T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EPİSTEMİK OYUN TEORİSİ ALGORİTMALARI: "EpistemicGameTheory" R PAKETİ

DOKTORA TEZİ

Bilge BAŞER

İstatistik Anabilim Dalı

İstatistik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Nalan CİNEMRE
Tez Eş Danışmanı: Doç. Dr. Andrés PEREA

MART 2017

Bilge BAŞER tarafından hazırlanan EPİSTEMİK OYUN TEORİSİ ALGORİTMALARI: "EpistemicGameTheory" R PAKETİ adlı bu tezin doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Nalan CİNEMRE

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından İstatistik Anabilim Dalında doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan:	: Prof. Dr. Nalan CİNEMRE	
Üye	: Prof. Dr. Ünal ÖZDEN	
Üye	: Prof. Dr. Zeynep Aslı ALICI	
Üye	: Doç. Dr. Ayça ÇAKMAK PEHLİVANLI	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. E. Özge ÖZDAMAR	

Bu tez, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

ÖNSÖZ

Üzerimde bulunan büyük emeği için tez danışmanım Prof. Dr. Nalan CİNEMRE'ye, beni bu çalışmaya yönlendiren, bilgisini ve desteğini her zaman yanımda hissettiğim tez eş danışmanım Andrés PEREA'ya, her eksilişimde beni tamamlayan ve hep yanımda olan çalışma arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Ömrüm boyunca her attığım adımda sonsuz sevgilerini ve desteklerini hissettiğim, bana aile olmanın değerini öğreten sevgili aileme çok teşekkür ederim. Anlayışı ve sevgisiyle her an yanımda olan, hayatı paylaştığım sevgili eşime çok teşekkür ederim.

Ve canım kızım Arya… Varlığın için çok teşekkür ederim.

Arya'ya…

Mart, 2017 **Bilge BAŞER**

EPİSTEMİK OYUN TEORİSİ ALGORİTMALARI: "EpistemicGameTheory" R Paketi

ÖZET

Bu çalışmanın amacı, iki kişili statik ortaksız bir oyunda her i oyuncusu ve her s_i $(i = 1,2,\dots,n)$ rasyonel stratejisi için s_i'nin rasyonelliğe ortak inanç altında optimal olduğunu destekleyen bir t_i türünün var olduğu epistemik modeli kurmaktır. Uygulamada t_i türünün bulunması, teorinin gerektirdiği birtakım matematiksel işlemler sonucu deneme-yanılma yaklaşımına dayanmaktadır. Üzerinde çalışılan oyunun boyutunun büyümesiyle birlikte halihazırda kullanılan yöntem elverişli olmaktan uzaklaşmaktadır. Bu çalışmada, iki kişili statik ve ortaksız oyunlar için bir i oyuncusunun, s_i rasyonel stratejisinin rasyonelliğe ortak inanç altında optimal olduğunu destekleyen ve oyuncunun kazancını maksimize eden türün bulunmasını sağlayan doğrusal programlama modeli geliştirilmiş ve modelin çözümünü sağlayan program R istatistiksel programlama dili kullanılarak yazılmıştır.

Optimal seçim sadece rasyonel stratejiler arasından yapıldığı için öncelikle oyunda kesin mahkûm stratejilerin sürekli eliminasyonunun yapılması gerekir. Gerçek hayatta oyunların çoğunlukla büyük boyutlu olmaları nedeniyle eliminasyon işleminin bilgisayar ortamında gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Oyun teorisi ile ilgili yazılımlar çoğunlukla belirli oyun türlerinde sonuç odaklı bir yaklaşımla hazırlanmış olduğundan, sürekli eliminasyon yöntemini gerçekleştiren bir yazılıma ihtiyaç duyulmuştur. Bu amaçla çalışmada, iki kişili, statik ve ortaksız oyunlar için saf ve karma kesin baskın stratejileri belirleyen program geliştirilmiştir.

Her iki kısımda gerçekleşen işlemler için R istatistiksel programlama dili kullanılarak "esdc" ve "type" isimli iki fonksiyon oluşturulmuş ve bu fonksiyonlar "EpistemicGameTheory" adı verilen bir R paketi yaratılarak paketin içeriğine eklenmiştir. R, açık kaynak bir yazılım olması bakımından tercih edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Epistemik oyun teorisi, rasyonelliğe ortak inanç, tür, “EpistemicGameTheory” R paketi.

EPISTEMIC GAME THEORY ALGORITHMS: “EpistemicGameTheory” R Package

SUMMARY

The aim of this study is to construct an epistemic model for two-player static and noncooperative game, for each player i and for each rational choice s_i $(i = 1,2, \dots, n)$, that there is a type t_i that supports s_i is optimal and expresses common belief in rationality. In practice, the finding of t_i depends on an empirical approach with some mathematical operations in scope of the theory. This approach becomes less convenient with the growth of the size of the game. To solve this difficulty, a linear programming model is constructed for two-players, static and noncooperative games to find the type that is supporting that player i’s rational choice s_i is optimal under common belief in rationality and maximizing the utility of the game. In accordance with this purpose, a software was developed by using R Statistical Programming Language.

Since the optimal choice would only be made from rational choices, it is first necessary to eliminate all strictly dominated choices. In real life, the games are usually large sized. Therefore, the elimination process should be performed in a computer environment. Since software related to game theory was mostly prepared with a result-oriented approach for some types of games, it was necessary to develop a software for the iterated elimination method. With this regard, a program has been developed that determines the choices that are strictly dominated by pure and randomized choices in noncooperative, two-players games.

Two functions named "esdc" and "type" are created by using the R statistical programming language for the operations performed in both parts, and these functions are added to the content of an R package after its creation with the name "EpistemicGameTheory". R is preferred because of its open-source software feature.

Keywords: Epistemic game theory, common belief in rationality, type, “EpistemicGameTheory” R package.

İÇİNDEKİLER

ÇİZELGE LİSTESİ

ŞEKİL LİSTESİ

1. GİRİŞ

"Oyun teorisinin amacı çözüm bulmak değil, kavramaktır."

Richard W. Hamming (Casti, 2000)

Kararın olası sonuçlarını değerlendirebilmek için rakiplerin sonucu etkileyebilecek olası tercihleri hakkında bir inanç oluşturulması çok önemlidir. Buna ek olarak, iyi bir tercih yapabilmenin ön koşulu rakipler hakkında mantıklı bir inanca sahip olunmasını gerektirir. Fakat genelde, rakiplerin her inancı onların rakibine göre mantıklı olmayabilir. Rakiplerin bazı stratejileri diğer seçeneklerine göre daha makul bulunabilir. Rakibinin hangi seçeneği daha mantıklı bulacağına veya hangi seçenekleri tercih etmeyeceğine karar verebilmesi için oyuncunun kendisini rakibinin yerine koyup onun rakipleri hakkında sahip olduğu olası düşüncesini tespit etmesi gerekir. Yani, rakipler hakkında bir kanıya ulaşmadan önce, onların düşünce sistemlerinin gerekçelendirilmesi zorunludur. İşte bu gerekçelendirme süreci bu çalışmanın ana konusudur. Başka bir ifadeyle, bu çalışmada oyunda nihai seçiminizi yapmadan önce rakiplerinizin karar verme yapısını anlamanın akılcı yolu incelenmiştir.

Nash dengesi, uzun yıllar oyun teorisinde büyük bir öneme sahip olmuştur. Nash dengesi, oyuncunun rakibinin yapabileceği seçimleri modellerken tek bir olası yöntem kullanır. Literatürde de yaygın olarak oyuncuların Nash dengesine uygun davranış sergiledikleri varsayılmıştır. Ancak bu yaklaşım, genel olarak iki nedenden ötürü yetersiz görülmektedir. Nedenlerden ilki, karar verme sürecinin önemli bir kısmı, içerisinde bulunulan durumla ilgili mantıklı bir model kurmaktır ve üzerinde ayrıntılı düşünülmesi gerekir. İkinci neden ise, Nash dengesinin oyuncuların rakipleri hakkındaki düşüncelerini modellemesi aşamasında bazı makul olmayan varsayımlara dayanmasıdır (Perea, 2012). Bu özellikleri Nash dengesini doğal olmayan bir yöntem haline getirmiş ve teorinin sınanması gereği gündeme gelmiştir.

Yaklaşık yirmi beş yıl önce epistemik oyun teorisinin ileri sürülmesiyle birlikte oyun teorisinde kavramsal değişiklikler ortaya çıkmıştır. Bu genç bilim alanı oyun teorisini geçmişine, temel kavramlarına, yani oyuncuların rakipleri hakkında mantıksal model kurması olgusuna geri götürmüştür. Epistemik oyun teorisinin özünde, insanların aynı koşullar altındaki oyunda farklı gerekçelendirme eğiliminde olmaları gerçeği vardır. Bu nedenle, farklılıkların söz konusu olduğu bir ortamda tek bir şekilde mantık yürütmek ve bunun en iyi olduğunu söylemek doğru değildir. Bu gibi ortamlarda sadece farklı mantık yürütme biçimleri olduğu söylenebilir ve bunlardan hangisinin daha iyi olduğu konusunda yorum yapmaktan kaçınılmalıdır. Epistemik yaklaşımda amaç, oyunda kullanılabilecek mantık yürütme yöntemlerini tanımlamak ve kullanılan yöntemin oyunun nihai sonucunu nasıl etkilediğini incelemektir. Rasyonelliğe ortak inanç bu yöntemlerden biridir ve epistemik oyun teorisinin kalbi olarak nitelendirilebilir. Epistemik oyun teorisi çerçevesinde incelenen diğer tüm yaklaşımlar rasyonelliğe ortak inanç kavramının çeşitli varyasyonları olarak kabul edilebilir. Rasyonelliğe ortak inanç yaklaşımının temelinde ise, inanç hiyerarşisi kavramı yer almaktadır. Ancak, inanç hiyerarşisinin hem teorik hem de pratik bakımdan bazı dezavantajları vardır. Teorik bakımdan, hiyerarşinin matematiksel bir tanımını yapmak oldukça güçtür. Pratik bakımdan ise, sonsuz hiyerarşinin her bir aşamasını (birinci-derece inanç, ikinci-derece inanç, vb.) yazmak ve ifade etmek çoğu zaman imkânsızdır. Bu nedenle hiyerarşi mantığını daha kısa ve biçimsel bir yöntemle ifade edebilen bir yaklaşıma ihtiyaç duyulmuştur.

Sonsuz inanç hiyerarşisi kavramını oyun teorisine Macar-ABD'li ekonomist John Harsanyi kazandırmıştır. Harsanyi, oyuncuların oyunun parametreleri hakkında tam bilgiye sahip olmadıkları Bayesçi oyunlar olarak da adlandırılan eksik bilgili oyunlar üzerinde çalışmıştır. Her oyuncunun oyunun bilinmeyen parametreleri hakkındaki inancını, diğer oyuncuların parametreler hakkındaki inançları hakkındaki inancını, vb. düşünceleri modellemek istemiştir. Bu yöntem açık yaklaşım olarak adlandırılmıştır. Bununla beraber, açık yaklaşımın yönetilmesi güç ve matematiksel olarak hantal olması, eksik bilgi altındaki oyun kuramının gelişiminin ilk aşamalarında karşılaşılan en büyük engel olmuştur. Bu konudaki büyük buluş Harsanyi tarafından geliştirilen ve kendisine otuz yıl sonra 1994'te Nobel Ekonomi ödülü kazandıran çığır açıcı "Games With Incomplete Information" isimli çalışması olmuştur. Harsanyi sözlü olarak problemi açık bir biçimde ifade ederken, inançların sonsuz hiyerarşisi zorluğundan kaçınan daha kapalı ve kullanışlı bir model önermiştir. Harsanyi modelinin temeli "tür"dür. Tür kavramı oyuncuların oyunun bilinmeyen parametreleri hakkındaki inanç hiyerarşisinin tam bir tanımı olarak düşünülebilir. Öyle ki tür, oyuncunun aklında yer alan parametreler hakkındaki inançlarının ve diğer oyuncuların türleri ile ilgili cevaplarının özel bir biçimde gösterimidir. Türün bu niteliği, etkileşimli karar verme ortamında kaçınılmaz olarak oyuncuya kendine referans olgusunu, yani kendi türü aracılığıyla diğer oyuncuların türlerine karar verme niteliğini kazandırır (Zamir, 2008).

Bu çalışmanın amacı, statik ortaksız bir oyunda her i oyuncusu ve her s_i $(i = 1,2,\dots,n)$ rasyonel stratejisi için s_i'nin rasyonelliğe ortak inanç altında optimal olduğunu destekleyen bir t_i türünün var olduğu epistemik modeli kurmaktır. Uygulamada t_i türünün bulunması, teorinin doğrultusunda birtakım matematiksel işlemler sonucu deneme-yanılma yaklaşımına dayanmaktadır. Üzerinde çalışılan oyunun boyutunun büyümesiyle birlikte halihazırda kullanılan yöntem elverişli olmaktan uzaklaşmaktadır. Bu çalışmada, iki kişili ortaksız oyunlar için bir i oyuncusunun, s_i rasyonel stratejisinin rasyonelliğe ortak inanç altında optimal olduğunu destekleyen ve oyuncunun kazancını maksimize eden türün bulunmasını sağlayan doğrusal programlama modeli geliştirilmiştir ve modelin çözümünü sağlayan program yazılmıştır. Optimal seçim sadece rasyonel seçimler arasından yapıldığından öncelikle oyunda kesin mahkûm stratejilerin sürekli eliminasyonunun yapılması gerekir. Gerçek hayatta oyunların çoğunlukla büyük boyutlu olmaları nedeniyle eliminasyon işleminin bilgisayar ortamında gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Oyun teorisi ile ilgili yazılımlar çoğunlukla belirli oyun türlerinde sonuç odaklı bir yaklaşımla hazırlanmış olduğundan, sürekli eliminasyon yöntemini gerçekleştiren bir yazılıma ihtiyaç duyulmuştur. Bu doğrultuda, iki kişili ortaksız oyunlarda saf ve karma kesin baskın stratejileri belirleyen program yazılmıştır.

Bu doğrultuda, tezin ikinci bölümünde klasik oyun teorisinin gelişimi, oyun kavramı, oyunların sınıflandırılması, iki kişili sıfır toplamlı ve iki kişili sıfır toplamlı olmayan oyunlar, baskın strateji kavramı ve Nash dengesi açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, epistemik oyun teorisinin gelişimi, Morgenstern yaklaşımı, Nash dengesi üzerine yapılan eleştiriler ve epistemik oyun teorisi kavramları incelenmiştir. Dördüncü bölümde ise, yazılmış olan algoritmalar için R İstatistiksel programlama dili kullanılarak "esdc" ve "type" isimli iki fonksiyon oluşturulmuş ve bu fonksiyonlar "EpistemicGameTheory" adı verilen bir R paketi yaratılarak paketin içeriğine eklenmiştir. R, açık kaynak bir programlama dili olması bakımından tercih edilmiştir ve yazılmış olan program "Renkler" isimli sayısal bir örnek ve "Depo Savaşları" isimli bir gerçek hayat problemi üzerinde uygulanarak her iki oyuncu için epistemik model oluşturulmuştur. Son bölümde ise çalışmanın sonuçları ve literatüre katkıları değerlendirilmiştir.

2. KLASİK OYUN TEORİSİ

2.1. KLASİK OYUN TEORİSİNİN GELİŞİMİ

Oyun teorisine ilk kez Babil'lerin "Talmud Yasaları" adını verdikleri Yahudilik esaslarına dayanan ve milattan sonra 0-500 yılları arasında geçerliliğini koruyan medeni hukuku, tören kurallarını ve efsanelerini kapsayan metinlerinde rastlanmaktadır. Oyun teorisine konu olan yasa; üç eşi olan bir kocanın vefatı sonrasında mirasın üç eş arasında nasıl paylaştırılacağına ilişkindir. Evlilik sözleşmesine göre farklı şartlar altında farklı oransal paylaşımlar söz konusudur. Yasaya göre; kocadan kalan miras 100 para birimi ise eşler arasında eşit paylaştırılması, miras 200 para birimi ise (50, 75, 75) şeklinde paylaştırılması, miras 300 para birimi ise (50, 100, 150) olacak biçimde paylaştırılması gerekmektedir. 1985 yılında bu yasanın ortaklı oyunlar kapsamına girdiği ve problemin uygun şekilde tanımlanmış her bir çözümünün çekirdek oyuna karşılık geldiği belirlenmiştir (Aumann & Maschler, 1985).

Yüzyıllar sonra; 1654 yılında Pierre de Fermat ve Blaise Pascal'ın karma stratejinin temeli olan olasılık çözümlemeleri üzerine yaptıkları yazışmalar, oyun teorisinin bir disiplin olarak yapılanmasına olanak sağlamıştır.

13 Kasım 1713'te James Waldegrave, kendisinin tasarladığı iki kişilik "le Her" kart oyunu için minimaks (maksimumların minimumu) ölçütüne dayalı çözüm önerisinde bulunmuştur. Minimaks ölçütüne göre rakip oyuncu hangi stratejiyi seçerse seçsin, diğer oyuncunun kazanma olasılığını maksimum yapan karma strateji kavramını tanımlamıştır. Waldegrave geliştirdiği çözüm önerisini Pierre-Remond de Montmort ve Nicolas Bernoulli ile paylaşmış, ancak başka oyunlar için uzantılarının yapılmaması nedeniyle minimaks ölçütünün anlamı ve önemi uzunca bir süre fark edilememiştir (Bellhouse, 2007).

Oyun teorisinin ekonomi alanında ilgi çekmesi, 1838 yılında Fransız Ekonomist Augustin Cournot'un "Refah Teorisinin Matematiksel Prensipleri" isimli çalışmasının yayımlanması ile başlamıştır. Cournot, duopolinin özel durumu ile ilgili araştırmalarında Nash dengesinin sınırlı bir sürümünü kullanmıştır (Romp, 1997).

1883 yılında Joseph Bertrand, Cournot modeli gibi aynı homojen ürünü üreten firmalar arasındaki rekabeti analiz eden oyunlar üzerine çalışmıştır. Cournot modelinde firmaların ürünlerden ne kadar üretilmesi gerektiğine karar vermesi incelenirken, Bertrand modelinde ürünlerin fiyatının ne olması gerektiği konusundaki rekabet incelenmiştir (Pindyck & Rubinfeld, 2005).

Yirminci yüzyılın başlarında, Almanya'da David Hilbert önderliğinde Hilbert programı üzerinde çalışan bir grup matematikçi; matematiksel formalizmin, aksiyomatik yaklaşımın daha önce matematiksel olarak ele alınmamış alanlarda da olguları açıklamak için kullanılabilecek bir araç olduğunu düşünmüşlerdir (Şahin & Eren, 2012). Hilbert kavramının sosyal alana yansıtılması, Ernst Zermelo'nun satranç oyunu üzerine ortaya koyduğu Zermelo Teoremi ile gerçekleşmiştir. Zermelo Teoremi oyun teorisinin bilinen ilk biçimsel teoremidir. Zermelo, satranç oyununu birbirine karşıt amaçları olan iki kişili oyun olarak analiz etmiştir. Zermelo iki soruya cevap aramıştır:

a) "Beyaz"ın kazanma pozisyonu matematiksel olarak ifade edilebilir mi?

b) "Beyaz" kazanma pozisyonuna geldiğinde, oyunu kazanması için gerekli olacak hamlelerin sayısının üst sınırı belirlenebilir mi?

Şüphesiz aynı sorular "Siyah" için de geçerlidir. Zermelo'nun gerçekleştirdiği analizler sonucunda elde ettiği sonuçlar şöyledir: Hangi pozisyonda bulunuyor olursa olsun "Beyaz", "Siyah"ın seçimlerinden bağımsız olarak sonlu sayıda hamle sonucunda kazanmayı garanti eder. Benzer şekilde "Siyah" hangi pozisyonda bulunuyor olursa olsun, "Beyaz"ın seçimlerinden bağımsız olarak sonlu sayıda hamle sonucunda kazanmayı garanti eder ya da "Beyaz" ve "Siyah" birbirlerinin seçimlerinden bağımsız olarak berabere kalmayı garantileyebilirler. Bu sonuç oyun teorisi literatüründe Zermelo teoremi olarak bilinmektedir (Perea, 2014a).

Oyun teorisinin gelişimine katkısı olan çalışmalardan bir kısmı da Fransız matematikçi ve devlet adamı Emile Borel'e aittir. Borel; 1921, 1924 ve 1927'de yayımladığı çalışmalarında iki oyunculu sıfır toplamlı simetrik oyunlarla ilgilenmiştir. Bu oyunlarda, sonuç hem şansa hem de oyuncuların becerilerine dayanmaktadır. Aynı zamanda da oyuncuların kazançları toplamı sıfıra eşittir. Her iki oyuncu da aynı strateji kümesine sahiptir ve oyundaki rolleri özdeştir. Borel oyuna, rakibin seçiminden bağımsız olarak beklenen kazancı en fazla sıfır olan kötü stratejileri elemekle başlar. Her iki oyuncu için de kötü strateji kalmayıncaya dek bu indirgeme işlemini tekrarlar ve indirgenmiş oyunu elde eder. Borel 1921'de yayımlanan çalışmasında, eğer indirgenmiş oyunda her iki oyuncunun da üç stratejisi varsa, oyuncuların rakibinin seçiminden bağımsız olarak, stratejilerini rassallaştırdıklarında beklenen kazançlarının sıfır olacağını göstermiştir. 1924'te yayımlanan çalışmasında, aynı sonucun her iki oyuncunun da indirgenmiş oyunda beş stratejisi kalması halinde de elde edileceğini ispatlamıştır. 1927'de yayımlanan çalışmasında ise, yedi strateji için aynı sonucun doğrulandığını göstermiştir. Borel, bu üç çalışmasında makul olmayan stratejilerin sürekli eliminasyonu ile iki kişili oyunlar için karma stratejinin ilk modern formülasyonunu vermiştir. Bu yaklaşım epistemik oyun teorisi kapsamında önemli bir rol oynamaktadır (Perea, 2014a).

Oyun teorisinin aksiyomatik temellerini Macar asıllı matematikçi John von Neumann, 1928 yılında yayımladığı çalışmasında açıklamıştır. Neumann'ın oyun teorisine olan ilgisi, Hilbert programının matematiksel formalizminin sosyal bilimler alanında geliştirilmesi üzerine çalışırken Borel'in notlarını incelemesi sonucunda ortaya çıkmıştır. Neumann; iki kişili, sıfır toplamlı ve sonlu stratejili oyunları tamamen matematiksel formda ve sistematik bir biçimde tanımlamıştır. Borel'in elde ettiği sonuçları genelleştirerek simetrik olmayan oyunlar için de ispatlamıştır. Ayrıca, oyuncuların işbirliği içinde stratejilerini birlikte seçtikleri ve uyguladıkları oyunlar üzerine de çalışmıştır.

Neumann ve Morgenstern'in 1944 yılında yayımladıkları "The Theory of Games and Economic Behaviour" isimli kitap, oyun teorisine ait ilk kitap olma özelliğini taşır. Kitapta minimaks-maksimin teoreminin açıklanmasıyla birlikte, oyun teorisi matematikçilerin ilgisini çekmiş ve L. H. Loomis, teoremin ilk cebirsel ispatının yer aldığı bir çalışma gerçekleştirmiştir (Loomis, 1946).

Zermelo, Borel ve Neumann'ın çalışmaları incelendiğinde ortak bir noktada birleştikleri görülür. Üçü de rakibinin seçimi ne olursa olsun minimum faydayı garanti eden (maksimin) çözüm üzerinde yoğunlaşmışlardır. Bu yaklaşım, rakibin davranış biçimi üzerine bir modelleme gerektirmez, çünkü oyuncunun rakibi hakkında hiçbir fikri olmasa bile minimum faydayı garantilemek üzerine kurulmuştur. Dolayısıyla bu yaklaşımda, rakibin seçimleri arasında çok makul ya da az makul gibi bir ayrım söz konusu değildir; seçimin akla uygun olup olmamasına bakmaksızın sadece sizin açınızdan rakibinizin size karşı seçebileceği en kötü stratejiyi belirler (Perea, 2014a).

Neumann'ın yaklaşımları, gerçek yaşamda oynanan, yani insanların eylemlerini ayrı ayrı seçtiği, ancak ötekilerle tam bir çatışma içinde olmadığı oyunları kapsamıyordu. Çatışma ve işbirliğini birleştiren genel oyunlar için bir denge kavramı, John Nash tarafından geliştirilmiştir (Dixit & Nalebuff, 2012).

Nash, herhangi bir stratejik etkileşimde, bir oyuncunun en iyi seçiminin (hamlesinin), öteki oyuncuların ne yapacaklarına dair inancına sıkı sıkıya bağlı olduğunu fark etti. Nash, her oyuncunun, öteki oyuncuların yapabileceği hamle seçeneklerine bakarak en uygun hamleyi seçtiği duruma bakmayı önerdi. Bu da şimdiki adıyla Nash dengesidir (Varian, 2004). Nash dengesi, oyuncuların rakiplerinin davranış biçimlerini bir şekilde doğru olarak öngörebildiklerini ve bu strateji birleşiminde oyuncunun optimal hamleyi seçebileceği görüşüne dayanmaktadır.

Oyun teorisi, bu alanda çalışan bilim adamlarına ekonomi alanında Nobel ödülü kazandırmıştır. 1994 yılında John Nash, John Harsanyi, Reinherd Selten ve 2005 yılında Robert Aumann (ödülü Thomas Schelling ile paylaşmıştır) ekonomi dalında Nobel ödülü almıştır. Ayrıca Pierre Louis Lions, Hamilton-Jacobi denklemlerinin viscosity çözümleri üzerine yaptığı araştırmalarından dolayı 1994 yılında Fields madalyasına layık görülmüştür (Guseinov, et al., 2010).

Oyun teorisi gelişim süreci içerisinde, bilimin farklı dallarında uygulama alanı bulmuştur. Felsefe, sosyal bilimler (özellikle ekonomi), biyoloji, mühendislik, siyasal bilimler, bilgisayar bilimleri, fizik ve mekanik gibi birçok bilimde kullanılan bir sistemdir.

2.2. OYUN KAVRAMI

Bir oyun eksiksiz biçimde tanımlanmış kurallara uygun olarak sürdürülen ve oyuncuların kendileri için uygun olan stratejileri ve bunlardan herhangi birinin seçimi ile ilgili mücadele sonuçlarını bildikleri varsayılan bir sistemdir (Cinemre, 2011).

Öncelikle, bir oyunun soyut kavramı ile kişinin bu oyunu oynaması arasındaki ayrım yapılmalıdır. Oyun, temel olarak kendini tanımlayan kuralların bütünüdür. Oyunun başlangıcından sonuna kadar belirli biçimde oynanan her özel aşaması oyunun oynanması olarak tanımlanır.

İkinci ayrım oyunun yapı elemanları olan hamleler için yapılmalıdır. Hamle, bir oyuncunun alternatifleri arasından yapmış olduğu seçiminin gerekçesi, gerekliliğidir. Oyunun kurallarıyla tam olarak belirlenmiş koşullar altında şansa bağlı bir araçtır.

Oyunun bir aşamasında tercih edilen seçeneğe seçim denir. Oyun bir dizi hamlelerden oluşurken, oyunun oynanması bir dizi seçimden oluşur.

Son olarak oyunun kuralları ile oyuncuların stratejileri birbirleri ile karıştırılmamalıdır. Oyuncular stratejilerini özgürce seçebilirken, oyunun kuralları mutlak komutlardır (Neumann & Morgenstern, 1953).

Bir oyun aşağıdaki temel kavramlar üzerine kurulmuştur.

Oyuncu (Karar Verici): Oyuna kazanmak için katılan ve karar veren birey ya da gruplara oyuncu denir. Oyunda her oyuncunun rasyonel olduğu, bilgi ve deneyim bakımından birbirlerine eşdeğer oldukları varsayılır. n oyunculu bir oyunda, oyuncular kümesi $N = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ ile gösterilir.

Strateji: Oyunun herhangi bir aşamasında ortaya çıkabilecek tüm durumlar için oyuncuların alabileceği kararlara strateji denir. Oyuncuların stratejileri rakipleri tarafından bilinmektedir. Stratejiler yapısal olarak ikiye ayrılırlar.

- Şans Stratejisi: Zar oyunları, tombala, rulet gibi şansa dayalı oyunlarda şansa bağlı olarak ortaya çıkan stratejilerdir.
- Davranış Stratejisi: Oyuncuların, oyunun devamı sırasında bilinçli olarak verdikleri kararlar davranış stratejisi kapsamına girer. Dama ve satranç gibi şansa dayalı olmayan oyunlar davranış stratejileri ile oynanan oyunlardır.

Tavla, iskambil oyunları, okey gibi oyunlarda her iki strateji türünün karması vardır. Bir oyunda her oyuncunun en az iki stratejiye sahip olması gerektiği aşikârdır. Aksi durumda, oyuncunun seçimi önceden bilindiğinden oyuna katılmış olduğu söylenemez.

Her bir oyuncunun sahip olduğu bir strateji kümesi (S_i) vardır. Tüm oyuncuların olası stratejilerinden oluşabilecek stratejiler kümesi; $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ ile gösterilir. Herhangi bir strateji birleşimi; $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S$, elemanları oyundaki n oyuncunun her biri için bir stratejiyi ifade eden n-boyutlu bir vektör olarak nitelendirilebilir.

Kazanç (Fayda) Fonksiyonu: Oyunun herhangi bir aşamasında her bir durum için oyuncuların fayda düzeyini belirleyen fonksiyondur. Herhangi bir i oyuncusunun $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ strateji vektörüne karşılık gelen fayda düzeyi şöyle ifade edilir:

$$u_i(s_1, s_2, \ldots, s_n) = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Bu üç bileşen yardımıyla n oyunculu bir oyun (G),

$$G = \{N, (S_i), (u_i)\} \qquad i = 1,2, \ldots, n$$

şeklinde tanımlanır.

2.3. OYUNLARIN SINIFLANDIRILMASI

Oyunlar birtakım özelliklerine göre aşağıdaki gibi sınıflandırılır.

2.3.1. Strateji Sayısı

Bir oyunda her bir oyuncunun strateji sayısı sonlu ise, bu oyuna sonlu oyun denir. Eğer herhangi bir oyuncunun strateji sayısı belirsiz ise oyun sonsuz oyun adını alır. Oyun teorisinin temel kurallarından biri, oyuncuların stratejilerinin belli olması gerektiğidir. Eğer oyunda sonsuz strateji varsa, bu oyunun çözümü için kazanç matrisinin oluşturulması mümkün olmadığından çözüm için limit kavramından yararlanmak gerekir.

2.3.2. Oyuncu Sayısı

Oyunda yer alan oyuncuların sayısına göre de bir sınıflandırma yapılabilir. Eğer oyunda iki oyuncu yer alıyorsa, bu oyuna iki kişili oyun denir. Oyuncu sayısının ikiden çok olması durumunda n kişili oyun söz konusudur.

2.3.3. Kaynakların Dağılımı

Oyunun sayısal sonucuna göre yapılan bu sınıflandırmada, oyuncuların kazançlarının toplamı sıfır ise, yani bir oyuncu diğerinin kaybettiği kadar kazanıyorsa oyun sıfır toplamlıdır. Sıfır toplamlı oyunlarda oyuncuların çıkarları çatışır ve dolayısıyla işbirliği yapmaları söz konusu değildir. Sayısal sonucu sıfırdan farklı bir sabit olan oyuna, sabit toplamlı oyun denir. Sabit toplamlı oyunlarda oyuncuların kazançları toplamı sıfırdan farklıdır (negatif veya pozitif) ve bu tür oyunlarda da oyuncuların çıkarları karşıtlık gösterir. Oyunun değeri sabit bir sayı değil ise, bu oyuna sabit toplamlı olmayan oyun denir. Bu tür oyunlarda oyuncuların çıkarları birbirine tamamen zıt değildir. Oyuncular işbirliği içerisinde karar alırlarsa kazanç yönünde çıkar sağlayabilirler.

2.3.4. Meta Oyunlar

Oyun teorisinde meta kavramı, oyun probleminin çözümünde zamanın tersine işlemesi anlamına gelir. Oyuncu daha önce oynanan oyunları gözlemleyerek, oyunda ulaşmayı hedeflediği son hamlesine karar verir ve bu hamleyi oynamasını sağlayacak şekilde başlangıç hamlesine ve ara hamlelerine karar verir.

2.3.5. Tam ve Eksik Bilgili Oyunlar

Oyunların bir başka sınıflandırılması da oyuncuların rakiplerinin yapabileceği eylemler konusunda sahip oldukları bilgi seviyesine göre yapılır. Bu olgu, oyun boyunca rakibin stratejilerinin biliniyor olması veya oyunun kurallarının biliniyor olması ile karıştırılmamalıdır. Burada söz konusu olan, oyuncuların yapabilecekleri hamleler ve bu hamlelerinin sonucunda elde edilecek kazanç ya da kaybın bilinmesidir. Bu tür oyunlara tam bilgili oyun denir ve tam bilgili oyunlarda hamleler yapılırken daha önceden alınmış olan tüm kararların sonuçları oyuncular tarafından bilinmektedir. Yani belli sayıda hamleden sonra oyuncular daha önceki kararları hakkında tam bilgiye sahip olurlar. Eksik bilgili oyunlarda ise oyuncu kendi hamlelerini ve seçeceği strateji sonucunda elde edeceği kazancı veya kaybı bilmekte iken, rakiplerinin alternatif hareketlerinden ve bunların sonuçlarından habersizdir. Satranç, dama gibi oyunlar tam bilgili oyunlar sınıfına; poker, rulet gibi kumar oyunları eksik bilgili oyunlar sınıfına girer.

2.3.6. Statik ve Dinamik Oyunlar

Statik oyunlarda oyuncular eşanlı hareket ederler. Oyuncular tek bir karar verirler ve oyun sona erer. Bu tür oyunlara tek atışlı oyunlar da denilmektedir. Taş-kâğıt-makas oyunu statik oyunlara bir örnektir. Gerçek hayat uygulamalarından ise, kapalı ihaleler statik oyunlara örnek olarak gösterilebilir.

Dinamik oyunlarda ise ardışık kararlar verilmektedir. Oyunun devamı sırasında oyuncuların birbirlerini gözlemleyebilme imkânları vardır. Bir başka deyişle, oyuncular arasında bir etkileşim varsa ve çoklu zaman aralıklarında oyun tekrarlanabiliyorsa dinamik oyun söz konusu olur. Satranç, tic-tac-toe dinamik oyunlar kapsamına girer. Aynı mantık doğrultusunda, açık artırma müzayedeleri de dinamik oyunlardır.

Problemin yapısının yanı sıra, oyun süresince oyuncuların sahip olduğu bilgi seviyesi de oyunun statik veya dinamik olacağını belirleyebilmektedir.

2.3.7. Ortaksız ve Ortaklı Oyunlar

Ortaksız oyunlarda her oyuncunun hedefi, kendi adına en büyük kazancı elde etmektir. Ortaklı oyunlarda ise, oyuncular gerekli gördükleri durumlarda kazançlarını artırmaya yönelik işbirliği yapabilirler.

2.4. İKİ KİŞİLİ SIFIR TOPLAMLI OYUNLAR

Yukarıda açıklandığı gibi, iki kişili bir oyunda oyunculardan birinin kazancı diğerinin kaybına eşitse, yani oyuncuların kazançları toplamı sıfır ise, oyun iki kişili sıfır toplamlı bir oyundur. Bu tür oyunlarda, oyuncular strateji seçimlerini bağımsız yaparlar. Oyuncular tam bir çatışma içerisindedir ve işbirliği söz konusu değildir. Burada esas olan, her iki oyuncunun benimseyecekleri en iyi stratejiler hakkında belirsizlikten kurtulmaları ve karşılık gelen ortalama kazançlarını –oyun teorisi terminolojisinde "oyunun değerini"- bulmaktır.

İki kişili sıfır toplamlı oyunları ve çözüm yöntemlerini açıklayabilmek için kazanç (oyun) matrisi kavramına ihtiyaç vardır.

2.4.1. Kazanç (Oyun) Matrisi

Oyuncuları A ve B olmak üzere iki kişili bir oyunda A oyuncusunun n adet $(A_1, A_2, \dots, A_n)$, B oyuncusunun m adet $(B_1, B_2, \dots, B_m)$ stratejisi olsun. Bu oyuna kısaca $n{\times}m$-lik oyun denir. Oyuncuların strateji kombinasyonlarından elde edilen kazançları bildiğimizi varsayalım. Bu durumda, satırlar A oyuncusunun stratejilerini, sütunlar ise B oyuncusunun stratejilerini göstermek üzere oyunun nicelikleri bir tablo (matris) ile ifade edilebilir. Aşağıda gösterilen bu tabloya kazanç, ödeme ya da oyun matrisi adı verilir.

Çizelge 2.1 Kazanç matrisi

Satır Oyuncusu (A) Stratejisi	Sütun Oyuncusu (B) Stratejisi					
	B_1	B_2	...	B_j	...	B_m
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1j}	...	a_{1m}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2j}	...	a_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
A_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{ij}	...	a_{im}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$
A_n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{nj}	...	a_{nm}

İki kişili sıfır toplamlı oyunlarda, kazanç matrisleri genellikle satır oyuncusunun kazanç değerlerine göre düzenlenir. Oyunculardan birinin kazancı diğerinin kaybına eşit olduğuna göre sütun oyuncusunun kazanç matrisi satır oyuncusunun kazanç matrisinin negatif işaretlisi olacaktır. A oyuncusu i. stratejisini seçmişken B oyuncusu j. stratejisini seçerse; A oyuncusu a_{ij} kadar kazanır, B oyuncusu ise a_{ij} kadar kaybeder. Eğer a_{ij} negatif bir sayı ise bu A'nın a_{ij} kadar kaybettiği, B'nin a_{ij} kadar kazandığı anlamına gelir.

İki kişili sıfır toplamlı oyunların en önemli varsayımı, her oyuncunun rakibinin, kendisinin hangi stratejiyi seçeceği hakkında tam bilgisi olmasına karşın, kendisi için en iyi olan stratejiyi seçme şansına sahip olduğudur (Cinemre, 2011). Bu varsayıma dayanarak oyuncuların stratejilerini belirleyen kuram, John von Neumann ve Oskar Morgenstern tarafından geliştirilmiştir. Kuramı yukarıda verilen kazanç matrisi üzerinden açıklamaya çalışalım.

Kazanç matrisinin satır oyuncusuna (A) göre düzenlendiği kabul edilsin. Yukarıda açıklandığı gibi bu durumda; a_{ij} $(i = 1,2,\dots,n\,;\ j = 1,2,\dots,m)$ değerleri A oyuncusunun kazancını, B oyuncusunun ise kaybını gösterir. Oyun sürecinde her iki taraf da akılcı ve ihtiyatlı davrandığına göre, kendileri için en iyi stratejiyi belirlemeye çalışırlar. Bu bağlamda; A oyuncusu kazancını maksimum yapmayı, B oyuncusu ise kaybını minimum yapmayı amaçlar.

A oyuncusu seçeceği her stratejiye karşılık, B oyuncusunun da kendisi için en iyi stratejiyi tercih edeceğini bilmektedir. Bu nedenle, A oyuncusu uygulamaya koyacağı stratejisini belirlerken, B oyuncusunun davranışlarını da göz önünde bulundurarak her stratejisine karşılık elde edeceği minimum kazançların arasından maksimumunu sağlayan stratejiyi seçer. A oyuncusunun strateji belirleme aşamasındaki karar ölçütüne maksimin ölçütü denir ve $maks_i\{min_j\ (a_{ij})\}$ ile gösterilir.

Diğer taraftan B oyuncusu da A oyuncusunun stratejilerine karşılık kaybını minimum yapmayı amaçlamaktadır. Dolayısıyla, A oyuncusunun eylemlerine karşılık katlanması gereken maksimum kayıpların arasından minimumunu sağlayan stratejiyi tercih eder. B oyuncusunun strateji seçiminde benimsediği yaklaşıma da minimaks ölçütü denir ve $min_j\{maks_i\ (a_{ij})\}$ şeklinde ifade edilir.

Maksimin ölçütü ile satır oyuncusu tek bir stratejiye bağlı kalması durumunda, sütun oyuncusu hangi stratejiyi seçerse seçsin kazanacağından emin olduğu miktarı belirlemiş olur. Bu ölçüt minimum kazancı garantileme anlayışı üzerine kurulmuştur. Satır oyuncusunun belirlediği bu miktara oyunun “alt değeri (α)” denir. Aynı mantık doğrultusunda, B oyuncusu da minimaks ölçütü ile satır oyuncusunun tercihi ne olursa olsun, tek bir stratejiyi benimsediğinde kendisi için kaybedeceği en az miktarı belirler. Bu strateji maksimum kaybını en düşükte tutabileceği optimal stratejidir. Sütun oyuncusunun saptadığı bu miktara da oyunun “üst değeri (β)” denir.

Satır oyuncusunun strateji vektörü,

$$S_A = \ (p_1, p_2, \ldots, p_n)$$

şeklinde gösterilsin.

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1; \ \ 0 \leq p_i \leq 1; \ \ \ i = 1,2, \ldots, n$$

olmak üzere, p_i değeri A_i stratejisinin kullanılma oranını belirtir. Benzer gösterim sütun oyuncusu için yapıldığında strateji vektörü,

$$S_B = \ (q_1, q_2, \ldots, q_m) \text{ ve}$$

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_m = 1; \ \ 0 \leq q_j \leq 1; \ \ \ j = 1,2, \ldots, m$$

şeklinde ifade edilir.

Oyunun değerini $\mathcal{v}$ ile gösterelim. Bu değer, $\alpha \leq \mathcal{v} \leq \beta$ eşitsizliğini sağlar. Satır oyuncusunun kazançlarının alt sınırı ile sütun oyuncusunun kayıplarının üst sınırının birbirine eşit olduğu noktada oyun dengededir. Bir başka deyişle, oyunun alt değeri ile üst değerinin birbirine eşit olduğu noktada stratejiler kararlıdır ve bu tür oyunlara "dengeli" veya "tepe noktalı" oyunlar denir. Tepe noktası olan oyunlar zaten çözülmüş demektir ve oyunun değeri; $\mathcal{v} = \alpha = \beta$'dır.

Tepe noktalı oyunlarda oyuncular tek bir stratejiye bağlı kalırlar. A oyuncusunun i. stratejisinin, B oyuncusunun da j. stratejisinin optimal olduğunu kabul edelim. Bu durumda A oyuncusunun strateji vektörü,

$$S_A = (0, 0, \ldots, 1(i), \ldots, 0);$$

B oyuncusunun strateji vektörü ise,

$$S_B = (0, 0, \ldots, 1(j), \ldots, 0)$$

biçimindedir. Bu tür stratejilere "saf (arı) stratejiler" denir. Oyunun tepe noktasının belirlediği saf stratejiler oyuncuların oyunun her tekrarında bağlı kaldıkları stratejilerdir.

Uygulamada tepe noktası olmayan oyunlarla karşılaşmak daha olağandır. Oyunun tepe noktası yok ($\alpha \neq \beta$) ise, oyuncular oyunun her tekrarında farklı bir strateji seçerler. Bu şekilde oyuncuların oyunun devamı sırasında birden fazla eylem çeşidini belirli oranlarda seçebilmeleri sonucunda karma strateji kavramı ortaya çıkar. Saf strateji, karma stratejinin özel bir hali olarak değerlendirilebilir.

Tepe noktası olmayan oyunlarda, satır oyuncusu kazancının maksimin ölçütüne göre belirlediği değerden küçük olmamasını garantilerken, sütun oyuncusu da kaybının minimaks ölçütüne göre belirlediği değerden büyük olmamasını garantiler. Burada ortaya çıkan sorun, oyuncuların belirledikleri değerler arasındaki farkın, aralarında ne şekilde paylaştırılacağı problemidir. Oyuncular bu farktan en fazla şekilde yararlanmak için stratejilerini rassal olarak seçerler.

Bir oyuncunun karma stratejisi, saf stratejileri üzerinde tanımlanan bir olasılık dağılımıdır. Bir i oyuncusunun saf stratejiler kümesini S_i ile, karma stratejiler kümesini ise Σ_i ile gösterelim. σ_i herhangi bir karma stratejisi olmak üzere, σ_i olasılık dağılımı $\forall s_i \in S_i$ saf stratejisine $\sigma_i(s_i)$ olasılığını atar. $\sigma_i(s_i)$, i oyuncusunun s_i stratejisini oynama olasılığını gösterir. Bu nedenle karma strateji, i oyuncusunun saf strateji uzayından [0,1] aralığına tanımlı bir fonksiyon olarak tanımlanabilir ($\sigma_i: S_i \rightarrow [0,1]$).

Karma stratejinin, saf stratejiler üzerinde bir olasılık dağılımı olması nedeniyle, bir i oyuncusunun karma stratejisinin saf stratejilere atadığı olasılıkların toplamı 1 olmalıdır ($\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$). Oyunun karma stratejiler uzayı (Σ), n sayıdaki oyuncunun karma stratejiler kümesinin kartezyen çarpımıdır.

$$\Sigma = \Sigma_1 \times \Sigma_2 \times \ldots \times \Sigma_n$$

Bir σ_i karma stratejisinin pozitif olasılık atadığı saf stratejiler kümesine destek (support) denir (Fudenberg & Tirole, 1993). Bir σ_i karma stratejisinin desteği, i oyuncusunun tercih edebileceği tüm saf stratejileri içerir.

Herhangi bir i oyuncusunun σ_i karma stratejisini oynaması sonucunda elde edeceği beklenen kazanç aşağıdaki eşitlikle açıklanır.

$$E_i = \sum_{s \in S} \left(\prod_{j=1}^{n} \sigma_j(s_j) \right) u_i(s)$$

Burada $u_i(s)$, oyuncuların $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ strateji profilini oynamaları durumunda i oyuncusunun elde edeceği kazançtır.

Saf ve karma stratejilerin geometrik yapısı ise şu şekilde açıklanır: Satır oyuncusunun $S_A = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ strateji vektörünü ele alalım. $S_A = \{p_i \in [0,1]: p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1\}$ kümesi $(n-1)$ boyutlu bir simpleks[1] oluşturur. Simpleksin köşe noktalarında yer alan negatif olmayan kütlelerin ağırlık merkezi, simpleks üzerinde bir nokta olarak tanımlanabilir. Bu noktaların koordinatları barisentrik koordinatlar olarak da adlandırılmaktadır. Bu koordinatların bileşenlerinden birinin 1, diğerlerinin 0 olduğu noktalar saf stratejilere, diğer noktalar ise karma stratejilere karşılık gelir.

Tepe noktası olmayan oyunlarda oyuncu hangi stratejiyi uygulaması gerektiğini bilmediği için oyuna bir strateji ile başlayacak, rakibinin uyguladığı stratejiye göre kendisi için en iyi stratejiye geçecektir. Bu tür oyun problemlerinde oyuncuların belirsizlik altındaki karar ortamından risk altındaki karar ortamına geçişi sağlanır. Bunun için uygulanacak stratejilerin göreli sıklıkları incelenir. Böylece, oyunun

[1] n boyutlu uzayda $n+1$ uç noktası olan konveks örtüye n boyutlu simpleks denir.

çözülmesi durumunda oyuncular rakiplerinin hangi stratejilerini hangi olasılıkla uygulamaya koyacaklarını bilirler.

Tepe noktası olmayan oyunlar için çözüm yöntemleri geliştirilmiştir. George B. Dantzig, iki kişili sıfır toplamlı oyun problemini doğrusal programlama modeli olarak ifade ederek oyun problemlerinin simpleks yöntem ile çözümünü mümkün kılmıştır. Bu sayede iki kişili sıfır toplamlı oyun problemleri, boyutu ne olursa olsun, simpleks yöntem ile çözülebilmektedir. Dolayısıyla, oyun teorisi ile doğrusal programlama arasında çok sıkı bir etkileşim vardır.

Çizelge 2.1'de verilmiş olan kazanç matrisine göre sütun oyuncusunun seçeceği her bir strateji için satır oyuncusunun beklenen kazancını formüle edelim.

B_1 için; $E_1 = a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{n1}p_n$

B_2 için; $E_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{n2}p_n$

$$\vdots$$

B_m için; $E_m = a_{1m}p_1 + a_{2m}p_2 + \cdots + a_{nm}p_n$

Satır oyuncusu kazancını maksimize etmeyi hedeflediği için, oyunun minimum değerini maksimum yapmayı amaçlar. Dolayısıyla, satır oyuncusu için düzenlenen model aşağıdaki gibidir:

$$Z_{maks} = v$$

$$\begin{aligned}
a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \cdots + a_{n1}p_n &\geq v \\
a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \cdots + a_{n2}p_n &\geq v \\
&\vdots \\
a_{1m}p_1 + a_{2m}p_2 + \cdots + a_{nm}p_n &\geq v \\
p_1 + p_2 + \cdots + p_n &= 1 \\
p_1, p_2, \ldots, p_n &\geq 0
\end{aligned}$$

Kazanç matrisindeki tüm elemanların pozitif değerli olduğu, dolayısıyla oyunun değerinin de pozitif değerli olduğu kabul edilecektir. Aksi takdirde, kazanç matrisindeki elemanları pozitif yapacak sabit bir sayı matrisin tüm elemanlarına eklenir. Bu işlem sonucunda elde edilen yeni oyun, başlangıç oyununa stratejik olarak denktir (Ahlatçıoğlu & Tiryaki, 1998). Değişen sadece, oyunun değerinin eklenen sayı kadar artmasıdır.

Doğrusal programlama probleminin simpleks yöntemle çözülebilmesi için kısıtlayıcı fonksiyonların sağ tarafında bilinen sabit değerlerin yer alması gerekir. Bu nedenle, yukarıda verilen modelin doğrusal programlama modeline dönüştürülmesi için kısıtlayıcı fonksiyonların her iki tarafı $1/_{v}$ ile çarpılmalıdır. Bu işlem sonucunda ortaya çıkan $(^{p_1}/_{v}, ^{p_2}/_{v}, \dots, ^{p_n}/_{v})$ değişkenlerine yeni birer sembol atansın ve $(x_1 = ^{p_1}/_{v}, x_2 = ^{p_2}/_{v}, \dots, x_n = ^{p_n}/_{v})$ şeklinde tanımlansın. Burada p_i ve v değerlerinin pozitif olması nedeniyle x_i $(i = 1,2, \dots, n)$ değişkenleri de pozitiftir.

$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$ bağıntısı dikkate alındığında yapılan dönüşümle ilişkili olarak, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1/_{v}$ elde edilir. Amaç fonksiyonunu yeni değişkenler cinsinden ifade edebilmek için $Z_{maks} = v$ ile $Z_{min} = 1/_{v}$ ‘nin denkliğinden yararlanılarak $Z_{min} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ yazılabilir. Sonuç olarak,

$$Z_{min} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{n1}x_n \geq 1$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n \geq 1$$
$$\vdots$$
$$a_{1m}x_1 + a_{2m}x_2 + \cdots + a_{nm}x_n \geq 1$$
$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

doğrusal programlama modeli elde edilir. Böylece $n \times m$ boyutundaki bir oyun problemi doğrusal programlama problemine dönüştürülmüş olur. Bu problemin simpleks yöntem ile çözümünde bulunan x_i ve v değerleri $x_i = ^{p_i}/_{v}$ bağıntısında yerlerine yazılarak p_i oranları bulunur. Dolayısıyla, satır oyuncusunun en iyi karma stratejisi belirlenmiş olur.

Sütun oyuncusunun karma strateji vektörü, satır oyuncusu için kurulan primal modelin dualinin çözülmesiyle bulunur. Problem satır oyuncusu için çözüldüğünde sütun oyuncusu için de çözülmüş olur. Primal problemin simpleks en iyi çözüm tablosundan dual değişkenlerin değerleri okunarak sütun oyuncusunun stratejilerinin kullanılma oranları belirlenir.

Başlangıçta problemi sütun oyuncusu için çözmek istediğimizi varsayalım. Öncelikle satır oyuncusunun seçeceği her bir strateji için sütun oyuncusunun beklenen kazancını tanımlamak gerekir.

A_1 için; $E_1 = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1m}q_m$

A_2 için; $E_2 = a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2m}q_m$

$$\vdots$$

A_n için; $E_n = a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \cdots + a_{nm}q_m$

Sütun oyuncusu maksimum kaybını minimize etmek için, kaybedeceği miktarın oyunun değerini aşmamasını garantilemek ister. Bu nedenle oyun probleminin modeli sütun oyuncusu için aşağıdaki gibi düzenlenir:

$$Z_{min} = v$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1m}q_m &\leq v \\
a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2m}q_m &\leq v \\
&\vdots \\
a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \cdots + a_{nm}q_m &\leq v \\
q_1 + q_2 + \cdots + q_m &= 1 \\
q_1, q_2, \dots, q_m &\geq 0
\end{aligned}
$$

Satır oyuncusu için yapılan açıklamalar sütun oyuncusu için de uygulandığında,

$$Z_{maks} = y_1 + y_2 + \cdots + y_m$$

$$
\begin{aligned}
a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1m}y_m &\leq 1 \\
a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2m}y_m &\leq 1 \\
&\vdots \\
a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nm}y_m &\leq 1 \\
y_1, y_2, \dots, y_m &\geq 0
\end{aligned}
$$

doğrusal programlama modeli elde edilir. Burada $y_j = {}^{q_j}/_{v}$ $(j = 1,2,\dots,m)$’dir. Problem sütun oyuncusu için çözüldüğünde satır oyuncusunun karma strateji vektörü simpleks yöntemin primal - dual ilişkilerinden yararlanılarak bulunabilir.

Teorem 2.1: İki kişili sıfır-toplamlı oyunlar için geliştirilen primal ve dual doğrusal programlama modellerinin en iyi çözümleri, bir Nash dengesini oluşturan olasılık dağılımlarını verir (Nisan, et al., 2007).

Genelleştirme yapılırsa, simpleks yöntem $n \times m$ boyutundaki sıfır toplamlı oyunların çözümünde kullanılan tekniktir. Bununla birlikte, daha küçük boyutlu oyun problemleri için başka teknikler de geliştirilmiştir. 2×2 boyutlu oyunlar cebirsel yöntemle, $2 \times m$ veya $n \times 2$ boyutundaki oyunlar ise grafik yöntemle çok daha kolay ve hızlı bir şekilde çözülebilmektedir.

2.5. İKİ KİŞİLİ SIFIR TOPLAMLI OLMAYAN OYUNLAR

İki kişili sıfır toplamlı olmayan oyunlar, sabit toplamlı olan ve sabit toplamlı olmayan oyunlar olarak ikiye ayrılır. Sabit toplamlı oyunların çözüm teknikleri sıfır toplamlı oyunlar ile aynıdır. Sabit toplamlı oyunlarda oyunculardan birinin kazancı diğerinin kaybına eşit olmayabilir. Dolayısıyla sabit toplamlı oyunlar bölünebilir bir kazanç ile sonlanabilir.

Sabit toplamlı olmayan oyunlarda tüm stratejiler her iki oyuncu tarafından bilinmesine rağmen, oyuncular oyunun sonucunu birlikte hareket ederek belirlerler. Maksimin-minimaks dengesi, işbirliği durumunda oyunun değerini verirken, oyunculardan en az birinin işbirliğinden vazgeçmesi durumunda oyunun değeri değişir ve elde edilen sonuç her zaman oyunun en iyi değerini veremeyebilir.

2.6. BASKIN STRATEJİLER

2.6.1. Saf Stratejilerde Kesin Baskınlık

Oyunda yer alan stratejilerden bazıları her zaman daha iyi kazanç sağlayabilir ve diğer stratejilerden bir kısmını devre dışı bırakabilir. Bu tür stratejilere baskın (üstün, egemen) strateji denir.

Bir G oyununda s_i' ve s_i'' ($s_i', s_i'' \in S_i$), i oyuncusunun herhangi iki stratejisi olsun. Eğer diğer oyuncuların stratejilerinin tüm mümkün birleşimi için, i oyuncusunun s_i' stratejisinden elde ettiği fayda s_i'' stratejisinden elde ettiği faydadan kesin olarak daha fazla ise s_i' stratejisine kesin baskın strateji denir.

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i', \dots, s_n) > u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i'', \dots, s_n), \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Burada $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$, i oyuncusu dışında kalan oyuncuların herhangi bir strateji vektörüdür. $S_{-i} = S_1 \times \dots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \dots \times S_n$ ise i oyuncusu dışındaki diğer oyuncuların strateji kümelerinin tüm mümkün birleşimidir.

Kesin baskın strateji tanımından hareketle, oyuncunun hiçbir zaman tercih etmeyeceği stratejiye kesin mahkûm strateji denir. Rasyonel oyuncular hiçbir zaman kesin mahkûm stratejilerini tercih etmezler, çünkü oyundaki hiçbir oyuncunun rakibinin kesin mahkûm stratejisini oynayacağına dair beklentisi yoktur. Böylece oyuncular mahkûm stratejilerini yok sayarlar ve tercih etmezler.

Rasyonel oyuncuların kesin mahkûm stratejileri oynamamaları aslında böyle stratejilerin diğer oyuncuların herhangi bir stratejisine göre en iyi tepki olmamasından kaynaklanmaktadır. Kuşkusuz burada önemli olan nokta, rasyonel bir oyuncunun böyle bir stratejiyi oynamayacağını diğer oyuncuların bilmek zorunda olmasıdır. Bu tüm oyuncuların birbirinin rasyonel olduğunu bilmesi gerektiği anlamına gelir (Yılmaz, 2012).

Oyuncular kesin mahkûm stratejilerini asla oynamayacakları için, bu stratejileri baştan eleyerek ilerlerler. Bu sürece kesin mahkûm stratejilerin sürekli eliminasyonu denir. Herhangi bir i oyuncusu için birinci eliminasyon sonucunda kalan stratejiler kümesi S_i^1 ile gösterilsin. Böylece eliminasyon sonrası yeni oyun,

$$G^1 = \{N, (S_i^1), (u_i)\}$$

olur. Burada, her u_i fonksiyonu asıl fayda fonksiyonunun, kesin mahkûm stratejilerin eliminasyonu ile kalan daha küçük bir tanım aralığında tanımlanmış fayda fonksiyonudur. Bu işlemlere devam edildikçe, $\beta \in \mathbb{Z}$ defa tekrar edildiğinde gittikçe küçülen indirgenmiş bir oyun ortaya çıkar. Yeni oyun aşağıda gösterildiği gibidir.

$$G^\beta = \left\{N, \left(S_i^\beta\right), (u_i)\right\}$$

Burada, her $i \in N$ oyuncusu için S_i^β stratejiler kümesi, $G^{\beta-1}$ oyunundaki $S_i^{\beta-1}$ stratejilerinden kesin mahkûm stratejilerin elimine edilmesi sonucunda kalan stratejilerden oluşur. G oyunu sonlu bir oyun ise, sürekli eliminasyon sürecinin belirli bir aşamasından sonra oyun artık indirgenemez.

$$S_i^\beta = S_i^{\beta+1} = S_i^{\beta+2} = \cdots$$

Bu nedenle, yeni oyun şöyle tanımlanabilir: her i oyuncusu için $G^\infty = G^\beta$ ve $S_i^\infty = S_i^\beta$ dir.

S_i^∞, sürekli eliminasyon sonunda i oyuncusunun elinde kalan saf stratejileri göstermektedir. Oyuncuların strateji kümelerinin kartezyen çarpımı ise,

$S^{\infty} = \times_{i \in N} S_i^{\infty}$, kesin mahkûm stratejilerin sürekli eliminasyonundan kalan strateji kombinasyonu kümesini verir. Oyunda rasyonellik esas alındığından, geriye kalan herhangi bir saf strateji birleşimi, S^{∞} kümesine ait $(s_i \in S^{\infty})$ olacaktır (Yılmaz, 2012).

2.6.2. Saf Stratejilerde Zayıf Baskınlık

Bir G oyununda s_i' ve s_i'' stratejileri i oyuncusunun olası stratejileri olsun $(s_i', s_i'' \in S_i)$. Eğer diğer oyuncuların stratejilerinin tüm mümkün birleşimi için, i oyuncusunun s_i' stratejisinden elde ettiği fayda en az s_i'' stratejisinden elde ettiği fayda kadar iyi ise s_i' stratejisine zayıf baskın strateji denir.

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i', \dots, s_n) \geq u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i'', \dots, s_n), \forall s_{-i} \in S_{-i}$$

Kesin mahkûm stratejilerin eliminasyonu ile kesin baskın strateji dengesine ulaşılabilirken zayıf mahkûm stratejiler için bu uygulama tartışmalıdır. Çünkü bir oyunda zayıf mahkûm stratejileri silmek, oyunun sonucunu etkileyebilir. Dengenin ne olacağı silme sırasına bağlı olarak değişebilmektedir (Yılmaz, 2012).

2.6.3. Karma Stratejilerde Kesin Baskınlık

Karma strateji kavramı, oyunculara stratejilerini hangi olasılıklarla oynamalarının akılcı olduğunu belirleyen bir kurala dayanır. Oyuncular karar vermeden önce eylemlerini bir rassallaştırma yöntemi kullanarak planlarlar. Gerçekte böyle bir yöntemin kullanılış şekli, amacı, nasıl yorumlanması gerektiği tartışmalıdır. Bunun en önemli nedeni, oyuncuların önemli kararları olasılıklardan bağımsız almalarıdır. Bunun sebebi ise rassallaştırmanın oyuncuya hiçbir kazanç sağlamamasıdır. Bir oyuncunun iki stratejisini rassallaştırdığını düşünelim. Bu rassallaştırma, ancak oyuncunun iki stratejinin aynı faydayı sağladığına dair bir inancı olması halinde optimal olacaktır. Zaten, oyuncu hangi stratejiyi seçerse seçsin aynı kazancı elde edecektir. Dolayısıyla, rassallaştırma oyuncuya ek bir kazanç sağlamamaktadır (Perea, 2012).

Karma stratejilerin gerçekte uygulanması tartışmalı da olsa kesin baskınlık durumunun araştırılmasında rasyonel stratejiler belirlenirken yapay bir yardımcı nesne olarak kullanılmaktadır. Çünkü bir oyuncunun saf stratejileri arasında kesin baskınlık durumu yokken, karma stratejileri saf stratejilerine karşı kesin baskın olabilmektedir. Bu çalışmada da karma stratejiler bu amaçla kullanılmıştır.

Bir σ_i karma stratejisi aşağıdaki koşulun gerçekleşmesi durumunda s_i saf stratejisine kesin baskındır.

$$u_i(\sigma_i, s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i}), \;\; s_{-i} \in S_{-i}$$

Bu ifadede eşitsizliğin eşitlik halini alması halinde σ_i stratejisi zayıf baskın olur.

2.7. NASH DENGESİ

Bir $G = \{N, (S_i), (u_i)\}$ oyununda, her i oyuncusunun s_i^* stratejisi diğer oyuncuların $s_{-i}{}^*$ strateji birleşimine en iyi tepkisi ise, $s^* = (s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ strateji profili saf strateji Nash dengesidir. Bu denge matematiksel olarak aşağıdaki gibi açıklanır.

$$u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \ldots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \ldots, s_n^*), \forall i \in N, \forall s_i \in S_i$$

Bir başka ifadeyle, hiçbir i oyuncusu diğer oyuncuların stratejilerine bağlı kalması varsayımı altında başka bir stratejisini seçmesi sonucunda kazancını artıramaz. Bu nedenle, hiçbir oyuncu denge halinde bulunan stratejisinden sapmak istemez. Dolayısıyla, Nash dengesini oynamayı kabul etmiş bir oyuncu denge noktasındaki kazancını diğer oyuncuların eylemleri sabitken artıramayacağından, bu seçimi yapmış olmaktan herhangi bir pişmanlık duymaz. Bu durum, oyuncuları Nash dengesinde oynamaya teşvik eden nedenlerden biridir. Bir başka teşvik edici unsur ise, dengenin kendi kendini gerçekleştirmesidir. Her oyuncu rakibinin bulunduğu koşullar altında en iyi tepkisini vereceğine inanır. Bu inanışla, her oyuncu rakiplerinin Nash dengesini oluşturan bütünde kendi payına düşeni yapacağını düşünür. Burada da inançların doğruluğu ve tutarlılığı kavramları sorgulanmalıdır.

Her oyun saf stratejilerde Nash dengesine sahip olmayabilir. Oyunun saf stratejilerde Nash dengesine sahip olabilmesi için gereken özellikler aşağıdaki teorem ile açıklanmıştır.

Teorem 2.2: Herhangi bir i oyuncusunun S_i strateji uzayı, Öklid uzayının konveks, kapalı ve boş olmayan bir alt kümesiyse ve u_i kazanç fonksiyonu sürekli ve yarı-konkav ise saf stratejilerde bir Nash dengesi vardır (Debreu, 1952) (Glicksberg, 1952) (Fan, 1952).

Nash, herhangi bir sonlu ortaksız oyun için karma stratejilerde denge durumlarının varlığını ispatlamıştır.

<u>Teorem 2.3:</u> Herhangi bir $G = \{N, (S_i), (u_i)\}$ sonlu ortaksız oyununda karma stratejilerde en az bir denge durumu vardır (Nash, 1951).

Bir $G = \{N, (S_i), (u_i)\}$ oyununda, her i oyuncusunun σ_i^* stratejisi diğer oyuncuların $\sigma_{-i}{}^*$ strateji birleşimine en iyi tepkisi ise, $\sigma^* = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \dots, \sigma_n^*)$ strateji profili karma strateji Nash dengesidir. Bu denge aşağıdaki ifadeyle açıklanır.

$$u_i(\sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, \sigma_i^*, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*) \geq u_i(\sigma_1^*, \dots, \sigma_{i-1}^*, s_i, \sigma_{i+1}^*, \dots, \sigma_n^*), \forall i \in N, \forall s_i \in S_i$$

Oyuncuların belirli bir aralıkta seçim yapabildikleri oyunlarda sürekli strateji kavramı söz konusu olur. Sürekli stratejiye sahip oyuncular için Nash dengesi hesaplanırken kesikli stratejilerde kullanılan matris gösterimi mümkün olmaz. Oyuncular kendilerine en yüksek kazancı sağlayacak stratejilerini cebirsel yöntemleri kullanarak bir fonksiyon ile ifade ederler. Bu fonksiyona en iyi tepki fonksiyonu denir.

Herhangi bir i oyuncusu için en iyi tepki fonksiyonu $BR_i(s_{-i})$ ile gösterilsin. Bu durumda,

$$BR_i(s_{-i}) = \{s_i' \in S_i : u_i(s_i', s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}), \forall s_i \in S_i\}$$

kümesinde herhangi bir s_i' stratejisi diğer oyuncuların s_{-i} stratejileri veri alındığında, en az diğer stratejileri kadar iyidir.

Oyundaki her i oyuncusu tek bir en iyi tepki fonksiyonuna sahip ise, $s_i^* = BR_i(s_{-i}^*)$ olur.

En iyi tepki fonksiyonları, kazanç fonksiyonlarının oyuncuların seçimleri göz önünde bulundurularak her oyuncunun kendi strateji değişkenine göre türevinin alınıp sıfıra eşitlenmesi ile bulunur.

$$\frac{\partial u_i(s_1, \dots, s_n)}{\partial s_i} = 0, \qquad i = 1,2, \dots, n$$

Yukarıdaki denklem her oyuncu için yazılarak n adet tepki fonksiyonu elde edilir. Bu n adet denklemin çözülmesi sonucunda da Nash dengesine ulaşılır.

Nash dengesi, uzun yıllar boyunca oyun teorisi için büyük bir öneme sahip olmuştur. Nash dengesi, oyuncunun rakibinin yapabileceği seçimleri modellerken tek bir olası yöntem kullanır. Literatürde de yaygın olarak oyuncuların Nash dengesine uygun davranış sergiledikleri varsayılmıştır. Ancak bu yaklaşım genel olarak iki nedenden ötürü yetersiz görülmektedir. Nedenlerden ilki; karar verme sürecinin önemli bir kısmı, içerisinde bulunulan durumla ilgili bir mantıklı model kurmaktır ve üzerinde ayrıntılı düşünülmesi gerekir. İkinci neden ise, Nash dengesinin oyuncuların rakipleri hakkındaki düşüncelerini modellemesi aşamasında bazı makul olmayan varsayımlara dayanmasıdır (Perea, 2012). Bu özellikleri Nash dengesini doğal olmayan bir yöntem haline getirmiş ve teorinin sınanması gereği gündeme gelmiştir.

3. EPİSTEMİK OYUN TEORİSİ

Kararın olası sonuçlarını değerlendirebilmek için rakiplerin sonucu etkileyebilecek olası tercihleri hakkında bir inanç oluşturulması çok önemlidir. Buna ek olarak, iyi bir tercih yapabilmenin ön koşulu rakipler hakkında mantıklı bir inanca sahip olunmasını gerektirir. Fakat genelde, rakiplerin her inancı onların rakibine göre mantıklı olmayabilir. Rakiplerin bazı stratejileri diğer seçeneklerine göre daha makul bulunabilir. Rakibinin hangi seçeneği daha mantıklı bulacağına veya hangi seçenekleri tercih etmeyeceğine karar verebilmesi için oyuncunun kendisini rakibinin yerine koyup onun rakipleri hakkında sahip olduğu olası düşüncesini tespit etmesi gerekir. Yani, rakipler hakkında bir kanıya ulaşmadan önce, onların düşünce sistemlerinin gerekçelendirilmesi zorunludur.

Oyuncuların rakipleri hakkında mantık yürütme modellerini ve bu modellerin oyuncuların seçimlerini nasıl etkilediğini inceleyen bilim alanına epistemik oyun teorisi denir (Perea, 2012).

Yaklaşık yirmi beş yıl önce epistemik oyun teorisinin ileri sürülmesiyle birlikte oyun teorisinde kavramsal değişiklikler ortaya çıkmıştır. Bu genç bilim alanı oyun teorisini geçmişine, temel kavramlarına, yani oyuncuların rakipleri hakkında mantıksal model kurması olgusuna geri götürmüştür. Epistemik oyun teorisinin özünde, insanların aynı koşullar altındaki oyunda farklı gerekçelendirme eğiliminde olmaları gerçeği vardır. Bu nedenle farklılıkların söz konusu olduğu bir ortamda tek bir şekilde mantık yürütmek ve bunun en iyi olduğunu söylemek doğru değildir. Bu gibi ortamlarda sadece farklı mantık yürütme biçimleri olduğu söylenebilir ve bunlardan hangisinin daha iyi olduğu konusunda yorum yapmaktan kaçınılmalıdır. Epistemik yaklaşımda amaç, oyun teorisi kapsamında var olan çözüm kavramlarını epistemik varsayımlarla tanımlamak ve buna ek olarak yeni ya da geliştirilmiş epistemik hipotezlerle yeni çözüm yöntemleri önermektir. Aslında epistemik oyun teorisi, klasik oyun teorisinin tamamlayıcısı sayılabilir. Klasik oyun teorisinin temel iki öğesi olan oyunun kuralları ve stratejilere ek olarak epistemik yaklaşım kullanılarak inanç kavramı da üçüncü temel öğe olarak eklenebilir (Bach & Cabessa, 2012).

Epistemik oyun teorisi, oyuncuların davranış biçimlerine olan inançların modellenmesinde farklı yaklaşımlar içermektedir. Dinamik oyunlar için koşullu inançlar söz konusu olmaktadır. Statik oyunlar için inançlar, standart ve sözlüksel (lexicographic) olarak ikiye ayrılmaktadır. Standart inançlar ise rakiplerin rasyonelliğine inanç, rasyonelliğe ortak inanç (common belief in rationality) ve temel inanç hiyerarşileri (simple belief hierarchies) olmak üzere bilgi seviyesi arttıkça farklı yaklaşımlar ile incelenebilirler. Rasyonelliğe ortak inanç kavramı epistemik oyun teorisinin kalbi olarak kabul edilmektedir. Bu kavramın önemi, diğer yaklaşımların temelinde rasyonelliğe ortak inanç yapısının bulunmasıdır.

3.1. EPİSTEME KAVRAMI

İnsanın bilme ve anlama arzusunun insanlık tarihi boyunca var olmasıyla birlikte, bilgi üzerine ilk sistematik çalışmalar Antik Yunan'da görülmektedir. Özellikle Antik Yunan'da yaşanan siyasi gelişmeler, toplumsal sorunlar ve savaşlar insan üzerine yapılan tartışmaları ateşlemiş ve sofistler dönemine gelindiğinde Antik Yunan felsefesine bağıntıcı anlayış hâkim olmaya başlamıştır. Sofistler, herkesin kabul edebileceği doğrulukta bir bilginin imkânsızlığını savunmuşlardır. Sofist düşüncenin ilk temsilcisi olan Protagoras'a göre, sürekli değişen evrende belli bir şey olmadığı için ne salt bir varlıktan ne de herkes için doğru sayılabilecek genel geçer bir yargıdan söz etmek mümkündür. Protagoras; bilginin, dolayısıyla doğrunun kesin bir karakterinin olmadığı sonucuna ulaşmıştır. Ona göre, bir şeyin doğruluğunun ölçütü insandır. Dolayısıyla, doğruluk insandan insana değişebildiği için göreceli bir nitelik kazanır. Protagoras'ın, doğruluğun göreceliliğine bir kanıt olarak söylediği "insan her şeyin ölçüsüdür" sözü bu düşüncelerinin özetini oluşturur (İlboğa, 2014).

Döneminde etkin ve yaygın olarak kabul gören bu düşünceleriyle sofistler, doğruluğun kişiden kişiye ve hatta toplumdan topluma değiştiğini, dolayısıyla insanın herhangi bir konu hakkında sahip olduğu bilginin hiçbir zaman doğrulanamayacak nitelikte bir "iddia" olduğunu ileri sürmüşlerdir (Çüçen, 2000). Sofistler bu düşüncelerle "doğru, doğru olduğu kanıtlanabilendir" şeklinde bir yargıya ulaşmışlardır (Tepe, 2004).

Sofistlerden sonraki dönemde Platon, bilginin imkânı üzerine yürüttüğü çıkarımlarda bilgiyi temellendirmek için algılanan dünyayla görünen dünyayı birbirinden ayırmıştır (Russell, 1997). Başka bir ifadeyle, duyular dünyası ve düşünülür dünya olmak üzere iki farklı bakış açısı geliştiren Platon, doğru bilginin var olma imkânını düşünceye dayandırarak gerçek bilginin nesnelerinin epistemik değerini ortaya koymaya çalışır. Platon'un "episteme" (bilgi) ile "doxa" (sanı) arasındaki ayrımı temelde böyle bir amaca yönelik olarak ortaya konulmuştur. Yunanca'da "doxa" kavramına karşıt olarak kullanılan ve idealarn apriori bilgisi anlamına gelen "episteme", Platon'dan önce net bir anlama sahip değilken, Platon ile birlikte "bilgi/bilme", kavramı ile yakın anlamda kullanılmıştır. "Doxa" kavramı ise, episteme ve gnosis[2] kavramlarına karşıt olarak kullanılan ve gerçek bilgi ile çelişik anlamlar içeren, daha çok "sanı" anlamına yakın olan, duyulara dayalı, değişken olan (sözde) bilgiye karşılık olarak kullanılır (İlboğa, 2014). Bir başka ifadeyle, doxa yanılsamalı, kesin olmayan bilgi; episteme ise doğru bilgi anlamına gelir.

3.2. MORGENSTERN YAKLAŞIMI

Düşünce sistemlerinin işleyişleri farklı olduğu için insanların olaylar karşısında farklı şekillerde mantık yürütmeleri olağandır. Bu nedenle karar vermenin tek bir sistematik yaklaşımla incelenebilmesi mümkün değildir. Aslında, bu konuyu oyun teorisinin ilk kurucularından olan Oskar Morgenstern, 1935'te yayımlanan "Perfect Foresight and Economic Equilibrium" isimli makalesinde vurgulamıştır. Morgenstern bu makalesinde, rakiplerin inançları hakkında bir kanıya sahip olmanın, mantık ilişkisi kurmanın ve oyunda iyi bir karar verebilmek için rakiplerin düşünce sisteminin doğru analiz edilmesinin önemini açıklamıştır (Morgenstern, 1935). Ancak oyun teorisi alanında son altmış yılda yayımlanan çalışmalarda bu kavramın önemi gözden kaçmıştır. Bir anlamda Morgenstern, kendi zamanının ötesinde bir düşünce sistemi ortaya koymuş ve bu yaklaşımın önemi yıllar sonra fark edilmiştir. Söz konusu yaklaşım günümüzde epistemik oyun teorisi adı altında gelişimini sürdürmektedir.

Morgenstern aynı zamanda, iktisadi analizlerde gerekçelendirmenin önemini ve inanç hiyerarşisi kavramını da açıklamıştır. Anlatıma açıklık getirebilmek için konuyu bir hikâye üzerinden anlatmıştır:

"Sherlock Holmes, Londra'dan Dover'a yolculuğu sırasında düşmanı Moriarty tarafından takip edilmektedir. Holmes, Moriarty'yi Londra'daki tren istasyonunda

[2] Sezgi yoluyla elde edilen bilgi anlamına gelmektedir.

görmüştür. Holmes, Moriarty'nin çok zeki olduğunu bilmektedir ve Moriarty'nin kendisini Dover'da yakalayabilmek için daha hızlı bir tren bulup Dover'a gideceğini tahmin ederek, tren bir ara istasyonda durunca Dover'a gitmek yerine bu durakta inmeyi tercih etmiştir. Bir süre sonra Holmes'un haklı olduğu ortaya çıkmıştır. Fakat ya Moriarty daha zeki olsaydı ve Holmes'un zihinsel yeteneklerini daha iyi kestirebilseydi ve yapacağı eylemi daha iyi öngörebilseydi ne olurdu? Eğer öyle olsaydı, Moriarty de ara durakta inmeyi tercih ederdi. Ancak Holmes bunu tahmin etmiş olabilirdi ve Dover'a gitmeye karar vermiş olabilirdi. Sonuç olarak Moriarty yine farklı seçimi yapmış olacaktı. Dolayısıyla, burada çözümsüz bir paradoks vardır" (Morgenstern, 1935).

Hem Holmes'un hem de Moriarty'nin birbirleri hakkında doğru kanıya sahip olduklarını varsayalım. Bu durumda seçimlerin sürdürülebilir bir yapılandırılmasının olmadığı görülür. Eninde sonunda ikisinden birinin diğeri hakkında doğru olmayan bir kanıya sahip olması kaçınılmazdır. Uzun yıllar boyunca, iktisat teorisi tüm rakiplerin birbirleri hakkında doğru kanılara sahip oldukları varsayımını kabul etmiştir. Morgenstern, Sherlock Holmes hikâyesi ile bu yaklaşımın her zaman gerçekçi olmadığını kanıtlamıştır.

"Dengenin analiz edildiği bu tip varsayımlarda, gerçekte tüm oyuncuların ileride gerçekleşebilecek ilgili olayları doğru bir biçimde öngörebildiği ve aynı zamanda da bu öngörünün nesnel verilerdeki ve oyuncuların davranışlarında yaşanabilecek değişimleri de içerdiği kabul edilir. Yine de eksik, heterojen yapılı olabilecek öngörülerle bir dengeye ulaşılabilir mi? Tüm anlatılanlara göre, kusursuz öngörü varsayımının iktisat teorisinden çıkarılması gerekir" (Perea, 2014a).

Eğer iktisadi modeller oyunculara doğru olmayan kanılara da sahip olabilme esnekliğini sağlarsa; ilgili olaylar hakkında, bir oyuncunun diğer oyuncuların inançları hakkındaki inancı önem kazanır. Bunun sonucunda da inanç hiyerarşileri gündeme gelir. Morgenstern inanç hiyerarşilerinin yapılandırılması hususunda da bilgi vermiştir:

"Öngörü esnekliğinin çözümü lojistik alanında kullanılan Russell'ın türler teorisinin altında yatmaktadır. Birinci türün iktisadi konulardaki teorik öğretilerine dayanılarak elde edilen bilgi, ikinci türün sahip olduğu öğretilerle birleştirildiğinde daha fazla olacaktır. Benzer şekilde ikinci türün bilgisi ile üçüncü türün bilgisi birleştirildiğinde öğreti daha büyük bir hale gelir" (Perea, 2014a).

Morgenstern, oyuncuların diğer oyuncuların olası eylemlerini ve onların diğerleri hakkındaki inançlarını gerekçelendirdiği modelleri şiddetle savunmuştur. Oyun teorisinin ilk aşamalarında, Morgenstern'in sosyal bir sistemin üyelerinin düşüncelerinin, diğer oyuncuların düşünceleri hakkındaki vb. düşüncelerinin biçimsel mantık yöntemleriyle incelenmesi yönündeki fikirleri zamanının çok ötesindeydi. Fakat, şimdi epistemik oyun teorisi formunda yerini bulmuştur (Brandenburger, 2010).

3.3. NASH DENGESİ ÜZERİNE YAPILAN ELEŞTİRİLER

Nash dengesinin oyun teorisinde önemli bir rol almasıyla birlikte oyuncuların stratejilerini Nash dengesine göre belirlemelerinin nedenleri araştırılmaya başlanmıştır. Bunun için gerçek aktörler kullanılarak laboratuvar ortamında deneyler yapılmıştır. Deney sonuçlarından elde edilen bulgular kimi zaman teorilerle uyuşurken, kimi zaman da ters düşmüştür. Dengeyi sağlayan yaklaşımlardan biri öğrenme kuramıdır. Öğrenme kuramında, oyuncular oyunu tekrar tekrar oynarlar ve zamanla oyuncuları Nash dengesine göre hareket etmeye yönlendiren kurallar elde edilir. Öğrenme kuramında tartışmaya açık olan nokta ise, oyuncuların oyunun dengeye yakınsadığını nasıl tahmin ettikleridir. Nash dengesi, denge noktasının varlığını ispatlarken dengeye ulaşmada oyuncuların strateji seçimlerinin izlediği yol hakkında bilgi vermemektedir.

Benzer şekilde, evrimci oyun teorisinde[3] tekrarlı oyunun, çoğaltıcı dinamikler kullanılarak uzun dönemde Nash dengesine yakınsayacağı savunulur. Evrimci yaklaşımın eleştirilen yönü, oyuncuların edilgen bir tavırla ortalamaya göre hareket etmek gibi belirli hamleleri yapmaya programlanmalarıdır.

Eğer oyun yalnızca bir kez oynanacaksa, bir uzlaştırıcının yer aldığı oyunlarda Nash dengesi sağlanabilir. Uzlaştırıcı, karma strateji profillerini açıkça ilan eder ve oyunculara bu profile uygun şekilde hamle yapmalarını önerir. Aynı zamanda uzlaştırıcının bulunmadığı statik bir oyunda da Nash dengesine ulaşılabilir. Bunun için

---

[3] Evrimci oyun teorisi, oyun teorisinin biyolojide evrim geçiren popülasyonların yaşam biçimlerine uygulanmasıyla ortaya çıkmıştır.

yeterli koşul; oyuncunun, rakiplerinin diğer oyuncuların strateji tercihleri hakkında doğru fikre sahip olduğunu bilmesidir (Perea, 2007).

Oyuncuların oyun öncesi birbirleriyle bilgi paylaşmaları, onların oyuna dair beklentilerini birbirine yaklaştırır. Ancak herhangi bir bilginin aynı beklentiye yol açtığı düşüncesi de tartışmaya açıktır.

Nash dengesi, durağan durumlarla uyumlu bir kavramdır. Her oyuncu, diğer oyuncuların strateji seçimi hakkında belirlediği inanca göre kendisi için rasyonel seçimi yapar ve her oyuncunun inançları birbirleri ile tutarlıdır. Bir başka deyişle oyun, oyuncuların diğer oyuncuların strateji seçimine ilişkin inançları doğrultusunda gerçekleşmektedir.

Nash dengesine uyum sağlayan yaklaşımların ortak özelliği, oyuncular arasında iletişimin bir şekilde gerçekleşmesidir. Epistemik oyun teorisinde oyun tek bir oyuncunun perspektifinden ele alınır. Bu nedenledir ki, epistemik oyun teorisine göre bir oyuncunun ulaştığı Nash dengesi sadece o oyuncuya aittir. Her oyuncu aynı çözümde birleşmek zorunda değildir. Aksi halde rakibinizin sizin düşünce mantığınızla hareket ettiği varsayılmış olur ki bu, rakibin aklını okumak anlamına gelir. Böyle bir varsayım gerçekçi olmayacağından, oyun problemlerinde kullanılan dualite kavramı burada her zaman geçerliliğini koruyamaz.

Bu çalışmada, oyuncular arasında hiçbir iletişimin olmadığı statik oyunlar incelenmiştir. Dolayısıyla bu tür oyunlarda, oyuncu strateji seçimini yalnızca rakiplerinin tercihleri hakkında kendisinin belirlemiş olduğu inançlara dayanarak gerçekleştirir. Oyun oynanana kadar herhangi bir kaynaktan hiçbir bilgi edinilemez. Bu nedenle, oyunu tek bir oyuncunun perspektifinden analiz etmek anlamlı olur.

3.4. EPİSTEMİK OYUN TEORİSİ KAVRAMLARI

3.4.1. Rakiplerin Seçimleri Hakkındaki İnanç

Bir i oyuncusunun rakiplerinin seçimleri hakkındaki inancı, $S_{-i} = S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n$ kümesi üzerinde tanımlanmış bir b_i olasılık dağılımıdır. i oyuncusunun rakiplerinin yapabileceği her $s_{-i} = (s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ strateji birleşimi için atadığı olasılık değeri ise $b_i(s_1, \ldots, s_{i-1}, s_{i+1}, \ldots, s_n)$ ile bulunur.

3.4.2. Beklenen Kazanç

Bir i oyuncusunun kazanç fonksiyonu u_i ve rakiplerinin tercihleri hakkındaki inancı b_i olsun. Buna göre, i oyuncusunun s_i stratejisini tercih etmekten beklediği kazanç,

$$u_i(s_i, b_i) = \sum_{(s_1,\dots,s_{i-1},s_{i+1},\dots,s_n)\in S_{-i}} b_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) * u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i, s_{i+1}, \dots, s_n)$$

denklemi ile bulunur.

3.4.3. Optimal ve Rasyonel Strateji

Bir i oyuncusunun kazanç fonksiyonu u_i ve rakiplerinin tercihleri hakkındaki inancı b_i olsun. Bu durumda, b_i inancına göre s_i^* stratejisinin beklenen kazancı maksimum ise, yani $\forall s_i \in S_i$ için $u_i(s_i^*, b_i) \geq u_i(s_i, b_i)$ eşitsizliği sağlanıyorsa i oyuncusu için en iyi seçim s_i^* stratejisidir.

Bir i oyuncusunun rakiplerinin davranış biçimlerine olan inancına göre tercih edeceği s_i^* stratejisi optimal ise, s_i^*'ye rasyonel strateji denir. Rasyonel stratejiler saf ya da karma stratejiler tarafından kesin mahkûm edilemeyen stratejilerdir.

3.4.4. Rakiplerin Rasyonelliği Hakkındaki İnanç

Bir i oyuncusunun rakiplerinin tercihleri hakkındaki inancı b_i olsun. Eğer b_i yalnızca rakiplerinin $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ rasyonel seçimleri için pozitif olasılık atıyorsa, i oyuncusu rakiplerinin rasyonel olduğuna inanıyor demektir.

3.4.5. Rakiplerin Rasyonelliği Altında Rasyonel Seçim

Eğer i oyuncusunun s_i stratejisi, rakiplerinin, rakiplerin rasyonelliği kavramına uygun seçimleri hakkındaki b_i inancına göre optimal ise, i oyuncusunun rakiplerin rasyonelliği altında yapacağı s_i stratejisi seçimi rasyonel bir seçimdir.

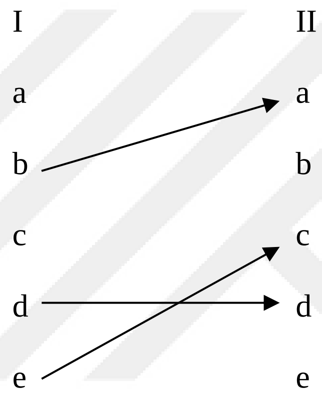
Rakiplerin rasyonel oldukları koşulu altında rasyonel olarak seçilebilecek stratejilerin belirlenmesinde iki yöntem kullanılabilir. Yöntemlerden ilki grafik yöntemdir ve aşağıda açıklanmıştır.

<u>*Grafik Yöntem (İnanç Diyagramı):*</u>

Grafik yöntemde, oyuncuların rakiplerinin rasyonelliği altında yapabilecekleri rasyonel seçimlerin belirlenmesi için inanç diyagramı adı verilen bir diyagramdan yararlanılır. Söz konusu diyagramda oyuncuların stratejileri ve stratejiler arasındaki ilişkiyi ortaya koyan oklar yer almaktadır.

Bir i oyuncusunun s_i stratejisi dikkate alınmış olsun. Eğer s_i stratejisinden, yalnızca rakiplerinin rasyonel stratejilerine giden dışa dönük bir okun yer aldığı inanç diyagramı oluşturulabiliyorsa, s_i stratejisine rakiplerin rasyonelliği altında rasyonel bir stratejidir denir. Böyle bir inanç diyagramı bulunamıyorsa, s_i stratejisi rakiplerin rasyonelliği altında rasyonel bir seçim değildir.

İki oyunculu (I, II) bir oyun ele alınsın. Her iki oyuncunun da stratejileri a, b, c, d, e ve problemdeki kazanç fonksiyonu getirilerine göre I'in seçimlerini gösteren inanç diyagramı da aşağıdaki gibi olsun.



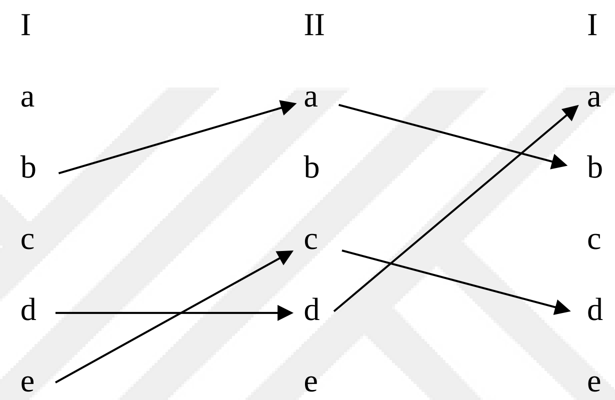
Şekil 3.1 I'in inanç diyagramı

Şekil 3.1'deki inanç diyagramı I için yorumlanırsa;

- I'in a stratejisi, II'nin tercihleri hakkındaki hiçbir inancına göre optimal değildir, dolayısıyla a stratejisi rasyonel bir seçim değildir.
- Eğer I, II'nin a stratejisini tercih edeceğine inanıyorsa, b stratejisi I için optimaldir. Dolayısıyla, b stratejisi rasyonel bir seçimdir.
- I'in c stratejisi, II'nin tercihleri hakkındaki hiçbir inancına göre optimal değildir, dolayısıyla c stratejisi rasyonel bir seçim değildir.
- Eğer I, II'nin d stratejisini tercih edeceğine inanıyorsa, d stratejisi I için optimaldir. Dolayısıyla, d stratejisi rasyonel bir seçimdir.
- Eğer I, II'nin c stratejisini tercih edeceğine inanıyorsa, e stratejisi I için optimaldir. Dolayısıyla, e stratejisi rasyonel bir seçimdir.

Burada oklar, I’in rakibinin seçimleri hakkındaki inançlarını ifade eder. Daha açık bir ifadeyle, okların sol tarafındaki stratejiler sağ taraftaki stratejilere karşı en iyi, yani rasyonel seçimlerdir.

Şekil 3.1’de yer alan inanç diyagramı ile I’in rakibinin tercihlerine olan inançları doğrultusunda seçebileceği rasyonel stratejiler belirlenmiştir. Ancak, Şekil 3.1’e göre I için kurulan inanç hiyerarşisinde rakibin rasyonelliği dikkate alınmamıştır. Rakibin rasyonelliği altında rasyonel seçimlerin belirlenmesi için II’nin inançlarının da analiz edilmesi gerekir. II’nin I’in tercihlerine göre rasyonel seçimlerini gösteren inanç diyagramı Şekil 3.2’deki gibi olsun.



Şekil 3.2 II’nin inanç diyagramı

Şekil 3.1’e göre I’in rasyonel stratejileri b, d ve e olarak belirlenmişti. Rakibin rasyonelliği de değerlendirmeye dahil edildiğinde, Şekil 3.2’ye göre I’in stratejileri aşağıdaki gibi yorumlanır.

- I’in a ve c stratejileri irrasyoneldir, çünkü bu stratejiler II’nin strateji seçimi hakkındaki hiçbir inancına göre optimal değildir.
- I’in d ve e stratejileri rasyoneldir, ancak rakibin rasyonelliğine olan inanç altında rasyonellik özelliklerini kaybederler. Çünkü; I, d stratejisini sadece II’nin d stratejisini seçeceğine inanıyorsa tercih eder. II ise d stratejisini I’in a stratejisini seçeceğine dair inancı varsa tercih eder. Ancak diyagrama göre I’in a stratejisi irrasyoneldir. Dolayısıyla; II, I’in rasyonelliğine inanıyorsa I’in hiçbir zaman a stratejisini seçmeyeceğini bilir. Bu nedenle, I’in d stratejisi uzun süre rasyonel strateji olma özelliğini koruyamaz. Benzer şekilde I’in e stratejisi de uzun süre rasyonel olma özelliğini koruyamaz. Çünkü; I, e stratejisini yalnızca II’nin c stratejisini seçeceğine dair inancı olması halinde tercih eder.

II ise, c stratejisini I’in d stratejisini seçeceğine inanıyorsa seçer. Ancak yukarıda açıklandığı gibi, I için d stratejisi rakibin rasyonelliği altında rasyonel bir strateji değildir. Bu nedenle, I’in e stratejisi de rakibin rasyonelliği altında rasyonel bir strateji değildir.

- I’in b stratejisi rakibin rasyonelliği altında rasyonel bir stratejidir.

Benzer biçimde inanç diyagramı II oyuncusu için de yorumlanabilir. Rakiplerin rasyonel oldukları koşulu altında rasyonel olarak seçilebilecek stratejilerin belirlenmesinde kullanılan diğer yöntem ise aşağıda açıklanan kesin mahkûm stratejilerin iki katlı eliminasyonudur.

Algoritma 3.1 (Kesin Mahkûm Stratejilerin İki Aşamalı Eliminasyonu):

i. Her oyuncu için kesin mahkûm stratejileri elimine et.
ii. İndirgenmiş oyunda, tüm oyuncular için kesin mahkûm stratejileri elimine et.

Grafik yöntem rakiplerin rasyonelliği altında rasyonel olarak seçilebilecek her strateji için o stratejiyi destekleyen inancı göstermektedir. İki aşamalı kesin mahkûm stratejilerin eliminasyonu algoritması ise, rakiplerin rasyonelliği altında seçilebilecek tüm rasyonel seçimleri hemen verebilmektedir. Dolayısıyla, her iki yöntemin birbirine göre avantaj ve dezavantajı vardır.

Oyun teorisinde rasyonel seçim kavramı bazen karışıklığa neden olmaktadır. Bu çalışma kapsamında, rasyonel kelimesi şu anlamda kullanılmıştır: Bir oyuncu rakibinin seçimleri hakkında bir inanç modeli oluşturmuş ve bu model altında kendisi için en iyi seçimi yapmışsa, rasyonel seçim yapmış demektir. Ancak, bu oyuncu rakibi hakkında makul olmayan bir akıl yürütme de yapmış olabilir ve terminolojideki tanımına göre; rasyonel seçim yapmak akla uygun (makul) seçim yapmayı garantilemez. Makullük öznel bir anlam taşır ve kişinin düşünce yapısına bağlıdır. Bir kişiye göre makul olan, başka birine göre makul olmayabilir. Dolayısıyla, makul seçimin tek bir tarifi mümkün değildir (Perea, 2012).

Makul seçim sadece rakiplerin seçimlerine olan inanca göre rasyonel olmakla kalmayıp, aynı zamanda rakiplerin yapacağı hamleler hakkındaki makul bir inanca göre optimal olmalıdır. Tartışmaya açık olan konu ise, rakipler hakkındaki bir inanç ne zaman makul olma özelliği kazanır? Epistemik oyun teorisi bu sorunun cevabını farklı yaklaşımlar ile incelemektedir.

3.5. RASYONELLİĞİN ORTAK BİLGİSİ

Bir olgunun ortak bilgi olabilmesi için bazı özelliklere sahip olması gerekmektedir. Oyun teorisyeni Aumann, 1976 yılında yayımlanan çalışmasında ortak bilgi kavramını matematikleştirmiştir. Aumann'ın açıklamaları aşağıdaki gibi özetlenebilir.

"İsimleri 1 ve 2 olmak üzere iki kişiyi düşünelim. Bir olayın ortak biliniyor olması, o olayı sadece 1 ve 2'nin biliyor olması demek değildir. Aynı zamanda 1'in, 2'nin bildiğini, 2'nin de 1'in bildiğini, 1'in, 2'nin 1'in bildiğini bildiğini vb. biliyor olması gerekir. Örneğin, bir olay gerçekleşirken her ikisi de orada bulunuyor ve göz göze geliyor olsunlar. Bu durumda, bu olay ortak bilgi özelliğine sahiptir. Örneğimizde, eğer 1 ve 2 birbirlerine sonsal yargılarını söylerlerse ve birbirlerine güvenirlerse, bu yargıları da ortak bilgi özelliği kazanır. Ancak bu iki kişinin sadece birbirlerinin sonsal yargılarını biliyor olması ortak bilgi özelliği taşımaz" (Aumann, 1976).

Aumann'ın geliştirdiği mantıkla paralel olarak, rasyonelliğe ortak inanç kavramı aşağıda açıklanmıştır.

3.6. RASYONELLİĞE ORTAK İNANÇ

Aumann'ın açıklamaları ışığında rasyonelliğe ortak inanç kavramı inanç hiyerarşisi yardımıyla ifade edilebilir. Bunun için iki oyunculu (I ve II) bir oyun ele alınsın. Bu oyunda I için oluşturulacak inanç hiyerarşisi şu bilgileri içerir:

- I'in rakibinin seçimi hakkındaki inancı,
- I'in, II'nin I'in yapacağı seçim hakkındaki inancına olan inancı,
- I'in II'nin yapacağı seçim hakkındaki inancı hakkında II'nin inancına olan inancı,
- …

Genelleştirilirse, n-oyunculu bir oyunda herhangi bir oyuncu (i) için inanç hiyerarşisi şöyledir:

- i'nin, rakiplerinin seçeceği strateji profili hakkındaki inancı,
- i'nin, rakiplerinin diğer oyuncuların seçeceği strateji profili hakkındaki inançlarına olan inancı,

- i'nin, rakiplerinin diğer oyuncuların rakiplerinin seçeceği strateji profili hakkındaki inançlarına dair inançlarına olan inancı,
- …

Hiyerarşinin ilk maddesi birinci-derece inanç, ikinci maddesi ikinci-derece inanç, üçüncü maddesi üçüncü-derece inanç, vb. olarak adlandırılır.

Hiyerarşi, inanç diyagramından yararlanılarak oluşturulmaktadır. i'nin herhangi bir s_i stratejisinden yola çıkarak dışa dönük oklar takip edildiğinde sadece rasyonel seçimlere ulaşılır. Dışa dönük okla ulaşılan her rasyonel seçim de dışa dönük bir oka sahip olacaktır. Dolayısıyla rasyonel seçimler arasında birinci-derece inanç, ikinci-derece inanç, üçüncü-derece inanç, vb. sonsuz bir döngü oluşacaktır. Buna ek olarak, bu sonsuz döngüye sahip olan hiyerarşi, s_i stratejisinin rasyonelliğe ortak inanç altında seçilebilecek bir strateji olduğunu belirtir.

Şekil 3.2'den yararlanarak I'in rakibinin rasyonelliği altında b stratejisinin rasyonel strateji olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Ancak geriye şu soru kalmıştır: I'in rakibinin rasyonelliği altında seçebileceği her rasyonel stratejisi aynı zamanda makul mudur? Verilen örnek için bu sorunun cevabı evettir. Çünkü, I, II'nin rasyonel olarak a stratejisini seçeceğine inanıyorsa b stratejisi onun için rasyoneldir. II de I'in rasyonel olarak b stratejisini seçeceğine inanıyorsa a stratejisi onun için rasyoneldir. Tekrar I, II'nin rasyonel olarak a stratejisini seçeceğine inanıyorsa b stratejisi onun için rasyoneldir ve sonuç olarak sonsuz bir döngü oluşur. Bu açıklamalar inanç hiyerarşisi biçiminde ifade edilirse,

- I, II'nin rasyonel olarak a stratejisini seçeceğine inanıyorsa,
- I, II'nin I'in rasyonel olarak b stratejisini seçeceğine inandığına inanıyorsa,
- I, II'nin I'in II'nin rasyonel olarak a stratejisini seçeceğine inandığına inandığına inanıyorsa,
- …

I için b stratejisi, rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel bir seçimdir.

Özetle, rasyonelliğe ortak inanç yalnızca sizin rakiplerinizin rasyonel olduğuna inanmanız değil, aynı zamanda rakiplerinizin rakiplerinin rasyonel olduğuna, rakiplerinizin rakiplerinin diğer oyuncuların rasyonel olduğuna, vb. inandığı anlamına gelir. Dolayısıyla, rasyonelliğe ortak inanç altında yapılan rasyonel seçimler aynı zamanda makul seçimlerdir.

3.7. EPİSTEMİK MODEL

İnanç hiyerarşisi kavramı epistemik yaklaşımın temel unsurudur ve son yıllarda modern iktisat teorisinde eksik bilgili oyunların analizinde ve rasyonelleştirilebilirlik (rationalizability), Nash dengesi, ilişkili denge (correlated equilibrium) gibi çeşitli çözüm yöntemlerinin epistemik tanımlamalarında kullanılan bir araç olmuştur (Tsakas, 2014). Ancak, hiyerarşinin hem teorik hem de pratik bakımdan bazı dezavantajları vardır. Teorik bakımdan, hiyerarşinin matematiksel bir tanımını yapmak oldukça güçtür. Pratik bakımdan ise, sonsuz hiyerarşinin her bir aşamasını (birinci-derece inanç, ikinci-derece inanç, vb.) yazmak ve ifade etmek çoğu zaman imkânsızdır. Bu nedenle hiyerarşi mantığını daha kısa ve biçimsel bir yöntemle ifade edebilen bir yaklaşıma ihtiyaç duyulmuştur.

Sonsuz inanç hiyerarşisi kavramını oyun teorisine kazandıran Macar-ABD'li ekonomist John Harsanyi'dir. Harsanyi, oyuncuların oyunun parametreleri hakkında tam bilgiye sahip olmadıkları Bayesçi oyunlar olarak da adlandırılan eksik bilgili oyunlar üzerinde çalışmıştır. Her oyuncunun oyunun bilinmeyen parametreleri hakkındaki inancını, diğer oyuncuların parametreler hakkındaki inançları hakkındaki inancını, vb. modellemek istemiştir. Modellemede kullanılan yöntem, açık yaklaşım olarak adlandırılmıştır. Bununla beraber, açık yaklaşımın yönetilmesi güç ve matematiksel olarak hantal olması, eksik bilgi altındaki oyun kuramının gelişiminin ilk aşamalarında karşılaşılan en büyük engel olmuştur. Bu konudaki büyük buluş Harsanyi tarafından geliştirilen ve kendisine otuz yıl sonra 1994'te Nobel Ekonomi ödülü kazandıran çığır açıcı "Games With Incomplete Information" isimli çalışması olmuştur. Harsanyi sözlü olarak problemi açık bir biçimde ifade ederken, inançların sonsuz hiyerarşisi zorluğundan kaçınan daha kapalı ve kullanışlı bir model önermiştir. Harsanyi modelinin temeli "tür"dür. Tür kavramı oyuncuların oyunun bilinmeyen parametreleri hakkındaki inanç hiyerarşisinin tam bir tanımı olarak düşünülebilir. Öyle ki tür, oyuncunun aklında yer alan parametreler hakkındaki inançlarının ve diğer oyuncuların türleri ile ilgili cevaplarının özel bir biçimde gösterimidir. Türün bu niteliği, etkileşimli karar verme ortamında kaçınılmaz olarak oyuncuya kendine referans olgusunu, yani kendi türü aracılığıyla diğer oyuncuların türlerine karar verme niteliğini kazandırır (Zamir, 2008).

Harsanyi modeli şu şekilde oluşturulur: Her oyuncu için, türler kümesi tanımlanır ve her tür için rakiplerinin türleri hakkındaki olasılıksal inançlarıyla birlikte bir kazanç fonksiyonu oluşturulur (Perea, 2014b). Epistemik oyun teorisindeki tür kavramı Harsanyi'nin tür kavramından farklıdır. Harsanyi oyunun parametreleri için inanç hiyerarşileri oluştururken, epistemik oyun teorisi oyuncuların seçimleri ile ilgilenmektedir. Bu konuda (Armbruster & Böge, 1979) ile (Böge & Eisele, 1979) inanç hiyerarşilerini oyuncuların rakiplerinin seçimleri hakkındaki inançlarını tanımlamak için ilk kez kullanmışlardır.

Herhangi bir i oyuncusunun herhangi bir s stratejisini destekleyen inanç hiyerarşisi t_i^s ile gösterilsin. Literatürde inanç hiyerarşisi kavramı aynı zamanda epistemik tür (ya da kısaca tür) olarak da kullanılır. Dolayısıyla t harfi, i oyuncusunun bir epistemik türünü simgeler.

n-oyunculu bir oyun ele alınsın. Epistemik model öncelikle her oyuncu için mümkün türleri belirler. Herhangi bir i oyuncusunun tüm mümkün türlerinden oluşan küme T_i ile gösterilsin. Her t_i türü, i oyuncusunun rakiplerinin stratejileri ve türleri hakkındaki inancına ait bilgiyi saklar. Burada ortaya çıkan sorun, bu inancın matematiksel olarak nasıl ifade edilebileceğidir.

Bilindiği gibi, herhangi bir i oyuncusunun rakiplerinin seçimleri hakkındaki inancı, $S_{-i} = S_1 \times \ldots \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times \ldots \times S_n$ kümesi üzerinde tanımlanmış b_i olasılık dağılımıdır. t_i sadece rakiplerin seçimlerine ait inanca değil, aynı zamanda rakiplerinin türlerine ait bilgiye de sahip olmalıdır. Bunun sonucu olarak t_i, i oyuncusunun rakiplerinin strateji-tür birleşimlerini temsil eder. i oyuncusunun herhangi bir j rakibinin tüm mümkün strateji-tür çiftlerinden oluşan küme $S_j \times T_j$'dir. Buna bağlı olarak, i oyuncusunun rakiplerinin tüm mümkün strateji-tür birleşimleri kümesi,

$$(S_1 \times T_1) \times \ldots \times (S_{i-1} \times T_{i-1}) \times (S_{i+1} \times T_{i+1}) \times \ldots \times (S_n \times T_n)$$

olur. Bu küme tüm mümkün,

$$((s_1, t_1), \ldots, (s_{i-1}, t_{i-1}), (s_{i+1}, t_{i+1}), \ldots, (s_n, t_n))$$

birleşimlerini içerir. Bir epistemik model her i oyuncusu ve her $t_i \in T_i$ türü için rakiplerinin tüm mümkün strateji-tür birleşimleri kümesi $(S_1 \times T_1) \times \ldots \times (S_{i-1} \times T_{i-1}) \times$

$(S_{i+1} \times T_{i+1}) \times \ldots \times (S_n \times T_n)$ üzerinde tanımlanmış bir $b_i(t_i)$ olasılık dağılımı belirtir. $b_i(t_i)$ olasılık dağılımı, t_i türünün rakiplerinin stratejileri ve türleri hakkındaki inancını yansıtır.

Bir epistemik modelde i oyuncusu için t_i türü ele alınsın. Eğer s_i, t_i türünün i oyuncusunun rakiplerinin strateji-tür birleşimleri hakkındaki birinci-derece inancına göre optimal ise, s_i stratejisi t_i türüne göre optimaldir denir.

Tüm inanç hiyerarşisi epistemik model ile ifade edilebilir. Epistemik modelin kurulması, inanç hiyerarşisinin oluşturulmasından daha kolaydır. Bu özellik, epistemik modelin önemli bir avantajıdır. Epistemik modelin matematiksel bir ifadeyle tanımlanabilmesi onun diğer bir avantajıdır.

3.8. RASYONELLİĞE ORTAK İNANÇ ALTINDA KARAR VERME

Rasyonelliğe ortak inanç kavramının mantığı epistemik model üzerinden ifade edilsin. Bir i oyuncusunun t_i türünü içeren bir epistemik model inceleniyor olsun. t_i, rakiplerinin strateji-tür birleşimleri $((s_1, t_1), \ldots, (s_{i-1}, t_{i-1}), (s_{i+1}, t_{i+1}), \ldots, (s_n, t_n))$ için sadece ilgili türe göre optimal olan stratejilere pozitif olasılık atıyorsa, o halde t_i türü rakiplerinin rasyonelliğine inanıyor demektir. Rasyonelliğe ortak inancı tanımlayabilmek için öncelikle k-katlı rasyonelliğe inanç tanımına ihtiyaç vardır. k-katlı rasyonelliğe inanç aşağıda açıklanmıştır.

<u>k-Katlı Rasyonelliğe İnanç:</u>

- Eğer t_i türü rakiplerinin rasyonelliğine inanıyorsa, t_i 1-katlı rasyonelliğin inancına,
- Eğer t_i türü sadece rakiplerinin 1-katlı rasyonelliğin inancına sahip türlerine pozitif olasılık atıyorsa; t_i, 2-katlı rasyonelliğin inancına,
- Eğer t_i türü sadece rakiplerinin 2-katlı rasyonelliğin inancına sahip türlerine pozitif olasılık atıyorsa; t_i, 3-katlı rasyonelliğin inancına,
- …

sahiptir. Bu şekilde, her k sayısı için k-katlı rasyonelliğe inanç yinelemeli olarak tanımlanabilir (Perea, 2012).

Rasyonelliğe Ortak İnanç:

Bir epistemik modelde t_i türü her k sayısı için k-katlı rasyonelliğin inancına sahipse, t_i'nin rasyonelliğe ortak inanca sahip olduğu söylenir.

Rasyonelliğe Ortak İnanç Altında Rasyonel Seçim:

Bir t_i türünü içeren bir epistemik modelde, t_i rasyonelliğin ortak inancına sahipse ve s_i stratejisi t_i türü için optimal ise, s_i stratejisi rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel bir seçimdir.

$T_1, \ldots, T_n$ tür kümelerinden oluşan bir epistemik modelde bir s_i stratejisi, T_i kümesinin hiçbir türü tarafından rasyonelliğe ortak inanç altında tercih edilmiyorsa, bu s_i stratejisinin rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel olarak seçilemeyeceği anlamına gelmez. s_i stratejisini destekleyen bir türün yer aldığı başka bir epistemik model bulunabilir. Bu epistemik modelin bulunabilme olasılığının incelenmesi bu çalışmanın temel amacıdır.

Algoritma 3.2:

Rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel olarak seçilebilecek stratejilerin bulunmasında kullanılabilecek bir algoritmaya ihtiyaç duyulmuştur. Düzenlenecek algoritma (Algoritma 3.2) için aşağıdaki teoremden yararlanılmıştır.

Teorem 3.1:

Bir s_i stratejisi ancak ve ancak başka bir saf strateji ya da karma strateji tarafından kesin mahkûm edilmişse irrasyonel bir stratejidir. Başka bir ifadeyle, bir s_i stratejisi ancak ve ancak başka bir saf strateji ya da karma strateji tarafından kesin mahkûm edilememişse rasyonel bir seçimdir (Pearce, 1984).

Teorem 3.1 yardımıyla Algoritma 3.2'nin oluşturulma süreci adım adım aşağıda açıklanmıştır.

Adım 1:1-Katlı Rasyonelliğe İnanç

1-katlı rasyonelliğin inancına sahip bir tür için hangi stratejiler rasyoneldir? Eğer rakiplerin rasyonelliğine inanılıyor ise yalnızca rakiplerin rasyonel seçimlerine pozitif olasılık atanır. Dolayısıyla, eğer rakiplerinizin rasyonel olduğuna inanıyorsanız, rakiplerinizin kesin mahkûm edilemeyen stratejilerine pozitif olasılık atarsınız. Bu nedenle, rakiplerinizin kesin mahkûm edilen stratejilerini eleyerek yalnızca indirgenmiş oyuna odaklanmak daha anlamlıdır. Bu indirgenmiş oyun içerisinde sizin rakiplerinizin rasyonelliğine inancınız altında rasyonel olarak seçebileceğiniz stratejiler, kesin olarak sizin sahip olduğunuz bir inanca göre optimal olan stratejilerdir ki bu stratejiler, indirgenmiş oyun içerisinde size göre kesin mahkûm edilemeyen stratejilerdir. Başka bir ifadeyle, optimal stratejiler kesin mahkûm stratejilerin 2-katlı eliminasyonundan geriye kalan stratejilerdir.

Adım 2: 2-Katlı Rasyonelliğe İnanç

2-katlı rasyonelliğin inancına sahip bir tür için hangi stratejiler rasyoneldir? 2-katlı rasyonelliğin inancına sahip tür t_i olsun. O halde, t_i yalnızca rakiplerinin ilgili tür için optimal olan stratejilerine pozitif olasılık atar. Yani, eğer bir j rakibinin (s_j, t_j) strateji-tür çiftinde s_j, t_j türü için optimal seçim ise ve t_j türü 1-katlı rasyonelliğin inancına sahip ise t_i, s_j stratejisine pozitif olasılık atar. Dolayısıyla, t_i sadece rakiplerinin 2-katlı eliminasyonundan geriye kalan stratejilerine pozitif olasılık verir. Bu durumda, t_i türü için optimal olan her s_i stratejisi 2-katlı eliminasyon sonucunda elde edilen indirgenmiş oyun (G^2) içerisinde bir inanca göre optimaldir. Bu nedenle t_i türü için optimal olan her s_i stratejisi indirgenmiş G^2 oyununda kesin mahkûm edilemeyen stratejilerdir. Dolayısıyla, G^2 oyununa bir eliminasyon işlemi daha uygulanır ve bu işlem 3-katlı eliminasyon olarak adlandırılır. Sonuç olarak, 2-katlı rasyonelliğin inancına sahip bir tür için optimal olan her strateji, kesin mahkûm stratejilerin 3-katlı eliminasyonundan geriye kalan stratejilerdir.

Bu açıklamalar ışığında algoritma aşağıdaki gibidir:

1. Orijinal oyundaki kesin mahkûm stratejileri elimine et.
2. (1). adım sonrasında elde edilen indirgenmiş oyundaki kesin mahkûm stratejileri elimine et.
3. (2). adım sonrasında elde edilen indirgenmiş oyundaki kesin mahkûm stratejileri elimine et.

   ⋮

   Hiçbir strateji elimine edilemeyinceye kadar bu işlemi tekrarla.

Bu algoritma sonlu sayıda adımda sona erer ve her oyuncu için boş olmayan bir strateji kümesi verir. Eliminasyonun sırası ve hızı nihai sonucu etkilemez (Perea, 2012).

Bir k sayısı için genelleştirme yapılırsa, aşağıda açıklanan Teorem 3.2’ye ulaşılır.

Teorem 3.2:

Her $k \geq 1$ için bir türe göre k-katlı rasyonelliğin inancına sahip olan stratejiler, $(k+1)$-katlı eliminasyondan geriye kalan stratejilerdir. Ortaya konulan bu durum, rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel olarak seçilebilen stratejiler, kesin mahkûm stratejilerin sürekli eliminasyonu sonucunda geriye kalan stratejilerdir şeklinde genellenebilir (Tan & Werlang, 1988).

Bu çalışmada, statik bir oyunda her i oyuncusu ve her s_i $(i = 1,2, \dots, n)$ rasyonel stratejisi için s_i'nin rasyonelliğe ortak inanç altında optimal olduğunu destekleyen bir t_i türünün var olduğu epistemik modelin kurulması amaçlanmıştır. Bu amacı gerçekleştirmek için, yukarıda verilen teoremler yardımıyla modeller, algoritmalar ve yazılımlar geliştirilmiştir.

4. ALGORİTMALAR

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısım, iki kişili statik ortaksız oyunlarda rasyonel stratejilerden oluşan oyun matrisinin elde edilmesi ile ilgilidir. Üçüncü bölümde açıklandığı gibi, optimal seçim sadece rasyonel stratejiler arasından yapıldığından öncelikle oyunda kesin mahkûm stratejilerin sürekli eliminasyonu gerekir. Eliminasyon için Algoritma 3.2'ye başvurulur. Ancak, gerçek hayatta oyunların büyük boyutlu olmaları nedeniyle bu algoritmanın bilgisayar ortamında gerçekleştirilmesi gerekmektedir. Oyun teorisi ile ilgili yazılımlar çoğunlukla belirli oyun türlerinde sonuç odaklı bir yaklaşımla hazırlanmış olduğundan, sürekli eliminasyon yöntemini gerçekleştiren bir yazılıma ihtiyaç duyulmuştur. R istatistiksel programlama dili kullanılarak iki kişili statik ve ortaksız oyunlarda saf ve karma kesin baskın stratejileri belirleyen program geliştirilmiştir.

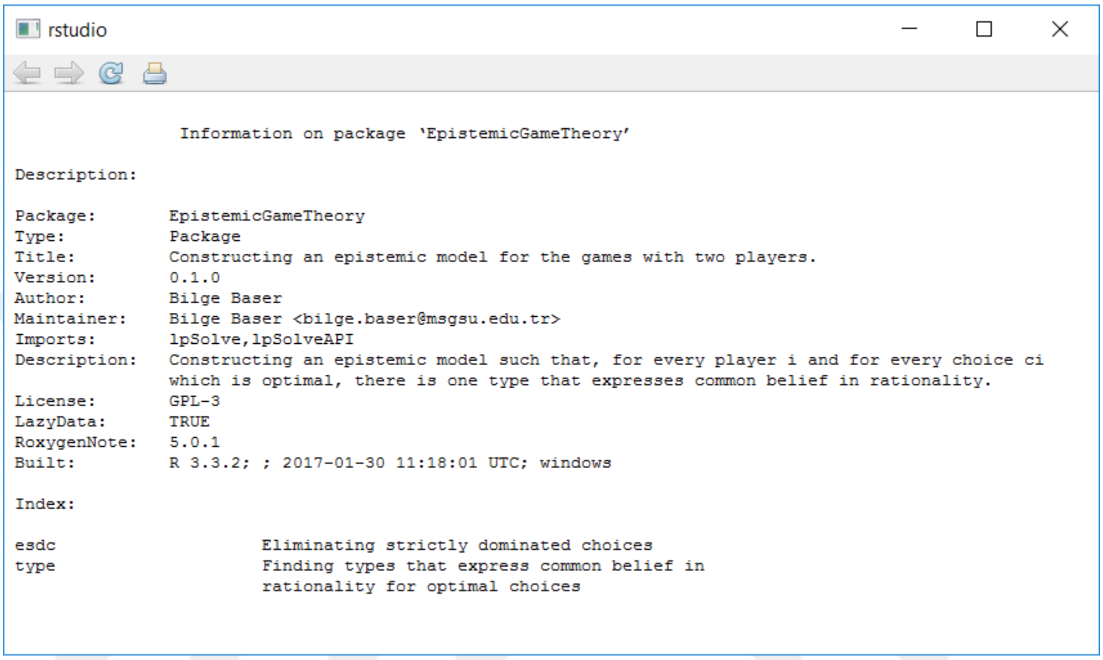
İkinci kısım ise, her i oyuncusu ve her s_i $(i = 1,2, \ldots, n)$ rasyonel stratejisi için s_i'nin rasyonelliğe ortak inanç altında optimal olduğunu destekleyen bir t_i türünün bulunmasından oluşmaktadır. Uygulamada t_i türünün bulunması teorinin gerektirdiği birtakım matematiksel işlemler sonucu deneme-yanılma yaklaşımına dayanmaktadır. Üzerinde çalışılan oyunun boyutunun büyümesiyle birlikte halihazırda kullanılan yöntem elverişli olmaktan uzaklaşmaktadır. Bu çalışmada, iki kişili oyunlar için bir i oyuncusunun, s_i rasyonel stratejisinin rasyonelliğe ortak inanç altında optimal olduğunu destekleyen türün bulunmasını sağlayan doğrusal programlama modeli geliştirilmiş ve modelin çözümünü veren kod da programa eklenmiştir.

Her iki kısımda gerçekleşen işlemler için R İstatistiksel programlama dili ile yaklaşık 1000 satırlık kod geliştirilerek iki adet fonksiyon oluşturulmuş ve bu fonksiyonlar "EpistemicGameTheory" adı verilen bir paket yaratılarak paketin içeriğine eklenmiştir. R, açık kaynak bir programlama dili olması bakımından tercih edilmiş ve geliştirilen kodun tamamı tezin son sayfasında CD ile teslim edilmiştir.

Söz konusu algoritmalar aşağıda açıklanmıştır.

4.1.“EpistemicGameTheory” R PAKETİ

“esdc” ve “type” isimli fonksiyonların yer aldığı “EpistemicGameTheory” isimli bir R paketi oluşturulmuştur. R paketi oluşturulurken dokümantasyonun hazırlanması için “roxygen2” paketi kullanılmıştır (Wickham, et al., 2017). “EpistemicGameTheory” paketinin özellikleri Şekil 4.1’ de görülmektedir.



```
rstudio

                Information on package 'EpistemicGameTheory'

Description:

Package:       EpistemicGameTheory
Type:          Package
Title:         Constructing an epistemic model for the games with two players.
Version:       0.1.0
Author:        Bilge Baser
Maintainer:    Bilge Baser <bilge.baser@msgsu.edu.tr>
Imports:       lpSolve,lpSolveAPI
Description:   Constructing an epistemic model such that, for every player i and for every choice ci
               which is optimal, there is one type that expresses common belief in rationality.
License:       GPL-3
LazyData:      TRUE
RoxygenNote:   5.0.1
Built:         R 3.3.2; ; 2017-01-30 11:18:01 UTC; windows

Index:

esdc                    Eliminating strictly dominated choices
type                    Finding types that express common belief in
                        rationality for optimal choices
```

Şekil 4.1 “EpistemicGameTheory” R paketi

4.2. “esdc” FONKSİYONU

Bilindiği gibi, optimal seçimde sadece rasyonel stratejiler dikkate alındığından öncelikle oyunun kesin mahkûm stratejilerinin sürekli eliminasyonu gerçekleştirilmelidir. Bu amaçla, iki kişili oyunlar için Algoritma 3.2’nin adımlarının bir yazılıma dönüştürülmesi gerekmektedir. Söz konusu algoritmayı oluşturan adımların programlama mantığına uygun bir hale getirilmesi için önerilen yöntem aşağıda açıklanmıştır.

n, birinci oyuncunun strateji sayısı; m, ikinci oyuncunun strateji sayısı olmak üzere, birinci oyuncunun kazanç matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

ikinci oyuncunun kazanç matrisi,

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

ile gösterilsin. Her iki kazanç matrisinde de satırlar birinci oyuncunun, sütunlar ikinci oyuncunun stratejilerine karşılık gelen kazançları göstermektedir.

Birinci Oyuncunun Stratejilerinin Karşılaştırılmasında Kullanılacak Algoritmanın Oluşturulması:

i) Algoritmanın başlangıç noktasında $t = 1$ olmak üzere, $(n, (n-t))$'nin tüm kombinasyonlarını içeren bir kombinasyon matrisi (C_A) oluşturulur. Kombinasyon matrisinin her bir satırı stratejiler arasında karşılaştırmanın nasıl yapılacağını gösterir. Burada amaç, her bir satırda yer almayan "x"[4] numaralı stratejinin kesin mahkûm strateji olup olmadığına karar vermektir.

$$C_A = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1(n-t)} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2(n-t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n(n-t)} \end{bmatrix}$$

ii) Kombinasyon matrisi C_A'nın satır sayısı kadar satıra sahip bir indis matrisi (N) oluşturulur. İndis matrisinin her bir satırı aynı olup 1'den n'ye kadar olan sayı dizisinden oluşur.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}$$

iii) C_A ve N matrislerinin satırları arasında karşılaştırma yapılır. N matrisinde bulunup, C_A matrisinde bulunmayan elemanlar, D fark matrisinin ilgili satırına atanır.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1(n-(n-t))} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2(n-(n-t))} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{n(n-(n-t))} \end{bmatrix}$$

---

[4] "x" sayısı D matrisine atanacak olan stratejinin indisini göstermektedir.

iv) Kombinasyon matrisinin ilk satırında yer alan stratejiler için Uniform dağılımdan $(n-t)$ boyutlu, elemanları toplamı 1 olan P olasılık vektörü üretilir.

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_{(n-t)}), \qquad p_1 + p_2 + \dots + p_{(n-t)} = 1$$

Bu olasılık vektörüne göre, birinci oyuncu ilk stratejisini p_1 olasılıkla, ikinci stratejisini p_2 olasılıkla, … , $(n-t)$ inci stratejisini $p_{(n-t)}$ olasılıkla seçer.

v) Elde edilen olasılık değerleri kullanılarak birinci oyuncu için beklenen kazanç hesaplanır ve kombinasyon matrisinin ilk satırında bulunmayan stratejinin sağladığı kazançla karşılaştırılır.
Eğer birinci oyuncu ikinci oyuncunun ilk stratejisini seçeceğine inanıyorsa beklenen kazancı,

$$p_1 * a_{11} + p_2 * a_{21} + \dots + p_{(n-t)} a_{(n-t)1} = E_1,$$

olur. Eğer birinci oyuncu ikinci oyuncunun ikinci stratejisini seçeceğine inanıyorsa beklenen kazancı aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$p_1 * a_{12} + p_2 * a_{22} + \dots + p_{(n-t)} a_{(n-t)2} = E_2,$$

$$\vdots$$

Eğer birinci oyuncu ikinci oyuncunun son stratejisini seçeceğine inanıyorsa beklenen kazancı,

$$p_1 * a_{1m} + p_2 * a_{2m} + \dots + p_{(n-t)} a_{(n-t)m} = E_m$$

olarak belirlenir. Elde edilen tüm beklenen kazançlar $(E_1, E_2, \dots, E_m)$, D matrisinin ilgili satırındaki elemanın işaret ettiği stratejinin beklenen kazancından büyükse, o strateji diğer stratejilerin karması sonucunda kesin mahkûm edilmiş demektir.

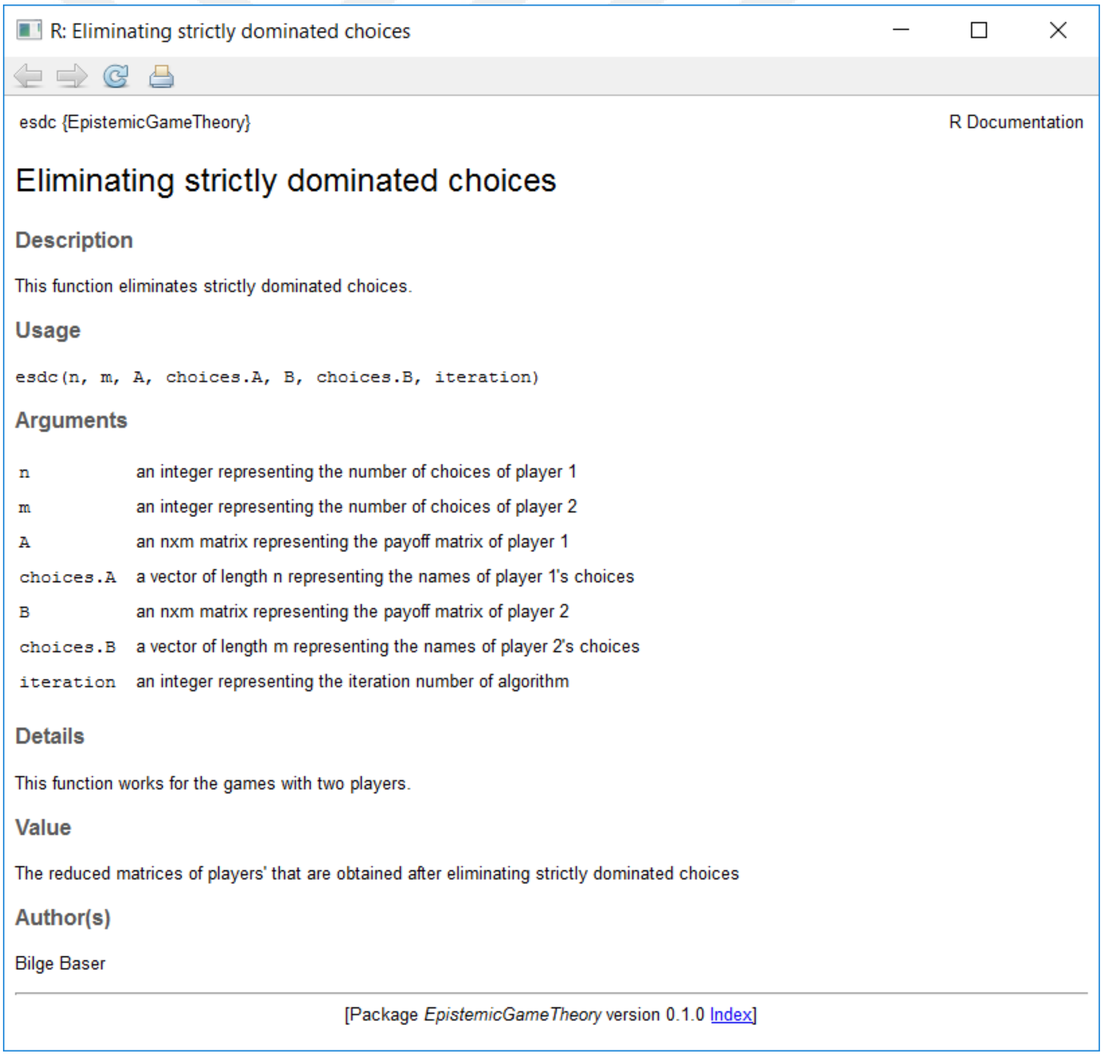
Burada iki durum ortaya çıkabilir:

- Eliminasyonun gerçekleştiği durumda indirgenmiş kazanç matrisi elde edilir. n^* indirgenmiş kazanç matrisinin satır sayısını göstermek üzere yeni $C\,(n^*, (n^*-t))$ kombinasyon matrisi oluşturulur ve yukarıdaki adımlar tekrarlanır.
- Eliminasyonun gerçekleşmediği durumda yeni olasılık vektörü üretilir ve yukarıdaki adımlar tekrar edilir. Burada olasılık

vektörünün kaç kez üretileceğini belirleyen iterasyon sayısına karar vermek çok önemlidir. Eğer varsa, kesin baskın stratejileri saptayabilmek için iterasyon sayısının yeterince büyük olması gerekir. Kazanç matrisine göre kesin baskın strateji yoksa, t'nin değeri "1" artırılarak yeni kombinasyon matrisi $C\ (n, (n-t))$ oluşturulur ve yukarıdaki adımlar tekrarlanır.

vi) $(n^* - t) < 1$ olduğunda algoritma sona erer ve k-adım indirgenmiş kazanç matrisi elde edilmiş olur.

Aynı adımlar ikinci oyuncu için de gerçekleştirilir. Yukarıdaki algoritma ile belirlenen kesin baskın stratejiler birinci oyuncunun rasyonel stratejilerini gösterir. Belirtilen adımlar, R programlama diline göre geliştirilerek "esdc" isimli bir fonksiyon oluşturulmuştur. Fonksiyonun özellikleri Şekil 4.2'de görülmektedir.


R: Eliminating strictly dominated choices

esdc {EpistemicGameTheory} R Documentation

Eliminating strictly dominated choices

Description

This function eliminates strictly dominated choices.

Usage

```
esdc(n, m, A, choices.A, B, choices.B, iteration)
```

Arguments

`n`	an integer representing the number of choices of player 1
`m`	an integer representing the number of choices of player 2
`A`	an nxm matrix representing the payoff matrix of player 1
`choices.A`	a vector of length n representing the names of player 1's choices
`B`	an nxm matrix representing the payoff matrix of player 2
`choices.B`	a vector of length m representing the names of player 2's choices
`iteration`	an integer representing the iteration number of algorithm

Details

This function works for the games with two players.

Value

The reduced matrices of players' that are obtained after eliminating strictly dominated choices

Author(s)

Bilge Baser

[Package *EpistemicGameTheory* version 0.1.0 Index]

Şekil 4.2 "esdc" fonksiyonu

“esdc” fonksiyonu yedi adet argüman kullanmaktadır. Bunlar sırasıyla “n” birinci oyuncunun strateji sayısı, “m” ikinci oyuncunun strateji sayısı, “A” birinci oyuncunun kazanç matrisi, “choices.A” birinci oyuncunun strateji isimlerinden oluşan vektör, “B” ikinci oyuncunun kazanç matrisi, “choices.B” ikinci oyuncunun strateji isimlerinden oluşan vektör ve “iteration” algoritmanın tekrarlanma sayısı biçimindedir. Bu fonksiyonun çalıştırılması sonucunda çıktı olarak oyuncuların kesin baskın stratejilerinden oluşan indirgenmiş matrisleri elde edilir.

“EpistemicGameTheory” paketinde yer alan diğer bir fonksiyon “type” fonksiyonudur. Bu fonksiyonun içeriği aşağıda açıklanmıştır.

4.3. “type” FONKSİYONU

Bu kısımda, her i oyuncusu ve her s_i $(i = 1,2,\dots,n)$ rasyonel stratejisi için s_i’nin rasyonelliğe ortak inanç altında optimal olduğunu destekleyen bir t_i türünün var olduğunun gösterilmesi amaçlanmıştır.

Oyunun başlangıcında oyuncuların strateji kümelerindeki her bir eleman için bir tür oluşturulur. Ancak, uygulamada oyuncunun rasyonel olmayan stratejilerini tercih etmesi söz konusu olmadığından, yazılımda sadece rasyonel seçimler için tür oluşturulmuştur.

Her bir oyuncunun sahip olduğu türler yardımıyla, rakibinin seçeceğine inandığı strateji (saf ya da karma) için en iyi tepkisini gösteren stratejilerden oluşan epistemik model kurulur.

Birinci oyuncunun indirgenmiş kazanç matrisi A^* ile gösterilsin.

$$A^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Birinci oyuncu, ikinci oyuncunun ilk stratejisini q_1 olasılıkla, ikinci stratejisini q_2 olasılıkla, ... ve son stratejisini q_m olasılıkla seçeceğine inanıyor olsun. Bu durumda, ikinci oyuncunun seçimlerine göre birinci oyuncunun kazançları doğrusal denklem sistemi ile ifade edilebilir.

Eğer, birinci oyuncu bu inanç altında ilk stratejisini seçerse,

$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1m}q_m = U_1$

ikinci stratejisini seçerse,

$$a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \cdots + a_{2m}q_m = U_2$$

$$\vdots$$

n'inci stratejisini seçerse,

$$a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \cdots + a_{nm}q_m = U_n$$

kadar kazanç elde eder.

Birinci oyuncu ilk stratejisini ancak ve ancak $U_1 \geq U_2, U_3, \dots, U_n$ eşitsizliğinin sağlanması durumunda tercih eder. Peki bu eşitsizlik ne zaman sağlanır?

Eşitsizlik açık bir biçimde ifade edilsin.

$$U_1 \geq U_2 \rightarrow U_1 - U_2 \geq 0$$

$$U_1 \geq U_3 \rightarrow U_1 - U_3 \geq 0$$

$$\vdots$$

$$U_1 \geq U_n \rightarrow U_1 - U_n \geq 0$$

U_i'ler $(i = 1,2, \dots, n)$ yerine eşitleri yerleştirildiğinde,

$$(a_{11} - a_{21})q_1 + (a_{12} - a_{22})q_2 + \cdots + (a_{1m} - a_{2m})q_m = U_1 - U_2 \geq 0$$

$$(a_{11} - a_{31})q_1 + (a_{12} - a_{32})q_2 + \cdots + (a_{1m} - a_{3m})q_m = U_1 - U_3 \geq 0$$

$$\vdots$$

$$(a_{11} - a_{n1})q_1 + (a_{12} - a_{n2})q_2 + \cdots + (a_{1m} - a_{nm})q_m = U_1 - U_n \geq 0$$

elde edilir. Başlangıçta, birinci oyuncunun i'inci stratejisinin rasyonelliğe ortak inanç altında optimal olduğu varsayımı yapılmıştı. Bu varsayım altında, aşağıdaki kapalı yarı uzayların ve hiperdüzlemin kesişiminden oluşan konveks bölgede bulunan tüm noktalar rasyonelliğe ortak inanç altında i'inci stratejiyi optimal yapan türlerdir.

$$\begin{aligned}
(a_{11} - a_{21})q_1 + (a_{12} - a_{22})q_2 + \cdots + (a_{1m} - a_{2m})q_m &\geq 0 \\
(a_{11} - a_{31})q_1 + (a_{12} - a_{32})q_2 + \cdots + (a_{1m} - a_{3m})q_m &\geq 0 \\
&\vdots \\
(a_{11} - a_{n1})q_1 + (a_{12} - a_{n2})q_2 + \cdots + (a_{1m} - a_{nm})q_m &\geq 0 \\
q_1 + q_2 + \cdots + q_m &= 1 \\
q_1, q_2, \dots, q_m &\geq 0
\end{aligned}$$

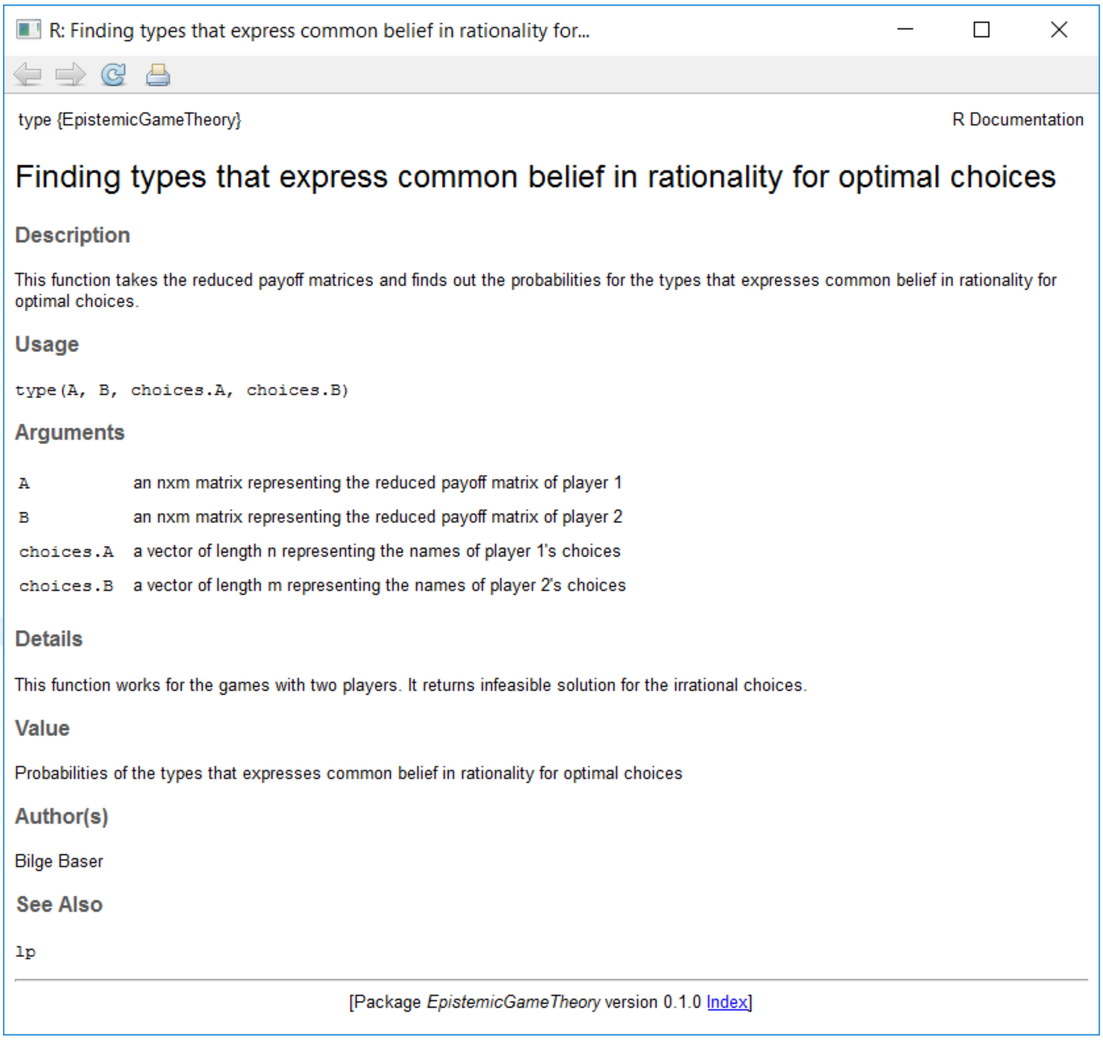
Yukarıda bulunan matematiksel model, her i oyuncusu ve her s_i $(i = 1,2,\dots,n)$ rasyonel stratejisi için s_i nin rasyonelliğe ortak inanç altında optimal olduğu tüm türlerin bulunmasını sağlar. Bu modelin çözülmesiyle birlikte sonsuz sayıda nokta elde edilir. Uygulamada sonsuz sayıda noktayla ilgilenmek yerine, her i oyuncusu ve her s_i $(i = 1,2,\dots,n)$ rasyonel stratejisi için s_i'nin rasyonelliğe ortak inanç altında optimal olduğunu destekleyen ve elde edeceği kazancı maksimize eden bir t_i türünün var olduğu epistemik modeli kurmak daha anlamlıdır. Bunun için, her strateji için bir doğrusal programlama modeli kurulmuştur. Böylece rasyonelliğe ortak inanç altında ilgilenilen stratejiyi optimum yapan en az bir türün var olduğunu göstermenin yanında, oyunun değerini maksimize eden tür de bulunabilmektedir. Bu doğrultuda, ilk strateji için doğrusal programlama modeli aşağıdaki gibi elde edilir. Modelin amaç fonksiyonu birinci stratejiden elde edilmesi beklenen değerin (U_1) maksimize edilmesi şeklindedir.

$$Z_{\max(U_1)} = a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1m}q_m$$

$$\begin{aligned}
(a_{11} - a_{21})q_1 + (a_{12} - a_{22})q_2 + \cdots + (a_{1m} - a_{2m})q_m &\geq 0 \\
(a_{11} - a_{31})q_1 + (a_{12} - a_{32})q_2 + \cdots + (a_{1m} - a_{3m})q_m &\geq 0 \\
&\vdots \\
(a_{11} - a_{n1})q_1 + (a_{12} - a_{n2})q_2 + \cdots + (a_{1m} - a_{nm})q_m &\geq 0 \\
q_1 + q_2 + \cdots + q_m &= 1 \\
q_1, q_2, \dots, q_m &\geq 0
\end{aligned}$$

Benzer modeller diğer stratejiler ve ikinci oyuncu için de kurulabilir. Yukarıda anlatılan doğrusal programlama modeli için de R programlama dilinde "type" isimli bir fonksiyon oluşturulmuştur. Bu fonksiyonun özellikleri Şekil 4.3'teki gibidir.

"type" fonksiyonu, "A" birinci oyuncunun indirgenmiş kazanç matrisini, "B" ise ikinci oyuncunun indirgenmiş kazanç matrisini, "choices.A" birinci oyuncunun strateji isimlerini içeren vektörü ve "choices.B" ikinci oyuncunun strateji isimlerini içeren vektörü simgelemek üzere dört adet argüman kullanmaktadır. Bu fonksiyonda, "lpSolve" paketinde bulunan doğrusal programlama problemlerinin Simpleks yöntem ile çözümünü sağlayan "lp" fonksiyonundan yararlanılmıştır (Berkelaar & others, 2015). "type" fonksiyonunun çalıştırılması sonucunda rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel bir stratejinin optimal olmasını sağlayan ve oyuncunun kazancını maksimize eden türün olasılık değerleri elde edilir.



R: Finding types that express common belief in rationality for...

type {EpistemicGameTheory} R Documentation

Finding types that express common belief in rationality for optimal choices

Description

This function takes the reduced payoff matrices and finds out the probabilities for the types that expresses common belief in rationality for optimal choices.

Usage

```
type(A, B, choices.A, choices.B)
```

Arguments

`A`	an nxm matrix representing the reduced payoff matrix of player 1
`B`	an nxm matrix representing the reduced payoff matrix of player 2
`choices.A`	a vector of length n representing the names of player 1's choices
`choices.B`	a vector of length m representing the names of player 2's choices

Details

This function works for the games with two players. It returns infeasible solution for the irrational choices.

Value

Probabilities of the types that expresses common belief in rationality for optimal choices

Author(s)

Bilge Baser

See Also

`lp`

[Package *EpistemicGameTheory* version 0.1.0 Index]

Şekil 4.3 “type” fonksiyonu

“type” fonksiyonunun argümanlarından “A” ve “B” matrislerinin kesin mahkum strateji içermesi halinde doğrusal programlama probleminin çözümü uygun olmayan çözüm olarak sonuçlanır. Böylece, “esdc” fonksiyonu kullanılmadan orijinal probleme doğrudan “type” fonksiyonunun uygulanması ile de kesin mahkûm stratejiler belirlenebilir. Bu nedenle “type” fonksiyonunun bu özelliği eliminasyon bakımından bir alternatif olma niteliği kazanır. Ancak, epistemik oyun teorisinde bir stratejinin hangi nedenlerle tercih edilemeyeceği bilgisinin önemli olması, “esdc” fonksiyonunun eliminasyon için tercih edilme sebebi olmuştur. Bununla birlikte, karar verici probleminin yapısına göre iki fonksiyondan yalnızca birini kullanmak isteyebilir. Bu nedenle, iki fonksiyon birbirinden bağımsız oluşturulmuştur.

Oluşturulan algoritma ve program, “Renkler” isimli basit bir sayısal örnek ve “Depo Savaşları” isimli bir gerçek hayat problemi için çalıştırılmıştır. Basit sayısal bir örnek kullanılmasının nedeni, geliştirilen yazılım ile elde edilen sonucun, elle çözümle ulaşılan sonuçla karşılaştırılması ve bu sayede geliştirilen yöntemin işleyişinin ve tutarlılığının test edilebilmesidir.

4.4. SAYISAL ÖRNEK: RENKLER

Oyuncuları I ve II olan iki kişili bir oyun ele alınsın. Oyuncuların tercih edecekleri renklere karşılık gelen kazançları Çizelge 4.1'de verilmiştir (Perea, 2012)[5].

Çizelge 4.1 Renkler probleminin kazanç tablosu

	Mavi	*Yeşil*	*Kırmızı*	*Sarı*	*Aynı Renk*
I	4	3	2	1	0
II	4	3	2	1	5

Oyunun verilerine göre A birinci oyuncunun, B de ikinci oyuncunun olmak üzere kazanç matrisleri aşağıdaki gibidir.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Kesin mahkûm stratejilerin eliminasyonu için oluşturulan algoritma uygulandığında izlenilen adımlar şöyledir.

i) Birinci oyuncunun tüm kesin mahkûm stratejileri elimine edilir. $(n - t) \geq 1$ şartı sağlandığı sürece, $C\,(n, (n - t))$ kombinasyonundan oluşan bir kombinasyon matrisi yaratılır.Bu problemde birinci oyuncunun dört stratejisi bulunmaktadır. Dolayısıyla, $t = 1$ için bir kombinasyon matrisi oluşturulabilir.

$$C(4,3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ii) N indis matrisi oluşturulur.

[5] Sayısal örneğin bir kaynaktan alıntılanma nedeni; geliştirilen yazılım ile elde edilen sonucun, elle çözümle bulunan sonuçla karşılaştırılabilmesi ve bu sayede tutarlılığının test edilebilmesidir.

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

iii) Birinci oyuncu için bir fark matrisi (D) oluşturulur.

$$D = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

iv) C matrisinin ilk satırı için Uniform dağılımdan bir olasılık vektörü üretilir.

$$P = (0.180, 0.009, 0.811)$$

P olasılık vektörü için beklenen kazancı hesaplayalım. Eğer ikinci oyuncu "Mavi" stratejisini seçerse beklenen kazancı,

$$0{,}18 * 0 + 0{,}009 * 3 + 0{,}811 * 2 = 1{,}649$$

olur. Eğer ikinci oyuncu "Yeşil" stratejisini seçerse beklenen kazancı,

$$0{,}18 * 4 + 0{,}009 * 0 + 0{,}811 * 2 = 2{,}342$$

olur. Eğer ikinci oyuncu "Kırmızı" stratejisini seçerse beklenen kazancı,

$$0{,}18 * 4 + 0{,}009 * 3 + 0{,}811 * 0 = 0{,}747$$

olur. Eğer ikinci oyuncu "Sarı" stratejisini seçerse beklenen kazancı,

$$0{,}18 * 4 + 0{,}009 * 3 + 0{,}811 * 2 = 2{,}369$$

olur. Böylece, birinci oyuncu verilen olasılıklarla "Mavi", "Yeşil" ve "Kırmızı" stratejilerinin karmasını oynarsa elde edeceği kazançlar $(1.649, 2.342, 0.747, 2.369)$ olur. Birinci oyuncu sadece "Sarı" stratejisini seçerse elde edeceği kazançlar (1,1,1,0) olacaktır. Dolayısıyla kesin baskın strateji söz konusu değildir.

Algoritmanın bir sonraki adımı yeni bir olasılık vektörü üretmektir. Bu örnek için sonraki iterasyonlarda elde edilen bir olasılık vektörüne göre birinci oyuncu 0.02 olasılıkla "Mavi", 0.41 olasılıkla "Yeşil", 0.57 olasılıkla "Kırmızı" karma stratejisini tercih ederse "Sarı" stratejisi kesin mahkûm strateji olarak belirlenmiş olur[6]. Sonuç olarak, "Sarı" stratejisi birinci oyuncunun kazanç matrisinden silinir. Aynı zamanda ikinci oyuncunun kazanç matrisinden de "Sarı" strateji satırı silinir.

---

[6] Olasılık değerleri Şekil 4.5'te verilmiştir.

1-adım eliminasyon sonrası indirgenmiş kazanç matrisleri Çizelge 4.2'deki gibi elde edilir.

Çizelge 4.2 Birinci eliminasyon sonrası elde edilen indirgenmiş kazanç matrisleri

A	*Mavi*	*Yeşil*	*Kırmızı*	*Sarı*
Mavi	0	4	4	4
Yeşil	3	0	3	3
Kırmızı	2	2	0	2

B	*Mavi*	*Yeşil*	*Kırmızı*	*Sarı*
Mavi	5	3	2	1
Yeşil	4	5	2	1
Kırmızı	4	3	5	1

v) Elde edilen indirgenmiş kazanç matrisleri için yeni bir kombinasyon, indis ve fark matrisleri oluşturulur.

$$C(3,2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

"Mavi" ve "Yeşil" stratejilerinin karması için yeni bir olasılık vektörü üretilir ve elde edilen beklenen kazanç ile "Kırmızı" stratejisinden elde edilen kazanç karşılaştırılır. Programın çalıştırılması sonucunda "Kırmızı" stratejisinin "Mavi" ve "Yeşil" karma stratejisi için kesin mahkûm strateji olmadığı sonucuna varılmıştır. Bu nedenle, algoritma C matrisinde bir sonraki satıra geçer ve "Yeşil" stratejisiyle karşılaştırmak üzere, "Mavi" ile "Kırmızı" stratejilerinin karması için yeni bir olasılık vektörü üretir. Programın çalıştırılması sonucunda "Yeşil" stratejisinin "Mavi" ve "Kırmızı" karma stratejisi için kesin mahkûm strateji olmadığı sonucuna varılmıştır. Aynı işlem C matrisinin son satırına da uygulanmış olup yine kesin mahkûm strateji durumunun olmadığı belirlenmiştir. C matrisinin tüm satırları incelendikten sonra eliminasyon durumunun ortaya çıkmaması nedeniyle, t'nin değeri 1 artırılır ve algoritmanın tüm adımları tekrarlanır. Bu tekrarda yine kesin mahkûm strateji olmadığı görülmüştür ve t'nin değeri 1 artırılmıştır. $n - t = 3 - 3 < 1$ olduğundan algoritma burada sona erer ve birinci oyuncu için indirgenmiş kazanç matrisi elde edilmiş olur. Birinci oyuncu için yapılan tüm işlemler ikinci oyuncu için de uygulanır ve birinci oyuncu için eliminasyon işlemi bir kez daha gerçekleştirilerek kesin mahkûm strateji kalmayıncaya dek her iki oyuncu için yukarıda anlatılan adımlar tekrarlanır. Sonuç olarak aşağıdaki indirgenmiş matrisler elde edilir.

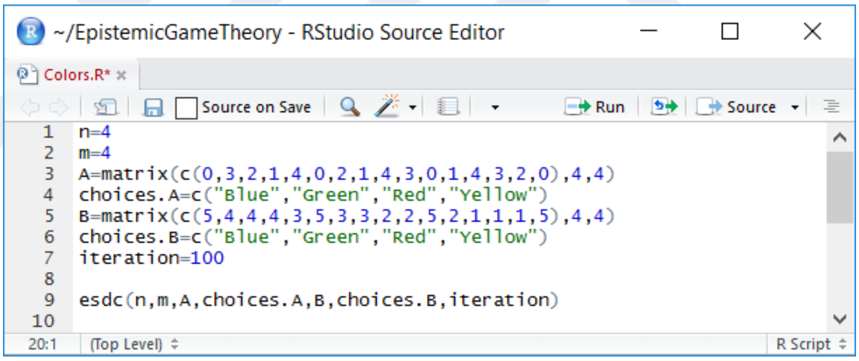
Çizelge 4.3 İkinci eliminasyon sonrası elde edilen indirgenmiş kazanç matrisleri

A	*Mavi*	*Yeşil*	*Kırmızı*
Mavi	0	4	4
Yeşil	3	0	3
Kırmızı	2	2	0

B	*Mavi*	*Yeşil*	*Kırmızı*
Mavi	5	3	2
Yeşil	4	5	2
Kırmızı	4	3	5

Çizelge 4.3'e göre her iki oyuncunun da "Sarı" stratejisinin kesin mahkûm strateji olduğu tespit edilmiştir.

Yukarıda "esdc" fonksiyonunun arka planında gerçekleşen işlemler anlatılmıştır. Renkler problemine "esdc" fonksiyonunun uygulanması Şekil 4.4'te görülmektedir. Öncelikle fonksiyonun argümanları tanımlanmış olup, bu örnek için iterasyon sayısı 100 olarak belirlenmiştir.



Şekil 4.4 "esdc" fonksiyonunun renkler problemine uygulanması

Şekil 4.5'te "esdc" fonksiyonunun Renkler problemine uygulanması sonucu elde edilen çıktı görülmektedir. Fonksiyonun çıktısı, her iki oyuncunun orijinal kazanç matrisleri ile eliminasyonun her bir aşamasındaki eliminasyon sayısı ve kesin mahkum stratejnin hangi stratejiler tarafından, hangi olasılıklar ile elimine edildiğini gösterir. Şekil 4.5'te görüldüğü gibi, iki eliminasyon sonrasında son indirgenmiş matrislere ulaşılmıştır.

```
Console ~/EpistemicGameTheory/
[1] "The utility matrix of Player 1:"
       Blue Green Red Yellow
Blue      0     4   4      4
Green     3     0   3      3
Red       2     2   0      2
Yellow    1     1   1      0
[1] "The utility matrix of Player 2:"
       Blue Green Red Yellow
Blue      5     3   2      1
Green     4     5   2      1
Red       4     3   5      1
Yellow    4     3   2      5
[1] "Elimination: 1"
For Player 1: Yellow is strictly dominated by the randomization of the choices Blue Green Red with the probabilities 0.0242179
0.4128304 0.5629517
[1] "The reduced utility matrix of Player 1:"
      Blue Green Red Yellow
Blue     0     4   4      4
Green    3     0   3      3
Red      2     2   0      2
[1] "The reduced utility matrix of Player 2:"
      Blue Green Red Yellow
Blue     5     3   2      1
Green    4     5   2      1
Red      4     3   5      1
[1] "Elimination: 2"
For Player 2: Yellow is strictly dominated by the randomization of the choices Blue Green Red with the probabilities 0.1157461
0.08240291 0.801851
[1] "The reduced utility matrix of Player 1:"
      Blue Green Red
Blue     0     4   4
Green    3     0   3
Red      2     2   0
[1] "The reduced utility matrix of Player 2:"
      Blue Green Red
Blue     5     3   2
Green    4     5   2
Red      4     3   5
[1] "ELIMINATION IS OVER."
[1] "The Last Reduced Matrix For Player 1:"
      Blue Green Red
Blue     0     4   4
Green    3     0   3
Red      2     2   0
[1] "The Last Reduced Matrix For Player 2:"
      Blue Green Red
Blue     5     3   2
Green    4     5   2
Red      4     3   5
>
```

Şekil 4.5 Renkler problemine “esdc” fonksiyonunun uygulanmasıyla elde edilen sonuç

Birinci oyuncu ikinci oyuncunun q_1 olasılıkla “Mavi” stratejisini, q_2 olasılıkla “Yeşil” stratejisini ve q_3 olasılıkla “Kırmızı” stratejisini seçeceğine inanıyor olsun. Buna göre, beklenen kazançlar aşağıdaki gibidir:

$$0q_1 + 4q_2 + 4q_3 = U_B$$
$$3q_1 + 0q_2 + 3q_3 = U_G$$
$$2q_1 + 2q_2 + 0q_3 = U_R$$

“Mavi” stratejisinin birinci oyuncu için optimal strateji olduğu varsayılsın. Bu durumda, $u_B \geq u_G, u_R$ olmak zorundadır.

$$U_B \geq U_G \;\rightarrow U_B - U_G \geq 0$$
$$U_B \geq U_R \;\rightarrow U_B - U_R \geq 0$$

Eşitliklerin yerine yazılmasıyla,

$$(0-3)q_1 + (4-0)q_2 + (4-3)q_3 \geq 0$$
$$(0-2)q_1 + (4-2)q_2 + (4-0)q_3 \geq 0$$

elde edilir. Parantez içi işlemlerin yapılmasıyla,

$-3q_1 + 4q_2 + q_3 \geq 0$

$-2q_1 + 2q_2 + 4q_3 \geq 0$

eşitsizliklerine ulaşılır. Yukarıdaki kısıtlayıcı fonksiyonların yerine yazılmasıyla, birinci oyuncunun Mavi stratejisi için doğrusal programlama modeli aşağıdaki gibi oluşturulur.

$Z_{max_{(U_B)}} = 0q_1 + 4q_2 + 4q_3$

$$-3q_1 + 4q_2 + q_3 \geq 0$$
$$-2q_1 + 2q_2 + 4q_3 \geq 0$$
$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$
$$q_1, q_2, q_3 \geq 0$$

"Mavi" stratejisi için oluşturulan doğrusal programlama probleminin çözümüyle elde edilen çözüm vektörü şöyledir: $q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = 1$, $Z_{max} = U_B = 4$

"Yeşil" stratejisinin birinci oyuncu için optimal strateji olduğunu varsayalım. O halde, $U_G \geq U_B, U_R$ dir.

$U_G \geq U_B \rightarrow U_G - U_B \geq 0$

$U_G \geq U_R \rightarrow U_G - U_R \geq 0$

Eşitliklerin yerine yazılmasıyla,

$(3-0)q_1 + (0-4)q_2 + (3-4)q_3 \geq 0$

$(3-2)q_1 + (0-2)q_2 + (3-0)q_3 \geq 0$

elde edilir. Parantez içi işlemlerin yapılmasıyla,

$3q_1 - 4q_2 - q_3 \geq 0$

$q_1 - 2q_2 + 3q_3 \geq 0$

eşitsizliklerine ulaşılır. Bu eşitsizliklerin kısıtlayıcı fonksiyon olarak eklenmesiyle, birinci oyuncunun Yeşil stratejisi için oluşturulan doğrusal programlama modeli aşağıda verilmiştir.

$Z_{max_{(U_G)}} = 3q_1 + 0q_2 + 3q_3$

$$3q_1 - 4q_2 - q_3 \geq 0$$
$$q_1 - 2q_2 + 3q_3 \geq 0$$
$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$
$$q_1, q_2, q_3 \geq 0$$

"Yeşil" stratejisi için oluşturulan doğrusal programlama probleminin çözüm vektörü; $q_1 = 0.25, q_2 = 0, q_3 = 0.75$, $Z_{max} = u_G = 3$ şeklinde elde edilmiştir.

"Kırmızı" stratejisinin birinci oyuncu için optimal strateji olduğunu varsayalım. O halde, $U_R \geq U_B, U_G$ olmak zorundadır.

$U_R \geq U_B \rightarrow U_R - U_B \geq 0$
$U_R \geq U_G \rightarrow U_R - U_G \geq 0$

Eşitliklerin yerine yazılmasıyla,

$(2-0)q_1 + (2-4)q_2 + (0-4)q_3 \geq 0$
$(2-3)q_1 + (2-0)q_2 + (0-3)q_3 \geq 0$

elde edilir. Parantez içi işlemlerin yapılmasıyla,

$2q_1 - 2q_2 - 4q_3 \geq 0$
$-q_1 + 2q_2 - 3q_3 \geq 0$

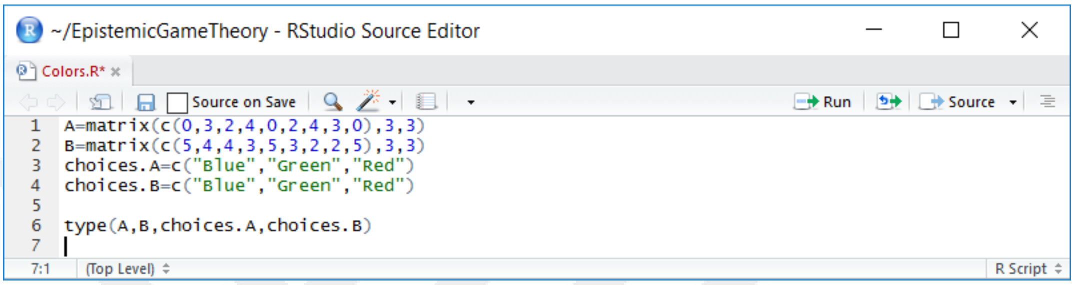
eşitsizliklerine ulaşılır. Bu eşitsizliklerin kısıtlayıcı fonksiyonlara eklenmesiyle birlikte, birinci oyuncunun Kırmızı stratejisi için oluşturulan doğrusal programlama modeli aşağıdaki gibi oluşturulur.

$Z_{max_{(U_R)}} = 2q_1 + 2q_2 + 0q_3$

$$2q_1 - 2q_2 - 4q_3 \geq 0$$
$$-q_1 + 2q_2 - 3q_3 \geq 0$$
$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$
$$q_1, q_2, q_3 \geq 0$$

"Kırmızı" stratejisi için oluşturulan doğrusal programlama modelinin çözüm vektörü; $q_1 = 0.5, q_2 = 0.5, q_3 = 0$, $Z_{max} = U_R = 2$ olarak elde edilmiştir. İkinci oyuncunun stratejileri için de doğrusal programlama modelleri benzer şekilde kurulabilir.

Yukarıda anlatılan doğrusal programlama problemlerinin oluşturulması ve çözümü için “type” fonksiyonunu uygulanması Şekil 4.6’da görülmektedir. Her iki oyuncu için elde edilen sonuçlar, Şekil 4.7’de yer almaktadır. Fonksiyonun çıktısı, ilgilenilen strateji dışında kalan stratejilerin amaç fonksiyonu katsayıları farklarından oluşan matris ile oluşturulmuş olan doğrusal programlama probleminin çözümünden meydana gelmektedir. Her bir stratejinin rasyonelliğe ortak inanç altında optimal olduğu türün inanç olasılık değerleri ve bu stratejiyi seçmesi sonucunda elde edeceği maksimum kazanç hesaplanmıştır.



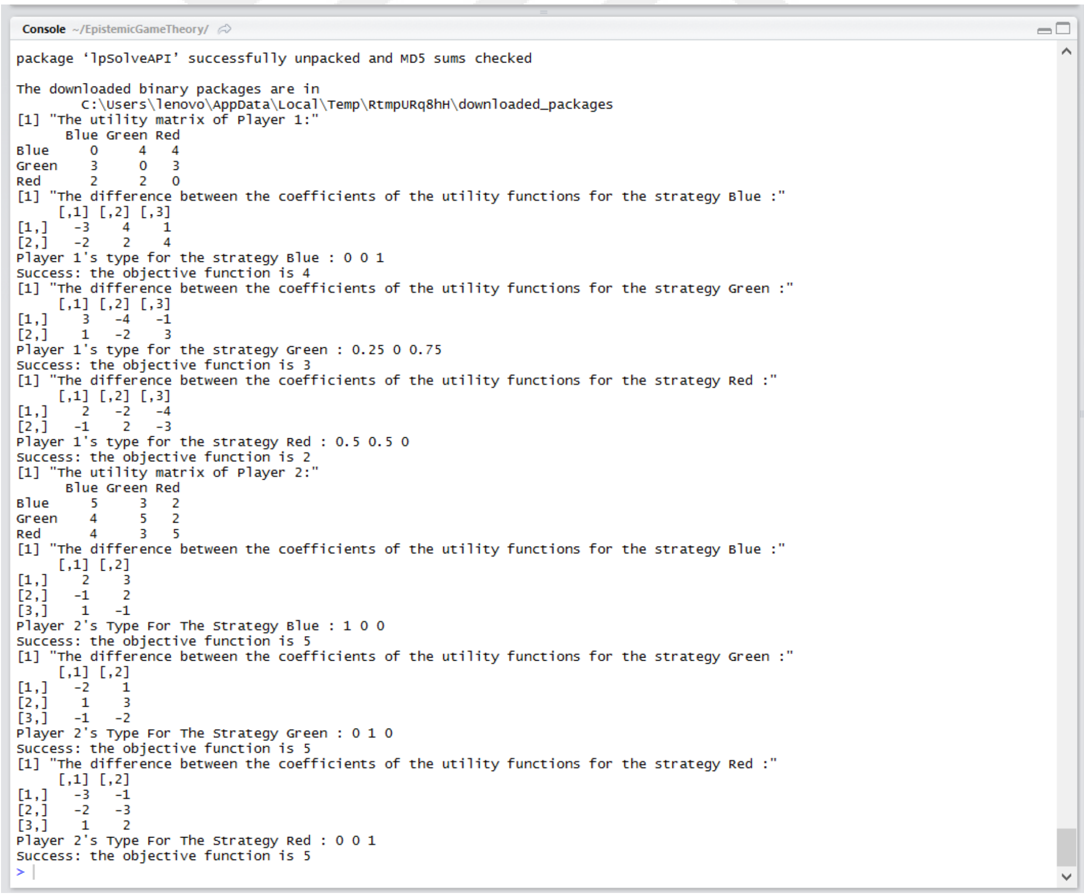
~/EpistemicGameTheory - RStudio Source Editor

Colors.R*

```
A=matrix(c(0,3,2,4,0,2,4,3,0),3,3)
B=matrix(c(5,4,4,3,5,3,2,2,5),3,3)
choices.A=c("Blue","Green","Red")
choices.B=c("Blue","Green","Red")

type(A,B,choices.A,choices.B)
```

Şekil 4.6 Renkler problemine “type” fonksiyonunun uygulanması



Console ~/EpistemicGameTheory/

```
package ‘lpSolveAPI’ successfully unpacked and MD5 sums checked

The downloaded binary packages are in
        C:\Users\lenovo\AppData\Local\Temp\RtmpURq8hH\downloaded_packages
[1] "The utility matrix of Player 1:"
      Blue Green Red
Blue     0     4   4
Green    3     0   3
Red      2     2   0
[1] "The difference between the coefficients of the utility functions for the strategy Blue :"
     [,1] [,2] [,3]
[1,]   -3    4    1
[2,]   -2    2    4
Player 1's type for the strategy Blue : 0 0 1
Success: the objective function is 4
[1] "The difference between the coefficients of the utility functions for the strategy Green :"
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    3   -4   -1
[2,]    1   -2    3
Player 1's type for the strategy Green : 0.25 0 0.75
Success: the objective function is 3
[1] "The difference between the coefficients of the utility functions for the strategy Red :"
     [,1] [,2] [,3]
[1,]    2   -2   -4
[2,]   -1    2   -3
Player 1's type for the strategy Red : 0.5 0.5 0
Success: the objective function is 2
[1] "The utility matrix of Player 2:"
      Blue Green Red
Blue     5     3   2
Green    4     5   2
Red      4     3   5
[1] "The difference between the coefficients of the utility functions for the strategy Blue :"
     [,1] [,2]
[1,]    2    3
[2,]   -1    2
[3,]    1   -1
Player 2's Type For The Strategy Blue : 1 0 0
Success: the objective function is 5
[1] "The difference between the coefficients of the utility functions for the strategy Green :"
     [,1] [,2]
[1,]   -2    1
[2,]    1    3
[3,]   -1   -2
Player 2's Type For The Strategy Green : 0 1 0
Success: the objective function is 5
[1] "The difference between the coefficients of the utility functions for the strategy Red :"
     [,1] [,2]
[1,]   -3   -1
[2,]   -2   -3
[3,]    1    2
Player 2's Type For The Strategy Red : 0 0 1
Success: the objective function is 5
>
```

Şekil 4.7 Renkler problemine “type” fonksiyonunun uygulanmasıyla elde edilen sonuç

Birinci oyuncunun her rasyonel stratejisini rasyonelliğe ortak inanç altında optimal yapan inanç olasılıkları kullanılarak birinci oyuncunun epistemik modeli aşağıdaki gibi oluşturulmuştur.

Türler: $T_1 = \{t_1^{Mavi}, t_1^{Yeşil}, t_1^{Kırmızı}\}$

$T_2 = \{t_2^{Mavi}, t_2^{Yeşil}, t_2^{Kırmızı}\}$

Birinci oyuncu için inançlar:

$b_1\left(t_1^{Mavi}\right) = (Kırmızı, t_2^{Kırmızı})$

$b_1\left(t_1^{Yeşil}\right) = 0.25 * \left(Mavi, t_2^{Mavi}\right) + 0.75 * (Kırmızı, t_2^{Kırmızı})$

$b_1(t_1^{Kırmızı}) = 0.5 * \left(Mavi, t_2^{Mavi}\right) + 0.5 * (Yeşil, t_2^{Yeşil})$

Şekil 4.7'den yararlanarak ikinci oyuncu için elde edilen bulgular ile oluşturulan epistemik model ise aşağıda gösterilmiştir.

İkinci oyuncu için inançlar:

$b_2\left(t_2^{Mavi}\right) = (Mavi, t_1^{Mavi})$

$b_2\left(t_2^{Yeşil}\right) = (Yeşil, t_1^{Yeşil})$

$b_2(t_2^{Kırmızı}) = (Kırmızı, t_1^{Kırmızı})$

Epistemik modellerde oyuncuların türleri takip edilerek ilgili stratejilerin rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel seçim olup olmadığı incelenebilir. Örneğin, birinci oyuncu Mavi'yi, ikinci oyuncunun Kırmızı'yı seçeceğine inanıyorsa tercih eder. İkinci oyuncu ise, Kırmızı'yı birinci oyuncunun da Kırmızı'yı seçeceğine inanıyorsa tercih eder. Birinci oyuncu Kırmızı'yı, ikinci oyuncunun 0.5 olasılıkla Mavi'yi, 0.5 olasılıkla da Yeşil'i seçeceğine inanıyorsa tercih eder. Öncelikle ikinci oyuncunun Mavi stratejisi ele alınsın. İkinci oyuncu Mavi'yi birinci oyuncunun da Mavi'yi seçeceğine inanıyorsa tercih eder ve böylece kapalı bir döngü oluşur. İkinci oyuncunun Yeşil stratejisi için de benzer analiz yapılsın. İkinci oyuncu Yeşil'i, birinci oyuncunun da Yeşil'i seçeceğine inanıyorsa tercih eder. Birinci oyuncu ise Yeşil'i, ikinci oyuncunun 0.25 olasılıkla Mavi'yi, 0.75 olasılıkla da Kırmızı'yı seçeceğine inanıyorsa tercih eder. Sonuç olarak, yine kapalı bir döngü oluşur. Dolayısıyla, birinci oyuncunun Mavi stratejisi rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel bir seçimdir. Her iki oyuncunun tüm stratejileri için benzer değerlendirme yapılabilir.

4.5. DEPO SAVAŞLARI: SENARYO ANALİZİ

Amerika'da bir A şirketi depo hizmeti vermektedir. Depo hizmetinin amacı, taşınan veya kısa süreli yurt dışına çıkan insanların eşyalarını ya da koleksiyonlarını depo kiralayarak ev kirasından daha az maliyetli bir şekilde muhafaza edebilmelerini sağlamaktır. Dünyaya da açılmak isteyen bu şirket Avrupalı insanların fazla gelen eşyalarını sattıklarını, Balkanlar'daki insanların ise depo kiralarını maliyetli bulduklarını fark etmiştir. Araştırmasını biraz daha doğuya kaydırdığında, gelişmekte olan bir ülke olarak Türkiye'yi gözlemlemiştir. İncelemeleri sonucunda, Türk insanının eşyalarıyla duygusal bağ kurduğunu, bu yüzden de eşyalarını satmak yerine değer verdiği insanlara, özellikle de kendilerinden sonra gelen nesillere hediye etmek istediklerini görmüştür. Hediye alan insanların ise, bu eşyaları demode ya da kullanışsız gördüklerini, bu nedenle de iade ettiklerini ya da bir odada muhafaza ettiklerini gözlemlemiştir.

Bu süreçte, A şirketinin yönetim kurulu başkanı yüksek transfer ücretiyle B şirketine transfer olmuş ve B şirketinde kendi ekibini kurmuştur. A şirketinde daha önce yaptığı ülke araştırmasını elde edeceği kâr marjını düşünerek B şirketinde de uygulamak istemiştir. Böylece her iki şirket de Türkiye'de depo alanları tedarik ederek eşyalarıyla duygusal bağ kuran Türklere hizmet vermeye karar vermişlerdir. Pilot bölge olarak İstanbul Anadolu yakasını tercih etmişlerdir. Bu tercihin nedenleri, Anadolu yakasında konut sayısının fazla olması, depo için kiralanacak arsa bedellerinin düşük olması olarak sayılabilir. Aynı zamanda, Avrupa yakasındaki iş yoğunluğundan kaynaklı mevcut ticari depoların, o bölgeye kuracakları depo kiralarını azaltıcı yönde etkilemesi beklenmektedir. Tüm bu nedenler, İstanbul Anadolu yakasını depo hizmeti bakımından çekici bir hale getirmektedir. Her iki şirket de araştırması gereken en önemli hususun kentsel dönüşüm olduğu bilgisine sahiptir. Kentsel dönüşüme girmiş ilçelerde 110 m^2 ile 150 m^2 arasında değişen evlerin kentsel dönüşüme girdikten sonra yüklenici firmalar tarafından 85 m^2 ile 105 m^2 arasında teslim edildiği görülmüştür. Aynı zamanda yıkımla beraber başka ilçelere taşınmak zorunda kalan kat maliklerinin daha düşük kiralı bir ev bulmak için eşyalarını depolara kaldırıp 1+1 ya da 2+1 evlere taşınmaları ve böylece kira külfetinden kurtulmak için avantaj sağlamak istediklerini fark etmişlerdir. İnsanlar kendilerine yakın olan depoyu tercih edeceğinden, şirketlerin kentsel dönüşüme girmesi beklenen ilçelere yakın bölgeden arsa temin etmeleri gerekmektedir. Aynı zamanda nüfus, konut sayısı, yaşlı ve genç nüfus oranı depoların kiralanmasında önem arz etmektedir. Yaşlı nüfus, kentsel dönüşümde daha küçük evlere taşınarak sığmayan eşyalarını depoya verdiklerinde, binalarındaki m^2 farkından dolayı meydana gelen alan küçülmesi sonucunda yaşanmışlıklarını depoda yaşatmaya devam ettirebilmektedirler. Dolayısıyla, onlara hizmet vermenin büyük avantaj sağlaması beklenmektedir. Bununla birlikte, gelir düzeyi yüksek semtlerde bulunan insanların hobilerinin kapladığı alanın geniş olma ihtimaline karşı yakın çevrelerinde bulunacak bir depo hizmetini talep etme ihtimallerinin yüksek olması beklenmektedir. Tüm bu veriler ışığında; A şirketi ile B şirketi, depolarını hangi ilçeye inşa edeceklerini belirlemek istemektedirler.

Bu problem iki kişili ortaksız bir oyun biçiminde tanımlansın ve rasyonelliğe ortak inanç altında her iki şirket için hangi ilçenin en iyi kazancı sağlayacağı analiz edilsin. Bunun için her bir ilçenin seçilmesi durumunda şirketlere sağlayacağı kazancın belirlenmesi gerekmektedir. Dolayısıyla öncelikle kazanç fonksiyonu tanımlanmalıdır. Kazancı etkileyen faktörler olarak ilçeler arası mesafe, ilçede ikamet eden yaşlı nüfus oranı, ilçede yaşayan insanların ortalama gelir düzeyi ve ilçenin kentsel dönüşüme girme olasılığı ele alınmıştır. İlgilenilen faktörler kullanılarak oyunun kazanç fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Her bir ilçe için potansiyel müşteri oranı hesaplanmıştır[7]. Bunun için kullanılan değişkenlerden biri her bir ilçede yer alan elli yaş üstü nüfus oranıdır. Çizelge 4.4'te ilçelere göre elli yaş üstü nüfus oranları görülmektedir. Bir diğer değişken ise, her bir ilçenin ortalama gelir düzeyidir. Ortalama gelir düzeyini saptayabilmek için her bir ilçenin ortalama konut fiyatı ele alınmıştır. Ortalaması konut fiyatı hesaplanırken yalnızca 3+1 olan daire fiyatları dikkate alınmıştır. Bunun nedeni, depo hizmeti verilmesi planlanan hedef kitlenin daha çok 3+1 dairelerde yaşıyor olmalarıdır. Çizelge 4.5'te ilçelere göre ortalama konut fiyatları ve her bir ilçenin toplam konut fiyatı içerisindeki ağırlıkları yer almaktadır.

[7] Şile ilçesi, hem diğer ilçelere mesafesinin uzak olması hem de nüfusunun az olması nedeniyle analize dahil edilmemiştir.

Çizelge 4.4 İlçelere göre elli yaş üstü nüfus oranları (Sağlık Bakanlığı, 2016)

	(50+) Yaş Nüfus Oranı
Ataşehir	0.166
Beykoz	0.181
Çekmeköy	0.122
Kadıköy	0.335
Kartal	0.178
Maltepe	0.209
Pendik	0.141
Sancaktepe	0.106
Sultanbeyli	0.092
Tuzla	0.129
Ümraniye	0.134
Üsküdar	0.205

Çizelge 4.5 İlçelere göre ortalama konut fiyatları (bin ₺) ve ağırlıkları (Aksoy Group, 2016)

	Ortalama Konut Fiyatı (bin ₺)	*Ağırlıklar*
Ataşehir	942.5	0.087289
Beykoz	1382.5	0.128039
Çekmeköy	706	0.065386
Kadıköy	1147.5	0.106275
Kartal	981.5	0.090901
Maltepe	615	0.056958
Pendik	435	0.040287
Sancaktepe	250	0.023154
Sultanbeyli	475	0.043992
Tuzla	457.5	0.042371
Ümraniye	910	0.084279
Üsküdar	2150	0.19912

Potansiyel müşteri oranının hesaplanmasında kullanılan son değişken ise, her bir ilçenin riskli bölge alanının tüm bölge içerisindeki ağırlığıdır. Çizelge 4.6’da her bir ilçe için riskli bölge alanı ve toplam içerisindeki ağırlığı bulunmaktadır.

Çizelge 4.6 İlçelere göre riskli bölge alanı (ha) ve ağırlıkları (Çevre ve Şehircilik Bakanlığı, 2016)

	Riskli Bölge Alanı (ha)	*Ağırlıklar*
Ataşehir	0	0
Beykoz	0	0
Çekmeköy	0	0
Kadıköy	134.18	0.4183
Kartal	31.84	0.0993
Maltepe	146.22	0.4558
Pendik	0	0
Sancaktepe	0	0
Sultanbeyli	0	0
Tuzla	6.78	0.0211
Ümraniye	0	0
Üsküdar	1.77	0.0055

Yukarıda sayılan üç değişkenin toplamı ile bulunan kazanç fonksiyonu ya da başka bir ifadeyle her bir ilçenin potansiyel müşteri oranı Çizelge 4.7'de yer almaktadır.

Çizelge 4.7 İlçelere göre potansiyel müşteri oranı

	Potansiyel Müşteri Oranı
Ataşehir	0.253289
Beykoz	0.309039
Çekmeköy	0.87386
Kadıköy	0.859554
Kartal	0.368156
Maltepe	0.72177
Pendik	0.181287
Sancaktepe	0.129154
Sultanbeyli	0.135992
Tuzla	0.192506
Ümraniye	0.218279
Üsküdar	0.409638

Her bir ilçenin potansiyel müşteri oranı belirlendikten sonra iki kişili oyunun kazanç matrisleri oluşturulmuştur. Kazanç matrislerinin yapılandırılmasında bir ölçüt daha kullanılmıştır. A şirketi bir "a" ilçesini tercih ederken B şirketinin bir "b" ilçesini tercih etmesi durumunda her iki şirketin müşteri paylaşımı nasıl olmalıdır? Bu sorunun cevabı, her müşterinin kendisine yakın olan depoyu tercih edeceği bilgisinde gizlidir.

Eğer iki şirket de aynı ilçeye depo kurarsa, toplam müşteri potansiyelini paylaşırlar. Bu nedenle, Çizelge 4.8'de verilmiş olan ilçeler arası mesafeler dikkate alınmıştır.

Çizelge 4.8 İlçeler arası mesafe (km) (KGM, 2016)

	Ataşehir	*Beykoz*	*Çekmeköy*	*Kadıköy*	*Kartal*	*Maltepe*	*Pendik*	*Sancaktepe*	*Sultanbeyli*	*Tuzla*	*Ümraniye*	*Üsküdar*
Ataşehir	0	33	20	16	29	26	24	25	39	43	18	17
Beykoz	33	0	22	26	40	36	42	27	49	54	20	27
Çekmeköy	20	22	0	13	27	23	43	4	36	43	7	14
Kadıköy	16	26	13	0	16	12	21	18	26	30	8	5
Kartal	29	40	27	16	0	4	7	31	10	14	21	18
Maltepe	26	36	23	12	4	0	20	27	13	18	17	14
Pendik	24	42	43	21	7	20	0	30	23	16	27	29
Sancaktepe	25	27	4	18	31	27	30	0	41	38	11	18
Sultanbeyli	39	49	36	26	10	13	23	41	0	18	31	28
Tuzla	43	54	43	30	14	18	16	38	18	0	35	32
Ümraniye	18	20	7	8	21	17	27	11	31	35	0	6
Üsküdar	17	27	14	5	18	14	29	18	28	32	6	0

İlçeler arası mesafeye göre paylaşılan potansiyel müşteri oranları ile A ve B şirketleri için oluşturulan kazanç matrisleri Çizelge 4.9 ve Çizelge 4.10'daki gibidir.

Çizelge 4.9 A şirketinin kazanç matrisi

~/EpistemicGameTheory - RStudio Source Editor

Asirketi

Filter

	Ataşehir	Beykoz	Çekmeköy	Kadıköy	Kartal	Maltepe	Pendik	Sancaktepe	Sultanbeyli	Tuzla	Ümraniye	Üsküdar
Ataşehir	1.9830241	3.657009	0.5305758	0.2532887	1.9317832	0.8788666	2.366338	3.1136852	2.3663377	2.366338	0.4345758	0.4345758
Beykoz	0.3090389	2.149500	0.4903260	0.3090389	0.8438567	0.5564244	1.253494	0.9369555	1.9367832	2.366338	0.3090389	0.3090389
Çekmeköy	3.4349661	3.475722	2.1495000	0.8438567	2.3663377	1.3021454	2.366338	3.4631013	2.3663377	2.366338	0.3165390	0.6255779
Kadıköy	3.7127594	3.657009	3.1221915	2.1495000	2.3663377	2.3663377	3.088108	3.6495091	3.2693946	3.088108	3.1221915	3.2739781
Kartal	2.0342650	3.122191	1.5997105	1.5997105	2.1495000	0.8779406	3.402319	2.6637650	3.8300565	3.773542	1.5997105	1.5997105
Maltepe	3.0871815	3.409624	2.6639028	1.5997105	3.0881075	2.1495000	3.338966	2.8689028	3.7335503	3.592255	1.5997105	1.5997105
Pendik	1.5997105	2.712554	1.5997105	0.8779406	0.5637293	0.6270821	2.149500	1.8529992	2.5112634	2.821395	0.8779406	0.8779406
Sancaktepe	0.8523629	3.029093	0.5029469	0.3165390	1.3022832	1.0971454	2.113049	2.1495000	2.3663377	2.366338	0.3165390	0.4715390
Sultanbeyli	1.5997105	2.029265	1.5997105	0.6966535	0.1359917	0.2324979	1.454785	1.5997105	2.1495000	3.463101	1.5997105	1.5997105
Tuzla	1.5997105	1.599710	1.5997105	0.8779406	0.1925062	0.3737933	1.144653	1.5997105	0.5029469	2.149500	0.8779406	0.8779406
Ümraniye	3.5314723	3.657009	3.6495091	0.8438567	2.3663377	2.3663377	3.088108	3.6495091	2.3663377	3.088108	2.1495000	1.0251438
Üsküdar	3.5314723	3.657009	3.3404702	0.6920701	2.3663377	2.3663377	3.088108	3.4945091	2.3663377	3.088108	2.9409044	2.1495000

Showing 1 to 12 of 12 entries

Çizelge 4.10 B şirketinin kazanç matrisi

	Ataşehir	Beykoz	Çekmeköy	Kadıköy	Kartal	Maltepe	Pendik	Sancaktepe	Sultanbeyli	Tuzla	Ümraniye	Üsküdar
Ataşehir	1.9830241	0.3090389	3.4349661	3.712759	2.0342650	3.087182	1.5997105	0.8523629	1.5997105	1.5997105	3.5314723	3.5314723
Beykoz	3.6570093	2.1495000	3.4757222	3.657009	3.1221915	3.409624	2.7125537	3.0290927	2.0292650	1.5997105	3.6570093	3.6570093
Çekmeköy	0.5305758	0.4903260	2.1495000	3.122191	1.5997105	2.663903	1.5997105	0.5029469	1.5997105	1.5997105	3.6495091	3.3404702
Kadıköy	0.2532887	0.3090389	0.8438567	2.149500	1.5997105	1.599710	0.8779406	0.3165390	0.6966535	0.8779406	0.8438567	0.6920701
Kartal	1.9317832	0.8438567	2.3663377	2.366338	2.1495000	3.088108	0.5637293	1.3022832	0.1359917	0.1925062	2.3663377	2.3663377
Maltepe	0.8788666	0.5564244	1.3021454	2.366338	0.8779406	2.149500	0.6270821	1.0971454	0.2324979	0.3737933	2.3663377	2.3663377
Pendik	2.3663377	1.2534945	2.3663377	3.088108	3.4023188	3.338966	2.1495000	2.1130489	1.4547848	1.1446533	3.0881075	3.0881075
Sancaktepe	3.1136852	0.9369555	3.4631013	3.649509	2.6637650	2.868903	1.8529992	2.1495000	1.5997105	1.5997105	3.6495091	3.4945091
Sultanbeyli	2.3663377	1.9367832	2.3663377	3.269395	3.8300565	3.733550	2.5112634	2.3663377	2.1495000	0.5029469	2.3663377	2.3663377
Tuzla	2.3663377	2.3663377	2.3663377	3.088108	3.7735419	3.592255	2.8213949	2.3663377	3.4631013	2.1495000	3.0881075	3.0881075
Ümraniye	0.4345758	0.3090389	0.3165390	3.122191	1.5997105	1.599710	0.8779406	0.3165390	1.5997105	0.8779406	2.1495000	2.9409044
Üsküdar	0.4345758	0.3090389	0.6255779	3.273978	1.5997105	1.599710	0.8779406	0.4715390	1.5997105	0.8779406	1.0251438	2.1495000

Showing 1 to 12 of 12 entries

A ve B şirketlerinin kazanç matrislerinden yola çıkarak kesin mahkûm stratejilerin belirlenmesi için "esdc" fonksiyonu kullanılmıştır. "esdc" fonksiyonun uygulanması Şekil 4.8'de görüldüğü gibidir. Bu problem için iterasyon sayısı 500 seçilmiştir.

```
A<-Asirketi
B<-Bsirketi
n=12
m=12
choices.A=c("Atasehir","Beykoz","Cekmekoy","Kadikoy","Kartal","Maltepe","Pendik","Sancaktepe","Sultanbeyli",
            "Tuzla","Umraniye","Uskudar")
choices.B=c("Atasehir","Beykoz","Cekmekoy","Kadikoy","Kartal","Maltepe","Pendik","Sancaktepe","Sultanbeyli",
            "Tuzla","Umraniye","Uskudar")
iteration=500

esdc(n,m,A,choices.A,B,choices.B,iteration)
```

Şekil 4.8 Depo savaşları problemine "esdc" fonksiyonunun uygulanması

"esdc" fonksiyonun uygulanmasıyla elde edilen sonuç Şekil 4.9'da görülmektedir. Bu sonuca göre her iki şirket de rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel olarak Kadıköy ilçesini tercih etmektedir.

Gerçekten de içinde bulunduğumuz dönemde Kadıköy'de ikamet eden elli yaş üstü nüfusun, toplam nüfusun yaklaşık üçte birini oluşturması, ortalama gelir düzeyinin yüksek olması ve kentsel dönüşümün bölgede aktif olması ilçeyi depo hizmeti için cazip bir hale getirmektedir.

```
Console ~/EpistemicGameTheory/
For Player 2: Beykoz is strictly dominated by the randomization of the choices Atasehir Kadikoy Maltepe with the probab
ilities 0.3118418 0.03351482 0.6546434
[1] "The reduced utility matrix of Player 1:"
         Atasehir   Kadikoy   Maltepe
Atasehir 1.983024 0.2532887 0.8788666
Kadikoy  3.712759 2.1495000 2.3663377
Kartal   2.034265 1.5997105 0.8779406
[1] "The reduced utility matrix of Player 2:"
          Atasehir  Kadikoy  Maltepe
Atasehir 1.9830241 3.712759 3.087182
Kadikoy  0.2532887 2.149500 1.599710
Kartal   1.9317832 2.366338 3.088108
[1] "Elimination: 19"
For Player 2: Atasehir is strictly dominated by the randomization of the choices Kadikoy Maltepe with the probabilities
 0.7662763 0.2337237
[1] "The reduced utility matrix of Player 1:"
           Kadikoy   Maltepe
Atasehir 0.2532887 0.8788666
Kadikoy  2.1495000 2.3663377
Kartal   1.5997105 0.8779406
[1] "The reduced utility matrix of Player 2:"
          Kadikoy  Maltepe
Atasehir 3.712759 3.087182
Kadikoy  2.149500 1.599710
Kartal   2.366338 3.088108
[1] "Elimination: 20"
For Player 1: Kartal is strictly dominated by the choice Kadikoy with the probability 1
[1] "The reduced utility matrix of Player 1:"
           Kadikoy   Maltepe
Atasehir 0.2532887 0.8788666
Kadikoy  2.1495000 2.3663377
[1] "The reduced utility matrix of Player 2:"
          Kadikoy  Maltepe
Atasehir 3.712759 3.087182
Kadikoy  2.149500 1.599710
[1] "Elimination: 21"
For Player 1: Atasehir is strictly dominated by the choice Kadikoy with probability 1
[1] "The reduced utility matrix of Player 1:"
     Kadikoy  Maltepe
[1,]  2.1495 2.366338
[1] "The reduced utility matrix of Player 2:"
Kadikoy Maltepe
2.14950 1.59971
[1] "Elimination For Player 2: 22"
[1] "The reduced utility matrix of Player 1:"
     Kadikoy  Maltepe
[1,]  2.1495 2.366338
[1] "The reduced utility matrix of Player 2:"
       [,1]
[1,] 2.1495
[1] "ELIMINATION IS OVER."
[1] "The Last Reduced Matrix For Player 1:"
     Kadikoy  Maltepe
[1,]  2.1495 2.366338
[1] "The Last Reduced Matrix For Player 2:"
       [,1]
[1,] 2.1495
>
```

Şekil 4.9 Depo savaşları problemine “esdc” fonksiyonunun uygulanmasıyla elde edilen sonuç

Şekil 4.10’da depo savaşları problemine “type” fonksiyonunun uygulanması gösterilmektedir. “esdc” fonksiyonunun uygulanması sonucunda elde edilen indirgenmiş matrisler tanımlanmış olup “type” fonksiyonu çalıştırılmıştır.

```
~/EpistemicGameTheory - RStudio Source Editor
StorageWars.R
Source on Save    Run    Source
A=matrix(c(2.1495),1,1)
B=matrix(c(2.1495),1,1)
choices.A=c("Kadikoy")
choices.B=c("Kadikoy")
type(A,B,choices.A,choices.B)

6:1   (Top Level)   R Script
```

Şekil 4.10 Depo savaşları problemine “type” fonksiyonunun uygulanması

Şekil 4.11’de “type” fonksiyonunun çıktısı yer almaktadır. Elde edilen sonuca göre A şirketi ve B şirketi için epistemik modeller aşağıdaki gibidir:

Türler: $T_1 = \{t_1^{Kadıköy}\}$

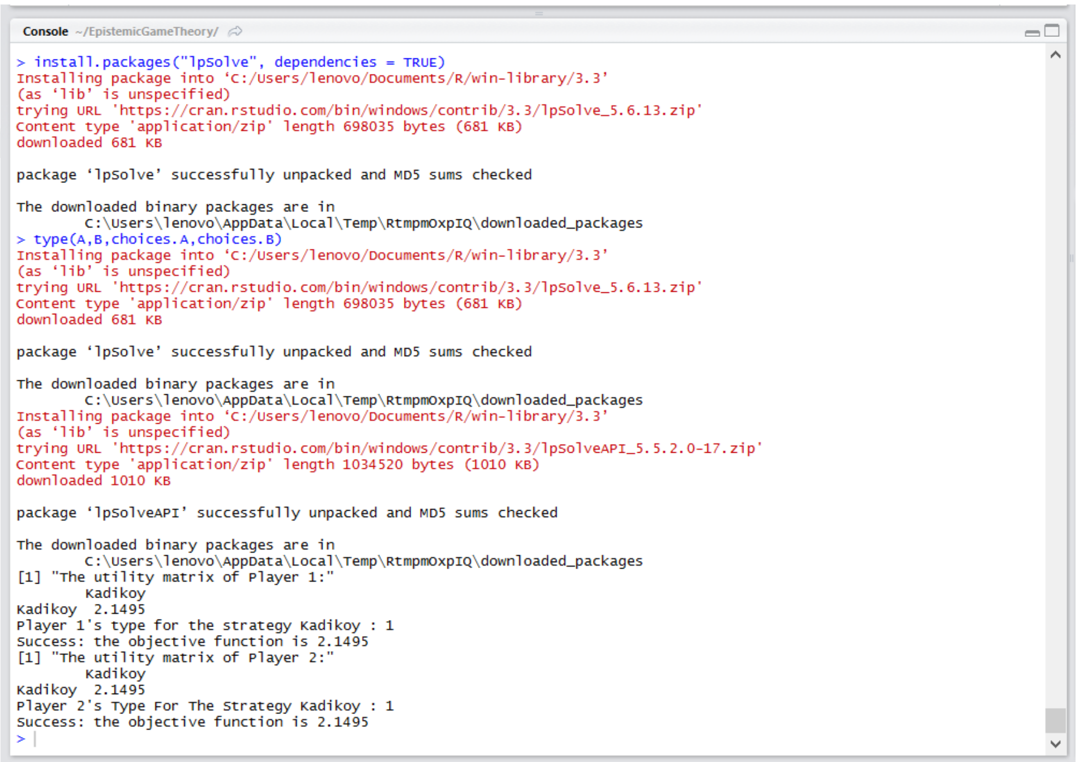
$T_2 = \{t_2^{Kadıköy}\}$

Birinci oyuncu için inançlar:

$$b_1(t_1^{Kadıköy}) = (Kadıköy, t_2^{Kadıköy})$$

İkinci oyuncu için inançlar:

$$b_2(t_2^{Kadıköy}) = (Kadıköy, t_1^{Kadıköy})$$



```
Console ~/EpistemicGameTheory/
> install.packages("lpSolve", dependencies = TRUE)
Installing package into ‘C:/Users/lenovo/Documents/R/win-library/3.3’
(as ‘lib’ is unspecified)
trying URL 'https://cran.rstudio.com/bin/windows/contrib/3.3/lpSolve_5.6.13.zip'
Content type 'application/zip' length 698035 bytes (681 KB)
downloaded 681 KB

package ‘lpSolve’ successfully unpacked and MD5 sums checked

The downloaded binary packages are in
        C:\Users\lenovo\AppData\Local\Temp\RtmpmOxpIQ\downloaded_packages
> type(A,B,choices.A,choices.B)
Installing package into ‘C:/Users/lenovo/Documents/R/win-library/3.3’
(as ‘lib’ is unspecified)
trying URL 'https://cran.rstudio.com/bin/windows/contrib/3.3/lpSolve_5.6.13.zip'
Content type 'application/zip' length 698035 bytes (681 KB)
downloaded 681 KB

package ‘lpSolve’ successfully unpacked and MD5 sums checked

The downloaded binary packages are in
        C:\Users\lenovo\AppData\Local\Temp\RtmpmOxpIQ\downloaded_packages
Installing package into ‘C:/Users/lenovo/Documents/R/win-library/3.3’
(as ‘lib’ is unspecified)
trying URL 'https://cran.rstudio.com/bin/windows/contrib/3.3/lpSolveAPI_5.5.2.0-17.zip'
Content type 'application/zip' length 1034520 bytes (1010 KB)
downloaded 1010 KB

package ‘lpSolveAPI’ successfully unpacked and MD5 sums checked

The downloaded binary packages are in
        C:\Users\lenovo\AppData\Local\Temp\RtmpmOxpIQ\downloaded_packages
[1] "The utility matrix of Player 1:"
        Kadikoy
Kadikoy  2.1495
Player 1's type for the strategy Kadikoy : 1
Success: the objective function is 2.1495
[1] "The utility matrix of Player 2:"
        Kadikoy
Kadikoy  2.1495
Player 2's Type For The Strategy Kadikoy : 1
Success: the objective function is 2.1495
> 
```

Şekil 4.11 Depo savaşları problemine “type” fonksiyonunun uygulanmasıyla elde edilen sonuç

Şekil 4.11’de yer alan doğrusal programlama çözümüne göre her iki şirket için de en iyi çözüm değeri 2.1495 olarak bulunmuştur.

5. SONUÇ

Son yıllarda yapılan çalışmalar sonucunda oyun teorisinde kavramsal değişiklikler yaşanmaktadır. Teorisyenler ve uygulamacılar, oyun teorisinin temelinde yatan varsayımları daha geniş ve gerçekçi bir perspektiften ele almaya çalışmaktadırlar. Bu yaklaşımlardan biri olan epistemik oyun teorisi, teorik bakımdan güçlü altyapıya sahip olmasına rağmen, uygulamada büyük boyutlu problemler üzerinde çalışılmasına olanak sağlayan araçlardan yoksundur. Bu özelliği, epistemik oyun teorisinin uygulanabilirliğini köreltmektedir. Bu çalışmada, epistemik oyun teorisinin kalbi sayılan rasyonelliğe ortak inanç esas alınmış ve iki kişili statik ve ortaksız oyunlarda her oyuncunun rasyonelliğe ortak inanç altında rasyonel olan seçimlerini optimal yapan ve oyuncunun kazancını maksimize eden türün sistematik bir biçimde bulunması sağlanmıştır. Yapılan çalışma, epistemik oyun teorisinin büyük boyutlu problemlere uygulanabilirliğine esneklik kazandırmıştır. İzlenen algoritmalar bilgisayar programına dönüştürülmüştür ve konu ile ilgilenen araştırmacıların kullanımına sunulması hedeflenmiştir. Bu amaçla, açık kaynak olması nedeniyle R İstatistiksel Programlama Dili kullanılmıştır. Geliştirilen yazılım, "Renkler" isimli basit bir sayısal örnek ile "Depo Savaşları" isimli bir gerçek hayat problemi üzerinde uygulanmış ve her iki oyuncu için epistemik model kurulmuştur. Gerçekleştirilmiş olan çalışmanın, epistemik oyun teorisi kapsamında yer alan diğer yaklaşımların uygulanabilirliklerinin gelişimi bakımından bir örnek teşkil edeceği düşünülmektedir. Gelecek çalışmalarda, bu yaklaşımın n-kişili oyunlara da uyarlanması planlanmaktadır.

KAYNAKÇA

Ahlatçıoğlu, M. & Tiryaki, F., 1998. *Oyunlar Teorisi.* İstanbul: Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayın Merkezi.

Aksoy Group, 2016. [Çevrimiçi] http://www.sahibinden.com [Erişim Tarihi: 13. 12. 2016].

Armbruster, W. & Böge, W., 1979. *Bayesian Game Theory.* Amsterdam: Game Theory and Related Topics.

Aumann, R. J., 1976. Agreeing to Disagree. *The Annals Of Statistics*, 4(6), pp. 1236-1239.

Aumann, R. J. & Maschler, M., 1985. Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from Talmud. *Journal of Economic Theory,* Issue 36, pp. 195-213.

Bach, C. & Cabessa, J., 2012. Common Knowledge and Limit Knowledge. *Theory and Decision,* 73(3), pp. 423-440.

Bellhouse, D., 2007. The Problem of Waldegrave. *Electronic Journal for History of Probability and Statistics*, December. 3(2).

Berkelaar, M. & others, 2015. *Package 'lpSolve'.* [Çevrimiçi] https://cran.r-project.org/web/packages/lpSolve/lpSolve.pdf [Erişim Tarihi: 10.12.2016].

Böge, W. & Eisele, T. H., 1979. On Solutions of Bayesian Games. *International Journal of Game Theory,* Issue 8, pp. 193-215.

Brandenburger, A., 2010. Origins of Epistemic Game Theory. *Epistemic Logic: Five Questions,* pp. 59-69.

Casti, J. L., 2000. *Beş Altın Kural 20nci Yüzyıl Matematiğinin Büyük Teorileri ve Neden Önemli Oldukları.* İstanbul: Sabancı Üniversitesi.

Cinemre, N., 2011. *Yöneylem Araştırması.* 2. Basım. İstanbul: Evrim Yayınevi.

Çevre ve Şehircilik Bakanlığı, 2016. *Çevre ve Şehircilik Bakanlığı.* [Çevrimiçi] http://www.csb.gov.tr/iller/istanbulakdm/index.php?Sayfa=sayfa&Tur=webmenu&Id=10108 [Erişim Tarihi: 14. 12. 2016].

Çüçen, A. K., 2000. *Felsefeye Giriş.* Bursa: Asa Kitabevi.

Debreu, D., 1952. A Social Equilibrium Existence Theorem. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* Issue 38, pp. 886-893.

Dixit, A. K. & Nalebuff, B. J., 2012. *Stratejik Düşünme.* 5. Basım. İstanbul: Sabancı Üniversitesi Yayınları.

Fan, K., 1952. Fix Point and Minimax Theorems in Locally Convex Topological Linear Spaces. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* Issue 38, pp. 121-126.

Fudenberg, D. & Tirole, J., 1993. *Game Theory*. USA:The MIT Press.

Glicksberg, I. I., 1952. A Further Generalization of the Kakutani Fix Point Theorem with Application to Nash Equilibrium Points. *Proceedings of the National Academy of Sciences,* Issue 38, pp. 170-174.

Guseinov, K. G., Akyar, E. & Düzce, S. A., 2010. *Oyun Teorisi: Çatışma ve Anlaşmanın Matematiksel Modelleri.* 1. Basım. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

İlboğa, M., 2014. Platon Epistemolojisinde Episteme-Doxa Ayrımı. *Turkish Studies-International Periodical For The Languages, Literatur and History of Turkish or Turkic,* Fall, 9(11), pp. 283-294.

KGM, 2016. [Çevrimiçi] http://www.kgm.gov.tr/sayfalar/kgm/sitetr/uzakliklar/ilcedenilceyemesafe.aspx [Erişim Tarihi: 14. 12. 2016].

Loomis, L. H., 1946. On A Theorem of Von Neumann. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America,* 15 August, 32(8), pp. 213-215.

Morgenstern, O., 1935. Perfect Foresight and Economic Equilibrium. *Selected Economic Writings of Oskar Morgenstern,* pp. 169-183.

Nash, J., 1951. Non-cooperative Games. *Annals of Mathematics,* Issue 54, pp. 286-295.

Neumann, J. V. & Morgenstern, O., 1953. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press.

Nisan, N., Roughgarden, T., Tardos, E. & Vazirani, V. V., 2007. *Algorithmic Game Theory*. 1 dü. Cambridge: Cambridge University Press.

Pearce, D., 1984. Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection. *Econometrica,* Issue 52, pp. 1029-1050.

Perea, A., 2007. A One-Person Doxastic Characterization of Nash Strategies. *Synthese,* Issue 158, pp. 251-271.

Perea, A., 2012. *Epistemic Game Theory Reasoning and Choice.* Cambridge: Cambridge University Press.

Perea, A., 2014a. From Classical to Epistemic Game Theory. *International Game Theory Review,* 16(1).

Perea, A., 2014b. *When Do Types Induce the Same Belief Hierarchy? The Case of Finitely Many Types,* Maastricht: EPICENTER: Research Center For Epistemic Game Theory.

Pindyck, R. S. & Rubinfeld, D. L., 2005. *Microeconomics.* Sixth Edition. New Jersey: Pearson Education International.

Romp, G., 1997. *Game Theory: Introduction and Applications.* Oxford: Oxford University Press.

Russell, B., 1997. *Batı Felsefesi Tarihi İlkçağ.* İstanbul: Say Yayınları.

Sağlık Bakanlığı, 2016. [Çevrimiçi] http://www.istanbulsaglik.gov.tr/w/anasayfalinkler/nufus_pramit.asp [Erişim Tarihi: 13.12.2016].

Şahin, S. & Eren, E., 2012. Oyun Teorisinin Gelişimi ve Günümüz İktisat Paradigmasının Oluşumuna Etkileri. *Hukuk ve İktisat Araştırmaları Dergisi,* 4(1), ss. 265-274.

Tan, T. & Werlang, S., 1988. The Bayesian Foundations of Solution Concepts of Games. *Journal of Economic Theory,* Issue 45, pp. 370-391.

Tepe, H., 2004. *Platon'dan Habermas'a Felsefede Doğruluk ya da Hakikat.* Ankara: İmge Kitabevi.

Tsakas, E., 2014. Rational Belief Hierarchies. *Journal of Mathematical Economics,* Vol. 51, pp. 121-127.

Varian, H. R., 2004. Akıl Oyunları ve John Nash. *Matematik Dünyası,* Güz, pp. 53-54.

Wickham, H., Danenberg, P. & Eugster, M., 2017. *Package 'roxygen2'.* [Çevrimiçi] https://cran.r-project.org/web/packages/roxygen2/index.html [Erişim Tarihi: 10. 2. 2017].

Yılmaz, E., 2012. *Oyun Teorisi.* 2. Basım. İstanbul: Literatür Yayınları.

Zamir, S., 2008. *Bayesian Games: Games With Incomplete Information,* Jerusalem: Hebrew University Center For the Study of Rationality.

ÖZGEÇMİŞ

Bilge BAŞER, 5 Ekim 1985 tarihinde İzmir'de doğmuştur. Lise eğitimini Pertevniyal Anadolu Lisesi'nde tamamladıktan sonra Kadir Has Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri (Burslu) bölümünü kazanmıştır. Lisans eğitiminin üçüncü yarıyılında "Çift Anadal Programı" kapsamında Bilgisayar Mühendisliği ve "İkinci Üniversite" yönetmeliği uyarınca Anadolu Üniversitesi Açıköğretim İktisat Fakültesi Kamu Yönetimi bölümlerinde lisans eğitimi almaya hak kazanmıştır. İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri eğitimini Bölüm İkincisi olarak tamamlamıştır. Lisans eğitimlerinden mezun olduktan sonra, 2008 yılında Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başlamıştır ve Mayıs, 2011'de "Sektörler Arası İlişkilerin Doğrusal Programlama ile Analizi: Türkiye Örneği" isimli tez çalışmasıyla mezun olmuştur. Eylül 2011'de Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İstatistik Anabilim Dalı'nda doktora eğitimine başlamıştır. Ocak 2010'da Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi İstatistik Bölümü İstatistik Teorisi Anabilim Dalı'na araştırma görevlisi olarak atanmıştır ve halen bu görevine devam etmektedir. Aynı zamanda, Haziran 2014'ten beri Hollanda'nın Maastricht kentinde yer alan Maastricht University EPICENTER araştırma merkezi üyesidir.