KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

PARABOLİK OPERATÖRLER İÇİN MAKSİMUM PRENSİBİ VE DOYUM PROBLEMİ

RECEP ŞAHİN

TEMMUZ 2004

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı.

Prof. Dr. M. Yakup ARICA

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN

Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Abdullah ALTIN

Yrd. Doç. Dr. Nuri ÖZALP

Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN

ÖZET

PARABOLİK OPERATÖRLER İÇİN MAKSİMUM PRENSİBİ VE DOYUM PROBLEMİ

ŞAHİN, Recep

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Yrd.Doç. Dr. Ali OLGUN

Temmuz 2004, 97 Sayfa

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; yapılan çalışmalar ve tezin genel amacı hakkında bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde; maksimum prensibi, başlangıç ve sınır değer problemleri açıklanmıştır. Üçüncü bölümde; parabolik tipten denklemler için maksimum prensibi, ısı denklemi için maksimum prensibi ve ısı denklemi için patlama ve doyum problemleri incelenmiştir. Dördüncü bölüm ise tartışma ve sonuç olarak ayrılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Maksimum ve minimum nokta, maksimum ve minimum değer, sınır değer problemi, parabolik operatör, ısı denklemi. Patlama ve doyum problemi

ABSTRACT

MAKSİMUM PRENCIPLES FOR PARABOLIC OPERATORS AND QUENCHING PROBLEM

ŞAHİN, Recep

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Asst.Prof.Dr. Ali OLGUN

JULY 2004, 97 Pages

This thesis contains four sections. The first section gives some background and explains the purpose of the thesis. The second section deals with the principle of maximum, initial and boundary value problems. The third chapter analyses maximum principle for parabolic equations and maximum principle for heat equations and also blow-up and quenching problems for heat equations. The fourth section includes some discussions and conclusions.

Key Words: Maximum and minimum point, maximum and minimum value, boundary value problem, parabolic operator, heat equation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana vererek, çalışmalarım boyunca yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN'a ve Sayın Yrd.Doç. Dr. Nuri ÖZALP'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

ŞEKİL

SİMGELER DİZİNİ

M	Maksimum Değer
L	İkinci Basamaktan Lineer Operatör
a*	a noktasının konjüge noktası

1. GİRİŞ

Kısmi Türevli Denklemler teorisinde Maksimum Minimum problemleri önemli yer tutarlar. Özellikle başlangıç ve sınır değer problemlerinin çözümlerinde kısmi türevli denklem, denklemin tanımlı olduğu bölge, bölgenin sınırı ile verilen başlangıç ve sınır şartlarının yapısı önemlidir. Çoğu zaman denklemin veya verilen sınır şartlarının durumlarına göre problemin çözümünde maksimum ve minimum değerlerinin önemi büyüktür. Problemin elemanter çözümü olsun yada olmasın çözümün davranışları maksimum ve minimum prensipleri yardımıyla incelenebilir. Fiziksel olarak gerçekleşen ısı yayılımı problemi için çözümlerin davranışlarını çoğu zaman maksimum prensibi yardımıyla inceleyebiliriz.

Eliptik ve parabolik tipten kısmi türevli denklemlerin genel incelemelerinde de maksimum prensibi önemli yer tutar. Biz bu çalışmada,

$$L[u] = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

şeklindeki parabolik tipten operatörler için maksimum prensibini, ısı denklemi için patlama ve doyum problemlerini inceleyeceğiz.

1.2.Kaynak Özetleri

PROTTER, M.H. ve WEINBERGER, H.F.'nin "Maximum Principles in Differential Equations" kitabında eliptik ve parabolik tipten operatörler için bir boyutlu ve çok boyutlu durumlarda maksimum ve minimum prensipleri açıkça anlatılmaktadır. ALİYEV, G.'nin kitabında parabolik tipten denklemlerin çözümlerin tekliği konusu açıklanmaktadır. CHAN, C.Y. ve ÖZALP, N.'nin çalışmalarında singüler reaksiyonların dağılımı adı altında patlama ve sonsuz doyma problemleri incelenmiştir. FILA, M. ve GUO, J-S'nin çalışmalarında sınır şartlarına bağlı olarak patlama ve doyum problemleri incelenmiştir.

1.3. Çalışmanın Amacı

Patlama ve doyum problemleri için maksimum prensibi yardımıyla sınırdaki koşulların değişik durumlarına göre patlamanın ve sonsuz doymanın gerçekleşme durumlarını inceleyerek değişik koşullar verildiğinde problemin ve çözümlerinin nasıl değişeceğini araştırmaktır.

2. MATERYAL VE YÖNTEMLER

2.1. Bir Boyutlu Maksimum Prensibi

Bu bölümde $L[u] \equiv u'' + g(x)u'$ ve $(L+h)[u] \equiv u'' + g(x)u' + h(x)u$ diferensiyel operatörleri için bir boyutlu uzayda maksimum prensibinin hangi koşullar altında sağlandığı incelenecek, ilgili teoremler ve ispatları verilecektir.

2.1.1. Maksimum prensibi

Kapalı bir $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli bir $u(x)$ fonksiyonu maksimum değerini bu aralık üzerindeki herhangi bir noktada alır. Eğer $u(x)$ fonksiyonunun ikinci türevi sürekli ise ve u fonksiyonu $[a,b]$ aralığındaki bir c noktasında bir yerel maksimuma sahipse, bu durumda,

$$u'(c) = 0 \text{ ve } u''(c) \leq 0 \tag{1}$$

dır.

Bir boyutlu maksimum prensibinin en basit hali olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 2.1.1.1: (Bir Boyutlu Maksimum Prensibi) $g(x)$ sınırlı bir fonksiyon olmak üzere, $u = u(x)$ fonksiyonu

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' \geq 0 \,,\, a < x < b \tag{2}$$

diferensiyel eşitsizliğini sağlasın. (a,b) aralığında $u(x) \leq M$ eşitsizliğini sağlıyor ve u maksimum değeri olan M ye (a,b) aralığındaki bir c noktasında ulaşıyor ise, bu takdirde $u \equiv M$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $u(c)=M$ ve (a,b) aralığının bir d noktasında $u(d)<M$ olsun. Bu kabulümüzün bir çelişkiye neden olduğunu göstereceğiz. Uygunluk bakımından $d>c$ olsun ve α pozitif bir sabit olmak üzere,

$$z(x)=e^{\alpha(x-c)}-1 \tag{3}$$

(Şekil 2.1.1.1) fonksiyonunu tanımlayalım. (3)den,

$$\begin{aligned} &z(x)<0, \quad a<x<c \quad \text{için} \\ &z(c)=0, \quad x=c \quad \text{için} \\ &z(x)>0, \quad c<x<b \quad \text{için} \end{aligned} \tag{4}$$

olduğu görülür. (3) ile verilen fonksiyona,

$$L=\frac{d^2}{dx^2}+g(x)\frac{d}{dx} \tag{5}$$

operatörü uygulanırsa,

$$L[z]=z''+g(x)z'=\alpha[\alpha+g(x)]e^{\alpha(x-c)} \tag{6}$$

elde edilir. α yeterince büyük seçildiğinde, $a<x<d$ için $L[z]>0$ olur ve (6) dan dolayı

$$\alpha>-g(x)$$

dir. $g(x)$ sınırlı olduğu sürece bu seçim yapılabilir. ε sayısı,

$$\varepsilon<\frac{M-u(d)}{z(d)} \tag{7}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilmiş pozitif bir sabit olsun. Kabulümüzden dolayı $u(d)<M$ ve $z(d)>0$ oluşu böyle bir ε sayısının bulunmasına imkan verir. Şimdi de

$$w(x)=u(x)+\varepsilon z(x) \tag{8}$$

seklinde bir fonksiyon tanımlayalım. $a<x<c$ için $z(x)<0$ olduğu gözönünde tutulursa

$$w(x) < M, \quad a < x < c$$

elde edilir. $x = d$ değeri (8) de yerine yazılır ve (7) eşitsizliği gözönüne alınırsa,

$$\begin{aligned} w(d) &= u(d) + \varepsilon z(d) \\ &< u(d) + \frac{M - u(d)}{z(d)} z(d) \\ &= M \end{aligned}$$

olup,

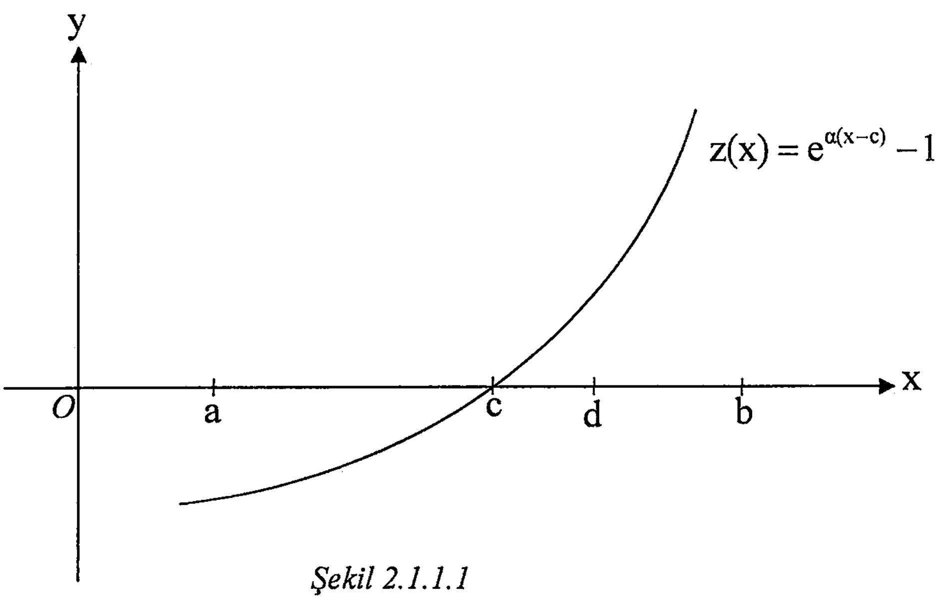
$$w(d) < M \tag{9}$$

bulunur. Yine (8) den dolayı $x = c$ için

$$w(c) = u(c) + \varepsilon z(c) = M \tag{10}$$

elde edilir.

(9) ve (10) dan dolayı w fonksiyonu, M den daha büyük yada eşit olan bir maksimuma sahiptir. Bundan dolayı w fonksiyonu maksimum değerine, (a,d) aralığındaki bir iç noktada ulaşır. Halbuki,



Şekil 2.1.1.1

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[z] > 0 \tag{11}$$

olduğundan, w fonksiyonu (a,d) aralığında bir maksimuma ulaşamaz. Çünkü, eğer w fonksiyonu (a,d) aralığında bir maksimuma ulaşsa idi, o noktada (1) ifadesi sağlanacak, bu ise (11) eşitsizliği ile çelişecekti. O halde kabulümüz yanlıştır. Yani $u(d) < M$ olamaz. Bu ise ispatı tamamlar.

Benzer şekilde $d < c$ ise,

$z(x) = e^{-\alpha(x-c)} - 1, \ \alpha > g(x)$

yardımcı fonksiyonu kullanılarak aynı sonuç elde edilebilir.

Yukarıdaki ispatta kullanılan $z(x)$ fonksiyonu,

i) $L[z] > 0$

ii) $z(x) < 0, x < c$

iii) $z(x) > 0, x > c$

iv) $z(c) = 0$

özelliklerini sağlayan bir fonksiyondur.

Uyarı:

i) Eğer $d < c$ ise (ii) ve (iii) eşitsizlikleri yön değiştirir.

ii) Bu ispatta kullanılan z fonksiyonu tek değildir. Örneğin, $z(x) = (x\text{-}a)^{\alpha} - (c\text{-}a)^{\alpha}$ fonksiyonu da yukarıdaki teoremi ispatlamak için kullanılabilir. Burada α, $z(x)$ fonksiyonu yukarıdaki dört özelliği sağlayacak şekilde seçilen, yeteri kadar büyük bir sabittir.

iii) *Teorem 2.1.1.1*, (-u) fonksiyonu içinde geçerlidir. Bu durumda minimum prensibi elde edilir. Minimum prensibi, $L[u] \le 0$ diferensiyel eşitsizliğini sağlayan sabit olmayan bir fonksiyonun bir iç noktada minimuma ulaşamayacağını ifade eder.

Teorem 2.1.1.2: u(x) fonksiyonu, (2) diferensiyel eşitsizliğini sağlayan ve a,b uç noktalarında tek yanlı türevlere sahip olan sabit olmayan bir fonksiyon olsun.

g(x) fonksiyonu da, (a,b) aralığının her kapalı alt aralığı üzerinde sınırlı olsun. Eğer u fonksiyonu maksimum değerini $x=a$ noktasında alıyor ve g(x) fonksiyonu $x=a$ noktasında alttan sınırlı ise, bu durumda $u'(a)<0$ dır. Eğer u fonksiyonu maksimum değerini $x=b$ noktasında alıyor ve g(x) fonksiyonu $x=b$ noktasında üstten sınırlı ise $u'(b)>0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki u(a)=M ve $a \le x \le b$ için $u \le M$ ve (a,b) aralığındaki herhangi bir d noktasında $u(d)<M$ olsun.

$$z(x)=e^{\alpha(x-a)}-1 \quad , \quad \alpha>0 \tag{12}$$

şeklinde bir yardımcı fonksiyon tanımlayalım. (12) ile verilen z(x) fonksiyonuna (5) ile verilen L diferensiyel operatörü uygulanırsa,

$$L[z]=z''+g(x)z'=\alpha[\alpha+g(x)]e^{\alpha(x-a)}$$

bulunur. Pozitif α sabiti, $L[z]>0$ diferensiyel eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçilirse,

$$\alpha>-g(x)$$

elde edilir. Şimdi de (8) ile verilen bir w fonksiyonu tanımlansın ve $\varepsilon>0$ sayısı (7) eşitsizliğiyle verilsin. Bu takdirde (11) diferensiyel eşitsizliği sağlanır ve bu nedenle w fonksiyonu [a,d] aralığında, maksimum değerini uç noktalardan birinde almalıdır. Aksi halde, iç noktada (1) ifadesi sağlanacağından (11) eşitsizliğiyle çelişki elde edilir. $x=a$ noktası (8) de yerine yazılır ve (12) tanımı göz önünde tutulursa, kabulden dolayı,

$$w(a)=u(a)+\varepsilon z(a)$$

$$= u(a)$$

$$= M$$

olup

$$w(a) = M \tag{13}$$

elde edilir. Benzer şekilde $x = d$ noktası (8) de yerine yazılır ve (7) göz önünde tutulursa

$$w(d) = u(d) + \varepsilon z(d)$$

$$< u(d) + \frac{M - u(d)}{z(d)} z(d)$$

$$= M$$

olup,

$$w(d) < M \tag{14}$$

bulunur. (13) ve (14) den $w(a) = M > w(d)$ olup, w fonksiyonunun maksimum değeri $x = a$ noktasında ortaya çıkar. Bu nedenle w fonksiyonunun, a noktasında tek yanlı türevi pozitif olamaz. Bu durumda,

$$w'(a) = u'(a) + \varepsilon z'(a) \le 0 \tag{15}$$

dır. Bununla birlikte (12) ifadesinde türev alınıp $x = a$ değeri yerine yazılırsa, $z'(a) = \alpha > 0$ elde edilir. Bu son eşitsizlikten ve (15) eşitsizliğinden $u'(a) < 0$ bulunur. Bu da istenilen sonuçtur.

Eğer u fonksiyonu maksimum değerini $x = b$ noktasında alıyorsa, bu durumda ispat yine benzer şekildedir.

Tanım 2.1.1.1: (Yatay Büküm Noktası) u fonksiyonu bir c noktasını içeren bazı aralıklarda kesin olarak artan yada azalan olduğunda $u'(c) = 0$ ise bu durumda u fonksiyonuna $x = c$ noktasında bir yatay (düz) büküm noktasına sahiptir denir.

Lemma 2.1.1.1: (2) ile verilen diferensiyel eşitsizliği sağlayan bir fonksiyon yatay büküm noktasına sahip olamaz.

İspat: Böyle bir yatay büküm noktasının olduğunu kabul edelim. Böyle bir noktayı içeren bir alt aralık seçilebilir. Örneğin, u fonksiyonunun maksimumunu aldığı aralık, uç noktası c olan bir alt aralık olabilir. Bu durumda uç noktada *Tanım 2.1.1.1* den dolayı $u'(c)=0$ olacağından *Teorem 2.1.1.2* ile çelişki elde edilir. bu ise lemmanın ispatını verir.

Uyarı: *Teorem 2.1.1.2* deki u fonksiyonu yerine (-u) fonksiyonu alınırsa ilgili minimum prensibi elde edilir.

$$L+h=\frac{d^2}{dx^2}+g(x)\frac{d}{dx}+h(x) \tag{16}$$

olmak üzere *Teorem 2.1.1.1* ve *Teorem 2.1.1.2* nin genişletilmişleri olan aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 2.1.1.3: $h(x)\le 0$ olmak üzere, u(x) fonksiyonu bir (a,b) aralığında

$$(L+h)[u]\equiv u''+g(x)u'+h(x)u\ge 0 \tag{17}$$

diferensiyel eşitsizliğini sağlasın. g(x) , h(x) fonksiyonları her kapalı alt aralık üzerinde sınırlı ve u(x) sınırlı olsun. Eğer u(x) fonksiyonu bir c iç noktasında negatif olmayan maksimum değerini alıyor ise bu takdirde $u(x)\equiv M$ dir.

İspat: $u(c)=M$ ve (a,b) aralığındaki bir d iç noktasında $u(d)<M$ olduğunu kabul edelim. Bu kabulümüzün bir çelişkiye neden olduğunu göstereceğiz.

$d>c$ ve α pozitif bir sabit olmak üzere (3) şeklinde bir z(x) fonksiyonu tanımlayalım. Aynı şekilde z(x) fonksiyonu (4) ile verilen özellikleri sağlayan bir fonksiyondur. (3) ile verilen z(x) fonksiyonuna (16) diferensiyel operatörü uygulanırsa

$$(L+h)[z] = z'' + g(x)z' + h(x)z$$

$$= \alpha[\alpha + g(x)]e^{\alpha(x-c)} + h(x)[e^{\alpha(x-c)} - 1]$$

$$= \{\alpha^2 + g(x)\alpha + h(x)[1 - e^{-\alpha(x-c)}]\}e^{\alpha(x-c)}$$

bulunur. $(L+h)[z] > 0$ eşitsizliğinin sağlanması için,

$$\alpha^2 + g(x)\alpha + h(x) - h(x)e^{\alpha(x-c)} > 0$$

olmalıdır. Hipotezden dolayı $h(x) \le 0$ olduğundan, $-h(x)e^{\alpha(x-c)} \ge 0$ dır. Bu nedenle α,

$$\alpha^2 + g(x)\alpha + h(x) > 0 \tag{18}$$

olacak şekilde seçilirse $(L+h)[z] > 0$ eşitsizliği sağlanır. $d < c$ olması durumunda ise $z(x) = e^{-\alpha(x-c)} - 1$ fonksiyonu tanımlanarak, benzer işlemler tekrarlanırsa α sabitinin,

$$\alpha^2 - g(x)\alpha + h(x) > 0 \tag{19}$$

şeklinde olması gerektiği anlaşılır. (18) ve (19) eşitsizlikleri gönünde tutulursa, α nın

$$\alpha^2 - |g(x)|\alpha + h(x) > 0$$

eşitsizliğini sağlaması gerekir. h(x) ve g(x) sınırlı olduğundan bu seçim yapılabilir. ε sayısı yine (7) eşitsizliği ile verilsin. w(x) fonksiyonunu da (8) deki gibi tanımlayalım. (8) den dolayı w fonksiyonu, $a < x < c$ için $w(x) < M$, $x = d$ için

$w(d) < M$ ve $x = c$ için $w(c) = M$ özelliklerini sağlar. Bu nedenle w fonksiyonu M den daha büyük yada M ye eşit olan bir maksimuma sahiptir.

w fonksiyonuna (16) diferensiyel operatörü uygulanıp, $(L+h)[z] > 0$ ve (17) eşitsizliği göz önünde tutulursa,

$$(L+h)[w] = (L+h)[u] + \varepsilon(L+h)[z] > 0$$

olur. Bu son eşitsizlikte yine (17) eşitsizliği ve $h(x) \le 0$ olduğu gözönüne alınırsa, u fonksiyonunun (a,d) aralığında negatif olmayan maksimum değerini alamayacağı görülür. Bu ise kabulümüzle çelişir.

Benzer şekilde, $c > d$ için $z(x) = e^{-(x-c)} - 1$ alınırsa aynı sonuç elde edilir.

Teorem 2.1.1.4: a ve b uç noktalarında tek yanlı türevlere sahip olan bir u fonksiyonu, (17) diferensiyel eşitsizliğini sağlayan, sabit olmayan bir fonksiyon olsun ve $h(x) \le 0$ sağlansın. g(x) ve h(x) fonksiyonları (a,b) aralığının her kapalı alt aralığı üzerinde sınırlı olsunlar. Eğer u fonksiyonu a noktasında negatif olmayan maksimuma sahipse ve $g(x) + (x-a)h(x)$ fonksiyonu $x = a$ noktasında alttan sınırlı ise, bu takdirde $u'(a) < 0$ dır. Eğer u fonksiyonu b noktasında negatif olmayan maksimuma sahipse ve $g(x) - (b-x)h(x)$ fonksiyonu $x = b$ noktasında üstten sınırlı ise bu takdirde $u'(b) > 0$ dır.

İspat: $u(a) = M$, $a \le x \le b$ için $u(x) \le M$ ve (a,b) aralığındaki bir d iç noktasında $u(d) < M$ olduğunu kabul edelim. (12) ile tanımlanan z fonksiyonuna, (16) ile verilen (L+h) operatörü uygulanırsa, $a \le x \le d$ için

$$(L+h)[z] = e^{\alpha(x-a)}[\alpha^2 + \alpha g(x) + h(x)(1 - e^{-\alpha(x-a)})] \tag{20}$$

bulunur.

$$f(x) = 1 - e^{-\alpha(x-a)}$$

fonksiyonuna [a,x] aralığında ortalama değer teoremini uygularsak,

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

olacağından,

$$\alpha(x-a) = e^{\alpha(x-a)} - 1$$

bulunur.

$$\alpha(x-a) \geq 1 - e^{-\alpha(x-a)}$$

ve böylece

$$h\alpha(x-a) \leq h(1 - e^{-\alpha(x-a)})$$

olduğundan, ve (20) eşitsizliğinden

$$(L+h)[z] \geq e^{\alpha(x-a)}[\alpha^2 + \alpha g(x) + \alpha(x-a)h(x)]$$

$$= e^{\alpha(x-a)}[\alpha^2 + \alpha(g(x) + (x-a)h(x))]$$

elde edilir. Hipotezden dolayı $h(x) \leq 0$ olduğundan α ,

$$\alpha^2 + \alpha g(x) + h(x) > 0$$

sağlanacak şekilde alınırsa $(L+h)[z] > 0$ elde edilir. Şimdi de (8) ile tanımlı bir $w(x)$ fonksiyonu alalım. ε sayısı ise (7) ile verilsin. $(L+h)[w] > 0$ olduğundan, w fonksiyonu [a,d] aralığında maksimum değerini uç noktalardan birinde almalıdır. $x = a$ noktası (8) de yerine yazılır ve (7)eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$w(a) = M \tag{21}$$

bulunur. Benzer şekilde $x = d$ değeri (8) de yerine yazılır ve (7) göz önüne alınırsa

$$w(d) < M \tag{22}$$

olur. (21) ve (22) den dolayı $w(a) > w(d)$ olup w fonksiyonu maksimum değerini a noktasında alır. Bu nedenle w fonksiyonunun a noktasındaki tek yanlı türevi pozitif olamayacağından $w'(a) \leq 0$ olmalıdır. (8) ifadesinde türevler alınıp $w'(a) \leq 0$ ve $z'(a) = \alpha > 0$ oldukları gözönünde tutulursa $u'(a) < 0$ bulunur. Bu ise istenilen sonuçtur.

Eğer u fonksiyonu maksimum değerini $x = b$ noktasında alıyor ise $z(x) = e^{-\alpha(x-a)} - 1$ fonksiyonu alınarak aynı sonuç bulunur.

Şimdiye kadar verilen teoremlerden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.1.1: (a,b) aralığında $h(x) \leq 0$ olmak üzere, u fonksiyonu (17) eşitsizliğini sağlıyor, [a,b] aralığı üzerinde sürekli ve $u(a) \leq 0$, $u(b) \leq 0$ ise, bu durumda (a,b) aralığında $u \equiv 0$ olmadığı sürece $u(x) \leq 0$ dır.

İspat: Kabul edelim ki, u fonksiyonu (a,b) aralığındaki bir c noktasında negatif olmayan maksimum değerini alsın, yani $u(c) = M \geq 0$ sağlansın. Bunun bir çelişkiye neden olduğunu göstereceğiz. $x = c$ iç maksimum noktasında $u'(c) = 0$ ve $u''(c) \leq 0$ dir.

Teorem 2.1.1.3 den u fonksiyonu negatif olmayan maksimum değerini bir iç noktada aldığından $u(x) \equiv M$ olmalıdır. $h(x) \leq 0$ hipotezi, (1) ifadesi ve $u(x) \equiv M$ oluşu göz önüne alınırsa, $x = c$ noktasında

$$(L + h)[u] = u''(c) + g(c)u'(c) + h(c)u(c) \leq 0$$

bulunur ki bu (17) diferensiyel eşitsizliği ile çelişir. (17) diferensiyel eşitsizliği yalnızca $u \equiv 0$ olması durumunda sağlanır. O halde kabulümüz yanlış olup,(a,b) aralığında $u(x) \leq 0$ dır.

Örnek 2.1.1.1: $g(x) = -\cot x$ olmak üzere u(x)=cosx fonksiyonu $u'' + g(x)u' = 0$ denklemini sağlar ve $x = 0$ da bir maksimuma sahiptir. Ancak, g(x) fonksiyonu

$x=0$ da sınırlı olmadığından maksimum prensibi geçerli değildir. Bu nedenle u(x) fonksiyonu 0 noktasını içeren bir açık aralıkta maksimuma sahip olmuştur.

Şimdi de $x=0$ noktasında yatay büküm noktasına sahip olan bir u fonksiyonu bulalım.

$u(x)=\cos x$ alalım. Bu durumda u fonksiyonu $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ açık aralığında artan, $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ aralığında azalan ve $u'(0)=\sin 0=0$ olduğundan, *Tanım 2.1.1.1* gereğince u(x) fonksiyonu $x=0$ noktasında bir yatay büküm noktasına sahiptir ve $u''-(\cot x)u'\geq 0$ diferensiyel eşitsizliğini sağlar.

2.1.2. Genelleştirilmiş Maksimum Prensibi

$h(x)\leq 0$ şartını koymadan, (17) ile verilen diferensiyel eşitsizliği göz önüne alalım.

Teorem 2.1.2.1: h(x) ve g(x) fonksiyonları sırasıyla sınırlı ve alttan sınırlı fonksiyonlar olmak üzere, (L+h) operatörü (16) bağıntısıyla verilsin. Yeterince küçük bir [a,b] aralığı için,

$$w>0, \quad [a,b] \text{ üzerinde} \tag{23}$$

$$(L+h)[w]\leq 0, \quad (a,b) \text{ üzerinde} \tag{24}$$

eşitsizliklerini sağlayan sürekli ikinci basamaktan türeve sahip bir w fonksiyonu bulunabiliyorsa ve u fonksiyonu (a,b) aralığında (17) eşitsizliğini sağlayan bir fonksiyon ise bu durumda $\frac{u}{w}$ fonksiyonu *Teorem 2.1.1.3* ve *Teorem 2.1.1.4* de verilen maksimum prensibini sağlar.

İspat: $v=\dfrac{u}{w}$ olsun. Burada $u=v.w$ olduğu göz önünde tutulur ve bu fonksiyona (16) ile verilen (L+h) operatörü uygulanırsa,

$$(L+h)[u]\equiv(L+h)[vw]$$

$$=wv''+(2w'+gw)v'+(L+h)[w]v\geq 0$$

bulunur. Bu eşitsizliği pozitif w fonksiyonuyla bölersek,

$$v''+(2\frac{w'}{w}+g)v'+\frac{1}{w}(L+h)[w]v\geq 0 \tag{25}$$

elde edilir. (23), (24) ve (25) eşitsizlikleri birlikte gözönüne alınırsa, $v=\dfrac{u}{w}$ fonksiyonunun *Teorem 2.1.1.3* ve *Teorem 2.1.1.4* ü sağladığı görülür.

Bu sonuç (23) ve (24) eşitsizliklerini sağlayan bir w fonksiyonunun varlığına bağlıdır. Şimdi h(x) sınırlı, g(x) alttan sınırlı ve [a,b] aralığı yeterince küçük olduğunda (23) ve (24) eşitsizliklerini sağlayan bir w fonksiyonunun varolduğu gösterilebilir. Böyle bir fonksiyon,

$$w=1-\beta(x-a)^2 \tag{26}$$

şeklindedir. Şimdi (23) ve (24) sağlanacak şekilde β sabitini belirleyelim. w fonksiyonuna (16) ile verilen diferensiyel operatör uygulanırsa,

$$(L+h)[w]=-2\beta\left[1+(x-a)g(x)+\frac{1}{2}(x-a)^2h(x)\right]+h(x) \tag{27}$$

elde edilir. g ve h fonksiyonları alttan sınırlı olduğundan , öyle G ve H sabitleri vardır ki $g\geq G$ ve $h\geq H$ eşitsizlikleri sağlanır. Şimdi kabul edelim ki a ve b sayıları birbirine o kadar yakın olsunlar ki,

$$1+(x-a)G+\frac{1}{2}(x-a)^2H>0\,,\ (a\leq x\leq b)$$

ifadesi sağlansın. h(x) aynı zamanda üstten sınırlı olduğundan $g \geq G$, $h \geq H$ ve (24) eşitsizliği birlikte gözönüne alınırsa

$$\beta \geq \frac{1}{2}\left[\frac{h(x)}{1+(x-a)G+\frac{1}{2}(x-a)^2 H}\right]$$

olacak şekilde bir β sayısı seçilebilir. Bundan dolayı, (27) gözönünde tutulursa, (a,b) aralığında

$$(L+h)[w] \leq 0$$

elde edilir. Eğer $(b-a)$ farkı $\beta(b-a)^2 < 1$ eşitsizliği sağlanacak şekilde yeterince küçükse ve [a,b] aralığında (26) göz önünde tutulursa $w > 0$ elde edilir. Bu yöntemle her zaman istenen özelliklere sahip bir w fonksiyonu oluşturulabilir.

Sonuç 2.1.2.1: *Teorem 2.1.2.1*, (17) eşitsizliğini sağlayan bir u fonksiyonunun çok hızlı salınamayacağını göstermektedir. Çünkü u fonksiyonu $x = a$ ve $x = b$ noktalarındaki iki sıfırı arasında pozitif ise, bu durumda $\frac{u}{w}$ fonksiyonu bu noktalar arasında bir pozitif maksimuma sahip olmalıdır.Bu ise bu sıfırlar arasındaki $b-a$ uzaklığı yeterince geniş olmadığı sürece *Teorem 2.1.2.1* ile çelişir. Aralığın geniş olması durumunda da (23) ve (24) sağlanacak şekilde bir w fonksiyonu bulunamaz. Böylece u fonksiyonu *Teorem 2.1.2.1* in sağlandığı herhangi bir (a,b) aralığında en fazla iki sıfıra sahip olabilir ve bu sıfırlar arasında u fonksiyonu negatiftir.

Eğer u fonksiyonu,

$$u'' + g(x)u' + h(x)u = 0$$

denkleminin bir çözümü ise, u fonksiyonu *Teorem 2.1.2.1* in sağlandığı herhangi bir (a,b) aralığında en fazla bir sıfıra sahip olmalıdır. Bu sonuç (-u) ve u fonksiyonlarına yukarıda elde edilen sonuç uygulanarak elde edilebilir.

Uyarı: g ve h sınırlı fonksiyonlar olmak üzere, r fonksiyonu

$$(L+h)[r] = r'' + g(x)r' + h(x)r = 0 \tag{28}$$

diferensiyel denkleminin aşikar olmayan bir çözümü olsun ve

$$r(a) = 0$$

sağlansın. *Sonuç 2.1.2.1* den biliyoruz ki, r fonksiyonu a noktasının sağındaki bütün noktalarda sıfır değerini alamaz.

Örnek 2.1.2.1: $u = x\sin(\frac{1}{x})$ fonksiyonu, $u'' + x^{-4}u = 0$ denklemini sağlar ve $x = \frac{1}{n\pi}, n = 1,2,...$ de sıfırlanır. Bu nedenle herhangi bir $\left[0, \frac{1}{n\pi}\right]$, n=1,2,... aralığında, maksimum prensibini sağlayan $\frac{u}{w}$ özelliğine sahip bir $w > 0$ fonksiyonu bulunmayabilir.

Örnek 2.1.2.2: (0,c) aralığında $u'' + (\cos x)u \geq 0$ sağlansın. $w = 1 - \beta x^2$ olmak üzere, $\frac{u}{w}$ fonksiyonun (0,c) aralığında *Teorem 2.1.2.1* in şartlarını sağlayacak şekilde β ve c değerlerinin bulunabildiğini gösterelim.

(17) diferensiyel eşitsizliği ile $0 < x < c$ aralığında $u'' + (\cos x)u \geq 0$ eşitsizliği karşılaştırılırsa, g(x)=0 ve h(x)=cosx oldukları görülür. $-1 \leq \cos x \leq 1$ olup, $h(x) = \cos x$ sınırlı bir fonksiyondur. w fonksiyonuna (16) ile verilen (L+h) operatörü uygulanırsa,

$$(L+h)[w] = -\beta(2 + x^2 \cos x) + \cos x$$

elde edilir. Eğer β

$$\beta \geq \frac{\cos x}{2+x^2\cos x}$$

şeklinde seçilirse, (0,c) aralığında $(L+h)[w] \leq 0$ olur. Ayrıca (0,c) aralığında $w = 1-\beta x^2 > 0$ olması için

$$1 > \beta c^2 \tag{29}$$

alınmalıdır. Bundan başka, a ve b birbirine o kadar yakın olmalıdır ki, (a,b) aralığında

$$1+(x-a)G+\frac{1}{2}(x-a)^2 H > 0$$

eşitsizliği sağlansın. Bu eşitsizlikte $a = 0$, $b = c$ ve $H = 1$ alınırsa, $0 \leq x \leq c$ için,

$$1+\frac{1}{2}x^2(-1) = 1-\frac{1}{2}x^2 > 0$$

olur. Buradan

$$2-x^2 > 0$$

bulunur. Bu eşitsizlikten $-\sqrt{2} < c < \sqrt{2}$ olup, özel olarak $c = 1$ alınırsa (29) eşitsizliğinden de $\beta < 1$ elde edilir.

Tanım 2.1.2.1: r fonksiyonu $(L+h)[r] = f(x)$ diferensiyel denkleminin aşikar olmayan bir çözümü olsun. r(a)=0 olmak üzere, [a,b] aralığında r(x) fonksiyonunun a nın sağındaki ilk sıfırına a nın konjuge noktası denir ve a* ile gösterilir.

2.1.3. Başlangıç Değer Problemleri

Bu kısımda

$$u'' + g(x)u' + h(x)u = f(x) \tag{30}$$

diferensiyel denkleminin

$$u(a) = \gamma_1 \text{ , } u'(a) = \gamma_2 \tag{31}$$

başlangıç şartını sağlayan çözümlerini ele alacağız. f, g ve h fonksiyonları bir (a,b) aralığında tanımlı, sınırlı fonksiyonlar olsunlar. γ_1 ve γ_2 sabitler olmak üzere (a,b) aralığında (30) denkleminin (31) başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemi, başlangıç değer problemi olarak adlandırılır.

Bu şekilde başlangıç değer problemlerinin çözümlerinin varlığı diferensiyel denklemler teorisini bir sonucudur. Çözümlerin tekliği ise yine genel teorinin bir sonucu olmakla birlikte genelleştirilmiş maksimum prensibinden kolaylıkla elde edilebilir.

Teorem 2.1.3.1: $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonları bir (a,b) aralığında (30) diferensiyel denkleminin, (31) başlangıç şartlarını sağlayan iki çözümü iseler, bu takdirde (a,b) aralığında $u_1 \equiv u_2$ dir.

İspat: $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ olsun. Bu durumda u fonksiyonu (31) den dolayı,

$$u(a) = u_1(a) - u_2(a) = u_1'(a) - u_2'(a) = 0$$

$$u(a) = u'(a) = 0 \tag{32}$$

başlangıç şartlarını ve (30) dan dolayı da,

$$u_1'' - u_2'' + g(x)(u_1' - u_2') + h(x)(u_1 - u_2) = 0$$

$$u'' + g(x)u' + h(x)u = 0 \tag{33}$$

denklemini sağlar.

u fonksiyonunun (a,b) aralığında özdeş olarak sıfır olmadığı kabul edilirse, bu durumda bir çelişkiye varılır.

Teorem 2.1.2.1 e göre $\beta(b-a)^2<1$ seçilmesi durumunda, büyüklüğü yalnızca g ve h a bağlı bir $\varepsilon>0$ sayısı ve pozitif bir w fonksiyonu vardır, öyle ki $(a,a+\varepsilon)$ aralığında $\frac{u}{w}$ maksimumunu bu aralıktaki uç noktalardan birinde alır. Aynı zamanda $-u=u_2-u_1$ fonksiyonu da (32) ve (33) eşitliklerini sağladığından, *Sonuç 2.1.2.1* e göre $-\frac{u}{w}$ fonksiyonu maksimumuna a yada $a+\varepsilon$ uç noktalarından birinde alır. $\frac{u}{w}$ fonksiyonu maksimumunu a da alsın. $x=a$ noktasında (32) eşitliği göz önünde tutulursa,

$$\left(\frac{u}{w}\right)'(a)=\frac{u'(a)w(a)-u(a)w'(a)}{w^2(a)}=0$$

elde edilir. Halbuki, $\frac{u}{w}$ fonksiyonunun türevinin a daki değerinin negatif olması gerekirdi. Bu ise biraz önce elde edilen sonuçla çeliştiğinden dolayı, $\frac{u}{w}$ fonksiyonu sabit olmalıdır. $u(a)=0$ olduğundan bu sabit sıfırdır ve

$$u(a+\varepsilon)=0\ ,\ u'(a+\varepsilon)=0$$

şartları sağlanır.

Bu sonuçtan dolayı, $(a+\varepsilon,a+2\varepsilon)$ aralığında $u\equiv 0$ dır ve ε un büyüklüğü yalnızca, (a,b) aralığında g ve h fonksiyonlarının sınırlılığına bağlıdır. Bu işlem (a,b) aralığında $u\equiv 0$ sonucu elde edilinceye kadar sonlu defa tekrarlanırsa $u_1\equiv u_2$ olduğu görülür.

Örnek 2.1.3.1:

$$u''-\frac{1}{x}u'=0$$

$$u(0) = u'(0) = 0$$

başlangıç değer problemi, $u = 0$ ve $u = x^2$ olmak üzere iki çözüme sahiptir. Bunun nedeni $g(x) = -\frac{1}{x}$ fonksiyonunun sınırlı olmayışıdır. Bu nedenle g(x) in sınırlılığı, *Teorem 2.1.3.1* in sağlanması için gereklidir.

2.1.4. Sınır Değer Problemleri

En basit sınır değer problemi, $a < x < b$ için (30) ile verilen diferensiyel denklemin

$$u(a) = \gamma_1 \,,\, u(b) = \gamma_2 \tag{34}$$

sınır koşullarını sağlayan bir u(x) çözümünün bulunması problemidir.

(30) denkleminin (34) ile verilen sınır koşullarını sağlayan çözümünün tekliği hakkındaki sorular maksimum prensibi kullanılarak cevaplandırılabilir.

Şimdi sınır değer problemleri için basit bir teklik teoremi verelim.

Teorem 2.1.4.1: $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonları (30) denkleminin (34) sınır koşullarını sağlayan çözümleri ve (a,b) aralığında $h(x) \le 0$ ise o takdirde $u_1 \equiv u_2$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ olsun. u_1 ve u_2 fonksiyonları (30) ve (34) eşitliklerini sağlayacaklarından, u fonksiyonu (33) denklemini ve

$$u(a) = u(b) = 0 \tag{35}$$

sınır koşullarını sağlar. *Sonuç 2.1.1.1* den biliyoruz ki (a,b) aralığında $u(x) \le 0$ dır. $-u(x)$ fonksiyonu da (33) ve (35) eşitliklerini sağlayacağından, $-u(x) \le 0$ dır. Böylece (a,b) aralığında $u \equiv 0$ olduğu görülür. Bu ise ispatı tamamlar.

Şimdi de (34) sınır koşullarını içine alan daha genel bir sınır değer problemini inceleyelim.

γ_1, γ_2 ler sabitler, $0 \le \theta \le \pi/2$ ve $0 \le \varphi \le \pi/2$ olmak üzere (30) denkleminin,

$$\begin{aligned} -u'(a)\cos\theta + u(a)\sin\theta &= \gamma_1 \\ u'(b)\cos\varphi + u(b)\sin\varphi &= \gamma_2 \end{aligned} \tag{36}$$

sınır şartlarını sağlayan çözümlerini göz önüne alalım. Burada (36) sınır koşulları $\theta = \varphi = \pi/2$ için (34) sınır koşullarına indirgenir.

Teorem 2.1.4.2: (30) denkleminin (36) sınır koşullarını sağlayan iki çözümü $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ olsunlar. Eğer (a,b) aralığında $h(x) \le 0$ ise, o takdirde $h \equiv 0, \theta = \varphi = 0$ (bu durumda u_1 ve u_2 sabit farkıyla farklı olabilir) olmadıkça $u_1 \equiv u_2$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $u = u_1 - u_2$ olsun. Bu şekilde tanımlanan u(x) fonksiyonu (33) eşitliğini ve

$$\begin{aligned} -u'(a)\cos\theta + u(a)\sin\theta &= 0 \\ u'(b)\cos\varphi + u(b)\sin\varphi &= 0 \end{aligned} \tag{37}$$

sınır koşullarını sağlar. M sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere $u \equiv M$ fonksiyonu, $h \equiv 0, \theta = 0$ ve $\varphi = 0$ olması durumunda (33) ve (37) eşitliklerini sağlar. Şimdi u(x) fonksiyonunun bazı noktalarda pozitif olmak üzere, sabit olmayan bir çözüm olduğunu varsayıp bir çelişkiye ulaşacağız. *Teorem 2.1.1.3* den dolayı, u pozitif maksimumunu a yada b noktalarından birinde alır. Varsayalım ki maksimumunu a noktasında alsın. *Teorem 2.1.1.4* dan dolayı $u'(a) < 0$ dır.

$0 \le \theta \le \pi/2$ ve $u(a) > 0$ olduğundan (37) deki ilk şart sağlanmaz. Böylece sabit olmayan bir çözümün asla pozitif olamayacağı sonucuna varılır. Benzer şekilde (-u) fonksiyonu için aynı şeyler tekrarlanırsa, u(x) fonksiyonunun asla negatif olamayacağı da görülür. Böylece [a,b] aralığı üzerinde $u \equiv 0$ dır.

Not: $h(x) \leq 0$ şartı olmadan da sınır değer problemleri için teklik teoremini ispatlamak mümkündür. Ancak bunun yerine çok daha duyarlı şartların sağlanması gerekir.

Örnek 2.1.4.1:

$$u'' + u = 0$$

$$u(a) = u(b) = 0$$

şeklinde tanımlanan sınır değer problemi $b - a < \pi$ olmak üzere yalnızca $u \equiv 0$ çözümüne sahiptir. Gerçekten $a = 0$ ve $b = \frac{\pi}{2}$ alınırsa b-a $< \frac{\pi}{2} < \pi$ olup,

$$u'' + u = 0$$

$$u(0) = u(\frac{\pi}{2}) = 0$$

problemi bir tek $u \equiv 0$ çözümüne sahiptir. Ancak $b - a = \pi$ ise çözüm tek değildir. Bunun için $a = 0$ ve $b = \pi$ alınırsa $b - a = \pi$ olup,

$$u'' + u = 0$$

$$u(0) = u(\pi) = 0$$

probleminin $u_1 = \sin x$ ve $u_2 = 0$ olmak üzere iki çözüme sahip olduğu görülür. Bunun nedeni $h(x) = 1 > 0$ olmasıdır.

Teorem 2.1.4.3: $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonları, (30) denkleminin (34) sınır şartlarını sağlayan çözümleri olsunlar. a*, a nın konjüge noktası olmak üzere eğer $b < a^*$ ise, bu takdirde $u_1 \equiv u_2$ dir.

İspat: $u = u_1 - u_2$ olsun. Bu durumda u fonksiyonu (33) denklemini ve (35) sınır şartlarını sağlar. Hipotezden dolayı, $b < a^*$ oluşu $u(b) = 0$ olmasıyla çelişir. O halde $u_1 \equiv u_2$ olmalıdır.

Not: $b = a^*$ olduğunda $u(a) = 0$ ve $u(b) = 0$ olup (a,b) aralığında $u = u_1 - u_2 < 0$ olacağından dolayı çözüm tek olmaz.

Örnek 2.1.4.2:

$$u(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \tag{38}$$

fonksiyonu $u'' + 2u' + 2u = 0$ denklemini sağlar. Şimdi (38) fonksiyonuyla ilgili olarak bir noktanın konjuge noktasını bulalım. $u(1) = 0$ sağlanacak şekilde c_1 sabiti,

$$c_1 = -c_2 \tan 1$$

dir. Bu değer (38) ile verilen fonksiyonda yerine yazılırsa,

$$u = c_2 e^{-x} \sin(x-1) \tag{39}$$

bulunur. $c_2 \neq 0$ olmak üzere (39) fonksiyonunun sıfırları,

$$x = 1 + n\pi \ , \ n = 1, 2, \ldots$$

şeklindedir. Bu durumda $a = 1$ noktasının konjüge noktası $a^* = 1 + \pi$ dir.

2.2. Çözümlere Yaklaşım

Bu bölümde sınır değer problemlerinin ve başlangıç değer problemlerinin çözümleri bilinmeden bu çözümlere alt ve üst sınırlar bularak, çözüme yaklaşık değerler elde edilecektir. Sturm Teorisindeki bilinen salınım ve karşılaştırma teoremleri, maksimum prensibi kullanılarak ispat edilecek ve lineer olmayan operatörler incelenecektir. Ayrıca lineer diferensiyel operatörler için ispatlanan sonuçlar lineer olmayan operatörlere de genişletilecektir.

2.2.1. Sınır Değer Problemlerinde Yaklaşım

(30) ile verilen diferensiyel denklemin (34) sınır şartlarını sağlayan çözümünü inceleyeceğiz. Pek çok durumda böyle bir sınır değer probleminin çözümünün bulunması mümkündür. Böyle bir çözümün bulunmadığı durumlarda ise çözüme yaklaşık sınırlar bulunabilir.

f, g ve h fonksiyonları sınırlı ve (a,b) aralığında $h(x) \le 0$ olsun. Bu koşullar altında u çözümüne ait herhangi bir bilgi olmadan, çözüme sınırlar belirlemek amacıyla *Teorem 2.1.1.3* deki maksimum prensibini kullanmak mümkündür.

$$(L+h)[z_1] \le f(x) \quad , \; a < x < b \tag{40}$$

$$z_1(a) \ge \gamma_1 \, , \, z_1(b) \ge \gamma_2 \tag{41}$$

özelliklerine sahip olan bir $z_1(x)$ fonksiyonunun bulunduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$v_1(x) \equiv u(x) - z_1(x)$$

şeklinde seçilen v_1 fonksiyonu,

$$(L+h)[v_1] \ge 0 \;\text{ ve }\; v_1(a) \le 0 \, , \, v_1(b) \le 0$$

eşitsizliğini sağlar. *Sonuç 2.1.2.1* den, [a,b] aralığında $v_1(x) \le 0$ dır. Yani [a,b] aralığında

$$u(x) \le z_1(x)$$

dir. $z_1(x)$ fonksiyonunun u(x) fonksiyonu için bir üst sınır olduğu görülmektedir. Benzer şekilde,

$$(L+h)[z_2] \ge f(x) \tag{42}$$

ve

$$z_2(a) \le \gamma_1 \ , \ z_2(b) \le \gamma_2 \tag{43}$$

özelliklerine sahip olan bir $z_2(x)$ fonksiyonu bulunarak u için bir alt sınır elde edilir.

İstenilen özelliklere sahip olan $z_1(x)$ ve $z_2(x)$ fonksiyonları her zaman kolaylıkla bulunabilir. z_1 ve z_2 fonksiyonları; polinom fonksiyonlar, rasyonel fonksiyonlar, üstel fonksiyonlar ve benzeri fonksiyonlar olabilirler.

Örnek 2.2.1.1:

$$u'' - xu = 0 \ , \ 0 < x < 1$$

$$u(0) = 0 \quad , \quad u(1) = 1$$

probleminin çözümünün $x = \frac{1}{2}$ deki değerini tahmin edelim.

$$z_1 = x \ , \ z_2 = x - \beta x(1-x)$$

alalım. Bu durumda z_1 fonksiyonu,

$$(L+h)[z_1] = -x^2 \le 0 \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

$$z_1(0) = 0 \, , \, z_1(1) = 1$$

ifadelerini sağlar.

$$(L+h)[z_2] = -x^2 + \beta[2 + x^2(1-x)] \ge 0$$

sağlanacak şekilde $\beta \ge \frac{1}{2}$ alınabilir.

$$z_2(0) = 0 \, , \, z_2(1) = 1$$

olup $\beta = \frac{1}{2}$ için

$$\frac{1}{2}(x + x^2) \le u(x) \le x$$

elde edilir. $x=\frac{1}{2}$ için yukarıdaki eşitsizlik,

$$\frac{3}{8} \leq u(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}$$

şeklindedir. Yani $x=\frac{1}{2}$ noktasındaki çözümün değeri için bir yaklaşık değer elde edilmiştir.

Teorem 2.2.1.1: u(x) fonksiyonu (30) denkleminin

$$\begin{aligned} -u'(a)\cos\theta + u(a)\sin\theta &= \gamma_1 \\ u'(b)\cos\varphi + u(b)\sin\varphi &= \gamma_2 \end{aligned} \tag{44}$$

şartlarını sağlayan çözümü ve $h(x) \leq 0$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ve $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ olsunlar. $\theta = 0$ $\varphi = 0, h \equiv 0$ eşitliklerinin hepsi aynı anda sağlanmasın. Eğer z_1 fonksiyonu, (40) diferensiyel eşitsizliğinin

$$\begin{aligned} -z_1'(a)\cos\theta + z_1(a)\sin\theta &\geq \gamma_1 \\ z_1'(b)\cos\varphi + z_1(b)\sin\varphi &\geq \gamma_2 \end{aligned} \tag{45}$$

şartlarını ve z_2 fonksiyonu da (42) diferensiyel eşitsizliğinin

$$\begin{aligned} -z_2'(a)\cos\theta + z_2(a)\sin\theta &\leq \gamma_1 \\ z_2'(b)\cos\varphi + z_2(b)\sin\varphi &\leq \gamma_2 \end{aligned}$$

şartlarını sağlayan çözümleri iseler bu takdirde,

$$z_2(x) \leq u(x) \leq z_1(x)$$

dir.

İspat: $v_1 \equiv u - z_1$ olsun. Bu durumda v_1 fonksiyonuna (16) ile verilen operatör uygulanırsa, (30) ve (40) dan dolayı

$$(L+h)[v_1] = (L+h)[u] - (L+h)[z_1] \geq 0$$

elde edilir. Diğer taraftan, (44) ve (45) den dolayı da,

$$-v_1'(a)\cos\theta + v_1(a)\sin\theta \le 0$$
$$v_1'(b)\cos\varphi + v_1(b)\sin\varphi \le 0$$

eşitsizlikleri sağlanır. Eğer v_1 fonksiyonu pozitif ise, *Teorem 2.1.1.3* e göre pozitif maksimumunu a yada b uç noktalarından birinde alır. Eğer v_1 fonksiyonu pozitif maksimumunu a noktasında alıyor ise,

$$v_1(a) > 0,\ v_1'(a) \le 0$$

olur.

$$-v_1'(a)\cos\theta + v_1(a)\sin\theta \le 0$$

olduğundan, yalnızca $\theta = 0$ ve $v_1'(a) = 0$ olması durumunda $x = a$ noktasında pozitif maksimumu vardır. *Teorem 2.1.1.4* e göre $v_1(x)$ pozitif bir sabit olmalıdır.

Böylece

$$(L+h)[v_1] = h(x)v_1 \ge 0$$

olduğundan bu eşitsizlik yalnızca $h(x) \equiv 0$ olması durumunda sağlanır.

Benzer şekilde,

$$v_1'(b)\cos\varphi + v_1(b)\sin\varphi \le 0$$

olduğundan $\varphi = 0$ ve $h \equiv 0$ olmadığı sürece v_1, b noktasında pozitif maksimuma sahip olamaz.

Böylece θ ve φ nin her ikisi birden sıfır ve $h \equiv 0$ olmadığı sürece $v_1(x) \le 0$ dır ve bundan dolayı da,

$$u(x) \le z_1(x)$$

dir.

Benzer biçimde $h \equiv 0$ yada θ ve φ lerin her ikisi birden sıfır değilse

$$u(x) \geq z_2(x)$$

bulunur. Elde edilen bu son eşitsizlikler birlikte göz önünde tutulursa,

$$z_2(x) \leq u(x) \leq z_1(x)$$

elde edilir. Bu da istenilendir.

Örnek 2.2.1.2:

$$u'' - xu = 0 \, , 0 < x < 1$$

$$-u'(0) + u(0) = 0$$

$$u(1) = 1$$

sınır değer probleminin çözümünün $x = \frac{1}{2}$ deki değeri için alt ve üst sınır bulalım.

Bunun için, $z_1(x) = \frac{1}{2}(1+x)$ ve $z_2(x) = e^{x-1}$ şeklinde olsunlar. Bu durumda z_1 fonksiyonu,

$$(L+h)[z_1] = -\frac{1}{2}x(1+x) \leq 0 \, , 0 < x < 1$$

$$-z_1{}'(0) + z_1(0) = 0 \, , z_1(1) = 1$$

ifadelerini ve z_2 fonksiyonu da,

$$(L+h)[z_2] = (1-x)e^{x-1} \geq 0 \, , 0 < x < 1$$

$$-z_2{}'(0) + z_2(0) = 0 \, , z_2(1) = 1$$

ifadelerini sağlar. Böylece *Teorem 2.2.1.2* ye göre,

$$e^{x-1} \leq u(x) \leq \frac{1}{2}(1+x)$$

dir. Bu eşitsizlikte $x=\frac{1}{2}$ olduğunda,

$$0,6065 \le u(\frac{1}{2}) \le 0,7500$$

bulunur.

Not: z_1 ve z_2 fonksiyonları olarak daha karmaşık fonksiyonlar seçilirse, daha iyi sınırlar bulunabilir.

2.2.2. Başlangıç Değer Problemlerinde Yaklaşım

$a \le x \le b$ aralığında (30) denkleminin (31) başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün tekliği daha önce incelenmişti.

$L+h$ operatörü ile ilgili olarak başlangıç değer probleminin çözümünü bulmak, sınır değer probleminin çözümünü bulmak kadar kolay değildir. Bu nedenle, yaklaşık bir çözüm bulmak ve bu yaklaşımdaki hatayı en aza indirebilmek önemlidir.

Şimdi aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.2.2.1: u(x) fonksiyonu (30) un (31) başlangıç şartlarını sağlayan çözümü ise ve z_1 fonksiyonu

$$(L+h)[z_1] \ge f(x)\,,\, a \le x \le b \tag{46}$$

$$z_1(a) \ge \gamma_1\,,\, z_1'(a) \ge \gamma_2 \tag{47}$$

eşitsizliklerini ve z_2 fonksiyonu da

$$(L+h)[z_2] \le f(x)\,,\, a \le x \le b \tag{48}$$

$$z_2(a) \le \gamma_1\,,\, z_2'(a) \le \gamma_2 \tag{49}$$

eşitsizliklerini sağlıyor iseler, o taktirde,

$$z_2(x) \le u(x) \le z_1(x) \tag{50}$$

$$z_2'(x) \le u'(x) \le z_1'(x) \tag{51}$$

dir.

İspat: [a,b] aralığı üzerinde $h(x) \le 0$ olduğunu kabul edelim.

$$v_1(x) \equiv z_1(x) - u(x)$$

olsun. Bu taktirde v_1 fonksiyonu,

$$(L+h)[v_1] \ge 0$$

$$v_1(a) \ge 0 \, , \, v_1'(a) \ge 0$$

eşitsizliklerini sağlar. $v_1(a) \ge 0$ olduğundan, v_1 fonksiyonu [a,b] aralığının herhangi bir$[a, x_0]$ alt aralığında negatif olmayan bir maksimuma sahiptir. *Teorem 2.1.1.3* de verilen maksimum prensibinden dolayı bu maksimum a yada x_0 noktalarından birinde ortaya çıkar. $v_1'(a) \ge 0$ olduğundan dolayı da *Teorem 2.1.1.4* e göre, v_1 fonksiyonu (a,x_0) aralığında sabit olmadığı sürece maksimumunu a noktasında alamaz. Böylece *Teorem 2.1.1.3* den dolayı, her $x_0 > a$ için,

$$v_1(x_0) \ge v_1(a) \tag{52}$$

$$v_1'(x_0) \ge 0 \tag{53}$$

elde edilir. (52) eşitsizliğinde x_0 yerine x alınır, (31) ve (47) eşitsizlikleri göz önünde tutulurlarsa,

$$u(x) \le \gamma_1 + z_1(x) - z_1(a) \quad , \quad x \ge 0 \tag{54}$$

ve (53) eşitsizliğinde de x_0 yerine x alıp, $v_1 = z_1 - u$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$u'(x) \le z_1'(x) \quad , \quad x \ge a \tag{55}$$

bulunur. $z_1(x)-[z_1(a)-\gamma_1]$ fonksiyonunun (46) ve (47) şartlarını sağladığı ve $x=a$ noktasında u ya eşit olduğu dikkate alındığında, (54) eşitsizliğinin sağındaki fonksiyon yerine $z_1(x)$ yazılması genelliği bozmaz. Böylece, $u(x) \le z_1(x)$ elde edilir. (51) eşitsizliklerini ispat etmek için ise,

$$v_2(x) = u(x) - z_2(x)$$

seçilir ve benzer işlemler yapılırsa,

$$u(x) \ge \gamma_1 + z_2(x) - z_2(a)$$

elde edilir. Buradan da

$$u(x) \ge z_2(x)$$

$$u'(x) \ge z_2'(x)$$

bulunur. Bulunan eşitsizlikler birleştirildiğinde (50) ve (51) eşitsizlikleri elde edilmiş olur.

(46) ve (48) eşitsizlikleri sınır değer problemlerindeki alt ve üst sınırlar için olan eşitsizliklerin karşıtıdır. Eğer tanımlanan özelliklere sahip olan $z_1(x)$ ve $z_2(x)$ fonksiyonları bulunabiliyor ise, bu fonksiyonlarla $u(x)$ ve $u'(x)$ fonksiyonlarına yaklaşılabilir. Bu yaklaşım, u çözümü hakkında hiç bilgi olmaksızın yapılabilir. Yaklaşımdaki doğruluk derecesi, z_1 ve z_2 fonksiyonlarının seçimlerine bağlıdır.

Örnek 2.2.2.1:

$$(L+h)[u] \equiv u'' + \frac{1}{x}u' - u = 0$$

$$u(0) = 1 \quad , \quad u'(0) = 0$$

başlangıç değer probleminin çözümünün $x=1$ deki değeri için alt ve üst sınırlar bulalım.

$$z_1(x)=c_1x^2+1$$

alınırsa, z_1 fonksiyonu,

$$z_1(0)=1\,,\, z_1'(0)=0$$

eşitliklerini sağlar.

$$(L+h)[z_1]=c_1(4-x^2)-1$$

ifadesi $0\leq x\leq 1$ aralığında negatif olmayan bir c_1 sabiti seçilirse, $c_1=\frac{1}{2}$ olduğu görülür. Böylece *Teorem 2.2.2.1* den,

$$u(x)\leq\frac{1}{2}x^2+1 \quad , \quad 0\leq x\leq 1$$

elde edilir ve $x=1$ için,

$$u(1)\leq\frac{4}{3}$$

bulunur. Benzer şekilde,

$$z_2(x)=c_2x^2+1$$

alınıp, $c_2=\frac{1}{4}$ seçilirse,

$$(L+h)[z_2]\leq 0$$

eşitsizliği ve $z_2(0)=1\,,\, z_2'(0)=0$ eşitlikleri sağlanır. Yine *Teorem 2.2.2.1.* den

$$u(x)\geq\frac{1}{4}x^2+1 \quad , \quad 0\leq x\leq 1$$

olup, $u(1)$için alt ve üst sınırlar,

$$1,250\leq u(1)\leq 1,333$$

şeklindedir. Bulduğumuz bu alt ve üst sınırları çözüme daha yakın olarak elde etmek için farklı bir yöntem verelim.

$t<1$ olmak üzere bir $[0,t]$ alt aralığı alalım. Bu durumda, z_1 fonksiyonu olarak,

$$z_1(x)=c_1x^2+1 \quad , \quad 0\le x\le t$$

alınır ve $(L+h)[z_1]\ge 0$ olacak şekilde bir c_1 sayısı aranırsa, $c_1=\dfrac{1}{4-t^2}$ olduğu görülür. Böylece,

$$(L+h)[z_1]=c_1(4-x^2)-1\ge 0 \quad , \quad 0\le x\le t$$

eşitsizliği sağlanır. $z_1(0)=1\ge 0$, $z_1'(0)=1\ge 0$ eşitsizlikleri sağlandığından, z_1 fonksiyonu, u fonksiyonu için bir üst sınır olup, *Teorem 2.2.2.1.* den dolayı,

$$u(x)\le\frac{x^2}{4-t^2}+1 \quad , \quad u'(x)\le\frac{2x}{4-t^2}$$

sınırları bulunur. Bu son eşitlikte $x=t$ alınırsa,

$$u'(t)\le\frac{2t}{4-t^2}$$

olur. Bu eşitsizlik, $(0,1)$ aralığında t üzerinden integre edilirse,

$$u(1)-u(0)\le\log(\frac{4}{3})=0,288$$

bulunur. Böylece,

$$u(1)\le u(0)+0,288=1,288 \tag{56}$$

üst sınırı elde edilir. Bu yöntemle, $z_2=c_2x^2+1$ şeklinde seçilen bir fonksiyon ile $u(1)$ için alt sınır elde edilemez. Başka bir yol olan, aralığın alt aralıklara bölünmesi yöntemi ile alt sınır geliştirilebilir. Şimdi $(0,1)$ aralığını iki parçaya bölelim ve her aralık üzerinde ayrı ayrı $z_2(x)$ fonksiyonları tanımlayalım. $0\le x\le\frac{1}{2}$ aralığı için,

$z_2(x) = \frac{1}{4}x^2 + 1$ seçilirse, bu durumda (48) ve (49) eşitsizlikleri sağlanır ve

$$u(\frac{1}{2}) \geq z_2(\frac{1}{2}) = \frac{17}{16}$$

$$u'(\frac{1}{2}) \geq z_2'(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

elde edilir. $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ aralığı için ise,

$$z_2(x) = c_3(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{17}{16} + \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2})$$

fonksiyonu tanımlayalım. Buradan z_2 ve z_2' fonksiyonlarının $[0,1]$ aralığı üzerinde sürekli oldukları görülmektedir. Şimdi de,

$$(L+h)[z_2] \equiv c_3\left[2 + \frac{2x\text{-}1}{x} - (x - \frac{1}{2})^2\right] + \frac{1}{4x} - \frac{17}{16} - \frac{1}{4}(x - \frac{1}{2}) \leq 0 \quad , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

sağlanacak şekilde bir c_3 sayısı bulalım.

$$c_3 \leq \frac{4x^2+15x-4}{4(-4x^2+15x-4)} \quad , \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

olması durumunda $(L+h)[z_2] \leq 0$ sağlanır. Sağ taraf artan olduğundan, $x = \frac{1}{2}$ için $c_3 = \frac{9}{32}$ seçimi yeterlidir. Böylece

$$u(1) \geq z(1) = \frac{161}{128} \geq 1{,}258$$

elde edilir. Bu eşitsizlik (56) ile birleştirilirse,

$$1{,}258 \leq u(1) \leq 1{,}288$$

bulunur.

u(x) çözümüne daha yakın alt ve üst sınır elde etmek için, (0,1) aralığı daha çok alt aralığa bölünür ve her bir alt aralık üzerinde ayrı ayrı $z_2(x)$ fonksiyonları tanımlanabilir. Her bir aralığın uç noktalarında u ve u' için z_2 ve z_2' alt sınırları, bir sonraki aralık üzerinde z_2 ve z_2' başlangıç değerlerine yardımcı olur. Başlangıç değerleri için bu seçim, $z_2(x)$ in birinci türevini sürekli yapmanın bir sonucudur. Fakat ikinci türevin [0,1] aralığı üzerinde sürekli olması gerekmez. Aynı yöntemle üst sınırda geliştirilebilir.

Yukarıdaki örnekte verilen aralıkların bölünmesi metodunu, alt ve üst sınırlar belirlemek için aşağıdaki şekilde genelleştirelim.

[a,b] aralığı N tane aralığa bölünsün. Yani,

$a = x_0 < x_1 <,\dots,< x_{N-1} < x_N = b$

olsun. Her bir alt aralıkta $z_1(x)$ fonksiyonu, ikinci dereceden bir polinom olarak seçilsin ve polinomun katsayıları öyle belirlensin ki, $z_1(a) = \gamma_1$, $z_1'(a) = \gamma_2$ ve z_1 ve z_1' fonksiyonları [a,b] aralığı üzerinde sürekli olsunlar. Ayrıca z_1 fonksiyonu öyle seçilsin ki (46) eşitsizliği her (x_{i-1},x_i) alt aralığında sağlansın ve $z_1(x)$ fonksiyonu,

$$z_1(x) = c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i) + e_i \quad , \quad x_i \le x \le x_{i+1} \quad , \quad i = 0,1,2,\dots,N \qquad (57)$$

şeklinde olsun. Burada c_i, d_i ve e_i , $i = 0,1,\dots,N-1$ sabitleri ve alt aralıkların sayısı olan N, bütün şartlar sağlanacak şekilde seçilsin. İlk önce (x_0,x_1) aralığıyla başlayarak adım adım ilerleyelim. (57) eşitliğinde $i = 0$ alınır ve $z_1(a) = \gamma_1$, $z_1'(a) = \gamma_2$ başlangıç koşulları göz önünde tutulursa, $e_0 = \gamma_1$ ve $d_0 = \gamma_2$ olur. e_0 ve d_0 değerleri (57) eşitliğinde yerine konursa,

$$z_1(x) = c_0(x - x_0)^2 + \gamma_2(x - x_0) + \gamma_1 \quad , \quad x_0 < x < x_1 \text{ için}$$

olur. z_1 fonksiyonuna (16) ile verilen $(L + h)$ operatörü uygulanırsa,

$$(L + h)[z_1] \ge f(x)$$

eşitsizliği,

$$c_0[2+2g(x)(x-x_0)+h(x)(x-x_0)^2]+g(x)\gamma_2+h(x)[\gamma_2(x-x_0)+\gamma_1]\geq f(x) \qquad (58)$$

şekline dönüşür.

Eğer g(x) ve h(x) fonksiyonları sınırlı iseler, x_1, x_0 a öyle yakın seçilebilir ki (58) deki c_0 ın katsayısı $x_0 \leq x \leq x_1$ aralığında pozitif olur. Eğer f fonksiyonu sınırlı ise c_0, (x_0,x_1) aralığındaki bütün x ler için (58) geçerli olacak şekilde seçilen bir sabittir. Şimdi de (x_1,x_2) aralığında $z_1(x)$ fonksiyonunu,

$$z_1(x)=c_1(x-x_1)^2+d_1(x-x_1)+e_1 \quad , \quad x_1\leq x\leq x_2$$

şeklinde tanımlayalım. x_1 noktasında z_1 ve z_1' nün sürekliliğini garantilemek için, e_1 ve d_1 sabitleri, $z_1(x_1)=e_1$ ve $z_1(x_1)=d_1$ olmak üzere,

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= c_0(x_1-x_0)^2+\gamma_2(x_1-x_0)+\gamma_1 \\ d_1 &= 2c_0(x_1-x_0)+\gamma_2 \end{aligned}\right\} \qquad (59)$$

şeklinde seçilsin. Bu durumda d_1 ve e_1 (59) daki gibi belirlenen sabitler olmak üzere, (x_1,x_2) aralığında (58) eşitsizliğinin yerini,

$$c_1[2+2g(x)(x-x_1)+h(x)(x-x_1)^2]+g(x)d_1+h(x)[d_1(x-x_1)+e_1]\geq f(x) \qquad (60)$$

eşitsizliği alır. Benzer şekilde, x_2, x_1e öyle yakın seçilsin ki (60) daki c_1 in katsayısı pozitif olsun ve c_1 , (x_1,x_2) aralığı üzerinde (60) sağlanacak şekilde belirlensin.

d_i ve e_i ler z_1 ve z_1' fonksiyonları sürekli olacak şekilde, (x_i,x_{i+1}) aralığı ve c_i sabiti, $(L+h)[z_1]\geq f(x)$ sağlanacak şekilde seçilerek işleme devam edilirse, bu durumda e_i ve d_i sayılarının,

$$e_i = c_{i-1}(x_i - x_{i-1})^2 + d_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + e_{i-1}$$

$$d_i = 2c_{i-1}(x_i - x_{i-1}) + d_{i-1}$$

şeklinde oldukları görülür. c_i yi belirlemek için f fonksiyonu yerine i-yinci alt aralıktaki maksimumunu, g ve h fonksiyonları yerine de maksimum ya da minimumlarını almak uygundur. Yani $(L+h)[z_1] \geq f(x)$ olması için ne gerekirse o yapılmalıdır.

Benzer şekilde d_i ve e_i sabitleri seçilerek ve $-c_i$ büyüklüğü her yerde $(L+h)[z_2] \leq f(x)$ eşitsizliği sağlanacak şekilde belirlenerek alt sınır oluşturulabilir.

Bu bölümde şimdiye kadar $h(x) \leq 0$ kabul edilmişti. Şimdi ise h(x) fonksiyonunun pozitif olabilmesi ihtimalini de göz önüne alarak, (30) denkleminin (31) başlangıç şartlarını sağlayan çözümüne yaklaşımını ele alalım.

Böyle bir durumda, *Teorem 2.1.2.1* de verilen genelleştirilmiş maksimum prensibinden yararlanıp, [a,b] aralığında pozitif olan ve

$$(L+h)[w] \leq 0 \quad , \quad a < x < b \tag{61}$$

özelliğini sağlayan bir w fonksiyonunun bulunduğunu varsayacağız. Örneğin β yeterince büyük olmak üzere, (f(x) fonksiyonunun sınırlı olması şartı ile) [a,b] aralığı yeterince küçük ise,

$$w = 1 - \beta(x-a)^2$$

fonksiyonu istenilen özelliklere sahiptir. $v \equiv \dfrac{u}{w}$ fonksiyonu,

$$G(x) \equiv \frac{2w'}{w} + g \text{ ve } H(x) \equiv \frac{(L+h)[w]}{w} \leq 0$$

olmak üzere,

$$(\bar{L}+H)[v] \equiv v'' + G(x)v' + H(x)v = \frac{f}{w} \tag{62}$$

denklemini sağlar. $z_1(x)$ ve $z_2(x)$ karşılaştırma fonksiyonları,

$$(L+h)[z_1] \geq f(x)$$

$$z_1(a) \geq \gamma_1 \ , \ z_1'(a)w(a) - z_1(a)w'(a) \geq \gamma_2 w(a) - \gamma_1 w'(a) \tag{63}$$

ve

$$(L+h)[z_2] \leq f(x)$$

$$z_2(a) \leq \gamma_1 \ , \ z_2'(a)w(a) - z_2(a)w'(a) \leq \gamma_2 w(a) - \gamma_1 w'(a) \tag{64}$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde tanımlansınlar. Bu ifadeler göz önünde tutulursa,

$$z_1(a) \geq u(a) = \gamma_1 \text{ ve } z_2(a) \leq u(a) = \gamma_1$$

oldukları açıktır. Buradan $x = a$ noktasında, (47) den dolayı, $z_1 - u \geq 0$ olup, eşitsizliğin her iki tarafı pozitif w fonksiyonu ile bölünürse,

$$\frac{z_1}{w} \geq \frac{u}{w}$$

olur. Benzer şekilde $u - z_2 \geq 0$ olup,

$$\frac{z_2}{w} \leq \frac{u}{w}$$

elde edilir. Böylece $x = a$ noktasında,

$$\frac{z_2}{w} \leq \frac{u}{w} \leq \frac{z_1}{w}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (63) eşitsizliği, $u(a) = \gamma_1$ ve $u'(a) = \gamma_2$ olduğu göz önünde tutulursa,

$$\left(\frac{z_1}{w}\right)'(a)w^2(a) \geq \left(\frac{u}{w}\right)'(a)w^2(a)$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Bu son eşitsizlik $w^2(a)$ ile bölünürse, $x = a$ noktasında,

$$\left(\frac{z_1}{w}\right)' \geq \left(\frac{u}{w}\right)'$$

bulunur. Benzer biçimde (64) eşitsizliği, $x = a$ noktasında

$$\left(\frac{z_2}{w}\right) \leq \left(\frac{u}{w}\right)'$$

şeklinde yazılabilir. Bu son iki eşitsizlikten, $x = a$ noktasında

$$\left(\frac{z_2}{w}\right)' \leq \left(\frac{u}{w}\right)' \leq \left(\frac{z_1}{w}\right)'$$

elde edilir.

$v_1 = \frac{z_1}{w}$ ve $v_2 = \frac{z_2}{w}$ fonksiyonlarına (62) ile verilen $\bar{L} + H$ diferensiyel operatörü uygulanırsa,

$$(\bar{L} + H)\left[\frac{z_1}{w}\right] \geq \frac{f}{w}$$

$$(\bar{L} + H)\left[\frac{z_2}{w}\right] \leq \frac{f}{w}$$

bulunur. Bu son iki eşitsizlik ve (62) eşitliği birleştirildiğinde

$$(\bar{L} + H)\left[\frac{z_2}{w}\right] \leq (\bar{L} + H)\left[\frac{u}{w}\right] \leq (\bar{L} + H)\left[\frac{z_1}{w}\right] \tag{65}$$

olduğu görülür.

Şimdi de $a \leq x \leq b$ için,

$$\frac{z_1}{w} \leq \frac{u}{w} \leq \frac{z_1}{w}$$

ve

$$\left(\frac{z_2}{w}\right)' \leq \left(\frac{u}{w}\right)' \leq \left(\frac{z_1}{w}\right)'$$

eşitsizliklerinin sağlandığını gösterelim.

$$(L+h)[u]=f(x)\,,\ (L+h)[z_1]\geq f(x)$$

ve

$$(L+h)[z_2]\leq f(x)$$

eşitsizliklerinden dolayı, $a\leq x\leq b$ için,

$$(L+h)[z_2]\leq (L+h)[u]\leq (L+h)[z_1]$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliğin son iki eşitsizliğinden dolayı,

$$(L+h)[z_1-u]\geq 0$$

bulunur. Ayrıca w fonksiyonu (61) eşitsizliğini sağlayan pozitif bir fonksiyon olduğundan, $\frac{u}{w}$ fonksiyonu, *Teorem 2.1.1.3* ve *Teorem 2.1.1.4* nın şartlarını sağlar. (65) ile verilen eşitsizliğin son iki eşitsizliğinden dolayı,

$$(\bar{L}+H)\left[\frac{z_1}{w}-\frac{u}{w}\right]\geq 0$$

bulunur. O halde *Teorem 2.1.1.3* den dolayı $\frac{z_1}{w}-\frac{u}{w}$ fonksiyonu bir c iç noktasında negatif olmayan maksimum değerini alıyorsa, $\frac{z_1}{w}-\frac{u}{w}\equiv M\geq 0$ olup, $\frac{z_1}{w}-\frac{u}{w}\geq 0$ dir ve buradan da $\frac{z_1}{w}\geq\frac{u}{w}$ bulunur. Benzer biçimde $\frac{z_2}{w}\leq\frac{u}{w}$ olduğu görülür. Ayrıca $x=a$ noktasında sağlanan $\frac{z_2}{w}\leq\frac{u}{w}\leq\frac{z_1}{w}$ ve $\left(\frac{z_2}{w}\right)'\leq\left(\frac{u}{w}\right)'\leq\left(\frac{z_1}{w}\right)'$ eşitsizliklerinden dolayı, $\left(\frac{z_1}{w}-\frac{u}{w}\right)(a)\geq 0$ ve $\left(\frac{z_1}{w}-\frac{u}{w}\right)'(a)\geq 0$ eşitsizlikleri sağlanır. Bu nedenle $\frac{z_1}{w}-\frac{u}{w}$ fonksiyonu [a,b] nın herhangi bir $[a,x_0]$ alt aralığında negatif olmayan maksimuma sahiptir. *Teorem 2.1.1.3* den dolayı bu maksimum a yada x_0 noktasında

ortaya çıkar. $\left(\frac{z_1}{w}-\frac{u}{w}\right)'(a)\geq 0$ olduğundan, *Teorem 2.1.1.4* den dolayı da $\frac{z_1}{w}-\frac{u}{w}$

fonksiyonu (a,x_0) aralığında sabit olmadığı sürece, $x=a$ noktasında maksimumu

yoktur. Böylece *Teorem 2.1.1.3* den görülüyor ki her $x_0>a$ için

$$\left(\frac{z_1}{w}-\frac{u}{w}\right)(x_0)\geq\left(\frac{z_1}{w}-\frac{u}{w}\right)(a) \tag{66}$$

ve

$$\left(\frac{z_1}{w}-\frac{u}{w}\right)'(x_0)\geq 0 \tag{67}$$

dır. (67) de x_0 yerine x alınırsa, $x\geq a$ için ve buradan da $a\leq x\leq b$ için,

$$\left(\frac{z_1}{w}\right)'\geq\left(\frac{u}{w}\right)' \tag{68}$$

bulunur. (66) eşitsizliğinde x_0 yerine x alınırsa,

$$\frac{z_1}{w}\geq\frac{u}{w} \tag{69}$$

olur. Benzer biçimde,

$$\left(\frac{z_2}{w}\right)'\leq\left(\frac{u}{w}\right)' \tag{70}$$

ve

$$\frac{z_2}{w}\leq\frac{u}{w} \tag{71}$$

oldukları görülebilir. Böylece (68), (70) ve (69), (71) eşitsizlikleri göz önünde tutulursa, sırasıyla,

$$\left(\frac{z_2}{w}\right)'\leq\left(\frac{u}{w}\right)'\leq\left(\frac{z_1}{w}\right)'$$

ve

$$\frac{z_2(x)}{w(x)} \le \frac{u(x)}{w(x)} \le \frac{z_1(x)}{w(x)}$$

eşitsizlikleri bulunur. Bu eşitsizlik gruplarından ikincisi,

$$z_2(x) \le u(x) \le z_1(x) \tag{72}$$

sınırlarını verir. İlk gruptan ise, türevler hesaplanır, gerekli işlemler yapılırsa,

$$w(x)z_2{}'(x) - z_2(x)w'(x) \le w(x)u'(x) - u(x)w'(x) \le w(x)z_1{}'(x) - z_1(x)w'(x)$$

olur. [a,b] aralığında w fonksiyonu pozitif olduğundan,

$$z_2{}'(x) + \frac{w'(x)}{w(x)}[u(x) - z_2(x)] \le u'(x) \le z_1{}'(x) - \frac{w'(x)}{w(x)}[z_1(x) - u(x)] \tag{73}$$

elde edilir. Eğer $w'(x) \le 0$ ise, (72) ile verilen u(x) için üst sınır (73) ün sol yanına ve alt sınır sağ yanına konulabilir. Eğer $w'(x) \ge 0$ ise işlemler ters sıradadır.

Böylece

$$\left.\begin{array}{l} z_2{}'(x) - \dfrac{[-w'(x)]}{w(x)}[z_1(x) - z_2(x)] \le u'(x) \le z_1{}'(x) + \dfrac{[-w'(x)]}{w(x)}[z_1(x) - z_2(x)] \ ,w'(x) \le 0 \text{ ise} \\ z_2{}'(x) \le u'(x) \le z_1{}'(x), \quad w'(x) \ge 0 \text{ ise} \end{array}\right\} (74)$$

bulunurlar.

(72) ve (74) eşitsizlikleri, $z_1(x) - z_2(x)$ ve $z_1{}'(x) - z_2{}'(x)$ farkları yeterince küçük olduğunda, u(x) ve $u'(x)$ için kesin sınırlar verir.

Yeterince küçük bir aralık üzerinde $(L+h)[w] \le 0$ eşitsizliğini sağlayan pozitif bir w fonksiyonunun bulunması her zaman mümkün olduğu halde, eğer aralık çok çok genişse, genellikle böyle bir fonksiyon bulunmaz.

Örnek 2.2.2.2:

$$(L+h)[u] = u'' + (4+x)u = 0$$

denkleminin,

$$u(0)=0 \quad , \quad u'(0)=1$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünün $x=1$ deki değeri için alt ve üst sınırlar bulalım.

$h(x)=4+x$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında pozitif bir fonksiyondur. $w(x)$ yardımcı fonksiyonu,

$$w=1-\beta(x-a)^2=1-\beta x^2$$

şeklinde alınır ve bu fonksiyona (16) ile verilen (L+h) operatörü uygulanırsa ,

$$(L+h)[w]=-2\beta+(4+x)[1-\beta x^2]\leq 0 \quad , \quad 0\leq x\leq \frac{1}{2}$$

elde edilir. bu eşitsizlik sağlanacak şekilde β sayısı,

$$\beta=2.1$$

şeklinde olup, bu durumda

$$w=1-(2.1)x^2$$

olur ve

$$w>0 \ , \ 0\leq x\leq \frac{1}{2}$$

$$(L+h)[w]\leq 0 \, , \, 0\leq x\leq \frac{1}{2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. z_1 ve z_2 fonksiyonları olarak sırasıyla, $z_1=x$ ve $z_2=x-\frac{18}{19}x^2$ alınırsa, bu fonksiyonlar,

$$z_1(0)=0 \quad , \quad z_1'(0)=1$$

$$(L+h)[z_1]=x(4+x)\geq 0 \quad , \quad 0\leq x\leq \frac{1}{2}$$

$$z_2(0)=0 \quad , \quad z_2'(0)=1$$

$$(L+h)[z_2]=-\frac{36}{19}+(4+x)\left(x-\frac{18}{19}x^2\right)\leq 0 \quad , \quad 0\leq x\leq \frac{1}{2}$$

ifadelerini sağlar. (74) den dolayı,

$$w'=-4x<0$$

dır. Yine (72) ve (74)den,

$$\frac{5}{19}\leq u(\frac{1}{2})\leq \frac{1}{2}$$

$$-\frac{359}{361}\leq u'(\frac{1}{2})\leq \frac{739}{361}$$

elde edilir $[\frac{1}{2},1]$ aralığı üzerinde

$$w=1-\frac{5}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$z_1=-\frac{9}{8}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{739}{361}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

$$z_2=-\frac{45}{76}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{359}{361}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{19}$$

alınırsa,

$$-0,38\leq u(1)\leq 1,24$$

bulunur. Böylece $x=1$ için alt ve üst sınırlar elde edilmiş olur.

2.2.3. Salınım ve Karşılaştırma Teoremleri

Maksimum prensibi, aynı ya da farklı denklemlerin çözümleri arasında ilişkiler kurmak içinde kullanılabilir. Şimdi bununla ilgili aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.2.3.1: u ve w fonksiyonları sırasıyla,

$$(L+h)[u]=0 \quad , \quad (L+h)[w]=0$$

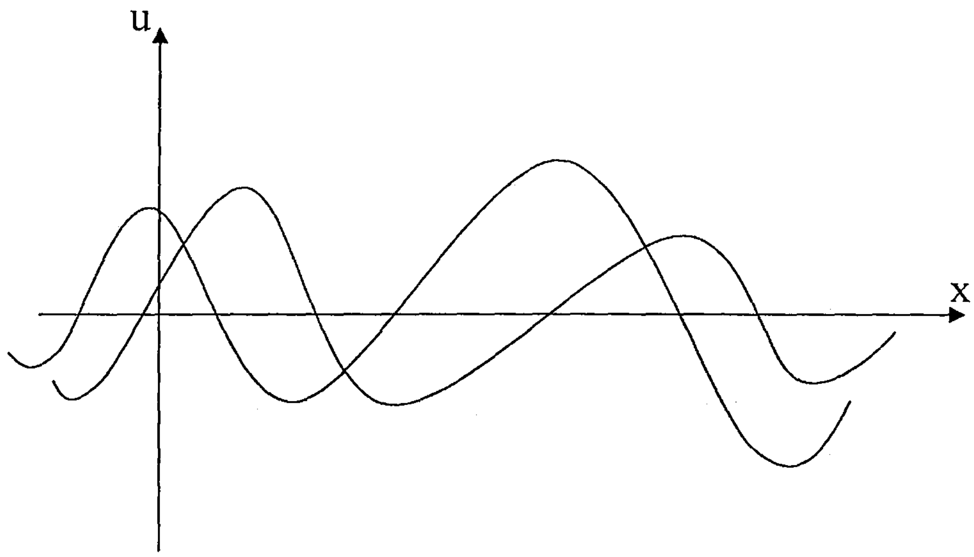
denklemlerinin aşikar olmayan çözümleri iseler, o taktirde w fonksiyonunun ardışık iki sıfır yeri arasında u fonksiyonu en fazla bir sıfır yerine sahiptir.

İspat: a ve b noktaları w fonksiyonunun ardışık iki sıfır yeri olsun. Yani $w(a)=w(b)=0$ ve $a<x<b$ için $w\neq 0$ olsun gerekirse w fonksiyonu yerine –w fonksiyonu alınarak, (a,b) aralığında $w(x)>0$ kabul edilebilir. Bu durumda $v(x)=\dfrac{u(x)}{w(x)}$ şeklinde tanımlanan v(x) fonksiyonuna (L+h) operatörü uygulanırsa, bu fonksiyon,

$$v''+\left(2\frac{w'}{w}+g\right)v'=0$$

diferensiyel denklemini sağlar. *Teorem 2.1.1.1* den dolayı, v fonksiyonu sabit (ki bu durumda u fonksiyonu, w fonksiyonunun sabit bir katıdır.) olmadığı sürece (a,b) aralığında maksimum ya da minimuma sahip olamaz. Bundan dolayı v fonksiyonu ve dolayısıyla u fonksiyonu *Sonuç 2.1.2.1* den dolayı (a,b) aralığında yalnızca bir kez işaret değiştirebilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Yukarıdaki teorem Sturm Salınım Teoremi olarak adlandırılır. *Şekil 2.2.3.1* de aynı denklemin farklı iki çözümünün tipik hareketi gösterilmektedir.



Şekil 2.2.3.1

Teorem 2.2.3.2: $h_2 \geq h_1$ olmak üzere, u ve w fonksiyonları sırasıyla,

$$(L+h_1)[u]=0 \quad , \quad (L+h_2)[w]=0$$

denklemlerinin çözümleri olsunlar. (a,b) aralığında $w(x) \neq 0$ ise

i) $w(a)=w(b)=0$

ii) $h_1 \equiv h_2$ *ve* $u=cw$ (c sabit)

şartları sağlanmadığı sürece, u fonksiyonu [a,b] aralığı üzerinde en fazla bir sıfır yerine sahiptir.

İspat: (a,b) aralığında $w>0$ olsun ve v fonksiyonu $v=\dfrac{u}{w}$ şeklinde tanımlansın. u=vw fonksiyonuna (16) ile verilen (L+h) operatörü uygulanır ve gerekli işlemler yapılırsa,

$$v''+\left(2\frac{w'}{w}+g\right)v'+(h_1-h_2)v=0 \tag{75}$$

bulunur. Hipotezden dolayı $h_1-h_2 \leq 0$ olup, v fonksiyonu maksimum prensibini sağlar. Eğer u fonksiyonu (a,b) aralığında iki sıfıra sahipse, bu durumda v fonksiyonu da iki sıfıra sahip olacağından (*Teorem 2.1.4.1* kullanılarak) bu iki sıfır yeri arasında $v \equiv 0$ olduğu görülür. Böylece *Teorem 2.1.3.1* den $v \equiv 0$ dir. Bu nedenle de (a,b) aralığında $u \equiv 0$ dır. Buradan da eğer u fonksiyonu aşikar çözüm değilse, *Sonuç 2.1.2.1* den dolayı (a,b) aralığında yalnızca bir tek sıfıra sahip olabilir. a ya da b noktasında w=0 olmadığı sürece, [a,b] aralığı üzerinde bu sonuç geçerlidir.

$w(a) = u(a) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda *Teorem 2.1.3.1* in ispatı göz önünde tutularak $w'(a) \neq 0$ ve $u'(a) \neq 0$ olduğu görülür. u ve w fonksiyonlarının sağladığı diferensiyel denklemlerde $x = a$ alıp $w(a) = u(a) = 0$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$\frac{u''(a)}{u'(a)} = \frac{w''(a)}{w'(a)} = -g(a) \tag{76}$$

bulunur. $v(a) = \dfrac{u(a)}{w(a)}$ ifadesi belirsiz olduğundan, bu ifadeye L'hospital kuralı uygulanıp, $v(a) > 0$ kabul edilirse,

$$v(a) = \frac{u'(a)}{w'(a)} \neq 0$$

olduğu görülür. Şimdi de $v = \dfrac{u}{w}$ fonksiyonunun türevi alınırsa,

$$v'(x) = \left(\frac{u}{w}\right)'(x) = \frac{wu' - uw'}{w^2}$$

bulunur. $w(a) = u(a) = 0$ ve (76) eşitliği gözönünde tutularak belirsizlik ortadan kalkıncaya kadar L'hospital kuralı uygulanırsa $v'(a) = 0$ bulunur. $v(x_0) < v(a)$ olacak şekilde, (a,b) açık aralığında bir x_0 sayısı vardır. Bundan dolayı (*Teorem*

2.1.1.4 ün kullanılmasıyla) (a,b) aralığında $v'(a) < 0$ bulunur ki bu $v'(a) = 0$ olmasıyla çelişir. Böylece $a \le x \le b$ aralığında,

$$0 < v(a) \le v(x)$$

olur. Buradan $a < x < b$ için $u \ne 0$ dır. Son olarak $w(a) = w(b) = u(a) = u(b) = 0$ ise $a \le x \le b$ için yukarıdaki sonuçtan dolayı $v(a) \le v(x)$ ve $v(x) \ge v(b)$ sonucuna varılır ki buradan v(a)=v(b) olup, v fonksiyonu sabit olmalıdır. Ancak (75) denkleminden dolayı bu sonuç yalnızca $h_1 - h_2 \equiv 0$ olması durumunda mümkündür.

Teorem 2.2.3.3:

$$h_2(x) - \frac{1}{2}g_2'(x) - \frac{1}{4}[g_2(x)]^2 \ge h_1(x) - \frac{1}{2}g_1'(x) - \frac{1}{4}[g_1'(x)]^2$$

olmak üzere u ve w fonksiyonları sırasıyla

$$(L_1 + h_1)[u] \equiv u'' + g_1u' + h_1u = 0$$

$$(L_2 + h_2)[w] \equiv w'' + g_2w' + h_2w = 0$$

denklemlerinin çözümleri olsunlar. (a,b) aralığında $w(x) \ne 0$ ise, bu durumda,

i) $w(a) = w(b) = 0$

ii) $h_2(x) - \frac{1}{2}g_2'(x) - \frac{1}{4}[g_2(x)]^2 \equiv h_1(x) - \frac{1}{2}g_1'(x) - \frac{1}{4}[g_1(x)]^2$

iii) $u(x) = cw(x)\exp\left[(\frac{1}{2})\int_a^x [g_1(\xi) - g_2(\xi)]d\xi\right]$ (c sabit)

şartları sağlanmadığı sürece u fonksiyonu [a,b] aralığı üzerinde en fazla bir tek sıfıra sahip olabilir.

İspat:

$$\bar{u}(x) = u(x)\exp\left[(\frac{1}{2})\int_a^x [g_1(\xi) - g_2(\xi)]d\xi\right] \tag{77}$$

olsun.

$$H(x)=\frac{1}{2}[g_2'(x)-g_1'(x)]+\frac{1}{4}\{[g_2(x)]^2-[g_1(x)]^2\}+h(x) \tag{78}$$

olmak üzere $\bar{u}$ fonksiyonu,

$$(L_2+H)[\bar{u}]\equiv\bar{u}''+g_2\bar{u}'+H(x)\bar{u}=0$$

denklemini sağlar. Eğer

$$h_2(x)\geq H(x)$$

yani H(x) fonksiyonu (78) ile verilen tanımdan dolayı,

$$h_2(x)-\frac{1}{2}g_2'(x)-\frac{1}{4}[g_2(x)]^2\geq h_1(x)-\frac{1}{2}g_1'(x)-\frac{1}{4}[g_1(x)]^2$$

ise *Teorem 2.2.3.2*, w ve $\bar{u}$ fonksiyonlarının sıfırları için de geçerlidir. Eğer (a,b) aralığında $w(x)\neq 0$ ise, bu teoremdeki (i),(ii) ve (iii) koşulları sağlanmadıkça, $\bar{u}$ fonksiyonu [a,b] aralığı üzerinde en fazla bir tek sıfıra sahip olabilir. (77) eşitliği, u ve $\bar{u}$ fonksiyonların aynı sıfırlara sahip olduğunu gösterdiğinden, u fonksiyonu [a,b] aralığı üzerinde en fazla bir tek sıfır yerine sahiptir. Bu ise teoremi ispatlar.

2.2.4. Lineer Olmayan Operatörler

Lineer diferensiyel operatörler için ispatlanan pek çok sonuç, lineer olmayan operatörlere genişletilebilir.

u(x) fonksiyonu bir $a\leq x\leq b$ aralığı üzerinde,

$$u''+H(x,u,u')=0 \tag{79}$$

lineer olmayan denkleminin bir çözümü olsun. Bu durumda aşağıdaki teoremleri verelim.

Teorem 2.2.4.1: $a < x < b$ aralığında $H, \dfrac{\partial H}{\partial y}, \dfrac{\partial H}{\partial z}$ fonksiyonları sürekli ve $\dfrac{\partial H}{\partial y} \leq 0$ olmak üzere,

$$w'' + H(x,w,w') \geq u'' + H(x,u,u') \tag{80}$$

olsun. Eğer $w(x) - u(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında negatif olmayan M maksimum değerini alıyorsa, bu takdirde,

$$w(x) - u(x) \equiv M$$

dir.

İspat: Her x ve z sayıları için,

$$H(x,y_1,z) \leq H(x,y_2,z) \quad , \quad y_1 \geq y_2 \tag{81}$$

olsun. Bu durumda H fonksiyonu y ye göre azalan bir fonksiyon olduğundan, $\dfrac{\partial H}{\partial y} \leq 0$ dır.

$$H(x,u,u') = g(x)u' + h(x)u - f(x) \tag{82}$$

olmak üzere (79) denklemi lineer bir denkleme dönüşür. Bu durumda (81) şartı, (82) eşitliğinden dolayı,

$$g(x)z + h(x)y_1 - f(x) \leq g(x)z + h(x)y_2 - f(x) \quad , \quad y_1 \geq y_2$$

olup, bu durumda $h(x) \leq 0$ bulunur. Kabul edelim ki $w(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında,

$$w'' + H(x,w,w') \geq 0 \tag{83}$$

eşitsizliğini sağlasın. $v = w - u$ olmak üzere, (79) ve (83) eşitsizlikleri taraf tarafa çıkartılırsa,

$$H(x,w,w') - H(x,u,u') \geq -v''$$

olur. Elde edilen bu son eşitsizliğin sol tarafına $\Delta H = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z} \right)$ olmak üzere, ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$H(x,w,w') - H(x,u,u') = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z} \right).(x-x, w-u, w'-u') \geq -v''$$

bulunur. Buradan $v = w - u$ olduğu gözönünde tutulursa,

$$v'' + \frac{\partial H}{\partial z} v' + \frac{\partial H}{\partial y} v \geq 0$$

elde edilir. Böylece v fonksiyonu lineer bir denklemi ve dolayısıyla, *Teorem 2.1.1.3* de verilen maksimum prensibini sağlar. Yani $v(x) = w(x) - u(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında negatif olmayan maksimum değerini alıyorsa, bu durumda,

$$v(x) = w(x) - u(x) \equiv M$$

olup v fonksiyonu sabittir.

Teorem 2.2.4.2: $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ve θ ve φ nin her ikisi birden sıfır olmamak üzere u(x) fonksiyonu, (79) ile verilen denklemin,

$$\left. \begin{aligned} -u'(a)\cos\theta + u(a)\sin\theta = \gamma_1 \\ u'(b)\cos\varphi + u(b)\sin\varphi = \gamma_2 \end{aligned} \right\} \tag{84}$$

sınır şartlarını sağlayan bir çözüm olsun. $H, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z}$ fonksiyonları sürekli ve $\frac{\partial H}{\partial y} \leq 0$ olmak üzere, $z_1(x)$ fonksiyonu

$$z_1'' + H(x, z_1, z_1') \leq 0 \tag{85}$$

$$\left.\begin{aligned} -z_1'(a)\cos\theta + z_1(a)\sin\theta \ge \gamma_1 \\ z_1'(b)\cos\varphi + z_1(b)\sin\varphi \ge \gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{86}$$

eşitsizliklerini ve $z_2(x)$ fonksiyonu da,

$$z_2'' + H(x,z_2,z_2') \ge 0 \tag{87}$$

$$\left.\begin{aligned} -z_2'(a)\cos\theta + z_2(a)\sin\theta \le \gamma_1 \\ z_2'(b)\cos\varphi + z_2(b)\sin\varphi \le \gamma_2 \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

eşitsizliklerini sağlıyor ise, bu taktirde

$$z_2(x) \le u(x) \le z_1(x)$$

dir.

İspat: $v_1 = u - z_1$ fonksiyonu (79) ve (85) den dolayı

$$v_1'' + H(x,v,v_1') \ge 0 \tag{89}$$

diferensiyel eşitsizliğini ve (84) ve (86) dan dolayı ise,

$$\left.\begin{aligned} -v_1'(a)\cos\theta + v_1(a)\sin\theta \le 0 \\ v_1'(b)\cos\varphi + v_1(b)\sin\varphi \le 0 \end{aligned}\right\} \tag{90}$$

sınır şartlarını sağlar. Eğer $v_1 > 0$ ise *Teorem 2.2.4.1* den dolayı v_1 sabit olmadığı sürece pozitif maksimumunu a ya da b noktalarından birinde alır. Eğer a noktasında maksimum varsa, *Teorem 2.1.1.4* den dolayı da,

$$v_1(a) > 0 \quad , \quad v_1' < 0$$

dır. Ayrıca,

$$-v_1'(a)\cos\theta + v_1(a)\sin\theta \le 0$$

olduğundan yalnızca $\theta = 0$ ve $v_1'(a) = 0$ olması durumunda $x = a$ noktasında pozitif maksimum vardır. Bu ise $v_1'(a) < 0$ ile çelişir. Bu durumda *Teorem 2.1.1.4* $v_1(x)$ fonksiyonunun pozitif bir sabit olduğunu ifade eder. Böylece (89) da $v_1' = v_1'' = 0$ olduğu göz önünde tutulursa, $H(x, v_1, 0) \geq 0$ elde edilir. bu son eşitsizlikten dolayı H fonksiyonu yalnızca x e bağlı olup, $\frac{\partial H}{\partial y} \equiv 0$ dır. Benzer şekilde (84) ve (86) dan

$$v_1'(b)\cos\varphi + v_1(b)\sin\varphi \leq 0$$

olacağından, $\varphi = 0$ ve $\frac{\partial H}{\partial y} \equiv 0$ olmadığı sürece v_1, b noktasında pozitif maksimuma sahip olamaz. Böylece θ ve φ nin her ikisi birden sıfır ve $\frac{\partial H}{\partial y} \equiv 0$ olmadığı sürece $v_1(x) \leq 0$ olup,

$$u(x) \leq z_1(x)$$

sağlanır.

Aynı şekilde, $v_2 = z_2 - u$ fonksiyonu seçilir ve benzer işlemler tekrarlanırsa

$$u(x) \geq z_2(x)$$

elde edilir ki bu ise istenendir.

Uyarı: Bu teorem (84) sınır koşullarını sağlayan (79) denkleminin çözümünün tek olması gerektiğini ifade etmektedir. u ve $\bar{u}$ fonksiyonları (79) ve (84) ile verilen sınır değer problemlerinin çözümleri iseler bu durumda $z_1 \equiv z_2 \equiv \bar{u}$ alınarak $u \equiv \bar{u}$ olduğu görülür.

Örnek 2.2.4.1:

$$u'' - u^3 = 0 \quad , \quad 0 < x < 1$$

denkleminin,

$$u(0)=0 \quad , \quad u(1)=1$$

sınır şartlarını sağlayan u(x) çözümü için alt ve üst sınırlar elde edelim.

$$z_1 = x \ , \ z_2 = x^{(1+\sqrt{5})/2}$$

alınırsa, bu durumda z_1 ve z_2 fonksiyonlarının (85) ve (87) ile verilen sınır şartları sağladığı aşağıda görülmektedir.

$$z_1'' - z_1^3 = -x^3 \leq 0$$

$$z_2'' - z_2^3 = x^{-(3-\sqrt{5})/2} - x^{3(1+\sqrt{5})/2} \geq 0$$

ayrıca z_1 ve z_2 fonksiyonları (86) ve (87) ile verilen sınır şartlarını da

$$z_1(0) = z_2(0) = 0 \ , \ z_1(1) = z_2(1) = 1$$

eşitsizliklerinden görüldüğü gibi sağlarlar. Böylece *Teorem 2.2.4.2* nin hipotezleri sağlanmış olup,

$$x^{(1+\sqrt{5})/2} \leq u(x) \leq x$$

Teorem 2.2.4.3: u(x) fonksiyonu (79) ile verilen diferensiyel denklemin,

$$u(a) = \gamma_1 \ , \ u'(a) = \gamma_2 \tag{90}$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü ve $H, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z}$ fonksiyonları sürekli ve de $\frac{\partial H}{\partial y} \leq 0$ olsun. Eğer $z_1(x)$ fonksiyonu,

$$z_1'' + H(x, z_1, z_1') \geq 0 \tag{91}$$

$$z_1(a) \geq \gamma_1 \quad , \quad z_1'(a) \geq \gamma_2 \tag{92}$$

eşitsizliklerini ve $z_2(x)$ fonksiyonu da,

$$z_2'' + H(x,z_2,z_2') \leq 0 \tag{93}$$

$$z_2(a) \leq \gamma_1 \quad , \quad z_2'(a) \leq \gamma_2 \tag{94}$$

eşitsizliklerini sağlıyor iseler, o takdirde

$$z_2(x) + \gamma_2 - z_2(a) \leq u(x) \leq z_1(x) + \gamma_1 - z_1(a)$$

(95)

ve

$$z_2'(x) \leq u'(x) \leq z_1'(x) \tag{96}$$

dir.

İspat: $v_1(x) \equiv z_1(x) - u(x)$ olmak üzere, $v_1(x)$ fonksiyonu (79) ve (91) den dolayı,

$$v_1'' + H(x,v_1,v_1') \geq 0$$

eşitsizliğini, (90) ve (92) den dolayı da

$$v_1(a) \geq 0 \quad , \quad v_1'(a) \geq 0$$

eşitsizliklerini sağlar. $v_1(a) \geq 0$ olduğundan v_1 fonksiyonu [a,b] aralığının herhangi bir $[a,x_0]$ alt aralığında negatif olmayan maksimuma sahiptir. *Teorem 2.2.4.1* de verilen maksimum prensibinden dolayı, bu maksimum a ya da x_0 noktalarından birinde ortaya çıkar. $v_1'(a) \geq 0$ olduğundan, *Teorem 2.1.1.4* den dolayı v_1 fonksiyonu (a,x_0) aralığı üzerinde sabit olmadığı sürece maksimum değerini a noktasında alamaz. Böylece *Teorem 2.2.4.1* den her $x_0 > a$ için

$$v_1(x_0) \geq v_1(a) \tag{97}$$

$$v_1(x_0) \geq 0 \tag{98}$$

$$u(x) \le \gamma_1 + z_1(x) - z_1(a) \quad , \quad x \ge a \tag{99}$$

$$u'(x) \le z_1'(x) \tag{100}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Benzer şekilde $v_2(x) \equiv u(x) - z_2(x)$ fonksiyonu tanımlayarak benzer işlemler tekrarlanırsa,

$$u(x) \ge \gamma_1 + z_2(x) - z_2(a) \tag{101}$$

$$u'(x) \ge z_2'(x) \tag{102}$$

(99),(101) ve (100),(102) eşitsizlikleri birlikte göz önünde tutulursa, (95) ve (96) eşitsizlikleri elde edilir ki bu istenendir.

Uyarı: u ve $\bar{u}$ fonksiyonları (79),(90) ile verilen başlangıç değer probleminin çözümleri olsunlar. Bu durumda $z_1 = z_2 = \bar{u}$ seçilirse, bu başlangıç değer probleminin çözümünün tek olduğu görülür.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI

3.1. Parabolik Denklemler

3.1.1. Isı Denklemi

Uzunluğu L olan ,uzun ince ve homogen bir çubuk x ekseninin (0,L) aralığına yerleştirilmiş olsun. Çubuğun yan yüzeyleri yalıtılmış ancak uç noktalarında ısı alış verişi olsun.

$$u = u(x,t)$$

ısı fonksiyonu x-yer, t-zaman boyutunu göstermek üzere x ve t nin bir fonksiyonudur.

Çubuk üzerinde ısı akışını veren diferensiyel denklem,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,t)$$

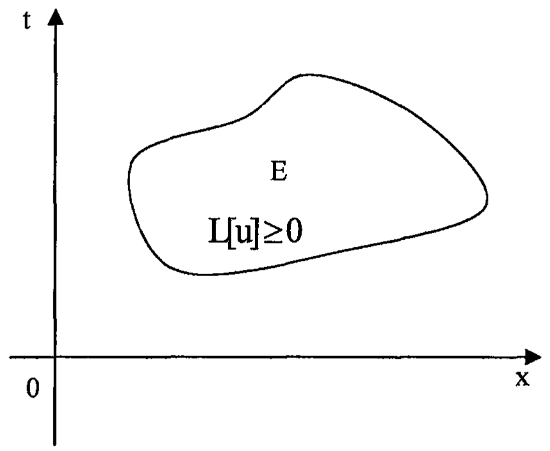
dir. Burada f fonksiyonu çubuğa dışarıdan etki eden kaynak fonksiyonudur. $u(x,t)$ ısı fonksiyonu maksimum prensibini sağlar. $u(x,t)$ ısı fonksiyonunun xt düzleminin bir E bölgesinde,

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} > 0$$

eşitsizliğini sağlandığını kabul edelim. Kolayca u nun bir iç maksimum noktaya sahip olmayacağı görülebilir. Çünkü böyle bir noktada

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \leq 0 \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

dır. Sonuç olarak E bölgesinde $L[u] > 0$ özelliği sağlanıyor ise E nin iç noktasında u maksimum değerini alamaz. Biz şimdi sadece operatörü $L[u] \geq 0$ olması durumuna genişletmekle kalmayıp bu tip operatörler için maksimum prensibinin daha kuvvetli olduğunu göstereceğiz.



Şekil 3.1.1.1

Basit bir problem olarak yukarıda bahsedilen çubuğun ilk ısısının $t = 0$ anında belirlenmiş olduğunu ve çubuğun uç noktalarındaki ısısının t ye bağlı olduğunu kabul edelim. Enerjinin korunumu kanununa göre ısı dağılımı herhangi bir sabit T zamanındaki çubukta meydana gelen değişikliklerden etkilenmez. ($t > T$ değişikliklerinden etkilenmez)

Örneğin xt-düzleminde

$$E = \{\, 0 < x < l, 0 < t \leq T\} \tag{103}$$

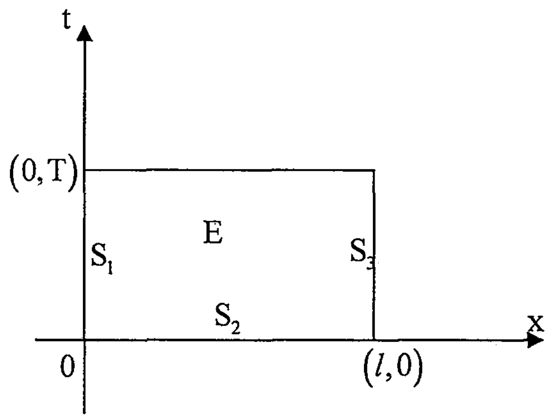
şeklinde dikdörtgensel bir bölge düşünelim ve u(x,t) ısısı E üzerinde,

$$S_1 = \{x = 0, 0 \leq t \leq T\}$$
$$S_2 = \{0 \leq x \leq l, t = 0\}$$
$$S_3 = \{x = l, 0 \leq t \leq T\}$$

olarak verilsin. Fiziksel prensiplere göre u fonksiyonunun

$$L[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

ısı denklemini sağlayacağı bir gerçektir.



Şekil 3.1.1.2

Maksimum prensibinin bir sonucu olarak çözümün tekliği kolayca gösterilebilir.

Teorem 3.1.1.1: Kabul edelim ki (103) ile verilen bir dikdörtgensel E bölgesinde $u(x,t)$ fonksiyonu,

$$L[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0 \qquad (104)$$

eşitsizliğini sağlasın. O halde u nun maksimum değeri $E \cup \partial E$ kapalı bölgesinin S_1, S_2 yada S_3 kenarlarından birinde olmalıdır.

İspat: Kabul edelim ki u maksimum değeri olan M değerini S_1,S_2,S_3 kenarlarından herhangi birinde alsın. Öyle ki E nin bir iç noktası olan $p(x_0,t_0)$ noktasında u fonksiyonu $M_1 > M$ değerini alsın.

Şimdi,

$$w(x) = \frac{M_1 - M}{2l^2}(x - x_0)^2$$

şeklinde bir yardımcı fonksiyon tanımlayalım. S_1, S_2 ve S_3 kenarlarında $u \leq M$ olduğunu biliyoruz. $w(x)$ fonksiyonu yardımıyla

$$v(x,t) \equiv u(x,t) + w(x) \leq M + \frac{M_1 - M}{2} < M_1 \qquad (105)$$

fonksiyonunu oluşturalım. S_1, S_2, S_3 kenarlarındaki her nokta için $v(x,t) < M_1$ özelliğine sahibiz. Ayrıca,

$$v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) = M_1 \qquad (106)$$

ve

$$L[v] \equiv L[u] + L[w] = L[u] + \frac{M_1 - M}{l^2} > 0 \qquad (107)$$

dır. E nin tamamında bu özellikler gerçeklenir. (105) ve (106) şartları gösterir ki v maksimum değerini ya E nin iç noktasında yada

$$S_4 : \{0 < x < L \,,\, t{=}T\}$$

açık aralığı boyunca almalıdır. (107) eşitsizliğinden u, E nin iç noktasında maksimum değerini alamaz. O halde u maksimum değerini S_4 uzunluğu boyunca almalıdır. Bu durumda S_4 uzunluğu boyunca da $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0$ olduğundan

$$L[v] > 0$$

eşitsizliğinin sağlanması için $\frac{\partial v}{\partial t}$ kesinlikle negatif olmalıdır. Yani v fonksiyonu t ye bağlı olarak azalan bir fonksiyondur. O halde v fonksiyonu daha önceki zamanlarda daha büyük olacağından dolayı S_4 de maksimum değerini alamaz. Bu yolla görürüz ki daha önce kabul ettiğimiz

$$u(x_{0,}t_0) > M$$

bir çelişki oluşturur. Böylece lemma ispatlanmış olur.

Sonuç 3.1.1.1:1) u sabit olmadığı sürece bu teoremin bir sonucu maksimumuna E nin bir iç noktasında ulaşamayacağı gibi çubuğun uç noktaları hariç ileriki bir zamanda da oluşamaz.

2) Bu teorem için maksimum prensibi yeteri kadar güçlü formlardan biri değildir. Çünkü u nun maksimum değerini hem iç noktada hem sınırda almasına izin verir. İleride gösterilecek ki eğer u içeride bir yerde maksimum değerini alıyorsa o taktirde u sabit olmak zorundadır.

3) L[u]=0'ın çözümleri için u yerine –u alınarak minimum prensibi elde edilir.

4) Eliptik tip denklemlerde de maksimum prensibi geçerli olup maksimum değerini sınırın belirli bir yerinde alabilir. Ancak ısı denklemlerindeki maksimum prensibi daha güçlü olarak geçerlidir. Çünkü ısı denklemlerinde maksimum ısı sınırın belirli bir bölgesinde elde edilebilir. (u sabit olmadığı sürece) 3 boyutlu uzayın bir D bölgesindeki ısı yayılımı denklemi,

$$L[u] = \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} = \left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) - \frac{\partial u}{\partial t} = f(x,y,z,t)$$

ile verilir.Burada $u = u(x,y,z,t)$ D nin $p(x,y,z)$ noktasında, t zamanındaki ısısı ve f kaybolan ısı oranıdır. Bir boyutlu durumda olduğu gibi u fonksiyonu (4 değişkenli)

$$L[u] = \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} > 0$$

özelliğini sağlayan bir noktada yerel maksimum değerini alamaz. Maksimum değerini alan noktada $\Delta u \leq 0$ ve $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ gerçeği hatırlanırsa bu sonuç doğrudur. Biz bu özelliği;

$$L[u] \geq 0$$

eşitsizliğini sağlayan u fonksiyonlarına da genişletmek istiyoruz. 3 boyutlu uzayda ki ısı problemi için D bölgesi sınırları belirli homojen bir bölgedir. Kabul edelim ki problem $t=0$ anında başlasın ve u(x,y,z,0) ilk ısısı (x,y,z) nin bir fonksiyonu olarak verilmiş olsun. Ayrıca D nin ∂D sınırındaki ısısı her $t \geq 0$ zamanı için verilmiştir. Her $t > 0$ zamanı için ve D de ki her bir p(x,y,z) noktaları için ısı akış problemi u(x,y,z,t) ısı fonksiyonunun hesaplanmasıyla ilgilenir.

Dört boyutlu uzayda zaman boyutu, bu uzayda $D \times (0,\infty)$ sonsuz silindirini oluşturur. Pozitif T zamanlarında D deki ısı dağılımı $0 \leq t \leq T$ aralığında ne olduğuna bağlı olarak hesaplanır. Sonuçta ilgilenilecek doğal 4 boyutlu bölge $D \times [0,T]$ sonlu silindirini oluşturur. Bu silindirdeki u ısısı $L[u]$, $t=0$ anında D deki u değerleri , $\partial D \times (0,T]$ silindir yüzeyindeki her bir u değeri yardımıyla hesaplanır.

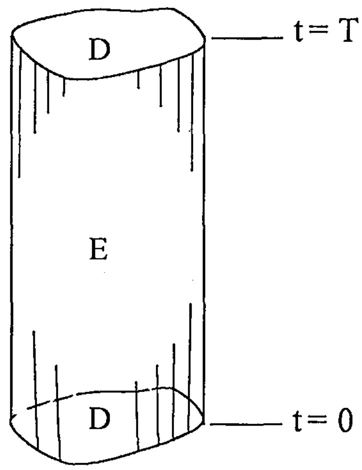
Şimdi $D \times (0,T]$ silindirini E ile tanımlayalım. Maksimum prensibi gereğince u maksimum değerini E nin sınırında yer alan bölgede (E nin ya alt kısmı yada $\partial D \times [0,T]$ kenarları boyunca) almalıdır.

$$L[u] = \Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} > 0$$

iken u nun maksimum değerini E nin bir iç noktasında alamayacağını biliyoruz. Dolayısıyla eğer u nun maksimum değerini herhangi bir $t=T$ anında D nin bir iç noktasında alıyorsa bu bir çelişkidir. $\Delta u \leq 0$ ve $L[u] > 0$ eşitsizliği göz önüne alındığında içerdeki bu noktada,

$$\frac{\partial u}{\partial t} < 0$$

olduğu görülür. Buna göre belirli bir t anındaki zamandan daha önce ki zamanlarda u, t anında ki değerinden daha büyük olacağından maksimum ya kenarlar boyunca yada E cisminin yüzeyinde olmalıdır. Bu durum daha da genişletilebilir.



Şekil 3.1.1.3

3.2. Bir Boyutlu Parabolik Operatör

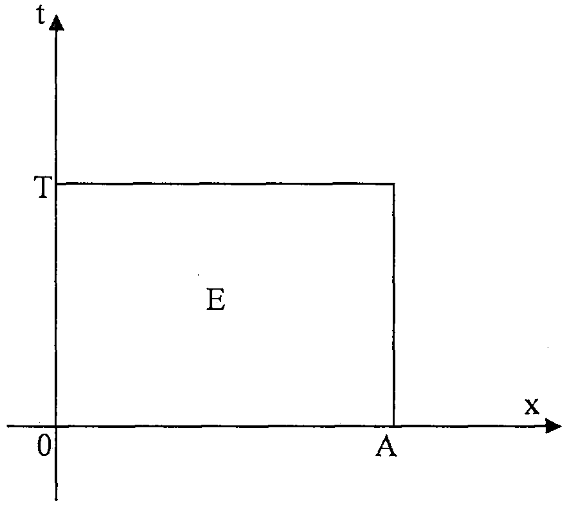
$$L[u] = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \tag{108}$$

şeklindeki bir $L[u]$ operatörü için bir (x,t) noktasında $a(x,t) > 0$ ise L operatörüne parabolik tipten operatör adı verilir. Üstelik herhangi bir pozitif M sabiti için D bölgesindeki (x,t) noktaları için $a(x,t) \geq M$ oluyorsa L operatörüne düzgün paraboliktir denir.

Bir boyutlu ısı operatörü xt düzleminin tamamında düzgün paraboliktir. Çünkü bu operatör (108) de $a(x,t) \equiv 1$ ve $b(x,t) \equiv 0$ alınarak

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

şeklinde elde edilmiştir.



Şekil 3.2.1

$E:\{0<x<A\,,0<t\le T\}$ *Şekil 3.2.1* deki gibi bir dikdörtgensel bölge olsun. Açık olarak biliniyor ki eğer E nin içerisindeki herhangi bir noktada,

$$L[u]>0 \tag{109}$$

ise o taktirde maksimum prensibi gereğince u içerideki bir noktada maksimum değerine ulaşamaz.. Ayrıca bir iç maksimum noktada $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\le 0$ ve $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial t}=0$ olduğu daha önceden bilinmektedir. Bu da (109) ile çelişmektedir. Bundan başka E nin açık üst sınırı boyunca u nun maksimumu olmayabilir. Yani $0<x<A\,,t=T$ boyunca maksimum noktada,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0\,,\frac{\partial u}{\partial t}\ge 0 \text{ ve } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\le 0$$

dır.

Şimdi L operatörü için maksimum prensibini $L[u]\ge 0$ diferensiyel eşitsizliğinin çözümlerine genişletelim.

Lemma 3.2.1: u , xt- düzleminin bir E bölgesinde

$$L[u] = a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0 \qquad (110)$$

diferensiyel eşitsizliğini sağlasın. Burada a , b sınırlı ve L düzgün parabolik bir operatördür. K bir disk olsun. Öyle ki K nın ∂K sınırı E bölgesinin içinde olsun. Kabul edelim ki u nun maksimumu olan M, E bölgesinde, K nın içinde $u < M$, K nın sınırında ki bazı p noktalarında $u = M$ olsun. O taktirde p noktası K ya teğet x-eksenine paraleldir.(yani p, K diskinde ya en alt ya da an üst noktadır.)

İspat: K , merkezi $(\bar{x},\bar{t})$ ve yarı çapı R olan bir disk olsun. Kabul edelim ki p noktası, ∂K sınırının en altında ya da en üstünde olamayan bir nokta olsun.
Genelliği bozmadan kabul edebiliriz ki p sadece sınırdaki bir nokta ve burada $u = M$ dir. Eğer değilse K nın yerine daha küçük bir K' diski seçebiliriz ki onun sınırı p noktası hariç K nın içinde olur. Burada ∂K ve $\partial K'$ teğettir.

Kabul edelim ki p nin koordinatları (x_1,t_1), $(x_1 \neq \bar{x})$ olsun. R_1 yarıçaplı ve p merkezli bir K_1 diski oluşturalım. R_1 öyle küçük seçilebilir ki

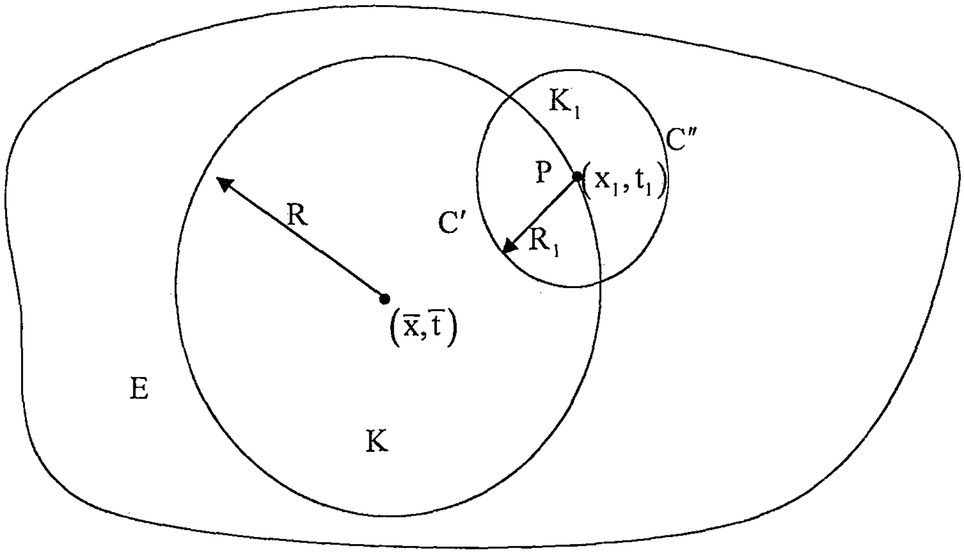
$$R_1 < |x_1 - \bar{x}|$$

dir ve K_1 in tamamı E dedir.

K nın sınırının böldüğü parçalar yardımıyla ∂K_1 sınırını iki yay parçası şeklinde ayıralım. C' (son noktalar dahil) ∂K_1 ile $K \cup \partial K$ kapalı diskinin kesişimin den oluşsun. C'' ise C''nün ∂K_1 sınırına tamamlayıcısı olsun. u, C' kapalı yayında M den daha küçük değerli olduğu için öyle bir η sayısı bulunabilir ki, C' ünde

$$u \leq M - \eta$$

yazılabilir.



Şekil 3.2.2

Diğer yandan E nin tamamında $u \le M$ olduğu için

$$u \le M \quad (C'' \text{ ünde})$$

değerine sahibiz.

$$v(x,t) = e^{-\alpha[(x-\bar{x})^2+(t-\bar{t})^2]} - e^{-\alpha R^2}$$

şeklinde bir yardımcı fonksiyon tanımlayalım. α pozitif değerli olduğundan, v fonksiyonu K da pozitif, ∂K da sıfır ve K nın dışında negatiftir.

$$L[v] = 2\alpha e^{-[(x-\bar{x})^2+(t-\bar{t})^2]}[2\alpha a(x-\bar{x})^2 - a - b(x-\bar{x}) + (t-\bar{t})]$$

olduğu basitçe hesaplanabilir. K_1 diskinde ve bu diskin sınırında

$$|x-\bar{x}| \ge |x_1-\bar{x}| - R_1 > 0$$

dir. α nın yeterince büyük olduğu düşünülürse,

$$L[v] > 0 \ , \quad [K_1 \cup \partial K_1 \text{ deki } (x,t) \text{ ler için}]$$

dır. Şimdi

$$w(x,t) = u(x,t) + \varepsilon v(x,t)$$

şeklinde bir w fonksiyonunu oluşturalım. Burada ε pozitif bir sabittir. Dikkat edilecek olursa K_1 de ,

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[v] > 0 \tag{111}$$

dir. C' ünde $u \le M - \eta$ olduğu için ε yeterince küçük seçilerek

$$w = u + \varepsilon v < M \quad (C' \text{ ünde})$$

yazılabilir. Diğer taraftan C'' 'ünde v negatif ve $u \le M$ olduğu için

$$w = u + \varepsilon v < M \quad (C'' \text{ ünde})$$

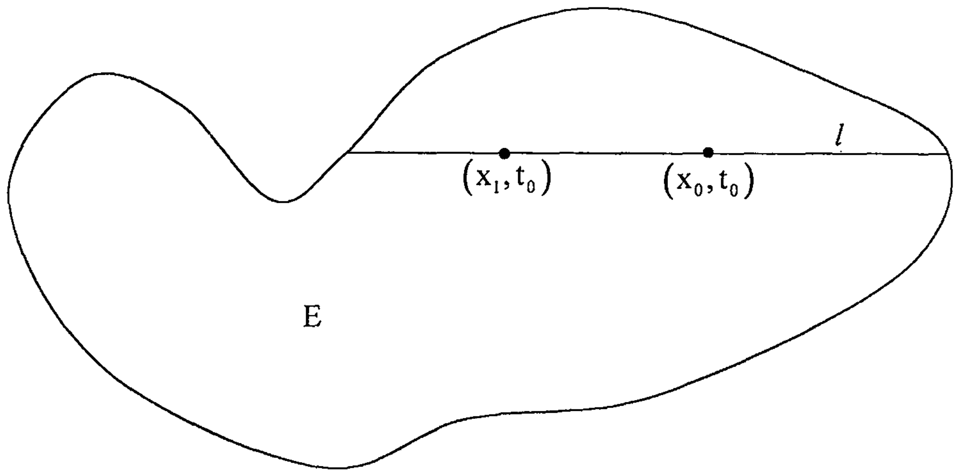
dir. Sonuç olarak tüm $\partial K_1 = C' \cup C''$ sınırında $w < M$ dir. Diğer yandan ∂K da $v = 0$ olduğu için (x_1, t_1) noktasında,

$$w(x_1, t_1) = u(x_1, t_1) + \varepsilon v(x_1, t_1) = u(x_1, t_1) = M$$

dir. Bu w nın maksimumunun K_1 in iç noktasında olduğunu gösterir. Bu ise (111) ile çelişir. Böylece lemma ispatlanmış olur.

Lemma 3.2.2: Kabul edelim ki xt-düzleminin bir E bölgesinde u, *Lemma 3.2.1* deki L operatörü için $L[u] \ge 0$ eşitsizliğini, E nin bir (x_0, t_0) iç noktasında $u < M$ ve E nin tamamında $u \le M$ özelliğini sağlasın. Eğer l , (x_0, t_0) noktasını kapsayan yatay bir yol ise o taktirde l üzerinde $u < M$ dir.

İspat: Kabul edelim ki l üzerinde bir (x_1, t_0) noktasında $u = M$, ve (x_0, t_0) noktasında $u < M$ olsun. Uygun olması açısından $x_1 < x_0$ seçelim ve eğer gerek duyulursa $x_1 < x \le x_0$ da $u < M$ olacak şekilde x_1 'i sağa doğru hareket ettireceğiz. d_0 uzunluğu $x_0 - x_1$ yada $x_1 \le x \le x_0$ bölünmüş yolunun herhangi bir noktasının $t = t_0$ zamanında ∂E sınırına olan uzaklığının en küçüğüne eşit olsun.



Şekil 3.2.3

$x_1 < x < x_1 + d_0$ için, $d(x)$ fonksiyonunu E de (x,t_0)'dan $u = M$ koşulunun sağlayan en yakın noktaya olan uzaklık olarak tanımlayalım. $u(x_1,t_0) = M$ olduğundan $d(x) \le x - x_1$ olduğu açıktır. *Lemma 3.2.1* den dolayı en yakın noktaya olan uzaklık (x,t_0)'ın ya aşağısında ya da yukarısındadır. Yani, ya $u(x,t_0 + d(x)) = M$ yada $u(x,t_0 - d(x)) = M$ dir. $(x+\delta,t_0)$'ın $(x,t_0 \pm d(x))$'a olan uzaklığı $\sqrt{d(x)^2 + \delta^2}$ olduğundan,

$$d(x+\delta) \le \sqrt{d(x)^2 + \delta^2} < d(x) + \frac{\delta^2}{2d(x)} \tag{112}$$

dir. x yerine $x+\delta$ ve $+\delta$ yerine $-\delta$ alırsak,

$$d(x+\delta) > \sqrt{d(x)^2 - \delta^2} \tag{113}$$

olduğu görülebilir. Şimdi kabul edelim ki $d(x) > 0$, ve $0 < \delta < d(x)$ olsun. $(x, x+\delta)$ aralığı n eşit parçaya bölünür ve (112) ile (113) eşitsizliği uygulanırsa

$$d(x + \frac{j+1}{n}\delta) - d(x + \frac{j}{n}\delta) \le \frac{\delta^2}{2n^2 d(x + (j/n)\delta)} \le \frac{\delta^2}{2n^2\sqrt{d(x)^2 - \delta^2}}$$

bulunabilir. j=0'dan n-1 e kadar toplam alınırsa,

$$d(x+\delta)-d(x)\le\frac{\delta^2}{2n\sqrt{d(x)^2-\delta^2}}$$

olur. $n\to\infty$ ve $\delta>0$ için

$$d(x+\delta)\le d(x)$$

olduğu görülür. Bir başka deyişle $d(x)$, x in artmayan bir fonksiyonudur. $d(x)\le x-x_1$ olduğu için x, x_1'e kadar keyfi seçilebildiğinden $x_1<x<x_1+d_0$ için $d(x)\equiv 0$ dir. Bir başka deyişle bu aralıkta $u(x,t_0)\equiv M$ dir. Bu da bizim $x_1<x\le x_0$ için $u<M$ seçimimize zıttır. Yani $u(x_0,t_0)<M$ ifadesi bize çelişki oluşturur. O halde $u(x_1,t_0)=M$ dir.

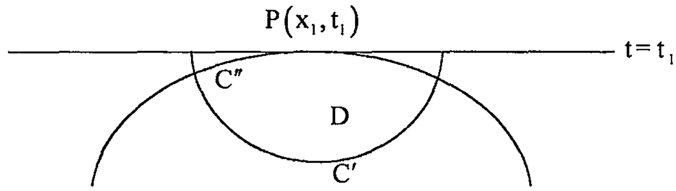
Uyarı: *Lemma 3.2.2* ye göre bölge içerisindeki bir doğru üzerinde $u\equiv M$ olacak şekilde bir tek nokta bulunabiliyorsa, o taktirde bu doğru üzerindeki her noktada $u\equiv M$ dir.

Lemma 3.2.3: xt-düzleminin bir E bölgesinde u fonksiyonu, *Lemma 3.2.1* deki L operatörü için $L[u]\ge 0$ eşitsizliğini sağlasın. t_0, t_1 sabit sayıları için $t_0<t<t_1$ şeridi boyunca E nin bir kısmında $u<M$ olsun. Buna göre E nin içinde kalan $t=t_1$ yolunun bir kısmında $u\equiv M$ dir.

İspat: Kabul edelim ki $t=t_1$ doğrusunun bir $p(x_1,t_1)$ noktasında $u=M$ olsun. Merkezi p noktası ve yarıçapı yeterince küçük seçilerek tamamı E bölgesinin içinde kalacak şekilde bir K diski oluşturalım ve

$$v(x,t)=e^{-[(x-x_1)^2+\alpha(t-t_1)]}-1$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. Kolaylıkla görülebilir ki



Şekil 3.2.4

$$L[v]=e^{-[(x-x_1)^2+\alpha(t-t_1)]}[4a(x-x_1)^2-2a-2b(x-x_1)+\alpha]$$

dir. α pozitif ve yeterince büyük seçilirse, K da $t \le t_1$ için

$$L[v]>0$$

dir.

$$(x-x_1)^2+\alpha(t-t_1)=0 \tag{114}$$

parabolü $t=t_1$ doğrusuna p noktasında teğettir. C' eğrisi olarak ∂K nın (114) parabolünün altında kalan kısmını (son noktalar dahil) ve C'' eğrisi olarak ta K diskinin içinde kalan parabolün parçası olarak tanımlayalım. C' ve C'' eğrisi ile D bölgesi oluşturulsun. Hipotezden dolayı C' kapalı yayı boyunca $u<M$ olduğundan öyle bir $\eta>0$ bulunabilir ki C' ünde,

$$u \le M-\eta$$

dır. Şimdi,

$$w(x,t)=u(x,t)+\varepsilon v(x,t)$$

şeklinde bir fonksiyon oluşturalım. Burada ε pozitif bir sabittir. Dikkat edilecek olursa C'' ünde $v=0$ dır. ε yeterince küçük seçilirse w fonksiyonu özeliklerini sağlar.

i) $L[w]=L[u]+\varepsilon L[v]>0$ (D de)

ii) $w=u+\varepsilon v<M$ (C' ünde)

iii) $w=u+\varepsilon v\le M$ (C'' ünde)

(i) şıkkından görülür ki w fonksiyonu D bölgesinde maksimum değerine ulaşamaz. O halde w maksimum değerine p noktasında ulaşmalıdır. p noktasında,

$$\frac{\partial w}{\partial t}\ge 0 \tag{115}$$

dır.

$$v(x,t)=e^{-[(x-x_1)^2+\alpha(t-t_1)]}-1$$

olduğundan

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\alpha e^{-[(x-x_1)^2+\alpha(t-t_1)]}$$

ve p de

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-\alpha<0 \tag{116}$$

dır. (115) ve (116) eşitsizliği kullanılırsa p noktasında,

$$\frac{\partial u}{\partial t}\ge-\varepsilon\frac{\partial v}{\partial t}>0 \tag{117}$$

bulunur. Diğer taraftan u nun maksimumu $t=t_1$ üzerinde p noktasında olduğu için p de,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0\,,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\le 0$$

dir.Bu eşitsizlik hipotezdeki $L[u]\ge 0$ seçimiyle çelişir. O halde lemma ispatlanmış olur.

Teorem 3.2.1: xt düzleminin bir E bölgesinde

$$L[u]=a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial t}\ge 0$$

ve E de a ve b sınırlı, L düzgün parabolik olsun. Eğer E nin bir (x_1,t_1) iç noktasında u, M maksimum değerine ulaşıyor ve E de (x_1,t_0) noktasını içeren $x = x_1$, $t_0 \leq t \leq t_1$ şeklinde dikey bir şerit var ise o taktirde E deki her bir $t = t_0$ doğru parçası boyunca $u \equiv M$ dir.

İspat: Kabul edelim ki t nin bir değeri $t_0 < t_1$ için $u(x_1,t_0) < M$ olsun. $u(x_1,t\ ) < M$'yi sağlayan $t < t_1$ değerlerinin üst sınırlarının en küçüğü τ olsun. Süreklilik nedeniyle $\tau_1 < t < \tau$ aralığında $u(x_1,t) < M$ iken $u(x_1,\tau) = M$ dir. Bu ise *Lemma 3.2.2* ve *Lemma 3.2.3* ile çelişir. Böylece teorem ispatlanmış olur.

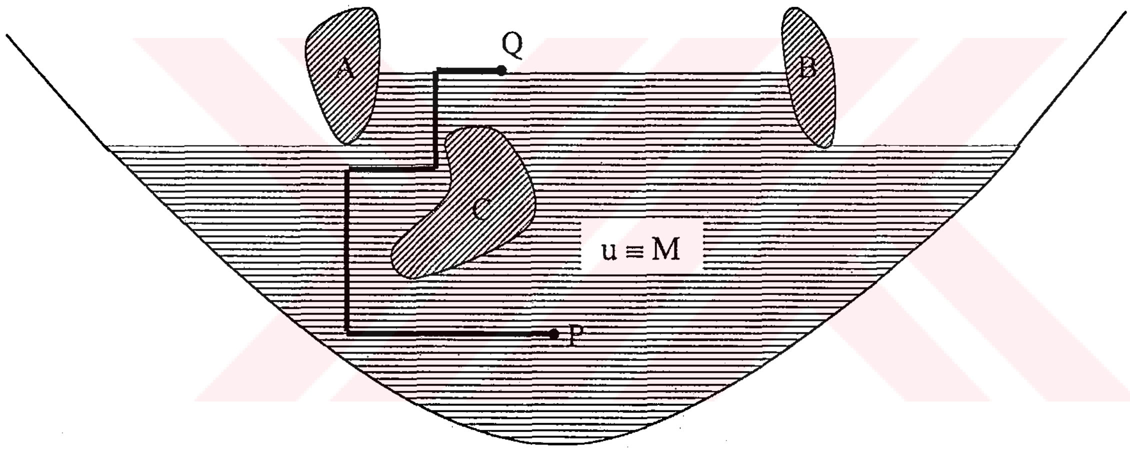
Uyarı: (i) $L[u] = a(x,t)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial t} \geq 0$

operatörünün u çözümü E bölgesinde özdeş olarak sabit olmaksızın maksimum değerine ulaşabilir. Eğer herhangi bir ısı iletken çubuk başlangıçta düzgün M ısısına sahipse ve bu ısı $t = t_1$ anına kadar uç noktalarda korunuyor ise bu olay ısı akış problemine bir örnektir.

Eğer uçlardaki ısı azaltılırsa ısı uçlara doğru hareket edeceğinden daha sonraki zamanlarda çözüm artık sabit olmayacaktır. Bu *Teorem 3.2.1* in sonuçlarına uygun bir durumdur. Bu yönüyle parabolik denklemlerdeki maksimum prensibi eliptik denklemlerde ki maksimum prensibinden tamamıyla farklı bir formdadır.

(ii) Eğer E nin sınırının üzerindeki yatay bir S doğru parçası içerisindeki bir (x_1,t_1) noktasında ve $E \cup S$ de $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ve $\dfrac{\partial u}{\partial t}$'nin her biri sürekli ise o taktirde teoremin iddiaları burada da geçerlidir. Bu *Lemma 3.2.3* ün ispatından da görülebilir.

(iii) İçerideki bir yerde maksimum olması durumunda çözüm sabit olacağından *Teorem 3.2.1* ile *Lemma 3.2.2* birleştirilebilir. E bölgesinde $u = M$ olacak şekilde bir Q noktası var ise E de bu noktayı içeren en uzun yatay doğru parçası boyunca $u \equiv M$ olduğu *Lemma 3.2.2* den görülebilir. *Teorem 3.2.1* de gösterir ki bu yatay doğru parçası altındaki E nin tüm noktalarında $u \equiv M$ olmalıdır. E bölgesinde ki bir P noktası, Q ya yatay ve dikey doğrularla birleştirilebilen bir nokta ise bu taktirde $u(p) = M$ dir. *Şekil 3.2.5* de E nin taralı kısmında $u \equiv M$ dir. A,B ve C ile belirtilmiş bölgeler E den çıkartılmıştır.



Şekil 3.2.5

(iv) yukarıdaki tüm lemmalar sadece iç noktaların komşulukları ile ilgilendiğinden a ve b nin sınırlı L nin E bölgesinin her bir kapalı alt kümesinde düzgün parabolik olduğunu kabul etmek yeterli olacaktır.

$L[u] \geq 0$ parabolik eşitsizliğinin sabit olmayan u çözümü maksimum değerine sınırın belirli parçalarında ulaştığı bilinmektedir. Eliptik eşitsizliklerde fonksiyonun maksimuma ulaştığı sınırdaki bir noktada sınıra normal olan dış yönlü türevinin sıfır olamayacağı biliniyor. Bu özellik eliptik denklemlerin çözümlerinin tekliğini göstermede sıkça kullanılır. Buna benzer olarak parabolik denklemlerde çözüm fonksiyonu olan u fonksiyonunun maksimuma ulaştığı noktada sınıra normal olan türevin sıfır olamayacağı gösterilebilir. Bunun kesin ifadesi aşağıdaki teoremle verilebilir.

Teorem 3.2.2: xt-düzleminin bir E bölgesinde u fonksiyonu,

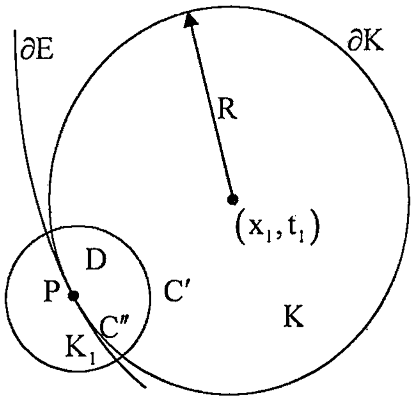
$$L[u] \equiv a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0$$

düzgün parabolik eşitsizliğinin bir çözümü ve a, b sınırlı olsun. p ∂E sınırında u nun maksimumuna ulaştığı nokta ve p noktasından ∂E ye çizilen normal t eksenine paralel olmasın. E nin içinde p noktasında ∂E ye teğet bir çember çizilebilsin ve bu bölgede $u < M$ olsun. eğer $\frac{\partial}{\partial \nu}$ E den dış yönlü türevi mevcut ise o taktirde p noktasında

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$$

dir.

İspat: *Lemma 3.2.1* in ispatına benzer şekilde hareket edeceğiz. p noktasında ∂E ye teğet R yarıçaplı bir K diski oluşturalım. p nin koordinatını (x_0,t_0) ve ∂K çemberinin merkezini (x_1,t_1) ile gösterelim. p merkezli ve yarıçapı $|x_1 - x_0|$ dan küçük olacak şekilde bir K_1 diski seçelim. (*Şekil 3.2.6*) C' nü en son noktalar dahil olmak üzere K nın içinde kalan ∂K_1'in parçası olarak tanımlayalım. C'' açık yayı K_1 in içinde kalan ∂K nın bir kısmı olsun. *Şekil 3.2.6* ya dikkat edilecek olursa $C' \cup C''$ yayı göz şeklinin sınırlarına benzeyen D bölgesini oluşturur. Eğer gerekirse ise ∂K teğet çemberini biraz küçük seçerek ∂K da $u < M$ yapılabilir.(p noktası hariç.



Şekil 3.2.6

C' kapalı yayında $u < M$ dir ve aşağıdaki 3 durum ifade edilebilir.

(i) $u < M$ (C'' ünde p noktası hariç)

(ii) $u = M$ (p'de)

(iii) Yeterince küçük $\eta > 0$ sayısı için C''ünde

$u \leq M - \eta$

dır. Şimdi

$$v(x,t) = e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]} - e^{-\alpha R^2}$$

şeklinde yardımcı fonksiyon oluşturalım. Basit bir hesaplamayla

$$L[v] = 2\alpha e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[2\alpha a(x-x_1)^2 - a - b(x-x_1) + (t-t_1)]$$

olduğu görülebilir. Böylece yeterince büyük α lar ve $\partial \cup \partial D$'deki (x,t) ler için

$$L[v] > 0$$

dir.

$$w = u + \varepsilon v$$

olsun. Dikkat edilirse her pozitif ε için D de,

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[v] > 0$$

dır. Çünkü (iii) şartından ve ε nu yeterince küçük seçersek C''ünde

$$w < M$$

dir. ∂K 'da $v = 0$ ve (i) şartından dolayı,

$$w < M \qquad (C'' \text{ ünde p noktası hariç})$$

ve

$$w(p) = M$$

dir. Maksimum prensibine göre D bölgesinde w fonksiyonunun maksimumu bir tek p noktasında olmalıdır. Bu nedenle p de,

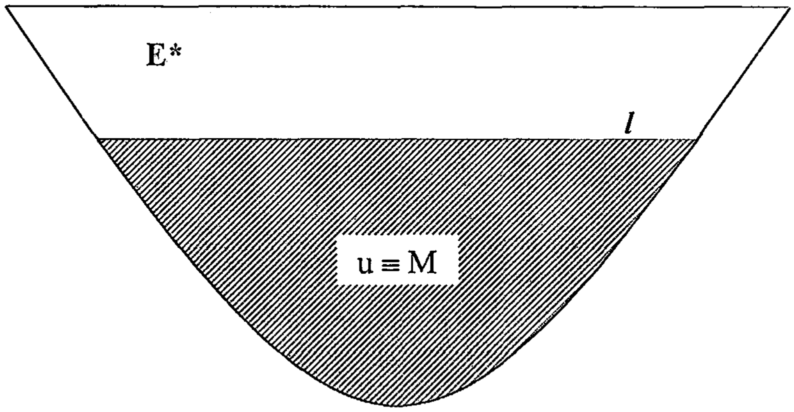
$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \frac{\partial u}{\partial \nu} + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial \nu} \geq 0$$

dır. Bu durumda,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \nu.n \frac{\partial v}{\partial r} = -2\nu.n\alpha \, Re^{-\alpha R^2} < 0$$

dir. p de $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ sonucuna varılır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Uyarı: Eğer ∂E sınırındaki maksimum noktada sınıra normal olan vektör t eksenine paralel ise o taktirde *Teorem 3.2.2* nin sonuçları geçerli olmayabilir. Çünkü L[u] parabolik eşitsizliğinin u çözümleri u nun sabit olduğu bölgeler sahip olabilir. Böyle bir bölgenin sınırı t yönünde diktir ve u sürekli türevlenebilir olduğundan $u \equiv$ sabit olan bölgenin tüm sınırlar boyunca normal türevi sıfır olacaktır. Örneğin *Şekil 3.2.7* de taralı olan bölgenin her noktasında u maksimum değerine ulaşıyor ise l uzunluğunun tamamında $\frac{\partial u}{\partial t}$ sıfır olur. Şimdi l doğrusunun üzerinde kalan noktalarla E^* bölgesini oluşturursak bu bölgedeki u, maksimum değerini l boyunca alacaktır ve bu doğru boyunca normal türevi sıfır olacaktır.



Şekil 3.2.7

L düzgün parabolik ve h, x ve t nin belirli bir fonksiyonu olmak üzere,

$$(L+h)[u] \geq 0$$

şeklindeki eşitsizlikleri için maksimum prensibini düşünelim.

Teorem 3.2.3: xt-düzleminin bir E bölgesinde *Teorem 3.2.1* in hipotezleri ve $h \leq 0$ sağlansın. Eğer E bölgesindeki bir (x_1,t_1) iç noktasında u fonksiyonu $M \geq 0$ maksimum değerine ulaşıyor ise (x_1,t_1) noktasını içeren E deki yatay doğru parçasının hemen altında $t = \text{sabit}$ olan tüm yollarda $u \equiv M$ dir.eğer negatif olmayan M, p sınır noktasında oluşuyor ise *Teorem 3.2.2* nin sonucu p de geçerlidir.

İspat: Bu teoremi ispatlayabilmek için *Teorem 3.2.1* ve *Teorem 3.2.2* nin ispatındaki yollar takip edilecektir. Lemmalar da verilen v fonksiyonundaki α parametresini öyle büyük seçelim ki,

$$(L+h)[v] > 0$$

olsun. Çünkü $h \leq 0$ olduğundan w nın negatif olamayan maksimumunda

$$(L+h)[w] \leq 0$$

dır. Gerçekten eğer,w fonksiyonu bir negatif olmayan maksimuma sahip olsaydı o noktada ,

$$(L+h)[w] = 0 + hM \leq 0$$

elde edilirdi ki bu $(L+h)[w] > 0$ eşitsizliği ile çelişirdi. Bundan sonra ki kısım *Teorem 3.2.1* ile *Teorem3.2.2* aynıdır. Eğer minimum m pozitif değil ise

$$(L+h)[w] \leq 0$$

çözümleri için bir minimum prensibi vardır.

3.3. Sınır Değer Problemleri İçin Çözümün Tekliği

xt düzleminde,

$$c < x < d \quad , \quad 0 < t < T$$

eşitsizlikleri ile bir dikdörtgensel E bölgesi oluşturalım.

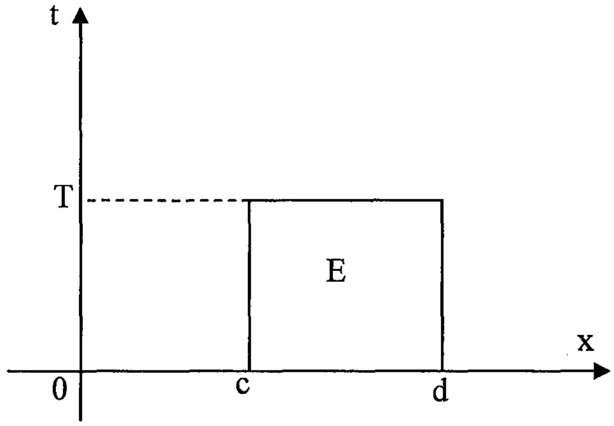
$$a(x,t)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial t} = f(x,t) \tag{118}$$

düzgün parabolik denklemini ve

$$\left.\begin{array}{lll} v(x,0) = g_1(x) & , & c \leq x \leq d \text{ için} \\ v(c,t) = g_2(t) & , & 0 \leq t < T \text{ için} \\ v(d,t) = g_3(t) & , & 0 \leq t < T \text{ için} \end{array}\right\} \tag{119}$$

sınır koşullarını sağlayacak biçimde $v(x,t)$ fonksiyonunu belirleyelim. f fonksiyonu E boyunca yukarıda ki gibi belirtilen bölgelerde verilen g_i, i=1,2,3 fonksiyonları ile tanımlansın. Sadece maksimum prensibinin özellikleri kullanılarak çözümün tekliği gösterilebilir. Şimdi (118) denkleminin (119) sınır koşullarını sağlayan tek bir çözümünün olduğunu gösterelim. Ortaya konulan bu sonuçlara göre, (118) ve

(119) ile aynı f ve g_i,i=1,2,3 fonksiyonlarını sağlayan v_1 ve v_2 fonksiyonlarını alalım.



Şekil 3.3.1

$$u = v_1 - v_2$$

olacak şekilde bir u fonksiyonu tanımlayalım. E bölgesinde

$$a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

ve

$$\begin{aligned} &u(x,0) = 0 \qquad , \ c \le x \le d \text{ için} \\ &u(c,t) = u(d,t) \ \ , \ 0 \le t < T \text{ için} \end{aligned}$$

olduğu açıktır. *Teorem 3.2.1* den de görüleceği gibi maksimum prensibine göre E de maksimum pozitif olamaz ve ayrıca her yerde $u \le 0$ dır. Aynı mantık (-u) ya uygulanarak E bölgesinde $u \le 0$ elde edilebilir. Bu nedenle E de

$$u = v_1 - v_2 \equiv 0$$

dır.

3.4. Lineer Olmayan Sınır Koşullu Bir Isı Denklemi İçin Patlama ve Doyum Problemi

Parabolik tipten operatörler için maksimum prensibinin hangi koşullar altında hangi özellikleri sağladığını önceki kısımlarda inceledik. Bir boyutlu ısı operatörü de parabolik tipten bir operatör olduğu için maksimum prensibinin bütün koşulları gerçeklenir. Bundan sonraki kısımda bir boyutlu ısı operatörü için patlama ve doyma problemleri olarak bilinen problemlerin çözümlerinde maksimum prensibini kullanarak problemlerin çözümlerinin nasıl değiştiğini inceleyeceğiz.

Bu kısımda inceleyeceğimiz problemin genel şekli,

$$\begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & , \quad 0 < x < 1 \ , \ 0 < t < T \\ u_x(0,t) = 0 & , \quad 0 < t < T \\ u_x(1,t) = f(u(1,t)) & , \quad 0 < t < T \\ u(x,0) = u_0(x) > 0 & , \quad 0 \le x \le 1 \end{array}$$

biçimindedir. Böyle bir problem fiziksel olarak $[0,1]$ aralığına yerleştirilmiş $x = 0$ ucunda ısı değişimi olmayan $x = 1$ de bir f fonksiyonunun etkisi altında ısı değişimine maruz kalan ısı iletken bir çubuktaki patlama (yani ısının kontrol edilemediği sonsuz hali) ya da doyma (ısının kontrol edilemeyecek kadar küçük olduğu hal) problemi olarak bilinmektedir. Eğer problem bir doyum problemi ise $x = 1$ noktasındaki ısı değişikliğini veren f fonksiyonu $p > 0$ olup $f(u) = -u^{-p}$ şeklinde, eğer problem bir patlama problemi ise $p > 1$ olup $f(u) = u^p$ şeklindedir. $p > 0$ durumu için incelenen problemi Problem D, $p > 1$ durumu için incelenen problemi Problem P olarak isimlendirip ayrı ayrı inceleyeceğiz.

3.4.1.Problem D

Böyle bir problemin çözümünün davranışlarını incelemek için iki yardımcı problemin çözümlerinin birleştirilmesinden yararlanacağız. Bu problem bir doyum problemi olup $t \to T$ için u, u_0 başlangıç ısısına bağlı olarak sonlu bir zamanda $u(1,t) \to 0$ olmaktadır. Bu T zamanına doyma zamanı denir. Ayrıca $[0,1] \times [0,T)$ için u ısısı pozitiftir. Problem D nin çözümü $u(.,T)$, u nun sonlu sayıda sıfır yerini veren fonksiyon ve $t \to T$ için $u \to \tilde{u}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx} \ , \ 0 < x < 1 \ , \ t > T \\
&\tilde{u}_x(0,t) = 0 \ , \ t > T \\
&\tilde{u}(1,t) = 0 \ , \ t > T \\
&\tilde{u}(x,T) = u(x,T) \ , \ 0 \le x \le 1
\end{aligned}$$

probleminin çözümü olan $\tilde{u}$ fonksiyonu yardımıyla $t > T$ zamanına genişletilebilir.

$\varepsilon > 0$ için $f_\varepsilon \in C^1[0,\infty)$ ve $f_\varepsilon(0) = 0$,

$$f_\varepsilon(s) = -s^{-p}, \qquad s \ge \varepsilon,$$

$$f(s) \le f_{\varepsilon_1}(s) \le f_{\varepsilon_2}(s), \ s > 0 \ \text{ve} \ \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \ \text{için}$$

özelliklerini gerçekleyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&u_t^\varepsilon = u_{xx}^\varepsilon \ , \ 0 < x < 1 \ , \ 0 < t < \infty \\
&u_x^\varepsilon(0,t) = 0 \ , \ 0 < t < \infty \\
&u_x^\varepsilon(1,t) = f_\varepsilon(u^\varepsilon(1,t)) \ , \ 0 < t < \infty \\
&u^\varepsilon(x,0) = u_0(x) > 0 \ , \ 0 \le x \le 1
\end{aligned} \tag{120}$$

probleminin çözümü u^ε fonksiyonu $\tilde{u}$ fonksiyonu yardımıyla u nun genişletilmesidir. Yani $u(x,t)$, $0 < t < T$ ve $\tilde{u}(x,t)$, $t > T$ için $u^\varepsilon(x,t)$, $0 < t < \infty$ dur. $p > 0$ için $t = T$ den daha sonraki zamanlarda problemin çözümü için cisim içinde ısı doyuma ulaştığından, ileriki zamanlarda doyumu geciktirme maksatlı olarak,

$$u_t = u_{xx} - u^{-p} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < t < T$$
$$u_x(0,t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T$$
$$u(1,t) = 1 \quad , \quad 0 < t < T$$
$$u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1$$

şeklinde bir problem tanımlanırsa, bu durumda problem D olarak verilen problemin çözümü daha geç zamanlarda sıfıra yaklaşacağından $p > 0$ için çözüm $t = T$ den daha sonraki zamanlarda da geçerli kalacaktır.

Doyma problemine benzer bir problem patlama problemidir.

Bir patlama (blow-up) noktasından kastımız $a \in [0,1]$, $\{x_n\} \subset [0,1]$ var ve $n \to \infty$ a giderken $t_n \to T$, $x_n \to a$ için $u(x_n,t_n) \to \infty$ olmasıdır.

3.4.2. Problem P

Eğer, patlama problemini

$$f^n(s) = \min\{s^p, n^p\} \quad , \quad s \geq 0 \quad , \quad n \in N \tag{121}$$

olmak üzere u^n için

$$\begin{aligned} & u^n_t = u^n_{xx} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < t < \infty \\ & u^n_x(0,t) = 0 \quad , \quad 0 < t < \infty \\ & u^n_x(1,t) = f^n(u^n(1,t)) \quad , \quad 0 < t < \infty \\ & u^n(x,0) = u_0(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \tag{122}$$

şeklinde tanımlarsak böyle bir problemin çözümü $(x,t) \in [0,1] \times (T,\infty)$ için $u^n(x,t) \to \infty$ dur. Böyle bir problem için daima patlamanın tamamlanmış olması durumu dikkate alınmaktadır. Yani $u^n(x,t) \to \infty$ durumu gerçekleşmiştir.

Şimdi doyum problemi olarak tanımlanan problem D için soğumanın tamamlanmaması halini inceleyelim.

3.4.3. Tamamlanmamış Doyum

Eğer u(x,t), $p > 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} & u_t = u_{xx} \quad , \quad 0 < x < 1 \ , \ 0 < t < T \\ & u_x(0,t) = 0 \quad , \quad 0 < t < T \\ & u_x(1,t) = -u^{-p}(1,t) \ , \quad 0 < t < T \\ & u(x,0) = u_0(x) > 0 \quad , \quad 0 \le x \le 1 \end{aligned} \tag{123}$$

probleminin T doyum zamanındaki çözümü ise, T den sonraki zamanlarda da doğal olarak u nun bir sürekliliği vardır. $t \to T$ içim çözüm $T = T(u_0)$ başlangıç ısısına bağlı olarak doyduğundan çubuk üzerindeki diğer noktalarda da u fonksiyonunun sıfıra yaklaşması beklenmektedir. Isı kararlı duruma geldiğinde başlangıç ısısı olan u_0 için

$$u_0 \in C^1([0,1]) \text{ ve } u_0'(0) = 0 \quad , \quad u_0'(1) = -u_0^{-p}(1)$$

bağdaşabilirlik şartlarının sağlandığını kabul edelim.

Lemma 3.4.3.1: Kabul edelim ki $0 < \varepsilon < u_0(1)$ olsun. Bu durumda (120) probleminin u^ε şeklinde verilen koşulları sağlayan bir tek çözümü vardır. Bu çözüm $u^\varepsilon \in C^{2,1}([0,1] \times [0,\tau])$ ve her bir $\tau > 0$ için

$$\begin{aligned} & \text{(i)} \ \ u^\varepsilon > 0 \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty) \\ & \text{(ii)} \ \ u^{\varepsilon_1} \le u^{\varepsilon_2} \ , \ 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \ \text{ ve } \ (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty) \\ & \text{(iii)} \ \ u^\varepsilon \ge u \ , \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,T) \end{aligned}$$

koşullarını gerçekler.

İspat: (i) Maksimum prensibi gereğince $\varepsilon > 0$ için

$$u^\varepsilon \le K \equiv \max_{0 \le x \le 1} u_0(x)$$

olduğu açıktır. Eğer cisim içindeki bazı (x_0,t_0) için $u^\varepsilon(x_0,t_0) = 0$ ise problem doyum problemi olduğu için genellikten bir şey kaybetmeksizin kabul edebiliriz ki $t < t_0$ için $u^{\varepsilon} > 0$ dır. Yani u^{ε} pozitif ve genel olarak tanımlanmıştır.

(ii) u^{ε} nun ε daki monotonluğunu göstermek için

$$w = u^{\varepsilon_1} - u^{\varepsilon_2} \quad , \quad 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
&w_t = u_t^{\varepsilon_1} - u_t^{\varepsilon_2} \\
&w_x = u_x^{\varepsilon_1} - u_x^{\varepsilon_2} \\
&w_{xx} = u_{xx}^{\varepsilon_1} - u_{xx}^{\varepsilon_2} \\
&w_t - w_{xx} = (u_t^{\varepsilon_1} - u_t^{\varepsilon_2}) - (u_{xx}^{\varepsilon_1} - u_{xx}^{\varepsilon_2}) \\
&= (u_t^{\varepsilon_1} - u_{xx}^{\varepsilon_1}) - (u_t^{\varepsilon_2} - u_{xx}^{\varepsilon_2}) \\
&= 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$w_t = w_{xx} \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < t < \infty$$

$$\begin{aligned}
w_x(0,t) &= u_x^{\varepsilon_1}(0,t) - u_x^{\varepsilon_2}(0,t) \quad , \quad 0 < t < \infty \\
&= 0 - 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_x(1,t) &= u_x^{\varepsilon_1}(1,t) - u_x^{\varepsilon_2}(1,t) \quad , \quad 0 < t < \infty \\
&= f_{\varepsilon_1}(u^{\varepsilon_1}(1,t)) - f_{\varepsilon_2}(u^{\varepsilon_2}(1,t))
\end{aligned}$$

$$w(x,t) = u^{\varepsilon_1}(x,t) - u^{\varepsilon_2}(x,t)$$

$$\begin{aligned}
w(x,0) &= u^{\varepsilon_1}(x,0) - u^{\varepsilon_2}(x,0) \quad , \quad 0 \le x \le 1 \\
&= u_0(x) - u_0(x) \\
&= 0
\end{aligned}$$

eşitsizliklerini sağlar. $w = u^{\varepsilon_1} - u^{\varepsilon_2}$ olarak tanımlanan fonksiyon yukarıdaki şartları sağladığından ve problem bir doyum problemi olduğundan w nın giderek azalmasından, $w \le 0$ ve $w \in [0,1] \times [0,\infty)$ alınması maksimum prensibine uygundur. Maksimum prensibine göre kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyon maksimum değerini ya başlangıç anında ya da $x = 0$ veya $x = 1$ uç noktalarında alır.

O halde $\theta(1,t)$ değerleri için,

$$w_x(1,t) = f_{\varepsilon_1}(u^{\varepsilon_1}(1,t)) - f_{\varepsilon_2}(u^{\varepsilon_2}(1,t))$$

eşitliğinin sağ tarafına

$$f_{\varepsilon_1}(u^{\varepsilon_2}(1,t))$$

değeri eklenip çıkartılırsa

$$w_x(1,t) = (f_{\varepsilon_1}(u^{\varepsilon_1}(1,t)) - f_{\varepsilon_1}(u^{\varepsilon_2}(1,t))) + (f_{\varepsilon_1}(u^{\varepsilon_2}(1,t)) - f_{\varepsilon_2}(u^{\varepsilon_2}(1,t))) \qquad (124)$$

olacaktır. $s > 0$ ve $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ için

$$f(s) \le f_{\varepsilon_1}(s) \le f_{\varepsilon_2}(s)$$

f nin ε da ki azalmayanlığı kullanılırsa,

$$f_{\varepsilon_1}(u^{\varepsilon_2}(1,t)) - f_{\varepsilon_2}(u^{\varepsilon_2}(1,t)) \le 0$$

yazılabilir. O halde bu ifade (124) eşitliliğinden çıkartılırsa sağ taraf daha da büyüyecektir. Kalan ifade

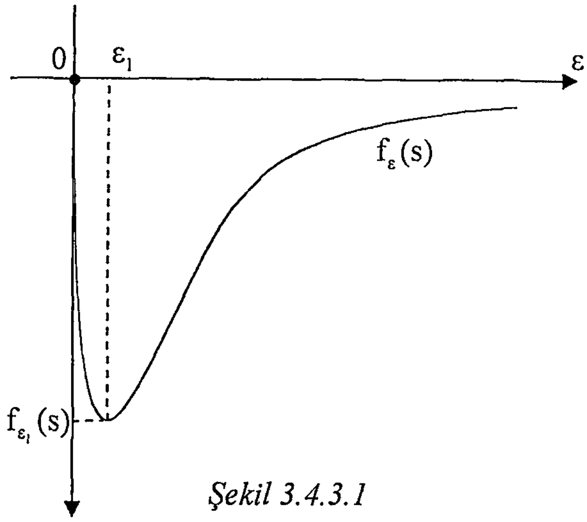
$$u^{\varepsilon_1}(1,t) - u^{\varepsilon_2}(1,t)$$

ile çarpılıp bölünürse

$$w_x(1,t) \le \frac{f_{\varepsilon_1}(u^{\varepsilon_1}(1,t)) - f_{\varepsilon_1}(u^{\varepsilon_2}(1,t))}{u^{\varepsilon_1}(1,t) - u^{\varepsilon_2}(1,t)}\left(u^{\varepsilon_1}(1,t) - u^{\varepsilon_2}(1,t)\right)$$

$$= f'_{\varepsilon_1}(\theta(1,t))w(1,t)$$

elde edilir. Şimdi bu eşitsizliği yorumlayalım. $u^{\varepsilon_1} \ge u^{\varepsilon_2}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda f_{ε_1} fonksiyonunu azalmayan bir özellik gösterecektir. Dolayısıyla türevin işareti pozitif olacaktır. $u^{\varepsilon_1} \ge u^{\varepsilon_2}$ olduğundan $w(1,t)$ fonksiyonu da pozitif olacaktır. Bu ise w fonksiyonunun $x = 1$ noktasında artan olabileceğini söylemektedir. Oysa w fonksiyonu doyma problemi olduğundan $x = 1$ noktasında hiç ısı artışı olamamaktadır. Dolayısıyla seçimimiz yanlıştır. O halde $u^{\varepsilon_1} \le u^{\varepsilon_2}$ dır. Gerçekten $f_{\varepsilon_1}'(\theta(1,t)) > 0$ ve $u^{\varepsilon_1} \le u^{\varepsilon_2}$ özelliğinden $w(1,t) \le 0$ olup $w_x(1,t) \le 0$ olmaktadır.



Şekil 3.4.3.1

(iii) Bu şıkkın ispatı için u^ε ile u fonksiyonunu karşılaştıracağız.

$$v(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u^\varepsilon(x,t) \quad , \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,\infty) \tag{125}$$

olsun. Buradan,

$$v(x,0) = \lim_{\varepsilon \to 0}(u^\varepsilon(x,0)) = u(x,0) = u_0(x) > 0 \quad , \quad 0 \le x \le 1$$

elde edilir.

v(x,t), $u^\varepsilon(x,t)$ fonksiyonu yardımıyla tanımlandığından ve u^ε problemi sağladığından v fonksiyonu da ısı denklemini sağlayacak ve yine $u^\varepsilon > 0$ olduğundan $v > 0$ olacaktır. u^ε ile u problemlerinin başlangıç ısıları aynıdır.

$f(s) \le f_{\varepsilon_1}(s) \le f_{\varepsilon_2}(s)$, $s > 0$ ve $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ için

özelliği kullanılırsa u^ε fonksiyonu için $x = 1$ noktasındaki ısı değişikliği, u fonksiyonu için $x = 1$ noktasındaki ısı değişikliğinden negatif olarak daha büyüktür. Bu ise bize u^ε fonksiyonu için $x = 1$ deki değişikliğin daha az olacağını söylemektedir. O halde (120) problemi (123) probleminden daha geç doyacaktır. O halde

$$u^{\varepsilon} \geq u$$

dir.

Lemma 3.4.3.2: Eğer $t_0 \in (0,T)$ ise

$$v_x(x,t) = -v^{-p}(1,t)$$

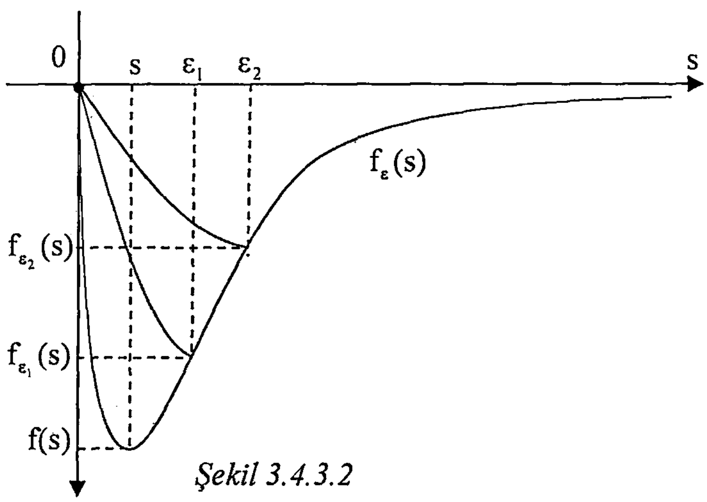
dir.

İspat: $t_0 \in (t,T)$ olsun. δ , u^{ε} ısısının alt sınırlarından herhangi biri olmak üzere öyle bir $c>0$ sayısı bulunabilir $\delta \leq u^{\varepsilon} \leq K$ ve $[0,1]\times[0,t_0]$ için $|u_x^{\delta}| \leq c$ olup u_x^{δ} sınırlıdır. Burada δ,K ve c ler $\varepsilon \in (0,u_0(0))$ dan bağımsız değerlerdir. [11,*Teorem 13,16*] ya göre $\alpha = \alpha(\delta,K,C,p)$ dır. $|u_x^{\varepsilon}| < M$ olacak şekilde en az bir tane bir $M>0$ sayısı bulunabilir. $\varepsilon > 0$ için $f_{\varepsilon} \in C^1[0,\infty)$ ve $f_{\varepsilon}(0)=0$,

$$f_{\varepsilon}(s) = -s^{-p}, \qquad s \geq \varepsilon,$$

$$f(s) \leq f_{\varepsilon_1}(s) \leq f_{\varepsilon_2}(s), \; s>0 \text{ ve } \varepsilon_1 < \varepsilon_2 \text{ için}$$

olduğundan $|u_x^{\varepsilon}|$ normunun supremumu da sonsuzdan küçük bırakılabilir. Çünkü



Şekil 3.4.3.2

dir. Dolayısıyla u_x^ε nun $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}([0,1]\times[0,t_0])$ normu ε da düzgün sınırlı olduğundan terim terime limit alınabilir. O halde

$$u_x^\varepsilon(1,t)=f_\varepsilon(u^\varepsilon(1,t))$$

sınır şartlarında limit alalım.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_x^\varepsilon(1,t)=\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(u^\varepsilon(1,t))$$

$$v_x(1,t)=-v^{-p}(1,t)$$

elde edilir.

Lemma 3.4.3.3: $t\ge T$ için

$$v(1,t)=0$$

dir.

İspat: $U(x)=\mu^{-p}(1-x)+\mu$ fonksiyonu

$$U''=0 \quad , \quad U'(1)=-U^{-p}(1) \quad , \quad U(1)=\mu$$

özelliklerini sağlar. Gerçekten,

$$U(x)=\mu^{-p}(1-x)+\mu$$

$$U(1)=\mu$$

$$U'(x)=-\mu^{-p}=-U^{-p}(1)$$

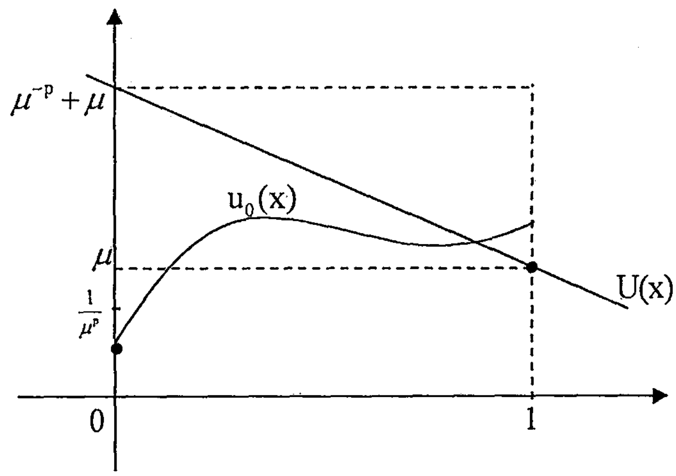
$$U''(x)=0$$

dır. $\mu<u_0(1)$ seçelim. O zaman ,

$$-\mu^{-p}<\min_{[0,1]} u_0' \qquad \text{ve} \qquad \mu^{-p}>u_0(0)$$

dır. buna göre U ve u_0 fonksiyonları göz önüne alınırsa $\mu>0$ sayısı için $U(x)$

azalan bir fonksiyondur. U ve u_0 fonksiyonlarının sağladığı özellikler göz önüne alınırsa $\mu > 0$ sayısı için bu fonksiyonlar,



Şekil 3.4.3.3

şeklindedir. O halde U ve u_0 sadece bir kez kesişir. Eğer ε nu yeterince küçük seçersek bazı $t_0 \in (0,T)$ için

$$u^{\varepsilon}(1,t_0) < \mu = u(1)$$

dır. Çünkü,

$$v(x,t) = \lim_{\varepsilon \to 0} u^{\varepsilon}(x,t)$$

$\varepsilon \to 0$ a giderken $u^{\varepsilon}(1,t)$ sıfıra yaklaşmaktadır. t de $u^{\varepsilon}(.,t) - U$ farkının sıfırlarının sayısı artmayan olduğu için, $t \geq t_0$ için fark sıfıra eşit olmalıdır. ε sayısı yardımıyla $t \geq t_0$ için $u^{\varepsilon}(1,t)$ değerini istediğimiz kadar küçültebileceğimizden dolayı,

$$u^{\varepsilon}(1,t) < \mu$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} u^{\varepsilon}(1,t) < \lim_{\varepsilon \to 0} \mu$$

$$v(1,t) < \mu$$

dir. μ keyfi değeri istenildiği kadar küçük seçilebildiğinden $t \geq T$ için

$$v(1,t) = 0$$

dır.

Bu sonuçlara dayanarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.4.3.1: (125) ile tanımlanmış v fonksiyonu

$$\begin{aligned}
&v_t = v_{xx} \quad 0 < x < 1 \quad , \; t > 0 \\
&v_x(0,t) = 0 \quad , \; t > 0 \\
&v_x(1,t) = -v^{-p}(1,t) \quad , \; 0 < t < T \\
&v(1,t) = 0 \quad , \; t \geq T \\
&v(x,0) = u_0(x) \quad , \; 0 \leq x \leq 1
\end{aligned}$$

sağlar. $t \leq T$ için (123) ün çözümü olan u ile çakışır.

3.4.4. Tam Patlama

$$\begin{aligned}
&u_t = u_{xx} \quad , \; 0 < x < 1 \; , \; 0 < t < T \\
&u_x(0,t) = 0 \quad , \; 0 < t < T \\
&u_x(1,t) = u^p(1,t) \; , \; 0 < t < T \\
&u(x,0) = u_0(x) > 0 \quad , \; 0 \leq x \leq 1
\end{aligned} \tag{126}$$

$p > 1$ olmak üzere yukarıdaki problemin patlama problemi olduğunu biliyoruz. Eğer $t = T$ anını u nun patlama (yani sonsuza ulaşma) anı olarak göz önüne alıp,

$$u_0'(0) = 0 \text{ ve } u_0'(1) = u_0^p(1)$$

olduğunu kabul edelim.

$$K = \max_{0 \leq x \leq 1} u_0(x)$$

ve her $n > K$ için f^n 'yi (121) deki gibi yani,

$$f^n(s) = \min\{s^p, n^p\} \quad , \quad s \geq 0 \quad , \quad n \in N$$

şeklinde tanımlayalım. Kabul edelim ki f^n Lipschitz şartına uygun bir fonksiyon ve $u_0'(1) = f^n(u_0(1))$ özelliğini sağlasın. O halde

$$f^n(u_0(1)) = \min\{(u_0(1))^p, n^p\}$$

$$= u_0{}^p(1)$$

$$= u_0'(1)$$

Eğer $n > K$ ise daha önce verilen (122) probleminin çözümü sınıra kadar yani $x = 0$ dan $x = 1$ e yada $t = T$ ye kadar sürekli bir fonksiyondur.

Lemma 3.4.4.1: (122) probleminin u^n şeklinde bir tek çözümü vardır. Öyle ki bu çözüm,

i) $u^n > 0$, $(x,t) \in [0,1]\times[0,\infty)$ için
ii) $u^n \le u^{n+1}$, $(x,t) \in [0,1]\times[0,\infty)$ için
iii) $u^n \le u$, $(x,t) \in [0,1]\times[0,T)$ için

şartlarını sağlar.

İspat: (i) $u^n(x,t) = K + n^p(t + \frac{x^2}{2})$ şeklinde bir fonksiyonu göz önüne alalım. Bu fonksiyon pozitif bir çözümdür. Gerçekten,

$$u_t^n - u_{xx}^n = 0$$

$$n^p - n^p = 0$$

$$u_x^n(x,t) = n^p x$$

$$u_x^n(0,t) = n^p.0 = 0$$

$$u_x^n(1,t) = f^n(u^n(1,t))$$

$$= \min\{(u^n(1,t))^p, n^p\}$$

$$= n^p$$

dir. Çünkü,

$$(u^n(1,t))^p = (K + n^p(t + \tfrac{x^2}{2}))^p > n^p$$

dir.Bu fonksiyon (122) nin tüm şartlarını sağlayan pozitif bir çözümdür. Dolayısıyla $u^n > 0$ dır.

(ii) $u^n \le u^{n+1}$ dir. Gerçekten,

$$u^n(x,t) = K + n^p(t + \frac{x^2}{2}) \tag{127}$$

$$u^{n+1}(x,t) = K + (n+1)^p(t + \frac{x^2}{2}) \tag{128}$$

$p > 1$ için (128) ifadesi her zaman için (127) ifadesinden büyüktür. Ancak $x = 0$ ve $t = 0$ için, (127) ve (128) ifadeleri birbirine eşit olacaktır. O halde,

$$u^n \le u^{n+1}$$

elde edilir.

(iii) $t < T$ için $u^n \le u$ olduğu açıktır.

$$v(x,t) = \lim_{n\to\infty} u^n(x,t) \quad , \quad 0 \le x \le 1 \quad , \quad t \ge 0 \tag{129}$$

şeklinde bir fonksiyon tanımlayalım. *Lemma 3.4.3.2* ye benzer şekilde $t \in (0,T)$ için $v_x(1,t) = v^p(1,t)$ olduğu gösterilebilir. O zaman $0 < t < T$ için çözümün tekliğinden $v(x,t) = u(x,t)$ olduğu açıktır.

Lemma 3.4.4.2: $t \ge T$ için $v(1,t) = \infty$ dir.

İspat: *Lemma 3.4.3.3* ün ispatına benzer şekilde hareket edilecektir.

$$U(x) = \mu + \mu^p(x-1) \quad , \quad \mu > 0$$

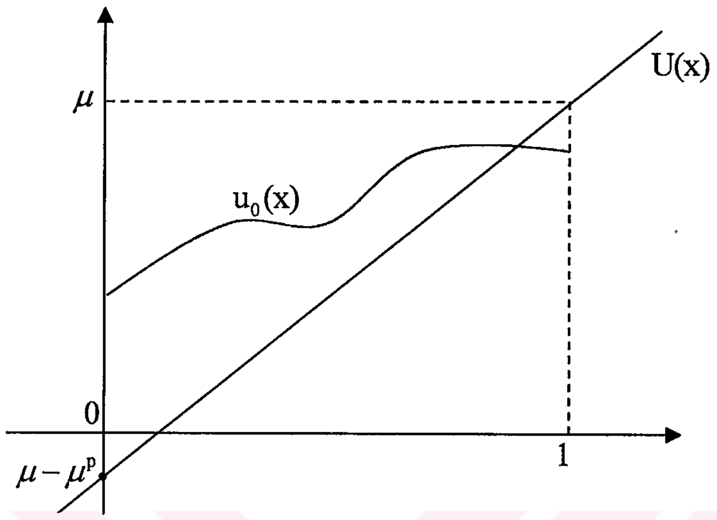
fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon

$$U'' = 0 \quad , \quad U'(1) = U^p(1) \quad , \quad U(1) = \mu$$

nin çözümüdür. $\mu > \max\{1, u_0(1)\}$ seçilsin ve $\mu^p > \max\limits_{[0,1]} u_0'$ olsun. U(x) fonksiyonu artan bir fonksiyondur. Çünkü

$$U'(x) = \mu^p > 0$$

dır.



Şekil 3.4.4.1

olur. Böylelikle U ve u_0 sadece bir kez kesişir. Eğer n yi yeterince büyük seçersek bazı $t_0 \in (0,T)$ için $u^n(1,t_0) > \mu = u(1)$ dir. Çünkü $n \to \infty$ iken $u^n(1,t) \to \infty$ olur. $u^n(.,t) - U$ nun sıfırlarının sayısı artmayan olduğu için $t \geq t_0$ iken $u^n(1,t) > \mu$ özelliği daima vardır. $n \to \infty$ a giderken $u^n(1,t)$ değeri istenildiği kadar büyük seçilebilir.

Sonuç olarak alınan her t değeri için $u^n(1,t) > \mu$ olabiliyorsa $t \geq T$ için

$$v(1,t) = \infty$$

dur.

$$\Gamma(x,t;y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4(t-\tau)}\right),$$

olsun. Bu ifade bir boyutlu ısı denklemi için temel çözümdür. $x \in (0,1)$ için (122) nin çözümü olan u^n fonksiyonunun

$$u^n(x,t)=\int_0^1 u^n(y,t_1)\Gamma(x,t;y,t_1)dy+\int_{t_1}^t f^n(u^n(1,\tau))\Gamma(x,t;1,\tau)d\tau$$
$$-\int_{t_1}^t u^n(1,\tau)\Gamma_y(x,t;1,\tau)d\tau+\int_{t_1}^t u^n(0,\tau)\Gamma_y(x,t;0,\tau)d\tau, \qquad t>t_1\geq 0$$

şeklinde ifade edilebileceğini hatırlayalım.

$$\Gamma_y(x,t;y,\tau)=\frac{x-y}{2(t-\tau)}\Gamma(x,t;y,\tau)$$

olduğundan $t>T$, $0<x<1$ ve $n\to\infty$ iken

$$u^n(x,t)\geq\int_T^t f^n(u^n(1,\tau))\Gamma(x,t;1,\tau)d\tau\to\infty$$

elde edilir. Sıçrama ilişkisine göre,

$$\frac{1}{2}u^n(0,t)=\int_0^1 u^n(y,t_1)\Gamma(0,t;y,t_1)dy+\int_{t_1}^t f^n(u^n(1,\tau))\Gamma(0,t;1,\tau)d\tau$$
$$-\int_{t_1}^t u^n(1,\tau)\Gamma_y(0,t;1,\tau)d\tau \quad , \quad t>t_1\geq 0$$

ve $t>T, n\to\infty$ iken

$$\frac{1}{2}u^n(0,t)\geq\int_T^t f^n(u^n(1,\tau))\Gamma(0,t;1,\tau)d\tau\to\infty$$

dir. Bu ise aşağıdaki teoremi ispatlar.

Teorem 3.4.4.1: (129) da tanımlanan v fonksiyonu $t\leq T$ için problem P nin çözümü u ile çakışır ve $(x,t)\in[0,1]\times(T,\infty)$ için $v(x,t)=\infty$ dur.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle bir boyutlu uzayda maksimum prensibi incelenmiştir. Parabolik tipten operatörler için maksimum prensibi ve lineer olmayan sınır koşulları ile verilen ısı iletimi problemi için patlama ve doyum problemleri ile tamamlanmış patlama ve tamamlanmamış doyum problemleri incelenmiş olup doktora öncesi temel bir kaynak olacak şekilde çalışma yapılmıştır.

KAYNAKLAR

1. M.H. Protter, and H.F. Weınberger, Maximum Principles in Differential Equations, New York by Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1984)

2. M.Fila, J-S Guo, Nonlinear Analysis **48** (2002)

3. G. Aliyev, Kısmi Türevli Denklemler. Milli Eğitim Basımevi, 95.34.Y.0002.1375, İstanbul,1995

4. M. Fila, H.A. Levine, Nonlinear Anal., **21**, 795(1993) .

5. H.A. Levine, Math.Sci. Appl., Nonlinear Mathematical Problems in Industry, **2**, 501(1993)

6. D. Phillips, Applicable Anal., **24**, 253(1987)

7. M. Fila, G.M. Lieberman, Diff. Int. Equations, **7**, 811(1994)

8. M.Fila, J. Filo, Polish Academy of Science, Institute of Mathematics, **33**, 67(1996)

9. M. Fila, Comment. Math. Univ. Carol., **30**, 479(1989)

10. J. Lopez Gomez, V. Marquez, N. Wolanski, J. Differ. Equations, **92**, 384(1991)

11. G.M. Lieberman, Second Order Parabolic Differential Equations, World Scientific, Singapore, 1996

12. S. Angenent, J. Reine Angew. Math., **390**, 79(1988)

13. A. Friedman, Partial Differential Equations of Parabolic Type, Prentice Hall, (1964)

14. C.Y. Chan, N. Özalp, Singular Reaction Diffusion Mixed Boundary Value Quenching Problems, Dynamical Systems and Appl. World Scientific Pub. Co.,Research Monogroph (1995)