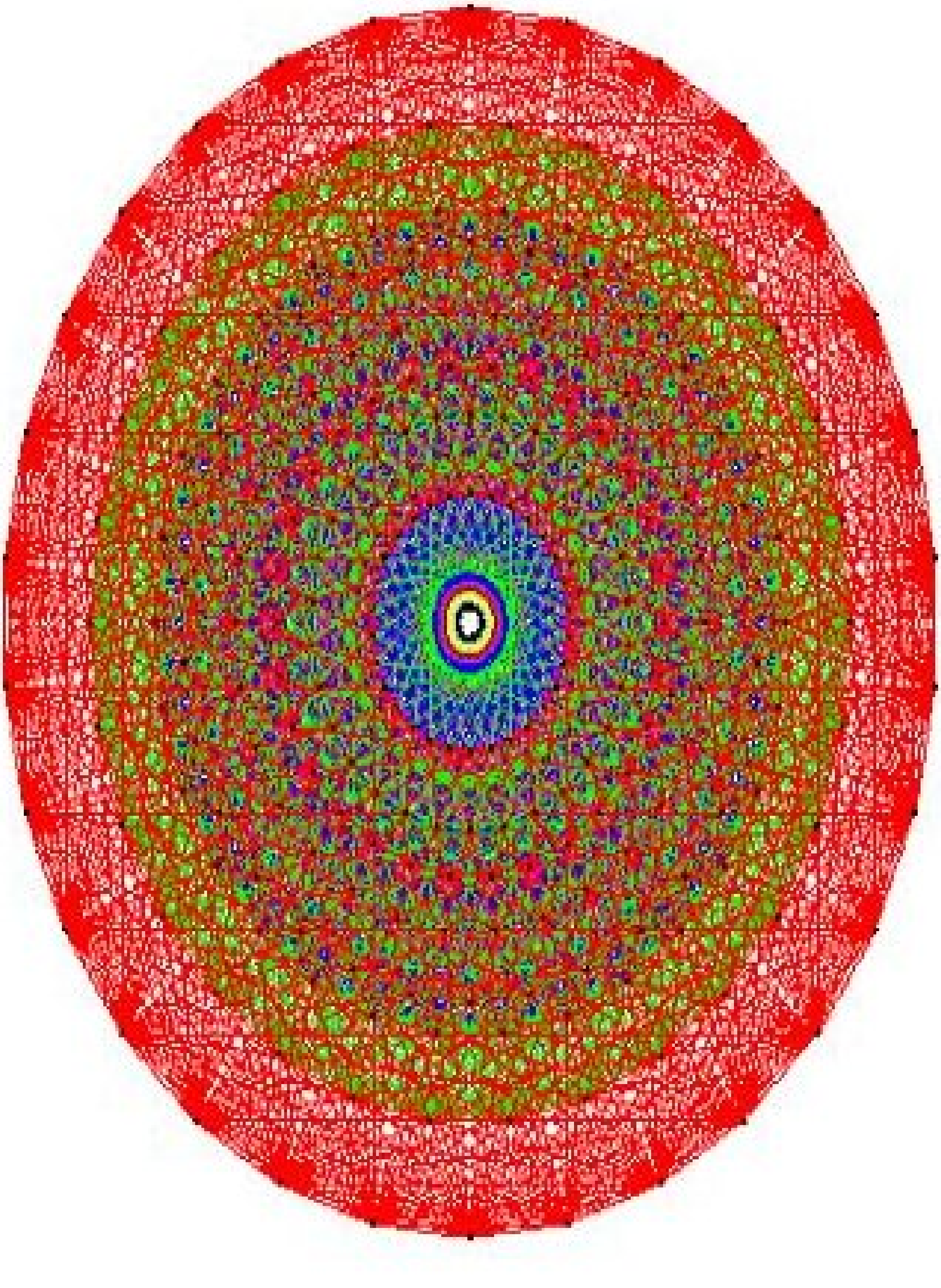
Teorem 3.2.1 $\mathfrak{e}_8$ *in sıkıştırılmış reel formu aşağıdaki şekilde verilir*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{e}_8 &\cong \mathfrak{isom}((\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})\mathbb{P}^2) \\
&\cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{der}(\mathfrak{h}_3(\mathbb{O})) \oplus (\mathrm{Im}(\mathbb{O}) \otimes \mathfrak{sh}_3(\mathbb{O})) \\
&\cong \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{der}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{sa}_3(\mathbb{O} \otimes \mathbb{O}) \\
&\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O} \oplus \mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^2 \\
&\cong \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus \mathfrak{so}(\mathbb{O}) \oplus (\mathbb{O} \otimes \mathbb{O})^3
\end{aligned}$$

Burada her bir durumda $\mathfrak{e}_8$ üzerindeki Lie çarpımı toplananlar üzerindeki doğal bilineer işlemlerden kurulur.

Bu bölümdeki bilgiler için kaynak olarak Baez, Walery ve Whitehead'den yararlanılmıştır.

3.3 E_8 in Kök Sisteminin Resmi



4. SONUÇLAR VE TARTIŞMA

Artık, kendi bağlamları içinde büyüleyici bir matematiksel konu olmasının yanı sıra, Oktanyonların, aksi takdirde bağlantıları tamamen gizemli kalacak olan birçok önemli fenomen arasında bağlantı kurduğu aşikardır. Nitekim bu bağlantıların tam hikâyesi burada açıklayabildiğimizden çok daha derin ve daha ayrıntılıdır. Ayrıca şunları da içerir:

- Analitik fonksiyonlar teorisinin oktanyonsal bir analoğunu kurmaya çalışır
- Jordan çifti, Jordan üçlü sistemleri ve Freudenthal üçlü sistemlerinin istisnai Lie gruplarının tesisindeki rolü
- İntegral Oktanyonlar kullanarak E_8 şebekesi ile Leech şebekesinin kurulması
- G_2 ile ilişkili kuantum grubundan gelen çerçeveli trivalan grafiklerin invariantı ile normlandırılmış bölme cebirleri için Tensor-kategorik yaklaşımları
- Tepe noktası operatör cebirlerinin oktanyonsal yapıları
- İstisnai basit Lie alt cebirlerinin oktanyonsal yapıları
- Simetrik uzayların oktanyonsal yapıları
- Oktanyonlar ve `ezilmiş 7-küre'geometrisi, yani homojen alanlarda Spin (7)/G_2, Spin (6)/SU(3) ve Spin(5) = SU(2), bunların tamamı düz yapısı ile S^7 ye diffeomorfiktir
- 'Joyce manifoldları teorisi', yani 'G_2 holonomi grubu ile 7-boyutlu Riemann manifoldu'
- Oktanyonsal Hopf Haritası ve Yang-Mills 8 boyut denklemlerinin instanton çözümleri
- 10 boyutlu Superstring teorisi ile 10 boyutlu süper Yang-Mills teorisinin oktanyonsal yönleri
- 11 boyutlu Süpergravite ve süpermembran teorileri ve 4 boyutta fizik teorileri elde etmek amacıyla 11 boyutlu Süpergraviteyi sıkıştırmak için Joyce manifoldlarının rolünün oktanyonsal yönleri
- $C \otimes H \otimes O$ cebirine dayalı olarak Standart Model'in Geoffrey Dixon uzantısı
- Oktanyonları fizikte kullanmak için diğer girişimleri

Bu konularla ilgili Baez de ilgili kaynaklar belirtilmiştir.

KAYNAKLAR

Baez J.C., 2001. The Octonions, Bullettın of the American Mathematıcal Soceıety,V39,N2,PP145-205

Çitil, M. 2003. Kompakt İstisnai Lie Gruplarının Homotopi Gruplarının Demeti Ph. D. Tezi, Ankara Üniversitesi, Ankara

Loday,J.L., Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups J. App.Algebra,24,199-202 (1982).

Walery,D.G. and Loday,J.L., Obsructions Excision en K-theorie Algebique. Springer Lecture Notes in Math. 854, 179-216 (1981).

Wen-Log Lin, 1992. Octonions and Exceptional Groups?, Chinese Journal Of Physics, National Taiwan Notmal University, Taipei Taiwan V30, N4, ss.579-587

Whitehead,J.H.C., Combinatorial homotopy II, Bull, A.M.S. 55,453-496 (1949).

Yaylı, Y., Hacısalihoğlu, H.H., Karacan, M.K. 2004. Cayley Sayıları ve Cisim Yapıları, F. Ü. Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, V16, N3, ss.425-432

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı, soyadı	: Ayhan KILINÇ
Uyruğu	: T.C.
Doğum tarihi ve yeri	: 06.01.1971 Kahramanmaraş
Medeni hali	: Evli
e-posta	: ayhannkilinc@hotmail.com.
Telefon	: 505 5835801

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Karadeniz Teknik Üniversitesi Matematik Bölümü	1991
Lise	Kahramanmaraş Lisesi	1987

İş Deneyimi

YIL	YER	GÖREV
1993-1995	Batman Kozluk LisesiÖğretmen	
1995-1996	Şanlıurfa Suruç Lisesi	Asker- Öğretmen
1996-1997	Batman Kozluk Lisesi	Öğretmen
1997-1999	Kahramanmaraş Anadolu Teknik Lisesi	Öğretmen
1999-2002	Kahramanmaraş Kadriye Çalık Anadolu Lisesi	Öğretmen
2002-2008	Eksen Dershanesi	Kurucu-Öğretmen
2008-2009	Zirve Dershanesi	Öğretmen
2010-2011	Kilis Endüstri Meslek Lisesi	Öğretmen
2011-	Kahramanmaraş Hoca Ahmet Yesevi Lisesi	Öğretmen

Katıldığı Kurslar

Yıl	Kursun Adı	Kurum	Yer
1992	Pedagojik Formasyon	Gazi Üniversitesi	Ankara
2010	Matematik Dersi Öğretim Programları	Milli Eğitim Bakanlığı	Erzurum

Yabancı Dil

İngilizce