

**T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ALTERNATİF YERÇEKİMİ KURAMLARININ
ASTROFİZİKSEL UYGULAMALARI**

DOKTORA TEZİ

Oğuzhan Kaşıkçı

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

Haziran 2019

**T.C.
MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ALTERNATİF YERÇEKİMİ KURAMLARININ
ASTROFİZİKSEL UYGULAMALARI**

DOKTORA TEZİ

Oğuzhan Kaşıkçı

Fizik Anabilim Dalı

Fizik Programı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

Haziran 2019

Oğuzhan KAŞIKÇI tarafından hazırlanan ALTERNATİF YERÇEKİM KURAMLARININ ASTROFİZİKSEL UYGULAMALARI adlı bu tezin doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.



Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından Fizik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN



Üye : Prof. Dr. Kazım Yavuz EKŞİ



Üye : Doç. Dr. Aybike ÖZER



Üye : Prof. Dr. Süreyya Kayhan ÜLKER



Üye : Doç. Dr. Vedat Nefer ŞENOĞUZ



Bu tez, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım klavuzuna uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel etik kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- başkalarının eserlerinden yararlanması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ücret karşılığı başka kişilere yazdırmadığımı (dikte etme dışında), uygulamalarımı yaptırmadığımı,
- ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

Oğuzhan Kaşıkçı


TEŞEKKÜR

Büyük bir sabır, titizlik ve özveriyle vermiş olduğu temel teorik fizik ve modern matematiksel fizik kapsamındaki çok sayıda ders sayesinde ve araştırma sürecinde yaptığımız sayısız seminer ve tartışmalarla teorik fizikte şu anda bulunduğum seviyeyi ve anlayışı kazanmamı sağlayan değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Cemsinan Deliduman'a en içten duygularıyla teşekkür ediyorum. Verdiği emekler olmadan teorik fiziğin güzelliğini fark etmem mümkün olmazdı.

Mimar Sinan G.S.Ü. Fizik Bölümü'nde doktora programına başlamadan önce İstanbul Üniversitesi Fizik Bölümü'nde doktora danışmanım olan ve ayrıca MSGSÜ Fizik Bölümü'yle tanışmamı sağlayan, kendine has kişiliğiyle o zamanki araştırma gurubu arkadaşlarımla birlikte bizlere, yaşadığı sıkıntılara rağmen, araştırma sabrını ve heyecanını aşıl原因, iyisiyle kötüsüyle bir çok süreci beraber yaşadığımız çok değerli hocam Doç. Dr. Afif Sıddıki'ye şükranlarımı sunuyorum.

Mimar Sinan G.S.Ü. Fizik Bölümü'nde birçok yönüyle son derece konforlu ve rahat çalışma ortamından istifade etmemizi sağlayan başta Bölüm Başkanı Prof. Dr. Kayhan Ülker'e ve meydana getirdikleri bu güzel bölüm atmosferi için diğer bölüm hocalarıma ve arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Doktora sürecindeki ekonomik destek, lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca da destek aldığım TÜBİTAK-BİDEB'in yürüttüğü 2211-A Yurtiçi Doktora Burs Programı tarafından ve TÜBİTAK destekli COST projesi tarafından sağlanmıştır. Desteğinden ötürü TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

Oğuzhan Kaşıkçı

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
1 GİRİŞ	1
2 KONFORMAL YERÇEKİMİ	8
2.1 Weyl Yerçekimi	8
2.2 Weyl Yerçekimi Çözümleri ve Galaksi Dönme Eğrileri	14
2.2.1 Mannheim-Kazanas Çözümü	18
2.2.2 Dinamik Kütle Üretimi	21
2.2.3 Weyl Yerçekiminin Schwarzschild Limiti	25
2.2.4 Galaksi Dönme Eğrileri ve Karanlık Madde	33
3 GEOMETRİK ETKİ OLARAK KARANLIK MADDE	41
3.1 Yerçekimi Alan Denklemleri ve Galaksilerin Dış Bölgesi	43
3.2 Alan Denklemlerinin Çözümleri	45
3.2.1 T^2 Torus Geometri Çözümü	46
3.2.2 H^2 Hiperbolik Düzlem Geometri ve S^2 Küre Geometri Çö- zümleri	47
3.3 Çember Jeodeziklerin Kararlılığı	49
3.4 Einstein-Weyl Kuramı	51
4 WEYL YERÇEKİMİNDE MERCEK ETKİSİ	54
4.1 Gauss-Bonnet Teoremi ve Mercek Etkisi	59
4.1.1 Optik Metrik	60
4.1.2 Işığın Bükülme Açısı	61
5 KARANLIK MADDE ÇÖZÜMÜNDE MERCEK ETKİSİ	66
5.1 Genel Formalizm	67
5.1.1 Küresel Koordinatlar	68
5.1.2 Weyl Yerçekimi Boşluk Koordinatları	70

İÇİNDEKİLER

iii

5.2	Schwarzschild-de Sitter (Kottler) Uzay-Zamanı	71
5.2.1	Küresel Koordinatlar	71
5.3	Mannheim-Kazanas Uzay-Zamanı	74
5.3.1	Küresel Koordinatlar	74
5.3.2	Weyl Yerçekimi Koordinatları	77
6	SONUÇ	86
A	Gauss-Bonnet Teoremi	89
B	Konformal Dönüşümler	96
C	Gauss-Bonnet Topolojik Yüzey Terimi	106
D	Alan Denklemlerinin Çıkarılışı	111
E	N. Mertebe Laplace Denkleminin Green Fonksiyonu	113
	KAYNAKLAR	115

ŞEKİL LİSTESİ

2.1 Konformal Yerçekim Kuramında iç ve dış çözümler ve Skaler alan	29
2.2 Galaksi dönme eğrileri	37
3.1 Galaksi dönme eğrilerinin topluca gösterimi	42
4.1 Rindler-Ishak açısı tanımı	57
4.2 Optik yüzeyde jeodezik eğriler bölgesi	61
4.3 Optik yüzey üzerinde sapma açısı tanımlanan bölge	63
5.1 Işığın kütle tarafından bükülmesi	70

SEMBOL LİSTESİ

$g_{\mu\nu}$: Metrik tensör
$g^{\mu\nu}$: Metrik tensörün tersi
g	: Metrik tensörün determinanı
$R^{\alpha}_{\mu\beta\nu}$: Riemann tensörü
$R_{\mu\nu}$: Ricci tensörü
R	: Eğrilik skaleri
$G_{\mu\nu}$: Einstein tensörü
$T_{\mu\nu}$: Enerji-momentum tensörü
δ	: Varyasyon
∂	: Kısmi türev
∇	: Kovaryant türev
$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$: Christoffel sembolü
\square	: d'Alembert operatörü
$C_{\mu\nu\rho\sigma}$: Weyl tensörü

ALTERNATİF YERÇEKİMİ KURAMLARININ ASTROFİZİKSEL UYGULAMALARI

(Doktora Tezi)

Oğuzhan KAŞIKÇI

MİMAR SİNAN GÜZEL SANATLAR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

Galaksi dönme eğrileri, galaksilerin dış bölgesinde, merkeze olan uzaklıktan bağımsız olarak yıldızların ve gazların galaksi merkezi çevresinde aynı hızla döndüğünü göstermektedir. Bu, galaksilerin dış bölgelerinde yerçekiminin ölçek simetrisine sahip olduğuna dair güçlü bir delil olabilir. Bu bakış açısını takip ederek Weyl yerçekimi alan denklemlerinin bazı çözümlerini bulduk. Çözümlerden biri, parçacıkların üzerlerinde aynı hızla döndükleri kararlı çembersel jeodeziklere sahip bir geometriye karşılık gelir. Bu, tezimizin ilk ana sonucudur. Karanlık madde paradigması iki sütun üzerine oturur. Biri galaksi ölçeklerinde galaksi dönme eğrileri ve diğeri de galaksi ya da galaksi kümeleri tarafından meydana getirilen mercekleme etkisidir. Karanlık madde olgusunu, en azından galaksi ya da galaksi kümesi ölçeklerinde, açıkladığı iddiasında olan herhangi bir yerçekimi kuramı ya da modeli beklenen mercekleme etkisini üretebilmelidir. Dolayısıyla bu, büyük ölçeklerde yerçekimi kuramları için bir güvenilirlik testidir. Bu sebeple, hem bizim bulduğumuz hem de Mannheim-Kazanas(MK) uzay-zamanında, standart yöntemle, büyük kütleli bir cisim tarafından meydana getirilen ışığın bükülme açısını hesapladık. Aynı zamanda Kottler uzay-zamanı için de mercekleme formülü elde ettik. Bu sonuç MK için bulunan sonuçta γ parametresini sıfırlayarak bulunanla aynıdır. İki uzay-zamanda hesaplanmış bükülme açılarının, koordinat dönüşümleri yapıldıktan sonra aynı olduklarını gösterdik. Daha sonra kozmolojik sabit ve γ MK parametresinin sapma açısı üzerindeki etkilerini tartıştık. Bu sonuçlar bütün olarak bu tezin ikinci ana sonucudur. Burada bulunan tüm sonuçların Weyl yerçekiminde güçlü mercekleme literatürüne katkısı olmuştur.

Anahtar Kelimeler: Yerçekimi Mercek etkisi, Weyl yerçekimi, Galaksi dönme eğrileri.

Sayfa Adedi: 139 Sayfa.

Tez Yöneticisi: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

**ASTROPHYSICAL APPLICATIONS OF ALTERNATIVE
GRAVITY THEORIES
(Phd Thesis)
Oğuzhan KAŞIKÇI**

**MIMAR SINAN FINE ARTS UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
June 2019**

SUMMARY

Galaxy rotation curves show that in the outer region of galaxies stars and gases revolve around the galactic center at the same speed irrespective of their radial distance from the galactic center. This might be strong evidence that the gravity has a scale symmetry in the outer region of galaxies. Following this point of view, we find some solutions of field equations of Weyl gravity. One of the solutions corresponds to a geometry that has stable circular geodesics on which particles rotate at the same speed. This is the first main result of this thesis. Dark matter paradigm sits on two pillars. One is the galaxy rotation curves at the galactic scales and the other one is the gravitational lensing effect that is produced by a galaxy or galaxy cluster. Any gravity theory or model, which claims to explain dark matter phenomenon at least at galaxy or galaxy cluster scales, have to produce expected lensing effect. Thus this is a reliability test for gravity theories at very large scales. For this reason, we calculate the bending angle of light deflected by a massive object using a standard method in both the spacetime we found and the Mannheim-Kazanas (MK) spacetime. We also obtained the lensing formula for the Kottler spacetime. It is the same result by setting γ parameter of MK spacetime to zero. We showed that the bending angle calculated in two spacetimes are the same after performing the coordinate transformation between MK spacetime and the spacetime we found. We then discussed the effects of the cosmological constant and γ parameter of MK solution on the deflection angle. These results are the second main result of this thesis as a whole. All results found here made a contribution to the literature of strong lensing in Weyl gravity.

Key Words: Weyl gravity, Gravitational Lensing, Galaxy rotation curves.

Page Number: 139 Pages.

Supervisor: Prof. Dr. Cemsinan DELİDUMAN

1 GİRİŞ

Geçtiğimiz yüzyılda teorik fizikte çok büyük başarılar elde edilmesine karşın, her bir başarı ardında çözülmeyi bekleyen çokça problem ortaya çıkartmıştır. Küçük ölçeklerde parçacıkların davranışlarının kuantize alanlarla anlaşılabilceğinin görülmesiyle, kuvvetlerin tek bir kuramsal çatı altında birleştirilmesi çabası fiziğin en büyük uğraşı haline gelmiş ve Standart Model'i ortaya çıkartmıştır. Bir yandan üç temel etkileşim bu kuram içinde birleşirken öte yandan yerçekim alanının anlaşılmasında klasik anlamda Genel Görelilik'in (GG) ortaya koyduğu başarılar azımsanmayacak ölçüde doğaya bakışımızı değiştirmiştir. Fiziğin geometrikleştirilmesi deneyle uyumlu somut bir çaba haline gelmiştir. Güneş sistemi içerisindeki testlerden başarıyla çıkmasına rağmen gözlem tekniklerinin gelişmesiyle GG'in açıklamakta zorlandığı olaylar açığa çıkmaya başlamıştır. Galaksi kümelerinde galaksilerin hız dağılımı, galaksilerde yıldızların dönme hızlarında merkezden uzaklaştıkça beklenen davranıştan sapma, kozmolojik ölçeklerde gerçekleştirilen gözlemlerin mevcut bilinen madde ve enerji içeriğiyle anlaşılır hale getirilememesi, evrenin ivmeli genişleme davranışı göstermesi, gibi sorunlar hala gizemini korumaktadır.

GG'in ortaya çıkışı ve hemen ardından Schwarzschild çözümünün yapılmasıyla birlikte, birçok gözlemi açıklama başarısı göstermesi kuramın her durumda ve ölçekte geçerli olduğu beklentisi yaratmıştır. Bu beklentinin arkasında sadece kuramın ortaya çıktığı zamandaki gözlemleri açıklama başarısı değil aynı zamanda ancak günümüzde ve yakın zamanda varlıkları gösterilebilmiş olan yerçekim dalgaları, karadelikler, çerçeve sürüklenme etkisi (frame dragging effect) [1] gibi öngörülere sahip olması da yatar. Buna karşın kuramsal olarak Schwarzschild çözümünü verecek tek kuramın GG olmadığı, kuramın ortaya çıkışından hemen sonraki yıllarda fark edilmiştir [2]. Öte yandan bizzat Einstein'ın kendisinin Elektromanyetik kuramı yerçekimiyle birleştirme çabasına girişmesi, benzer gözlemsel başarılarla sahip farklı kuramların varlığının araştırılmasına yol açmıştır. Bunların en bilinenleri arasında Weyl'in ortaya attığı kuram

gelir [3,4]. Fiziksel açıdan kabul edilmesi zor sonuçlar doğurması yüzünden pek talep görmemiştir. Gözlemsel anlamda başarılı olmasa da bu çabalar akademik bir çalışma olarak GG'in eyleminde R Ricci skaleri yerine tamamen keyfi $f(R)$ ya da eğrilik değişmezlerinin R^2 , $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$ gibi yüksek kuvvetlerini dikkate alıp incelemek gibi çalışmaların doğmasına yol açmıştır [5].

1962'de Utiyama ve De Witt [6] GG'in renormalize edilebilmesi için eylemdeki Ricci skalerine yüksek dereceli değişmezlerin eklenmesi gerektiğini göstermişlerdir. Daha sonra 1977'de Kellogg Stelle eylemde Einstein terimine quadratik terimler eklemenin kuramın üniter olmasa da renormalize olmasına yol açtığını göstermiştir [7]. Sonraki dönemde yapılan çalışmalar ile yüksek dereceli eğrilik değişmezlerini içeren yerçekimi eylemlerinin, daha yüksek bir enerjide var olan kuramın düşük enerjideki efektif bir kuramına karşılık geldikleri gösterilmiştir [8,9].

Evrenin ivmelenmesini açıklamak için ortaya atılmış olan karanlık enerjiye bir alternatif olarak $f(R)$ yerçekimi modelleri önerilmiş [10] ve literatürde bu tarz modeller üzerine çokça çalışılmıştır. Modelin detayları ve üzerine yapılmış olan çalışmalar için [11] kaynağına ve içerisindeki referanslara bakılabilir. Öte yandan bu yerçekimi modeli kapsamında karanlık madde varsayımı yapılmadan galaksi dinamiğinin anlaşılması için birçok çalışma yapılmıştır [12–15].

Galaksi dönme eğrilerinin açıklaması olarak öne sürülmüş olan değişik bir yerçekim kuramı yaklaşımı da modifiye newton dinamiğidir (MOND) [16]. Galaksinin iç bölgelerinde geçerli olan Newton yerçekimi ivmesi galaksi dönme eğrileriyle uyumlu sonuçlar vermektedir. Fakat dış bölgelere gidildikçe beklendiği gibi hızın azalması yerine sabit kalma eğilimi görülmektedir. MOND kuramında hızın sabit olduğu bu bölgelerde yerçekimi kuvvetinin ivmenin karesiyle orantılı olması önerilmiştir. Bu öneri dönme eğrilerini açıklamanın yanında aynı zamanda, kütle-hız ilişkisi olarak bilinen $M \propto v^4$ orantısını [17] da üretebilmektedir.

Galaksi ölçeklerinde gözlem verilerini açıkladığı iddiasında olan başka bir yaklaşım ise Weyl yerçekimi kuramıdır [18]. Bu kuram orjinal haliyle H. Weyl tarafından 1918 yılında uzunlukların yerdeğiştirdikçe ölçeklenmesini içeren Riemannyan olmayan farklı bir geometriye dayalı olarak elektromanyetik kuram ile yerçekimini birleştirme gayesiyle ortaya atılmış bir kuramdır [3,4]. Fakat uzunlukların ve zaman aralıklarının yola bağımlı bir şekilde değişmeleri fiziksel açıdan deneylerle uyumsuz sonuçlar

doğurmaktadır. Bu sebeple çok uzun süreler üzerinde çalışılmamıştır. Daha sonraları kuramda bulunan ve bir ayar alanı ile ilişkili olan ölçek değişimi kavramı kuramdan çıkarılmıştır yani Riemann geometrisini temel alan bir kuram haline getirilmiş ve üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Weyl kuramında konformal dönüşümler altında değişmez kalan eylem Weyl tensörünün karesi ile oluşturulur. Kuramın geometrik arka planı, üzerinde konformal bir yapı tanımlı olan bir Lorentz manifoldudur.

Bu tez çalışmasında Weyl yerçekimi kapsamında, galaksiler ve galaksi kümeleri ölçeklerinde yapılmış galaksi dönme eğrileri gözlem sonuçlarıyla uyumlu olan bir uzay-zaman çözümü bulunmuş ve ardından bu uzay-zamanda yerçekim mercekleme etkisi incelenmiştir. Galaksi merkezinden uzaklaştıkça merkez etrafında dönme hızlarının sabitleşme eğilimi göstermesi, Genel Görelilik'in bu ölçeklerde ortaya koyduğu öngörüyle uyuşmamasından ötürü, gözlemlenen kütleden daha fazla bir kütle var olması gerektiği yolunda fazlasıyla kabul gören bir yaklaşım ortaya çıkarmıştır. Standart yerçekimi kuramının bütün ölçeklerde geçerli olduğu kabulüne dayanan bu yaklaşım gereğince galaksilerde, gözlemlenemeyen fakat yalnızca yerçekimi yoluyla etkileşen bir madde formunun galaksinin etrafında bir küresel hale şeklinde var olması gözlemleri açıklamak için kullanılmaktadır. Buna göre birkaç parametre içerecek şekilde bu maddenin yoğunluk profili için analitik bir ifade belirlenmekte ve gözlemlerle uyumlu olacak şekilde bu parametre değerleri her bir galaksi için farklı olmak üzere gözlem verileri kullanılarak belirlenmektedir. Bu, karanlık madde yaklaşımı olarak bilinir. Bu şekilde sadece galaksilerdeki dönme eğrileri değil, daha büyük ölçeklerdeki galaksi kümeleri içerisinde galaksilerin uzaklaşma hızlarını da açıklama çalışmaları yapılmıştır. Karanlık madde problemi sadece galaksiler ölçeğinde değil aynı zamanda kozmolojik ölçeklerde kozmik mikrodalga arka plan ışınmasındaki anizotropi ölçümlerinde de kendini göstermektedir [19].

Böylece evrende galaksiler, galaksi kümeleri ve kozmolojik ölçeklerde Genel Görelilik'in öngörülerıyla uyuşmayan bir madde davranışı mevcuttur. Bu gözlemleri açıklama iddiasında olan, karanlık madde yaklaşımı dışında, alternatif ve modifiye bir çok yerçekimi kuramı ortaya atılmıştır [3, 11, 20–26]. Yukarıda bir kısmından bahsettiğimiz bu kuramların içerisinde Weyl kuramı çokça çalışılan alternatif kuramlardan biridir [18, 27–29]. Standart Model'in, temel parçacıkların kütesiz olması halinde konformal simetriye sahip olması, konformal simetrisinin sadece yerçekimi için değil aynı za-

manda diğ er alanlar için de temel bir simetri olabileceğ i düşüncesini doğ urmuştur [30]. Bu kapsamda, klasik yerçekimi problemlerinden biri olan karanlık madde problemine bir çö züm getirebilecek kuram olarak görü lüp yaklaşık son otuz yıldır üzerinde çokça ç aliş ilmiştir.

Bizim de bu tez kapsamında ortaya koyduğ umuz iddia Weyl yerçekimi kuramının en azından galaksi ve galaksi kümeleri ölç eğ inde karanlık madde problemi için potansiyel bir çö zümünün parçası olabileceğ i şeklindedir. Galaksi dönme eğ rilerinin galaksilerin dış bölgelerine gidildikçe dü zleşme eğ ilimi göstermesi [31–33], o bölgelerde geçerli olan bir ölç ek simetrisinin varlığı için bir işaret olarak görü lebilir. Bu düşünc eyi destekleyecek şekilde Weyl yerçekimi kuramının küresel simetrik ve statik bir uzay-zaman çö zümünü bulduk. Bu çö zümü ve önemini daha anlaşılır hale getirmek için ikinci bölümde Weyl yerçekimi kuramını detaylı bir şekilde anlattık. Kuramın konformal simetrisini ve bu simetrinin ortaya çıkardığı bir takım özellikleri açıklayarak gösterdik. Schwarzschild formunda bir uzay-zaman çö zümünün nasıl yapıldığını anlattık. Tarihsel açıdan bu çö züm 1984 yılında R.J. Reigert tarafından ilk kez yapılmasına karşın pek dikkat çekmemiş ve beş yıl sonra P. Mannheim ve D. Kazanas tarafından bağımsız bir şekilde yeniden bulunmuştur. Çö zümün sahip oldu ğ u doğrusal ve kuadratik terim sayesinde galaksi dönme eğ rileri gözlemlerini açıklama potansiyeli üzerine Mannheim ve Kazanas tarafından günümüze kadar gelen çok sayıda ç aliş ma yapılmıştır [18]. Çö zümün sahip oldu ğ u bu potansiyelin yanında, zayıf alan limiti olarak Scwarzschild çö zümünü içerip içermemesi, kütleli parçacıkların davranışlarının konformal simetriyle bağ daştırılması, birbirleriyle örtüş en dış ve iç çö zümlerin varlığı gibi bir çok probleml i tarafları vardır. Bu sorunlu taraflara vurgu yapan çok sayıda ç aliş ma son zamanlara kadar yapılmıştır [34–36]. Biz de bu ç aliş maların önemli gördüğ ümüz bazılarını detaylı bir şekilde ikinci bölümde tartış tık. Kütleli parçacıkları kurama dahil edebilmek için Mannheim tarafından ortaya atılmış olan Dinamik Kütle Üretim mekanizmasını anlattık. Ardından galaksi dönme eğ rilerinin bu küresel simetrik ve statik metrik çö zümü ile nasıl açıklanabildiğini, Mannheim'ın ç aliş malarını takip ederek detaylarıyla aktarıp bölümü sonlandırdık. Vermiş olduğ umuz bu bilgiler sayesinde Mannheim-Kazanas çö zümünün iç erdiği üç tane parametrenin sahip oldukları evrensel, karanlık madde yaklaşımının aksine galaksiden galaksiye de ğ işmeyen, sayısal de ğ erleri kullanılarak kuramın geçerlik ölç ekleri anlaş ılmış olmaktadır.

Üçüncü bölümde, yapmış olduğumuz ilk makale çalışmasının [37] detaylarını aktarıyoruz. Yukarıda da vurguladığımız gibi galaksi dönme eğrilerinin uzak mesafelerde sabitleşme eğilimi, ideal halde sabit fakat birtakım yerel dinamiklerin etkisiyle sabitten az da olsa sapacak şekilde belirli bir karakteristik davranışın varlığını göstermektedir [31–33]. Sabit hızla hareket eden kütleli parçacıkların üzerinde buldukları çembersel jedoeziklerin varlığında önce metriğin formunu belirleyip daha sonra alan denklemlerinin de sahip olduğu simetri dolayısıyla çözümü kolaylaştıran özelliğini kullanıp Weyl kuramının küresel simetrik ve statik durumda sabit hızlı çember jeodezikleri içeren üç farklı metrik çözümünü bulduk. Çözümleri birbirinden farklılaştıran etken, sabit zaman ve radyal koordinatta herbirinin iki boyutlu ya küre, hiperbol ya da torus geometrisine sahip olmalarıdır. Bulmuş olduğumuz çember jeodeziklerin kararlılığını açıklayarak gösterdik. Ardından çalışmaya başlama motivasyonumuzu destekleyecek olan nümerik sonuçları anlattık. Bu amaçla K.Y. Ekşi ve arkadaşları tarafından yapılan [38] çalışmasında çıkarılmış olan, Ricci skalerinin ve Weyl kare teriminin enerji yoğunluğu ve kütleyle bağlı ifadelerini kullandık. Bu ilişkiler referans makalesinde Genel Görelilik bağlamında üretilmişlerdir. Galaksi ve Galaksi kümeleri ölçeğinde asıl yerçekimi kuramının, tek başına Genel Görelilik ya da Weyl kuramı değil, fakat ikisinin birleşimi olan

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R + \alpha C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} \right], \quad (1.1)$$

Einstein-Weyl kuramı olduğunu iddia etmekteyiz. Bu ilişkiler bu eylemdeki iki terimin birbirilerine olan baskınlığını konuma bağlı olarak hesaplama imkanı vermektedir. Hesaplamaların sonucunda galaksinin dış bölgelerinde Weyl teriminin, iç bölgelerinde ise Einstein-Hilbert teriminin baskın olduğunu görmekteyiz. Bu sonuçları üçüncü bölümün son kısmında detaylı bir şekilde anlattık.

Tezin son iki bölümü yapmış olduğumuz ikinci makale çalışmasının [39, 40] detaylarını içermektedir. Üçüncü bölümde bulduğumuz çözümlerden, iki boyutlu küre geometrisine sahip olan uzay-zamanda ışığın büyük bir kütle dağılımı civarından geçerken maruz kaldığı bükülme sonucu ortaya çıkan sapma açısının hesaplanmasını detaylı bir şekilde beşinci bölümde anlattık. Elde ettiğimiz sonuçların literatürdeki diğer çalışmalarla karşılaştırmasını yapabilmek amacıyla dördüncü bölümde de Weyl kuramı kapsamında ışığın mercekleşmesi olayını ele alan çalışmaların sonuçlarını özetleyerek aktardık. Dördüncü bölüm okunduğunda görülecektir ki Weyl yerçekiminde

merceklenme olayına kozmolojik sabitin ve γ MK parametresi'nin katkısı üzerine bir uzlaşma henüz yoktur. Dördüncü bölümde literatürde belirgin olan üç farklı hesaplama yaklaşımını ana hatlarını vererek anlattık. Mannheim-Kazanas uzay-zamanı üç parametre içermektedir: m kütle, γ MK parametresi ve Λ kozmolojik sabit. Işığın bükülüp mercekleşmesine sebep olan asıl etkinin kütle olduğunu biliyoruz. Fakat diğer parametrelerin etkileri konusunda literatürde bir uzlaşma yoktur.

Merceklenme hesabında yaklaşımlardan biri, standart Schwarzschild uzay zamanındaki gibi gözlemci ve ışık kaynağını sonsuzda almak ve sapma açısını asimptotik olarak aynı şekilde tanımlamaktır. Diğer bir yaklaşım ise Rindler-Ishak açısı tanımını kullanmaktır. Anlatacağımız üçüncü yaklaşım diğerlerinden tamamen farklı ve bakış açısını zenginleştiren bir yaklaşımdır. Bu yaklaşımda Diferansiyel geometriden bilinen Gauss-Bonnet teoremi, ışığın null jeodeziğinin üzerinde yaşadığı optik yüzeye uygulanmakta ve parametrelerin seri açılımlarıyla sapma açısı bulunmaktadır. Bu yöntemi dördüncü bölümün son kısmında ana hatlarıyla anlatıyoruz. Bu bölüm, Λ kozmolojik sabitin ışığın null jeodezik denkleminde bir katkı yapmamasına rağmen sapma açısına olan katkısının kullanılan hesaplama yöntemine göre değiştiğini göstermektedir. Kozmolojik sabitin varlığında uzay-zaman artık asimptotik düz değildir ve fiziksel açıdan önemli bir özelliği karadelik olay ufkunun yanında bir de kozmolojik ufuk içermesidir. Böylece fiziksel açıdan anlamlı olan bölge iki ufuk arasında kalan bölge olmaktadır. Çünkü bu bölgenin dışında metriğin imzası değişmektedir. Bu özellikleri dikkate almadan bir çok çalışma yapılmıştır. Bunların bazılarını burada aktardık. Öte yandan Weyl kuramının geçerlilik testleri açısından önemli olan, MK parametresi γ 'nın işaretine bağlı olarak mercekleşmeyi azaltıcı yada arttırıcı bir etki yapıp yapmadığıdır. Bunun sonucu olarak mercekleşmenin artması bükülmeye yol açan kütlelerin, karanlık madde katkısını dikkate almadan, yalnızca geometrik olarak yarattığı etki olarak görülecek ve gözlem sonuçları açıklanmış olacaktır. γ parametresinin değerini ve işaretini, galaksi dönme eğrileri dışında bir yolla belirlemek amacıyla, bu bölümde aktardığımız bazı çalışmalar Güneş civarındaki bükülmeyi ölçen VLBI radyo interferometre deneyinin sonuçlarını veya galaksi kümeleri ölçeğinde çoklu görüntü oluşumuna yol açan mercekleşmeye ait lens hesabıyla parametrenin hem değeri hem de işareti hakkında bir çıkarımda bulunabilmişlerdir.

Beşinci bölümde hesaplama için gerekli olan genel formalizm verildikten sonra

önce Schwarzschild-de Sitter sonra da Mannheim-Kazanas uzay-zamanlarında hesaplama detaylı bir şekilde gösterilmiştir. Hesaplama detaylarına geçmeden önce Weyl alan denklemlerini çözerek bulduğumuz çözümlerin bir konformal dönüşümle MK metriğine dönüştürülebildiğini gösterdik. Işık null jeodezik üzerinde konformal dönüşümlerden etkilenmeden hareket eder, yani birbirlerine konformal denk olan iki metrik kullanılarak yapılmış null jeodezik hesapları aynı sonucu verecektir. Böylece bulmuş olduğumuz sonuçların γ ve Λ parametrelerinin katkılarını incelemede güvenilir olacağını söyleyebiliriz. Ayrıca konformal dönüşümde radyal koordinat dönüşümü MK uzayındaki ufuk noktalarını sonsuza gönderdiğinden ötürü bulduğumuz çözüm uzayında ufuk ötesine yani fiziksel bölgenin dışına çıkmak gibi bir durum yoktur. Ayrıca her iki uzay-zamanda yapılan hesapların aynı olduklarını da sonuçları koordinat dönüşümüyle dönüştürüp karşılaştırarak gösterdik. Sonuncu bölümde elde ettiğimiz sonuçların tartışmasını yapıp tezi sonuçlandırdık.

2 KONFORMAL YERÇEKİMİ

2.1 Weyl Yerçekimi

H. Weyl'in 1918 de ortaya koyduğu, Riemanniyen olmayan bir geometriye dayanan kuramını yayınlamasından sonra Rudolf Förster, 1921'de Rudolf Bach ¹ takma adıyla bu geometrik temel üzerine Weyl'in yaptığından farklı olarak Ricci skaleri yerine Weyl tensorünün kuadratik skaler değişmezini kullanarak

$$I = \alpha \int d^4x \sqrt{-g} C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} \quad (2.1)$$

eylemi üzerinden bir kuram ortaya koydu [3,42]. Çalışmasında küresel simetrik ve statik bir geometriye karşılık gelecek çözümler bulmasına rağmen, bunlar bir yıldızın etrafındaki dış çözüme karşılık gelmiyorlardı. Kuramın ardındaki geometrinin herhangi bir standart kütle ve mesafe ölçeği içermemesi ve uzunlukların ötelemeyle değişmesi fiziksel açıdan makul karşılanmayan özellikler olması dolayısıyla Weyl'in geliştirdiği bu kuram zamanla terkedildi. Fakat bu ölçek değişmezliğinin kendiliğinden ortaya çıkardığı ayar dönüşümleri ve değişmezliği kavramları fiziğin temel yapıtaşlarından oldu.

Weyl geometrisinden farklı olarak bu bölümde geometriyi Lorentzyen alacağız. Yani manifold üzerinde tanımlı yapı olarak sadece konformal dönüşümlerle birbirlerine denk olan metrik ve ondan türeteceğimiz bağlantı katsayıları olacak. Weyl geometrisinde paralel ötelemede uzunlukların değişimine yol açan ilave κ_μ 1-formunu yok sayacağız. Bunun sonucu olarak kovaryant türevi metrik uyumlu olacak şekilde Levi-Civita bağlantısı kullanarak tanımlayacağız:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho \equiv \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (g_{\sigma\nu,\mu} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\mu\nu,\sigma}) \quad (2.2)$$

¹1908 de D. Hilbert'in danışmanlığında yaptığı doktora sonrasında, Einstein'a mektubunda belirttiği üzere, mühendis olarak çalıştığı şirketle yaptığı sözleşme gereği herhangi bir yazılı yayın yapması yasaklandığı için çalışmalarını farklı bir isimle yayınlama gereği duymuş [41].

$$\nabla_{\mu}g_{\nu\rho} = 0. \quad (2.3)$$

Weyl yerçekimi kuramının temel aldığı eylem yukarıda Bach'ın çalışmasından bahsederken ifade ettiğimiz (2.1) eylemidir. En genel halde madde alanlarını da dahil edersek

$$g'_{\nu\rho} = \Omega^2(x)g_{\nu\rho}, \quad (2.4)$$

konformal dönüşümü altında değişmeden kalacak şekilde bir çok eylem yazmak mümkündür. Fakat kuramdaki dinamik alanları yalnızca metrik tensörle sınırlandırırsak bu durumda yazılabilecek en basit konformal simetrik bir tek eylemin, ek-B deki konformal dönüşümleri de dikkate alarak, (2.1) olduğunu görürüz. Weyl tensörü metriğin ikinci türevini içerdiğinden ötürü $C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$ teriminin kütle boyutu 4'tür. İntegralin ölçüsünün kütle boyutu da -4 olduğundan ötürü eylemdeki α çiftlenim sabitinin kütle boyutunun 0 olduğu görülür. En genel haliyle n boyutlu bir $(M, g_{\nu\rho})$ manifoldunda tanımlı Riemann eğrilik tensörünün izli kısımlarını basit lineer cebir operasyonlarıyla tamamen çıkartıp izsiz simetrik bir tensör tanımlamak mümkündür [3]:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{n-2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + R_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - R_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}) + \frac{1}{(n-1)(n-2)}R(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}). \quad (2.5)$$

Riemann, Ricci tensörü ve Ricci skalerinin konformal dönüşümleri kullanılarak Weyl tensörünün konformal dönüşüm altında değişmez kaldığı hemen görülür. Tanımdan da kolayca görüleceği üzere Weyl tensörünün bütün simetri özellikleri Riemann eğrilik tensörüyle tamamen aynıdır:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = -C_{\nu\mu\rho\sigma}, \quad C_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\rho\sigma\nu\mu}, \quad C^{\nu}_{\sigma\nu\mu} = 0. \quad (2.6)$$

Böylelikle tamamen izsiz ve antisimetrik olması dolayısıyla Maxwell tensörü üzerinden elektrik ve manyetik alan tanımlamaya benzer şekilde Weyl tensöründen bir elektrik ve manyetik kısım tanımlamak mümkündür [43]:

$$E_{\mu\nu} \equiv C_{\mu\rho\nu\sigma}u^{\rho}u^{\sigma}, \quad H_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\eta_{\mu\rho\sigma}C_{\rho\sigma\nu\delta}u^{\delta}. \quad (2.7)$$

Burada u^{μ} zamansal bir gözlemciyi tanımlayan vektördür. $\eta_{\mu\rho\sigma}$ ise Levi-Civita 4- formu $\eta_{\mu\rho\sigma\nu}$ üzerinden

$$\eta_{\mu\rho\sigma} = \eta_{\mu\rho\sigma\nu}u^{\nu}, \quad \eta_{\mu\rho\sigma\nu} = -\sqrt{g}\delta_{\mu\rho\sigma\nu}, \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanır. Tanımdaki $\delta_{\mu\nu\rho\sigma}$, indislerine göre tamamen antisimetrik olan bir tensör yoğunluğudur ve $\delta_{0123} = 1$ ile tanımlanır. Riemann eğrilik tensörünün 4-boyutlu uzay-zamanda 20 bağımsız bileşeni vardır. Bunların 10 tanesi izli kısmında yer alır. Dolayısıyla Weyl tensörü uzay-zamanın 10 serbestlik derecesini içerir. Yerçekimini tanımlayan alan denklemleri kullanılarak Weyl tensörü içerisindeki bu 10 serbestlik derecesinin uzaysal ve zamansal değişimlerini ifade eden denklemleri yazmak mümkündür. Bu denklemler yapı olarak, elektromanyetik alanın kaynağı olan akım ve yük yoğunluğu varlığında yazılan Maxwell denklemlerinin ikinci merteye benzerleri olarak ortaya çıkarlar. Böylece bu denklem takımı yerçekiminin kaynak dışındaki yayılımını verir. Üstelik yerçekim dalga denklemini bu elektrik ve manyetik kısımlar cinsinden de yazmak mümkündür [43]. Bu yönüyle Weyl tensörü yerçekim davranışının anlaşılması açısından son derece kritik bir konumdadır. Bu konular tezin kapsamı dışında olduğundan detaylar için yukarıda verdiğimiz referansı önerip Weyl yerçekim kuramının özelliklerini açıklamaya devam ediyoruz.

Eylem içindeki Weyl kare terimi, Weyl tensörünün tanımı kullanılarak açıkça yazılırsa

$$C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2 \quad (2.9)$$

ifadesi bulunur. İfade içindeki $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}$ Riemann kare terimi alan denklemlerine katkı yapmayacak şekilde

$$\mathcal{G} = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2, \quad (2.10)$$

Gauss-Bonnet terimi kullanılarak elimine edilebilir. Eğrilik tensörlerinin bu özel kombinasyonunun 4 boyutlu uzayda metrikten bağımsız topolojik Chern-Simons 3-formun dış diferansiyeli olarak yazılabildiği, A.Yale ve T.Padmanabhan'ın [44] çalışmasını takip ederek, ek-C'de gösterilmiştir. Stokes teoremi sayesinde eylem içindeki bu terimler 3 boyutlu yüzey integraline dönüşür ve alan denklemlerine hiçbir katkı yapmazlar. Ek-C'de kullandığımız yöntemden farklı bir şekilde bu kuadratik terimlerin alan denklemlerine katkı yapmadığı 1938'de C. Lanczos tarafından gösterilmiştir [45]. Böylelikle Weyl kare teriminden Gauss-Bonnet terimi çıkarılırsa maddenin varlığında Weyl yerçekiminin alan denklemlerini verecek olan eylem

$$I = 2\alpha \int d^4x \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} - \frac{1}{3}R^2 \right) + I_m[g_{\mu\nu}, A_\mu, \Phi, \Psi..] \quad (2.11)$$

haline gelir. I_m madde alanlarına karşılık gelen genel bir eylemi ifade ediyor. Eylemin varyasyonunu alarak yerçekimini tanımlayan alan denklemlerini aşağıdaki gibi buluruz:

$$4\alpha(K_{\mu\nu} - \frac{1}{3}H_{\mu\nu}) = T_{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Alan denklemlerinin detaylı çıkarımı ek-D'de gösterilmiştir. Burada $K_{\mu\nu}$ tensörü eylemdeki $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ teriminden $H_{\mu\nu}$ tensörü ise R^2 teriminden gelen katkıyı gösteriyor:

$$K_{\mu\nu} = \square(R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) - \nabla_\lambda \nabla_\mu R_\nu^\lambda - \nabla_\lambda \nabla_\nu R_\mu^\lambda + 2R_{\mu\lambda}R_\nu^\lambda - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}, \quad (2.13)$$

$$H_{\mu\nu} = 2R(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R) + 2(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu)R. \quad (2.14)$$

Eşitliğin sağ tarafındaki Enerji-Momentum tensörü

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta I_m}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.15)$$

şeklinde tanımlanır. Yerçekim hareket denkleminin (2.12) geometrik kısmı Bach tensörüne eşittir [42]:

$$B_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} - \frac{1}{3}H_{\mu\nu} = (\nabla^\rho \nabla^\sigma - \frac{1}{2}R^{\sigma\rho})C_{\mu\rho\nu\sigma}. \quad (2.16)$$

Eşitlikten hemen görüleceği gibi Bach tensörü izsiz bir tensördür. Uzayın boyutu 4 olduğunda da tensörün formu konformal dönüşümler altında değişmeden kalır. Genel olarak n boyutlu uzayda

$$B_{\mu\nu} = (\frac{1}{n-3} \nabla^\rho \nabla^\sigma - \frac{1}{n-2} R^{\sigma\rho}) C_{\mu\rho\nu\sigma} \quad (2.17)$$

olarak tanımlanır. Bach tensörünün izsiz oluşu, diverjansının sıfır oluşu ve konformal dönüşümler altında ($w = -2$ ağırlıklı) kovaryant bir şekilde dönüşme özelliklerinin hepsini sağlayacak şekilde yüksek boyutlu uzaylara genelleştirilmiş tanımlarını yapmak mümkündür [46]. Weyl konformal simetrisinin ortaya çıkardığı izsiz olma ve niceliklerin belli ölçek faktörleriyle dönüşmesi ve bunların yanında alan denklemlerinin dördüncü mertebe türevli terimler içermesi Weyl yerçekim kuramının genel görelilik kuramından farklılaşmasına yol açar. Kuramın fiziksel özelliklerini tartışmadan önce bahsettiğimiz bu özelliklerin Weyl simetrisi ile olan ilişkisini belirginleştirelim. Weyl

yerçekim alan denklemlerinin izsiz oluşu doğrudan Weyl simetrisinin bir sonucu olarak ortaya çıkar. Bunu yalnızca metrik ve onun türevlerine bağlı olan genel bir

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}(g, \partial g, \dots) \quad (2.18)$$

Weyl simetrik eylemi üzerinden gösterebiliriz. Konformal dönüşümü sonsuz küçük olacak şekilde yazarsak metriktaki değişim

$$\delta g_{\mu\nu} = \lambda(x) g_{\mu\nu} \quad (2.19)$$

olacaktır. Burada $\lambda(x)$ keyfi bir sonsuz küçük ölçek faktörüdür. Bu son eşitliği Weyl simetrik olan yukarıdaki eyleme yerleştirirsek varyasyon sonucu bulacağımız $P^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g_{\mu\nu}}$ tensörünün izinin sıfır olması gerektiğini buluruz:

$$\begin{aligned} \delta I &= \int d^4x \sqrt{-g} P^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} P^{\mu\nu} g_{\mu\nu} \lambda = 0, \\ P^\mu{}_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Böylece Weyl simetrik bir kuramın hem geometri hem de madde kısmının sağlaması gereken genel özelliği çıkarmış oluyoruz. Öte yandan bu sonucu ilginç bir şekilde konformal dönüşümler üzerinden üretmek mümkündür. Bunu göstermeden hemen önce eylem üzerinden çıkarılacak ve korunum yasalarını veren başka bir önemli özelliği kısaca gösterelim.

Yukarıda kullandığımız genel eylem en genel düzgün, türevlenebilir ve ters dönüşümleri olan koordinat dönüşümleri altında değişmeden kalan ve metrik fonksiyonlarını reel sayılara gönderen bir fonksiyoneldir. Dolayısıyla manifold üzerinde tanımlı bu diffeomorfizmler altında eylemin değişmez kalması önemli bir sonuca yol açar: Kovaryant korunum yasaları. Koordinatların sonsuz küçük $x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x)$ değişimi altında metrik fonksiyonlarının

$$g'_{\mu\nu}(x') \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = g_{\mu\nu}(x), \quad (2.21)$$

dönüşümünü dikkate alırsak metriğin fonksiyonel formundaki değişimi

$$\delta g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu, \quad (2.22)$$

olarak buluruz. Koordinatların değişiminden kaynaklanan bu varyasyonu eylem içeriğine yerleştirelim:

$$\begin{aligned}
\delta I &= \int d^4x \sqrt{-g} P^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \\
&= 2 \int d^4x \sqrt{-g} P^{\mu\nu} \nabla_\mu \xi_\nu \\
&= 2 \int d^4x \sqrt{-g} [\nabla_\mu (P^{\mu\nu} \xi_\nu) - (\nabla_\mu P^{\mu\nu}) \xi_\nu] \\
&= \text{yuzey terimi} - 2 \int d^4x \sqrt{-g} (\nabla_\mu P^{\mu\nu}) \xi_\nu.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Eylemin simetrik olabilmesi için ikinci terimin sıfır olması gerektiği açıktır. ξ^μ değişimi keyfi olduğundan $\nabla_\mu P^{\mu\nu} = 0$ sonucuna ulaşıyoruz [2]. Bu sonuç bize eylemde kullandığımız herhangi bir değişmez skalerden türeyen $P^{\mu\nu}$ tensörünün, doğrudan bu sonuca göre, kovaryant diverjansının sıfır olması gerektiğini söylüyor. Böylelikle yerçekim kuramının madde kısmına karşılık gelen enerji-momentum tensörünün de kovaryant diverjansının sıfır olması sonucuna ulaşılır. Bu, korunum yasalarının eğri uzaydaki karşılığıdır. Dolayısıyla bu özellik bize genel görelilikte R Ricci skalerini seçmenin biricik bir seçim olamayacağını gösteriyor. Buna karşılık 4-boyutta Weyl konformal dönüşümleri altında değişmeden kalan tek skalerin Weyl kare olması Weyl yerçekim kuramı açısından önemli bir özelliktir. Şimdi de Weyl konformal dönüşümleri altında enerji-momentum tensörünün izinin sıfır olmasını gösterelim. Bu amaçla madde eyleminin Weyl altında değişmezliğini gösteren

$$I = \int d^Dx \sqrt{-g'} \mathcal{L}'_m = \int d^Dx \sqrt{-g} \mathcal{L}_m, \tag{2.24}$$

eşitliğinden madde lagranjyeninin

$$\mathcal{L}'_m = \Omega^{-D} \mathcal{L}_m, \tag{2.25}$$

değişimini buluruz. Bunun sonucu olarak Enerji-Momentum tensörünün konformal çerçeveler arasındaki dönüşümünü tanımdan çıkarabiliriz:

$$T'_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g'}} \frac{\delta(\sqrt{-g'} \mathcal{L}'_m)}{\delta g'^{\mu\nu}} = -\frac{2}{\sqrt{-g'}} \frac{\partial g^{\rho\sigma}}{g'^{\mu\nu}} \frac{\delta(\sqrt{-g} \mathcal{L}_m)}{\delta g^{\rho\sigma}} \tag{2.26}$$

$$T'_{\mu\nu} = \Omega^{-D+2} T_{\mu\nu}. \tag{2.27}$$

Diğer dönüşümler de

$$T'^{\mu\nu} = \Omega^{-D-2} T^{\mu\nu}, \quad T'_\nu{}^\mu = \Omega^{-D} T_\nu{}^\mu, \quad T'^\mu{}_\nu = \Omega^{-D} T^\mu{}_\nu, \tag{2.28}$$

şeklinde olacaktır. Kovaryant türevin ek-B deki dönüşümlerini kullanarak enerji momentum tensörünün kovaryant diverjansı için

$$\nabla'_\mu T'^{\mu\nu} + g'^{\nu\sigma} \frac{\Omega_{,\sigma}}{\Omega} T'^\mu = \Omega^{-D-2} \nabla_\mu T^{\mu\nu}, \quad (2.29)$$

yazmak mümkündür. Yukarıda eylemin simetrisinden çıkardığımız izin sıfır olmasıyla tutarlı bir şekilde diverjansın bir konformal çerçevede sıfır olduğunda diğerlerinde de sıfır olacağı hemen görülür. Öte yandan eylemin Weyl simetrisinin bir sonucu olarak yukarıdaki denklemin her iki tarafı da zaten sıfır olacaktır. Enerji-momentum tensörünün sağladığı özellikleri yerçekim kuramının geometrik kısmını oluşturan tensörün de benzer şekilde sağlaması gerekir. Gerçekten de Bach tensörünün 4 boyuttaki (2.16) tanımını dikkate alırsak Weyl tensörünün eğrilik tensörleri cinsinden olan ifadesini tanıma yerleştirip basit cebirsel işlemlerin yanında, torsiyonsuz uzayda yazacağımız

$$(\nabla_\mu \nabla_\nu - \nabla_\nu \nabla_\mu) X^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_n} = R_{\mu\nu\gamma}{}^{\alpha_1} X^{\gamma \dots \alpha_n}_{\beta_1 \dots \beta_n} + \dots - R_{\mu\nu\beta_1}{}^\gamma X^{\alpha_1 \dots \alpha_n}_{\gamma \dots \beta_n} \dots, \quad (2.30)$$

Ricci özdeşliğini de kullanıp

$$\nabla_\mu B^{\mu\nu} = 0, \quad (2.31)$$

sonucunu bulabiliriz. Bu sonucun yalnızca 4 boyutta geçerli olduğu ve yüksek boyutlarda sıfırdan farklı bir sonuç bulunacağı gösterilebilir [46]. Benzer şekilde yine dört boyutta geçerli olan Bach tensörünün konformal dönüşüm özelliğinin ek-B'deki konformal dönüşümleri kullanarak

$$B'_{\mu\nu} = \Omega^{-2} B_{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

şeklinde, Enerji-momentum tensörüyle uyumlu olduğu bulunur. Öte yandan eylem içerisinde metrikten bağımsız bir sabit sayı eklendiğinde

$$\int d^4x \sqrt{-g} \Lambda \rightarrow \int d^4x \sqrt{-g} \Lambda \Omega^4 \quad (2.33)$$

şeklinde dönüştüğünden konformal simetri kırılır. Böylece Weyl yerçekimi kuramı kozmolojik sabitin varlığını kısıtlar. Fakat eylem seviyesinde değil, bir sonraki kısımda göreceğimiz gibi, küresel simetrik bir çözüm içerisinde ortaya çıkmasını sağlar.

2.2 Weyl Yerçekimi Çözümleri ve Galaksi Dönme Eğrileri

Weyl yerçekim kuramının eylem ve alan denklemleri, genel koordinat dönüşümleri altında değişmezliğinin yanında konformal simetrisiye sahip olmasıyla Genel Görelilik

(GG) kuramından tamamen farklıdır. Genel Görelilik'in bir genelleştirmesi değildir. Dolayısıyla hiç bir limit durum olarak GG'yi kapsamaz. Boşluk çözümü olarak $R_{\mu\nu} = 0$ eşitliğini sağlayan her çözüm aynı zamanda (2.12)'in de bir çözümü olduğundan dolayı GG'in güneş sistemi testlerinde [1] başarılı olan Schwarzschild boşluk çözümü aynı zamanda Weyl yerçekimi kuramının da bir çözümüdür. Böylece Weyl kuramının da bu testleri sağlayacağı görülür. Fakat Schwarzschild'den farklı çözümler de mevcuttur. Yüklü bir karadeliğin silindirik simetrik iki farklı çözümü olduğu bulunmuştur [47]. Bir diğer boşluk çözümü de 2-boyutlu iki uzayın kartezyen çarpımıyla konformal olarak ilişkili olan 4-boyutlu bir uzay-zaman çözümüdür [29]. Yapılmış diğer çözümler için [48] kaynağına bakılabilir.

Bu kısımda küresel simetrik ve statik bir yerçekim alanına karşılık gelen çözümü kısaca açıklayacağız ve sonrasında kendi yaptığımız çalışmaya geçeceğiz. Bu çözüm ilk olarak 1984 yılında R.J. Reigert tarafından yüklü bir karadeliğin çözümü olarak bulunmuştur [49, 50]. Daha sonra 1989 yılında P.D.Mannheim ve D. Kazanas tarafından yeniden bu sefer yüksüz bir boşluk çözümü olarak ortaya konmuştur [51]. Şimdi bu yüklü karadeliğin çözümünü detaylı bir şekilde çıkaralım ve sonrasında da çözümün yüksüz hali için Mannheim ve Kazanas tarafından yapılmış incelemesini gözden geçirelim [51].

Elektromanyetik alanın varlığında Weyl yerçekim eylemi

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} (C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (2.34)$$

olur. Burada $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$, A_ν vektör potansiyelinden türetilmiş Maxwell Elektromanyetik alan tensörüdür. Kuramın yerçekim alan denklemleri (2.12)

$$4\alpha(\nabla^\rho \nabla^\sigma - \frac{1}{2} R^{\sigma\rho}) C_{\mu\rho\nu\sigma} = F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \quad (2.35)$$

olacaktır. Çözüme geçmeden önce konformal dönüşümlerin metriktaki serbestlik derecesine olan etkisini açıkça gösterip çözümde kullanacağımız metrik formunu çıkaralım. Kuramın en basit halde, küresel simetrik ve statik bir fiziksel duruma karşılık gelen boşluk çözümünü bulmak istiyoruz. Geometrik olarak her zaman küresel simetrik ve statik bir metrik iki bilinmeyen fonksiyon cinsinden

$$ds^2 = -A(\rho) dt^2 + B(\rho) d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2.36)$$

formunda yazılabilir [52,53]. Kuramın konformal simetrisi çözüm olan metrikleri konformal denklik sınıflarına ayırır. Bu sınıflar içerisinde koordinat dönüşümleriyle bu-

lacağımız bir konformal çarpan yoluyla yukarıdaki metriğin serbestlik derecesini bire indirmek mümkün olur. Yalnızca radyal kordinat değişimiyle beraber bir konformal dönüşüm gerçekleştirdiğimizi düşünelim:

$$ds^2 = \Omega^2(r)[-f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)]. \quad (2.37)$$

Önceki koordinatlarla ilişkilendirdiğimizde dönüşümler aşağıdaki gibi olur:

$$\Omega^2 = \rho^2/r^2, \quad h(r) = \frac{B(\rho)}{\Omega^2} \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2, \quad f(r) = \frac{A(\rho)}{\Omega^2}. \quad (2.38)$$

Metriği özel olarak $h^{-1}(r) = f(r)$ Schwarzschild formunda seçersek keyfi Ω çarpanını belirleyebiliriz. Son eşitliği dönüşümlerle birlikte kullanırsak

$$\Omega^4 = A(\rho)B(\rho) \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2, \quad (2.39)$$

yazarız. Yukarıda Ω çarpanını veren ilk eşitliği kullanarak

$$-\frac{1}{r} = \int \frac{\sqrt{A(\rho)B(\rho)}}{\rho^2} d\rho, \quad (2.40)$$

koordinat dönüşümünü buluruz. Sonuç olarak

$$\Omega^2 = \rho^2/r^2 = \rho^2 \left(\int^{\rho} \sqrt{A(z)B(z)} \frac{dz}{z^2} \right)^2, \quad (2.41)$$

seçimi genel küresel simetrik ve statik metrikten her zaman bir konformal dönüşüm ve koordinat dönüşümüyle Schwarzschild formunda bir metriğe geçmeye imkan verecektir [51]:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (2.42)$$

Böylelikle konformal dönüşümler altında küresel simetrik ve statik metriğe denk olan tüm metriklerin ait olduğu konformal denklik sınıfı için yazılabilecek en basit metrik formunu bulmuş oluyoruz. Konformal dönüşüm altında alan denklemlerinin her iki tarafı da

$$B'_{\mu\nu} = \Omega^{-2}B_{\mu\nu}, \quad T'_{\mu\nu} = \Omega^{-2}T_{\mu\nu} \quad (2.43)$$

aynı şekilde dönüşeceği için (2.42) yeni metriği de alan denklemlerinin bir çözümü olacaktır. Alan denklemlerini çözerek bu metriği ve elektromanyetik alanın vektör potansiyelini bulmak yerine H.Weyl'ın yaptığı gibi [54, 55] metriği doğrudan eylem içerisine yerleştirerek eylemin bilinmeyen fonksiyonlara göre varyasyonu her bilinmeyen için bir denklem elde ederek sırasıyla bu denklemleri çözeceğiz. Böylelikle ilk kez

1984 yılında Reigert tarafından bulunmuş olan çözümlere ulaşmış olacağız [49, 50].

Bu amaçla metriğe, sonradan yok edeceğimiz yeni bir değişken, $b(r)$, ekliyoruz:

$$ds^2 = -f(r)b(r)^2 dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.44)$$

Ayar potansiyelini statik durumda elektrik alana karşılık gelecek en basit halde alıyoruz: $A_\mu = \Phi(r)dt$. Bunları eylem içerisine yerleştirelim:

$$I = \int d^4x \frac{r^2 \sin \theta}{b} \left[\frac{\alpha}{3r^4} (3r^2 f' b' + r^2 f'' b + 2r^2 b'' f - 2r f' b - 2r b' f + 2fb - 2b)^2 + \frac{\Phi'^2}{2} \right]. \quad (2.45)$$

Eylemin (f, b, Φ) fonksiyonlarına göre varyasyonunu alıp sonrasında geçici fonksiyonu $b = 1$ alırsak, alan denklemlerini aşağıdaki gibi buluruz:

$$\frac{\delta I}{\delta f} = 0 \rightarrow r^2 f''''(r) + 4r f'''(r) = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{\delta I}{\delta \Phi} = 0 \rightarrow r\Phi''(r) + 2\Phi'(r) = 0 \quad (2.47)$$

$$\frac{\delta I}{\delta b} = 0 \rightarrow 12r^3 f''' f + 2r^4 f''' f' + 4r^4 f'''' f - 4r^2 f'^2 - 4r^2 f'' f - r^4 f''^2 + 4 - 4f^2 + 4r^3 f' f'' + 8r f' f = \frac{3r^4}{2\alpha} \Phi'^2 \quad (2.48)$$

Skaler potansiyel için, sabit değeri sıfır alırsak, ikinci denklem

$$\Phi(r) = \frac{q}{r}, \quad (2.49)$$

çözümünü verir. Burada q elektrik yüküdür. Birinci denklem de çözüm olarak

$$f(r) = c + \frac{d}{r} + e r + a r^2, \quad (2.50)$$

fonksiyonunu verir. Son denklem bulduğumuz çözümlerdeki (α, a, e, c, d, q) parametrelerini ilişkilendiren bağ denklemdir ve

$$3ed - c^2 - \frac{3q^2}{8\alpha} + 1 = 0, \quad (2.51)$$

bağıntısını verir [49, 50]. Yukarıdaki kısıtlayıcı koşul çözüm metriğinin üç parametrelilik olmasını gerektirir. Bu çözüm bizi konformal yerçekimi kuramı açısından önemli bir sonuca götürür: Bach-Maxwell (2.35) denklemlerinin üç parametrelilik küresel simetrik çözüm ailesinin tek ve statik olduğu gösterilebilir [49]. Buradaki teklikten kasıt koordinat dönüşümleriyle ve konformal dönüşümlerle küresel simetrik her çözümün bu

çözümüne dönüşebilmesi ve böylece oluşan konformal sınıfın teklîğidir. Sonuç olarak bu çözüm konformal sınıfın temsilcisi olarak görülebilir.

Reigert'in bulmuş olduğu ve yukarıda açıkladığımız çözümün ötesinde başka çözümler de vardır. Hem elektrik yükü hem de manyetik yükün varlığında aynı metrik formunda bir uzay zaman çözümü de P.D. Mannheim ve D. Kazanas tarafından bulunmuştur [56]. Manyetik yük varlığında vektör potansiyeli $A_\mu = (q/r, 0, 0, -p \cos \theta)$ alınırsa çözüm parametrelerinin yukarıda yazdığımız ilişkisi bu sefer

$$3ed - c^2 - \frac{3(q^2 + p^2)}{8\alpha} + 1 = 0, \quad (2.52)$$

olacaktır. Yüklerin varlığında $c = 1$ alırsak bu durumda metrikte hem $1/r$ hem de r lineer terim var olabilir, fakat yüksüz durumda iki terimden biri mevcut olmak zorundadır. Böylece yükler Schwarzschild çözümüne lineer bir düzeltmeye izin verirken, yüksüz durumda sadece Schwarzschild ya da lineer çözüm izinli olabiliyor. Astrofiziksel açıdan önemli olan diğer bir çözüm ise hem yüksüz (Kerr) hem de yüklü (Kerr-Newman) dönen bir yıldız çözümüdür. Bunların Weyl yerçekimi kuramında da var olduğu aynı kişiler tarafından gösterilmiştir [56].

2.2.1 Mannheim-Kazanas Çözümü

P.D. Mannheim ve D. Kazanas 1989 yılında buldukları yüksüz çözümü, galaksilerde gözlemlenen yıldızların dönme hızlarının galaksinin merkezi dışına çıkıldıkça düzleşme eğilimi göstermesini açıklamak amacıyla kullanmışlardır [18, 51, 57]. Şimdi bu çalışmayı açıklayıp bu kısmı sonlandıracağız. Önceki kısımda detaylı bir şekilde açıkladığımız konformal yerçekiminin özelliklerinden olan alan denklemlerinin izinin ve diverjansının sıfır oluşu denklemlerin bağımsız bileşen sayısını, statik metrik durumunda, bire indirir [51]. (2.42) Metriği kullanılıp (2.16) Bach tensörünün diverjansı ve izi hesaplanırsa, sırasıyla

$$\left(\frac{d}{dr} - \frac{f'}{2f} + \frac{2}{f} \right) B^{rr} + \frac{ff'}{2} B^{00} - 2rfB^{\theta\theta} = 0, \quad (2.53)$$

$$\frac{1}{f} B^{rr} - fB^{00} + 2r^2 B^{\theta\theta} = 0, \quad (2.54)$$

bulunur. Buradan da görüldüğü gibi tek bir bileşenin çözülmesi yeterli olacaktır. Bu amaçla metriği B^{rr} radyal bileşen içine yerleştirirsek, boşluk durumu için,

$$2r^4 f' f''' - r^4 f'^2 - 4r^3 (f f''' - f' f'') - 4r^2 (f f'' + f'^2) + 8r f f' - 4f^2 + 4 = 0, \quad (2.55)$$

denklemleri bulunur. $f(r)$ fonksiyonu üzerinde $f(r) = r^2 u(r)$ ve $u'(r) = r^{-4} v^4(r)$ dönüşümleri yapılır ve $v(r)$ 'ye ait diferansiyel denklem çözülürse kuramın boşluk durumuna ait

$$f(r) = 1 - 3\beta\gamma - \frac{\beta(2 - 3\beta\gamma)}{r} + \gamma r - kr^2, \quad (2.56)$$

çözümü bulunur. Çözümde görünen parametreler integrasyon sabitlerine karşılık gelirler. Dikkat edilecek olursa (2.51) bağıntısının sağlandığı görülür. Bunun sonucu olarak da β , γ ve k parametreleri birbirlerinden tamamen bağımsız değerler alırlar. Doğrusal γr teriminin bir yaklaşım sonucu değil aksine bir tam çözüm olarak ortaya çıktığı görülür. Aşağıda da göstereceğimiz gibi sadece dış boşluk çözümünde değil aynı zamanda da iç çözüm içerisinde de tam çözümün bir parçası olarak doğrusal bir terim ortaya çıkacaktır. Çözümde γ 'nın sıfır olması Schwarzschild-de Sitter çözümünü verir. Bu sonuç Weyl yerçekiminde bir boşluk çözümü olarak çıkmasına karşın Einstein kuramında eylem içerisinde bir kozmolojik sabitin varlığını gerektirir. Gözlemlerle uyumlu olabilmesi için küçük mesafelerde $1/r$ teriminin baskın olması gerektiği açıktır. Bu yüzden γ 'nın yeterince küçük olması durumunda çözüm güneş sistemi testleriyle uyumlu olacaktır. Buna karşın büyük mesafelerde bu sefer γ terimi etkisini göstermelidir. Böylece bu terim galaksilerin merkezlerinden dışarıya gittikçe yıldızların dönme hızlarında standart kuramdan beklenenin aksine ortaya çıkan düzleşme eğiliminin açıklanmasında etkili olabilir. Newton potansiyeline ilave olarak ortaya çıkan doğrusal bir terimin, galaksinin disk bölgesindeki iç dinamiklerle beraber, dönme eğrilerindeki düzleşmeyi açıklama potansiyelini Mannheim ve Kazanas'ın yaptıkları çalışma üzerinden inceleyeceğiz [18, 57]. Ancak galaksi dönme eğrilerinin analizine geçmeden önce Weyl kuramının bir iç çözümünün nasıl yapılacağı, iç ve dış çözümlerin örtüşmesi problemini ve en önemlisi de çözümlerin bir limit durum olarak Schwarzschild çözümünü içerip içermediğini analiz edeceğiz. Güneş sisteminde geçerli bir kuram olabilmesi için Schwarzschild çözümünü kapsamalı ve ayrıca kütleli ve kütleli parçacıkların yerçekim alanındaki davranışını açıklayabilmelidir. Konformal simetri, ek-B'de gösterdiğimiz gibi, kütleli parçacıkların jeodeziklerini değiştirdiğinden ötürü jeodezik denkleminin konformal değişmez kalacak şekilde yeniden ifade edilmesi gerekmektedir. Konformal yerçekimi kuramında kütleli parçacık ve hareketi problemini çözebilmek amacıyla Mannheim dinamik kütle üretim mekanizmasını önermiştir [57, 58]. Şimdi bu bahsettiğimiz özellikleri sırasıyla inceleyelim.

Küresel simetrik ve statik madde dağılımında hidrostatik dengeye ulaşmış bir yıldızın iç yapısını (2.12) alan denklemlerinin bir çözümüyle belirleyebiliriz. Bach tensörünün bileşenlerinin faydalı bir özelliği, denklem sistemini son derece basit bir denkleme dönüştürür. Alan denkleminin radyal ve zamansal bileşenleri

$$B_r^r = \frac{f' f'''}{6} - \frac{f''^2}{12} - \frac{1}{3r}(f f'''' - f' f''') - \frac{1}{3r^2}(f f'' + f'^2) + \frac{2}{3r^2} f f' - \frac{f^2}{3r^4} + \frac{1}{3r^4} = \frac{1}{4\alpha} T_r^r \quad (2.57)$$

$$B_0^0 = \frac{f' f''''}{3} - \frac{f''^2}{12} + \frac{f' f'''}{6} + \frac{f f''''}{r} + \frac{f' f''}{3r} - \frac{f f''}{3r^2} - \frac{f'^2}{3r^2} + \frac{f f'}{3r^3} - \frac{f^2}{3r^4} + \frac{1}{3r^4} = \frac{1}{4\alpha} T_0^0 \quad (2.58)$$

formundadır. İki denklemin farkını alırsak

$$\nabla^4 f(r) = f'''' + \frac{4f'''}{r} = \frac{1}{4\alpha} \frac{3}{f(r)} (T_0^0 - T_r^r) \quad (2.59)$$

şeklinde oldukça basit bir denkleme ulaşılır. Sol tarafta gösterildiği gibi ∇^4 , 2. mertebe laplasyenin radyal bileşenine karşılık gelir. Eğer sağ taraftaki $f(r)$ fonksiyonu görmezden gelinirse, Mannheim eşitliğin sağ tarafını bir kaynak terimi gibi ele alıp bir iç çözüm buluyor [57]. İlginç bir şekilde bu iç çözüm, yukarıda gösterdiğimiz dış çözümle son derece uyumlu olmaktadır. Ek-E'de detaylı olarak çıkarılmış olan n . mertebe laplasyenin küresel simetrik bir fonksiyon için olan çözümünde $n = 2$ alırsak 4. mertebe Poisson denklemi için aşağıdaki çözümü buluruz:

$$f(r) = -\frac{1}{12r} \int_0^\infty dr' r' h(r') (|r + r'|^3 - |r - r'|^3) \quad (2.60)$$

Burada $h(r) = \frac{1}{4\alpha} \frac{3}{f(r)} (T_0^0 - T_r^r)$ kaynak terimine karşılık geliyor. Bu çözüme homojen kısımdan gelecek olan çözümleri de eklersek, R yarıçaplı bir küresel dağılımda,

$$\begin{aligned} f(r > R) &= -\frac{1}{6r} \int_0^R dr' r'^4 h(r') - \frac{r}{2} \int_0^R dr' r'^2 h(r') + w - kr^2 \\ f(r < R) &= -\frac{1}{6r} \int_0^r dr' r'^4 h(r') - \frac{r}{2} \int_0^r dr' r'^2 h(r') \\ &\quad - \frac{r^2}{6} \int_r^R dr' r' h(r') - \frac{1}{2} \int_r^R dr' r'^3 h(r') + w - kr^2 \end{aligned} \quad (2.61)$$

iç ve dış çözümleri yazılır. Burada dış çözümle uyumu sağlamak amacıyla Poisson denkleminin homojen çözümlerinden yalnızca sabit ve r^2 terimi alınmıştır. R yarıçaplı küre üzerinde dış ve iç çözümler karşılaştırılırsa

$$w = 1 - 3\beta\gamma, \quad \beta(2 - 3\beta\gamma) = \frac{1}{6} \int_0^R dr' r'^4 h(r'), \quad \gamma = -\frac{1}{2} \int_0^R dr' r'^2 h(r'). \quad (2.62)$$

eşitlikleri bulunur. Buradan hareketle madde dağılımının sonlu bölgeye kısıtlanmadığı durumlara karşılık gelecek olan en genel çözüm

$$f(r) = -\frac{1}{6r} \int_0^r dr' r'^4 h(r') - \frac{r}{2} \int_0^r dr' r'^2 h(r') - \frac{r^2}{6} \int_r^\infty dr' r' h(r') - \frac{1}{2} \int_r^\infty dr' r'^3 h(r') + \hat{f}(r) \quad (2.63)$$

şeklinde yazılır. Çözümdeki son terim $\nabla^4 \hat{f}(r) = 0$ homojen denklemini sağlayan çözümlere karşılık gelir. Böylece madde dağılımının momentleriyle dış çözüm parametrelerini birbirine bağlayan bu ilişkilerle iki çözümü örtüştürmek mümkün olur [57]. $h(r)$ kaynak terimi $f(r)$ metrik fonksiyonunu içerdiğinden ötürü yukarıdaki çözümler aslında doğrusal bir denklemin çözümü olmaktan çok nonlinear bir integral denkleme karşılık gelir. $f(r) \approx 1$ olduğu durumlarda çözümler doğru bir iç çözüm olarak görülebilir. Fakat diğer durumlarda bu çözümler gerçek anlamda bir iç çözüm olmaktan uzaktırlar. Denklemleri analitik olarak çözmenin mümkün olmadığı bu durumda numerik yöntemlerle çözüm üretip dış çözüm ile karşılaştırma yapılmalıdır. İç ve dış çözümlerin örtüşmesi tartışmasına geçmeden önce Mannheim'in önerdiği dinamik kütle mekanizmasını açıklayalım.

2.2.2 Dinamik Kütle Üretimi

Konformal simetrik bir kuramın güneş sistemi ölçeğinde başarılı olabilmesi için sahip olması gereken önemli özelliklerden biri kütleli parçacıkların hareketini açıklayabilmesidir. Konformal dönüşümler kütleli parçacığın uzay zamandaki jeodezik yörüngesini değiştirir. Dolayısıyla jeodezik denkleminin konformal dönüşümler altında değişmeden kalacak şekilde modifiye edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla P. Mannheim, temel parçacıkların Standart Model'indeki gibi parçacıkların bir skaler alan mekanizmasıyla kütleli hale geçmesini önermiştir [58]. $S(x)$ ile göstereceğimiz bir skaler alanın, parçacıklara karşılık gelen kütleli alanlarla olan etkileşimi, h boyutsuz bir çiftlenim sabiti olmak üzere, $m = h S(x)$ kütlelerini üretecektir. Skaler alanın $S(x) = S_0$ vakum değerini almasıyla eylemin konformal simetrisi kırılacak ve parçacıklar sahip oldukları kütle değerini kazanacaklardır.

Parçacığın hareketi

$$I = -h \int S(x) d\tau \quad (2.64)$$

eylemiyle belirlenir. Burada τ parçacığın durgun çerçevesindeki öz zamanı temsil eder:

$-d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$. Skaler alanın $S'(x) = \Omega^{-1}(x) S(x)$ konformal dönüşümü $g'_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}$ ile birlikte eylemi değişmez bırakırlar. Yerçekim alanında serbestçe hareket eden tanecikler I eyleminin değerini ekstremum yapacak şekilde bir uzay-zaman yörüngesini takip ederler. Yörüngenin $x^\mu(\tau)$ koordinatları üzerinden bir varyasyon alınırsa

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\rho}{d\tau} = -\frac{\partial_\mu S}{S} \left(g^{\mu\nu} + \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) \quad (2.65)$$

jeodezik denklemi bulunur. Christoffel sembolü $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$ 'nın konformal dönüşümünden gelecek olan ilave terim skaler alanın ortaya çıkardığı terim tarafından yok edilir ve böylece konformal dönüşümler altında değişmez kalan bir kütleli parçacık jeodezik denklemi yazılmış olur. Genel olarak kütleli parçacıkların yukarıdaki denklemin belirlediği konformal yörüngeler üzerinde hareket edeceği anlaşılır. Fakat parçacıklar skaler alanın $S = S_0$ vakum değerinden kütle kazansa bile aynı denklem uyarınca hareket edeceği ve üstelik denklemin normal jeodezik denklemine dönüşeceği görülür.

Kütleli parçacıkları bir $\Psi(x)$ fermiyon alanıyla temsil ettiğimizi düşünelim. Bu durumda $S(x)$ skaler alanının fermiyon alanına kütle kazandırmasına karşılık gelecek bir eylem

$$I_M = - \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} \nabla^\mu S \nabla_\mu S + \lambda S^4 - \frac{S^2}{12} R + i \bar{\Psi} \gamma^\mu(x) [\partial_\mu + \Gamma_\mu(x)] \Psi - h S \bar{\Psi} \Psi \right] \quad (2.66)$$

şeklinde verilir [58]. Eylemin ilk terimi eğri uzayda skaler alanın kinetik terimidir. Yerçekimiyle etkileşen böylesi bir skaler alan eyleminin konformal simetrik olabilmesi için Ricci skaleriyle çiftlenen üçüncü bir terimin varlığı gereklidir. Eylemde dördüncü mertebe öz etkileşim teriminin katsayısı λ boyutsuzdur. $\Gamma_\mu(x)$, fermiyonik kısmın yerel dönüşümler altında dönüşüm özelliklerini koruması için ortaya çıkan spin bağlantı katsayısıdır ve

$$\Gamma_\mu(x) = \frac{1}{8} \hat{\Gamma}_{\mu\rho\nu}(x) [\gamma^\rho(x), \gamma^\nu(x)] \quad (2.67)$$

ile verilir [59]. Burada $\hat{\Gamma}_{\mu\rho\nu}$, ek-C'de tanımladığımız dönme bağlantı katsayılarından başka birşey değildir. Eğri uzayda Dirac matrisleri yerel olarak bir tetra baz üzerinde

$$\gamma^\mu(x) = e_\nu^\mu(x) \gamma^\nu \quad (2.68)$$

şeklinde tanımlanır. γ^ν Minkowski uzayındaki Dirac matrisleridir. Konformal dönüşümler altında, tanım ifadeleri kullanılıp hesap yapılırsa, spin katsayılarının

$$\Gamma'_\mu = \Gamma_\mu + \frac{1}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \Phi^\nu \quad (2.69)$$

şeklinde dönüştüğü bulunur [60]. Burada $\Phi' = \nabla^\nu \ln \Omega$ dır. Bununla birlikte fermiyon alanının $\Psi' = \Omega^{-3/2}(x)\Psi$ dönüşümleri eylem içerisindeki Dirac lagranjiyeninin konformal değişmez kalmasını sağlar. Eylemdeki son terim fermiyonun skaler alan etkileşmesiyle kazandığı kütle terimidir. Her bir alana göre varyasyon alınırsa madde alanlarının dinamiğini tanımlayan

$$i\gamma^\mu(x)[\partial_\mu + \Gamma_\mu(x)]\Psi - hS \Psi = 0, \quad (2.70)$$

$$\nabla^\mu \nabla_\mu S + \frac{S}{6}R - 4\lambda S^3 + h\bar{\Psi}\Psi = 0, \quad (2.71)$$

denklemleri bulunur. Öte yandan eylemin metriğe göre varyasyonu alınarak bu alanların yerçekimine yapacakları katkıyı veren (2.15) konformal enerji-momentum tensörü,

$$T_{\mu\nu} = i\bar{\Psi}\gamma_\mu(x)[\partial_\nu + \Gamma_\nu(x)]\Psi + \frac{2}{3}\nabla_\mu S \nabla_\nu S - \frac{1}{6}g_{\mu\nu} \nabla^\rho S \nabla_\rho S - \frac{S}{3}\nabla_\mu \nabla_\nu S + \frac{1}{3}g_{\mu\nu} S \nabla_\rho \nabla^\rho S - \frac{S^2}{6}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) - g_{\mu\nu}\lambda S^4, \quad (2.72)$$

olarak bulunur. Konformal simetrinin gerektirdiği korunumlu olma ve izin sıfır oluşu, alan denklemleri kullanılarak gösterilebilir. Skaler alan yukarıda verilen alan denklemlerinde görüldüğü gibi yerçekimi ve fermiyon alanıyla, uzay-zamanda etkileşen bir dinamiğe sahiptir. Fakat $S(x) = \Omega^{-1}(x)S_0$ konformal dönüşümüyle, skaler alanın değerini her zaman sıfırdan farklı bir vakum değerine dönüştürmek mümkün olur. Böylece skaler alan vakum değerine indiğinde fermiyon alanına $m = hS_0$ kütle kazandırır. Bunun sonucu olarak da denklemlerin ve eylemin konformal simetrisi kırılır. Bu durumda

$$T_{\mu\nu} = i\bar{\Psi}\gamma_\mu(x)[\partial_\nu + \Gamma_\nu(x)]\Psi - \frac{hS_0}{4}g_{\mu\nu}\bar{\Psi}\Psi - \frac{S_0^2}{6}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R), \quad (2.73)$$

enerji-momentum tensörünün izsiz olduğu açıkça gözükecek şekilde yazılır. Böylece sıfırdan farklı bir kütleyle sahip fermiyon alanıyla birlikte izin sıfır olması sağlanmış olur. Enerji-momentum tensörünün ilk terimi eğri uzayda kinetik enerjiye karşılık gelir. Bu kısım bir mükemmel akışkan gibi

$$T_{\mu\nu}^k = i\bar{\Psi}\gamma_\mu(x)[\partial_\nu + \Gamma_\nu(x)]\Psi = (\rho_0 + p_0)U_\mu U_\nu + p_0 g_{\mu\nu} \quad (2.74)$$

yazılabilir. Enerji-momentum tensörün fermiyonik kısmının izin sıfır olmasını sağlayan kütle terimi de

$$hS_0\bar{\Psi}\Psi = 3p_0 - \rho_0 \quad (2.75)$$

olarak yazılacaktır. O zaman (2.72) ifadesi, ρ_0 enerji yoğunluğu ve p_0 basıncına karşılık gelen bir mükemmel akışkana karşılık gelecek şekilde

$$T_{\mu\nu} = (\rho_0 + p_0)(U_\mu U_\nu + \frac{1}{4}g_{\mu\nu}) - \frac{S_0^2}{6}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R), \quad (2.76)$$

halinde yazılır. Yukarıda yazdığımız klasik fermiyonik alana karşılık gelen enerji-momentum tensörü, izsiz olma özelliğini düz uzay-zamanda alanlar kuantize olduğunda da korumaya devam eder. Kuantize Dirac alanının, \vec{k} momentumlu ve $E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$ enerjili serbest dalga çözümleri üzerinden, enerji-momentum tensör bileşenlerinin $|k\rangle$ kuantum durumları üzerinden hesaplanacak bir ortalama değeri

$$\begin{aligned} \langle k | \int d^3x T_{00} | k \rangle &= E_k - \frac{m^2}{4E_k} \\ \langle k | \int d^3x T_i^i | k \rangle &= \frac{k^2}{E_k} + \frac{3m^2}{4E_k} \end{aligned} \quad (2.77)$$

şeklinde bulunur. $\langle \int d^3x T_{00} \rangle$ enerji yoğunluğunun kütle teriminden gelen vakum katkısıyla azaldığı görülür. Benzer şekilde son satırda hesaplanan kinematik basıncın skaler alanın fermiyonik alanla olan etkileşimi sonucu arttığı görülür. Bununla beraber enerji-momentum tensörünün izi yukarıdaki iki terimin toplamına karşılık gelir ve sıfır olduğu görülür. Böylece, bu önemli özellik kuantizasyon sonrasında da korunur. (2.72) ifadesiyle verilen enerji-momentum tensörünün kovaryant korunum özelliği kütle kazanıldığı $S(x) = S_0$ ayarında da sağlanır. Bu ayarda sıfırdan farklı olan son iki terim, Einstein tensörü ve metrik olduğu için $T_{\mu\nu}^k$ tensörü de kovaryant olarak korunur: $\nabla_\mu T^{k\mu}_\nu = 0$. Bunun sonucu olarak normal mükemmel akışkanın sahip olduğu korunum bağıntısı

$$(\rho_0 + p_0)U^\mu \nabla_\mu U^\nu + \partial_\mu p_0 (g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu) = 0 \quad (2.78)$$

hala geçerlidir. Kütle üretim mekanizması akışkanın termodinamik özelliklerini değiştirmemiş olur. Madde alan denklemlerinden de gördüğümüz fermiyonik alanın skaler alanla olan etkileşimi, alana kütle kazandıran ayar seçildiğinde ortadan kalkar. Konformal jeodezik denklemi (2.65)'den de görüleceği üzere, bu ayarda kütleli parçacıklar skaler alandan etkilenmeden davranmaya devam eder. Böylelikle dinamik kütle üretim mekanizması kütleli parçacık fenomenolojisini, konformal simetrik bir kuram içinde açıklama imkanı sunacaktır. Şimdi de bu kısmı sonlandırmadan önce ideal akışkanın uzay-zamandaki hareketinin ve kütleli parçacıkların yerçekimi alanında izleyecekleri konformal jeodeziklerin enerji-momentum korunumu üzerinden nasıl çıkarıldığını

gösterelim. (2.72) ifadesinin skaler kısmının diverjansını alır ve Ricci özdeşliğini kullanırsak kolaylıkla

$$\begin{aligned} \nabla_\nu \left[\frac{2}{3} \nabla^\mu S \nabla^\nu S - \frac{1}{6} g^{\mu\nu} \nabla^\rho S \nabla_\rho S - \frac{S}{3} \nabla^\mu \nabla^\nu S + \frac{1}{3} g^{\mu\nu} S \nabla_\rho \nabla^\rho S \right. \\ \left. - \frac{S^2}{6} (R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R) - g^{\mu\nu} \lambda S^4 \right] = S^\mu (\nabla^\alpha \nabla_\alpha S + \frac{S}{6} R - 4\lambda S^3), \end{aligned} \quad (2.79)$$

yazılır. Eşitliğin sağ tarafı skaler alanın (2.71) denklemi kullanılarak $-(\nabla^\mu S) h \bar{\Psi} \Psi$ haline gelir. Böylece, (2.72) ifadesinden, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ korunum denklemi

$$\nabla_\nu [(\rho + p) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu}] = \nabla^\mu S h \bar{\Psi} \Psi, \quad (2.80)$$

olarak yazılır. Fermiyon alan denklemi mükemmel akışkanın izine karşılık geldiğinden, sağ taraf ideal akışkanın izi olarak yazılabilir:

$$\nabla_\nu [(\rho + p) U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu}] = \frac{\nabla^\mu S}{S} (3p - \rho). \quad (2.81)$$

Bu ifade U_μ ile çarpılıp, $U_\mu U^\mu = -1$ normalizasyonu ile birlikte

$$\nabla_\nu [(\rho + p) U^\nu] = U_\mu \left[\frac{\nabla^\mu S}{S} (3p - \rho) - \nabla^\mu p \right] \quad (2.82)$$

ifadesine ulaşılır. Bunu bir önceki eşitliğe yerleştirir ve düzenlersek, akışkan parçacıklarının hareketini tanımlayacak olan

$$(\rho + p) U^\mu \nabla_\mu U^\nu = \left[\frac{\nabla^\mu S}{S} (3p - \rho) - \nabla_\mu p \right] (g^{\mu\nu} + U^\mu U^\nu), \quad (2.83)$$

denklemi elde edilir. Özel bir durum olarak basıncın sıfır olduğu toz halini dikkate alırsak, bu son denklemin (2.65) konformal jeodezik denklemine dönüştüğü görülür. Buradan da böyle bir madde dağılımında taneciklerin konformal jeodezikler boyunca hareket ettiği anlaşılır. Sonuç olarak enerji-momentum korunumunun, akışkan dinamiğini yani yoğunluk ve basıncın değişimini vermenin yanında, bu akışkana ait kütleli parçacıkların jeodezik hareketini de tanımladığı görülür. Konformal simetri kırılıp S_0 ayarına geçildiğinde de standart kütleli parçacık jeodeziği elde edilir.

2.2.3 Weyl Yerçekiminin Schwarzschild Limiti

Önceki kısımlarda açıkladığımız Mannheim'ın çözümleriyle birlikte Weyl kuramının başarılı olabilmesi için zayıf yerçekim alanında Newton potansiyeliyle ve Schwarzschild çözümleriyle örtüşmesi gerekir. Bu noktada birçok kişinin ortaya koymuş olduğu

itirazları kısaca özetleyeceğiz. Yerçekimi kaynağından yeterince uzakta zayıf bir alan içinde yavaşça hareket eden bir test parçacığının maruz kalacağı kuvvetin newtonyen olmasını bekleriz. Öte yandan Weyl kuramının (2.61) çözümleri, $f(r) \approx 1 + 2\phi(r)$ ve $\phi \ll 1$ zayıf alan şartlarında, $r \ll 1/\gamma$ mesafeleri için,

$$F(r > R) = -\frac{d\phi(r > R)}{dr} = -\frac{1}{16\alpha} \frac{1}{r^2} \int_0^R dr' r'^4 \rho(r') \quad (2.84)$$

kuvvetini verir. Burada, basıncın $p = 0$ olduğu durum için, $h(r) \approx \frac{3}{4\alpha} \rho(r)$ alınmıştır. Bu tartışmada kozmolojik katkıları $k = 0$ olarak yok sayıyoruz. Bu sonucu newtonyen kuvvetle karşılaştırırsak,

$$-\frac{MG}{r^2} = -\frac{G}{r^2 c^2} \int_0^R dr' 4\pi r'^2 \rho(r'), \quad (2.85)$$

ifadesinden görüldüğü gibi yerçekimi kuvveti kaynağın yalnızca kütle değerine bağlıken konformal yerçekimi kuramı kütle rolü oynayacak β parametresini,

$$\beta = -\frac{1}{16\alpha} \int_0^R dr' r'^4 \rho(r'), \quad (2.86)$$

madde dağılımının dördüncü momentiyle ilişkilendirmektedir. Bu ise kuvvet üzerinde yalnızca kütle değil aynı zamanda dağılımın da etkili olduğunu gösterir. Böylece bu sonuç aynı kütle miktarına sahip iki kaynağın, farklı dağılım değerine sahip olmaları halinde, iki farklı kuvvet üreteceği sonucuna yol açar. Böyle bir farklılığın bulunma deneyleriyle (Cavendish deneyleri) tespit edilebilmesi gerekir [34]. Öte yandan eğer yoğunluk sabit ise dış potansiyel çözümde doğrusal terimin katsayısı $\gamma = -1/2 \int_0^R dr' r'^2 \rho(r')$ negatif çıkacaktır. Bu ise Mannheim ve O'Brien'in 141 galaksi üzerinde yaptıkları [61–64] galaksi dönme eğrisi çalışmaları sonucu buldukları evrensel γ parametresinin pozitifliğiyle çelişmektedir [34]. Mannheim bu itirazlara karşı [65] makalesinde, ikinci mertebe Poisson denkleminde mümkün olduğu gibi yoğunluk dağılımının sabit ya da Dirac delta fonksiyonu gibi alınamayacağını öne sürüyor. Eğer sabit alınırsa kütle gibi davranan β ile γ arasında R yarıçaplı bir makroskopik bir dağılım için $\gamma = -\frac{6}{R^2} \beta$ ilişkisi bulunur. Bu büyük bir negatif doğrusal potansiyele yol açacaktır. Dirac delta alınması durumunda da $\beta = 0$ olacaktır. Mannheim her ikisinin de konformal yerçekiminde geçersiz olduğunu öne sürmektedir. Cavendish deneyi ile uyumlu olabilmesi için, deney limitlerinin çok çok altında protonun potansiyelini

$$V_p = -\frac{\beta_p}{r} + \gamma_p \frac{r}{2} \quad (2.87)$$

alıp, dağılımdaki toplam N parçacık üzerinden net potansiyelin $NV_p = -\frac{N\beta_p}{r} + N\gamma_p\frac{r}{2}$ olarak verileceğini ifade etmektedir. Bu potansiyel, iç çözüme karşılık gelir. Galaksiye ait $\beta^* = N\beta_p$ ve $\gamma^* = N\gamma_p$, data fit değerlerinden γ_p ve β_p bulunabilir. Üstelik bu potansiyel ile birlikte ∇^4 poisson denklemi,

$$\nabla^4 f(r) = -8\pi \gamma \delta^3(\vec{r}) + 8\pi\beta\nabla^2\delta^3(\vec{r}) \quad (2.88)$$

şeklinde bir yoğunluk profili vereceği ortaya çıkar. Buradan kaynağın ya tekil ya da yaygın olması gerektiği sonucuna varılır. Böylece bir madde dağılımında, her bir mikroskobik kaynağın potansiyelleri toplamı newtonyen potansiyele eklenen doğrusal bir potansiyel oluşturacak. Kısa mesafeler, $r \ll \frac{1}{\gamma}$, içerisinde doğrusal terim ihmal edileceğinden Newton potansiyeli elde edilmiş olacaktır. Sonuç olarak doğrusal terimin yaratacağı sapmayı madde dağılımı içinde değil, ancak galaktik mesafelerde gözlemlemek mümkün olacaktır [65]. Fakat Perlick ve Xu yaptıkları [35] çalışmalarında bu durumla çelişen bir sonuca varmışlardır. Çalışmada küresel simetrik bir dağılımda, çözümün yıldızın merkezinde düzgün, yani $r \rightarrow 0, f(r) \rightarrow 1$ olması ve zayıf enerji koşulunu sağlaması durumunu dikkate almışlardır. Zayıf enerji koşulu kütleli parçacıkların durgun olduğu çerçevede enerji yoğunluğunun pozitif olması, yani $U_\mu U^\mu < 0$ olursa ancak ve ancak $T^{\mu\nu}U_\mu U_\nu \geq 0$ olmasıdır [66]. Bu şartlar altında Mannheim'ın verdiği iç ve dış çözümlerin örtüşmesi halinde yıldızın dışında doğrusal terim newtonyen terimden her zaman büyük olacaktır:

$$|\gamma r| \geq \left| \frac{\beta}{r}(2 - 3\beta\gamma) \right|. \quad (2.89)$$

Yani dış çözüm, bir yıldız çözümü olarak, yukarıdaki şartlar ihlal edilmedikçe, hiçbir zaman Schwarzschild çözümünü kapsamayacaktır. Ancak yıldızın içinde enerji yoğunluğunun negatif olması ya da merkezinde bir tekiliğin var olması halinde çözümlerin mevcut gözlemlerle uyumlu olacağı sonucuna varılır. Fakat bunlar fiziksel olarak kabul edilebilir durumlar değildir [35]. Öte yandan bu çalışmadan kısa bir süre sonra J. Wood ve W. Moreau tarafından yapılan çalışmada Schwarzschild çözümünüyle örtüşen bir yıldız iç çözümünü sayısal olarak bulmuşlardır [67, 68]. Yaptıkları çalışmada madde alanlarına karşılık gelen fermiyon alanı güneşin iç kısmına hapsolmuş ve enerji yoğunluğu $\rho(r)$, basıncı $p(r)$ olan bir ideal akışkan olarak betimlenmiştir:

$$i\bar{\Psi}\gamma_\mu(x)[\partial_\nu + \Gamma_\nu(x)]\Psi \rightarrow (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}. \quad (2.90)$$

Buna karşılık $S(x)$ skaler alanı yıldızın hem içinde hem de dışında sıfırdan farklı olup dinamik bir şekilde parçacıklara kütle verir. Böylece enerji-momentum tensörü

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} + \frac{2}{3}\nabla_\mu S \nabla_\nu S - \frac{1}{6}g_{\mu\nu} \nabla^\rho S \nabla_\rho S - \frac{S}{3}\nabla_\mu \nabla_\nu S + \frac{1}{3}g_{\mu\nu} S \nabla_\rho \nabla^\rho S - \frac{S^2}{6}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R) - g_{\mu\nu} \lambda S^4, \quad (2.91)$$

olur. Konformal Simetri kırılıp parçacıklar kütle kazandığında bile yıldızın dışı tamamen boş bir vakum ortamı olmamakta ve yukarıdaki ifadede son iki terim enerji-momentum tensörüne katkı yapmaktadır:

$$T_{\mu\nu} = -\frac{S_0^2}{6}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R) - g_{\mu\nu} \lambda S_0^4. \quad (2.92)$$

Dolayısıyla bu katkıyı dikkate almamak iç ve dış çözüm üzerinde eksik bir değerlendirme yapmak olacaktır. Joshua Wood çalışmasında simetri kırılmadan önceki konformal simetrik haldeki

$$B_{\mu\nu} = \frac{1}{4\alpha} T_{\mu\nu} \rightarrow \nabla^4 f(r) = \frac{1}{4\alpha} \frac{3}{f(r)} (T_0^0 - T_r^r), \quad (2.93)$$

$$\nabla^\mu \nabla_\mu S + \frac{S}{6} R - 4\lambda S^3 + \frac{3p - \rho}{S} = 0, \quad (2.94)$$

alan denklemlerini ve enerji-momentum korunumundan gelen

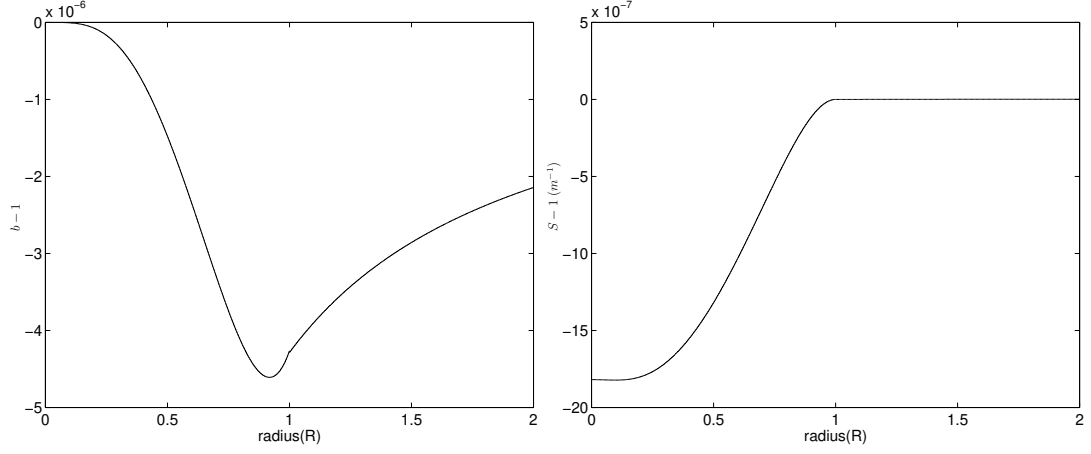
$$\nabla_\mu [(\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}] = \frac{\nabla^\nu S}{S} (3p - \rho), \quad (2.95)$$

denklemini dikkate almışlardır. Verilecek olan belirli sınır koşullarında yukarıdaki üç denklemi çözmek, madde alanlarının $\rho(r)$ ve $p(r)$ ile verilen iç dinamiğini, $S(r)$ skaler alan ile olan etkileşmesini ve bunların ortaya çıkardığı yerçekim alanını belirlemek anlamına gelecektir. Küresel simetrik ve statik haldeki yıldızın iç yapısındaki maddeyi

$$p(r) = K\rho(r)^{1+1/n} \quad (2.96)$$

hal denklemine sahip politrop bir akışkan olarak alıp denklem sistemini çözmek için gerekli sınır koşullarını da aşağıdaki gibi almışlardır: R yarıçaplı yıldızın yüzeyi üzerinde skaler alanın değeri $S(R) = 1 \text{ m}^{-1}$, metrik fonksiyonları da yıldızın merkezinde, iç çözümün düzgünlüğünü sağlamak amacıyla,

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \quad (2.97)$$



Şekil 2.1: Sol grafik: Konformal yerçekim kuramında, R yarı çaplı bir yıldızın yüzeyi üzerinde iç ve dış çözümlerin örtüşmesi gösteriliyor . Merkezde metrik fonksiyonun değeri $b(0) = 1$ alınmıştır. Sağ grafik: Yıldızın yüzeyi üzerinde değeri $S(R) = 1$ olan skaler alanın iç ve dış bölgedeki değerleri gösteriliyor [67,68]

değerlerine sahip olmalı ve yıldızın yüzeyinde dış çözümlerle de örtüşüyor olmalıdır. Öte yandan skaler alanın türevi, güneş sisteminde Pioneer uzay aracının yaklaşık 40 AB mesafede gözlenmiş fazlalık ivmesine karşılık gelecek şekilde

$$\left. \frac{dS}{dr} \right|_{r=40AB} \approx 10^{-24} \text{ m}^{-2}, \quad (2.98)$$

olarak alınmıştır. Ayrıca skaler alan denkleminde görünen çiftlenim sabitini, skaler alanın değeri asimptotik olarak sabit kalacak şekilde $\lambda < 10^{-45}$ aldıklarında, $n = 3$ tipinde bir politrop akışkan için, $\alpha \approx 10^{15}$ değerinde Şekil 2.1 de gösterdiğimiz sayısal çözümleri bulmuşlardır.

Görüldüğü gibi yıldızın yüzeyi üzerinde iç ve dış çözümler uyumlu olurken yıldızın dışında skaler alanın değeri neredeyse sabit kalmaktadır. Bu çalışmada ayrıca bir test parçacığının radyal doğrultuda newtonyen yerçekimine ilave fazlalık bir ivme hissedeceği ortaya çıkarılmıştır. Konformal jeodezik denklemin analiziyle elde edilen, skaler alanın varlığı sonucu ortaya çıkan bu fazlalık ivme değerinin Pioneer anomalisini açıklayacağı da öne sürülmüştür. Detaylı inceleme için [67, 68] kaynaklarına bakılabilir.

E. Flanagan, Weyl yerçekimi kuramının zayıf alan limitiyle ilgili yapmış olduğu [36] çalışmasında güneş sistemi testlerini geçecek şekilde newton potansiyelini üretmediği sonucuna ulaşmıştır. Çalışmada, dinamik kütle üretim mekanizmasıyla birlikte Weyl yerçekimi kuramı, zayıf alan limitine karşılık gelen,

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi(\vec{x}))dt^2 + (1 - 2\Psi(\vec{x}))\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (2.99)$$

metriği dikkate alındığında, alan denklemlerinin

$$\Phi = \frac{4}{3}\bar{\Phi} + \frac{1}{3}\Phi_N, \quad \Psi = \frac{2}{3}\bar{\Phi} - \frac{1}{3}\Phi_N \quad (2.100)$$

çözümlerini verdiği görülür. Burada $(\Phi, \Psi) \ll 1$ çok küçük olan potansiyel fonksiyonlarıdır. Φ_N , newton potansiyeline karşılık gelir ve verilmiş bir ρ kütle yoğunluğu için $\nabla^2\Phi_N = 4\pi G\rho$ poisson denklemini sağlar. Efektif yerçekim sabiti, skaler alanın vakum değeri cinsinden $G = \frac{1}{8\pi m_p^2}$, $m_p^2 = \frac{S_0^2}{6}$ ifadesiyle verilir. $\bar{\Phi}$ potansiyelinin

$$8\alpha\nabla^4\bar{\Phi} - 2m_p^2\nabla^2\bar{\Phi} = \rho \quad (2.101)$$

denklemini sağladığı görülür. Kütleleri ve boyutları sırayla yaklaşık olarak M ve L olan bir yerçekim kaynağı dikkate alındığında, kütlelen ortaya çıkan boyutsuz ölçeğin, boyutsuz mesafe ölçeğine yakın ya da büyük olması durumunda $\Phi, \Psi \ll 1$ doğrusallaştırma yaklaşımı çöker. Bu durumda doğrusal olmayan alan denklemlerinin newtonyen fenomenolojiyi üretemeyeceği sonucuna varılmıştır. Öte yandan kütle ölçeği, mesafe ölçeğinden çok küçük olduğunda kaynağın yakınında yukarıdaki denklemde ikinci mertebe terim baskın olacak fakat sonuçta ters işaretli bir Poisson denklemi elde edilecektir. Bu ise yerçekiminin çekici değil itici davranmasına yol açar. Kaynağın uzağında ise yukarıdaki denklemin tam çözümü üzerinde yapılacak mesafe analiziyle çözümün

$$\Phi = \frac{1}{3}\Phi_N, \quad \Psi = -\frac{1}{3}\Phi_N, \quad (2.102)$$

olacağı bulunmuştur. Halbuki bu çözüm Newton potansiyelini doğru vermekle birlikte bu sefer metriğin

$$ds^2 = (1 + \frac{2}{3}\Phi_N)[-dt^2 + \delta_{ij}dx^i dx^j], \quad (2.103)$$

konformal düz olmasına yol açar. Konformal düz uzay-zamanda hiçbir şekilde yerçekim mercekle etkisi ortaya çıkmayacağı için bu çözüm güneş sistemi testlerini geçemez. Dolayısıyla dikkate alınan bu üç durumda da fiziksel olarak geçerli olabilecek bir çözüm üretilemediği sonucuna varılır [36]. Öte taraftan bu çalışmada dikkate alınan metriğin, standart küresel simetrik bir metrik formunda olmak yerine, izotropik koordinatlarda seçilmiş olduğuna dikkat edilmesi gerekmektedir.

Yukarıda ulaşılan sonucun aksine Mannheim'ın [69] çalışmasına göre metrik formundaki tercih değişikliğinin ulaşılabilecek sonucu değiştirdiği görülüyor. Galaksi dönme

eğrilerinin analizinden [61–64] elde edilen parametrelerle uyumlu olacak şekilde, belirli mesafe rejimlerinde newtonyen potansiyel çözümüne sahip olduğu görülmektedir. Bu çalışmayı anahatlarıyla anlatıp bu kısmı sonlandıracağız.

Yerçekim potansiyelinin zayıf olduğu küresel simetrik ve statik uzay-zaman metriği, $a(r), b(r) \ll 1$ olmak üzere,

$$ds^2 = -[1 + b(r)]dt^2 + [1 + a(r)]dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.104)$$

ile ifade edilir. Parçacıkların yavaş hareket etmesi ($p \approx 0$) şartı altında ve kütle kazandığı S_0 ayarında, (2.72) ifadesindeki son terimle kendini gösteren kozmik etkileri ihmal edersek, buna karşılık gelecek enerji-momentum tensörü

$$T_{\mu\nu} = \frac{\rho}{c}U_\mu U_\nu - \frac{S_0^2}{6}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) \quad (2.105)$$

olur. $4\alpha B_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$ yerçekim alan denklemlerini doğrusallaştırdıktan sonra bu metrik formu için, $3Mc^2 S_0^2 \ll 32\pi\rho\alpha r$ şartı altında,

$$a(r) = -\frac{3Mc}{32\pi\alpha}r - \frac{3M_4c}{32\pi\alpha r}, \quad b(r) = \frac{3Mc}{32\pi\alpha}r + \frac{3M_4c}{32\pi\alpha r} \quad (2.106)$$

çözümü elde edilir. Burada yoğunluğun ikinci ve dördüncü momentleri sırasıyla $Mc^2 = 4\pi \int_0^R dr' r'^2 \rho(r')$ ve $M_4c^2 = 4\pi \int_0^R dr' r'^4 \rho(r')$ olarak tanımlanır ve aralarında $M_4 S_0^2 = -48\alpha M$ ilişkisi vardır. Üstelik α parametresi yeterince büyük olduğunda güneş sistemi ölçeğinde, doğrusal çözümden newtonyen potansiyel çözümü elde edilecek şekilde $\frac{3Mc}{32\pi\alpha}r$ terimi ihmal edilebilir. Yukarıdaki şartla birlikte bu şart Weyl yerçekimi kuramının güneş sistemi ölçeğinde newtonyen bir potansiyel çözümünü vermesini sağlar. Bu şartları sağlayacak şekilde bir yoğunluk dağılımı bulmak mümkündür:

$$\rho(r) = \frac{Mc^2}{4\pi} \frac{\delta(r)}{r^2} + \frac{3\nu c}{2} [\nabla^2 - \frac{r^2}{12} \nabla^4] \frac{\delta(r)}{r^2}. \quad (2.107)$$

Bu dağılım için yukarıda tanımlanan, yoğunluğun ikinci ve dördüncü momentleri

$$\int_0^R dr' r'^2 \rho(r') = \frac{Mc^2}{4\pi}, \quad \int_0^R dr' r'^4 \rho(r') = -6\nu c \quad (2.108)$$

sonuçlarını verir. Yoğunluk momentleri arasındaki ilişki

$$\frac{3Mc}{2\pi S_0^2} = \frac{3\nu}{4\alpha} \quad (2.109)$$

haline gelir. Bu durumda potansiyel çözümleri, son ilişkiyle beraber,

$$a(r) = \frac{3Mc}{32\pi\alpha}r - \frac{3Mc}{2\pi S_0^2 r}, \quad b(r) = \frac{3Mc}{32\pi\alpha}r - \frac{3Mc}{2\pi S_0^2 r} \quad (2.110)$$

şeklinde yazılır. Çözümün newtonyen potansiyel kısmı için yerel efektif yerçekim sabiti $G_L = \frac{3c^3}{4\pi S_0^2}$ şeklinde tanımlansın. Böylece yukarıda da belirtildiği gibi α sabitinin yeterince büyük olması durumunda güneş sistemi ölçeğinde, (2.110) eşitliklerindeki ilk terim ihmal edilebilir ve newtonyen potansiyel elde edilmiş olur:

$$a(r > R) = \frac{2G_L M}{c^2 r}, \quad b(r > R) = -\frac{2G_L M}{c^2 r}. \quad (2.111)$$

Galaksi dönme eğrileri fit edilerek $f(r) = 1 - 2\beta/r + \gamma r$ bulunan parametreler cinsinden yukarıda bulunan çözümün içerdiği α, S_0, ν parametreleri bulunabilir. Metrik fonksiyonu $f(r)$ ile çözümlerin karşılaştırılması sonucu,

$$\gamma = \frac{3Mc}{32\pi\alpha}, \quad \beta = \frac{3Mc}{2\pi S_0^2} = \frac{G_L M}{c^2}, \quad (2.112)$$

ilişkileri bulunur. Yukarıdaki ilk eşitlik ve yoğunluk momentleri arasındaki ilişkiyi kullanarak, yoğunluk parametresi $\nu = \frac{Mc\beta}{4\pi\gamma}$ olarak bulunur. Bir güneş kütlesi $M_0 = 1,98 \times 10^{30}$ kg ve G_L newton yerçekim sabiti alındığında $\beta = 1,48 \times 10^3$ m bulunur. $\gamma = 5,42 \times 10^{-39} \text{m}^{-1}$ data fit değeri alındığında, potansiyel çözümündeki parametreler,

$$S_0^2 = 9,66 \times 10^{34} \text{ kg/s}, \quad \nu = 1,29 \times 10^{73} \text{ kgm}^3/\text{s}, \quad \alpha = 3,29 \times 10^{75} \text{ kgm}^2/\text{s}, \quad (2.113)$$

değerlerine sahip olur. Newton potansiyel çözümünün ortaya çıkma şartlarının

$$\frac{3Mc r}{32\pi\alpha} \ll \frac{3Mc}{2\pi S_0^2 r}, \quad \frac{3Mc^2 S_0^2}{32\pi\alpha r} \ll \rho \approx \frac{Mc^2}{R^3} \quad (2.114)$$

olduğunu hatırlarsak, bu sayısal veriler ışığında çözümün geçerli olduğu mesafe aralığı, birinci şarttan,

$$r \ll \sqrt{\frac{16\alpha}{S_0^2}} \approx 5 \times 10^{10} \text{ AB}, \quad (2.115)$$

ve ikinci şarttan da, güneşin yarıçapı $R = 6.95 \times 10^{10} \text{ m}$ değeriyle birlikte

$$r \gg \frac{3S_0^2 R^3}{32\pi\alpha} \approx 3 \times 10^{-13} \text{ m}, \quad (2.116)$$

olmaktadır. Güneş sistemine en yakın yıldız olan α -Centauri üçlü yıldız takımının yaklaşık $\approx 10^5$ AB uzaklıkta [70] olduğu hatırlanırsa bulunan potansiyel çözümün güneş sisteminde geçerli olduğu görülür. Mannheim ulaştığı bu sonucun koordinat dönüşümleri yoluyla, yukarıda bahsettiğimiz izotropik koordinatlarda bulunmuş sonuçlara dönüştürülebileceğini de göstermiştir [69].

2.2.4 Galaksi Dönme Eğrileri ve Karanlık Madde

Jan H. Oort, Samanyolunda galaksi düzleminde bulunan yıldızlardan gelen ışığın Doppler kaymasıyla yıldızların dönme hızlarını hesapladı. 1932 yılında yayınladığı makalesinde, dönme hızlarına karşılık gelen kütle miktarının, galaksinin parlaklığını ölçerek kütle-ışık oranından bulduğu kütleyle göre çok daha büyük miktarda olması gerektiği sonucuna vardı [71]. Ertesi yıl F. Zwicky, sayıları binden fazla galaksiyi içeren Coma galaksi kümesi üzerinde elde ettiği sonuçları yayınladı. Çalışmada, galaksilerin ışık tayfindaki Doppler kaymasıyla, küme içerisinde galaksilerin hız dağılımlarını ortaya çıkardı. Newtonyen yerçekimiyle birlikte hız dağılımlarını viriyel teoreminde kullanınca, bu hızlara sahip galaksileri kararlı bir şekilde bir arada tutan toplam kütle $M = 7 \times 10^{14} M_{\odot}$ güneş kütlesi olması gerektiği sonucuna vardır. Oysa küme içerisindeki nebulalar üzerinden parlaklık ölçümleriyle hesapladığı görünen miktar bu kütle nin yaklaşık yüzde 2'si idi [72]. Böylece kayıp kütle problemi hem galaksi hem de çok daha büyük ölçeklerde ortaya çıkmış oldu.

1970'lerde Vera Rubin ve arkadaşları 60 tane spiral galaksi üzerinde madde dağılımlarını araştırmak için yaptıkları çalışmada, galaksideki yıldızların etrafında ve galaksinin uzak bölgelerinde bulunan hidrojen gazı bulutlarının spektrumlarını Doppler kaymasıyla analiz ettiklerinde galaksi içerisinde dönme hızlarını ölçebilmişlerdir. Ölçümler sonucu elde ettikleri hız profilleri şekil-2.2 deki gibi, merkezden uzaklaştıkça newtonyen davranıştan beklendiği üzere hızın $v = \sqrt{GM/r}$ şeklinde azalması yerine sabit kalma ya da artma eğilimi göstermesi şeklindeydi [73]. Böylece bu çalışmayla birlikte spiral galaksilerde, dönme hızlarına karşılık gelen, görünmeyen ve maddeyle esas olarak yerçekimi yoluyla etkileşen bir maddenin varlığı ve görünen kütleden daha fazla miktarda olduğu kesinleşmiş oldu.

Bu kayıp kütle nin, parlaklığını yitirmiş kahverengi cüce, nötron yıldızı veya karadelikler gibi yoğun kompakt objelerden (Massive Compact Halo Object, MACHO.) oluşabileceği ihtimali üzerine, MACHO ve EROS-2 çalışma grupları, ışığın mikromercek etkisini inceleyerek bu tarz objeleri tespit etmişlerdir. MACHO grubunun çalışmasına göre yaklaşık 12 milyon yıldızdan yalnızca 13-17 tane aday obje bulunabilmiş [74]. Buna karşın EROS-2'nin, 7 milyon yıldız incelemesinde ancak bir tane böyle bir aday bulması [75], bu objelerin karanlık madde için ciddi bir aday olması ihtimalini ortadan kaldırmıştır.

Karanlık madde probleminin yalnızca galaksi ya da galaksi kümeleri ölçeğinde değil kozmolojik ölçekte de var olduğu kozmik mikrodalga arka plan ışıması üzerinde olan, mikro kelvin mertebesindeki anizotropilerin varlığıyla gösterilmiştir. 2018 yılı Planck sonuçlarına göre, gözlemler sonucunda evrendeki madde yoğunluğu, $\Omega_m h^2 = 0.1430 \pm 0.0011$ iken baryonik kökenli madde yoğunluğu ise, $\Omega_b h^2 = 0.02237 \pm 0.00015$ ve karanlık madde yoğunluğu ise $\Omega_c h^2 = 0.1200 \pm 0.0012$ olarak ölçülmüştür. Bu sonuçlar evrende baryonik kökenli olmayan karanlık maddenin yaklaşık %84 oranında olduğunu gösteriyor [19]. Sonuç olarak varlığını esas olarak yerçekimi üzerinden gösteren bir maddenin varlığı galaksilerden evren ölçeğine kadar ortaya çıkmış görünüyor. Ancak bu sonuçlar standart yerçekimi kuramının bu ölçeklerde geçerli olduğu kabulüne dayanır. Bu bahsettiğimiz ölçeklerde yerçekimi kuramını değiştirerek gözlem sonuçlarını açıklama çabasında olan çalışmalar da mevcuttur. Aşağıda spiral galaksilerde dönme eğrilerini, bu yaklaşımla açıklama çabasını çok detaya girmeden anlatmak istiyoruz. Karanlık maddeyle ilgili daha detaylı bilgiler için [76, 77] kaynaklarına bakılabilir.

Spiral galaksilerin merkezlerinde küresel ve etraflarında ince disk halinde bir madde dağılımının olduğu ve bu dağılımının $\Sigma(r) = \Sigma_0 e^{-r/R_0}$ şeklinde eksponansiyel olarak düştüğü kabul edilir [78]. Burada Σ_0 merkezdeki yıldız sayı yoğunluğuna ve R_0 galaksi ölçek uzunluğuna karşılık gelir. Galaksi diskinin parlaklığı yıldız sayısı gibi eksponansiyel bir ifadeyle verilir $I = I_0 e^{-r/R_0}$. Galaksi merkez parlaklığı I_0 'ın $1/e$ katı parlaklığa karşılık gelen R_0 mesafesi galaksi ölçeği olarak tanımlanır. Disk üzerinde bulunan toplam yıldız sayısı, disk üzerinde alınacak bir yüzey integraliyle

$$N^* = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} dr d\theta r \Sigma(r) = 2\pi \Sigma_0 R_0^2 \quad (2.117)$$

olarak verilir. Önceki kısımlarda konformal yerçekimi çözümü olarak verilen $V(r) = -\beta^* c^2/r + \gamma^* c^2 r$ potansiyeli üzerinden, galaksi diskinin toplam potansiyelini, her bir terimin katkılarını [18] çalışmasını takip ederek ayrı ayrı hesaplayalım. Güneş kütlesi cinsinden galaksinin toplam yıldız sayısını, luminosite L ve kütle-ışık oranı M/L cinsinden yazmak mümkündür:

$$N^* M_\odot = \frac{M}{L} L. \quad (2.118)$$

Burada L galaksinin toplam luminositesi ve M görünen toplam kütesini ifade ediyor. Böylece galaksi diski üzerindeki herhangi bir yerde dönme hızı, galaksiyi karakterize

edecek olan kütle-ışık oranı ve luminosite cinsinden ifade edilebilecektir. Şimdi newton potansiyelinin dönme hızına olan etkisini açıkça gösterelim. Birim kütle olarak güneş, $\beta^* = GM_0/c^2$ olmak üzere,

$$V_\beta(r) = -\frac{\beta^* c^2}{r} \quad (2.119)$$

newton potansiyeline sahiptir. Disk üzerinde herhangi bir noktadaki sayı yoğunluğu $\rho(r, z)$ alınırsa, buna karşılık gelecek toplam yerçekim potansiyeli, silindirik koordinatlarda $\vec{r} = R\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ olmak üzere,

$$V_\beta(R, z) = -\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dr' d\theta' dz' \frac{\beta^* c^2 \rho(r', z') r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (2.120)$$

olacaktır. Silindirik koordinatlarda hesap yaptığımız için $1/r$ potansiyelinin Bessel fonksiyonları cinsinden

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{m=-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty dk J_m(kr') J_m(kR) e^{im(\theta - \theta') - k|z - z'|}, \quad (2.121)$$

seri açılımını kullanmak uygundur. Bu açılımı potansiyel içerisine yerleştirip θ integralini alırsak

$$V_\beta(R, z) = -2\pi\beta^* c^2 \int_0^\infty dk \int_0^\infty dr' \int_{-\infty}^\infty dz' r' \rho(r', z') J_0(kR) J_0(kr') e^{-k|z - z'|}, \quad (2.122)$$

bulunur. Disk $z = 0$ düzleminde alınırsa, sayı yoğunluğu $\rho(r, z) = \Sigma(r)\delta(z)$ ile birlikte potansiyel

$$V_\beta(R) = -2\pi\beta^* c^2 \Sigma_0 \int_0^\infty dk \int_0^\infty dr' r' e^{-r'/R_0} J_0(kR) J_0(kr'), \quad (2.123)$$

olur. Bu aşamada Bessel fonksiyonlarının

$$\int_0^\infty dr' r' e^{-r'/R_0} J_0(kr') = \frac{R_0^2}{(1 + k^2 R_0^2)^{3/2}},$$

$$\int_0^\infty dk \frac{J_0(kR)}{(1 + k^2 R_0^2)^{3/2}} = \frac{R}{2R_0^2} \left[I_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) - I_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) \right],$$

integral formulleri kullanılırsa, disk üzerinde bir R mesafesinde toplam potansiyel

$$V_\beta(R) = -\frac{N^* \beta^* c^2 R}{2R_0^2} \left[I_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) - I_1\left(\frac{R}{2R_0}\right) K_0\left(\frac{R}{2R_0}\right) \right], \quad (2.124)$$

olarak bulunur. Burada kullanılan $I_\alpha(x)$ ve $K_\alpha(x)$ modifiye Bessel fonksiyonlarının,

$$I_0'(x) = I_1(x), \quad I_1'(x) = I_0(x) - \frac{1}{2}I_1(x),$$

$$K_0'(x) = -K_1(x), \quad K_1'(x) = -K_0(x) - \frac{1}{x}K_1(x),$$

türev ilişkilerini kullanırsak toplam potansiyelin türevini aşağıdaki gibi buluruz:

$$V'_\beta(R) = \frac{N^*\beta^*c^2R}{2R_0^3} \left[I_0 \left(\frac{R}{2R_0} \right) K_0 \left(\frac{R}{2R_0} \right) - I_1 \left(\frac{R}{2R_0} \right) K_1 \left(\frac{R}{2R_0} \right) \right]. \quad (2.125)$$

Viriyel teoreminin [79] bir sonucu olarak parçacıkların galaksi etrafında dönme hızı $v^2 = R V'_\beta(R)$ ifadesiyle verilir. Böylece galaksiyi sonsuz yarıçaplı, yoğunluğu eksponansiyel olarak azalan bir disk olarak modellersek, newton potansiyeli varlığında görünen maddenin, merkez etrafında R yarıçapında dönme hızı

$$v^2 = \frac{N^*\beta^*c^2R^2}{2R_0^3} \left[I_0 \left(\frac{R}{2R_0} \right) K_0 \left(\frac{R}{2R_0} \right) - I_1 \left(\frac{R}{2R_0} \right) K_1 \left(\frac{R}{2R_0} \right) \right], \quad (2.126)$$

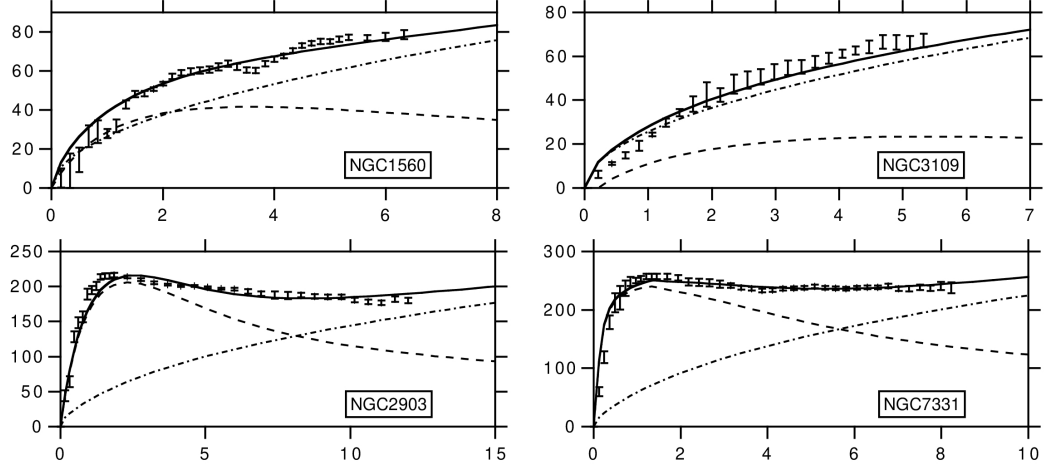
olarak bulunur. Bulunan bu hız profili, Şekil 2.2'de kesikli çizgilerle gösterildiği gibi, galaksi merkezinden itibaren yükselmeye başlar ve $R = 2.2R_0$ yarıçapında en yüksek değerine ulaşır mesafe arttığında düzgün bir şekilde azalır. Bu davranış, $R \gg R_0$ limitinde newton potansiyelinden beklendiği gibi, dönme hızının

$$v^2 \rightarrow \frac{N^*\beta^*c^2}{2R} \quad (2.127)$$

haline dönüşmesinden görülür. Galaksinin gerçekçi bir modellemesi, diskin bir kalınlığının olduğunu, galaksiyi çevreleyen hidrojen gazının toplam görünen kütle miktarının yaklaşık yüzde 15'i olduğunu ve galaksinin merkezi etrafında küresel bir kütle dağılımına sahip olduğunu dikkate almayı gerektirir. Bu sayılan etkilerin dikkate alınmasıyla daha gerçekçi newtonyen katkıyı hesaplamak mümkündür. Mannheim ve arkadaşları [18, 61–64, 80] çalışmalarında bu katkıyı da ortaya çıkarmışlardır. Sonuç olarak şekil 2.2'de gösterilen, radyal mesafe arttıkça dönme hızındaki sabit kalma eğilimi ya da artışını newton potansiyelinin açıklamakta yetersiz kaldığı görülür.

Bu aşamada yerçekimi kuramını değiştirmeden sadece galaksiye madde eklemeye bu galaksi dönme hız verilerinin nasıl açıklanacağına çok kısa bir şekilde değinelim. Görünen kütle miktarıyla disk şeklindeki bir galaksinin kararlı bir yapı haline gelmesinden ötürü, görünmeyen fakat diğer maddeyle yereçkim yoluyla etkileşen bir küresel madde dağılımının varlığını dikkate almanın hem dönme hız eğrisi gözlemlerini hem de galaksinin kararlılığını açıklayacağı gösterilmiştir [81]. Teorik modelin dönme hız öngörüsünü galaktik dönme eğrileri verilerine fit edebilmek için, galaksiyi çevreleyen hidrostatik dengedeki eşsıcaklıklı bir küresel dağılım ve

$$\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{r^2 + r_0^2}, \quad (2.128)$$



Şekil 2.2: Üstteki iki grafik düşük yüzey parlaklığına, alttakilerse yüksek yüzey parlaklığına sahip olan galaksilerden ikişer örnektir. Grafikler galaktik dönme hızının (km/sn) R/R_0 'ın fonksiyonu olarak çizilmişlerdir. Kesikli çizgiler newton potansiyelinin etkisini, noktali kesikli çizgiler ise doğrusal potansiyelin etkisi göstermektedir. Düzgün siyah çizgiyse her iki potansiyelin toplamına karşılık gelen hız grafiğidir [18].

ifadesine sahip bir karanlık madde yoğunluğu dikkate alınır [82]. Burada r_0 , yoğunluk profilinin patlamasını önlemek için gerekli iç çekirdek yarıçapıdır. Önceki kısımda açıkladığımız dönme hız hesabı bu sefer bu küresel karanlık madde yoğunluk profili için tekrarlanırsa,

$$v = 4\pi\beta^*c^2\sigma_0 \left[1 - \frac{r_0}{R} \arctan \left(\frac{R}{r_0} \right) \right], \quad (2.129)$$

hız ifadesi elde edilir. Yarıçap $R \gg r_0$ limitinde olduğunda hız profili sabit bir değere yaklaşır:

$$v \rightarrow 4\pi\beta^*c^2\sigma_0. \quad (2.130)$$

Bu yoğunluk profilinden farklı olarak, galaksinin iç kısımlarında da dönme hızına katkı yapan, Navarro, Frenk ve White tarafından simülasyonlarla test edilmiş

$$\sigma(r) = \frac{\sigma_0}{r(r+r_0)^2}, \quad (2.131)$$

yoğunluk profilleri de mevcuttur [83, 84]. Böyle bir yoğunluk profili, galaksinin iç kısımlarında da dönme hızına katkı yaptığından, newton potansiyelinin gözlemle uyduğu bölgelerde madde ve karanlık madde arasında bir etkileşimin ortaya çıkmasına yol açmaktadır. Bu tarz problemlerden kurtulmak amacıyla eksponansiyel formda yoğunluk dağılımı da önerilmiştir [85]:

$$\sigma(r) = \sigma_0 \exp \left[-\frac{2}{\alpha} \left(\frac{r^n}{r_s^n} - 1 \right) \right]. \quad (2.132)$$

Bu tarz yoğunluk dağılımlarının gözlemlerle uyumlu sonuçlar verebilmesi için içerdiği parametrelerin her bir galaksi için ayrı ayrı dönme eğrileri fit edilerek ince-ayar yapılması gerekmektedir. Böylece galaksilerin kararlılığı ve merkezden uzaklaştıkça, galaksilerin parlaklıklarına bağlı olarak değişen dönme hızlarındaki sabitleşme veya artma eğilimi, evrensel bir davranış olmaktan daha çok, fiziksel anlamları henüz bilinmeyen ve herhangi bir ilk prensipten de üretilmeyen parametrelerin, herbir galaksiye özel belirlenmiş yüzlerce değerinin varlığıyla açıklanmış görünmektedir.

Şimdi de newton potansiyelinin açıklamakta yetersiz kaldığı galaksilerin dönme hız gözlem verilerinin, karanlık madde varsayımı olmaksızın, konformal yerçekim potansiyelinin doğrusal teriminden gelecek katkıyla nasıl açıklandığını gösterip bu kısmı sonlandıracağız. Newton potansiyeli için yapılan hesaba benzer şekilde, doğrusal terimi $|\vec{r} - \vec{r}'| = (\vec{r} - \vec{r}')^2 / |\vec{r} - \vec{r}'|$ olarak yazıp kullanırsak, potansiyel ifadesi

$$V_\gamma(R, z) = \frac{\gamma^* c^2}{2} \int_0^\infty dr' \int_0^{2\pi} d\theta' \int_{-\infty}^\infty dz' r' \rho(r', z') (\vec{r} - \vec{r}')^2 / |\vec{r} - \vec{r}'|, \quad (2.133)$$

olarak bulunur. Sonsuz ince galaksi diskini $z = 0$ düzleminde seçersek ve Bessel fonksiyonunun

$$\int_0^\infty dr' r'^2 J_1(kr') e^{-r'/R_0} = \frac{3kR_0^4}{(1 + k^2R_0^2)^{5/2}}, \quad (2.134)$$

integral formuluyla birlikte potansiyel

$$V_\gamma(R) = \pi\gamma^* c^2 \Sigma_0 R R_0^2 \left[I_0 \left(\frac{R}{2R_0} \right) K_1 \left(\frac{R}{2R_0} \right) - I_1 \left(\frac{R}{2R_0} \right) K_0 \left(\frac{R}{2R_0} \right) \right] \\ + \frac{1}{2} \pi\gamma^* c^2 \Sigma_0 R^2 R_0 \left[I_0 \left(\frac{R}{2R_0} \right) K_0 \left(\frac{R}{2R_0} \right) + I_1 \left(\frac{R}{2R_0} \right) K_1 \left(\frac{R}{2R_0} \right) \right], \quad (2.135)$$

olur. Buradan da modifiye Bessel fonksiyonlarının yukarıda vemiş olduğumuz türev ilişkileri kullanılarak doğrusal terimin dönme hızına olan katkısı

$$v_\gamma^2 = \frac{N^* \gamma^* c^2 R^2}{2R_0} I_1 \left(\frac{R}{2R_0} \right) K_1 \left(\frac{R}{2R_0} \right), \quad (2.136)$$

şeklinde bulunur. Böylece potansiyelin newtonyen ve doğrusal terimlerinden gelen katkılar sonucu toplam dönme hızı

$$v_T^2 = \frac{N^* \beta^* c^2 R^2}{2R_0^3} \left[I_0 \left(\frac{R}{2R_0} \right) K_0 \left(\frac{R}{2R_0} \right) - I_1 \left(\frac{R}{2R_0} \right) K_1 \left(\frac{R}{2R_0} \right) \right] \\ + \frac{N^* \gamma^* c^2 R^2}{2R_0} I_1 \left(\frac{R}{2R_0} \right) K_1 \left(\frac{R}{2R_0} \right), \quad (2.137)$$

olmaktadır. Galaksinin merkezinden uzaklaştıkça, $R \gg R_0$ olan mesafelerde dönme hızı

$$v^2 \rightarrow \frac{N^* \beta^* c^2}{2R} + \frac{N^* \gamma^* c^2 R}{2}, \quad (2.138)$$

asimptotik ifadeye dönüşür. Newtonyen terimin mesafeyle düşüşüne karşın ikinci terim doğrusal bir artış gösterdiği için toplam hız ifadesi gözlemle uyumlu bir davranış sergiler.

Konformal yerçekimi çözümünde gözlemcinin bulunduğu noktadan geçen kürenin iç kısmındaki maddenin potansiyele katkısıyla birlikte dış kısımlardaki maddenin de potansiyele sabitten farklı bir katkı yaptığı (2.63) çözümünde görülür. Dolayısıyla bu etki galaksi içerisinde maddenin dönme hızına galaksi dışından kozmik bir katkının olması sonucunu doğurur. Bu etkilerin galaksinin içinde bulunduğu büyük ölçekli yapı olarak evrenin homojen ve inhomojen yapısından geldiği düşünülür [64]. Evren çok büyük ölçekte homojen ve izotrop olduğu için buna karşılık gelen geometri Robertson-Walker metriğiyle verilir [43, 86, 87]:

$$ds_{RW}^2 = -d\tau^2 + \frac{a^2(\tau)}{(1 + K\rho^2/4)^2} (d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2). \quad (2.139)$$

Burada $a(\tau)$ ölçek çarpanı ve K üç boyutlu uzayın eğriliğini ifade eder. Evrenin koordinatlarından, galaksinin üzerinde seçilecek bir koordinat sistemine,

$$\rho = \frac{4r}{2(1 + \gamma_0 r)^{1/2} + 2 + \gamma_0 r}, \quad t = \int \frac{d\tau}{a(\tau)} \quad (2.140)$$

koordinat dönüşümüyle ve $\Omega(\tau, \rho) = \frac{1}{a(\tau)} \frac{1 + \gamma_0 \rho/4}{1 - \gamma_0 \rho/4}$ konformal çarpanıyla geçilirse

$$ds^2 = \Omega^2(\tau, \rho) ds_{RW}^2 = -(1 + \gamma_0 r) dt^2 + \frac{dr^2}{(1 + \gamma_0 r)} + r^2 d\Omega^2, \quad (2.141)$$

metriği elde edilir. Bu sonuca $K = -\frac{\gamma_0^2}{4}$ alınarak ulaşılmıştır. Böylece galaksinin yerel etkileri görmezden gelindiğinde tamamen kozmik etki olarak bir doğrusal potansiyelin varlığı açığa çıkmakta ve bu potansiyel dönme hızına katkı yapmaktadır. O zaman bu katkıyla beraber dönme hızı asimptotik olarak, $R \gg R_0$ mesafelerinde

$$v^2 \rightarrow \frac{N^* \beta^* c^2}{2R} + \frac{N^* \gamma^* c^2 R}{2} + \frac{\gamma_0 c^2 R}{2}, \quad (2.142)$$

olur. Galaksi diskinin uç noktalarından alınan gözlem datasıyla bu hız ifadesini karşılaştırmak suretiyle, bir birim güneş kütesine sahip $N^* = 5,65 \times 10^{10}$ tane yıldız içeren

bir galaksidede, $\beta^* = \frac{GM_\odot}{c^2} = 1.48 \times 10^5$ cm olmak üzere, 11 galaksidede yapılan data fit çalışması diğer parametreler için

$$\gamma^* = 5.42 \times 10^{-39} \text{ m}^{-1}, \quad \gamma_0 = 3.06 \times 10^{-28} \text{ m}^{-1}, \quad (2.143)$$

değerlerini vermiştir [80]. Bu parametre değerleri dikkate alınan tüm galaksiler için aynıdır. Her galaksiye özgü ince ayarla belirlenmiş parametre değerleri yoktur. Bu anlamda galaksilerin dönme eğrileri üzerinde kendini gösteren bu davranışın, yerçekimine özgü evrensel bir karaktere sahip olduğu söylenebilir. Son gösterdiğimiz kozmik homojen katkının yanında inhomojen katkılar da galaksiden büyük olan galaksi kümeleri ve daha büyük ölçekli yapılardan gelecektir. Bu etki (2.63) potansiyel çözümünde r^2 terimiyle gösterilir. Galaksi kümelerinin mesafesini r_k ile gösterdiğimizde, kuadratik terimin katsayısı

$$k = \frac{1}{6} \int_{r_k}^{\infty} dr' r' h(r'), \quad (2.144)$$

ile ifade edilirse, potansiyeldeki $-kr^2$ teriminin galaksi dönme eğrilerine olan etkisi, yukarıda açıklanmış yöntemle hesaplandığında asimptotik olarak

$$v^2 \rightarrow \frac{N^* \beta^* c^2}{2R} + \frac{N^* \gamma^* c^2 R}{2} + \frac{\gamma_0 c^2 R}{2} - kc^2 R^2, \quad (2.145)$$

olacaktır. İlk iki terim galaksiye ait yerel etkilere son iki terimse kozmik etkilere karşılık gelir. Galaksi gözlemlerinin gelişmesiyle disk üzerinde görünen bölgenin ötesinde daha büyük yarıçaplarda dönme hızlarını tespit etmek mümkün hale gelmiştir. Yukarıda değerlerini verdiğimiz γ^* ve γ_0 parametrelerine ilaveten, inhomojen katkıyı temsil eden k parametresi

$$k = 9.54 \cdot 10^{-50} \text{ m}^{-2}, \quad (2.146)$$

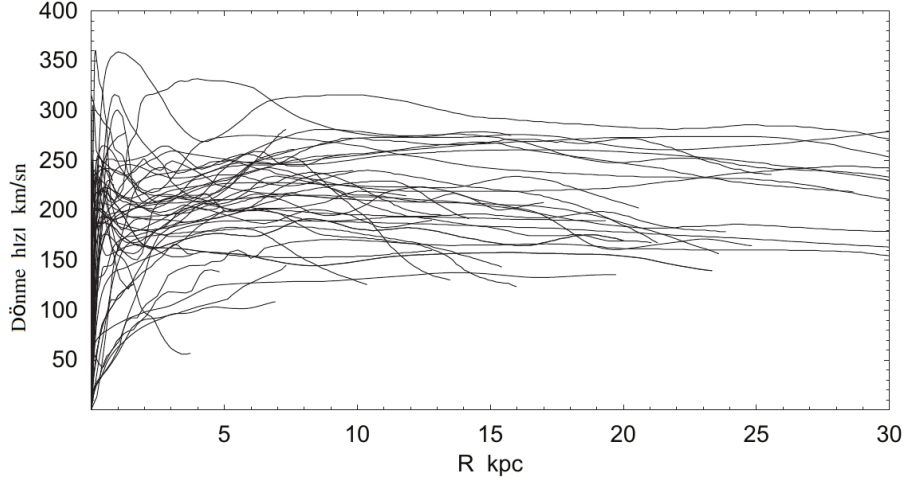
değerinde alındığında, teorik olarak bulunan dönme hız ifadesi, 141 galaksinin dönme hız verilerine fit edilebilmiştir [61–64]. Bu galaksiler yüzey parlaklığı yüksek olanlar, düşük olanlar ve ayrıca cüce galaksilerden oluşmaktadır. Yukarıda değerleri verilen γ^* , γ_0 ve k evrensel parametrelerin yanında tek serbest parametre galaksilere ait M/L kütle-ışık oranıdır ve L luminositedir. Bu kısımda bahsettiğimiz galaksi dönme eğrileri çalışmalarının detayları ve toplu bir değerlendirmesi için, yukarıda verdiğimiz referansların yanında [27, 28, 64] makalelerine bakılabilir.

3 GEOMETRİK ETKİ OLARAK KARANLIK MADDE

Önceki kısımlarda kısaca değindiğimiz gibi Genel Görelilik'in öngörülleri, deneyler [88–90] ve güneş sistemi ölçeğindeki gözlemlerle [91] yeterince iyi uyuşmasına karşılık galaksi ve daha büyük ölçeklerde galaksi dönme eğrilerini [92–95], yerçekim mercekle etkisini [86,96] ve diğer birçok astrofizik ve kozmolojik gözlemi [97,98] açıklamakta yetersiz kalmaktadır. Bu durum birçok fizikçi ve astronomu standart yerçekimi kuramına uygun davranan, ışıkla etkileşmeyen ilave bir maddenin varlığını ve bunun yanında evrenin hızlanmasına [99–102] yol açtığı kabul edilen karanlık bir enerjinin varlığını dikkate almaya yöneltmiştir.

Yukarıdaki yaklaşım son derece makul görünmekle beraber Genel Görelilik'in bahsedilen ölçeklerde de geçerli olduğunu gösterir ikna edici herhangi bir gözlemsel delil de bulunmamaktadır. Bu durum dolayısıyla literatürdeki sayısız çalışma, yukarıda bahsettiğimiz ölçeklerde yerçekim kuramının farklılaşması yoluyla, herhangi bir ilave madde ya da enerji dikkate alınmadan bu gözlemsel anomalileri açıklayabileceklerini iddia etmektedirler. Bunların bir çoğu Genel Görelilik'i $f(R)$ gibi, skaler eğrilik değişmezi R 'nin keyfi bir lagranj fonksiyonu tarzında modifiye ederek [11, 20–23] probleme yaklaşmışlardır. Yerçekimini modifiye etmek yerine tamamen farklı bir kuram önerisinde bulunan çalışmalar da mevcuttur [3, 24–26].

Bu kısımda, Weyl yerçekimi kuramında galaksilerdeki karanlık madde problemine geometrik bir köken bulma üzerine yaptığımız çalışmayı aktaracağız [37]. Önceki kısımlarda kuramın detaylarını anlatırken de gösterdiğimiz gibi Weyl yerçekimi, Elektrodinamiği yerçekimi kuramıyla birleştirme çabasının sonucunda Genel Görelilik'e bir alternatif olarak ortaya konulmuştur [3, 4]. Weyl Yerçekiminin Schwarzschild limiti kısmında da açıkladığımız gibi, kuramın doğru bir Newton potansiyel limiti mevcut değildir [34, 36, 103]. Yoon'un eleştirisinde [34] açıkça belirttiği gibi, (2.86) ifadesiyle verilen β kütle parametresi yoğunluğun dördüncü momentiyle ilişkili olmaktadır. Böylece ilişki sadece kütle miktarının değil, ancak dağılımın da kuvveti değiştirmesine yol



Şekil 3.1: Galaksilerin şişkinlik bölgeleri için CO moleküler spektrum çizgilerinden, disk bölgesi için optik ve dış bölgeler için HI çizgilerinden elde edilmiş dönme hız eğrileri topluca gösterilmektedir. Y. Sofue'nin [31] çalışmasından alınmıştır.

açmaktadır. Bu sorun ancak yoğunluk fonksiyonunun (2.107) ifadesindeki gibi belirli bir şekilde seçilmesiyle ortadan kalkmaktadır [65]. Mannheim çözümünde başka bir kusur ise, yoğunluk fonksiyonu (2.107) şeklinde alınmadığı takdirde, γ parametresi galaksi dönme eğrilerinin fit edlimesiyle çalışmasından elde edildiği gibi pozitif olmak yerine negatif olabilmektedir [34]. Öte yandan kısım 2.2.3'de bahsettiğimiz gibi zayıf enerji koşulu ihlal edilmedikçe Mannheim çözümünün iç çözümle örtüşen bir Schwarzschild limiti var olamaz [35]. Bahsettiğimiz bu sorunlar yaptığımız çalışmanın temel motivasyonlarıdır.

Önceki kısımda spiral galaksilerdeki maddenin $\Sigma(r) = \Sigma_0 e^{-r/R_0}$ şeklinde ekponansiyel bir dağılıma sahip olduğunu kabul edip buna karşılık gelen, (2.126) eşitliğiyle verilen newtonyen dönme hız ifadesini çıkartmıştık. Bu hızın en yüksek değerine ulaştığı $r = 2.2R_0$ yarıçapından sonra galaksi dönme eğrileri newtonyen karakter göstermekten uzaklaşır ve Şekil-3.1'te gösterilen gözlemsel verilerden de görüldüğü gibi sabit olma eğilimi sergilerler [18, 31–33, 61–64]. Dönme eğrilerinin sabit olma eğilimi gösterdiği bu bölgeyi *dış bölge* ve artış gösterdiği bölgeyi de *iç bölge* olarak adlandıracamız. Bu iki bölgedeki dönme hızına yansıyan davranış farklılığı dış dölgede beklenenden farklı bir etkinin ortaya çıktığını gösteriyor. Genel yaklaşım bu bölgede ışımayan bir maddenin varlığını kabul etmektir. Çalışmamızda bundan farklı olarak, dış bölgede ve belki de daha ötesinde yerçekiminin temelde bir farklılık gösterdiği düşüncesini takip edeceğiz.

Galaksilerin dış bölgelerinde dönme hızlarının mesafe ölçeğinden bağımsız oluşları bu bölgelerde bir yerel ölçek değişmezliğinin göstergesi olabilir. Böylece dış bölgelerdeki yerçekimsel etkiler yerel olarak ölçek simetrik metrik bir kuram yoluyla tanımlanabilir. Böyle bir metrik kuramın yalnızca Weyl yerçekimi olduğunu biliyoruz. O zaman, galaksi merkezinden uzakta dönen bütün objelerin aynı hızda olacağı özel bir metrik geometriyi belirlemek zorundayız. Bu amaçla, Weyl yerçekimi alan denklemlerini çözüp, aşikar olmayan tam çözümleri bularak, galaksilerin dış bölgelerine karşılık gelen özel geometrileri belirleyeceğiz. Bu çözümler metriktaki katı açının çeşitli durumlarına karşılık gelirler. Bu noktada Newton potansiyel limitine karşılık gelen bir çözüm aramadığımızı vurgulamak istiyoruz. Burada temel iddiamız şudur: galaksilerin dış bölgelerindeki dönme eğrilerinin ölçek değişmezliği, o bölgelerde Weyl yerçekimi alan denklemlerinin tam çözümü olan özel forma sahip bir metriğin sonucu olabilir. Böylelikle galaksilerin dış bölgelerine gidildikçe yerçekimin temel kuramının Weyl yerçekimi olacağını önermiş oluyoruz. Bu bölümün sonunda, ortaya koyduğumuz bu iddiayı, galaksilerin iç bölgelerinde ve güneş sisteminde son derece iyi çalışan Genel Görelilik ile birleştirmeyi deneyeceğiz.

Yukarıda ifade ettiğimiz amaçlarımız kapsamında bu çalışmanın [51, 104, 105] makalelerine benzer nitelikte bir iş olduğunu belirtelim. Çalışmanın teknik detaylarına geçmeden önce, bulacağımız çözümler yoluyla galaksilerin dönme eğrisi verilerine herhangi bir fit yapmak gibi bir amacımızın olmayacağını ifade edelim. Buradaki temel kaygımız galaksinin dış bölgelerinde dönme eğrilerinin karmaşık iç dinamikten doğmuş olabilecek olan tam profilini çözümler üzerinden öngörmek değil, fakat yukarıda da belirttiğimiz gibi dış bölgelere gidildikçe ortaya çıkan düzleşme eğilimini Weyl yerçekimi kuramının çözümlerinden geometrik olarak ortaya koyabilmektir.

3.1 Yerçekimi Alan Denklemleri ve Galaksilerin Dış Bölgesi

Weyl yerçekimi kuramının temel eyleminin Weyl tensörünün karesiyle elde edilen bir skaler cinsinden

$$I = \alpha \int d^4x \sqrt{-g} C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (3.1)$$

şeklinde verildiğini önceden ifade etmiştik. Galaksilerin, dikkate aldığımız dönme eğrilerinin düzleştiği dış bölgelerini, madde yoğunluğunun eksponansiyel azaldığını da dikkate alarak, tamamen boş bir vakum ortamı gibi düşünebiliriz. Bundan ötürü madde-

enerjiye karşılık herhangi bir eylem dikkate almıyoruz. Eylemin konformal dönüşüm dolayısıyla sahip olduğu özellikleri detaylı bir şekilde kısım 2.1’de tartışmıştık. Dolayısıyla doğrudan metriğe göre varyasyon olarak bulacağımız hareket denklemlerini yazalım:

$$B_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} - \frac{1}{3}H_{\mu\nu} = 0. \quad (3.2)$$

Burada $B_{\mu\nu}$ Bach tensörünü oluşturan $K_{\mu\nu}$ ve $H_{\mu\nu}$ terimleri sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= \square(R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) - \nabla_\lambda \nabla_\mu R_\nu^\lambda - \nabla_\lambda \nabla_\nu R_\mu^\lambda \\ &\quad + 2R_{\mu\lambda}R_\nu^\lambda - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta}, \\ H_{\mu\nu} &= 2R(R_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}R) + 2(g_{\mu\nu}\square - \nabla_\mu \nabla_\nu)R. \end{aligned}$$

Galaksilerin dış bölgelerinde dönme hızlarının sabitliğine karşılık gelecek olan uzay-zaman metrik formunu belirlemek temel amacımız olduğu için, galaksi disk yapısına da uygun olacak şekilde en basit yaklaşımla küresel simetrik ve statik formda bir metrik dikkate alalım:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 d\Omega_k^2. \quad (3.3)$$

Burada $d\Omega_k^2 \equiv \frac{1}{1-kx^2}dx^2 + (1-kx^2)dy^2$ katı açısı, k parametresinin alacağı $\{-1, 0, 1\}$ değerlerine göre sırasıyla iki boyutlu hiperbol, torus ve küre yüzey geometrisine karşılık gelir. Küre geometrisinde $x = \cos\theta$ ve $y = \phi$ alınırsa (θ, ϕ) koordinatlarında katı açı $d\Omega_1^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ olur. Spiral galaksiler disk geometrisine sahip olduğu için, yıldızlar disk düzlemindeki jeodezikler üzerinde hareket ederler. Küresel koordinatlarda böyle bir hareketi ifade edebilmek için $\theta = \pi/2$ alınabilir. Disk düzlemindeki çembersel yörünge için teğet hızının,

$$v_c = \frac{dl}{ds}, \quad (3.4)$$

sabit olması şartı kinematik olarak metriği belirlemeye yardımcı olur. Burada çember jeodezik üzerindeki sonsuz küçük mesafe $dl = rd\phi$ ve yıldızın öz zamanı $ds = \sqrt{-g_{00}}dt$ olur. Kütleli bir cismin hareketini dikkate aldığımız için, $ds^2 < 0$ koşulu

$$1 = At^2 - \frac{\dot{r}^2}{B(r)} - r^2\dot{\phi}^2 \quad (3.5)$$

yazmamıza yol açar. Buradaki nokta türevler s afin parametresine göre alınmıştır. Çember üzerindeki hareketi incelediğimiz için $\dot{r} = 0$ olur ve buradan

$$1 = At^2 - r^2\dot{\phi}^2 \quad (3.6)$$

yazılır. Metriğin izometrilere zaman öteleme vektörü $\xi_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ ve azimutal dönme vektörü $\xi_2 = \frac{\partial}{\partial \phi}$ için sırasıyla aşağıdaki hareket sabitleri yazılabilir [52, 106]:

$$\xi_{1\mu} \frac{dx^\mu}{ds} = -E, \quad \xi_{2\mu} \frac{dx^\mu}{ds} = L. \quad (3.7)$$

Böylece hareket sabitleri metrik fonksiyonları cinsinden $E = A(r)\dot{t}$, $L = r^2\dot{\phi}$ şeklinde ifade edilebilir. Öte yandan (3.6) eşitliği hareket sabitleri cinsinden yeniden yazılırsa

$$\frac{E^2}{A} - \frac{L^2}{r^2} = 1, \quad (3.8)$$

bulunur. Bu eşitliğin r 'ye göre türevi alınışa

$$\frac{L^2}{E^2} = \frac{r^3 A'}{2A^2}, \quad (3.9)$$

oranı bulunur. Bunun sonucu olarak yörüngenin teğet hızını hareket sabitleri cinsinden aşağıdaki gibi yazarız:

$$v = \frac{r}{\sqrt{A}} \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} = \frac{\sqrt{A} L}{r E}. \quad (3.10)$$

Buradan da çembersel jeodezik boyunca hareket eden parçacığın teğet hızı için

$$v^2 = \frac{r A'}{2A}, \quad (3.11)$$

ifadesine ulaşılır. Burada $A' = dA/dr$. Bu ilişki [13, 104] çalışmalarında da elde edilmiştir. Metrik fonksiyonu A 'nın birinci mertebe diferansiyel denklemi olan son eşitlik kolaylıkla integre edilebilir ve dönme hızı v sabit olduğu durumda kullanacağımız metrik formu

$$ds^2 = - \left(\frac{r}{r_c} \right)^{2w} dt^2 + \frac{dr^2}{B(r)} + r^2 d\Omega_{2,k}, \quad (3.12)$$

haline gelir. Burada r_c integrasyon sabitidir. Galaksi disklerinde yıldızların dönme hızları, $c = 1$ doğal birimlerinde, karakteristik olarak $w = v_c^2 \approx 10^{-6}$ mertebesinde olur [31].

3.2 Alan Denklemlerinin Çözümleri

Kinematik olarak dönme hızını sabit almak yukarıda gösterdiğimiz metrik içerisindeki bilinmeyen fonksiyon sayısını bire düşürmüştür. Bilinmeyen $B(r)$ fonksiyonu için yukarıda (3.2) eşitliğiyle verilen alan denklemlerinin bütün bileşenleri sağlanacak şekilde

diferansiyel denklemlerin çözülmesi gerekir. Bu metrik ifadesi için Bach tensörünün bileşenleri aşağıdaki gibi verilir:

$$B_r^r = BB''r^2 + wBB'r - \frac{1}{4}B'^2r^2 - B^2(w-1)^2 + \frac{k^2}{(w-1)^2} = 0, \quad (3.13)$$

$$B_\theta^\theta = B[B'''r^3 + 3wB''r^2 + (3w-2)B'r] + \frac{1}{2}B''B'r^3 + \frac{w}{2}B'^2r^2 - 2(w-1)^3B^2 + \frac{2k^2}{w-1} = 0, \quad (3.14)$$

$$B_t^t = B[B'''r^3 + (2w+1)B''r^2 - (w^2 - 4w + 2)B'r] + \frac{1}{2}B''B'r^3 + \frac{3w-1}{4}B'^2r^2 - (w-1)^3B^2 + \frac{k^2}{w-1} = 0. \quad (3.15)$$

Burada $B' = \frac{dB(r)}{dr}$ anlamına gelmektedir. Mannheim-Kazanas çözümünü anlatırken de ifade ettiğimiz gibi, kuramın sahip olduğu konformal simetriden dolayı vakum durumunda alan denklemlerinin bağımsız bileşen sayısı, Bach tensörünün sağladığı $\nabla_\mu B^{\mu\nu} = 0$ diverjans ve $B^\mu_\mu = 0$ iz denklemleri sayesinde bire iner. Bu denklemleri sırasıyla (2.53) ve (2.54)'te açıkça yazmıştık. Sonuç olarak Bach tensörünün B_r^r radyal bileşenini seçip çözmek yeterli olacaktır.

Bu denklemleri sağlayan en basit çözüm sabit çözümdür: $B(r) = \frac{k}{(w-1)^2}$. Şimdi sabitten farklı çözümlerin de var olduğunu göstereceğiz. Bu çözümler iki bakımdan önemlidirler. Birincisi, Weyl yerçekimi kuramının fiziksel bir duruma karşılık gelen yeni tam çözümleridirler. İkincisi, $k = 1$ küre geometrisi çözümü galaksi dönme eğrilerinin geometrik olarak açıklanması düşüncesine bir katkı oluşturur. Yalnızca küre geometrisi çözümünün fiziksel anlamı olmasına rağmen, burada bulduğumuz diğer çözümleri de aktarıyoruz.

3.2.1 T^2 Torus Geometri Çözümü

Bu kısımda $k = 0$ değerine karşılık gelen 2-torus çözümünü bulmak istiyoruz. Öncelikle (3.13) denkleminde, n bir reel parametre olmak üzere, $B(r) = b^n(r)$ dönüşümünü yaptıktan sonra elde ettiğimiz

$$b \left[b''r^2 + wb'r - \frac{1}{n}(1-w)^2b \right] + \left(\frac{3n}{4} - 1 \right) (b')^2 r^2 = 0, \quad (3.16)$$

denklemini çözeceğiz. Denklemin doğrusal olmayan karmaşık yapısını, $n = 4/3$ parametre değerini seçip ortadan kaldırarak ikinci mertebe doğrusal bir denklem elde ederiz:

$$b''r^2 + wb'r - \frac{3}{4}(1-w)^2b = 0. \quad (3.17)$$

Denklemin çözümü olarak $b(r) = r^\alpha$ önerirsek, burada α reel bir parametre olmak üzere,

$$\alpha^2 - (1-w)\alpha - \frac{3}{4}(1-w)^2 = 0, \quad (3.18)$$

karakteristik denklemini buluruz. Denklemin diskriminantı pozitif olduğundan $\alpha_1 = \frac{3}{2}(1-w)$ ve $\alpha_2 = -\frac{1}{2}(1-w)$ reel çözümlerini buluruz. Sonuç olarak $b(r)$ için diferansiyel denklemin

$$b(r) = C_1r^{\alpha_1} + C_2r^{\alpha_2}, \quad (3.19)$$

genel çözümünü elde ederiz. Burada $C_{1,2}$ integrasyon sabitleridir. Böylece $B(r)$ mertrik fonksiyonu, bulduğumuz reel kökleri de yerine yazarak

$$B(r) = r^{2(1-w)}(C_1 + C_2r^{-2(1-w)})^{\frac{4}{3}}, \quad (3.20)$$

şeklinde bulunur. Bunların sonucunda Bach denklemlerinin, 2-torus geometrisine karşılık gelen çözümü

$$ds^2 = - \left(\frac{r}{r_c} \right)^{2w} dt^2 + \frac{r^{2(w-1)}dr^2}{(C_1 + C_2r^{2(w-1)})^{\frac{4}{3}}} + r^2(dx^2 + dy^2), \quad (3.21)$$

metriği olarak bulunmuş olur.

3.2.2 H^2 Hiperbolik Düzlem Geometri ve S^2 Küre Geometri Çözümleri

Önceki duruma benzer şekilde (3.13) denklemini daha basit hale getirebilmek için

$$B(r) = \frac{2k}{(1-w)^2}r^{2(1-w)}F(r), \quad (3.22)$$

dönüşümlerini yapacağız. Dönüşüm sonrası

$$F(r) \left[r^2F''(r) + (3-2w)rF'(r) \right] - \frac{r^2}{4}F'(r)^2 + \frac{(1-w)^2}{4r^{4(1-w)}} = 0, \quad (3.23)$$

denklemini buluruz. Bu denklem üzerinde $r = z^{1/(1-w)}$ bağımsız değişken dönüşümü yapılırsa,

$$F(z) \left[z^2F''(z) + 3zF'(z) \right] - \frac{z^2}{4}F'(z)^2 + \frac{1}{4z^4} = 0, \quad (3.24)$$

şeklinde daha sade bir denklem buluruz. Şimdi de eşitliği $2z^4 F' F^{-3/2}$ ile çarparsak,

$$2z^6 F' F'' F^{-1/2} + 6z^5 F'^2 F^{-1/2} - \frac{1}{2} z^6 F'^3 F^{-3/2} + \frac{1}{2} F' F^{-3/2} = 0, \quad (3.25)$$

denkleminde ulaşılr. Son bulunan ifade bir toplam türev olarak

$$\frac{d}{dz} (z^6 F'^2 F^{-1/2} - F^{-1/2}) = 0, \quad (3.26)$$

gibi yazılabilir. Buradan $F(z)$ 'nin birinci mertebeli türevi

$$F'(z) = \left(1 + \sqrt{16C_1/3} \sqrt{F(z)}\right)^{1/2} \frac{1}{z^3}, \quad (3.27)$$

şeklinde çözümler. İfade içerisindeki integrasyon sabitini, son aşamada çözümü daha basit bir şekilde yazabilmek için $\sqrt{16C_1/3}$ olarak seçiyoruz. Son denklemi integre edip $F(r)$ fonksiyonunu bulabilmek için

$$v(z) \equiv 1 + \sqrt{16C_1/3} \sqrt{F(z)}, \quad (3.28)$$

tanımlaması yapalım. Yeni değişken üzerinden denklemi yazar ve integre edersek $\sqrt{v(z)}$ değişkeni için

$$(\sqrt{v})^3 - 3\sqrt{v} = 2q(z), \quad (3.29)$$

kübik cebirsel bir denklem bulunur. Burada $q(z) = -\frac{C_1}{z^2} + C_2$ ifadesine sahiptir. Cebirsel denklemin üç kökü aşağıdaki gibidir:

$$v_1(z) = (h + h^{-1})^2, \quad (3.30)$$

$$v_2(z) = (e^{i4\pi/3} h + e^{i2\pi/3} h^{-1})^2, \quad (3.31)$$

$$v_3(z) = (e^{i2\pi/3} h + e^{i4\pi/3} h^{-1})^2. \quad (3.32)$$

Çözümler içerisinde $h \equiv \left[q(z) + \sqrt{q(z)^2 - 1}\right]^{1/3}$ dür. İki tip $v(z)$ çözümü mevcuttur. Eğer h reel ise, o zaman bir tane reel ve iki tane kompleks çözüm vardır. Diğer durumda bütün çözümler reeldirler. Çözüm bulurken tanımladığımız değişkenleri (3.22) ve (5.51) ilişkileri üzerinden yerine yazarsak. Tüm metrik çözümleri

$$B_i(r) = \frac{3kr^{2(1-w)}}{8(1-w)^2 C_1} (1 + u_i(r))^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.33)$$

halinde yazılır. İfade içindeki $u_i(r)$ fonksiyonları

$$u_1(r) = h(r)^2 + h(r)^{-2}, \quad (3.34)$$

$$u_2(r) = \frac{1}{2} [(-1 + i\sqrt{3})h(r)^2 - (1 + i\sqrt{3})h(r)^{-2}], \quad (3.35)$$

$$u_3(r) = \frac{1}{2} [(-1 + i\sqrt{3})h(r)^{-2} - (1 + i\sqrt{3})h(r)^2], \quad (3.36)$$

tanımlamasına sahiptirler. Burada

$$h(r) = \left(-\frac{C_1}{r^{2(1-w)}} + C_2 + \sqrt{\left(-\frac{C_1}{r^{2(1-w)}} + C_2\right)^2 - 1} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Bu çözümler, $k = -1$ için iki boyutlu hiperbol ve $k = 1$ için de iki boyutlu küre yüzeyine sahip uzay-zamanları tanımlar. $k = 1$ çözümü olarak belirlediğimiz genel geometri, yıldızların bu geometri içerisinde galaksi merkezine olan mesafelerinden bağımsız bir şekilde aynı hızla hareket etmelerine izin verir. Gözlemlere göre böyle bir bölge, merkezi şişkinlik'in (central bulge) yaklaşık $r \approx 2.2R_0$ 'daki bitiminden galaksinin uç noktasına kadar olan bölgeyi kapsar [18, 31–33]. Böylece $k = 1$ çözümü yalnızca galaksinin dış bölgesini tanımlar. Kısım 2.2.4'te gösterdiğimiz gibi, Newton potansiyeline karşılık gelen galaksi dönme hızı gözlemsel verilerle sadece iç bölgelerde uyumlu olmaktadır. Bunun sonucu olarak galaksinin iç bölgeleri, newton potansiyelini zayıf limit olarak içeren Genel Görelilik tarafından iyi bir şekilde tanımlanır. Her biri, bu iki bölgenin bir tarafındaki davranışla uyumlu olan iki kuramın nasıl birleştirileceği üzerine bir tartışmayı, yörünge kararlılığı kısmından hemen sonra yapacağız.

3.3 Çember Jeodeziklerin Kararlılığı

Alan denklemlerinin çözümleriyle ortaya koyduğumuz geometride kritik bir özellik çember jeodeziklerin kararlılığıdır. Çözümlerin gözlemlerle uyumlu olabilmesi için çember jeodeziklerin kararlı olması gerekir. Şimdiki amacımız bu kararlılığı göstermektir. Analizi, [107, 108] kaynaklarını takip ederek, genel olarak küresel simetrik ve statik bir metrik üzerinde yapıp elde ettiğimiz kararlılık şartlarını, bulduğumuz metrik çözümüne uygulayacağız. Böyle genel bir metrik aşağıdaki gibi verilir:

$$ds^2 = -A(r)dt^2 + \frac{1}{B(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (3.37)$$

Burada metrik fonksiyonları $A(r)$, $B(r)$ yalnızca r radyal koordinatına bağlıdır. Metrik formunu belirlerken kısım 3.1'de bahsettiğimiz, zaman öteleme vektörü $\xi_1 = \frac{\partial}{\partial t}$ ve dönme vektörü $\xi_2 = \frac{\partial}{\partial \phi}$ bu koordinatlarda

$$K_\mu = (-A(r), 0, 0, 0) \quad \text{ve} \quad L_\mu = (0, 0, 0, r^2\sin^2\theta), \quad (3.38)$$

bileşenlerine sahiptirler. Bunlara karşılık gelen hareket sabitleri

$$A(r)\dot{t} = E \quad \text{ve} \quad r^2\sin^2\theta\dot{\phi} = L, \quad (3.39)$$

olur. Ekvator düzleminde ($\theta = \pi/2$) jeodezik yörüngede radyal koordinatın değişimi, hareket sabitleri cinsinden, metrik kullanılarak

$$\dot{r}^2 = B(r) \left(\frac{E^2}{A(r)} - \frac{L^2}{r^2} + \epsilon \right), \quad (3.40)$$

ifadesiyle verilir. Burada $\dot{r} = dr/ds$ dir; $\epsilon = -1$ zamansal, $\epsilon = 1$ uzaysal ve $\epsilon = 0$ ise null jeodeziğe karşılık gelen parametre değerleridir. Öte yandan jeodezik denkleminin radyal bileşeni $\theta = \pi/2$ düzleminde

$$\ddot{r} = \frac{B'}{2B} \dot{r}^2 + B \left(\frac{L^2}{r^3} - \frac{A' E^2}{2A^2} \right), \quad (3.41)$$

denklemini verir. Eğer V_{ef} efektif potansiyelini

$$V_{\text{ef}} \equiv \dot{r}^2, \quad (3.42)$$

olarak tanımlarsak o zaman (3.41) eşitliği

$$\ddot{r} = \frac{V'_{\text{ef}}}{2}, \quad (3.43)$$

olarak yazılır. Çember jeodezikler için $\dot{r} = 0$ ve $\ddot{r} = 0$ olur. Böylece belirli bir $r = R$ yarıçapında efektif potansiyel üzerinde $V_{\text{ef}} = 0$ ve $V'_{\text{ef}} = 0$ şartlarını elde etmiş oluyoruz. Bu iki denklem efektif potansiyelin içerdiği iki hareket sabitini, metrik fonksiyonu A ve çember yarıçapı R cinsinden

$$E^2 = \frac{-2\epsilon A^2}{2A - RA'}, \quad (3.44)$$

$$L^2 = \frac{-\epsilon A' R^3}{2A - RA'}, \quad (3.45)$$

şeklinde bulmamızı sağlar. Eğer çember yarıçapında $r = R + \delta$ gibi küçük bir pertürbasyon gerçekleştirsek

$$\ddot{\delta} = \frac{V''_{\text{ef}}}{2} \delta, \quad (3.46)$$

eşitliğini elde ederiz. Böylece çember jeodezikler için kararlılık şartı $V''_{\text{ef}} < 0$ olur.

Çember için V''_{ef} hesaplanırsa

$$V''_{\text{ef}} = \frac{-2B\epsilon}{A(2A - RA')} (2A'^2 - AA'' - 3A'A/R), \quad (3.47)$$

bulunur. Dikkate aldığımız metrik çözüm fonksiyonu $A = r^\omega / r_c^\omega$ ($r_c, \omega > 0$) için $V''_{\text{ef}} = 2B\epsilon\omega/R^2$ ifadesini buluruz. Kütleli bir parçacık için $V''_{\text{ef}} = -2B\omega/R^2$ haline gelir. Burada $B(r) > 0$ dır. Böylelikle (3.12) metriğiyle tanımlanan geometride çember jeodeziklerin kararlılığı gösterilmiş olur. Aynı sonuca Rayleigh kriterleri [108] ya da Lyapunov exponentleri [107] ile de ulaşılabilir.

3.4 Einstein-Weyl Kuramı

Galaksilerin iç bölgelerinde küresel şişkinlik'in (bulge) olduğu yerlerde, kısım 2.2.4'te detaylı bir şekilde gösterdiğimiz gibi Genel Görelilik'in dönme eğrilerini son derece iyi açıklıyor olması, Weyl kuramıyla birlikte bu iki kuramın galaksi içerisinde nasıl örtüşürüleceği sorununu ortaya çıkarmaktadır. Galaksiler ölçeğinde yerçekimini doğru bir şekilde tanımlayan kuramın, Genel Görelilik ile Weyl kuramının

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2\kappa} R + \alpha C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} \right], \quad (3.48)$$

şeklindeki bir birleşimi ile verildiğini ileri sürüyoruz. Burada $\kappa = 8\pi G/c^4$ Einstein sabitidir. Doğal birimlerde Weyl karenin önündeki α çiftlenim sabiti boyutsuzdur. Yerçekim olaylarında objelerin davranışlarını belirleyen kuramın hangisi olduğuna eylem içerisindeki $\frac{1}{2\kappa}R$ ve $\alpha C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma}$ skaler değişmezlerinin görelî değerlerine bakarak karar verilebilir [109, 110]. Galaksilerdeki madde dağılımını, merkez etrafındaki küresel şişkinlik ve daha uzak mesafelerde de disk şeklinde modelliyoruz. Hem küresel şişkinlik hem de disk dağılımında yoğunluğun exponansiyel değiştiği, basınçsız bir akışkan modeli dikkate alıyoruz. Bu model ve literatürde kullanılan diğer modeller için [111, 112] kaynaklarına bakılabilir.

Galaksilerdeki dağılımın varlığında eylemdeki skaler değişmezleri, maddî akışkan kütlesi ve enerji yoğunluğu cinsinden, Genel Görelilik çerçevesinde hesaplandığında

$$R(r) = \frac{8\pi G}{c^2} \rho(r),$$
$$C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma}(r) = \frac{48G^2}{c^4} \left(\frac{m(r)}{r^3} - \frac{4\pi}{3} \rho(r) \right)^2, \quad (3.49)$$

ifadeleri bulunur [38]. Burada $\rho(r)$ enerji yoğunluğu ve $m(r)$ merkezden r yarıçapına kadar olan mesafedeki kütledir.

Öncelikle, galaksi dönme eğrilerinin düzleşmeye başladığı yerden galaksinin uç kısmına kadar olan dış bölgesi üzerinde Weyl teriminin Einstein-Hilbert terimine baskın olduğunu göstermek için yukarıda formüllerini verdiğimiz skalerleri hesaplamak istiyoruz. Tipik bir galaksi için dış bölge üzerinde yapılan bu hesap aynı zamanda α parametresinin değerini de belirleyecektir. Üstelik bu değerle birlikte galaksinin iç bölgelerinde Einstein-Hilbert teriminin Weyl terimine baskın olduğunu da göstereceğiz. Eğer iç bölgelerdeki değer dış bölgelere göre daha küçük olsaydı Einstein-Hilbert teriminin baskınlığı daha belirgin olacaktı. Güneş sistemi içerisinde α 'nın değeri önceden

hesaplanmıştı [69] ve yerçekiminin Güneş sistemi testlerinin Weyl teriminden etkilenmeyeceği gösterilmişti.

Tipik bir galaksinin ortalama gerçekçi değerlerini [113]'te verildiği gibi kullanacağız. Şişkinlik bölgesi için $\rho(r) = \rho_{ob} \exp(-r/r_{ob})$ ile verilen eksponansiyel modeli kullanacağız. Buna göre şişkinlik içindeki kütle $M_b = 8\pi r_{ob}^3 \rho_{ob}$ olacak. Önceden de ifade ettiğimiz gibi dış bölgenin başlangıcını $r_b = 2.2r_{ob}$ mesafesinde alacağız [18]. Tipik bir galaksinin şişkinlik kütlesi ve yarıçapı için sırasıyla $M_b = 2.3 \pm 0.4 \times 10^{10} M_\odot$ ve $r_{ob} = 1.5 \pm 0.2$ kpc alıyoruz [113]. Bu verilere göre (3.49) formüllerinden, $r = r_b$ yarıçapında

$$\begin{aligned} R(r_b) &= \frac{G M_b}{c^2 r_{ob}^3} e^{-r_b/r_{ob}}, \\ C^2(r_b) &= 48 \frac{G^2 M_b^2}{c^4 r_{ob}^6} \left(\left(\frac{r_{ob}}{r_b} \right)^3 - \frac{1}{6} e^{-r_b/r_{ob}} \right)^2, \end{aligned} \quad (3.50)$$

sonuçlarını buluruz. Böylece, $r = 2.2r_{ob}$ mesafesinde αC^2 'nin $R/2\kappa$ 'ya oranı, $\alpha = 4.74 \times 10^{80} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ değeri için yaklaşık olarak 50 olur. Bu α değeri, Weyl teriminin baskınlığını gösterme amacıyla seçilmiştir. Fakat aynı mertebede bir değeri [110] makalesindeki sayısal sonuçları kullanarak da hesaplamak mümkündür. Şimdi de aynı hesaba, $r_g = 16r_{od}$ mesafesindeki galaksi uç kısmında [18] yapacağız. Burada r_{od} galaksi ölçek yarıçapıdır. Disk bölgesi için, yoğunluğu silindirik koordinatlarda $\rho(r, z) = \rho_{od} \exp(-r/r_{od} - |z|/z_{od})$ ile verilen eksponansiyel disk modelini kullanacağız. Disk kalınlığını yaklaşık olarak $z_{od} \approx 0.1r_{od}$ alıyoruz. Bunlara göre disk kütlesi $M_d = 4\pi z_{od} r_{od}^2 \rho_{od}$ olur. Disk kütesinin ortalama değeri $M_d = 5.7 \pm 1.1 \times 10^{10} M_\odot$, toplam baryonik kütle $M_g = M_b + M_d = 7.9 \pm 1.2 \times 10^{10} M_\odot$ ve tipik disk yarıçapı $r_{od} = 3.3 \pm 0.3$ kpc olarak verildiğinde, $r = r_g$ yarıçapında R ve $C_{\mu\nu\rho\sigma} C^{\mu\nu\rho\sigma} = C^2$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} R(r_g) &= 20 \frac{G M_d}{c^2 r_{od}^3} e^{-r_g/r_{od}}, \\ C^2(r_g) &\approx 48 \frac{G^2 M_g^2}{c^4 r_g^6} \end{aligned} \quad (3.51)$$

bulunur. Böylece, aynı α değeri için, $r = r_g$ 'de αC^2 'nin $R/2\kappa$ 'ya oranı yaklaşık olarak 11.3 olur.

Galaksinin iç bölgelerinde ise Einstein-Hilbert teriminin Weyl terimine baskın olduğunu ve böylece bu bölgedeki geometrinin Genel Görelilik tarafından belirlendiğini

göstermemiz gerekmektedir. İç bölgede α 'nın değerini dış bölgedeki gibi alacağız. Benzer şekilde $r_i = 0.2r_{ob}$ yarıçapında R ve $C_{\mu\nu\rho\sigma}C^{\mu\nu\rho\sigma} = C^2$ değerlerini hesaplırsak

$$\begin{aligned} R(r_i) &= \frac{G M_b}{c^2 r_{ob}^3} e^{-r_i/r_{ob}}, \\ C^2(r_i) &\approx \frac{48G^2 M_b^2}{c^4 r_{ob}^6} e^{-r_i/r_{ob}} \left(\frac{1}{6!} \frac{r_i}{r_{ob}} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.52)$$

bulunur. Bu durumda $r = r_i$ yarıçapında $R/2\kappa$ 'nin αC^2 'ye oranı yaklaşık 33.2 olacaktır. α parametresinin, enerji ölçeğinde koşma davranışından tahmin edildiği gibi, daha küçük bir değeri için Einstein-Hilbert teriminin baskınlığı daha da belirginleşecektir.

İkinci bölümde, konformal yerçekiminin Schwarzschild limitini anlattığımız 2.2.3 kısmında detaylarını aktardığımız P.Mannheim'a ait [69] çalışmasında Weyl kuramının çözümlerinin Güneş sistemi testleriyle uyumlu olduğu gösterilmiş ve $\alpha = 3.29 \times 10^{75} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{sec}$ değeri hesaplanmıştır. Bu değer galaksi içerisinde gerekli olan fenomenolojik değerden daha küçüktür. Böylece [114]'de önerildiği gibi, enerjinin yanında sistemin bazı fiziksel özelliklerine bağlı olabilen uygunsuz koşma davranışı burada açıkça görülür. Bunun sonucunda çiftlenim sabiti α 'nın gerçek doğasının anlaşılması için daha derin ve titiz çalışmaların yapılması gerektiği anlaşılır. Sonuç bölümünde α 'nın ölçeğe bağlı değeri hakkında yorum yapılacaktır.

4 WEYL YERÇEKİMİNDE MERCEK ETKİSİ

Bu bölümde, önceki bölümde ortaya çıkardığımız ve galaksi dönme eğrilerinin sabitliğine karşılık gelen metrik çözümde yerçekim mercekleme etkisine geçmeden önce Weyl kuramında mercek etkisini incelemiş olan çeşitli çalışmaların sonuçlarını tartışacağız.

S. Pireaux [115] çalışmasında, $f(r) = 1 - 3\beta\gamma - \beta(2 - 3\beta\gamma)/r + \gamma r - kr^2$ ile verilen Mannheim-Kazanas çözümünde ışığın mercekleme etkisi incelenmiştir. İnceleme kozmolojik sabite karşılık gelen parametreyi, ($k = 0$), ihmal ederek yapılmıştır. Çözümdeki doğrusal terimin baskın olmadığı ve newtonyen potansiyelin etkin olduğu $r\ell^+ \ell^- 1/\gamma$ mesafelerine karşılık gelen zayıf alan limiti ve doğrusal terimin newton terimine baskın olduğu $r\gg\sqrt{2\beta/\gamma}$ mesafelerindeki güçlü alan limitlerinde ışığın sapma açıları ayrı ayrı hesaplanmıştır. Çözümde γ teriminden dolayı uzay-zaman, mesafe sonsuza gittiğinde, düzleşmeyecektir. Asimptotik düz olan Schwarzschild gibi uzay-zamanlarda geçerli olan

$$\Delta\alpha(r_0) = 2|\Delta\varphi(r_0)| - \pi, \quad (4.1)$$

formülü kullanılarak ışığın sapma açısı hesaplanmıştır. Bir sonraki bölümde genel formalizm kısmında bu hesaplamamızın detaylarını verdik. Burada jeodezik üzerinde herhangi iki noktanın koordinat açısı farkı

$$\varphi(r_2) - \varphi(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2 \sqrt{f(r_0)/r_0^2 - f(r)/r^2}} \quad (4.2)$$

ile verilir. Sonsuzdaki koordinat açısını $\varphi(\infty) = 0$ seçip, sapma açısı formülüne yerleştirdikten sonra β ve γ 'ya göre bir seri açılımı sonucu, zayıf alan limitinde

$$\Delta\alpha(r_0) \approx \frac{2\beta}{r_0}(2 - 3\beta\gamma) + \frac{3\pi}{2}\beta\gamma - \gamma r_0, \quad (4.3)$$

ifadesini elde etmişlerdir. Güçlü alan limitinde ise, $r \gg \sqrt{2\beta/\gamma}$, MK çözümünde γ terimi baskın olduğundan ötürü $\beta = 0$ alınmıştır. Bu durumda (4.2) integrali hiç bir

yaklaşım yapmadan basit fonksiyonlar cinsinden yazılabilmektedir. Böylece

$$\Delta\alpha(r_0) = -2 \arcsin\left(\frac{\gamma r_0}{2 + \gamma r_0}\right), \quad (4.4)$$

sonucu bulunmuştur. Her iki limit durumunda bulunan sapma ifadelerinden görüldüğü üzere, γ pozitif olursa belirli bir r_0 mesafesinde zayıf limitte ışık ışınları gözlemciye ulaşmayıp iraksayacaktır. Doğrusal terimin yarattığı bu etki Weyl kuramına ait yeni bir özelliktir. γ negatif olursa zayıf limitte her zaman bir merceklenme meydana gelecektir. Bu çalışmanın devamında [116]'de sapma açısındaki γ 'ya göre birinci mertebeden terimi güneş sistemi deneyleriyle karşılaştırıp parametre üzerinde bir üst limit belirlemişlerdir. Radyo kaynaklarından dünyaya doğru gelen sinyalin Güneşin yakınından geçmesi sonucu oluşan bükülmeyi ölçen VLBI (Very Long Baseline Interferometry) deneyi [117] Genel Göreliliğin öngördüğü bükülme sonuçlarını test etmektedir. Bu ölçüm sonucundaki farklılık Weyl kuramından gelen γ katkısı olarak değerlendirildiğinde, çalışmada $\gamma \leq 3.8 \times 10^{-18} \text{ m}^{-1}$ üst limiti bulunmaktadır. Öte yandan başka bir Güneş sistemi testi olan Cassini deneyi [118] kullanıldığında ise bu limit $\gamma \leq 2.7 \times 10^{-19} \text{ m}^{-1}$ olmaktadır. Buna karşılık ışığın güneş sisteminden daha büyük ölçeklerde merceklenmesi sonucu çoklu görüntü oluşumu meydana geldiğinde, bükülmeye yol açan büyük ölçekli kütle dağılımının kızıla kaymasının bir fonksiyonu olarak bulunan γ parametresi negatif olmakta ve $\sim 10^{-31} \text{ m}^{-1}$ mertebesinde bulunmaktadır. Bu sonuçlar, ikinci bölümde detaylı anlattığımız dönme eğrileri gözlemlerinden gelen fit değeri $\gamma_{MK} \sim 10^{-26} \text{ m}^{-1}$ ile karşılaştırıldığında, Güneş sistemi deneylerinden üretilen sınırlandırmalar Weyl kuramının etkilerini gösterdiği mesafe için daha zayıf bir kısıt ortaya çıkmaktadır. Buna karşılık kozmik ölçekteki merceklenme dikkate alındığında γ negatif olmakta ve mertebesi γ_{MK} 'dan daha küçük olmaktadır.

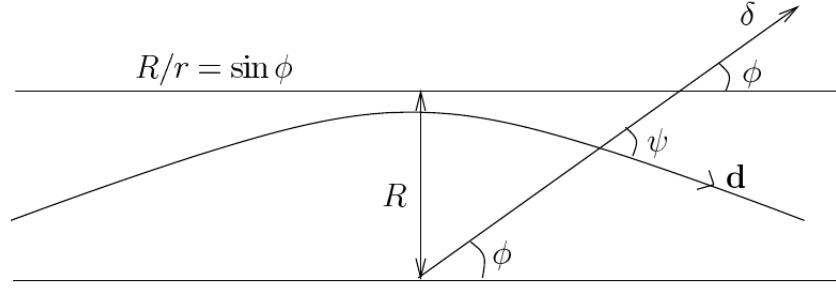
Weyl kuramının yerçekim merceğe etkisine uygulaması konusunda ilk çalışmalardan birinde [119], M. Walker yukarıda bahsettiğimiz hesaplamaya benzer şekilde standart bir yolla ışığın bükülmesini hesapladığında, yalnızca γ etkisini dikkate alarak, sapma açısının $\Delta\alpha(r_0) = -\gamma r_0$ olduğunu bulmuştur. Sonrasında γ parametresine bir değer bulabilmek amacıyla, bu şekilde iraksak bir merceğe gibi davranan yaklaşık $N \sim 10^{11}$ tane kaynaktan meydana gelen sapma sonucu oluşan görüntüdeki küçülmeyi hesaplamıştır (Lens formülü ve görüntü deformasyonu hesap detayları için [96] kaynağına bakabilirsiniz). Evrendeki rastgele herhangi bir uzak kaynağın görüntüsünde bir değişimin olmaması koşulunu kullanarak $\gamma \leq 10^{-37} \text{ m}^{-1}$ olması gerektiği sonucuna

varmıştır. Mannheim ve Kazanas'ın elde ettiği γ_{MK} sonucuna göre oldukça güçlü bir kısıt elde etmiştir.

Bu çalışmanın ardından A. Edery ve M.B. Paranjape yaptıkları [120] çalışmalarında, ışığın merceklenme ve iki nokta arasındaki gecikme süresi (time delay) deneylerinin sonuçlarını kullanarak Weyl yerçekimi kuramının γ parametresine bir üst limit belirlemişlerdir. Işığın sapmasını, Mannheim-Kazanas çözümünü $f(r) = 1 - 2\beta/r + \gamma r - kr^2$ şeklinde alıp (4.1) ve (4.2) formüllerini kullanarak hesaplamışlardır. MK çözümü $r \rightarrow \infty$ limitinde minkowski uzay-zamanına dönüşmediğinden, asimptotik düz bir uzayda geçerli olan bu formüllerin kullanılabilmesi için gerekçe olarak, uzay-zamanın sonsuzda, yani kozmolojik ölçeklerde gözlemlerle uyumlu olan Robertson-Walker metriği ile ifade edilmesi ve bu metriğin konformal düz olmasını öne sürmüşlerdir. Işığın jeodezikleri ek-B'de gösterdiğimiz gibi konformal dönüşümlerden etkilenmezler. Böylece ışık sonsuzda sanki düz doğrular boyunca hareket ediyormuş gibi davranacağından ötürü ışığın sapmasını hesaplamak için bu formüllerin geçerli olacağını savunmuşlardır. Öte yandan MK uzay-zamanında (4.1) formülü, $v = r_0/r$, $\beta_0 = \beta/r_0$ ve $\gamma_0 = \gamma r_0$, boyutsuz parametre ve değişkenler cinsinden

$$\Delta\alpha = 2 \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2 + 2\beta_0(v^3 - 1) + \gamma_0(1 - v)}} - \pi, \quad (4.5)$$

haline gelir. Görüldüğü gibi integral içerisinde k kozmolojik sabit yer almaz. Buradan hareketle yazarlar ışığın sapmasının kozmolojik ölçeklerde var olan Hubble akışından etkilenmeyeceğini iddia ederler. Fakat MK uzay zamanının k kozmolojik sabitten kaynaklanan bir kozmik ufku vardır. Ufkun ötesi ışığın hareketi için fiziksel açıdan anlamlı değildir. Bu çalışmada yazarlar tarafından bu durum dikkate alınmadan inceleme yapılmıştır. Yukarıdaki sapma ifadesi β ve γ parametrelerine göre birinci mertbe seriye açılırsa $\Delta\alpha = 4\beta/r_0 - \gamma r_0$ bulunur. Güneş civarından geçen sinyallerin sapma açısı radyo interferometrik yöntemlerle ölçüldüğünde [121] Genel Görelilik'in öngörüsünden % 1'lik bir farkla 1.76 ± 0.016 arc sn olarak ölçülmüştür. Bu ölçüm sonuçlarını Weyl kuramında γ kaynaklı ortaya çıkan bu katkıya uyguladıklarında parametre için $3.45 \times 10^{-17} \text{m}^{-1} \leq \gamma \leq -1.87 \times 10^{-16} \text{m}^{-1}$ değer aralığını bulmuşlardır. Güneş sistemi yerine Weyl yerçekiminin baskın olacağı daha büyük galaksi veya galaksi kümeleri ölçeğinde, küresel simetrik bir lens modeli dikkate alıp lens hesabı yaptıklarında parametrenin $L_{H_0} = c/H_0$ Hubble mesafesinin tersiyle orantılı ve negatif olduğu $-\gamma \approx H_0/100 \times 10^{-26} \text{m}^{-1}$ sonucuna varmışlardır. İlginç bir



Şekil 4.1: (r, ϕ) koordinat düzleminde (4.6) denkleminin iki pertürbatif çözümünün gösterimi. Detaylı açıklama metin içerisinde yapılmıştır. Temsili figür [123] kaynağından alınmıştır.

şekilde bu sonuç Mannheim ve Kazanas'ın galaksi dönme eğrileri gözleminde bulunmuş oldukları $\gamma_{MK} \sim 10^{-26} \text{ m}^{-1}$ değeriyle aynı mertebede fakat işareti farklıdır. Öte yandan 1979'da yapılmış olan Viking deneyi [122] güneş sistemi ölçeğinde ışığın zaman gecikmesi etkisinde Genel Görelilik sonuçlarını % 0.1'lik hatayla doğrulamıştır. Deney verilerini kullanıp hata payını parametreye kısıt koymak için kullandıklarında $|\gamma| \leq 1.02 \times 10^{-21} \text{ m}^{-1}$ üst limitini bulmuşlardır. Bu sonuç güneş civarında ışığın saptamasından bulunan değerden küçük olmakla beraber galaksi kümeleri ölçeğinden elde edilen sonuçlara göre büyük bir sonuç olmaktadır.

Son zamanlarda yapılan bir çalışmada [124] J. Sultana MK çözümünde ışığın sapma açısını Rindler-Ishak açısını kullanarak ikinci mertebeye kadar hesaplamıştır. Çalışmada Weyl kuramının MK çözüm metriği $f(r) = 1 - M(2 - 3M\gamma)/r - 3M\gamma + \gamma r - kr^2$ şeklinde alınmıştır. Bu metrik için ışığın jeodezik denklemleri, $M\gamma \ll 1$ alındığında,

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3Mu^2 - \frac{\gamma}{2}, \quad (4.6)$$

olmaktadır. Denklemden de görüldüğü gibi k kozmolojik sabitinin jeodezik denklemlerine herhangi bir etkisi yoktur. Denklemin ikinci mertebeye pertürbatif çözümü

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{R} \sin \phi + \frac{M}{2R^2}(3 + \cos 2\phi) + \frac{3M^2}{16R^3}(10\pi \cos \phi - 20\phi \cos \phi - \sin 3\phi) - \gamma/2 \quad (4.7)$$

şeklinde bulunmuştur. Burada R , $(\phi = 0)$ noktasında jeodeziğin koordinat merkezine en yakın olduğu yarıçap değeridir ve etki parametresi olarak adlandırılır. Şekil 4.1'de alttaki düz çizgi radyal koordinat eksenine ve üst taraftaki düz doğru ise (4.6) denkleminin $\frac{R}{r} = \sin \phi$ ile verilen sıfırıncı mertebeye çözümüne karşılık gelir. Şekilde gösterilen ψ , radyal koordinat vektörü $e_r = (\delta, 0)$ ile jeodeziğin teğet vektörü $t = (dr, d\phi)$

arasındaki açı olarak tanımlanır ve (2.42) MK metriğinde

$$\cos \psi = \frac{|dr/d\phi|}{\sqrt{(dr/d\phi)^2 + r^2 f(r)}}, \quad (4.8)$$

ile verilir. Işığın sapma açısını Rindler ve Ishak $\Delta\alpha = 2(\psi - \phi)$ ifadesiyle tanımlamışlardır [123]. J. Sultana, bu sapma açısı tanımını kullanarak, $r \rightarrow \infty$ sonsuza giderken $\phi = 0$ oluşunu da kullanarak ışığın sapma açısı için

$$\Delta\alpha \approx \frac{4M}{R} + \frac{15\pi M^2}{4R^2} + \frac{37M^3}{4R^3} + \frac{6M^2\gamma}{R} - \frac{kR^3}{2M}, \quad (4.9)$$

şeklinde kütle parametresi M 'ye göre üçüncü merteye, γ ve k 'ya göre de birinci merteye bir açılım bulmuştur. Bundan önceki çalışmasında [125] J.Sultana, D. Kazanas ile birlikte, $M\gamma \ll 1$ yaklaşımını yapmadıklarında ortaya çıkan

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3M\gamma u + \frac{3}{2}(2 - 3M\gamma)Mu^2 - \frac{\gamma}{2}, \quad (4.10)$$

jeodezik denklemini kullanarak, yukarıda gösterilen Rindler-Ishak yöntemiyle

$$\Delta\alpha \approx \frac{4M}{R} - \frac{8M^3}{R^3} - \frac{2kR^3}{4M} + \frac{24M^4\gamma}{R^3} - \frac{2M^2\gamma}{R}, \quad (4.11)$$

sonucunu bulmuşlardır.

Yukarıda anlattığımız bazı çalışmalarda ortaya çıkan sonuçlara göre γ parametresi ışığın sapmasını azaltıcı şekilde bir katkı yapmaktadır. Galaksi dönme eğrilerinden gelen pozitif değer dikkate alındığında bu durum karanlık madde problemini, en azından galaksi ölçeğinde açıklama iddiasında olan Weyl kuramı için istenmeyen bir sonuç olmaktadır. Bu sonucun kullanılan yöntemle bağlı olduğunu ve eğer Rindler-Ishak formülünü kullanırsak γ 'nın ışığın sapmasını arttırıcı bir katkı yaptığını ortaya atan bir çalışma Cattani ve arkadaşları tarafından yapılmıştır [126]. Çalışmada MK metriği $f(r) = \sqrt{1 - 6M\gamma} - \frac{2M}{r} + \gamma r - kr^2$ halinde alınmıştır. Bu metrik formuna karşılık gelen ışığın jeodezik denklemi

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + \sqrt{1 - 6M\gamma}u = 3Mu^2 - \frac{\gamma}{2}, \quad (4.12)$$

olur. Denklem M kütle parametresine göre pertürbatif olarak çözülüp, Rindler-Ishak açısı ψ için verilen

$$\tan \psi = \frac{r\sqrt{f(r)}}{|dr/d\phi|}, \quad (4.13)$$

ifadesi ve $\Delta\alpha = 2(\psi - \phi)$ formülüyle beraber, $\phi = 0$ durumunda

$$\Delta\alpha \approx \frac{4M}{b} + \frac{2Mb\Lambda}{3} + \frac{15M^2\gamma}{b}, \quad (4.14)$$

sonucuna ulaşılmıştır. Varılan asıl sonuç pozitif katkı yapan bir γ terimidir. Rindler-Ishak yaklaşımını seçmek pozitif γ terimi ortaya çıkarıyor gözükse de yukarıda bahsettiğimiz bir önceki çalışmada yapılan bir kabul seri açılımının sonucunu belirgin bir şekilde değiştirip negatif katkı ortaya çıkardığı görülmüştür.

Bhattacharya ve arkadaşları yaptıkları çalışmada [127] MK uzay-zamanında Rindler-Ishak yaklaşımını kullanarak, ışığın sapması olayına k kozmolojik sabitin ve γ parametresinin etkisini gösteren bir sonuç elde etmişlerdir. MK metriğini $f(r) = 1 - 2M/r + \gamma r - kr^2$ şeklinde almış ve ışığın

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = 3Mu^2 - \frac{\gamma}{2}, \quad (4.15)$$

jeodezik denklemini M 'ye göre ikinci mertebeye kadar pertürbatif olarak çözmüşlerdir. Bu çözümü, $\phi = 0$, $M \neq 0$ ve $k \neq 0$ durumunda kullanıp seri açılımı yaptıklarında

$$\Delta\alpha \approx \frac{4M}{b} \left[1 + \frac{15\pi M}{16R} - \frac{kR^4}{8M^2} \right] - 2\gamma \left[\frac{R}{2} + \frac{3\pi M}{4} + \frac{455M^2}{32R} + \frac{4M^2}{kR^3} \right], \quad (4.16)$$

sonucuna ulaşmışlardır. Bu sonucun yanında aşağıdaki çeşitli durumlar için de

1. $\phi \neq 0$, $M = 0$ ve $k \neq 0$ $\Delta\alpha \approx -\gamma R$,
2. $\phi = \pi/4$, $M \neq 0$ ve $k \neq 0$ $\Delta\alpha \approx \frac{2\sqrt{2}M}{R} - \frac{3\pi\gamma M}{4} - \frac{\gamma^2 R^2}{4} - \frac{k\gamma^2 R^4}{2} - kR^2$,
3. $\phi = \pi/4$, $M = 0$ ve $k \neq 0$ $\Delta\alpha \approx -\frac{\gamma^2 R^2}{4} - \frac{k\gamma^2 R^2}{2} - kR^2$,

sonuçlarını elde etmişlerdir. Sonuçlarını aktardığımız bu çalışmalardan sonra, ışığın merceklenmesi problemine tamamen farklı bir yaklaşım sergileyen [128, 129] çalışmalarını kısaca özetleyip sonrasında kendi hesaplarımızı ve sonuçlarımızı vereceğiz.

4.1 Gauss-Bonnet Teoremi ve Mercek Etkisi

Weyl kuramı kapsamında yukarıda sonuçlarını aktardığımız belli başlı çalışmaların ulaştıkları sonuçlar birbirleriyle uyuşmamaktadır. Bu sonuçlarda dikkati çeken nokta MK parametresi γ ve Λ kozmolojik sabitin katkılarının farklı farklı bulunmuş olmasıdır. Önceki kısımda sonuçları aktarırken de kısaca bahsettiğimiz gibi kozmolojik sabitin jeodezik denklemine herhangi bir katkısı ortaya çıkmamasından ötürü ışığın

sapması olayına da herhangi bir katkı yapmayacağı iddia edilmiştir [130]. Kozmolojik sabitin katkısı üzerine yapılan tartışmalar için [131–139] çalışmalarına bakılabilir. Bu bağlamda sonuçların uyumsuzluğu meselesine yeni bir bakış açısı kazandırmak ve hesaplama yöntemini geliştirmek amacıyla diferansiyel geometride yüzeyler üzerinde tanımlı olan Gauss-Bonnet teoremini Gibbons ve Werner bu probleme uygulamıştır [128, 129]. Bu teorem yüzeylerin global özellikleri ile yerel özelliklerini ilişkilendirdiğinden ötürü, ışığın merceklenmesi probleminin de ışığın takip ettiği jeodeziğin üzerinde bulunduğu yüzeyin topolojik özelliğiyle bağlantılı olduğunu açığa çıkarmıştır. Şimdi bu kısımda bu teoremin uygulamasını ana hatlarıyla kısaca aktaracak ve ardından sonuçları tartışacağız. Gauss-Bonnet teoremi ve ilişkili temel kavramların detayları için ek-A'ya bakılabilir. Teoremin Weyl kuramına uygulanması ile ilgili daha detaylı bilgi için [139–141] kaynaklarına bakılmalıdır. Teoremi uygulayacağımız yüzeyin metriğinden kısaca bahsedelim.

4.1.1 Optik Metrik

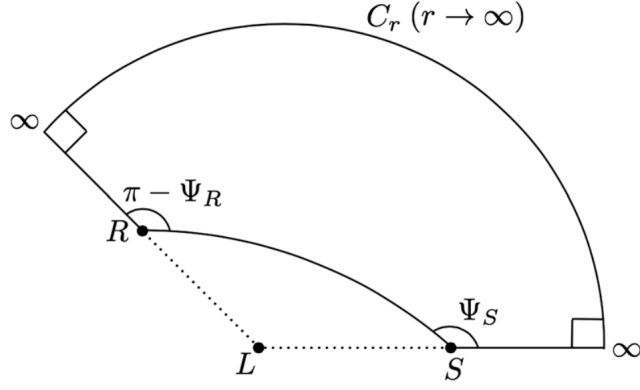
Dikkate aldığımız küresel simetrik ve statik MK uzay-zamanın

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (4.17)$$

metriği, inceleyeceğimiz problem bağlamında $\theta = \pi/2$ düzleminde, ışığın null jeodezikleri için

$$dt^2 = \frac{1}{f(r)} \left[\frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 d\phi^2 \right] = \gamma_{IJ} dx^I dx^J \quad (4.18)$$

şeklinde yazılır. Bu şekilde noktalarının koordinatlarını (r, ϕ) ile gösterdiğimiz iki boyutlu bir Riemann uzayının metriğini elde etmiş oluruz. Bu metrik ışığın uzay-zamanda takip ettiği null jeodeziğin, $\theta = \pi/2$ ekvator düzleminde, üzerinde bulunduğu yüzeyin geometrisini tanımlar ve optik metrik olarak adlandırılır [142]. Ek-B'de detaylı bir şekilde gösterdiğimiz gibi, uzay-zamanda bir null jeodezik, metriği yukarıda verilen iki boyutlu bir Riemannsal yüzey üzerinde yine bir jeodeziğe karşılık gelmekte ve bu jeodeziğin geçtiği yol üzerindeki herhangi iki nokta arasındaki δt zaman farkı minimum olmaktadır. Bu Fermat ilkesinin eğri uzaylardaki karşılığıdır. Şimdi de ileride sapma açısını tanımlarken kullanacağımız teğet vektörleri tanımlayalım. Bu iki boyutlu yüzey üzerindeki jeodeziğin teğet vektörü $K^I \equiv dx^I/dt$ ifadesiyle tanımlanır. Teğet vektör Riemannsal bir yüzey üzerinde yaşadığı için normu pozitif olan uzaysal bir vektördür ve boyu γ_{IJ} metriği ile belirlenir. Ayrıca yüzeyin radyal ve azimutal



Şekil 4.2: Optik yüzey üzerinde S kaynak noktası, gözlemcinin R noktası ve merkezdeki L Lens noktalarının oluşturduğu üçgensel bölge ve sonsuzdan geçen C_r çember jeodeziğin oluşturduğu (∞, S, R, ∞) dörtgen bölgesi. [141] kaynağından alınmıştır.

koordinat birim teğet vektörlerini tanımlayalım:

$$e_r = (1/\sqrt{\gamma_{rr}}, 0), \quad e_\phi = (0, 1/\sqrt{\gamma_{\phi\phi}}). \quad (4.19)$$

4.1.2 Işığın Bükülme Açısı

Bu kısımda ışığın sapma açısının Gauss-Bonnet teoreminin uygulanmasıyla nasıl hesaplanacağını özet olarak aktarıp [139, 140] kaynaklarında elde edilen sonuçları, sonraki bölümde tezin asıl sonucu olan sapma açısı ifadeleriyle karşılaştırma yapabilmek için ayrı ayrı tartışacağız.

Önce Ishiara ve arkadaşları tarafından yapılan [140] çalışmasını inceleyeceğiz. Optik metrikle tanımlanan yüzey üzerinde, ışığın kaynağı olan S noktası, bükülmeye yol açan lens L ve ışığın ulaştığı gözlemcinin R noktası bir üçgensel bölge oluşturacaktır. Şekil 4.2’de gösterilen (∞, S, R, ∞) bölgesi $S - R$ arasındaki null jeodezik, her iki taraftaki radyal jeodezikler ve sonsuzdaki C_r çember jeodeziği ile çevrelenmiştir. Çember jeodezik için ek-A’da anlattığımız jeodezik eğrilik formülü optik metrikte kullanıldığında, $r \rightarrow \infty$ sonsuza giderken $\kappa_g \rightarrow 1/r_c$ ve $dl \rightarrow r_c d\phi$ olur. Bu ikisi birlikte kullanıldığında jeodezik eğriliğin jeodezik boyunca integrali alındığında sonsuzda $\int_{C_r} \kappa_g dl \rightarrow \phi_{RS}$ bulunur. ϕ_{RS} , R ve S noktalarının koordinat açıları farkıdır. Bu durumda Gauss-Bonnet teoremi bu dörtgen bölgeye uygulandığında

$$\psi_R - \psi_S + \phi_{RS} = - \iint_{\infty \square_S^R} K dS, \quad (4.20)$$

sonucunun çıktığı kolaylıkla görülür. Çalışmada ışığın sapma açısı bu ifade üzerinden $\Delta\alpha \equiv \psi_R - \psi_S + \phi_{RS}$ olarak tanımlanır. Bu açı tanımının Schwarzschild metri-

ğinde beklenen sapma açısını verdiği makalede gösterilmiştir. Şekilde gösterildiği gibi ψ açısı $\cos \psi \equiv \gamma_{IJ} e_r^I K^J$ ile tanımlanır. Işığın teğet vektörü

$$K = (K^r, K^\phi) = \frac{f(r)b}{r^2} \left(\frac{dr}{d\phi}, 1 \right),$$

bileşenlerine sahiptir. Burada b etki parametresidir. Işığın

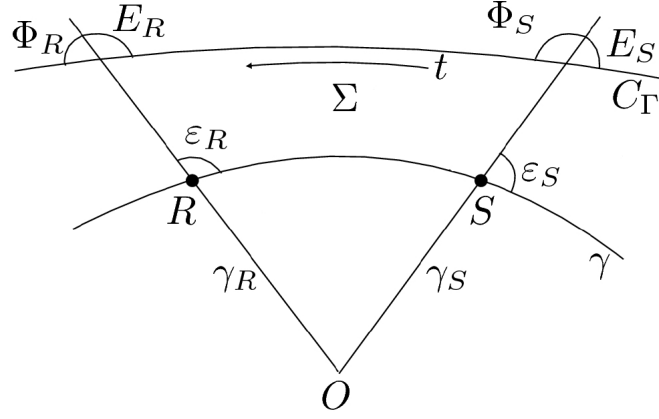
$$\left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 = \frac{r^4}{b^2} - r^2 f(r), \quad (4.21)$$

jeodezik denklemini kullanarak ψ açısını metrik fonksiyonları cinsinden hesaplamak mümkündür. Yine jeodezik denklem kullanılarak koordinat açı farkı ϕ_{RS} hesaplanır. Böylece ışığın sapma açısı, bükülmeye yol açan lense sonlu uzaklıkta olan kaynak ve gözlemci noktaları için bu formül yoluyla hesaplanır. Gauss-Bonnet teoremi ile elde edilmiş (4.20) eşitliğinde sağ taraftaki yüzey integrali ek-A'da anlattığımız gauss eğriliği formülü kullanılarak hesaplanabilir ve sol tarafta açılar üzerinden hesaplanan sonuçla aynı çıktığı gösterilebilir [128]. Burada dikkate alınan Weyl yerçekimi çözümü $f(r) = \sqrt{1 - 6m\gamma} - \frac{2m}{r} + \gamma r - \frac{\Lambda}{3}$ için sonlu uzaklıklarda bulunan gözlemci ve kaynak durumunda sapma açısı, bütün parametrelere göre birinci mertebe seriye açılırsa,

$$\begin{aligned} \Delta\alpha = & \frac{2m}{b} \left(\sqrt{1 - b^2 u_R^2} + \sqrt{1 - b^2 u_S^2} \right) \\ & - \frac{\Lambda b}{6} \left(\frac{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}}{u_R} + \frac{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}}{u_S} \right) \\ & + \frac{m\Lambda b}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right) \\ & - m\gamma \left(\frac{b u_R}{\sqrt{1 - b^2 u_R^2}} + \frac{b u_S}{\sqrt{1 - b^2 u_S^2}} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

olarak bulunmuştur. Burada $u = 1/r$. Bu uzay-zaman asimptotik düz olmadığı gibi aynı zamanda karadelik ufkuna ilave olarak bir de kozmolojik ufuk içermektedir. Dolayısıyla yapılan bu hesabın fiziksel olarak anlamlı olması için ufkun dikkate alınması gerekir. Referans aldığımız [140] çalışmasında bulunmuş olan bu sonucu bir sonraki bölümde kendi bulduğumuz sonuçlarla karşılaştırmak istiyoruz. Bu amaçla gözlemci ve kaynağı kozmik ufkun üstünde alacağız. Sonraki bölümde gösterdiğimiz gibi bu metrikte kozmolojik ufkun yarıçapı

$$r_c = 2\sqrt{\frac{E}{\Lambda}} \cos \frac{\pi - \delta}{3} + \frac{\gamma}{\Lambda} \quad (4.23)$$



Şekil 4.3: Optik yüzeyde bükülme açısının tanımlandığı Σ dörtgeni. Arakida'nın [139] makalesinden alınmıştır.

olarak bulunur. Burada $\cos^2 \delta = 9m^2 \Lambda \frac{F^2}{E^3}$, $F = 1 - \frac{\gamma^3}{3m\Lambda^2} - \frac{\gamma}{4m} \frac{\sqrt{1-6m\gamma}}{\Lambda}$ ve $E = \sqrt{1-6m\gamma} + \frac{\gamma^2}{\Lambda}$. Gözlemci ve kaynağın r_R ve r_S konumlarını kozmolojik ufkun konumu olarak alıp yukarıda bulunan sapma açısı ifadesine yerleştirirsek ve ardından seriye açarsak

$$\Delta\alpha = \frac{4m}{b} - b\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \gamma\frac{5b}{12} - \frac{5}{72}\gamma b^3\Lambda + \frac{11}{12}mb\gamma\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} - \frac{25}{36}m^2b\gamma\Lambda \quad (4.24)$$

sonucunu buluruz.

Şimdi de Gauss-Bonnet teoreminin uygulamasıyla ilgili olarak anlatacağımız ikinci çalışma olan H. Arakida tarafından yakın zamanda yapılmıştır [139]. Biz de bu çalışmada elde edilmiş sonucu aynı yöntemi takip ederek Mannheim-Kazanas uzay-zamanına genişlettik. Şekil 4.3'te optik yüzey üzerinde ışığın bükülmesine yol açan lens, koordinat merkezi O noktasında bulunur. Işığın kaynak noktası S 'den çıkan jeodezik R noktasındaki gözlemciye ulaşır. Ishiara ve arkadaşlarının çalışmalarında olduğu gibi Gauss-Bonnet teoremi şekilde gösterilen Σ dörtgenine uygulanacaktır. Bu bölge γ null jeodeziği, radyal koordinat jeodezikleri ve kütlelin yokluğunda uzay-zamanın null jeodeziği olan C_Γ tarafından çevrelenmiştir. γ jeodeziği kütlelin yokluğunda C_Γ eğrisine dönüşür. Fakat kütle varken artık kütleli uzayda bir jeodezik olmayacaktır. Bu durumda Gauss-Bonnet teoremini Σ bölgesine uygulandığında

$$|(\epsilon_R - E_R) - (\epsilon_S - E_S)| = \left| \iint_{\Sigma} K d\sigma + \int_{C_\Gamma} K_g dt \right| \quad (4.25)$$

elde edilir. Arakida ışığın sapma açısı olarak şekilde gösterilen açılarının farklarını almaktadır: $\Delta\alpha \equiv |(\epsilon_R - E_R) - (\epsilon_S - E_S)|$. Burada K optik yüzeyin Gauss eğriliği, κ_g jeodezik eğrilik, σ , (4.18) optik metriği ile verilen yüzeyin alanı ve t , C_Γ eğrisinin

parametresidir. Radyal koordinat teğet vektörlerinin ışık eğrilerinin teğet vektörleriyle kesişimi olan ϵ ve E açıları (4.18) optik metriği kullanılarak $\cos \epsilon \equiv \gamma_{IJ} e_r^I K_\gamma^J$ ve $\cos E \equiv \gamma_{IJ} e_r^I K_{C_\Gamma}^J$ şeklinde tanımlanır. Bu tanımlar kullanılarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$\tan \epsilon = \sqrt{f(r)} r / \frac{dr}{d\phi} \Big|_\gamma, \quad (4.26)$$

$$\tan E = \sqrt{f(r)} r / \frac{dr}{d\phi} \Big|_{C_\Gamma}. \quad (4.27)$$

Ishihara ve arkadaşlarının çalışmasında da ortaya çıktığı gibi Gauss-Bonnet teoremi sayesinde $\Delta\alpha$ sapma açısı bir taraftan sadece teğet vektörlerin kesişimiyle oluşmuş açılar cinsinden yazılırken diğer yandan yüzey üzerinde alınacak integrallerle ilişkili olmaktadır. Dikkat edilirse bu integraller ışığın bükülmesine yol açan lens etrafındaki bölgede alınmak yerine lensi içermeyen bir dış bölge üzerinde alınmaktadır. Eğer γ jeodezik eğrisinin ve C_Γ eğrisinin analitik ifadesine sahipsek ϵ ve E açılarını yukarıdaki ifadelerden koordinat açıları cinsinden hesaplamak mümkün olacaktır. Bu amaçla

$$\frac{d^2 u}{d\phi^2} + u \sqrt{1 - 6m\gamma} = 3mu^2 - \frac{\gamma}{2}, \quad (4.28)$$

jeodezik denklemi pertürbatif olarak çözülür. Başlangıç şartlarını $u(\frac{\pi}{2}) = 1$ and $u'(\frac{\pi}{2}) = 0$ olarak aldığımızda

$$\begin{aligned} u(\phi) = & \frac{\sin \phi}{B} + \frac{m}{2B^2} (3 + \cos 2\phi) + \gamma (\sin \phi - \frac{1}{2}) \\ & + \frac{\gamma^2 B}{8} \sin \phi + \frac{m\gamma}{B} (3 + \cos 2\phi + \sin \phi) \\ & + \frac{m^2 \gamma^2}{128B} [384 + 654(\pi - 2\phi) \cos \phi + 128 \cos 2\phi + 2053 \sin \phi - 51 \sin 3\phi] \\ & + \frac{m^2 \gamma}{16B^2} [48 + 90(\pi - 2\phi) \cos \phi + 16 \cos 2\phi + 151 \sin \phi - 9 \sin 3\phi] \\ & + \frac{m^2}{16B^3} [30(\pi - 2\phi) \cos \phi - 37 \sin \phi - 3 \sin 3\phi], \end{aligned} \quad (4.29)$$

γ eğrisini bulmuş oluruz. Burada B efektif etki parametresidir ve $\frac{1}{B^2} \equiv \frac{1}{b^2} + \Lambda/3$ olarak tanımlanır. C_Γ eğrisini bulmak için kütleli limite gitmemiz yeterli olur ($m \rightarrow 0$):

$$u(\phi) = -\frac{\gamma}{2} + \left(\frac{1}{B} + \gamma + \frac{\gamma^2 B}{8} \right) \sin \phi. \quad (4.30)$$

Bu eğri denklemlerini (4.26) ve (4.27) eşitlikleri kullanılarak sapma açısı içerisinde yerleştirip γ ve Λ parametrelerine göre birinci mertebe ve m kütle parametresine göre de

ikinci mertebede seriye açarsak, bükülme açısını, gözlemci ve ışık kaynağının koordinat açıları cinsinden

$$\begin{aligned}
\alpha = & m[\cos \phi_R(2 + \sin^2 \phi_R) - \cos \phi_S(2 + \sin^2 \phi_S) \\
& + k(\cos \phi_R(1 + \csc^2 \phi_R - \frac{1}{2} \cos 2\phi_R) - \cos \phi_S(1 + \csc^2 \phi_S - \frac{1}{2} \cos 2\phi_S)) \\
& + \gamma(\cos \phi_R(3 \sec^2 \phi_R + \cos 2\phi_R \sec^2 \phi_R + \sec \phi_R \tan \phi_R \\
& + \frac{1}{2} \tan^2 \phi_R + \frac{3}{2} \cos 2\phi_R \tan^2 \phi_R) \\
& - \cos \phi_S(3 \sec^2 \phi_S + \cos 2\phi_S \sec^2 \phi_S + \sec \phi_S \tan \phi_S \\
& + \frac{1}{2} \tan^2 \phi_S + \frac{3}{2} \cos 2\phi_S \tan^2 \phi_S)] \\
& + \frac{m^2}{8} [(30(\phi_S - \phi_R)) - \sin 2\phi_R + \sin 2\phi_S \\
& + 8(\sin^3 \phi_R \cos \phi_R - \sin^3 \phi_S \cos \phi_S) \\
& - 4(\cos 2\phi_R \sin^3 \phi_R \cos \phi_R - \cos 2\phi_S \sin^3 \phi_S \cos \phi_S)],
\end{aligned} \tag{4.31}$$

olarak elde ederiz. Şimdi de (4.25) eşitliğini gauss ve jeodezik eğrilik tanımlarını kullanarak gösterelim. Ek A'da detaylı tanımlarını verdiğimiz Gauss ve jeodezik eğriliğinin optik metrik cinsinden ifadeleri aşağıdaki gibidir:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{\gamma_{rr}\gamma_{\phi\phi}}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_{rr}}} \frac{\partial \sqrt{\gamma_{\phi\phi}}}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_{\phi\phi}}} \frac{\partial \sqrt{\gamma_{rr}}}{\partial \phi} \right) \right], \tag{4.32}$$

$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{\gamma_{rr}\gamma_{\phi\phi}}} \left(\frac{\partial \gamma_{\phi\phi}}{\partial r} \frac{d\phi}{dt} - \frac{\partial \gamma_{rr}}{\partial \phi} \frac{dr}{dt} \right) + \frac{d\Psi}{dt}, \tag{4.33}$$

burada $\Psi = \pi - E$ dir. Optik metriği dikkate alarak bu ifadeleri integrallere yerleştirirsek :

$$\begin{aligned}
\int K d\sigma &= \int K \sqrt{\gamma_{rr}\gamma_{\phi\phi}} dr d\phi = - \int_{\phi_S}^{\phi_R} \int_{r_\gamma}^{r_c} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma_{rr}}} \frac{\partial \sqrt{\gamma_{\phi\phi}}}{\partial r} \right) dr d\phi \\
&= - \int_{\phi_S}^{\phi_R} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{rr}}} \frac{\partial \sqrt{\gamma_{\phi\phi}}}{\partial r} \Big|_{r_c} d\phi + \int_{\phi_S}^{\phi_R} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{rr}}} \frac{\partial \sqrt{\gamma_{\phi\phi}}}{\partial r} \Big|_{r_\gamma} d\phi
\end{aligned} \tag{4.34}$$

ve

$$\int \kappa_g dt = \int_{\phi_S}^{\phi_R} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{rr}}} \frac{d\sqrt{\gamma_{\phi\phi}}}{dr} \Big|_{r_c} d\phi + E_S - E_R. \tag{4.35}$$

sonuçlarını elde ederiz. Radyal jeodezik r_γ için

$$\int \kappa_g dt = \int_{\phi_S}^{\phi_R} \frac{1}{\sqrt{\gamma_{rr}}} \frac{d\sqrt{\gamma_{\phi\phi}}}{dr} \Big|_{r_\gamma} d\phi = \epsilon_R - \epsilon_S. \tag{4.36}$$

yazılır. Bulduğumuz bu sonuçları kullanırsak açılı formülündeki eşitliği elde ederiz:

$$\left| \int K d\sigma + \int \kappa_g dt \right| = |(\epsilon_R - E_R) - (\epsilon_S - E_S)|. \tag{4.37}$$

Böylece açılı hesabı için sadece açılı kısmın hesaplanmasının yeterli olduğu görülür.

5 KARANLIK MADDE ÇÖZÜMÜNDE MERCEK ETKİSİ

Üçüncü bölümde detaylarıyla aktardığımız önceki çalışmamızda, galaksinin dış bölgelerinde bulunan yıldızların galaksi merkezine olan mesafelerinden bağımsız olarak aynı dönme hızına sahip olmalarına imkan verecek olan geometriyi Weyl yerçekimi kuramının çözümleri olarak ortaya koyduk [37]. Çalışmamıza temel olan motivasyon, dönme eğrilerindeki sabitleşmenin kaynağının ölçek simetrisi olabileceğiydi. Çalışmada, galaksilerin dış bölgeleri için bulunmuş çözümlerin aynı zamanda galaksi kümeleri ölçeğine kadar olan düşük yoğunluk bölgelerinde de geçerli olması gerektiğini iddia etmiştik. Bu düşünceyi kontrol etmek amacıyla Weyl yerçekiminde yerçekim mercekleme etkisini, uzak bir kaynaktan gelen ışığın bir galaksi kümesinden kaynaklanan sapma açısını hesaplayarak inceledik.

Önceki bölümde, Weyl yerçekimi kuramının Mannheim-Kazanas (MK) çözümünü kullanarak, güçlü yerçekim mercekleme etkisini inceleyen çalışmaların bir derlemesini sunmuştuk. Bu literatürde belirginleşen, Λ kozmolojik sabitinin ve γ MK parametresinin mercekleme olayına katkısı üzerine olan tartışmalara, burada detaylarını aktaracağımız çalışmamızla katkıda bulunmuş olacağız [39].

Bulmuş olduğumuz Weyl yerçekimi çözümleri Mannheim-Kazanas çözümünden tamamen farklıdır. Fakat Weyl kuramının çözümlerini anlattığımız 2.2 kısmında gösterdiğimiz gibi bulduğumuz çözümler bir konformal dönüşümle, diğer tüm küresel simetrik ve statik metrikler için olduğu gibi, MK çözümüne denk olurlar. İki çözüm arasındaki farklılık, kütleli parçacıkların davranışları incelenirken açığa çıkmasına karşılık, ek-B'de de gösterdiğimiz gibi ışığın uzay-zaman içerisindeki hareketini etkilemez. Dolayısıyla bulduğumuz sonuçlar, yukarıda bahsetmiş olduğumuz γ ve Λ parametreleri üzerindeki tartışmalar açısından geçerli bir katkı oluşturacaklardır. Kottler uzay-zamanında hesapladığımız sapma açısı sonuçları Λ kozmolojik sabitinden gelen katkıları içermektedir. Fakat bu katkılar önceki bölümde bahsettiğimiz çalışmalardan farklı-

dır. Hem MK uzay-zamanında hem de dönme eğrileri için bulduğumuz uzay-zamanda yaptığımız benzer sapma açısı hesaplarıyla γ parametresinin katkısını da gösterdik.

Bu parametrelerin sapma açısına olan katkısı pertürbatif açılımın hangi noktada ve hangi parametre sırasıyla yapıldığına bağlıdır. Bu parametreler m yerçekimsel mercek'in kütlesi, Λ kozmolojik sabiti ve γ MK parametresi'dir. Elde ettiğimiz sapma açısı üzerinde bu parametrelere göre yapılan pertürbatif açılımın sırası önemlidir. Açılımın, önce m sonra γ ardından da Λ sırasıyla yapılması gerektiği sonucuna varıyoruz; çünkü kütle parametresinden sonraki sıralama değiştiğinde yüksek mertebeli terimlerin değerleri düşük mertebeli olanlardan daha büyük olmakta ve fiziksel açıdan yanlış bir sonuç ortaya çıkmaktadır. Kottler uzay-zamanında, MK parametresi yokken, elde ettiğimiz sapma açısı [143] çalışmasında ulaşılan sonuçla uyumaktadır. Buna karşın [129, 132–134, 137, 144–146] çalışmalarının sonuçlarından farklı olmaktadır. MK parametresi varken elde ettiğimiz sonuçlar kısmen [147] ile uyussa da literatürdeki diğer sonuçlardan farklıdır.

Bundan sonraki kısımda öncelikle, birbirleriyle konformal olarak ilişkili olan iki koordinat sisteminde kullandığımız genel formalizmi anlatacağız. Ardından bu formalizmi önce Schwarzschild–de Sitter (Kottler) uzay-zamanına daha sonra da Weyl yerçekiminin çözümü olarak bulduğumuz uzay-zamana uygulayıp yerçekim mercek etkisine ait bulduğumuz sonuçları aktaracağız.

5.1 Genel Formalizm

Bu kısımda, önce küresel simetrik ve statik bir uzay-zamanda Schwarzschild tipi küresel koordinatlarda [148] genel formalizmi tanımlayacağız ve daha sonra da bölüm boyunca "Weyl yerçekimi boşluk koordinatları" olarak adlandıracağımız konformal denk koordinatlarda bu tanımlamayı yineleyeceğiz. Konformal dönüşümler altında null jeodeziklerin değişmeden kalacağını ek-B'de göstermiştik. Bunun sonucu olarak da sapma açısı değişmeden kalır. Belirli bir koordinat sistemi seçerek yapılan bu tarz hesaplamaların koordinat etkisinden bağımsız olması gerekmektedir. Bu amaçla bulduğumuz sonuçların güvenilirliğini, birbirleriyle konformal olarak ilişkili olan koordinat sistemlerinde sapma açısını hesaplayarak kontrol ettik [149].

5.1.1 Küresel Koordinatlar

Genel bir Schwarzschild tipi küresel simetrik metrik küresel koordinatlarda

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin\theta d\phi^2, \quad (5.1)$$

ile verilir. Burada $f(r)$, r radyal koordinatına bağlı genel bir fonksiyondur. Küresel simetrik ve statik bir arkaplanda bir null parçacık için jeodezik denklemi, Killing simetrisi kullanılarak bulunabilir. Metrik fonksiyonları yalnızca r ve θ koordinatlarına bağlı olduğu için seçtiğimiz koordinatlarda bu metriğin, $K = \partial_t$ ve $L = \partial_\phi$ ile verilen Killing vektörleri vardır. Bu vektörler üzerinden tanımlı, sırasıyla enerji ve açısal momentum ile ilişkili iki tane hareket sabiti $E = f(r)\dot{t}$ ve $L = r^2\dot{\phi}$ yazılır. Bu tanımlardan hareketle kolayca

$$r^2\frac{d\phi}{dt} = f(r)b, \quad \text{ve} \quad b \equiv \frac{L}{E}. \quad (5.2)$$

yazabiliriz. Şimdi (5.1) metriği üzerinde $ds^2 = 0$ null jeodezik şartını kulanırsak bir null jeodezik için ($\theta = \pi/2$) ekvator düzleminde

$$\frac{du}{d\phi} = \sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2 f(u)}, \quad (5.3)$$

denklemini elde ederiz. Burada yeni değişken $u \equiv 1/r$ olarak tanımlanır. Bu denklem null jeodeziklerin yalnızca, düz uzay-zamanlar için etki parametresi olarak adlandırılan b 'ye bağlı olduğunu gösteriyor. Bu, ekvator düzleminde tanımlı ve $u(\phi)$ fonksiyonunun birinci merteye türevini içeren bir null jeodezik denklemdir. Eğer bu denklem belirli sınır şartlarında verilmiş $f(r)$ fonksiyonu için çözümlenirse fonksiyonun tersini alarak sapma açısı bulunabilir. Null jeodezik, ışığın bükülmesine yol açan lense en fazla yaklaştığı u_0 noktasına göre simetriktir. Eğer uzay-zamanın bir kozmolojik ufku varsa o zaman ışığın ufka temas ettiği nokta u_h ile lense en yakın olduğu u_0 arasında kalan bölgede, yukarıdaki jeodezik denklem dikkate alınarak koordinat açısı farkı $\Delta\phi$ bulunur. Herhangi bir kozmolojik ufuk noktasının olmadığı Schwarzschild tipi koordinatlarda ışık, bükülmeye yol açan büyük bir kütleli (lens) etrafından dolanıp sonsuza gider. Fakat ufkun varlığı uzay-zamanı geometrik olarak birbirinden farklı olan iki bölgeye ayırır. Ufkun ötesindeki olaylarla ufkun içindeki olayların nedensel bir ilişkisi yoktur. Dolayısıyla kozmolojik ufuk fiziksel bir sınır oluşturur. Null jeodeziğin ufkun ötesine geçtiği durumların böylece fiziksel bir anlamı olmayacaktır.

Bundan ötürü ışığın saçılmasından sonra kozmik ufka dokunduğu noktayı uzak gözlemcinin olduğu nokta olarak alacağız. Sapma açısı hesabını bu noktayı dikkate alarak yapacağız.

Işığın lense en yakın olduğu dönüm noktasını $\left. \frac{du}{d\phi} \right|_{u=u_0} = 0$ ile tanımlıyoruz. Bu tanımlama, çember jeodeziklerin kararlılığını belirlerken ortaya koyduğumuz efektif potansiyelin sıfır oluşu şartına karşılık gelir:

$$V_{\text{ef}} = f(r) \left(\frac{E^2}{f(r)} - \frac{L^2}{r^2} \right) = 0. \quad (5.4)$$

Bu şarta ilave olarak bu noktanın bir çember üzerinde olmasını istersek o zaman

$$V'_{\text{ef}} = 0, \quad (5.5)$$

şartı ışığın izleyeceği çember yörüngeleri verir. Bu yörüngelerin oluşturduğu geometrik yere Foton Küresi adı verilir. Verdiğimiz bu son şart kürenin yarıçapını belirlemek için yeterlidir. Kozmolojik ufuk ise $f(1/u_c) = 0$ eşitliğinin en büyük radyal kökü olarak tanımlanır. Bunların sonucu olarak koordinat açısı farkı, yukarıdaki diferansiyel denklemin yardımıyla yazılarak

$$\Delta\phi \equiv \phi(r_c) - \phi(r_0) = \int_{u_c}^{u_0} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2 f(u)}}, \quad (5.6)$$

integrali ile verilir. Kaynaktan çıkıp gözlemciye gelen ışığın, kaynak ve gözlemci arasındaki lensin ortaya çıkardığı sapma açısı

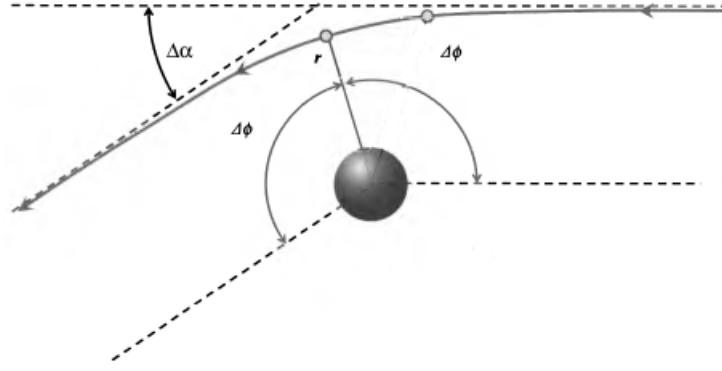
$$\Delta\alpha = 2 \Delta\phi - \pi, \quad (5.7)$$

formülüyle verilir. Null jeodezik u_0 noktasına göre simetrik olduğundan kaynak ve gözlemci arasındaki koordinat açısı farkı, merkezi kütleyle en yakın u_0 noktasından kozmolojik ufka kadar alınmış integralin iki katı olur. Dikkate aldığımız durumda hem ışık kaynağı hem de gözlemci kozmik ufuk noktasında bulunmaktadır.

Schwarzschild uzay-zamanı için $f(u) = 1 - 2mu$ ve sapma açısı

$$\Delta\alpha = 2 \int_0^{u_0} \frac{du}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2 + 2mu^3}} - \pi, \quad (5.8)$$

olur. İntegralin alınmış tam ifadesi birinci cins eliptik integraller cinsinden ilk kez [151] tarafından verilmiştir. Gözlemcinin kaynağa yakın (güçlü) ve uzak (zayıf) olduğu limit durumlar dikkate alınıp eliptik integralin seriye açılmasıyla bir takım yaklaşık ifadeler



Şekil 5.1: Kaynaktan gelen ışığın lens tarafından bükülmesi sonucu oluşan sapma açısı, figür [150] kaynağından alınmıştır.

elde edilmiştir. Zayıf ve güçlü limitte [143]'de bulunan ifadeler eliptik integrallerin uygun şekilde seriye açılmasıyla bulunmuştur. Bu sonuçlar son zamanlarda yapılan [151–155] çalışmalarında bulunan ifadelerle uyumludur.

5.1.2 Weyl Yerçekimi Boşluk Koordinatları

Şimdi de aynı sapma açısı için, küresel koordinatlara konformal olarak denk olan koordinatlarda bir ifade bulalım. Bir radyal koordinat dönüşümü ve bir konformal çarpan yardımıyla

$$\rho = \frac{r}{\sqrt{f(r)}} \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^w, \quad \Omega^2 = \frac{\rho^2}{r^2} \quad (5.9)$$

(5.1) metriğinden $ds_W^2 = \Omega^2 ds^2$ konformal dönüşümüyle yeni bir koordinat sistemi elde ederiz:

$$ds_W^2 = \frac{\rho^2}{r^2} \left(-f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin \theta d\phi^2 \right). \quad (5.10)$$

Böylece weyl yerçekimi boşluk koordinatlarında

$$ds_W^2 = - \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{2w} dt^2 + \frac{1}{B(\rho)} d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin \theta d\phi^2, \quad (5.11)$$

metriğini yazarız. Bu iki koordinat sistemindeki $f(r)$ ve $B(\rho)$ fonksiyonları arasında

$$\frac{d\rho^2}{\rho^2 B(\rho)} = \frac{dr^2}{r^2 f(r)}. \quad (5.12)$$

diferansiyel ilişkisinin var olduğu kolayca gösterilebilir. Bu metrik Mannheim-Kazanas uzay-zamanı olursa, üçüncü bölümde çember jeodezikler için kinematik yolla ve alan denklemlerinin çözümü olarak bulduğumuz metriktan başkası değildir. İleriki kısımlarda verilmiş bir MK uzay-zaman fonksiyonu $f(r)$ için, $B(\rho)$ 'yu yukarıdaki diferansiyel ilişkiden hesaplayacağız. Burada \sqrt{w} , galaksi içinde çembersel yörüngelerde

dönen yıldızların dönme hızına karşılık gelir. Yıldızların tipik dönme hızları dikkate alındığında, $c = 1$ doğal birimlerde w , 10^{-6} mertebesinde bir büyüklüğe karşılık gelir. Bu değer, ışık hızının yanında son derece küçük olduğundan yerçekim mercekleme etkisi durumunda bu hız parametresini ihmal ediyoruz: $w \approx 0$. Böylece bundan sonraki hesaplamalarımızda bu parametreyi sıfır alacağız. Bu durumda yeni metrik

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{B(\rho)}d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (5.13)$$

haline gelir. Metriğin izometriğini kullanarak, önceki kısımda yaptığımız analize benzer şekilde

$$\rho^2 \frac{d\phi}{dt} = b \quad b \equiv \frac{L}{E}, \quad (5.14)$$

etki parametresi yazılır. Metrik üzerine null jeodezik şartını uygularsak, $\theta = \pi/2$ düzleminde, $v \equiv b/\rho$ olmak üzere, birinci mertebe null jeodezik denklemi elde ederiz:

$$\frac{dv}{d\phi} = \sqrt{(1-v^2)B(v)}. \quad (5.15)$$

Koordinatlar arasındaki $\rho = \frac{r}{\sqrt{f(r)}}$ dönüşümünden hemen görüleceği gibi, küresel koordinatlardaki bütün tekil nokta olan ufuklar bu koordinatlarda sonsuza giderler. Küresel koordinatlarda ışık, merkezi kütleli foton küresi r_γ ile kozmik ufuk arasındaki bölgede fiziksel hareketini yaparken, boşluk koordinatlarında $(r_\gamma/\sqrt{f(r_\gamma)}, \infty)$ radyal mesafe aralığında hareket edecektir. $\rho_0 = r_0/\sqrt{f(r_0)}$ noktası bu koordinatlarda ışığın dönme noktası olur. Böylece ışığın sapma açısı, boşluk koordinatlarında

$$\Delta\alpha = 2 \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)B(v)}} - \pi, \quad (5.16)$$

ile verilir. Burada integralin üst sınırı olan 1 ışığın boşluk koordinatlarında merkezi kütleyle en fazla yaklaştığı $\rho_0 = b$ noktasına karşılık gelir ve 0 noktası da ışığın $\rho \rightarrow \infty$ sonsuza gidişine karşılık gelir.

5.2 Schwarzschild-de Sitter (Kottler) Uzay-Zamanı

5.2.1 Küresel Koordinatlar

Kozmolojik sabitin varlığında bir kütleli etrafındaki uzay-zamanın (5.1) metriği

$$f(r) \equiv 1 - \frac{2m}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \quad (5.17)$$

ile verilir. Bu durumda null jeodezik, birinci merteye differansiyel denklem olarak

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} + \frac{\Lambda}{3} - u^2 + 2mu^3, \quad (5.18)$$

şeklinde yazılır. Burada $u \equiv \frac{1}{r}$ 'dir. Denklemi kullanmaya başlamadan hemen önce ışığa ait dönme noktalarını, olay ufkunu ve kozmolojik ufku analiz edelim [150].

Işığın merkezi kütleyle en fazla yaklaştığı yerin, yani dönme noktasının $\frac{du}{d\phi} = 0$ ifadesi ile tanımlandığını ifade etmiştik. Bu noktaların kütleyle en yakın olabildiği konumdaki çembersel yörüngeler foton küresi olarak adlandırılır. Çembersel yörüngelerin kararlılığını anlattığımız 3.3 kısımda yapılabilecek benzer şekilde bir analizle bu noktaların ışık için kararsız olduğu ve küçük bir sapmayla ışığın ya merkeze düşme ya da merkezi kütlede tamamen uzaklaşma davranışı sergileyeceği gösterilebilir [52, 150]. Dönme noktası tanımından hareketle hemen

$$az^3 - z + 1 = 0, \quad (5.19)$$

yazılır. Burada $z = r/2m$ ve $a = 4m^2(1/b^2 + \Lambda/3)$ olarak tanımlanırlar. Cebirsel denklemin dikkate alınacak mümkün üç durumu vardır. Aşağıda sadece dönüm noktalarını belirteceğiz. Denklemin fiziksel olarak anlamlı olmayan negatif ve kompleks köklerini dikkate almayacağız.

1. $0 < a < 4/27$: Aşağıdaki gibi verilen sadece iki dönüm noktası vardır.

$$z_0 = \frac{2}{\sqrt{3a}} \cos\left(\frac{\pi - \Psi}{3}\right), \quad (5.20)$$

$$\text{ve } z_- = \frac{2}{\sqrt{3a}} \cos\left(\frac{\pi + \Psi}{3}\right), \quad (5.21)$$

burada $\cos^2 \Psi = 27a/4$ ve $0 < z_- < z_0$.

2. $a = 4/27$: Sadece bir dönüm noktası vardır:

$$z_0 = z_- = z_\gamma = \frac{3}{2}, \quad (5.22)$$

Bu özel değerde önceki durumda var olan iki dönüm noktası birbirlerine yaklaşırlar ve z_γ foton küresi üzerinde birleşirler.

3. $a > 4/27$: Hiç bir dönüm noktası yoktur.

Metriğin koordinat tekillikleri $f(r) = 0$ denkleminin köklerine karşılık gelir. Pozitif köklerine uzay-zamanın ufuk noktaları denir. Kozmolojik sabitin varlığında iki tane ufuk noktası oluşur. Ufuk noktaları mevcut durumda

$$yz^3 - z + 1 = 0, \quad (5.23)$$

denklemiyle belirlenir. Burada $y = 4m^2\Lambda/3$ olur. Etki parametresi b 'nin varlığı, (5.19) ve (5.23) denklemlerindeki a ve y parametreleri arasında $a > y$ ilişkisine yol açar. Denklemlerin diğer katsayıları aynı olduğundan dolayı parametrelerin alacakları değer aralıkları aynı olur. Fiziksel olarak anlamlı durumları sıralayalım :

1. $0 < y < 4/27$: İki tane ufuk noktası ortaya çıkar. z_c kozmolojik ufuktur. z_h cismin etrafındaki olay ufkuna karşılık gelir ve

$$z_c = \frac{2}{\sqrt{3y}} \cos\left(\frac{\pi - \beta}{3}\right), \quad (5.24)$$

$$\text{ve } z_h = \frac{2}{\sqrt{3y}} \cos\left(\frac{\pi + \beta}{3}\right), \quad (5.25)$$

ile verilirler. Burada $\cos^2 \beta = 27y/4$ ve $z_c > z_h$ olur.

2. $y = 4/27$: Parametrenin fiziksel açıdan anlamlı en uç değeri. y parametresi bu değere yaklaştıkça iki ufuk noktası birbirine yaklaşır ve foton küresi üzerinde birleşirler. Bu iki ufuk noktasına karşılık gelen küre kabukları arasındaki bölge fiziksel olarak anlamlı olan bölgedir. Böylece fiziksel bölge bu limit durumda sıfırlanır ve yapılan fiziksel hesaplar anlamını kaybeder.

Etki parametresinin varlığından dolayı, yukarıda çözümlerini verdiğimiz cebirsel denklemlerin katsayıları için $a > y$ yazılır. Bu ilişki dolayısıyla ufuk noktaları ve dönüm noktaları büyüklüklerine göre

$$0 < z_- < z_h < z_0 < z_c$$

şeklinde sıralanırlar. Işığın kaynaktan çıkması, merkezi kütlede saçılması ve gözlemciye ulaşması $[z_0, z_c]$ radyal mesafesi aralığında gerçekleşmektedir. Işığın etki parametresi,

$$b_c = \frac{3\sqrt{3}m}{\sqrt{1 - 9m^2\Lambda}} \leq b, \quad (5.26)$$

kritik b_c değerinden daha büyük olduğu sürece ışık $[z_0, z_c]$ aralığında hareket edecektir. $b = b_c$ olduğunda ışık foton küresi üzerinde olacak ve kararsız bir şekilde ya olay

ufkuna doğru merkeze düşecek ya da dışarıya doğru saçılacaktır. Etki parametresi büyüyüp $b \rightarrow \infty$ sonsuza gittiğinde $a \rightarrow y$ olur ve ışığın dönüm noktası merkezindeki kütleden uzaklaşır ve $z_0 \rightarrow z_c$ kozmolojik ufka doğru yaklaşır. Böylelikle yerçekim merceği etkisinin meydana gelebilmesi için, ışığın hareketini belirleyen tek parametre olan b etki parametresinin değer aralığı

$$b_c < b < \infty$$

olmak zorundadır. Jeodezik denklemdeki tüm parametreleri ve değişkenleri r_0 dönüm noktasına göre boyutsuzlaştırarak $v = r_0/r$, $\Lambda_0 = \Lambda r_0^2$ ve $m_0 = m/r_0^2$, şeklinde kullanacağız. O zaman ışığın sapma açısı, boyutsuz nicelikler cinsinden

$$\Delta\alpha = 2 \int_{v_c}^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^2+2m_0(v^3-1)}} - \pi, \quad (5.27)$$

integral ifadeyle verilir. Burada kozmik ufuk noktası $v_c = \frac{\sqrt{\Lambda_0}}{2} / \cos\left(\frac{\pi-\beta}{3}\right)$ integralin alt sınırı olur. Görüldüğü gibi integralde m_0 ve Λ_0 parametreleri vardır. Formalizmi aktarırken de bahsettiğimiz gibi bu integral birinci cins eliptik integrale karşılık gelir. Eliptik fonksiyonlarla merceği etkisini analiz etmek çok pratik olmadığından ötürü çoğunlukla bu tarz integral ifadeler içerdiği parametreler üzerinden seriye açılarak incelenir. Biz de benzer şekilde önce m_0 parametresine göre ikinci mertebeye kadar seriye açıp daha sonra Λ_0 parametresine göre de birinci mertebeye kadar seriye açarsak, elde edilen serinin her bir terimini integre ettikten sonra

$$\begin{aligned} \Delta\alpha = & -2\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} + m_0 \left(4 - 2\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} - 2\frac{\Lambda_0}{3} \right) + m_0^2 \left(\frac{15}{4}\pi - 4 \right) \\ & - m_0^2 \left(3\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} + 2\frac{\Lambda_0}{3} \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.28)$$

ifadesini buluruz. Bu sonuç önceden [143] çalışmasında farklı bir şekilde bulunmuştur.

5.3 Mannheim-Kazanas Uzay-Zamanı

5.3.1 Küresel Koordinatlar

Weyl yerçekiminde Mannheim-Kazanas çözümünün küresel koordinatlarda

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.29)$$

ile verildiğini detaylı bir şekilde 2.2 kısmında göstermiştik. Burada $f(r) = \sqrt{1 - 6m\gamma} - \frac{2m}{r} + \gamma r - kr^2$ alacağız. İncelediğimiz yerçekim merceği etkisi sonuçlarını, Schwarzschild uzay-zamanında bulunan sonuçla kıyaslanmanın kolay olması için, Newton potansiyel terimindeki katsayıyı m kütle parametresi gibi yazdık. MK çözümündeki β parametresini m 'ye dönüştürdüğümüzde, çözümdeki sabit terim kareköklü hale gelmektedir. Diğer iki parametre γ ve k , MK çözümündeki gibi sırasıyla doğrusal potansiyel katsayısı ve kozmik katkıyı ifade eden kuadratik terim katsayısıdır. Bundan sonra Λ kozmolojik sabitini, k ile ilişkilendirip $k = \frac{\Lambda}{3}$ alacağız.

Bu uzay-zamanda, doğrudan metrik üzerinden yazılan null jeodezik denklemi

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = r^4 \left[\frac{1}{b^2} + \frac{\Lambda}{3} - \frac{\sqrt{1 - 6m\gamma}}{r^2} + \frac{2m}{r^3} - \frac{\gamma}{r} \right], \quad (5.30)$$

olacaktır. Denklem görüldüğü gibi, arkaplan geometrisini belirleyen m, γ, Λ parametreleri ve ışığa ait b etki parametresini içerir. Sapma hesabına geçmeden önce, Kottler uzay-zamanında yaptığımız gibi, dönüm noktaları ve ufuk yarıçaplarını ortaya çıkaralım. Dönüm noktaları tanımdan elde edilen

$$\left(\frac{\Lambda}{3} + \frac{1}{b^2}\right) r^3 - \gamma r^2 - \sqrt{1 - 6m\gamma} r + 2m = 0, \quad (5.31)$$

cebirsel denkleminin pozitif reel köklerine karşılık gelirler. Yalnızca fiziksel olarak anlamlı olan durumları aktaracağız:

1. $0 < m^2 \left(\Lambda + \frac{3}{b^2}\right) \frac{\epsilon^2}{\eta^3} < 1/9$: İki dönme noktası ve bir de negatif kök vardır.

$$r_0 = 2\sqrt{\frac{\eta}{\Lambda + \frac{3}{b^2}}} \cos \frac{\pi - \Psi}{3} + \frac{\gamma}{\Lambda + \frac{3}{b^2}}, \quad (5.32)$$

$$r_+ = 2\sqrt{\frac{\eta}{\Lambda + \frac{3}{b^2}}} \cos \frac{\pi + \Psi}{3} + \frac{\gamma}{\Lambda + \frac{3}{b^2}}, \quad (5.33)$$

$$\text{ve } r_- = -2\sqrt{\frac{\eta}{\Lambda + \frac{3}{b^2}}} \cos \frac{\Psi}{3} + \frac{\gamma}{\Lambda + \frac{3}{b^2}}, \quad (5.34)$$

burada parametreler $\cos^2 \Psi = 9m^2 \left(\Lambda + \frac{3}{b^2}\right) \frac{\epsilon^2}{\eta^3}$, $\epsilon = 1 - \frac{\gamma^3}{3m(\Lambda + \frac{3}{b^2})^2} - \frac{\gamma}{4m} \frac{\sqrt{1 - 6m\gamma}}{\Lambda + \frac{3}{b^2}}$

ve $\eta = \sqrt{1 - 6m\gamma} + \frac{\gamma^2}{\Lambda + \frac{3}{b^2}}$ şeklinde tanımlanır.

2. $\Psi = 0$, yani $m^2 \left(\Lambda + \frac{3}{b^2}\right) \frac{\epsilon^2}{\eta^3} = 1/9$ olduğunda dönme noktaları, r_γ yarıçapındaki foton küresi üzerinde birleşirler. Dönme noktalarını değiştiren serbest parametre b etki parametresidir. Bu özel şart üzerinden, ışığın foton küresi üzerine çarpmasına karşılık gelen b_c kritik değeri diğer parametreler cinsinden çözümlerse

$$b_c^2 = \frac{54m^2}{(1 + 3m\gamma)\sqrt{1 - 6m\gamma} + 1 - 18m^2\Lambda} \quad (5.35)$$

bulunur. Foton küresi yarıçapı, (5.5) şartından

$$r_0 = r_+ = r_\gamma = \frac{1}{\gamma}(1 - \sqrt{1 - 6m\gamma}), \quad (5.36)$$

olarak bulunur.

MK uzay-zamanına özgü γ parametresi, $\gamma \rightarrow 0$ limitine giderken foton küresi yarıçapı, Schwarzschild uzay-zamanındaki $r_\gamma \rightarrow 3m$ değerine yakınsar. Dikkat edilirse foton küresi yarıçapı yalnızca kütle ve γ parametresi tarafından belirlenir. Kottler uzay-zamanındaki gibi burada da Λ kozmolojik sabit katkısı gözükmez. Bu da foton küresi kavramının tamamen sonlu bir yerel kütle dağılımı tarafından belirleneceğini gösterir. Kütle, içinde olduğu uzay-zamandan etkilenmiyor gibi görünür. Bu sonuçlar çembersel null jeodezik şartlarını kullanarak kolaylıkla bulunabilir [107].

Şimdi de kozmik ve olay ufkunu bulmak için $f(r) = 0$ denklemini çözelim:

$$\frac{\Lambda}{3}r^3 - \gamma r^2 - \sqrt{1 - 6m\gamma}r + 2m = 0. \quad (5.37)$$

Fiziksel olarak anlamlı çözümler $0 < m^2\Lambda\frac{\epsilon^2}{\xi^3} < 1/9$ şartı geçerliyken bulunabilir. Bu durumda iki tane dönüm noktası vardır:

$$r_c = 2\sqrt{\frac{\xi}{\Lambda}} \cos \frac{\pi - \delta}{3} + \frac{\gamma}{\Lambda}, \quad (5.38)$$

$$\text{ve } r_h = 2\sqrt{\frac{\xi}{\Lambda}} \cos \frac{\pi + \delta}{3} + \frac{\gamma}{\Lambda}, \quad (5.39)$$

burada parametrelerin tanımları $\cos^2 \delta = 9m^2\Lambda\frac{\epsilon^2}{\xi^3}$, $\epsilon = 1 - \frac{\gamma^3}{3m\Lambda^2} - \frac{\gamma}{4m} \frac{\sqrt{1-6m\gamma}}{\Lambda}$ ve $\xi = \sqrt{1-6m\gamma} + \frac{\gamma^2}{\Lambda}$ şeklindedir. Şimdi de sapma açısı hesabını, dönme noktalarını kullanarak ifade edelim.

Jeodezik denklem dönme noktaları cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\left(\frac{dv}{d\phi}\right)^2 = \sqrt{1 - 6m_0\gamma_0} (1 - v^2) + \gamma_0 (1 - v) + 2m_0 (v^3 - 1) \quad (5.40)$$

$$= 2m_0(1 - v)(v_+ - v)(v - v_-), \quad (5.41)$$

burada $v = \frac{r_0}{r}$ ve

$$v_{\pm} = \frac{1}{4m_0} \sqrt{1 - 6m_0\gamma_0} - 2m_0 \pm \sqrt{1 + 2m_0\gamma_0 + 4m_0\sqrt{1 - 6m_0\gamma_0} - 12m_0^2}.$$

Jeodezik denklem üzerinden sapma açısı

$$\Delta\alpha = 2 \int_{v_c}^1 \frac{dv}{\sqrt{2m_0(1 - v)(v_+ - v)(v - v_-)}} - \pi \quad (5.42)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2m_0(v_+ - v_-)}} F(p, q) - \pi, \quad (5.43)$$

şeklinde verilir. Burada $v_c = \frac{r_0}{r_c}$ ve $F(p, q)$ birinci cins eliptik integraldir. Eliptik integralin parametreleri $\sin p = \sqrt{\frac{(v_+ - v_-)(1 - v_c)}{(1 - v_-)(v_+ - v_c)}}$ ve $q = \sqrt{\frac{1 - v_-}{v_+ - v_-}}$ şeklinde tanımlanır. q parametresinin, \sqrt{m} üzerinden olan açılımı

$$q \approx \sqrt{2\gamma + 4\sqrt{m}} - \frac{3(\sqrt{2}\gamma + \sqrt{2})m^{3/2}}{\sqrt{\gamma + 2}} + \dots, \quad (5.44)$$

ve $F(p, q)$ 'nin q cinsinden olan asimptotik açılımı da

$$F(p, q) \approx p + q^2 \left(\frac{p}{4} - \frac{1}{8} \sin(2p) \right) + \frac{3}{256} q^4 (12p - 8 \sin(2p) + \sin(4p)) + \dots, \quad (5.45)$$

ile verilir [156]. Bu açılımları yerlerine yazarsak bunların sonucunda sapma açısını

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= m_0 \left(4 - 2\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} - 2\frac{\Lambda_0}{3} \right) - 2\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} + \gamma_0 \sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} \\ &+ m_0 \gamma_0 \left(2 + \frac{\Lambda_0}{3} \right) + m_0^2 \left(\frac{15\pi}{4} - 4 - 3\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} - 2\frac{\Lambda_0}{3} \right) \\ &+ m_0^2 \gamma_0 \left(\frac{15\pi}{4} - 4 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} \right) + \dots \end{aligned} \quad (5.46)$$

seri açılımı şeklinde buluruz. Açılımı, önce m_0 kütle parametresine göre ikinci mertebeye kadar daha sonra da γ_0 ve ardından Λ_0 parametresine göre birinci mertebeye kadar yapıyoruz.

5.3.2 Weyl Yerçekimi Koordinatları

Kısım 5.1.2'de radyal koordinat dönüşümü ve $\Omega^2 = \rho^2/r^2$ konformal çarpan yardımıyla, MK uzay-zaman metriğini Weyl yerçekimi koordinatlarında

$$ds^2 = - \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{2w} dt^2 + \frac{1}{B(\rho)} d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.47)$$

metriğine dönüştürebileceğimizi belirtmiştik. Dönüşümden elde ettiğimiz

$$\frac{\rho^2}{r^2} f(r) = \left(\frac{\rho}{\rho_c} \right)^{2w}, \quad (5.48)$$

$$\frac{\rho^2}{r^2} \frac{1}{f(r)} \left(\frac{dr}{d\rho} \right)^2 = \frac{1}{B(\rho)}, \quad (5.49)$$

fonksiyonel ve diferansiyel ilişkileri kullanarak, $B(\rho)$ için

$$B(\rho) = \frac{\rho^{2w-4}}{\rho_c^{2w}} \frac{1}{(du/d\rho)^2}, \quad (5.50)$$

ve radyal koordinat dönüşümlerini verecek olan

$$2mu^3 - \sqrt{1 - 6m\gamma} u^2 - \gamma u + \frac{\Lambda}{3} + \frac{\rho^{2w-2}}{\rho_c^{2w}} = 0, \quad (5.51)$$

eşitliklerini yazmak mümkündür. Bu kübik cebirsel denklemin kökleri radyal koordinat dönüşümlerinin terslerini bulmamızı sağlayacaktır. Bu kökler sayesinde $B(\rho)$ metrik fonksiyonu hesaplanabilecektir. (5.51) Kübik denklemin çözümleri

$$u_1 = \frac{1}{6m}(h + h^{-1} + \sqrt{1 - 6m\gamma}), \quad (5.52)$$

$$u_2 = \frac{1}{6m}(e^{i4\pi/3}h + e^{i2\pi/3}h^{-1} + \sqrt{1 - 6m\gamma}), \quad (5.53)$$

$$u_3 = \frac{1}{6m}(e^{i2\pi/3}h + e^{i4\pi/3}h^{-1} + \sqrt{1 - 6m\gamma}), \quad (5.54)$$

ile verilir. Burada

$$h(\rho) = \left[Q + \sqrt{Q^2 - 1}\right]^{1/3}, \quad Q(\rho) = \left[-\frac{\Delta_1}{\rho^{2(1-w)}} + \Delta_2\right], \quad (5.55)$$

tanımlamaları yapılmıştır. Köklerin içindeki parametreler ise

$$\Delta_1 \equiv \frac{54m^2}{\rho_c^{2w}} \quad \text{ve} \quad \Delta_2 \equiv (1 + 3m\gamma)\sqrt{1 - 6m\gamma} - 54m^2\frac{\Lambda}{3}, \quad (5.56)$$

şeklinde tanımlanır. Şimdi (5.50) denklemini kullanarak $B(\rho)$ metrik fonksiyonunu bulabiliriz. Biraz cebirsel hesaptan sonra

$$B_1(\rho) = \frac{3\rho^{2(1-w)}}{8(1-w)^2\Delta_1}(1 + h^2 + h^{-2})^2, \quad (5.57)$$

$$B_2(\rho) = \frac{3\rho^{2(1-w)}}{8(1-w)^2\Delta_1}(1 + e^{i2\pi/3}h^2 + e^{i4\pi/3}h^{-2})^2, \quad (5.58)$$

$$B_3(\rho) = \frac{3\rho^{2(1-w)}}{8(1-w)^2\Delta_1}(1 + e^{i4\pi/3}h^2 + e^{i2\pi/3}h^{-2})^2, \quad (5.59)$$

çözümlerini buluruz. Bunları, üçüncü bölümde küresel simetrik ve statik uzay-zamanda sabit hızla çembersel jeodezik üzerinde hareket eden yıldızlar için Weyl alan denklemlerinin çözümleri olarak bulmuştuk (denklem (3.33)). Böylece bu çözümlere alternatif bir yoldan ulaştığımız olduk. Yukarıdaki metrik fonksiyonunda mevcut olan $\Delta_{1,2}$ parametrelerinin, Weyl alan denklemlerinin çözümleri olarak ortaya çıkardığımız küresel geometriye ($k = 1$) karşılık gelen (3.33) metriği içerisindeki $C_{1,2}$ integrasyon sabitlerine sırasıyla karşılık geldiği hemen görülür. Bundan sonraki hesaplamalarda w parametresini, (5.1.2) kısmındaki gibi sıfırlıyoruz. Bu durumda dikkate alacağımız metrik

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{1}{B(\rho)}d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (5.60)$$

olacaktır. Bundan sonraki analizlerde ifadeleri daha kolay irdeleyebilmek için, $\cos \zeta = Q(v)$ şeklinde yeni bir tanımlama yapıp, biraz cebirsel hesaptan sonra, $B(v)$ fonksiyonunu trigonometrik bir formda yazacağız:

$$B_n(v) = \frac{1}{144m_0^2v^2} \left[1 + 2 \cos\left(\frac{2\zeta}{3} + (n-1)\frac{2\pi}{3}\right) \right]^2. \quad (5.61)$$

Fonksiyonun n etiketi, (1, 2, 3) değerlerine karşılık gelmektedir ve $m_0 \equiv \frac{m}{\rho_0}$ boyutsuz kütle parametresidir. Sapma açısını hesaplarken (5.71) içerisinde, Schwarzschild limitinde doğru sonuca götürdüğü için $B(v) = B_2(v)$ fonksiyonunu kullanacağız. Önceden de bahsettiğimiz gibi $w = 0$ durumunu dikkate alıyoruz, o zaman dönüşüm ifadeleri

$$\rho^2 = \frac{r^2}{f(r)}, \quad (5.62)$$

$$B(\rho) = \frac{r^4}{\rho^4} \left(\frac{d\rho}{dr} \right)^2, \quad (5.63)$$

olur. (5.60) metriği ile verilen bir uzay-zamanda ışığın null jeodezik denklemi için, $\theta = \pi/2$ düzleminde, hareket sabitleri enerji ve açısal momentum cinsinden,

$$\dot{\rho}^2 = B(\rho) \left(E^2 - \frac{L^2}{\rho^2} \right), \quad (5.64)$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}, \quad (5.65)$$

denklemleri yazılır. Efektif potansiyeli $V_{\text{ef}} = B(\rho)(E^2 - L^2/\rho^2)$ olarak tanımlarsak o zaman dönme noktaları $V_{\text{ef}} = 0$ ve foton küresinin yeri de dönme noktası şartıyla birlikte $V'_{\text{ef}} = 0$ şartıyla belirlenir. Dönme noktaları :

1. $\rho_1 = b$,
2. $B(\rho_2) = 0$, radyal koordinatlarına karşılık gelir.

Metrik fonksiyonu

$$B_2(\rho) = \frac{\rho^2}{144m_0^2b^2} \left[1 + 2 \cos\left(\frac{2\zeta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \right]^2, \quad (5.66)$$

olduğundan ikinci şartın $\zeta_0 = (0, \pi)$ değerlerine karşılık geldiği hemen görülebilir. Yaptığımız $\cos \zeta$ trigonometrik tanımlamasını parametreler cinsinden yeniden yazalım:

$$\cos \zeta = (1 + 3m_0\gamma_0) \sqrt{1 - 6m_0\gamma_0 - 54m_0^2(\Lambda_0/3 + v^2)},$$

burada kütleinin dışındaki diğer boyutsuz parametreler $\Lambda_0 \equiv \Lambda\rho_0^2, \gamma_0 \equiv \gamma\rho_0$ şeklinde tanımlanır. Böylece $\zeta_0 = \pi$ değeri için ikinci şarta karşılık gelen

$$\rho_2^2 = \frac{54m^2}{(1 + 3m\gamma)\sqrt{1 - 6m\gamma} + 1 - 18m^2\Lambda}, \quad (5.67)$$

dönüm noktası belirlenir. $\zeta_0 = 0$ değeri negatif olduğundan fiziksel olarak anlamlı değildir. Dönüm noktalarını veren şartla beraber $V'_{\text{ef}} = 0$ türev şartı ρ_2 değerini foton küresinin radyal koordinatı olarak verir. Özel olarak $\rho_2 = b$ olması mümkündür. (5.64) denkleminde de görüldüğü gibi her zaman $\rho \geq b$ olmak zorundadır. Null jeodezik üzerinde ρ 'nun alabileceği en küçük değer $\rho = b$ dir. Etki parametresi bu kritik değeri aldığı anda ışık foton küresi üzerine çarpar ve kararsız bir şekilde çember yörüngede döner. Bu durumda kritik değer

$$b_c^2 = \frac{54m^2}{(1 + 3m\gamma)\sqrt{1 - 6m\gamma} + 1 - 18m^2\Lambda}, \quad (5.68)$$

olur. Diğer durumlarda $b > b_c$ değerine sahip ışık $\rho_1 = b$ dönüm noktasında merkeze en yakın noktaya gelir ve ardından uzaklaşır. Şimdi de $\rho = \frac{r}{\sqrt{f(r)}}$ koordinat dönüşümü ile ρ koordinat değer aralıklarını belirleyelim. En küçük değeri $\rho' = 0$ ve $\rho'' > 0$ ile belirleyebiliriz. Bu şartları hesaplırsak

$$\rho' = 0 \quad \rightarrow \quad 2f(r) = rf'(r), \quad (5.69)$$

$$\rho'' = \frac{1}{2rf^{3/2}} \left(4f + \frac{4m}{r} + \frac{2\Lambda}{3}r^2 \right) > 0 \quad (5.70)$$

buluruz. İlk denklem MK koordinatlarında foton küresinin radyal koordinatını verir: $r_\gamma = (1 - \sqrt{1 - 6m\gamma})/\gamma$. $f(r_\gamma)$ pozitif olduğundan ötürü bu $\rho_\gamma = r_\gamma/\sqrt{f(r_\gamma)}$ noktası ρ koordinatının en küçük değeridir. Üstelik (5.63) eşitliğinden ötürü $\rho' = 0 \rightarrow B(\rho) = 0$ olduğundan dolayı bu nokta weyl koordinatlarında da foton küresinin radyal koordinatına karşılık gelir. Öte yandan $f(r) = 0$ olan ufuk noktaları bu koordinatlarda $\rho \rightarrow \infty$ sonsuza gider. Sonuç olarak radyal koordinat değer aralıkları

$$\rho \in [\rho_\gamma, \infty)$$

olur. $B(\rho)$ her zaman pozitif olduğundan ve o noktada koordinat teğet vektörleri karakter değiştirmedikenden ötürü $B(\rho) = 0$ noktası sadece foton küresine karşılık gelir.

Şimdi de sapma açısını verecek olan

$$\Delta\alpha = 2 \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{B(v)(1 - v^2)}} - \pi. \quad (5.71)$$

integralini ele alalım. İntegralin değişkeni olan $v = \frac{\rho_0}{\rho} = \frac{b}{\rho}$, eşitlikten de görüldüğü gibi, merkezi kütleye en yakın olan ρ_0 noktasına göre boyutsuzlaştırılmıştır. Önceki kısımda sapma açısını irdelerken yaptığımız gibi önce integrali alıp sonucu analitik bir fonksiyon ile ifade ettikten sonra parametrelere göre seriye açmak yerine, bu sefer önce integral içindeki ifadeyi parametrelere göre seriye açıp daha sonra da integrali alacağız.

O zaman $B_2(v)$ metrik fonksiyonunu integral içerisindeki haliyle önce m_0 'a göre ikinci mertebeye kadar, diğer parametreleri sabit tutarak seriye açalım:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{B(v)}} &= \frac{12 m_0 v}{1 + 2 \cos(2\theta/3 + 2\pi/3)} \\ &= 12v \left[\frac{1}{12\sqrt{v^2 + k_0 + \gamma_0^2/4}} + \frac{m_0}{6} \left(1 - \frac{\gamma_0^3/8}{(v^2 + k_0 + \gamma_0^2/4)^{3/2}} \right) \right. \\ &\quad + \frac{5m_0^2}{8} \left(\sqrt{v^2 + k_0 + \gamma_0^2/4} + \frac{3\gamma_0^4}{16(v^2 + k_0 + \gamma_0^2/4)^{3/2}} \right) \\ &\quad \left. + \frac{5m_0^2}{8} \left(\frac{\gamma_0^6}{90(v^2 + k_0 + \gamma_0^2/4)^{5/2}} \right) \right] + \dots \end{aligned} \quad (5.72)$$

Bu açılımı (5.71) içerisine yerleştirip integrali alırsak, sapma açısı için

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= -\pi + 4m_0 + 15m_0^2 I_{-1} + 2I_1 - \left(\frac{m_0\gamma_0^3}{2} - \frac{45m_0^2\gamma_0^4}{16} \right) I_3 \\ &\quad + \frac{3m_0^2\gamma_0^6}{16} I_5 + \dots, \end{aligned} \quad (5.73)$$

elde ederiz. Burada $I_n \equiv \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2 + \sigma^2)^{n/2} \sqrt{1-x^2}}$, $\sigma^2 \equiv \Lambda_0/3 + \gamma_0^2/4$, integrali tanımlanır.

Gerekli integrallerin açık ifadeleri aşağıda verilmiştir:

$$\begin{aligned} I_{-1} &= \frac{1}{2}(1 + \sigma^2) \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2}} + \frac{\sigma}{2}, \quad I_1 = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2}}, \\ I_3 &= \frac{1}{(1 + \sigma^2)\sigma}, \quad I_5 = \frac{1}{3} \frac{(1 + 3\sigma^2)}{(1 + \sigma^2)^2 \sigma^3}. \end{aligned}$$

Bu ifadelerin hepsi (5.73) sapma açısı açılımına yerleştirilirse

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= 4m_0 - \pi + \frac{1}{(1 + \sigma^2)\sigma} \left(\frac{45m_0^2\gamma_0^4}{16} - \frac{m_0\gamma_0^3}{2} \right) + \frac{m_0^2\gamma_0^6}{16} \frac{1 + 3\sigma^2}{\sigma^3(1 + \sigma^2)^2} \\ &\quad + 2 \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2}} + 15m_0^2 \left(\frac{\sigma}{2} + \frac{1 + \sigma^2}{2} \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \sigma^2}} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (5.74)$$

sonucu elde edilir. Bu açılımın sadece m_0 kütle parametresine göre yapıldığını dikkate alarak, diğer parametreler üzerindeki incelemeye geçmeden önce $\Lambda_0 \rightarrow 0$ ve $\gamma_0 \rightarrow 0$ limitlerini kontrol edelim. Bu limitte

$$\Delta\alpha = 4m_0 + \frac{15\pi m_0^2}{4} + \dots, \quad (5.75)$$

beklendiği gibi Schwarzschild metriğinden bulunan fiziksel (koordinattan bağımsız) açılımın çıktığı görülür. Etki parametresi b 'ye göre boyutsuzlaştırılmış m_0 kütle parametresine bağlıdır.

Bulduğumuz (5.74) sapma açısı, Weyl koordinatlarında $\rho_0 = b$ olduğundan, doğrudan fiziksel ölçülebilir $m_0 = m/b$, $\Lambda_0 \equiv \Lambda b^2$, $\gamma_0 \equiv \gamma b$ parametrelerine bağlı olur. Şimdi diğer parametrelere göre bu açığı seriye açalım. Önce γ_0 daha sonra Λ_0 'a göre birinci mertebeye kadar açılımı yaparsak

$$\Delta\alpha = 4m_0 + \frac{15\pi}{4}m_0^2 - 2\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} + \frac{15\pi}{4}m_0^2\frac{\Lambda_0}{3} + \dots \quad (5.76)$$

buluruz. Bulmuş olduğumuz bu fiziksel sapma açısı ifadelerini, karşılaştırma yapabilmek amacıyla

$$\rho_0 = \frac{r_0}{\sqrt{f(r_0)}}, \quad (5.77)$$

koordinat dönüşümünü kullanarak MK küresel koordinatlarına çevirelim. Koordinat dönüşümünü merkezi kütleyle en yakın olan nokta üzerinde yapıyoruz. Bu nokta MK koordinatlarında r_0 ve weyl koordinatlarında ρ_0 ile gösterilir. Böylece MK uzay-zamanında sapma açısını

$$\begin{aligned} \Delta\alpha = & m_0 \left(4 - 2\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} - 2\frac{\Lambda_0}{3} \right) - 2\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} + \gamma_0\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} \\ & + m_0\gamma_0 \left(2 + \frac{\Lambda_0}{3} \right) + m_0^2 \left(\frac{15\pi}{4} - 4 - 3\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} - 2\frac{\Lambda_0}{3} \right) \\ & + m_0^2\gamma_0 \left(\frac{15\pi}{4} - 4 - \frac{3}{2}\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (5.78)$$

olarak buluruz. Bu sonuç önceki kısımda bulduğumuz (5.46) ana sonuçla birebir aynıdır. Şimdi bundan sonraki kısımda iki özel alt durumu inceleyeceğiz: 1) Kottler uzay-zamanında bulunmuş olan [143] kaynağındaki sonuçla karşılaştıracığımız $\gamma = 0$ durumuna ve 2) Weyl yerçekiminin Schwarzschild geometrisine olan etkisini incelemek için $\Lambda = 0$ durumuna bakacağız.

$\gamma = 0$ **durumu**

Weyl yerçekiminde Kottler uzay-zaman metriğini bulabilmek için $\gamma = 0$ almamız yeterlidir. O zaman metrik fonksiyonu

$$B(v) = \frac{1}{144m_0^2v^2} \left[1 + 2 \cos\left(\frac{2\zeta}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \right]^2, \quad (5.79)$$

ve bu durumda $\cos \zeta = 1 - 54m_0^2(\Lambda_0/3 + v^2)$ olur. Bağlı olduğu parametreler yalnızca $m_0 = m/\rho_0$ ve $\Lambda_0 = \rho_0^2\Lambda$ dir. İncelemeyi Weyl koordinatlarında yaptığımız için, $\rho_0 = b$ olduğundan, sonuçlar koordinat etkilerinden bağımsızdır. Sapma açısı (5.74) üzerinde Λ_0 'a göre birinci mertebe bir açılım yaparsak

$$\Delta\alpha = -2\sqrt{\frac{\Lambda_0}{3}} + 4m_0 + \frac{15\pi}{4}m_0^2 + \frac{15\pi}{4}m_0^2\frac{\Lambda_0}{3} + \dots \quad (5.80)$$

bulunacaktır. (5.77) koordinat dönüşümünü kullanarak Kottler uzay-zamanında çıkarttığımız (5.28) ifadesini buluruz. Bu sonuç [143]'in (55) nolu denklemleriyle uyudur. Bulduğumuz ifadedeki parametrelerin sıfırlanması durumunda, zayıf alan yaklaşımıyla elde edilen Schwarzschild sonuçlarına erişebiliyor olmayı kontrol etmek, sonuçların doğruluğu için önemli bir gösterge olur. Kottler uzay-zamanında kozmolojik sabiti sıfırlamak, yalnızca kozmolojik sabit ile belirlenen kozmik ufkun konumunun sonsuza gitmesi anlamına gelir. Böylece Schwarzschild metriği için yapılan hesaplama şartlarını, yani gözlemcinin sonsuzda oluşu gibi şartları elde etmiş oluruz. Sonuç olarak benzer sapma açısını bulmak önemli bir kriter olur. Weyl koordinatlarında elde edilmiş olan (5.75) limiti ile MK küresel koordinatlarındaki (5.78)'den bulunacak olan

$$\Delta\alpha = 4m_0 + m_0^2 \left(\frac{15\pi}{4} - 4 \right) + \dots, \quad (5.81)$$

limitin farklı oluşunun sebebi, MK koordinatlarında boyutsuzlaştırma için ($m_0 = m/r_0$) merkezi kütleyle en yakın r_0 noktasının kullanılmış olmasıdır. Oysa Weyl koordinatlarında bu nokta $\rho_0 = b$, yani etki parametresine eşit olduğundan ($m_0 = m/b$) iki limit ifadesi görünürde farklı çıkar. Eğer MK koordinatlarında en yakın dönüm noktasını veren (5.31) denklemden ($\Lambda \rightarrow 0$ durumunda) etki parametresi r_0 cinsinden çözülür ve (5.75) limitine yerleştirilirse, m 'nin ikinci mertebe açılımında aynı sonuç bulunur. Bu durumu dikkate alarak baktığımızda, [143] çalışması Schwarzschild limitini doğru elde ederken, Ishak ve Rindler'in [134] çalışmasında bulunan sonuç ne koordinat parametresi r_0 cinsinden olan yukarıdaki sonuçla ne de b cinsinden olan (5.75) ifadesiyle uyudur. Buna karşın [152] ve [157] çalışmaları uyumlu bir limit sonucu elde eder.

$\Lambda = 0$ durumu

$\Lambda = 0$ durumunda, sapma açısı için bulmuş olduğumuz (5.78) sonucu

$$\Delta\alpha = 4m_0 + 2m_0\gamma_0 + m_0^2(1 + \gamma_0) \left(\frac{15\pi}{4} - 4 \right), \quad (5.82)$$

olur. Bu sonuç, γ MK parametresinin sapma açısına pozitif katkı yaptığını gösteriyor. Bulduğumuz sonucu literatürde olan diğer sonuçlarla karşılaştırdığımızda, bu merteye kadar [147] çalışmasında elde edilen sonuçlarla (makalede denklem (35)) uyumlu olduğumuzu görüyoruz.

Sapma açısında γ içeren terimlere baktığımızda, birinci merteye olan $2m_0\gamma_0$ terimi etki parametresinden bağımsızdır. Oysa son terim $\frac{m^2}{b^2}(1 + \gamma b)$ çarpanından ötürü etki parametresinin tersiyle ilişkilidir. Böylece galaksilerin dış kısımlarına gidildikçe ya da galaksi kümeleri ölçeğinde yerçekim mercekleme etkisi bu terim dolayısıyla artacaktır.

Diğer Çalışmalarla Karşılaştırma

Literatürde, Genel Görelilik sonuçlarına getirilen üç farklı tipte birinci merteye γ düzeltilmesi mevcuttur [147, 158].

1) γ_0 parametresi [119, 120, 127, 146] kaynaklarında negatif bir şekilde buna karşın [159] kaynağında pozitif bir katkı olarak ortaya çıkmıştır. Negatif katkı açıkça yanlış bir sonuçtur çünkü, [125] kaynağında da belirtildiği gibi etki parametresi büyüdükçe mercekleme etkisi kaybolur. Bu yanlış sonucu, bu tezde ortaya koyduğumuz yaklaşımla elde ettiğimiz sapma açısında yanlış sırada yapılmış bir seri açılımı olarak elde edebiliriz. (5.74) ifadesini önce Λ daha sonra da γ 'ya göre açarsak, koordinat dönüşümü sonrası MK koordinatlarına geçildiğinde ve $\Lambda = 0$ yapıldığında

$$\Delta\alpha = 4m_0 - \gamma_0 + m_0\gamma_0 + m_0^2 \left(\frac{15\pi}{4} - 4 \right) + m_0^2\gamma_0 \left(\frac{15\pi}{4} - \frac{11}{2} \right), \quad (5.83)$$

elde ederiz.

Birçok kaynak [124–127, 146, 147, 158, 159] Rindler ve Ishak'ın [123] çalışmasındaki (16) denklemiyle verilen bükülme formülünü ışığın sapmasını belirlemek için kullanır. Bu formül, metrik fonksiyonu $f(r)$ üzerinden katkı yapan Λ 'yı içerir. Null jeodezik denklemi Λ 'dan bağımsızdır ve böylece ışığın sapmasına standart hesaplama yoluyla herhangi bir şekilde katkı yapmaz. Λ , Rindler-Ishak bükülme formülünde doğrusal olarak ortaya çıktığından, seri açılımında parametrelerin sırasını seçmek gibi bir durum söz konusu değildir. Sapma açısında parametrelere göre seri açılımının yanlış sırada yapılması, γ_0 'nın yanlış işaretle gelmesinin [127, 146] sebebi gibi görünmektedir. [119, 120] kaynaklarında hesaplama içinde Λ çok önceden yok olduğu için, Λ 'ya göre seriye açmak söz konusu değildir. [124–126, 158, 159] kaynaklarında, [127, 146]

çalışmalarına nazaran γ katkısını farklı olarak ortaya çıkmasının sebebi, hesaplama boyunca γ terimlerini ya tutmaları ya da tamamen yok saymalarıdır.

2) [124, 126, 158]'nin $m_0^2\gamma_0$ terimleri (5.82) ifadesinde son terim olarak ortaya çıkmaktadır.

3) [147]'in $m_0\gamma_0$ terimi (5.82) formülünde ikinci terim olarak görünür. [147]'deki sapma açısı formülü, bizim çalışmada kullandığımız formülden farklı olmasına rağmen benzer terim ortaya çıkması ilginçtir. Bu bakımdan seçilen farklı açı tanımları γ terimlerinde kendini göstermemektedir. [147]'in sonucu, Rindler-Ishak bükülme açısı formülünü kullanmasına rağmen [116, 124–127, 146, 158, 159] 'nin sonuçlarından farklıdır. Bu sonucun ortaya çıkmasında, kozmolojik ufku yarıçapının Λ ile belirleniyor olması etkilidir. Bu faktör, seri açılımında Λ ile γ 'nın etkileşimi sonucu Λ 'nın çok karmaşık terimlerinin ortaya çıkmasına yol açmıştır.

6 SONUÇ

Bu çalışmamızda galaksi dönme eğrilerinde gözlemlenen düzleşme eğilimini, karanlık madde varsayımı yapmaksızın geometrik bir yolla açıklamaya çalıştık. Galaksilerin dış bölgelerinde dönme hızlarının mesafe ölçeğinden bağımsız bir şekilde düzleşme davranışı göstermesi [31] ve bunun sonucu olarak böyle bölgelerde yerçekiminde bir yerel ölçek değişmezliğinin var olabileceği dikkatimizi çeken bir noktadır. Böylece eğer yerçekimi kuramını Genel Görelilik gibi bir metrik kuram olarak alırsak, bu bölgelerde geçerli olması gereken kuramın da yerel ölçek simetrisine sahip bir metrik kuram olması gerekir. Bu özelliğe sahip bir metrik kuram yalnızca Weyl yerçekimidir. Böylece Weyl yerçekimi kuramı galaksinin dış bölgelerinde geçerli olan yerçekimi olaylarını açıklayabilmelidir. Bu durumda galaksi merkezinden uzakta olan objelerin aynı dönme hızına sahip olabildikleri bir özel geometriyi Weyl kuramının bir çözümü olarak belirleyebilmemiz gerekir. Weyl alan denklemlerini, galaksilerin dış bölgelerinde geçerli olacak bu özel geometriyi belirlemek amacıyla çözdük ve üç farklı katı açı geometrisine sahip çözümleri ortaya koyduk.

Ekspansiyel dağılıma sahip disk ve merkezi küresel şişkinlik bölgesinin birleşiminden oluşan galaksi modellerinin kabulleri altında, Einstein-Weyl aksiyonundaki skaler değişmezlerini (3.49) formüllerini kullanarak hesapladık. Böylece aksiyondaki Weyl teriminin galaksinin dış bölgelerinde Einstein-Hilbert terimine baskın olduğunu gösterdik. Ulaştığımız bu sonuç, Weyl yerçekiminin galaksinin dış bölgelerinde geçerli olabileceği iddiasını desteklemektedir. Burada Einstein-Weyl kuramının alan denklemlerinin tam çözümünün yapılmasına gerek olmadığını belirtelim. Farklı bölgelerde farklı terimler baskın olduğu için baskın olan terimin çözümlerini kullanmak uygun olacaktır. Yoğunluğun yüksek olduğu yerlerde Einstein kuramı geçerlidir ve uygulanabilirlik sınırları (3.49) eşitlikleri tarafından belirlenir. Yoğunluğun düşük olduğu yerlerde ise Weyl kuramı baskın hale geçer ve parçacıkların yörüngeleri Weyl kuramının çözümleri tarafından belirlenir. Bu bakış açısı [160] çalışmasında takip edilen yakla-

şıma benzerdir.

Einstein-Weyl aksiyonu içerisinde Weyl terimi, galaksinin dış bölgelerine gidildikçe baskın olmakla beraber, morötesi (UV) limitte Genel Görelilik'in renormalize olabilmesi için eklenmesi gereken düzeltme terimleri (counterterm) olarak işlev görür [7, 161, 162]. Bu limitte çiftlenim sabiti α ise negatif olan beta fonksiyonuna göre enerjiye bağlı olan bir parametredir [162, 163]. Weyl teriminden gelecek olan muhtemel morötesi etkiler galaksinin merkezindeki karadeliğin olay ufku içerisinde kalacağından ötürü dış bölgelerdeki dinamiğe bir etkisi yoktur. Kızılaltı (IR) bölgedeyse, Einstein-Hilbert terimine düzeltme olarak gelen Weyl terimi gibi yüksek türevli terimlerin asıl kuramın ters propagatörünün türev açılımından geleceği düşünülür [162]. Böylece çiftlenim sabitleri pertürbatif açılım sonucu ortaya çıkarlar. Kızılaltı bölgedeki asıl kuramın efektif hali olarak görünen [114, 162, 163] bu kuramda pertürbatif düzeltmeler çiftlenim sabitlerinin enerji ölçeğinde koşmasına yol açar.

Çalışmada dikkate aldığımız ölçekler galaksi ve galaksi kümeleri ölçekleridir. Bu ölçekler kızılaltı ölçeklere karşılık gelir. Önceki paragrafta ifade ettiğimiz gibi küçük mesafe (UV) ölçeklerinde Einstein-Weyl yerçekimi temel bir kuram olarak alındığında bulunacak α parametresi ile büyük ölçekte bir efektif teori olarak alındığında bulunacak α değerleri farklı olacaktır. Bundan dolayı α parametresi dikkate alınan sistemin ölçeğine bağlı bir değere sahip olacaktır. Güneş sisteminde, galaksinin iç bölgesi ve dış bölgelerinde farklı değerler alır. Bu çalışmadaki amacımız, α parametresinin değerini hesaplamaktan daha çok Einstein-Weyl kuramındaki terimlerden dikkate alınan yerçekim olaylarının ölçeklerine bağlı olarak birinin diğerine baskın olacağını göstermektir.

Üçüncü bölümde detaylı bir şekilde çıkarımını gösterdiğimiz Weyl yerçekimi kuramı için bulduğumuz çözümü, uzak bir kaynaktan gelen ışığın bir galaksi kümesi tarafından bükülmesi sonucu oluşan sapma açısını hesaplamak için kullandık. Bulmuş olduğumuz metrik çözümü üzerine olan ilk gözlemimiz, çözümün MK çözümüne konformal denk olduğudur. Weyl kuramının küresel simetrik ve statik herhangi bir metrik çözümü için de bu özelliğin geçerli olduğunu üçüncü bölümde göstermiştik. Dolayısıyla bulduğumuz çözüm MK çözümüne göre farklı bir konformal faktöre sahiptir. Bu faktör ışık ışınlarını etkilememekle birlikte kütleli parçacıkların hareketlerini belirleyen jeodezikleri değiştirmektedir. Böylece ışığın hareketi farklı fakat konformal denk olan metrikler için değişmediğinden dolayı γ MK parametresinin işareti ve değeri

açısından vardığımız sonuçlar geçerli olmaktadır.

Schwarzschild-de Sitter (Kottler) uzay-zamanında yaptığımız sapma açısı hesabı Λ katkısını içerir. Bu katkı literatürdeki önceki çalışmalardan daha farklı bir şekilde ortaya çıkar. Bu farklılığın sebebi, pertürbatif açılımın hangi parametrelerle nerede ve nasıl gerçekleştirildiğine çok kuvvetli bir şekilde bağlı olmasından gelir. Bu parametreler yerçekim merceklelerinin kütlesi m , kozmolojik sabit Λ ve γ MK parametresidir. Pertürbatif açılımın hangi sırayla gerçekleştirildiği son derece önemlidir. Pertürbatif açılımların önce m daha sonra γ ve sonunda Λ sıralamasıyla yapılmasının matematiksel olarak doğru olduğunu bulduk, çünkü diğer türlü önce Λ sonra γ olması durumunda yüksek dereceli terimlerin değeri düşük dereceli olanlardan daha büyük olmaktadır. Bu pertürbatif açılım düşüncesine tamamen terstir. γ MK parametresi olmadığı zaman ortaya çıkardığımız sonuç [143] çalışmasında elde edilmiş olan sonuçla örtüşür. MK parametresini içeren sapma açısı ifadesi literatürdeki birçok sonuçtan farklıdır; [147] referansında ulaşılmış sonuçla da kısmen örtüşür. Bulmuş olduğumuz sonuçları [128] referansında kullanılan yöntemle karşılaştırmak amacıyla Gauss-Bonnet teoreminin [139] kaynağındaki uygulanma şeklini takip ederek ışığın sapma açısını MK parametresini içerecek şekilde hesapladık.

Einstein-Weyl kuramının, galaksiye ait maddenin varlığında en azından sayısal olarak yapılacak çözümlerini kullanarak, galaksinin merkezine belirli uzaklıktaki kütleli parçacık için kinematik yolla çıkarılmış olan dönme hız ifadesini konuma bağlı olarak hesaplamak bu tez kapsamında gelecekte yapmayı düşündüğümüz bir çalışmadır.

A Gauss-Bonnet Teoremi

Yüzeylerin Eğrilikleri

Yüzeyleri, geometrik özellikleri bakımından incelemenin en basit yolu 3-Boyutlu Öklit uzayı \mathbb{R}^3 içerisine gömülü olduklarını düşünmek ve böylece temel geometrik yapıları yüzeylerin üzerinde tanımlamaktır. Yerçekim mercekle etkisini Gauss-Bonnet teoremi ile hesaplayabilmek için gerekli olan yüzeylerin ve eğrilerin eğriliği kavramlarından kısaca bahsedeceğiz. Bu kısım hesap detaylarından daha çok yöntemin kavramsal olarak daha iyi anlaşılmasına yönelik olacak. Daha detaylı inceleme için [164–166] kaynaklarına bakılabilir.

Şimdi bir yüzey üzerindeki noktaları \mathbb{R}^3 içerisinde, tamamen keyfi bir şekilde, bir $\vec{r}(u^1, u^2)$ yer vektörü ile gösterelim. Burada (u^1, u^2) sıralı ikilisi noktanın yüzey üzerindeki yerel koordinatlarını ifade eder. Konum vektörünün yüzey koordinatlarına olan fonksiyonel bağılılığı C^r , $r \geq 2$ sınıfından, yani en az iki kez türevlenebilir olsun. Yüzey üzerinde belirli bir P noktasından geçen keyfi bir c eğrisi düşünelim :

$$u^1 = u^1(s), u^2 = u^2(s) \quad (\text{A.1})$$

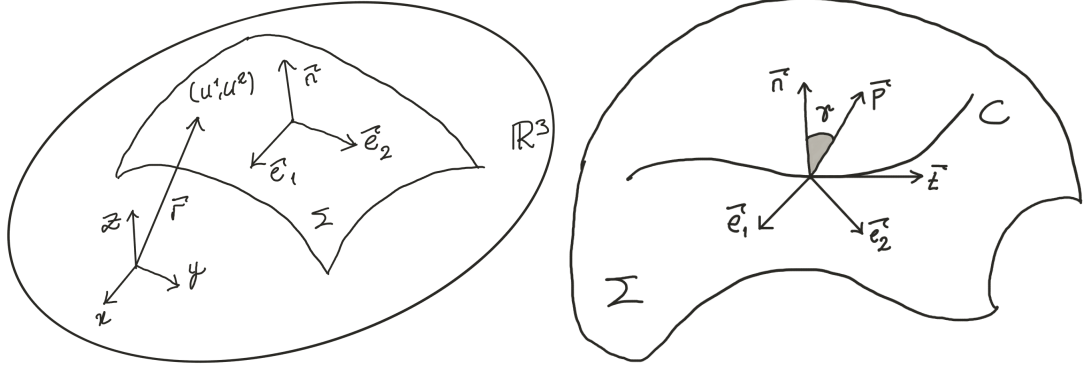
Burada fonksiyonlar C^r , $r \geq 2$ sınıfından olsun ve s eğri uzunluğunu ifade etsin. Eğrinin birim teğet vektörünü $\vec{t} \equiv \frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}}$ ve birim normal vektörünü de $\vec{p} \equiv \frac{d\vec{t}}{ds} / \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|$ ile gösterelim. Yüzeyin teğet vektörlerini $\vec{e}_\alpha \equiv \frac{\partial \vec{r}}{\partial u^\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) ile ve birim normal vektörünü de

$$\vec{n} \equiv \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 / \left| \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 \right|,$$

ile gösterirsek bu durumda yüzeyin üzerinde kurulmuş olan $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}\}$ bazı 3-boyutlu \mathbb{R}^3 uzayını gerer.

Böylece hem yüzey üzerindeki hem de \mathbb{R}^3 içindeki keyfi bir vektörü bu bazda ifade edebiliriz. Yüzey üzerindeki c eğrisinin birim normal vektörü ile yüzeyin birim normal vektörü arasındaki açı γ olsun:

$$\cos \gamma = \vec{p} \cdot \vec{n}$$



Şekil A.1: 3-Boyutlu Öklid Uzayında bir yüzey ve üzerindeki teğet vektörler ve birim normal vektörü. Yüzey üzerindeki c eğrisinin \mathbf{t} teğet vektörü ve \mathbf{p} birim normal vektörü

Eğrinin eğriliğini $\kappa \equiv |\dot{\mathbf{t}}(s)|$ gösterirsek

$$\kappa \cos \gamma = \ddot{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{n}}, \quad (\text{A.2})$$

ifadesini yazabiliriz. Konum vektörünün türevi yüzey üzerinde eğri boyunca alındığından ötürü zincir kuralıyla yüzey koordinatları cinsinden yeniden yazılabilir:

$$\ddot{\mathbf{r}} = \vec{e}_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + \vec{e}_\alpha \ddot{u}^\alpha,$$

burada $\vec{e}_{\alpha\beta} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}$. Böylece önceki eşitliğin sağ tarafı

$$\ddot{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = K_{\alpha\beta} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta, \quad (\text{A.3})$$

burada $K_{\alpha\beta} \equiv \vec{e}_{\alpha\beta} \cdot \vec{\mathbf{n}}$, \mathbb{R}^3 uzayına gömülü yüzeyin şekli hakkında bilgi verecek bir tensördür ve yüzeyin ikinci temel formu yada dış eğrilik olarak adlandırılır. Yüzeyin teğet ve normal vektörü arasındaki $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$ ilişkisinden hareketle

$$K_{\alpha\beta} = -\vec{e}_\alpha \cdot \vec{\mathbf{n}}_\beta,$$

yazılabilir. Yüzeyin birinci temel formu olan metriği

$$I = ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = d\vec{\mathbf{r}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

şeklinde bir skaler çarpım olarak yazılabilir. İkinci temel form ise

$$II = K_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta = -d\vec{\mathbf{r}} \cdot d\vec{\mathbf{n}}$$

şeklinde yazılır. İfadelerden de görüldüğü gibi bu nicelikler yüzeyin kordinat seçimin-den bağımsızdır. (A.3) ve birinci temel form (A.2) eşitliğine yerleştirilirse

$$\kappa \cos \gamma = \frac{K_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}{g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta} \quad (\text{A.4})$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Son ifadeyi geometrik olarak yorumlayabiliriz. Yüzeyin normal vektörü ve P noktasından geçen c eğrisinin teğetinin belirlediği düzlemin (normal düzlem) yüzey ile olan kesişimini düşünelim. κ , c eğrisinin P noktasındaki eğriliği olduğundan açıkça normal düzleminin doğrultusuna bağlıdır. γ açısı eğrinin \vec{p} birim normal vektörünün yüzey normaliyle olan açısı olduğundan normal düzleminin doğrultusuna açıkça bağlıdır. Böylece (A.4) eşitliği yüzeyin üzerinde P noktasında doğrultuya bağlı bir eğrilik tanımlar:

$$\kappa_n = \frac{K_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}{g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta}, \quad (\text{A.5})$$

bu **normal eğrilik** olarak adlandırılır. (A.4)'ün sağ tarafından açıkça görüleceği gibi bir maksimum ve bir de minimum değere sahiptir $-\kappa \leq \kappa_n \leq \kappa$. Bu son eşitlikten

$$(K_{\alpha\beta} - \kappa_n g_{\alpha\beta}) l^\alpha l^\beta = 0, \quad (\text{A.6})$$

burada $l^\alpha = du^\alpha$ normal düzlemin yüzeye kesiştiği doğrultuyu gösteren vektördür. Bu ifadeyi kullanarak normal eğriliğin ekstremum olduğu doğrultuyu ve değerini bulabiliriz. Normal eğriliğin ekstremum olma şartı $d\kappa_n/ds = 0$ dır. Bu şartı dikkate alarak (A.6)'nın doğrultu vektörüne göre türevini alırsak

$$\frac{\partial}{\partial l^\alpha} [(K_{\alpha\beta} - \kappa_n g_{\alpha\beta}) l^\alpha l^\beta] = 2 (K_{\alpha\beta} - \kappa_n g_{\alpha\beta}) l^\beta, \quad (\text{A.7})$$

ve buradan

$$(K_{\alpha\beta} - \kappa_n g_{\alpha\beta}) l^\beta = 0 \quad (\text{A.8})$$

şeklinde bir genelleştirilmiş özdeğer problemine ulaşırız. Böylece özdeğerler κ_n normal eğriliklerinin ekstremum değerlerini ve özvektörler de aradığımız l^α doğrultularını verir. Özdeğer problemine karşılık gelen karakteristik denklem

$$\kappa_n^2 - K_\alpha^\alpha \kappa_n + \det(K_{\alpha\beta})/\det(g_{\alpha\beta}) = 0 \quad (\text{A.9})$$

olur. Denklemin köklerine κ_1, κ_2 dersek buradan yüzeyin **Gauss eğriliğini** ve **Ortalama eğriliğini** sırasıyla

$$K = \kappa_1 \kappa_2 \quad H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2 \quad (\text{A.10})$$

olarak tanımlarız. Denklemin kökleri asal eğrilik ve bu köklere karşılık gelen doğrultular ise asal doğrultular olarak adlandırılırlar. Normal eğriliğin tanımından da görüleceği üzere bu eğrilikler yüzeyin koordinat dönüşümleri altında değişmez kalırlar. Bu

aşamada vurgulanması gereken önemli nokta şudur. Gauss eğriliği, tanımdan hareketle yüzeyin ikinci temel formuna bağlı görünüyor. Bu ise Gauss eğriliğinin yüzeyin dış uzay içerisine nasıl gömüldüğüne bağlı olduğu gibi bir izlenim yaratır. Birazdan yapacağımız analiz bize bu eğriliğin, dış uzayı ve dolayısıyla içerisine nasıl gömüldüğünü (yüzeyin şeklini) dikkate almaya gerek kalmadan sadece $g_{\alpha\beta}$ yüzeyin birinci temel formuna (yüzeyin iç özelliği) bağlı olduğunu gösterecek.

Gauss Denklemi ve Integre Edilebilirlik

Yüzey teğet vektörünün yüzey üzerindeki türevinden bulduğumuz $\vec{e}_{\alpha\beta}$ vektörü $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{n}\}$ bazı üzerinde ifade edilebilir:

$$\vec{e}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \vec{e}_\alpha}{\partial u^\beta} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \vec{e}_\gamma + a_{\alpha\beta} \vec{n}. \quad (\text{A.11})$$

Dış eğriliğin tanımından $a_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}$ olur. Teğet bileşeni için ise $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma g_{\gamma\delta} = \vec{e}_{\alpha\beta} \cdot \vec{e}_\delta$ yazılır. Öte yandan $g_{\alpha\beta} = \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta$ eşitliğinden

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} = \vec{e}_{\alpha\delta} \cdot \vec{e}_\beta + \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_{\beta\delta} \quad (\text{A.12})$$

yazarız. Bu ifadeden indisleri değiştirerek elde ettiğimiz

$$\frac{\partial g_{\delta\alpha}}{\partial u^\beta} = \vec{e}_{\delta\beta} \cdot \vec{e}_\alpha + \vec{e}_\delta \cdot \vec{e}_{\alpha\beta} \quad \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha} = \vec{e}_{\beta\alpha} \cdot \vec{e}_\delta + \vec{e}_\beta \cdot \vec{e}_{\delta\alpha}$$

eşitliklerden ilk ikisini toplar sonuncudan çıkarırsak

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_{\beta\delta} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} + \frac{\partial g_{\delta\alpha}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\delta}}{\partial u^\alpha} \right) \quad (\text{A.13})$$

ifadesinin buluruz. Burdan hareketle teğet bileşeni için

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} \left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right) \quad (\text{A.14})$$

buluruz. Bu katsayı *Christoffel Sembolü* olarak adlandırılır. Teğet vektöre ait (A.11) eşitliğine Gauss Denklemi denir. Bu diferansiyel denklemin integre edilebilirlik şartı

$$\frac{\partial^2 \vec{e}_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\delta} = \frac{\partial^2 \vec{e}_\alpha}{\partial u^\delta \partial u^\beta}. \quad (\text{A.15})$$

olur. Eşitliğin her iki tarafını hesaplırsak

$$\frac{\partial^2 \vec{e}_\alpha}{\partial u^\beta \partial u^\delta} = \left[\frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma}{\partial u^\delta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa \Gamma_{\kappa\delta}^\sigma - K_{\alpha\beta} K_{\delta}^\sigma \right] \vec{e}_\sigma + \left[\Gamma_{\alpha\beta}^\rho K_{\rho\delta} + \frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} \right] \vec{n} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial^2 \vec{e}_\alpha}{\partial u^\delta \partial u^\beta} = \left[\frac{\partial \Gamma_{\alpha\delta}^\sigma}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\delta}^\kappa \Gamma_{\kappa\beta}^\sigma - K_{\alpha\delta} K_{\beta}^\sigma \right] \vec{e}_\sigma + \left[\Gamma_{\alpha\delta}^\rho K_{\rho\beta} + \frac{\partial K_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} \right] \vec{n} \quad (\text{A.17})$$

buluruz. Böylece Gauss denkleminin integre edilebilir olması için

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\rho K_{\rho\delta} - \Gamma_{\alpha\delta}^\rho K_{\rho\beta} + \frac{\partial K_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta} - \frac{\partial K_{\alpha\delta}}{\partial u^\beta} = 0 \quad (\text{A.18})$$

ve

$$R_{\alpha\delta\beta}^\sigma = K_{\alpha\beta} K_{\delta}^\sigma - K_{\alpha\delta} K_{\beta}^\sigma \quad (\text{A.19})$$

eşitliklerinin sağlanması gerekir. Burada

$$R_{\alpha\delta\beta}^\sigma \equiv \frac{\partial \Gamma_{\alpha\beta}^\sigma}{\partial u^\delta} - \frac{\partial \Gamma_{\alpha\delta}^\sigma}{\partial u^\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^\kappa \Gamma_{\kappa\delta}^\sigma - \Gamma_{\alpha\delta}^\kappa \Gamma_{\kappa\beta}^\sigma, \quad (\text{A.20})$$

yüzeyin Riemann Eğrilik Tensorüdür. Yüzey için sadece tek bir bileşene sahiptir:

$$R_{1212} = K_{22} K_{11} - (K_{12})^2 = \det(K_{\alpha\beta}). \quad (\text{A.21})$$

Böylece Gauss eğriliği

$$K = \frac{R_{1212}}{\det(g_{\alpha\beta})} \quad (\text{A.22})$$

tamamen yüzeyin metriği cinsinden ifade edilmiş olur ve metrik bileşenleri cinsinden ortogonal bir baz üzerinde

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left[\frac{\partial}{\partial u^1} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} \right) \right] \quad (\text{A.23})$$

şeklinde yazılır.

Jeodezik Eğrilik

\mathbb{R}^3 içinde doğruların jeodezik ve eğriliklerinin de sıfır olduğunu biliyoruz. Keyfi bir eğrinin eğriliğini de teğet vektörün eğri boyunca olan doğrultu türevi cinsinden ifade ediyoruz. Eğer bu türev sıfırsa eğri düz olacaktır. Düz uzay üzerindeki bu özelliği jeodezik eğrilik kavramıyla yüzeylere taşımak mümkündür. Yüzeyler için Jeodezik eğrilik $\kappa_g = \dot{\vec{t}} \cdot \nabla_{\vec{t}} \vec{t}$ şeklinde tanımlanır. Bu tanım eğrinin teğetinin eğri boyunca kendine paralel kalıp kalmadığını belirlemektedir. Eğri jeodezik olma durumundan saptığında jeodezik eğrilik sıfırdan farklı olur. Tanımdan da görüleceği gibi jeodezik eğriler için bu eğrilik sıfırdır. Tanım düz uzay durumunda durumunda eğrinin eğriliğine karşılık gelir. Yüzey üzerinde ortogonal koordinatlarda

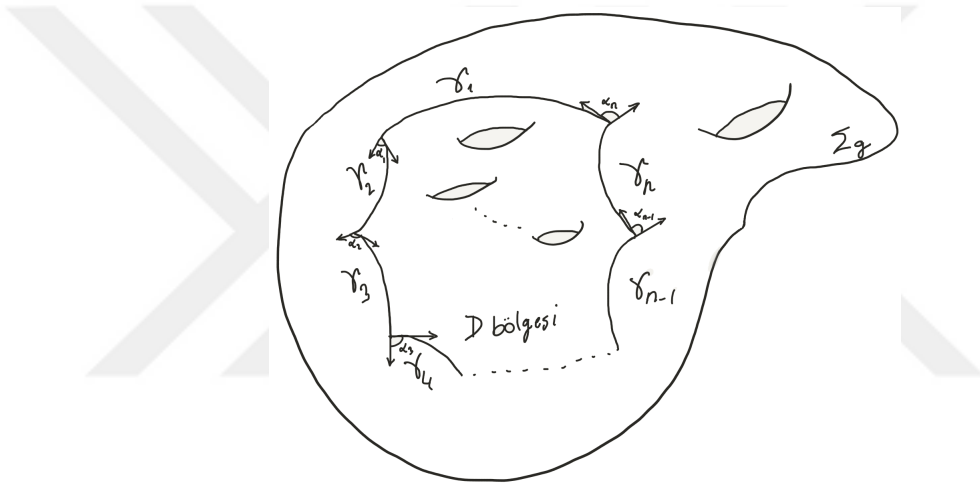
$$\kappa_g = \frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \frac{du^2}{dt} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \frac{du^1}{dt} \right) + \frac{d\phi}{dt}, \quad (\text{A.24})$$

metrik bileşenleri cinsinden ifade edilir. Burada ϕ açısı eğrinin teğet vektörünün baz vektörüyle olan açısını ifade eder:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{t} = \cos \phi.$$

Gauss-Bonnet Teoremi

Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi genus sayısı g olan keyfi bir Σ_g yüzeyi düşünelim. Yüzey üzerinde n tane düzgün eğrinin kesişimiyle oluşmuş bir D bölgesini dikkate alalım. Bölge genel olarak basit bağlantılı olmasın. Yani herhangi iki noktayı birbirine bağlayan eğrilerin hepsini düzgün deformasyonlarla birbirine dönüştürmenin mümkün olmadığı genel bir durumu dikkate alıyoruz.



Şekil A.2: g genus sayılı Σ_g yüzeyi ve üzerinde eğrilerle çevrelenmiş bir D bölgesi.

D bölgesini çevreleyen eğrilerin kesişim noktasında meydana gelen dış açıları α_i ile gösterirsek o zaman Gauss eğriliğini, eğrilerin jeodezik eğriliğini ve açıları birbirine bağlayacak olan aşağıdaki ilişkiyi yazmak mümkün olur [164]:

$$\int \int_D K dA + \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} \kappa_g dt + \sum_i \alpha_i = 2\pi\chi(D). \quad (\text{A.25})$$

Burada $\chi(D)$, D bölgesinin Euler Karakteristiği olarak adlandırılır. Herhangi bir yüzey için Euler Karakteristiği köşe, kenar ve yüz sayıları cinsinden

$$\chi = \text{Köse} - \text{Kenar} + \text{Yüz} ,$$

formülüyle verilir. Bölgeyi çevreleyen eğrileri düzgün deforme edersek sınır eğrilerini bir düzgün çokyüzlü haline getirebiliriz. Bu çokyüzlünün kenar sayısı, köşe sayısı ve

yüz sayısı üzerinden düzgün deformasyonlarla değişmeyecek bir $\chi(D)$ sayısı bulunur. Genus sayısı $g = 0$ olan basit bağlantılı ve kapalı yüzeylerin Euler karakteristiği $\chi = 2$ olur. Kapalı ve keyfi bir g genusu olan yüzeyler için $\chi = 2(1 - g)$ dir. Bir noktası çıkarılmış bir düzlemin $\chi = 0$ dır. Düzlemin ise $\chi = 1$ dir. Euler sayısı yüzeyin geometrisinden bağımsız olan yalnızca global özelliklerine yani topolojisine bağlı olan bir değişmezdir. Euler karakteristiği farklı olan yüzeyleri birbirine dönüştürmek mümkün değildir. Böylece yüzeylerin sınıflandırılmasında önmeli rol oynar. Yüzeylerin global özellikleriyle ilgili daha detaylı bilgiler için [164–166] kaynaklarına bakılabilir.



B Konformal Dönüşümler

Bu kısımda konformal dönüşümleri ardından da konformal izometrilere tanımlayacağız. Sonrasında temel tensörlerin ve ifadelerin konformal dönüşümlerini vereceğiz. Daha sonra da konformal dönüşümlerin değişmezi olan Weyl tensörünü tanımlayıp Schouten tensörü ve Cotton tensörü ile ilişkilendireceğiz. Weyl ve Cotton tensörlerinin uzayın konformal düzlüğü için bir kriter olduklarını ispatlayacağız. Null jeodeziğin konformal değişmez olduğunu gösterip statik uzay-zamanda sahip oldukları önemli bir özelliği açıkça göstereceğiz. Buradaki bilgileri [52, 53, 167, 168] kaynaklarından, gerektiği kadarıyla alıntı yaparak aktarıyoruz.

Üzerinde $g_{\mu\nu}$ Lorentz metriği tanımlı, n boyutlu bir M manifoldunu düşünelim. Reel, sıfırdan farklı ve düzgün keyfi bir $\Omega(x)$ fonksiyonu kullanarak metriğin üzerinde

$$g'_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x), \quad g'^{\mu\nu}(x) = \Omega^{-2}(x)g^{\mu\nu}(x), \quad (\text{B.1})$$

dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşüm metrikler arasında bir denklik ilişkisi meydana getirir ve metrikler bu ilişkiye göre $[g]$ ile gösterdiğimiz denklik sınıflarına ayrışır. Bu dönüşümler manifold üzerinde uzunlukların noktaya bağlı olarak değişimine yol açar. Uzunlukların bu şekildeki ölçeklemesi

$$\cos \alpha = \frac{g_{\mu\nu}X^\mu Y^\nu}{\sqrt{g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu} \sqrt{g_{\rho\sigma}Y^\rho Y^\sigma}}, \quad (\text{B.2})$$

vektörler arasındaki açıları koruduğundan bunlara konformal dönüşümler denir. Konformal dönüşümlerle birbirlerine dönüşen metriklerin konformal denk olduğu söylenir. Bu metrikler $[g]$ konformal denklik sınıfı içerisinde yer alırlar. Konformal faktörün pozitif oluşu manifold üzerinde vektörlerin nedensel (causal) karakterlerini değiştirmeyecetir. Vektörlerin zamansal, null ve uzaysal yapıları değişmeden kalacağından dolayı konformal denklik sınıfındaki metriklerin ışık konileri çakışacaktır. Böylece manifoldun global nedensel yapısı bu dönüşümler altında değişmeden kalacaktır. Konformal dönüşümler difeomorfizmlerle ilişkilendirilmezler. Fakat eğer (M, g) manifoldu-

nun (M', g') üzerine olan ϕ difeomorfizmi altında $g'_{\mu\nu}$ metriğinin ϕ ile geri çekilmesi $g_{\mu\nu}$ 'ye

$$\phi^* g' = \Omega^2(x)g, \quad (\text{B.3})$$

konformal ise o zaman ϕ konformal difeomorfizm olarak adlandırılır. Kordinat diliyle bu tanımı yeniden ifade edebiliriz. (M, g) uzayında noktaları $\{x^\mu\}$ ve (M', g') uzayında da $\{x'^\mu\}$ kordinatlarıyla etiketleyelim. Bu durumda konformal difeomorfizm

$$g'_{\mu\nu}(x') \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = \Omega^2(x)g_{\rho\sigma}(x) \quad (\text{B.4})$$

dönüşümüyle ifade edilir. Konformal difeomorfizmin metrik üzerindeki etkisi, $g'_{\mu\nu}$ metriğini (M, g) uzayındaki $[g]$ konformal denklik sınıfı içerisine taşımak olacaktır. Özel olarak metriğin fonksiyonel yapısını koruyan difeomorfizmler

$$\phi^* g = \Omega^2(x)g \quad (\text{B.5})$$

konformal izometrilere oluşturulur. Dönüşümlerin $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu(x)$ sonsuz küçük olduğu durumu dikkate aldığımızda metriğin ξ^μ vektörü boyunca olan değişimini, *Konformal Killing Denklemi*,

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = \sigma(x)g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.6})$$

yazmak mümkündür. $\sigma(x)$ metrik çarpanı, eşitliğin her iki tarafında iz olarak, izometri vektörü cinsinden yazılabilir: $\sigma(x) = \frac{2}{n} \nabla_\mu \xi^\mu$. Metriğin simetri gurubuna bağlı olarak σ sabit bir sayı yada sıfır olabilir. Sabit bir sayı olması durumunda izometrilere homotetik dönüşümlere karşılık gelir. Geometrik olarak uzunlukları her noktada aynı sabit oranda ölçeklemeye karşılık gelen dönüşümlerdir. Sıfır olma durumu metriğin olağan izometri simetrisine karşılık gelir. Konformal difeomorfizmden ayrı olarak metrik üzerinde

$$g' = \Omega^2(x)g,$$

şeklinde bir ölçekleme yaptığımızda yeni metriğin

$$\mathcal{L}_\xi g'_{\mu\nu} = \sigma'(x)g'_{\mu\nu}, \quad (\text{B.7})$$

konformal killing denkleminde σ' konformal izometri faktörü için Lie türevini açıkça hesaplırsak

$$\sigma'(x) = \sigma(x) + \xi^\mu \partial_\mu \ln \Omega^2, \quad (\text{B.8})$$

dönüşümünü buluruz [169]. Konformal faktörün $\Omega^2 = \frac{1}{\xi^\mu \xi_\mu}$ seçilmesiyle σ' çarpanını sıfırlamak ve olağan izometrilere elde etmek mümkün olur. Yukarıda da görüldüğü gibi konformal izometrilere konformal çarpanı cebirle ilişkilidir dolayısıyla bu fonksiyon üzerinde kısıtlayıcı bir etken oluşturur. Böylece Weyl ölçekleme dönüşümleri (B.1) konformal izometrilere kapsayan daha geniş bir küme oluşturur.

Keyfi bir $T_{\nu_1 \dots \nu_n}^{\mu_1 \dots \mu_n}$ tensör alanının konformal dönüşümler altında, w reel bir sayı olmak üzere,

$$T'_{\nu_1 \dots \nu_n}{}^{\mu_1 \dots \mu_n} = \Omega^w T_{\nu_1 \dots \nu_n}{}^{\mu_1 \dots \mu_n}, \quad (\text{B.9})$$

şeklinde dönüşmüşse, konformal ağırlığı w olduğu söylenir. Eğer $w = 0$ olursa bu tensör alanı konformal invariant olduğu söylenir. Kordanit dönüşümleri altında bir skaler yoğunluğu olarak dönüşen metriğin determinanı konformal dönüşümler altında n boyutlu uzayda

$$\sqrt{-g'} = \Omega^n \sqrt{-g}, \quad (\text{B.10})$$

şeklinde konformal ağırlığı n olan skaler olarak dönüşür. Metrik uyumlu Levi-Civita bağlantı katsayılarının dönüşümü doğrudan hesapla, $\Phi_\mu = \nabla_\mu \ln \Omega$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Gamma'_{\nu\rho}{}^\mu &= \Gamma_{\nu\rho}{}^\mu + (\delta_\nu^\mu \Phi_\rho + \delta_\rho^\mu \Phi_\nu - g_{\nu\rho} g^{\mu\lambda} \Phi_\lambda), \\ \Gamma'_{\nu\mu}{}^\mu &= \Gamma_{\nu\mu}{}^\mu + n \Phi_\nu, \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

bulunur. Ters dönüşümleri de

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu\rho}{}^\mu &= \Gamma'_{\nu\rho}{}^\mu - (\delta_\nu^\mu \Phi_\rho + \delta_\rho^\mu \Phi_\nu - g'_{\nu\rho} g'^{\mu\lambda} \Phi_\lambda), \\ \Gamma_{\nu\mu}{}^\mu &= \Gamma'_{\nu\mu}{}^\mu - n \Phi_\nu, \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

olacaktır. Dönüşmüş bağlantı katsayısının metrik tanımı aynı olduğu için kovaryant türevin $\nabla'_\mu g'_{\nu\rho} = 0$ metrik uyumlu olacağı çok açıktır. Şimdi de eğrilik tensörlerinin dönüşümlerini yazalım. Riemann tensörünün

$$R_{\nu\rho\sigma}{}^\mu = \partial_\rho \Gamma_{\nu\sigma}{}^\mu - \partial_\sigma \Gamma_{\nu\rho}{}^\mu + \Gamma_{\rho\lambda}{}^\mu \Gamma_{\nu\sigma}{}^\lambda - \Gamma_{\sigma\lambda}{}^\mu \Gamma_{\nu\rho}{}^\lambda, \quad (\text{B.13})$$

tanımını kullanıp yukarıdaki (B.11) bağlantı katsayısı dönüşümleri yerine konduğunda

$$\begin{aligned} R'_{\nu\rho\sigma}{}^\mu &= R_{\nu\rho\sigma}{}^\mu + 2\delta_{[\rho}^\mu \nabla_{\sigma]} \Phi_\nu - 2g_{\nu[\rho} \nabla_{\sigma]} \Phi^\mu + 2\delta_{[\sigma}^\mu \Phi_{\rho]} \Phi_\nu, \\ &\quad - 2\Phi_{[\rho} g_{\sigma]\nu} \Phi^\mu - 2g_{\nu[\rho} \delta_{\sigma]}^\mu \Phi_\lambda \Phi^\lambda, \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

$$\begin{aligned} R'_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} + (n-2) \nabla_\mu \Phi_\nu + g_{\mu\nu} \nabla_\lambda \Phi^\lambda \\ &\quad - (n-2) \Phi_\mu \Phi_\nu + (n-2) g_{\mu\nu} \Phi_\lambda \Phi^\lambda, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

$$R' = \Omega^{-2}(R + 2(n-1)\nabla_\mu\Phi^\mu + (n-1)(n-2)\Phi_\lambda\Phi^\lambda), \quad (\text{B.16})$$

konformal dönüşümleri bulunur. Eğrilik tensörlerinin bu dönüşümlerini Weyl tensörünün n boyutta

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{n-2}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + R_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - R_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}) + \frac{1}{(n-1)(n-2)}R(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}). \quad (\text{B.17})$$

genel tanımını içerisine yerleştirirsek, Weyl tensörünün konformal dönüşümlerin bir değişmezi olduğunu buluruz:

$$C'{}^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = C^\mu{}_{\nu\rho\sigma}. \quad (\text{B.18})$$

Son olarak kütlelessiz skaler alanın eğri uzaydaki denkleminin karşılık gelen d'Alambert operatörünün konformal invariant bir skalere uygulanmasının değişimine bakalım:

$$\begin{aligned} \square'\phi &= \Omega^{-2}(\square\phi + (n-2)g^{\mu\nu}\Phi_\mu\phi_\nu) \\ \square\phi &= \Omega^2(\square'\phi - (n-2)g^{\mu\nu}\Phi_\mu\phi_\nu). \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Burada d'Alambert operatörü eğri uzayda $\square \equiv g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ olarak tanımlanır. Görüldüğü gibi uzayın boyutu $n = 2$ olursa dalga denklemi konformal ağırlığı $w = -2$ olacak şekilde yapısını koruyarak dönüşür.

Şimdi de geometrik sonuçları son derece önemli olan iki sonuçtan bahsedip bu kısmı sonlandıracağız. Birincisi konformal dönüşümlerin kritik değişmezi olan Weyl tensörünün uzayın konformal düzlüğünü, yani uzayın metriğinin minkowski metriğine konformal denk olması: $g_{\mu\nu} = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}$, belirleyen önemli bir özelliğe sahip olduğunu göstereceğiz. Ardından konformal dönüşümlerin null jeodeziklerin yapısını değişmez bıraktığını göstereceğiz. Bu kütleçekim merceği etkisinin Gauss-Bonnet teoremiyle hesaplanmasında önemli olacak bir niteliktir. Yukarıda genel tanımını verdiğimiz Weyl tensörünün ifadesine tensörün izinin, bir matrisin izsiz kısmını çıkarırken kullanılan lineer cebir argümanlarının kullanılması sonucu ulaşıyoruz. Weyl tensörü 4 indisli izsiz ve belli simetrisi olan bir tensördür. Tanım ifadesi, boyutu $n \geq 3$ olan uzaylarda geçerlidir. Riemann tensörünün, $n = 2$ olduğunda, bağımsız bir tane bileşeni olduğundan kolaylıkla yüzeyin Gauss eğriliği cinsinden yazılabilir [167]:

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \frac{R}{2}(\delta^\mu_\rho g_{\nu\sigma} - \delta^\mu_\sigma g_{\nu\rho}). \quad (\text{B.20})$$

Burada $\frac{R}{2}$ yüzeyin Gauss eğriline karşılık gelir. Çıkarım detayları için M. Blau'nun ders notlarına bakılabilir [167]. Öte yandan tüm iki boyutlu uzay metriklerinin konformal düz olduğu gösterilebilir [168]. Dolayısıyla Weyl tensörü iki boyutta belirsizdir. Üç boyutlu uzaylarda ise Weyl tensörünün bileşenleri özdeş olarak sıfır olduğu gösterilebilir [167]. Yüksek boyutlu uzaylarda uzayın konformal düz olup olmadığını belirlemede ortaya çıkan iki önemli tensör cinsinden Weyl tensörünün yeniden ifade edip uzayın konformal düzlük için gerekli ve yeterli şartları gösterelim.

Weyl tensörünün tanımının yeniden düzenlenmesiyle

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv R_{\mu\nu\rho\sigma} - (g_{\mu\rho}P_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}P_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}P_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}P_{\nu\rho}), \quad (\text{B.21})$$

şeklinde, $P_{\mu\nu} = \frac{1}{n-2}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2(n-1)}g_{\mu\nu}R)$ Schouten Tensörü cinsinden yazılabilir. Bianchi özdeşliğini kullanarak Riemann tensörünün diverjansı için

$$\nabla_{\mu}R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = \nabla_{\rho}R_{\nu\sigma} - \nabla_{\sigma}R_{\nu\rho}, \quad (\text{B.22})$$

yazabiliriz. Bu ifade sayesinde Weyl tensörünün diverjansını

$$\begin{aligned} \nabla_{\mu}C_{\nu\rho\sigma}^{\mu} &= \frac{n-3}{n-2} \left[\nabla_{\rho}R_{\nu\sigma} - \nabla_{\sigma}R_{\nu\rho} + \frac{1}{2(n-1)}(g_{\nu\rho}\nabla_{\sigma}R - g_{\nu\sigma}\nabla_{\rho}R) \right] \\ &= (n-3)(\nabla_{\rho}P_{\nu\sigma} - \nabla_{\sigma}P_{\nu\rho}), \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Schouten tensörü cinsinden hesaplamak mümkün olur. Son satırda sağdaki tensör

$$C_{\nu\rho\sigma} = (\nabla_{\rho}P_{\nu\sigma} - \nabla_{\sigma}P_{\nu\rho}), \quad (\text{B.24})$$

Cotton Tensörü olarak adlandırılır. Konformal düzlüğün belirlenmesinde ortaya çıkar. Aşağıda vereceğimiz teoremi J.Plebanski ve A.Krasinski'nin **An Introduction to General Relativity and Cosmology** kitabından aktarıyoruz [168].

Teorem 1 *Boyutu $n > 3$ olan bir M Riemann uzayının konformal düz, yani $g_{\mu\nu} = \Omega^2(x)\eta_{\mu\nu}$ olması için gerek ve yeter koşul Weyl tensörünün sıfır olmasıdır:*

$$C_{\nu\rho\sigma}^{\mu} = 0. \quad (\text{B.25})$$

$n = 3$ olduğunda uzayın konformal düz olması için gerek ve yeter koşul Cotton tensörünün sıfır olmasıdır:

$$C_{\mu\nu\rho} = 0. \quad (\text{B.26})$$

$n = 2$ olduğunda her iki boyutlu metrik konformal düzdür.

Ispat 1 $n > 3$ için gerek koşul çok açıktır. Konformal düz bir uzayda her zaman bir $\Omega(x)$ fonksiyonu mevcuttur. Weyl tensörü invaryant olduğu için

$$C_{\nu\rho\sigma}^{\mu}(g) = C_{\nu\rho\sigma}^{\mu}(\eta) = 0 \quad (\text{B.27})$$

olur. Yeter koşul ise yani $C_{\nu\rho\sigma}^{\mu}(g) = 0$ olmasının $g_{\mu\nu}$ metriğinin $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}(g') = 0$ olacak şekilde $g'_{\mu\nu} = \Omega^{-2}(x)g_{\mu\nu}$ yazılmasına yol açacağını göstermeliyiz. Bu amaçla $R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}(g') = 0$ olmasını sağlayacak bir $\Omega(x)$ fonksiyonun (M, g) uzayında var olabileceğini göstermek yeterli olacaktır. Bunun için eğrilik tensörlerinin ters dönüşümlerini yazalım:

$$\begin{aligned} R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} &= R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} + \Omega^{-1}\delta_{\rho\sigma}^{\alpha\beta}(\delta_{\alpha}^{\mu}\nabla_{\beta}\nabla_{\nu}\Omega - g_{\nu\alpha}\nabla_{\beta}\nabla_{\mu}\Omega) \\ &\quad + \Omega^{-2}(\delta_{\sigma}^{\mu}g_{\nu\rho} - \delta_{\rho}^{\mu}g_{\nu\sigma})\nabla_{\alpha}\Omega\nabla^{\alpha}\Omega, \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} R'_{\mu\nu} &= R_{\mu\nu} - \Omega^{-2}(n-1)g_{\mu\nu}\nabla_{\alpha}\Omega\nabla^{\alpha}\Omega \\ &\quad + \Omega^{-1}[(n-2)\nabla_{\nu}\nabla_{\mu}\Omega + g_{\mu\nu}\square\Omega], \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

$$R' = \Omega^2 R + 2(n-1)\Omega\square\Omega - n(n-1)\nabla_{\alpha}\Omega\nabla^{\alpha}\Omega. \quad (\text{B.30})$$

$R_{\nu\rho\sigma}^{\mu}(g') = 0$ olursa Ricci tensörü ve de Ricci skaleri de sıfır olacağından ötürü yukarıdaki denklemler bize (M, g) uzayında $\Omega(x)$ fonksiyonunu tanımlayan diferansiyel denklemleri verecektir. Bu durumda (B.28) eşitliğinden

$$\begin{aligned} R_{\nu\rho\sigma}^{\mu} &= -\Omega^{-1}\delta_{\rho\sigma}^{\alpha\beta}(\delta_{\alpha}^{\mu}\nabla_{\beta}\nabla_{\nu}\Omega - g_{\nu\alpha}\nabla_{\beta}\nabla_{\mu}\Omega) \\ &\quad + \Omega^{-2}(\delta_{\sigma}^{\mu}g_{\nu\rho} - \delta_{\rho}^{\mu}g_{\nu\sigma})\nabla_{\alpha}\Omega\nabla^{\alpha}\Omega, \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

ve (B.30) eşitliğinden de

$$\square\Omega = -\frac{\Omega}{2(n-1)}R + \frac{n}{2\Omega}\nabla_{\alpha}\Omega\nabla^{\alpha}\Omega. \quad (\text{B.32})$$

bulunur. Bu eşitliği (B.29) denkleminde yerleştirirsek Ω konformal çarpanını belirleyecek

$$\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Omega = \frac{\Omega}{n-2}R_{\mu\nu} + \frac{\Omega}{2(n-1)(n-2)}g_{\mu\nu}R + \frac{1}{2\Omega}g_{\mu\nu}\nabla_{\alpha}\Omega\nabla^{\alpha}\Omega \quad (\text{B.33})$$

diferansiyel denklemini bulmuş oluruz. Eğer bu denklem (B.31) ile birlikte (M, g) üzerinde integre edilebilirse (B.28), (B.29), (B.30) eşitliklerinin sol tarafı sıfır olacaktır. Ve böylece yeterlik şartı gösterilmiş olacaktır. Şimdi (B.33)'ün sol tarafındaki kovaryant

türevleri kısmi türevler cinsinden yazıp $\partial_\gamma \partial_\nu \partial_\mu \Omega = \partial_\nu \partial_\gamma \partial_\mu \Omega$ integre edilebilirlik şartının sağlandığını gösterelim. Bu şart $\partial_\mu \Omega$ ' dan bağımsız olarak

$$\nabla_\gamma \nabla_\nu \nabla_\mu \Omega - \nabla_\nu \nabla_\gamma \nabla_\mu \Omega = R_{\gamma\nu\mu}{}^\lambda \nabla_\lambda \Omega \quad (\text{B.34})$$

Ricci özdeşliğine denktir. (B.31) ve (B.33)'ü bunun içine yerleştirirsek

$$\nabla_\gamma R_{\mu\nu} - \nabla_\nu R_{\mu\gamma} - \frac{1}{2(n-1)}(g_{\mu\nu} \nabla_\gamma R - g_{\mu\gamma} \nabla_\nu R) = 0 \quad (\text{B.35})$$

bulunur. Bu ise Cotton tensörünün sıfır olmasından başka birşey değildir: $C_{\mu\gamma\nu} = \nabla_\gamma P_{\mu\nu} - \nabla_\nu P_{\mu\gamma} = 0$. $C_{\nu\rho\sigma}^\mu(g) = 0$ kabulü ve (B.23) eşitliği bu şartın sağlandığını gösterir. Böylelikle $C_{\nu\rho\sigma}^\mu(g) = 0$ kabulü bizi (M, g) üzerinde $R_{\nu\rho\sigma}^\mu(g') = 0$ olmasına yol açacak bir Ω konformal çarpanın varlığına götürür. Sonuç olarak yeterlik şartı gösterilmiş olur.

$n=3$ olduğunda (B.23) eşitliği atrık kullanılamaz. Bunun yanında Weyl tensörünün özdeş olarak sıfır olmasından ötürü integre edilebilirlik şartı bu durumda Cotton tensörünün sıfır olmasıdır. Dolayısıyla yeterlik şartı da Cotton tensörünün sıfır olması olur. 3 boyutta Cotton tensörünün konformal değişmez olduğu dönüşümler kullanılarak kolayca gösterilebilir. Böylece gereklilik şartı da yine Cotton tensörünün sıfır olması olur. $n=2$ olduğunda Weyl tensörü tanımlanamaz. Öte yandan (B.28), (B.29), (B.30) dönüşümleri, (B.20) den ötürü bağımsız değildir. Dolayısıyla Ricci skalerinin dönüşümlerini kullanmamız yeterli olur. Buradan

$$\Omega^2 R + 2\Omega \square \Omega - 2\nabla_\alpha \Omega \nabla^\alpha \Omega = 0. \quad (\text{B.36})$$

yazılır. Düzenleme yapılırsa

$$\square \ln \Omega = \frac{1}{2} R \quad (\text{B.37})$$

dalga denklemi bulunur. Böylece verilen herhangi bir metrik için uzayı konformal düz yapacak bir Ω fonksiyonu bulunur.

Konformal Dönüşümler ve Null Jeodezik

Temel kavramlar kısmında en genel haliyle bir Lorentz uzayında, teğet vektörünün boyu sıfır olmayan jeodezik eğrilerinin bir varyasyon problemi üzerinden tanımlanabileceğini göstermiştik. Bunun sonucu olarak, teğet vektör eğri boyunca paralel olarak ötelendiğinde, değişimin teğet vektörle aynı doğrultuya sahip olduğu ortaya çıkmıştı.

Buradan hareketle bu özelliği teğet vektörünün boyu sıfır olan eğrilerin jeodezik olması için bir tanım ifadesi olarak kullanabiliriz. Keyfi bir λ parametrizasyonunda noktaları $\{x^\mu(\lambda)\}$ koordinatlarıyla gösterilen bir eğri, $k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ teğet vektör olmak üzere,

$$k^\mu \nabla_\mu k^\nu = f(x)k^\nu, \quad k^\mu k_\mu = 0, \quad (\text{B.38})$$

eşitliklerini sağlıyorsa **null jeodezik** olarak tanımlanır [52, 53]. Burada $f(x)$ tamamen keyfi bir fonksiyondur. Kolayca gösterilebilir ki, $\alpha(\lambda) = \int^\lambda f(x(\lambda')) d\lambda'$ olmak üzere, null teğet vektör boyu değişmeyecek şekilde $k^\mu \rightarrow \alpha(x)k^\mu$ dönüştürüldüğünde tanım ifadesi

$$k^\mu \nabla_\mu k^\nu = 0, \quad (\text{B.39})$$

haline gelir. Böylelikle zamansal ve uzaysal jeodeziklerde de olduğu gibi yukarıdaki ifade null jeodeziğin tanımı olarak alınabilir. Bu tanım da λ afin parametresine karşılık gelir.

Uzayın metriğinde bir $g'_{\mu\nu}(x) = \Omega^2(x)g_{\mu\nu}(x)$ konformal dönüşümü yapıldığında yukarıdaki jeodezik eğri tanımı değişecektir. Bağlantı katsayılarının (B.11) dönüşümleri, $g'_{\mu\nu}$ metriği için yazılan

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma'^{\mu}_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0, \quad (\text{B.40})$$

içerisine yerleştirilirse

$$k^\mu \nabla'_\mu k^\nu = k^\mu \nabla_\mu k^\nu + (k^\rho \partial_\rho \ln \Omega^2) k^\nu - k^\mu k^\rho g_{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \partial_\rho \ln \Omega, \quad (\text{B.41})$$

bulunur. Son terim zamansal ve uzaysal jeodeziklerin konformal dönüşümler altında yapılarını değiştirdiğini fakat null jeodezikte sadece afin parametreden afin olmayan bir parametreye geçiş yaşandığı görülür. Eğrinin teğet vektöründeki

$$k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \rightarrow k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\beta}, \quad (\text{B.42})$$

parametre değişiminde

$$\frac{d\beta}{d\lambda} = \Omega^2, \quad (\text{B.43})$$

alınırsa β afin parametresi için null jeodezik tanımı

$$k^\mu \nabla'_\mu k^\nu = \frac{d^2 x^\mu}{d\beta^2} + \Gamma'^{\mu}_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{d\beta} \frac{dx^\rho}{d\beta} = 0, \quad (\text{B.44})$$

haline geri döner.

Eğri Uzayda Fermat İlkesi

Konformal dönüşümlerin null jeodezikler üzerindeki etkisinin doğrudan bir uygulaması olacak çok önemli bir sonucu göstereyim. Bu sonuç tez kapsamında optik geometriden bahsederken kullanacağımız bir özellik olacak. Bu kısımdaki bilgileri [52] referansını takip ederek aktarıyoruz.

Statik bir uzay-zamanın metriğinde

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -g_{00} dt^2 + g_{ab} dx^a dx^b, \quad (\text{B.45})$$

uzaysal ve zamansal kısımları bu şekilde ayrıştırmak mümkündür ve metrik fonksiyonları zamandan bağımsızdır: $\partial g_{ab}/\partial t = 0$. Burada latin harfleriye uzay kordinatlarına karşılık gelen indisleri $a, b.. = 1, 2, 3..$ ve uzay-zaman kordinatları için de yunan harflerini kullanacağız $\mu, \nu.. = 0, 1, 2, 3..$ Kütleli parçacıkların hareketi söz konusu olduğunda, parçacığın statik uzay-zamanda izlediği yol üzerinde iki olay için

$$dt^2 = \frac{g_{ab}}{g_{00}} dx^a dx^b, \quad (\text{B.46})$$

yazarız. Bu, üzerindeki metriği pozitif tanımlı olan bir hiperyüzeyin sonsuz küçük yakın iki noktası arasındaki mesafeye karşılık gelir. (t, x^a) kordinatlarıyla verilen üst uzaydaki bir null jeodeziğin, metriği $\frac{g_{ab}}{g_{00}}$ olan hiperyüzeyde bir jeodezik ortaya çıkaracağı gösterilebilir. Gerçekten de uzaydaki eğrinin parametresini t alırsak

$$\delta(\Delta t) = \delta \int \sqrt{\frac{g_{ab}}{g_{00}} \dot{x}^a \dot{x}^b} dt = 0, \quad (\text{B.47})$$

ile Δt zaman farkının ekstrem olduğu bir eğri tanımlamak mümkün olur. Bu, uzayda ışığın iki nokta arasında izleyeceği yola karşılık gelecek zamanın en az olmasını ifade eden *Fermat İlkesi*'nin eğri uzaydaki karşılığıdır. Varyasyondan elde edeceğimiz jeodezik denklemini doğrudan uzay-zamandaki null jeodeziğe konformal dönüşüm uygulayarak elde edebiliriz. Bunu detaylı bir şekilde gösterip bu ek bölümü sonlandıracağız. Statik uzay-zamanın (B.45) metriğine, $\Omega^2 = \frac{1}{g_{00}}$ fonksiyonuyla bir konformal dönüşüm uygularsak

$$g'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & g_{ab}/g_{00} \end{pmatrix} = \Omega^2 g_{\mu\nu}, \quad (\text{B.48})$$

ve buna karşılık gelen Christoffel sembollerini

$$\Gamma_{\mu\nu}^0 = 0, \quad \Gamma_{0\nu}^\mu = 0, \quad \Gamma_{bc}^a \neq 0, \quad (\text{B.49})$$

buluruz. Burada $\Gamma_{bc}^{\prime a}$ sembolleri g_{ab}/g_{00} metriğine karşılık gelen bağlantı katsayısıdır. (B.45) metriğinde yazılmış Jeodezik denkleminde (B.11) konformal dönüşümleri uygulanırsa $\mu = 0$ zamansal bileşeni için

$$\frac{d^2 x^0}{d\lambda^2} + \Gamma_{0a}^0 \frac{dx^0}{d\lambda} \frac{dx^a}{d\lambda} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 t}{d\lambda^2} = \frac{dt}{d\lambda} \frac{d \ln \Omega^2}{d\lambda}, \quad (\text{B.50})$$

eşitliğini buluruz. Uzaysal bileşenlerini $\mu = a$ bulurken uzay-zamanda dikkate aldığımız jeodeziğin teğet vektörünün

$$k^\mu k_\mu = -g_{00} \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 + g_{bc} \frac{dx^b}{d\lambda} \frac{dx^c}{d\lambda} = 0, \quad (\text{B.51})$$

null oluşunu kullanırsak

$$\frac{d^2 x^a}{d\lambda^2} + \Gamma_{00}^a \left(\frac{dx^0}{d\lambda} \right)^2 + \Gamma_{bc}^a \frac{dx^b}{d\lambda} \frac{dx^c}{d\lambda} = 0, \quad (\text{B.52})$$

$$\rightarrow \frac{d^2 x^a}{d\lambda^2} + \Gamma_{bc}^{\prime a} \frac{dx^b}{d\lambda} \frac{dx^c}{d\lambda} = \left[\frac{d \ln \Omega^2}{d\lambda} \right] \frac{dx^a}{d\lambda}, \quad (\text{B.53})$$

ifadesini buluruz. Son eşitlik açıkça görüldüğü gibi afin olmayan λ parametresiyle yazılmış bir jeodezik denklemdir. Zamansal kısımdan bulduğumuz (B.50) eşitliğini kullanarak t zaman parametresinin afin olduğu

$$\frac{d^2 x^a}{dt^2} + \Gamma_{bc}^{\prime a} \frac{dx^b}{dt} \frac{dx^c}{dt} = 0, \quad (\text{B.54})$$

jeodezik denklemini yazarız. Böylece yukarıda da belirttiğimiz gibi uzay-zaman statik olduğunda null jeodezik, metriği g_{ab}/g_{00} olan bir Riemann uzayında t zamanını en küçük yapan bir jeodeziğe karşılık gelir.

C Gauss-Bonnet Topolojik Yüzey Terimi

Bu kısımda Gauss-Bonnet teriminin 4 boyutlu Lorentzyen bir manifoldda bir 3-formun dış türevi olarak yazılabildiğini göstereceğiz. Bu amaçla diferansiyel formlara ait birçok özellik ve bir takım denklemler kullanılacaktır. Bunların çok daha detaylı ve titiz matematiksel çıkarımı ve kullanımı için [52, 170–172] kaynaklarına bakılabilir. Buradaki gösterim yöntemi [44] referansından alınmıştır detaylar için bu referansa bakılmalıdır.

Üzerinde $g_{\mu\nu}$ Lorentzyen metriği tanımlı M manifoldu 4 boyutlu olsun. Boyutun 4 olması Gauss-Bonnet terimi için son derece özel çünkü onun kütleçekim alan denklemlerine katkı yapmayan topolojik bir terime dönüşmesine yol açıyor. Bunu çok belirgin bir şekilde göstermek amacıyla manifoldun üzerindeki noktaları $\{x^\mu\}$ koordinatları ile gösterelim. Manifoldların teorisinden bildiğimiz üzere her p noktasında tanımlı teğet uzayın koordinat baz vektörleri $\{\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\} \in T_p M$ ve kotanjant uzayın bazlarını oluşturan koordinat 1-formlarımız var olacak $\{dx^\mu\} \in T_p^* M$. Bu kısımda kullanacağımız tüm indisler $\{0, 1, 2, 3\}$ kümesinden değerlerini alacak. Bundan sonra devamlı olarak üzerinde çalışacağımız yeni bazlarımızı

$$\omega^\mu \equiv e^\mu{}_\nu(x) dx^\nu \quad e_\mu \equiv e_\mu{}^\nu(x) \partial_\nu \quad (\text{C.1})$$

şeklinde tanımlıyoruz. Burada $e^\mu{}_\nu(x)$ ve $e_\mu{}^\nu(x)$ matrisleri görüldüğü gibi noktanın koordinatlarına bağlı. Doğrusal bağımsız koordinat bazlarını yine doğrusal bağımsız bazlara bu noktaya bağımlı dönme matrisleriyle çeviriyoruz. Yeni bazlarımızı koordinat bazları gibi birbirlerine eşlenik olacak şekilde tanımlıyoruz: $\omega^\mu e_\nu = \delta_\nu^\mu$. Bu da dönme matrislerinin birbirlerinin tersleri olmalarına yol açar $e^\mu{}_\sigma e_\nu{}^\sigma = \delta_\nu^\mu$. Dönme matrislerinin seçiminde hiçbir kısıtlama olmadığı için bunlar, elemanları reel sayılardan oluşan matrislerin oluşturduğu $GL(4, \mathbb{R})$ genel lineer grubun elemanı olacaklar. Böylece hem 1-form hem de teğet vektör bazı bu grup altında vektör gibi davranacak. Sonuç olarak elimizde vektör değerli 1-form ve vektör değerli bir teğet vektörü olduğunu görüyoruz. Bunlar koordinat bazında olmayan yeni ve manifold üzerindeki yapıyı zenginleştiren

özellikler. Bunun yanında matrislerin noktaya bağımlı alınmasının son derece önemli sonuçları olacak. Bazları kullanıp yazacağımız ifadelerin içerisinde türevler ve bir takım cebirsel operasyonlar olacak. Bazlar gibi bu ifadelerin de grup altında kovaryant bir şekilde dönüşmesini istiyoruz. Bunu sağlamak amacıyla yapıya spin katsayıları adı verilen ve elemanları 1-form olan matrisler $\Omega^\mu{}_\nu$ eklenecek. Bunlara paralel öteleme yaparken vektörlerin nasıl döndüklerini belirttikleri için *spin bağlantı katsayıları* adı verilir. Kordinat ve non-kordinat baz vektörünün paralel öteleme altında değişimini

$$\nabla_{\partial_\mu} \partial_\nu = \Gamma_{\mu\nu}^\rho \partial_\rho, \quad \nabla_{e_\mu} e_\nu = \hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho e_\rho, \quad (\text{C.2})$$

şeklinde yazarsak, $\hat{\Gamma}_{\mu\nu}^\rho$ ve $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ katsayıları bağlantı katsayılarımız olacak. ω^μ 1-form bazının dış türevini alıp katsayı olarak gelen kısmı türevi yukarıdaki kovaryant türev üzerinden yeniden ifade eder ve sonrasındaki gerekli cebirsel hesapları yapıp sonrasında benzer şekilde $\Omega^\mu{}_\nu$ formunun dış türevini hesaplırsak

$$d\omega^\mu + \Omega^\mu{}_\nu \wedge \omega^\nu = \frac{1}{2} T_{\alpha\beta}^\mu \omega^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad (\text{C.3})$$

$$d\Omega^\mu{}_\nu + \Omega^\mu{}_\sigma \wedge \Omega^\sigma{}_\nu = \hat{R}_\nu^\mu = \frac{1}{2} R_{\nu\alpha\beta}^\mu \omega^\alpha \wedge \omega^\beta, \quad (\text{C.4})$$

$\Omega^\mu{}_\nu = \hat{\Gamma}_{\rho\nu}^\mu \omega^\rho$ bağlantı 1-formunun sağladığı sırasıyla Cartan birinci ve ikinci yapı denklemlerini buluruz. Denklemlerde görünen $T_{\alpha\beta}^\mu$ ve $R_{\nu\alpha\beta}^\mu$ sırasıyla manifoldun Torsiyon ve Riemann eğrilik tensörüdür ve aşağıdaki gibi tanımlanırlar:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad (\text{C.5})$$

$$R(X, Y)Z = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})Z. \quad (\text{C.6})$$

Böylelikle ulaşmak istediğimiz sonuçta kullanacağımız temel araçları elde etmiş durumdayız. Şimdi de Gauss-Bonnet terimini Riemann eğrilik tensörü üzerinden nasıl göstereceğimizi yazalım. d-boyutta Einstein tensörünün özelliklerini yani ikinci mertebe simetrik, metriğin en fazla ikinci mertebe türevini içeren ve diverjansı sıfır olan yazılabilecek en genel tensör D. Lovelock tarafından orataya konmuştur [173]. Bu tensöre karşılık gelen Lagranjyen aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \sum_{m=1}^t \alpha_m \frac{1}{2^m} \delta_{\alpha_1 \beta_1 \dots \alpha_m \beta_m}^{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_m \nu_m} R_{\mu_1 \nu_1}^{\alpha_1 \beta_1} \dots R_{\mu_m \nu_m}^{\alpha_m \beta_m}. \quad (\text{C.7})$$

Burada determinant tensoru $\delta_{\alpha_1\beta_1\dots\alpha_n\beta_n}^{\mu_1\nu_1\dots\mu_n\nu_n} = n!\delta_{[\alpha_1}^{\mu_1}\dots\delta_{\beta_n]}^{\nu_n}$ şeklinde tanımlanır. Alt indislerdeki köşeli parantez indislerin tamamen antisimetrik hale getirilmesini ifade ediyor. Çift boyutlu uzaylarda $d = 2t + 2$ ve tek boyutlu uzaylarda ise $d = 2t + 1$ alınır. Bu Lagranjiyenden türetilmiş alan denklemleri einstein tensörünün yüksek boyutlu uzaylara doğal genellemesi olacaktır. Bu genel skaler ifadenin $n = 2$ özel durumu Gauss-Bonnet terimi vermektedir

$$\delta_{\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2}^{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2} R_{\mu_1\nu_1}^{\alpha_1\beta_1} R_{\mu_2\nu_2}^{\alpha_2\beta_2} = 4(R^2 - 4R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} + R^{\mu\nu\rho\sigma}R_{\rho\sigma}^{\mu\nu}). \quad (C.8)$$

Lovelock lagranjyeni diferansiyel formlar diliyle

$$\mathcal{L} = \hat{R}^{\mu_1\nu_1} \wedge \dots \wedge \hat{R}^{\mu_n\nu_n} \wedge *(\omega_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \omega_{\mu_n}), \quad (C.9)$$

şeklinde Riemann $\hat{R}^{\mu\nu}$ Eğrilik 2-formu ve baz çarpımlarının hodge dualinin dış çarpımları olarak yazılabilir [174]. O zaman Gauss-Bonnet terimini verecek lagranjyen

$$\mathcal{L} = \hat{R}^{\mu\nu} \wedge \hat{R}^{\rho\sigma} \wedge *(\omega_{\mu} \wedge \omega_{\nu} \wedge \omega_{\rho} \wedge \omega_{\sigma}), \quad (C.10)$$

olacaktır. Bunu gösterelim. Teğet vektör bazını ortonormal olacak şekilde seçiyoruz:

$$\omega_i^\mu \omega_j^\nu \eta_{\mu\nu} = g_{ij}. \quad (C.11)$$

Eşitliğin her iki tarafının determinantını alırsak

$$\det(\omega_i^\mu) = \sqrt{-g}, \quad (C.12)$$

buluruz. Buradan da ters matris için $\det(\omega_\mu^i) = \frac{1}{\sqrt{-g}}$ yazarız. Form diliyle yazığımız (C.9) lagranjyeninin $G(4, \mathbb{R})$ grubu altında bir skaler olduğunu ve dolayısıyla bulacağımız sonucun yaptığımız baz seçiminden bağımsız olduğunu hatırlatalım. n-boyutlu uzayda Hodge dualin tanımını hatırlayalım:

$$*(dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) = \frac{1}{(n-p)!} \varepsilon_{\nu_1\dots\nu_{n-p}}^{\mu_1\dots\mu_p} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{n-p}}, \quad (C.13)$$

burada $\varepsilon_{\nu_1\dots\nu_n} = \sqrt{-g}\delta_{\nu_1\dots\nu_n}$ genelleştirilmiş Levi-Civita tensörüdür. $\delta_{\nu_1\dots\nu_n}$ antisimetrik semböldür. Bu bilgiler ışığında

$$*(\omega_{\mu} \wedge \omega_{\nu} \wedge \omega_{\rho} \wedge \omega_{\sigma}) = \sqrt{-g} \delta_{ijkl} \omega_{\mu}^i \omega_{\nu}^j \omega_{\rho}^k \omega_{\sigma}^l = \delta_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (C.14)$$

ve benzer şekilde

$$(\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} \wedge \omega^{\delta}) = d^4x \sqrt{-g} \delta^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad (C.15)$$

sonuçlarını buluruz. (C.10)'u açıkça yazarsak

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} R_{\gamma\delta}^{\rho\sigma} (\omega^\alpha \wedge \omega^\beta \wedge \omega^\gamma \wedge \omega^\delta) * (\omega_\mu \wedge \omega_\nu \wedge \omega_\rho \wedge \omega_\sigma) \\ &= d^4x \sqrt{-g} \delta_{\mu\nu\rho\sigma}^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} R_{\gamma\delta}^{\rho\sigma},\end{aligned}\quad (C.16)$$

buluruz. Böylece Gauss-Bonnet lagranjyenini elde ederiz. Şimdi de lagranjyenin bir tam form olduğunu gösterelim. İkinci Cartan yapı denklemini kullanırsak

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \hat{R}^{\mu\nu} \wedge \hat{R}^{\rho\sigma} \wedge *(\omega_\mu \wedge \omega_\nu \wedge \omega_\rho \wedge \omega_\sigma) \\ &= (d\Omega^{\mu\nu} \wedge d\Omega^{\rho\sigma} + d\Omega^{\mu\nu} \wedge \Omega_\lambda^\rho \wedge \Omega^{\lambda\sigma} + \Omega_\lambda^\mu \wedge \Omega^{\lambda\nu} \wedge d\Omega^{\rho\sigma} \\ &\quad + \Omega_\lambda^\mu \wedge \Omega^{\lambda\nu} \wedge \Omega_{\lambda_1}^\rho \wedge \Omega^{\lambda_1\sigma}) \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma},\end{aligned}\quad (C.17)$$

yazarız. İfadede ikinci ve üçüncü terimlerin indis isimlerini değiştirip düzenleyerek aynı oldukları kolayca görülebilir. Son terimde uzayın boyutu 4 olduğu için toplama indisleri λ sadece (ρ, σ) ve λ_1 ise (μ, ν) değerlerini alabilir. dolayısıyla son terim sıfır olur. Dış türevi özelliğini ilk terimde de kullanıp

$$\mathcal{L} = (d(\Omega^{\mu\nu} \wedge d\Omega^{\rho\sigma}) + 2d\Omega^{\mu\nu} \wedge \Omega_\lambda^\rho \wedge \Omega^{\lambda\sigma}) \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma}, \quad (C.18)$$

sonucunu buluyoruz. Şimdi de ikinci terimin türev olarak yazılabildiğini gösterelim. Yine dış türev özelliğini kullanıyoruz:

$$\begin{aligned}d\Omega^{\mu\nu} \wedge \Omega_\lambda^\rho \wedge \Omega^{\lambda\sigma} \wedge \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= (d(\Omega^{\mu\nu} \wedge \Omega_\lambda^\rho \wedge \Omega^{\lambda\sigma}) + \Omega^{\mu\nu} \wedge d\Omega_\lambda^\rho \wedge \Omega^{\lambda\sigma} \\ &\quad - \Omega^{\mu\nu} \wedge d\Omega_\lambda^\rho \wedge d\Omega^{\lambda\sigma}) \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma}.\end{aligned}\quad (C.19)$$

Sağ tarafta ikinci terim üzerinde indis düzenlemesi yaparak bu terimin eşitliğin sol tarafındaki terimin eksilisine eşit olduğunu gösterelim. λ toplama indisinin terimi sıfır yapmayan iki değeri mevcuttur (μ, ν) . Bunları açıkça yazalım:

$$\begin{aligned}\Omega^{\mu\nu} \wedge d\Omega_\lambda^\rho \wedge \Omega^{\lambda\sigma} \wedge \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= \Omega^{\mu\nu} \wedge d\Omega_\mu^\rho \wedge \Omega^{\mu\sigma} \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma} \\ &\quad + \Omega^{\mu\nu} \wedge d\Omega_\nu^\rho \wedge \Omega^{\nu\sigma} \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma}.\end{aligned}\quad (C.20)$$

Burada tüm indisler üzerinden toplama yaptığımızı hatırlatalım. Her iki terimde de alttaki indisi yukarda yazıp türevli çarpanı baş tarafa alalım:

$$= -\eta_{\mu\mu} d\Omega^{\mu\rho} \wedge \Omega^{\mu\nu} \wedge \Omega^{\mu\sigma} \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma} + \eta_{\nu\nu} d\Omega^{\rho\nu} \wedge \Omega^{\mu\nu} \wedge \Omega^{\nu\sigma} \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (C.21)$$

Bu sefer η metriğini her iki terimin ortasındaki çarpana uyguluyoruz:

$$= d\Omega^{\mu\rho} \wedge \Omega_\mu^\nu \wedge \Omega^{\mu\sigma} \wedge \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} + d\Omega^{\rho\nu} \wedge \Omega_\nu^\mu \wedge \Omega^{\nu\sigma} \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (C.22)$$

Son olarak da ilk terimde ν ve ρ indislerini ve ikinci terimde de μ ve ρ indislerini yer dişiştiriyoruz:

$$= -d\Omega^{\mu\nu} \wedge \Omega_{\mu}^{\rho} \wedge \Omega^{\mu\sigma} \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma} - d\Omega^{\mu\nu} \wedge \Omega_{\nu}^{\rho} \wedge \Omega^{\nu\sigma} \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (C.23)$$

şimdi de bold olarak gösterdiğimiz (μ, ν) indislerini tekrar λ toplama indisi olarak yeniden yazıyoruz:

$$= -d\Omega^{\mu\nu} \wedge \Omega_{\lambda}^{\rho} \wedge \Omega^{\lambda\sigma} \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma}. \quad (C.24)$$

Boylice ikinci terimin sol tarafın negatifine eşit olduğunu gösterdik. Benzer şekilde ncu terim de hesaplanırsa bu sefer sol taraftaki terimin aynısının ıkacağı kolayca gösterilebilir. O zaman C.19'u yeniden yazalım:

$$\begin{aligned} d\Omega^{\mu\nu} \wedge \Omega_{\lambda}^{\rho} \wedge \Omega^{\lambda\sigma} \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma} &= (d(\Omega^{\mu\nu} \wedge \Omega_{\lambda}^{\rho} \wedge \Omega^{\lambda\sigma}) - 2d\Omega^{\mu\nu} \wedge \Omega_{\lambda}^{\rho} \wedge \Omega^{\lambda\sigma}) \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma}. \\ &= \frac{1}{3}d(\Omega^{\mu\nu} \wedge \Omega_{\lambda}^{\rho} \wedge \Omega^{\lambda\sigma}) \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (C.25)$$

Tm terimleri toplarsak

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \hat{R}^{\mu\nu} \wedge \hat{R}^{\rho\sigma} \wedge *(\omega_{\mu} \wedge \omega_{\nu} \wedge \omega_{\rho} \wedge \omega_{\sigma}) \\ &= d[(\Omega^{\mu\nu} \wedge d\Omega^{\rho\sigma} + \frac{2}{3}\Omega^{\mu\nu} \wedge \Omega_{\lambda}^{\rho} \wedge \Omega^{\lambda\sigma}) \wedge \delta_{\mu\nu\rho\sigma}]. \end{aligned} \quad (C.26)$$

sonucunun çıktığını buluruz. Bu, 4 boyutlu uzayda Gauss-Bonnet terimi için yazdığımız lagranjyen 4-formunun aslında bir 3-formun dış türevi olarak yazılabildiğini ifade ediyor. Bu 3-form Chern-Simons formundan başka birşey değil. Dikkat edilirse bu form hiçbir şekilde metrik fonksiyonlarını içermiyor. Boylice 3 boyutlu yüzey üzerinde yazılmış toplojik bir ifadeye sahip olduğumuz hemen görülecektir. Bu zellik yalnızca Gauss-Bonnet terimine ait değildir. Lovelock lagranjyeninin, (C.9) lagranjyen formu kullanılarak en genel halde genelleştirilmiş Chern-Simons formunun bir dış türevi olarak yazılabildiği A.Yale ve T. Padmanabhan'ın [44] çalışmasında gösteriliyor.

D Alan Denklemlerinin Çıkarılışı

Bu kısımda çalışmamızda dikkate aldığımız yerçekim kuramlarını tanımlayan alan denklemlerinin varyasyon hesabıyla çıkarımını kısaca özetleyeceğiz.

Genel olması açısından önce Ricci skalerinin keyfi düzgün ve türelenebilir bir $f(R)$ fonksiyonuna karşılık gelen denklemleri çıkaralım. Genel bir n boyutlu uzay-zamanda

$$I = \int d^n x \sqrt{-g} f(R), \quad (\text{D.1})$$

aksiyonunun varyasyonu

$$\delta I = \int d^n x (\delta \sqrt{-g}) f(R) + \int d^n x \sqrt{-g} f'(R) [\delta(R_{\mu\nu}) g^{\mu\nu} + R_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}], \quad (\text{D.2})$$

olacaktır. Burada $f'(R) = \frac{d f(R)}{d R}$ olarak tanımlanır. Metrik determinanın varyasyonu için yazacağımız

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{D.3})$$

ifade ve Riemann tensörünün varyasyonundan yazılacak Palatini özdeşliğini

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\lambda (\delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\lambda\mu}^\lambda), \quad (\text{D.4})$$

kullanırsak aksiyon varyasyonu

$$\delta I = \int d^n x \sqrt{-g} (f' R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f) \delta g^{\mu\nu} + \int d^n x \sqrt{-g} f' \nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho), \quad (\text{D.5})$$

olarak yazılır. Christoffel sembolünün varyasyonu ile beraber

$$g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = -\frac{1}{2} [\nabla_\nu \delta g^{\nu\lambda} + \nabla_\mu \delta g^{\mu\lambda} - g_{\alpha\beta} \nabla^\lambda \delta g^{\alpha\beta}], \quad (\text{D.6})$$

ikinci terimdeki diverjans hesaplanırsa

$$\nabla_\lambda (g^{\mu\nu} \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda - g^{\mu\lambda} \delta \Gamma_{\rho\mu}^\rho) = (-\nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \square) \delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{D.7})$$

bulunur. Buradaki kovaryant türevleri kısmi integrasyonla $\delta g^{\mu\nu}$ üzerinden kaldırırsak, alan denklemlerine katkı yapmayan yüzey terimlerini yok sayarak ikinci terim için

$$\int d^n x \sqrt{-g} f' (-\nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \square) \delta g^{\mu\nu} = \int d^n x \sqrt{-g} [(-\nabla_\mu \nabla_\nu + g_{\mu\nu} \square) f'] \delta g^{\mu\nu}, \quad (\text{D.8})$$

yazarız. Sonuç olarak $f(R)$ yerçekimi kuramının aksiyonunun

$$\delta I = \int d^n x \sqrt{-g} (f' R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f') \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{D.9})$$

varyasyonundan alan denklemleri

$$f' R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} f - (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square) f' = 0, \quad (\text{D.10})$$

şeklinde bulunur [175]. Şimdi de $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ Ricci tensörünün karesinden gelecek olan alan denklemlerini hesaplayalım. Aksiyonun varyasyonunu alırsak

$$\delta I = \int d^n x [(\delta \sqrt{-g}) R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \sqrt{-g} \delta (R_{\mu\nu}) R^{\mu\nu} + \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta R^{\mu\nu}], \quad (\text{D.11})$$

bulunur. Son terimi ikincisi cinsinden ifade eder ve metrik determinanın varyasyonunu yerine yazarsak

$$\delta I = \int d^n x [(-\frac{\sqrt{-g}}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + 2\sqrt{-g} R_{\mu\rho} R_\nu^\rho) \delta g^{\mu\nu} + 2\sqrt{-g} R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu}], \quad (\text{D.12})$$

sonucunu buluyoruz. Bu aşamadan sonra Palatini özdeşliği, Christoffel sembolünün varyasyonunu hesaba katarsak Ricci tensörünün varyasyonunu metrik varyasyonu cinsinden aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$R^{\mu\nu} \delta R_{\mu\nu} = (\frac{1}{2} R_{\mu\nu} \square - R_\mu^\lambda \nabla_\nu \nabla_\lambda + \frac{1}{2} R^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\sigma) \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{D.13})$$

Bu aşamadan sonra yukarıda görülen metrik varyasyonun kovaryant türevlerini kısmi integrasyonla diğer terimlere aktarmak. Bunu yaptıktan sonra alan denklemlerini verecek olan son ifadeyi buluruz:

$$\delta I = \int d^n x \sqrt{-g} [(-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + 2 R_{(\mu|\rho|} R_{\nu)}^\rho + \square R_{\mu\nu} - 2 \nabla_\lambda \nabla_{(\nu} R_{\mu)}^\lambda + g_{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\rho\sigma}] \delta g^{\mu\nu}. \quad (\text{D.14})$$

Böylece Ricci tensörün karesinden gelecek alan denklemi

$$2 R_{(\mu|\rho|} R_{\nu)}^\rho - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta} + \square R_{\mu\nu} - 2 \nabla_\lambda \nabla_{(\nu} R_{\mu)}^\lambda + g_{\mu\nu} \nabla_\rho \nabla_\sigma R^{\rho\sigma} = 0, \quad (\text{D.15})$$

olur [176].

E N. Mertebe Laplace Denkleminin Green Fonksiyonu

\mathbb{R}^3 'de tanımlı olan $u(r)$ ve $\phi(r)$ reel fonksiyonları mevcut olsun. ∇^2 Laplace operatörünün n defa uygulanmasıyla elde edilmiş olan

$$(\nabla^2)^n \phi(\vec{r}) = u(\vec{r}) \quad (\text{E.1})$$

doğrusal diferansiyel denkleminde, $G(\vec{r} - \vec{r}')$ green fonksiyonunu kullanarak,

$$\phi(\vec{r}) = \int d^3\vec{r}' G(\vec{r} - \vec{r}') u(\vec{r}'), \quad (\text{E.2})$$

şeklinde bir çözüm üretmek istiyoruz. Green fonksiyonu $(\nabla^2)^n G(\vec{r} - \vec{r}') = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}')$ şeklinde tanımlanır. Fourier dönüşümleriyle

$$G(\vec{r}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} G(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (\text{E.3})$$

$$\delta^3(\vec{r}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (\text{E.4})$$

ifadeleri yazılır. Yazım kolaylığı açısından yukarıda yaptığımız gibi bundan sonra $\tau \equiv |\vec{r} - \vec{r}'|$ tanımlamasını kullanacağız. Bu dönüşümleri Green fonksiyonunun tanımına yerleştirirsek, Green fonksiyonunun fourier dönüşümünü

$$G(\vec{k}) = \frac{(-1)^n}{(2\pi)^{3/2} k^{2n}}, \quad (\text{E.5})$$

şeklinde buluruz. Burdan hareketle konum uzayında Green fonksiyonunu, fourier integralini hesaplayarak çıkaralım. Hesap kolaylığı açısından \vec{r} yer vektörünü \vec{k} uzayında k_z doğrultusunda alalım. Bu durumda fourier integrali

$$\begin{aligned} G(\vec{r}) &= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{(-1)^n}{k^{2n}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ &= \frac{(-1)^{n+1} i}{(2\pi)^2 \tau} \left(\int_0^\infty \frac{dk}{k^{2n-1}} e^{ik\tau} - \int_0^\infty \frac{dk}{k^{2n-1}} e^{-ik\tau} \right), \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

haline gelir. İkinci integralde k yerine $-k$ yazarsak

$$G(\vec{r}) = \frac{(-1)^{n+1} i}{(2\pi)^2 \tau} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk}{k^{2n-1}} e^{ik\tau}, \quad (\text{E.7})$$

ifadesini yazarız. İntegralde $x = k\tau$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$G(\vec{r}) = \frac{(-1)^{n+1} i\tau^{2n-3}}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^{2n-1}} e^{ix}, \quad (\text{E.8})$$

sonucu bulunur. İfade içinde olan integraldeki fonksiyonun sıfır noktasında çok katlı bir kutbu olduğundan (n bir doğal sayı olduğundan $x = 0$ noktası dallanma noktası (branch point) yerine çok katlı bir kutup olur.) bu improper integralin cauchy principle değeri kompleks düzlemde kontür intergralleri kullanılarak bulunur. Kompleks analiz kitaplarındaki [177] standart metodlar kullanılırsa Green fonksiyonu

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = -\frac{|\vec{r} - \vec{r}'|^{2n-3}}{4\pi (2n-2)!}, \quad (\text{E.9})$$

olarak bulunur. Bu aşamadan sonra green fonksiyonunu (E.2) integrali içerisine yerleştirmek ve küresel simetrik bir $u(\vec{r}) = u(r)$ fonksiyonu için integrali almak gerekecek. Bu yapılırsa

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= -\frac{1}{4\pi (2n-2)!} \int d^3\vec{r}' |\vec{r} - \vec{r}'|^{2n-3} u(r') \\ &= -\frac{1}{2 (2n-1)! r} \int_0^{\infty} dr' r' u(r') (|r+r'|^{2n-3} - |r-r'|^{2n-3}), \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

çözümü elde edilir. $n = 2$ durumunda ise

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= -\frac{1}{6r} \int_0^r dr' r'^4 u(r') - \frac{r}{2} \int_0^r dr' r'^2 u(r') \\ &\quad - \frac{r^2}{6} \int_r^{\infty} dr' r' u(r') - \frac{1}{2} \int_r^{\infty} dr' r'^3 u(r'), \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

ifadesi yazılır.

KAYNAKLAR

- [1] C. M. Will, “The confrontation between general relativity and experiment,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 17, p. 4, Jun 2014.
- [2] A. Eddington, *The Mathematical Theory of Relativity*. Cambridge University Press, 2010.
- [3] H. Weyl *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin.*, p. 465, 1918.
- [4] H. Weyl *Math.Z.*, p. 384, 1918.
- [5] H.-J. Schmidt, “Fourth order gravity: Equations, history, and applications to cosmology,” *eConf*, vol. C0602061, p. 12, 2006.
- [6] R. Utiyama and B. S. DeWitt, “Renormalization of a classical gravitational field interacting with quantized matter fields,” *J. Math. Phys.*, vol. 3, pp. 608–618, 1962.
- [7] K. S. Stelle, “Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D16, pp. 953–969, 1977.
- [8] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Spacetime*. Cambridge University Press, 1982.
- [9] G. A. Vilkovisky, “Effective action in quantum gravity,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 9, pp. 895–903, 1992.
- [10] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden, and M. S. Turner, “Is cosmic speed - up due to new gravitational physics?,” *Phys. Rev.*, vol. D70, p. 043528, 2004.
- [11] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “f(R) Theories Of Gravity,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 82, pp. 451–497, 2010.

- [12] S. Capozziello, V. F. Cardone, and A. Troisi, “Dark energy and dark matter as curvature effects,” *JCAP*, vol. 0608, p. 001, 2006.
- [13] S. Capozziello, V. F. Cardone, and A. Troisi, “Low surface brightness galaxies rotation curves in the low energy limit of r^{**n} gravity: no need for dark matter?,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 375, pp. 1423–1440, 2007.
- [14] A. Borowiec, W. Godlowski, and M. Szydłowski, “Dark matter and dark energy as a effects of Modified Gravity,” *Theoretical physics: Current mathematical topics in gravitation and cosmology. Proceedings, 42nd Karpacz Winter School, Ladek, Poland, February 6-11, 2006*, vol. C0602061, p. 09, 2006.
- [15] C. F. Martins and P. Salucci, “Analysis of Rotation Curves in the framework of R^{**n} gravity,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 381, pp. 1103–1108, 2007.
- [16] M. Milgrom, “A modification of the Newtonian dynamics as a possible alternative to the hidden mass hypothesis,” *apj*, vol. 270, pp. 365–370, jul 1983.
- [17] R. H. Sanders and S. S. McGaugh, “Modified newtonian dynamics as an alternative to dark matter,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 40, no. 1, pp. 263–317, 2002.
- [18] P. D. Mannheim, “Alternatives to dark matter and dark energy,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 56, no. 2, pp. 340 – 445, 2006.
- [19] N. Aghanim *et al.*, “Planck 2018 results. VI. Cosmological parameters,” *arXiv:1807.0620*, 2018.
- [20] S. Nojiri and S. D. Odintsov, “Introduction to modified gravity and gravitational alternative for dark energy,” *eConf*, vol. C0602061, p. 06, 2006.
- [21] A. De Felice and S. Tsujikawa, “ $f(R)$ theories,” *Living Rev. Rel.*, vol. 13, p. 3, 2010.
- [22] J. D. Barrow and S. Cotsakis, “Inflation and the Conformal Structure of Higher Order Gravity Theories,” *Phys. Lett.*, vol. B214, pp. 515–518, 1988.
- [23] D. Wands, “Extended gravity theories and the Einstein-Hilbert action,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 11, pp. 269–280, 1994.

- [24] J. W. Moffat, “Scalar-tensor-vector gravity theory,” *JCAP*, vol. 0603, p. 004, 2006.
- [25] Y. Fujii and K.-i. Maeda, *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2003.
- [26] T. Kobayashi, “Horndeski theory and beyond: a review,” *arXiv:1901.07183*, 2019.
- [27] P. D. Mannheim, “Making the case for conformal gravity,” *Foundations of Physics*, vol. 42, pp. 388–420, Mar 2012.
- [28] P. D. Mannheim, “Mass generation, the cosmological constant problem, conformal symmetry, and the Higgs boson,” *Progress in Particle and Nuclear Physics*, vol. 94, pp. 125–183, May 2017.
- [29] V. Dzhunushaliev and H.-J. Schmidt, “New vacuum solutions of conformal weyl gravity,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 41, no. 5, pp. 3007–3015, 2000.
- [30] G. ’t Hooft, “Local Conformal Symmetry: the Missing Symmetry Component for Space and Time,” *arXiv:gr-qc:1410.6675*, 2014.
- [31] Y. Sofue, Y. Tutui, M. Honma, A. Tomita, T. Takamiya, J. Koda, and Y. Takeda, “Central rotation curves of spiral galaxies,” *The Astrophysical Journal*, vol. 523, pp. 136–146, sep 1999.
- [32] Y. Sofue, “Mass Distribution and Rotation Curve in the Galaxy,” in *Planets, Stars and Stellar Systems Vol. 5* (T. D. Oswalt and G. Gilmore, eds.), vol. 5, p. 985, Springer Science+Business Media Dordrecht, 2013.
- [33] Y. Sofue and V. Rubin, “Rotation Curves of Spiral Galaxies,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, vol. 39, pp. 137–174, Jan 2001.
- [34] Y. Yoon, “Problems with mannheim’s conformal gravity program,” *Phys. Rev. D*, vol. 88, p. 027504, Jul 2013.
- [35] V. Perlick and C. Xu, “Matching exterior to interior solutions in weyl gravity: Comment on exact vacuum solution to conformal weyl gravity and galactic rotation curves,” *apj*, vol. 449, p. 47, aug 1995.

- [36] E. E. Flanagan, “Fourth order weyl gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 74, p. 023002, 2006.
- [37] C. Deliduman, O. Kaşıkçı, and B. Yapışkan, “Flat Galactic Rotation Curves from Geometry in Weyl Gravity,” *arXiv: 1511.07731*, 2015.
- [38] K. Y. Ekşi, C. Güngör, and M. M. Türkoğlu, “What does a measurement of mass and/or radius of a neutron star constrain: Equation of state or gravity?,” *Phys. Rev.*, vol. D89, no. 6, p. 063003, 2014.
- [39] O. Kaşıkçı and C. Deliduman, “Gravitational Lensing in Weyl Gravity,” *arXiv:1812.01076*, 2018.
- [40] C. Deliduman, O. Kaşıkçı, and B. Yapışkan, “Astrophysics with weyl gravity,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 33, no. 34, p. 1845011, 2018.
- [41] *The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 8: The Berlin, Years: Correspondence, 1914-1918*. Princeton University Press, November, 1998.
- [42] R. Bach, “Zur allgemeinen relativitätstheorie und der weylschen erweiterung des krümmungstensorbegriffs,” *Math. Zeits.*, vol. 9, p. 110, 1921.
- [43] G. F. R. Ellis, R. Maartens, and M. A. H. MacCallum, *Relativistic Cosmology*. Cambridge University Press., 2012.
- [44] A. Yale and T. Padmanabhan, “Structure of lanczos-lovelock lagrangians in critical dimensions,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 43, pp. 1549–1570, Jun 2011.
- [45] C. Lanczos, “A remarkable property of the riemann-christoffel tensor in four dimensions,” *Annals of Mathematics*, vol. 39, no. 4, pp. 842–850, 1938.
- [46] J. Bergman, “Conformal einstein spaces and bach tensor generalizations in n dimensions, PhD Thesis,” *Matematiska institutionen Linköpings Universitet*, 2004.
- [47] J. L. Said, J. Sultana, and K. Z. Adami, “Charged cylindrical black holes in conformal gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 86, p. 104009, Nov 2012.

- [48] K. Horne, *Conformal Gravity web sayfası*. Erişim tarihi: 09.Haziran.2019.
<http://star-www.st-and.ac.uk/~kdh1/cg.html>.
- [49] R. J. Riegert, “Birkhoff’s theorem in conformal gravity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 53, pp. 315–318, Jul 1984.
- [50] R. J. Riegert, “Classical and quantum conformal gravity. PhD thesis,” *University of California, San Diego*, 1986.
- [51] P. D. Mannheim and D. Kazanas, “Exact vacuum solution to conformal weyl gravity and galactic rotation curves,” *Astrophys. J.*, vol. 342, pp. 635–638, 1989.
- [52] T. Padmanabhan, *Gravitation: Foundations and Frontiers*. Cambridge University Press, 2010.
- [53] R. Wald, *General Relativity*. University of Chicago Press, 1984.
- [54] H. Weyl, *Space-time-matter*. Dover, 1951.
- [55] S. Deser and B. Tekin, “Shortcuts to high symmetry solutions in gravitational theories,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 20, pp. 4877–4883, oct 2003.
- [56] P. D. Mannheim and D. Kazanas, “Solutions to the reissner-nordström, kerr, and kerr-newman problems in fourth-order conformal weyl gravity,” *Phys. Rev. D*, vol. 44, pp. 417–423, Jul 1991.
- [57] P. D. Mannheim and D. Kazanas, “Newtonian limit of conformal gravity and the lack of necessity of the second order poisson equation,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 26, pp. 337–361, Apr 1994.
- [58] P. D. Mannheim, “Dynamical mass and geodesic motion,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 25, pp. 697–715, Jul 1993.
- [59] A. Van Proeyen and D. Z. Freedman, *Supergravity*. Cambridge University Press, May 7, 2012.
- [60] J. Haantjes, “The conformal dirac equation,” *Proc. Kon. Nederl. Acad. Wetensch.*, vol. 44, pp. 324–332, 1941.

- [61] P. D. Mannheim and J. G. O'Brien, "Impact of a global quadratic potential on galactic rotation curves," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 106, p. 121101, Mar 2011.
- [62] P. D. Mannheim and J. G. O'Brien, "Fitting galactic rotation curves with conformal gravity and a global quadratic potential," *Phys. Rev. D*, vol. 85, p. 124020, Jun 2012.
- [63] J. G. O'Brien and P. D. Mannheim, "Fitting dwarf galaxy rotation curves with conformal gravity," *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol. 421, pp. 1273–1282, 03 2012.
- [64] P. D. Mannheim and J. G. O'Brien, "Galactic rotation curves in conformal gravity," *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 437, p. 012002, apr 2013.
- [65] P. D. Mannheim, "Comment on "problems with mannheim's conformal gravity program"," *Phys. Rev. D*, vol. 93, p. 068501, 2016.
- [66] S. Hawking and G. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, New edition (March 28, 1975).
- [67] J. Wood and W. Moreau, "Solutions of conformal gravity with dynamical mass generation in the solar system," 2001, arXiv:gr-qc/0102056.
- [68] J. Wood, "Solutions of conformal gravity with dynamical mass generation in the solar system, PhD Thesis," *University of Canterbury*, 2000.
- [69] P. D. Mannheim, "Schwarzschild limit of conformal gravity in the presence of macroscopic scalar fields," *Phys. Rev. D*, vol. 75, p. 124006, 2007.
- [70] P. Kervella, F. Mignard, A. Merand, and F. Thevenin, "Close stellar conjunctions of α Centauri A and B until 2050 . An $m_K = 7.8$ star may enter the Einstein ring of α Cen A in 2028," *A & A*, vol. 594, p. A107, Oct 2016.
- [71] J. Oort, "The force exerted by the stellar system in the direction perpendicular to the galactic plane and some related problems," *Bull. Astron. Neth*, vol. 6, p. 249, aug 1932.
- [72] F. Zwicky, "Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln," *Helvetica Physica Acta*, vol. 6, pp. 110–127, 1933.

- [73] V. Rubin, “Dark matter in spiral galaxies,” *Scientific American*, vol. 248, pp. 96–108, 1983.
- [74] C. Alcock and et al *Apj*, vol. 542, pp. 281–307, 2000.
- [75] P. Tisserand and et al *Astron. and Astrophys.*, vol. 469, pp. 387–404, 2007.
- [76] K. Garrett and G. Duda, “Dark Matter: A Primer,” *Advances in Astronomy*, vol. 2011, p. 968283, Jan 2011.
- [77] D. Hooper, “TASI 2008 Lectures on Dark Matter,” *arXiv:0901.4090*, Jan 2009.
- [78] K. C. Freeman, “On the disks of spiral and s0 galaxies,” *apj*, vol. 160, p. 811, jun 1970.
- [79] T. Padmanabhan, *Invitation To Astrophysics*. World Scientific Series in Astronomy and Astrophysics, Vol. 8, 2006.
- [80] P. D. Mannheim, “Are galactic rotation curves really flat?,” *The Astrophysical Journal*, vol. 479, pp. 659–664, apr 1997.
- [81] J. P. Ostriker and P. J. E. Peebles, “A Numerical Study of the Stability of Flattened Galaxies: or, can Cold Galaxies Survive?,” *apj*, vol. 186, pp. 467–480, dec 1973.
- [82] J. Gunn and J. R. Gott, III, “On the Infall of Matter Into Clusters of Galaxies and Some Effects on Their Evolution,” *apj*, vol. 176, p. 1, aug 1972.
- [83] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White, “A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering,” *apj*, vol. 490, pp. 493–508, dec 1997.
- [84] J. F. Navarro, C. Frenk, and S. White, “The Structure of Cold Dark Matter Halos,” *apj*, vol. 462, p. 563, may 1996.
- [85] D. Merritt, A. W. Graham, B. Moore, J. Diemand, and B. Terzic, “Empirical Models for Dark Matter Halos. I. Nonparametric Construction of Density Profiles and Comparison with Parametric Models,” *aj*, vol. 132, dec 2006.
- [86] S. Dodelson, *Modern Cosmology*. Academic Press, March 27, 2003.

- [87] S. Weinberg, *Cosmology*. Oxford Press, 2008.
- [88] R. S. J. K. Hoskins, R. D. Newman and J. Schultz *Phys. Rev. D*, vol. 32, p. 3084, 1985.
- [89] J. C. Long, H. W. Chan, and J. C. Price *Nucl. Phys. B*, vol. 23, p. 539, 1999.
- [90] D. J. Kapner, T. S. Cook, E. G. Adelberger, J. H. Gundlach, B. R. Heckel, C. D. Hoyle, and H. E. Swanson *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 021101, 2007.
- [91] S. Carroll, *Spacetime and Geometry*. Addison-Wesley, 2003.
- [92] A. Bosma, “21-cm line studies of spiral galaxies. 2. The distribution and kinematics of neutral hydrogen in spiral galaxies of various morphological types,” *Astron. J.*, vol. 86, p. 1825, 1981.
- [93] K. G. Begeman, “H I rotation curves of spiral galaxies. I - NGC 3198,” *Astron. Astrophys.*, vol. 223, pp. 47–60, 1989.
- [94] M. Persic, P. Salucci, and F. Stel, “The Universal rotation curve of spiral galaxies: 1. The Dark matter connection,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 281, p. 27, 1996.
- [95] A. Borriello and P. Salucci, “The Dark matter distribution in disk galaxies,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 323, p. 285, 2001.
- [96] P. Schneider, C. S. Kochanek, and J. Wambsganss, “Proceedings, 33rd Advanced Saas Fee Course on Gravitational Lensing: Strong, Weak, and Micro,” *Saas-Fee Advanced Courses*, vol. 33, pp. pp.1–553, 2006.
- [97] J. Silk *et al.*, *Particle Dark Matter: Observations, Models and Searches*. Cambridge Univ. Press, 2010.
- [98] D. H. Lyth and A. R. Liddle, *The primordial density perturbation: Cosmology, inflation and the origin of structure*. 2009.
- [99] S. Perlmutter *et al.*, “Measurements of Omega and Lambda from 42 high redshift supernovae,” *Astrophys. J.*, vol. 517, pp. 565–586, 1999.

- [100] A. G. Riess *et al.*, “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *Astron. J.*, vol. 116, pp. 1009–1038, 1998.
- [101] A. G. Riess *et al.*, “Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution,” *Astrophys. J.*, vol. 607, pp. 665–687, 2004.
- [102] M. Kowalski *et al.*, “Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets,” *Astrophys. J.*, vol. 686, pp. 749–778, 2008.
- [103] H.-J. Schmidt, “The Newtonian limit of fourth order gravity,” *Astron. Nachr.*, vol. 307, pp. 339–340, 1986.
- [104] Y. Sobouti, “An $f(r)$ gravitation instead of dark matter,” *Astron. Astrophys.*, vol. 464, p. 921, 2007.
- [105] C. G. Boehmer, T. Harko, and F. S. N. Lobo, “Dark matter as a geometric effect in $f(R)$ gravity,” *Astropart. Phys.*, vol. 29, pp. 386–392, 2008.
- [106] E. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*. 1980.
- [107] V. Cardoso, A. S. Miranda, E. Berti, H. Witek, and V. T. Zanchin, “Geodesic stability, Lyapunov exponents and quasinormal modes,” *Phys. Rev.*, vol. D79, p. 064016, 2009.
- [108] P. S. Letelier, “On the stability of circular orbits of particles moving around black holes surrounded by axially symmetric structures,” *Phys. Rev.*, vol. D68, p. 104002, 2003.
- [109] D. Psaltis, “Probes and Tests of Strong-Field Gravity with Observations in the Electromagnetic Spectrum,” *Living Rev. Rel.*, vol. 11, p. 9, 2008.
- [110] P. R. Phillips, “Attraction and Repulsion in Conformal Gravity,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 448, no. 1, pp. 681–683, 2015.
- [111] S. Tremaine, *Galactic Dynamics*. Princeton University Press, 1987.

- [112] Y. Sofue, “Rotation Curve and Mass Distribution in the Galactic Center — From Black Hole to Entire Galaxy —,” *Publ. Astron. Soc. Jap.*, vol. 65, p. 118, 2013.
- [113] Y. Sofue, “Rotation curve decomposition for size–mass relations of bulge, disk, and dark halo components in spiral galaxies,” *Publ. Astron. Soc. Jap.*, vol. 68, no. 1, p. 2, 2016.
- [114] J. Donoghue, “Quantum gravity as a low energy effective field theory,” *Scholarpedia*, vol. 12, no. 4, p. 32997, 2017.
- [115] S. Pireaux, “Light deflection in Weyl gravity: Critical distances for photon paths,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 21, pp. 1897–1913, 2004.
- [116] S. Pireaux, “Light deflection in Weyl gravity: Constraints on the linear parameter,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 21, pp. 4317–4334, 2004.
- [117] S. S. Shapiro, J. L. Davis, D. E. Lebach, and J. S. Gregory, “Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979-1999,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 121101, 2004.
- [118] B. Bertotti, L. Iess, and P. Tortora, “A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft,” *Nature*, vol. 425, pp. 374–376, 2003.
- [119] M. A. Walker, “Lensing in Alternative Gravity,” *Astron. Soc. Australia*, vol. 12, p. 124, Aug 1995.
- [120] A. Edery and M. B. Paranjape, “Classical tests for Weyl gravity: Deflection of light and radar echo delay,” *Phys. Rev.*, vol. D58, p. 024011, 1998.
- [121] E. B. Fomalont and R. A. Sramek, “Measurements of the solar gravitational deflection of radio waves in agreement with general relativity,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 36, pp. 1475–147.
- [122] R. D. Reasenberg, I. I. Shapiro, P. E. MacNeil, R. B. Goldstein, J. C. Breidenthal, J. P. Brenkle, D. L. Cain, T. M. Kaufman, T. A. Komarek, and A. I. Zygielbaum, “Viking relativity experiment: Verification of signal retardation by solar gravity,” *Astrophys. J.*, vol. 234, pp. L219–L221, 1979.

- [123] W. Rindler and M. Ishak, “Contribution of the cosmological constant to the relativistic bending of light revisited,” *Phys. Rev.*, vol. D76, p. 043006, 2007.
- [124] J. Sultana, “Deflection of light to second order in conformal Weyl gravity,” *JCAP*, vol. 1304, p. 048, 2013.
- [125] J. Sultana and D. Kazanas, “Bending of light in conformal Weyl gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D81, p. 127502, 2010.
- [126] C. Cattani, M. Scalia, E. Laserra, I. Bochicchio, and K. K. Nandi, “Correct light deflection in Weyl conformal gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D87, no. 4, p. 047503, 2013.
- [127] A. Bhattacharya, A. Panchenko, M. Scalia, C. Cattani, and K. K. Nandi, “Light bending in the galactic halo by Rindler-Ishak method,” *JCAP*, vol. 1009, p. 004, 2010.
- [128] G. W. Gibbons and M. C. Werner, “Applications of the Gauss-Bonnet theorem to gravitational lensing,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 25, p. 235009, 2008.
- [129] G. W. Gibbons, C. M. Warnick, and M. C. Werner, “Light-bending in Schwarzschild-de-Sitter: Projective geometry of the optical metric,” *Class. Quant. Grav.*, vol. 25, p. 245009, 2008.
- [130] J. Islam, “The cosmological constant and classical tests of general relativity,” *Physics Letters A*, vol. 97, no. 6, pp. 239 – 241, 1983.
- [131] K. Lake, “Bending of light and the cosmological constant,” *Phys. Rev.*, vol. D65, p. 087301, 2002.
- [132] M. Ishak, W. Rindler, J. Dossett, J. Moldenhauer, and C. Allison, “A New Independent Limit on the Cosmological Constant/Dark Energy from the Relativistic Bending of Light by Galaxies and Clusters of Galaxies,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 388, pp. 1279–1283, 2008.
- [133] M. Ishak, W. Rindler, and J. Dossett, “More on Lensing by a Cosmological Constant,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 403, pp. 2152–2156, 2010.

- [134] M. Ishak and W. Rindler, “The Relevance of the Cosmological Constant for Lensing,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 42, pp. 2247–2268, 2010.
- [135] M. Park, “Rigorous Approach to the Gravitational Lensing,” *Phys. Rev.*, vol. D78, p. 023014, 2008.
- [136] M. Sereno, “The role of Lambda in the cosmological lens equation,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 102, p. 021301, 2009.
- [137] A. Bhadra, S. Biswas, and K. Sarkar, “Gravitational deflection of light in the Schwarzschild -de Sitter space time,” *Phys. Rev.*, vol. D82, p. 063003, 2010.
- [138] F. Simpson, J. A. Peacock, and A. F. Heavens, “On lensing by a cosmological constant,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 402, p. 2009, 2010.
- [139] H. Arakida, “Light deflection and Gauss–Bonnet theorem: definition of total deflection angle and its applications,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 50, no. 5, p. 48, 2018.
- [140] A. Ishihara, Y. Suzuki, T. Ono, T. Kitamura, and H. Asada, “Gravitational bending angle of light for finite distance and the Gauss-Bonnet theorem,” *Phys. Rev.*, vol. D94, no. 8, p. 084015, 2016.
- [141] A. Ishihara, Y. Suzuki, T. Ono, and H. Asada, “Finite-distance corrections to the gravitational bending angle of light in the strong deflection limit,” *Phys. Rev.*, vol. D95, no. 4, p. 044017, 2017.
- [142] M. A. Abramowicz and J. P. Carter, B. and Lasota, “Optical reference geometry for stationary and static dynamics,” *General Relativity and Gravitation*, vol. 20, pp. 1173–1183, Nov 1988.
- [143] D. Batic, S. Nelson, and M. Nowakowski, “Light on curved backgrounds,” *Phys. Rev.*, vol. D91, no. 10, p. 104015, 2015.
- [144] M. Sereno, “On the influence of the cosmological constant on gravitational lensing in small systems,” *Phys. Rev.*, vol. D77, p. 043004, 2008.
- [145] T. Schucker, “Cosmological constant and lensing,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 41, pp. 67–75, 2009.

- [146] A. Bhattacharya, G. M. Garipova, E. Laserra, A. Bhadra, and K. K. Nandi, “The Vacuole Model: New Terms in the Second Order Deflection of Light,” *JCAP*, vol. 1102, p. 028, 2011.
- [147] Y.-K. Lim and Q.-h. Wang, “Exact gravitational lensing in conformal gravity and Schwarzschild–de Sitter spacetime,” *Phys. Rev.*, vol. D95, no. 2, p. 024004, 2017.
- [148] A. R. Parry, “A Survey of Spherically Symmetric Spacetimes,” *Anal. Math. Phys.*, vol. 4, no. 4, pp. 333–375, 2014.
- [149] J. Bodenner and C. M. Will, “Deflection of light to second order: A tool for illustrating principles of general relativity,” *American Journal of Physics*, vol. 71, no. 8, pp. 770–773, 2003.
- [150] V. P. Frolov and A. Zelnikov, *Introduction to Black Hole Physics*. Oxford Press, 2011.
- [151] C. G. Darwin, “The gravity field of a particle,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A*, vol. 249, 1959.
- [152] C. R. Keeton and A. O. Petters, “Formalism for testing theories of gravity using lensing by compact objects. I. Static, spherically symmetric case,” *Phys. Rev.*, vol. D72, p. 104006, 2005.
- [153] V. Bozza, S. Capozziello, G. Iovane, and G. Scarpetta, “Strong field limit of black hole gravitational lensing,” *Gen. Rel. Grav.*, vol. 33, pp. 1535–1548, 2001.
- [154] V. Bozza, “Gravitational lensing in the strong field limit,” *Phys. Rev.*, vol. D66, p. 103001, 2002.
- [155] G. S. Bisnovatyi-Kogan and O. Y. Tsupko, “Gravitational lens ,” *memsai*, vol. 83, p. 54, 2012.
- [156] I. A. S. Milton Abramowitz, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1965.
- [157] K. S. Virbhadra and G. F. R. Ellis, “Schwarzschild black hole lensing,” *Phys. Rev.*, vol. D62, p. 084003, 2000.

- [158] D. Cutajar and K. Z. Adami, “Strong lensing as a test for Conformal Weyl Gravity,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, vol. 441, no. 2, pp. 1291–1296, 2014.
- [159] A. A. Potapov, R. N. Izmailov, and K. K. Nandi, “Mass decomposition of SLACS lens galaxies in Weyl conformal gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 12, p. 124070, 2016.
- [160] A. Maeder, “Dynamical Effects of the Scale Invariance of the Empty Space: The Fall of Dark Matter?,” *Astrophys. J.*, vol. 849, no. 2, p. 158, 2017.
- [161] E. S. Fradkin and A. A. Tseytlin, “Renormalizable asymptotically free quantum theory of gravity,” *Nucl. Phys.*, vol. B201, pp. 469–491, 1982.
- [162] B. Holdom and J. Ren, “QCD analogy for quantum gravity,” *Phys. Rev.*, vol. D93, no. 12, p. 124030, 2016.
- [163] G. ’t Hooft, “Singularities, horizons, firewalls, and local conformal symmetry,” *Springer Proc. Phys.*, vol. 208, pp. 1–12, 2018.
- [164] E. Kreyszig, *Differential Geometry*. Dover Publications, 1991.
- [165] B. O’Neill, *Elementary Differential Geometry*. Academic Press, 2006.
- [166] W. Kühnel, *Differential Geometry: Curves - Surfaces - Manifolds*. American Mathematical Society, 2005.
- [167] M. Blau, *Lecture Notes on General Relativity*. October 2018. <http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html>.
- [168] A. K. Jerzy Plebanski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. Cambridge University Press, 2006.
- [169] L. Defrise-Carter, “Conformal groups and conformally equivalent isometry groups,” *Commun. math. Phys.*, vol. 40, pp. 273–282, 1975.
- [170] S. Morita, *Geometry of Differential Forms*. American Mathematical Society, 2001.
- [171] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*. CRC Press, 2003.

- [172] L. W. Tu, *Differential Geometry: Connections, Curvature, and Characteristic Classes*. Springer, 2017.
- [173] D. Lovelock, “The einstein tensor and its generalizations,” *J. Math. Phys.*, vol. 12, p. 498, 1971.
- [174] R. C. Myers, “Higher-derivative gravity, surface terms, and string theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 36, pp. 392–396, Jul 1987.
- [175] A. De Felice and S. Tsujikawa, “ $f(R)$ theories,” *Living Reviews in Relativity*, vol. 13, no. 1, p. 3, 2010.
- [176] B. DeWitt, “Dynamical theory of groups and fields,” in *Relativity, Groups and Topology, lectures delivered at Les Houches during the 1963 session of the summer school of theoretical physics*. Gordon and Breach, 1964.
- [177] J. W. Brown and R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill Education, 2013.