

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI  
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DİFERENSİYELLENEBİLİR MANİFOLDLAR VE I. MERTEBEDEN  
DİFERENSİYELLENEBİLİR DENKLEMLER


NURDAN ÇİZMECİ

HAZİRAN 2005

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı

  
Prof. Dr. Yakup ARICA  
Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

  
Prof. Dr. Kerim KOCA  
Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

  
Doç. Dr. Halit GÜNDOĞAN  
Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Ali Paşa AYDIN

Doç. Dr. Halit GÜNDOĞAN

Yrd. Doç. Dr. Ali OLGUN


## ÖZET

### DİFERENSİYELLENEBİLİR MANİFOLDLAR VE I. MERTEBEDEN DİFERENSİYELLENEBİLİR DENKLEMLER

ÇİZMECİ, NURDAN

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Doç. Dr. Halit GÜNDOĞAN

Haziran 2005, 90 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş için ayrılmıştır. İkinci bölümde temel kavramlar, diferensiyellenebilir manifoldlar, manifold topolojisi ve manifold üzerinde türev konuları ele alınmıştır. Üçüncü bölümde vektör alanları kullanılarak diferensiyellenebilir manifold üzerinde I. mertebeden diferensiyel denklemler ele alınmış ve örneklerle incelenmiştir. Dördüncü bölüm tartışma ve sonuç için ayrılmıştır.

**Anahtar kelimeler:** Diferensiyellenebilir manifoldlar, vektör alanları ve I. mertebeden diferensiyel denklemler

## ABSTRACT

### DIFFERENTIABLE MANIFOLDS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FIRST ORDER

ÇİZMECİ, Nurdan

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Halit GÜNDOĞAN

June 2005, 90 pages

This thesis consists of four sections. The first section is reserved for introduction. In the second section, we give basic concepts, differentiable manifolds, the topology of a manifolds and differentiation on a manifold. In the third sections, the vector fields are used to differential equations of first order were investigated on the related examples. The forth sections is reserved for discussion and conclusion.

**Key words:** Differentiable manifolds, vector fields and differential equations of first order

## TEŞEKKÜR

Bu alıŐma ile ilgili her eŐit bilgi, teŐvik ve yardımlarını esirgemeyen hocam, Sayın Do. Dr. Halit GÜNDÖĐAN'a teşekkür ederim. Ayrıca çalıŐmam esnasında yakın ilgi ve yardımlarını gördüğüm ArŐ. Gör. AyŐe ÇİÇEK, ArŐ. Gör. Sıddıka ÖZKALDI ve ArŐ. Gör. Semih YILMAZ'a teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
İÇİNDEKİLER .....	iv
1. GİRİŞ .....	1
1.1. Kaynak Özetleri .....	1
1.2. Çalışmanın Amacı .....	1
2. MATERYAL ve YÖNTEM .....	2
2.1. Topolojik Temel Kavramlar .....	2
2.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar .....	8
2.3. Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar .....	23
2.4. Bir Manifold Üzerinde İndirgenmiş Topoloji .....	27
2.4.1. İndirgenmiş Topolojinin Bazı Özellikleri .....	31
2.5. Bir Manifold Üzerinde Türev .....	36
2.5.1. Tanjant Vektörler .....	37
2.5.2. Türetilmiş Lineer Fonksiyonlar .....	40
3. ARAŞTIRMA BULGULARI .....	43
3.1. Vektör Alanları .....	43
3.2. Diferensiyel Operatör .....	53
3.3. Tanjant Demeti .....	58
3.4. I. Mertebeden Diferensiyel Denklemler .....	66
3.5. Maximal İntegral Eğrileri .....	75
3.6. Bir Vektör Alanının Akışı .....	82

4. TARTIŞMA ve SONUÇ .....	89
KAYNAKLAR .....	90

# 1. GİRİŞ

## 1.1. Kaynak Özetleri

Temel kavramlar için Differentiable Manifolds (R. S. Clark and F. Brickell), Lineer Cebir (H. H. Hacısalihoğlu) ve topolojik kavramlar için Topoloji (C. Yıldız) adlı kitaplardan faydalanılmıştır. R. S. Clark and F. Brickell, Differentiable Manifolds adlı kitabında diferensiyellenebilir manifoldları, manifold üzerindeki topolojik yapıyı ele almıştır. Ayrıca manifold üzerindeki türevi kullanarak vektör alanlarını ve I. mertebeden diferensiyel denklemleri incelemiştir. Örnekler için Diferensiyel Geometri I. Cilt (H. H. Hacısalihoğlu) adlı kitaptan faydalanılmıştır.

## 1.2. Çalışmanın Amacı

Diferensiyellenebilir manifoldlar, manifoldun  $C^\infty$  yapısından indirgediği topolojinin bazı temel özellikleri ve manifold üzerinde I. mertebeden diferensiyel denklemlerin ele alınması ve bunların örneklendirilerek incelenmesi amaçlanmıştır.



## 2. MATERYAL ve YÖNTEM

### 2.1. Topolojik Temel Kavramlar

**Tanım 2.1.1: (Global Fonksiyon)**  $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$  olmak üzere  $f : A \rightarrow B$  bir fonksiyon olsun.  $f$ 'in tanım kümesi  $Domf \subset A$  ve değer cümlesi  $rangef \subset B$  ile gösterilecektir. Eğer  $Domf = A$  ise  $f$ 'ye global fonksiyon denir [1].

$Domf = U$  olmak üzere  $U \cap V \neq \emptyset$  olacak şekilde bir  $V$  cümlesi varsa

$f|_V : U \cap V \rightarrow B$   
 $x \rightarrow f|_V(x) = f(x)$  fonksiyonuna  $f$ 'in  $V$  cümlesine kısıtlanmış denir.

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe fonksiyon denildiğinde global olmayan fonksiyon anlaşılacaktır.

### **Tanım 2.1.2: (İzdüşüm Fonksiyonu)**

$A_1 \neq \emptyset, A_2 \neq \emptyset$  iki cümle olsun.

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_i \in A_i, i = 1, 2\}$$

cümlesine  $A_1$  ve  $A_2$  cümlelerinin kartezyen çarpımı denir.

$$P_i : A_1 \times A_2 \rightarrow A_i$$
$$a = (a_1, a_2) \rightarrow P_i(a) = a_i, i = 1, 2$$

fonksiyonuna  $i$ . izdüşüm fonksiyonu denir [1].

**Tanım 2.1.3: (Özdeşlik Dönüşümü)**  $A \neq \emptyset$  bir cümle olmak üzere

$$\begin{aligned} id : A &\rightarrow A \\ x &\rightarrow id(x) = x \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme  $A$  cümlesi üzerinde özdeşlik dönüşümü denir.

**Tanım 2.1.4: (Topoloji, Topolojik Uzak)**  $S \neq \emptyset$  cümlesinin alt cümlelerinin bir ailesi  $\tau$  olsun. Eğer,

$$i) S \in \tau, \emptyset \in \tau$$

$$ii) \bigcup_i A_i \in \tau, \forall A_i \in \tau$$

$$iii) \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau, \forall A_i \in \tau$$

aksiyomları sağlanıyorsa  $\tau$  ailesine  $S$  üzerinde bir topoloji  $(S, \tau)$  ikilisine de topolojik uzak denir.  $\tau$ 'nin elemanlarına  $S$ 'nin açık alt cümleleri denir [4].

**Tanım 2.1.5: (Baz, Temel Açık Cümle, Açık Cümle)**  $S \neq \emptyset$  bir cümle ve  $\mathcal{B}$ ,  $S$ 'nin alt cümlelerinin bir ailesi olsun. Eğer,

$$i) \bigcup_i B_i = S, \forall B_i \in \mathcal{B}$$

$$ii) \forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \cap B_2 \neq \emptyset \text{ iken } B_1 \cap B_2 = \bigcup_i B_i$$

özellikleri sağlanırsa  $\mathcal{B}$ 'ye  $S$  üzerindeki bir topoloji için bir baz,  $\mathcal{B}$ 'nin elemanlarına da temel açık cümleler denir [4].

$\mathcal{B}$  bazındaki temel açık cümlelerin birleşimi olarak yazılabilen  $S$ 'in boş cümleden farklı elemanlarına  $S$ 'de  $\mathcal{B}$  bazından elde edilen topolojiye göre açık cümleler denir [4].

**Tanım 2.1.6: (Komşuluk, Komşuluklar Bazı)**  $(S, \tau)$ , bir topolojik uzay ve  $s \in S$  olsun.  $s \in A$  ve  $A \in \tau$  olacak şekilde bir  $A$  cümlesi varsa  $A$ 'ya  $s$ 'in bir komşuluğu denir [1].

Buna göre bu çalışmamızda komşuluğun bir açık cümle olduğuna dikkat edilmelidir. Ayrıca  $s$ 'nin komşuluklar ailesi  $N(s)$  ile gösterilirse,

$$N(s) = \{A \mid s \in A \in \tau\}$$

dir.

$\mathcal{B}(s) \subset N(s)$  ailesi verilsin. Eğer  $\forall V \in N(s)$  için  $U \subset V$  olacak şekilde  $\exists U \in \mathcal{B}(s)$  varsa bu  $\mathcal{B}(s)$  ailesine  $s \in S$  noktasında bir baz veya  $s \in S$  noktasında komşuluklar tabanı denir [4].

**Tanım 2.1.7: (Süreklilik Fonksiyon)**  $S$  ve  $T$  herhangi iki topolojik uzay ve  $f : S \rightarrow T$  bir fonksiyon olsun. Eğer  $\forall V \in N(f(s))$  için  $f(U) \subset V$  olacak şekilde  $\exists U \in N(s)$  varsa  $f$ 'e  $s \in S$  noktasında süreklidir denir [4].

**Tanım 2.1.8: (Açık Fonksiyon)**  $S$  ve  $T$  herhangi iki topolojik uzay ve  $f : S \rightarrow T$  bir fonksiyon olsun.  $\forall U \subset \text{Dom}f$  açık iken  $f(U) \subset T$  açık ise  $f$ 'ye açık fonksiyon denir [4].

**Tanım 2.1.9: (Homeomorfizm)**  $S$  ve  $T$  herhangi iki topolojik uzay ve  $f : S \rightarrow T$  bir fonksiyon olsun.  $f$ ; 1:1, sürekli ve açık ise  $f$  ye bir homeomorfizm denir [4].

**Tanım 2.1.10: (Kapalı Cümle)**  $(S, \tau)$  topolojik uzay olsun.  $S - U \in \tau$  olacak şekilde bir  $U \subset S$  cümlesine  $U$  kapalıdır denir. Kapalı cümlelerin ailesi  $\tau^c$  ile gösterilir [4].

**Tanım 2.1.11: (Kapanış, İç, Sınır)**  $(S, \tau)$  topolojik uzay ve  $A \subset S$  olsun.  $A$ 'nın içi  $\overset{\circ}{A}$  ile gösterilir ve

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup \{U \mid U \subset A, U \in \tau\}$$

olarak tanımlanır.  $A$ 'nın kapanışı  $\bar{A}$  ile gösterilir ve

$$\bar{A} = \bigcap \{U \mid A \subset U, U \in \tau^c\}$$

olarak tanımlanır.  $A$ 'nın sınırı  $\partial A$  ile gösterilir ve

$$\partial A = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$$

olarak tanımlanır [4].

**Tanım 2.1.12: (Alt Cümle Topolojisi)**  $(S, \tau)$  topolojik uzay ve  $A \subset S$  olsun.

$\tau_1 = \{A \cap U \mid U \in \tau\} \subset P(A)$  olmak üzere  $\tau_1$ ,  $A$  üzerinde bir topolojidir.  $(A, \tau_1)$  topolojik uzayı  $(S, \tau)$  topolojik uzayının alt uzayıdır [4].

**Tanım 2.1.13: (Ayrırma Aksiyomları)**

$(S, \tau)$ , bir topolojik uzay olsun.

**$T_1$  Ayırma Aksiyomu:**

$p \neq q$  olacak şekildeki  $\forall p, q \in S$  için  $\exists U \in N(p), \exists V \in N(q) \ni p \notin V, q \notin U$  şartı sağlanıyorsa  $(S, \tau)$  topolojik uzayı  $T_1$  ayırma aksiyomunu sağlar denir [4].

**$T_2$  Ayırma Aksiyomu:**

$p \neq q$  olacak şekildeki  $\forall p, q \in S$  için  $\exists U \in N(p), \exists V \in N(q) \ni U \cap V = \emptyset$  şartı sağlanıyorsa  $(S, \tau)$  topolojik uzayı  $T_2$  ayırma aksiyomunu sağlar denir [4].

$T_2$  'yi sağlayan bir uzaya **Hausdorff uzayı** denir [4].

**Tanım 2.1.14: (Açık Örtü, Alt Örtü)**  $(S, \tau)$ , bir topolojik uzay ve  $\varphi \subset \tau$  olsun.

$\bigcup_{U \in \varphi} U = S$  ise  $\varphi$ 'ye  $S$ 'in bir açık örtüsü denir.  $S$ 'nin  $\varphi_1 \subset \varphi$  olacak şekilde  $\varphi_1$  açık örtüsü varsa  $\varphi_1$ 'e  $\varphi$ 'nin alt örtüsü denir [4].

**Tanım 2.1.15: (Kompakt Uzay)**  $(S, \tau)$ , bir topolojik uzay olsun.  $S$ 'in her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa  $(S, \tau)$ 'ya kompakt topolojik uzay denir [4].

**Tanım 2.1.16: (Lokal Kompakt Uzay)**  $(S, \tau)$ , bir topolojik uzay olsun.  $S$ 'in her noktasının kapanışı kompakt olan bir komşuluğu varsa  $S$ 'ye lokal kompakt denir [4].

**Tanım 2.1.17: (Bağlantılı(İrtibatlı) Uzay)**  $(S, \tau)$ , bir topolojik uzay olsun.  $S$  ayrık açıkların birleşimi şeklinde yazılamıyorsa  $S$ 'ye bağlantılıdır veya irtibatlıdır denir [4].

**Tanım 2.1.18: (Sayılabilirlik Aksiyomları)**  $(S, \tau)$ , bir topolojik uzay olsun.

$S$ 'nin her noktasının sayılabilir komşulukları varsa  $(S, \tau)$  topolojik uzayına sayılabilirliğin birinci aksiyomunu sağlar denir.

$S$ , sayılabilir bir baza sahipse  $(S, \tau)$  topolojik uzayına sayılabilirliğin ikinci aksiyomunu sağlar denir [4].

**Tanım 2.1.19: ( $C^\infty$  Fonksiyon)** Her mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyona  $C^\infty$  fonksiyon denir [1].

**Tanım 2.1.20:**  $n \times m$ -tipinden reel matrislerin cümlesi  $M(n \times m, \mathbb{R})$  ile gösterilsin.  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  bir  $C^\infty$  fonksiyon olmak üzere

$$J_f : \mathbb{R}^m \rightarrow M(n \times m, \mathbb{R})$$
$$z \rightarrow J_f(z) = J(f, z) = \left[ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) \right]_{n \times m}''$$

ile tanımlanan  $J(f, z)$  matrisine  $z \in \mathbb{R}^m$  noktasında  $f$  fonksiyonun Jakobiyen matrisi denir [1].

**Tanım 2.1.21:**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonksiyonu 1:1,  $f$  ve  $f^{-1}, C^\infty$  ise  $f$ 'ye diffeomorfizm denir [1].

**Teorem 2.1.1 (İnvers Fonksiyon Teoremi):**

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  bir diferensiyellenebilir fonksiyon ve bir  $z \in \text{Dom}f$  için

$$\det(J(f, z)) \neq 0$$

ise  $\exists V \in N(z)$  vardır öyle ki  $f|_V$  bir diffeomorfizmdir [1].

**Tanım 2.1.22:**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  olsun. Eğer  $\forall z \in \text{Dom}f$  için  $\exists V \in N(z) \ni f|_V$

diffeomorfizm ise  $f$ 'ye lokal diffeomorfizm denir [1].

**Teorem 2.1.2:**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonksiyonu lokal diffeomorfizm ve 1:1 ise  $f$  bir diffeomorfizmdir [1].

## 2.2. Diferensiyellenebilir Manifoldlar

**Tanım 2.2.1:**

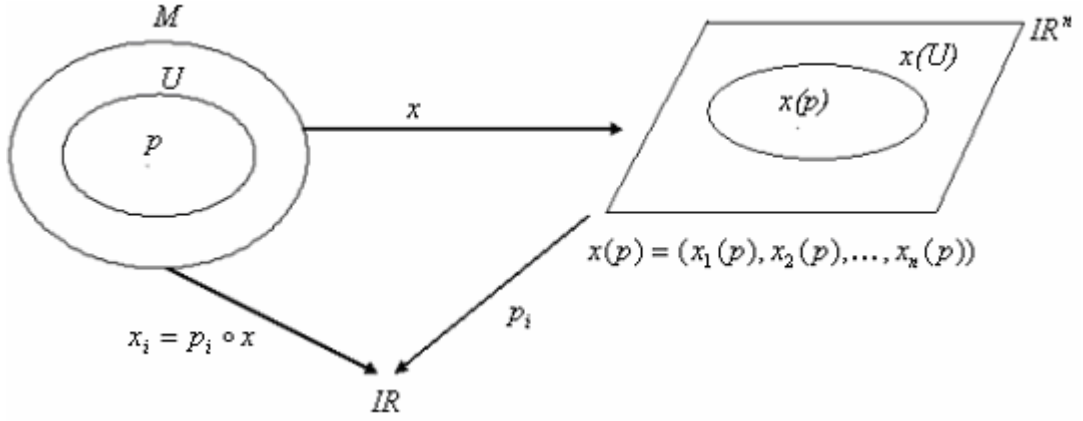
$M \neq \emptyset$  bir cümle olsun.  $x : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  bir fonksiyon ve  $\text{Dom}x = U \subset M$  olmak üzere

H1)  $x, 1:1$

H2)  $\text{rang}x \subset \mathbb{R}^n$  açık

ise  $x$ 'e  $M$ 'de  $n$ -boyutlu bir harita denir ve  $(U, x)$  ile gösterilir [1].

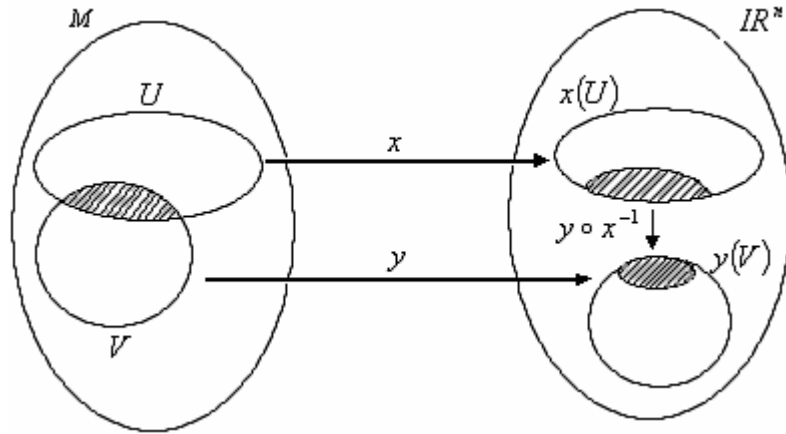
**Tanım 2.2.2:**  $M$  bir cümle ve  $(U, x)$ ,  $M$ 'nin  $n$ -boyutlu haritası olsun.  $p_i, \mathbb{R}^n$ 'nin  $i$ . koordinat fonksiyonu olmak üzere  $x_i = p_i \circ x$  fonksiyonuna  $M$ 'nin  $(U, x)$  haritasına göre  $i$ . koordinat fonksiyonu denir ( $1 \leq i \leq n$ ).



Şekil 2.2.1

**Tanım 2.2.3:**

$M \neq \emptyset$  bir cümle,  $(U, x)$  ve  $(V, y)$   $M$  de  $U \cap V \neq \emptyset$  olacak şekilde iki harita olsun.



Şekil 2.2.2

Eğer  $y \circ x^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  fonksiyonu bir diffeomorfizm ise  $M$  de  $(U, x)$  ve  $(V, y)$  haritaları uyumludur veya bağdaşabildir denir [1].



**Tanım 2.2.4:**  $M \neq \emptyset$  bir cümle ve  $A = \{(U_i, x_i) \mid i \in I\}$ ,  $M$ 'nin haritalarının bir koleksiyonu olsun. Eğer

$$A1) \bigcup_{i \in I} U_i = M$$

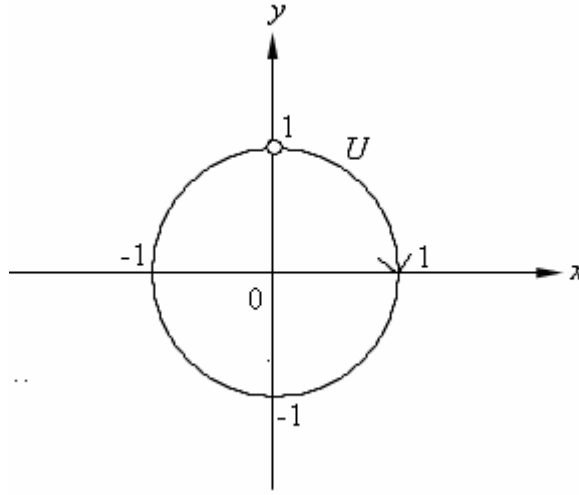
$$A2) \forall i, j \in I \text{ için } U_i \cap U_j \neq \emptyset \text{ olacak şekildeki } \forall (U_i, x_i), (U_j, x_j) \in A$$

haritaları uyumlu

ise  $A$ 'ya  $M$ 'nin bir  $C^\infty$  atlası denir [1].

**Örnek 2.2.1:**  $S^1 = \{(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

$$U = \{(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \mid 0 < s < 1\} \subset S^1$$



**Şekil 2.2.3**

$$x : U \rightarrow \mathbb{R}$$

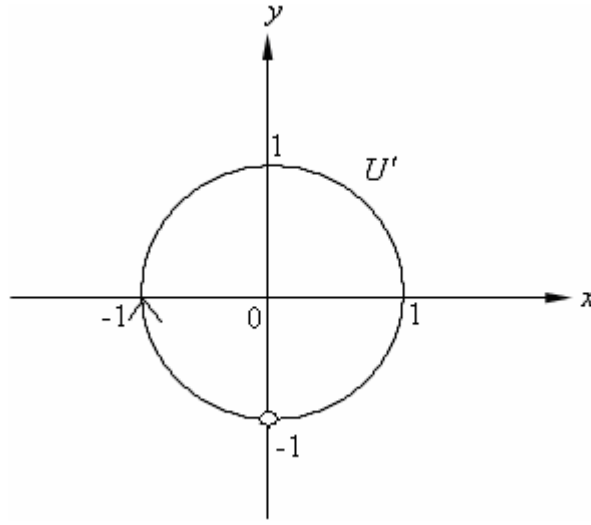
$$p = (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \rightarrow x(p) = s$$

H1)  $x, 1:1$  dir.

H2)  $x(U) = (0,1) \subset \mathbb{R}$ , açık

olduğundan  $(U, x)$ ,  $S^1$  için 1-boyutlu bir haritadır.

$$U' = \left\{ (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \mid -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2} \right\} \subset S^1$$



Şekil 2.2.4

$$x' : U' \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q = (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \rightarrow y(q) = s$$

H1)  $x', 1:1$

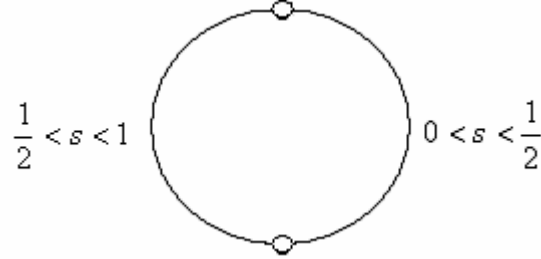
H2)  $x'(U') = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \subset \mathbb{R}$  açık

olduğundan  $(U', x')$ ,  $S^1$  için 1-boyutlu bir haritadır.

$A = \{(U, x), (U', x')\}$  cümlesinin  $S^1$ 'in bir  $C^\infty$  atlası olduğunu gösterelim.

$$A1) U \cup U' = S^1$$

$$A2) U \cap U' \neq \emptyset$$



Şekil 2.2.5

$$0 < s < \frac{1}{2} \text{ için}$$

$$(x' \circ x^{-1})\left(0, \frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow (x' \circ x^{-1})(s) = s$$

olduğundan  $x' \circ x^{-1}$  fonksiyonu özdeşlik fonksiyonu olup diffeomorfizmdir.

$$\frac{1}{2} < s < 1 \text{ için}$$

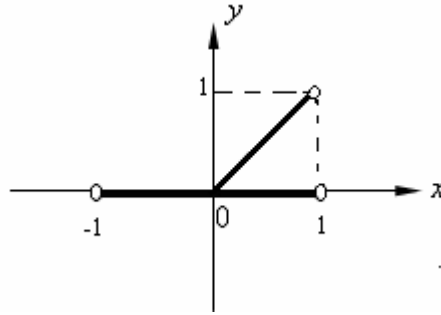
$$(x' \circ x^{-1})\left(\frac{1}{2}, 1\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \Rightarrow (x' \circ x^{-1})(s) = s - 1$$

olduğundan  $x' \circ x^{-1}$  polinom fonksiyonu olup diffeomorfizmdir.

O halde  $(U, x)$  ile  $(U', x')$  uyumludur. (A1) ve (A2) aksiyomları gereğince

$A = \{(U, x), (U', x')\}$   $S^1$ 'in bir  $C^\infty$  atlasıdır.

**Örnek 2.2.2:**  $M = \{(s,0) \mid -1 < s < 1\} \cup \{(s,s) \mid 0 < s < 1\}$  cümlesi üzerinde



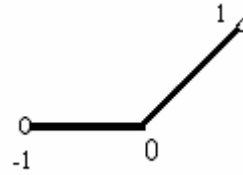
**Şekil 2.2.6**

$$U = \{(s,0) \mid -1 < s < 1\}$$



**Şekil 2.2.7**

$$V = \{(s,0) \mid -1 < s \leq 0\} \cup \{(s,s) \mid 0 < s < 1\}$$



**Şekil 2.2.8**

$$x: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(s,0) \rightarrow s$$

H1)  $x, 1:1$

H2)  $x(U) = (-1,1) \subset \mathbb{R}$  açık

olduğundan  $(U, x)$   $M$  için 1-boyutlu bir haritadır.

$$\begin{aligned} y : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, 0) &\rightarrow s \\ (s, s) &\rightarrow s \end{aligned}$$

H1)  $y, 1:1$

H2)  $y(V) = (-1,1) \subset \mathbb{R}$  açık

olduğundan  $(V, y)$   $M$  için 1-boyutlu bir haritadır.

$\{(U, x), (V, y)\}$   $M$  için bir  $C^\infty$  atlas değildir. Çünkü

$$A1) U \cup V = M$$

$$A2) U \cap V = \{(s, 0) \mid -1 < s \leq 0\}$$

olup  $x(U \cap V) = (-1, 0] \subset \mathbb{R}$  dır.  $Dom(y \circ x^{-1})$  açık olmadığından  $y \circ x^{-1}$  sürekli değildir. O halde diferensiyellenebilirliğinden bahsedilemez. Dolayısıyla  $y \circ x^{-1}$  diffeomorfizm değildir.  $(U, x)$  ve  $(V, y)$  haritaları uyumlu değildir. (A2) aksiyomu sağlanmadığından  $\{(U, x), (V, y)\}$   $M$  için bir  $C^\infty$  atlas değildir.

**Tanım 2.2.5:** Bir  $M$  cümlesi üzerinde birden fazla  $C^\infty$  atlas tanımlanabilir.  $A_1$  ve  $A_2$   $M$  üzerinde  $\mathbb{R}^n$  içine iki atlas olmak üzere  $A_1 \cup A_2$ ,  $M$  üzerinde bir  $C^\infty$  atlas ise  $A_1$  ve  $A_2$  atlaslarına denk atlaslar denir [1].

**Örnek 2.2.3:**  $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z|=1\}$

$$U = \{(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \mid 0 < s < 1\}$$

$$x: U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p = (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \rightarrow x(p) = s$$

$(U, x)$ ,  $S^1$  için bir haritadır.

$$U' = \left\{ (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \mid -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2} \right\}$$

$$y: U' \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p = (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \rightarrow y(p) = s$$

$(U', y)$ ,  $S^1$  için bir haritadır.

$A_1 = \{(U, x), (U', y)\}$ ,  $S^1$  için  $C^\infty$  atlasıdır.

$S^1$  üzerinde bir  $A_2$  atlası tanımlayıp  $A_1$  ve  $A_2$  atlaslarının

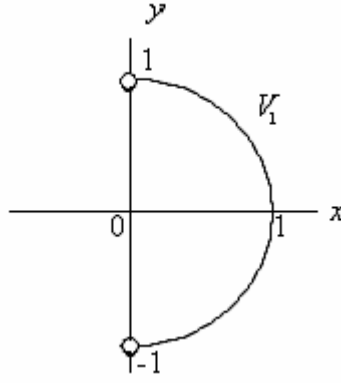
denk olduğunu gösterelim. Bunun için

$$j: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(z_1, z_2) \rightarrow j(z_1, z_2) = (z_1, z_2)$$

doğal 1:1 dönüşümünü ele alalım.

$$V_1 = \{(z_1, z_2) \in S^1 \mid z_1 > 0\} \subset S^1$$



**Şekil 2.2.9**

$$x_1 = P_2 \circ j|_{V_1}: V_1 \rightarrow (-1,1)$$

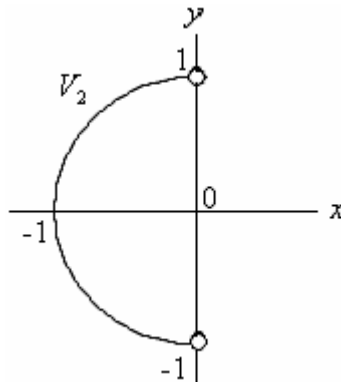
$$(z_1, z_2) \rightarrow z_2$$

H1)  $x_1, 1:1$

H2)  $x_1(V_1) = (-1,1) \subset \mathbb{R}$  açık

olduğundan  $(V_1, x_1)$ ,  $S^1$  için 1-boyutlu bir haritadır.

$$V_2 = \{(z_1, z_2) \in S^1 \mid z_1 < 0\} \subset S^1$$



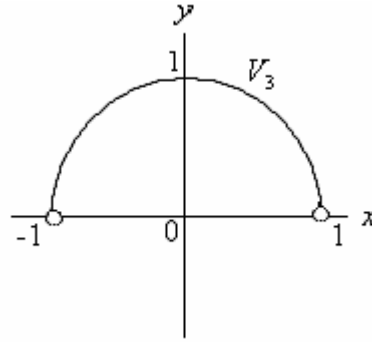
**Şekil 2.2.10**

$$x_2 = P_2 \circ j|_{V_2}: V_2 \rightarrow (-1,1)$$

$$(z_1, z_2) \rightarrow z_2$$

$(V_2, x_2)$ ,  $S^1$  için 1-boyutlu bir haritadır.

$$V_3 = \{(z_1, z_2) \in S^1 \mid z_2 > 0\} \subset S^1$$



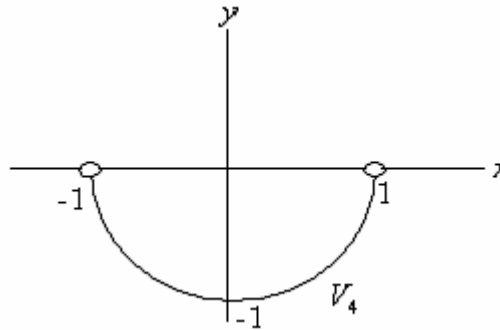
**Şekil 2.2.11**

$$x_3 = P_1 \circ j|_{V_3}: V_3 \rightarrow (-1,1)$$

$$(z_1, z_2) \rightarrow z_1$$

$(V_3, x_3)$ ,  $S^1$  için 1-boyutlu bir haritadır.

$$V_4 = \{(z_1, z_2) \in S^1 \mid z_2 < 0\} \subset S^1$$



**Şekil 2.2.12**



$$x_4 = P_1 \circ j|_{V_4} : V_4 \rightarrow (-1,1)$$

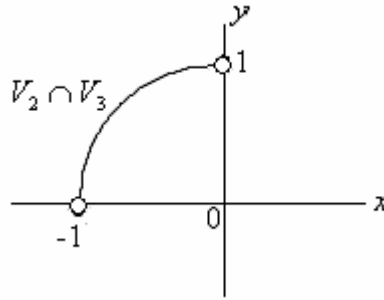
$$(z_1, z_2) \rightarrow z_1$$

$(V_4, x_4)$ ,  $S^1$  için 1-boyutlu bir haritadır.

$A_2 = \{(V_1, x_1), (V_2, x_2), (V_3, x_3), (V_4, x_4)\}$ ,  $S^1$  için bir  $C^\infty$  atlasıdır. Gerçekten,

$$A1) \bigcup_{i=1}^4 V_i = S^1$$

$$A2) V_2 \cap V_3 \neq \emptyset$$



**Şekil 2.2.13**

$$x_2 \circ x_3^{-1} : x_3(V_2 \cap V_3) \rightarrow x_2(V_2 \cap V_3)$$

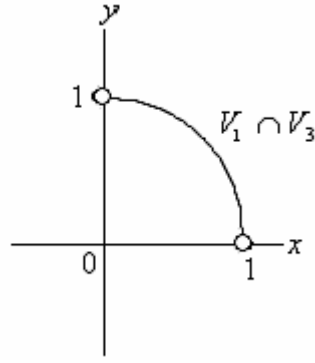
$$(-1,0) \rightarrow (0,1)$$

$$s \rightarrow x_2(x_3^{-1}(s)) = x_2((s, \sqrt{1-s^2}))$$

$$= \sqrt{1-s^2}$$

$x_2 \circ x_3^{-1}$  fonksiyonu polinom fonksiyonu olduğundan diffeomorfizmdir.

$$V_1 \cap V_3 \neq \emptyset$$



Şekil 2.2.14

$$\begin{aligned}
 x_1 \circ x_3^{-1} : x_3(V_1 \cap V_3) &\rightarrow x_1(V_1 \cap V_3) \\
 (0,1) &\rightarrow (0,1) \\
 s &\rightarrow x_1(x_3^{-1}(s)) = x_1((s, \sqrt{1-s^2})) \\
 &= \sqrt{1-s^2}
 \end{aligned}$$

$x_1 \circ x_3^{-1}$  fonksiyonu polinom fonksiyonu olduğundan diffeomorfizmdir.

Benzer şekilde  $x_2 \circ x_4^{-1}$ ,  $x_1 \circ x_4^{-1}$  dönüşümleri de diffeomorfizmdir.  $A_2$  de bulunan haritalar uyumludur. O halde  $A_2, S^1$  için bir  $C^\infty$  atlasıdır. Şimdi  $A_1$  ve  $A_2$  nin denk atlaslar olduğunu göstereceğiz. Yani;

$$A_1 \cup A_2 = \{ (U, x), (U', x), (V_1, x_1), (V_2, x_2), (V_3, x_3), (V_4, x_4) \}$$

cümlesinin  $S^1$  için bir  $C^\infty$  atlasıdır.

$$A1) U \cup U' \cup \left( \bigcup_{i=1}^4 V_i \right) = S^1$$

$$A2) x \circ x_1^{-1}, x \circ x_2^{-1}, x \circ x_3^{-1}, x \circ x_4^{-1}, y \circ x_1^{-1}, y \circ x_2^{-1}, y \circ x_3^{-1}, y \circ x_4^{-1}$$

diffeomorfizmdir.

$$x_1 \circ x^{-1} : x(U \cap V_1) \rightarrow x_1(U \cap V_1)$$

$$(0, \frac{1}{2}) \rightarrow (-1, 1)$$

$$s \rightarrow x_1(x^{-1}(s)) = x_1(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) = \cos 2\pi s$$

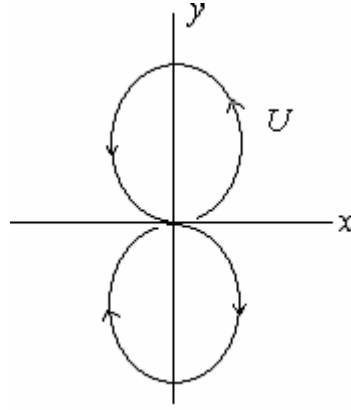
$x_1 \circ x^{-1}$  diffeomorfizmdir. Benzer şekilde diğerlerinin de diffeomorfizm olduğu gösterilebilir. O halde  $A_1$  ile  $A_2$  birbirine denktir. Bu denklik  $A_1 \sim A_2$  ile gösterilir.

**Örnek 2.2.4:**  $E = \{(\sin 2s, \sin s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

$$U = \{(\sin 2s, \sin s) \mid 0 < s < 2\pi\}$$

$$x : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\sin 2s, \sin s) \rightarrow s$$



**Şekil 2.2.15**

H1)  $x|_U : U \rightarrow \mathbb{R}$

H2)  $x(U) = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ , açık

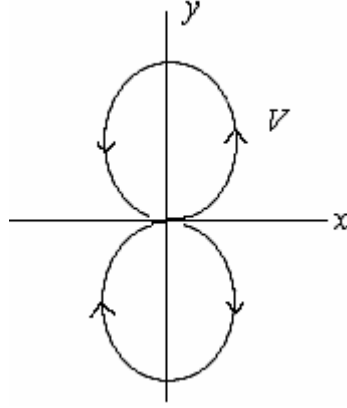
$(U, x)$  ,  $E$ 'nin 1-boyutlu haritasıdır.

$A_1 = \{(U, x)\}$  ,  $E$ 'nin bir  $C^\infty$  atlasıdır.

$$V = \{(\sin 2s, \sin s) \mid -\pi < s < \pi\}$$

$$y : V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\sin 2s, \sin s) \rightarrow s$$



**Şekil 2.2.16**

H1)  $y$ , 1:1

H2)  $y(V) = (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}$ , açık

$(V, y)$  ,  $E$ 'nin 1-boyutlu bir haritasıdır.

$A_2 = \{(V, y)\}$  ,  $E$ 'nin bir  $C^\infty$  atlasıdır.

$A_1 \cup A_2 = \{(U, x), (V, y)\}$  cümlesinin  $E$  için bir atlas olup olmadığını

inceleyelim.

$$A1) U \cup V = E$$

$$A2) U \cap V \neq \emptyset$$

$$\begin{aligned} y \circ x^{-1} : x(U \cap V) &\rightarrow y(U \cap V) \\ (0, 2\pi) &\rightarrow (-\pi, \pi) \\ s &\rightarrow (y \circ x^{-1})(s) = y(x^{-1}(s)) = y(\sin 2s, \sin s) = s \notin (-\pi, \pi) \end{aligned}$$

olduğundan fonksiyonu parçalı tanımlayacağız.

$$(y \circ x^{-1})(s) = \begin{cases} s & , \quad 0 < s < \pi \\ s - \pi & , \quad s = \pi \\ s - 2\pi & , \quad \pi < s < 2\pi \end{cases}$$

$$i) y \circ x^{-1}, 1:1$$

$$ii) \lim_{s \rightarrow \pi^+} (y \circ x^{-1})(s) = -\pi$$

$$\lim_{s \rightarrow \pi^-} (y \circ x^{-1})(s) = \pi$$

$$y \circ x^{-1}(\pi) = 0$$

olduğundan  $s = \pi$  de sürekli değildir.  $y \circ x^{-1}$ ,  $s \in (0, 2\pi)$  için diferensiyellenebilir değildir. O halde diffeomorfizm değildir. Dolayısıyla  $(U, x), (V, y)$  haritaları uyumlu değildir. Öyleyse  $A_1 \cup A_2$ ,  $E^n$ 'nin  $C^\infty$  atlası değildir.

**Tanım 2.2.6:**  $M$  cümlesinin bir  $A$ ,  $C^\infty$  atlası  $M$ 'nin hiçbir atlası tarafından kapsanmıyorsa  $A$  atlasına  $M$ 'nin bir tam atlası denir [1].

**Teorem 2.2.1:**  $M$ 'nin  $\mathbb{R}^n$  içine herbir  $C^\infty$  atlası bir tek tam atlas içindedir [1].

**Tanım 2.2.7:** Bir  $M$  cümlesinin  $\mathbb{R}^n$  içine bir  $C^\infty$  tam atlasına  $M$ 'de

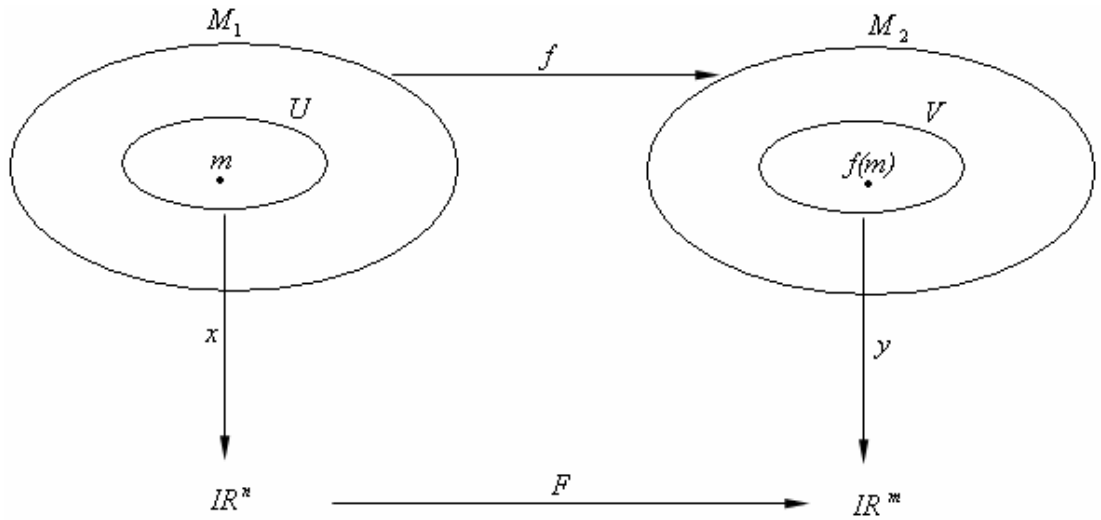
$n$ -boyutlu bir  $C^\infty$  yapı denir [1].

**Tanım 2.2.8:** Verilen bir  $n$ -boyutlu bir  $C^\infty$  yapı ile birlikte  $M$  cümlesine bir  $n$ -boyutlu diferensiyellenebilir manifold denir [1].

Bundan sonra diferensiyellenebilir kavramı kısaca dif.bilir olarak ifade edilecektir.

### 2.3. Diferensiyellenebilir Fonksiyonlar

$M_1$ ,  $n$ -boyutlu  $M_2$ ,  $m$ -boyutlu dif.bilir manifoldlar olsun. Bir  $f: M_1 \rightarrow M_2$  fonksiyonunun dif.bilirliğini tanımlayacağız.  $(U, x)$  ve  $(V, y)$  sırasıyla  $M_1$  ve  $M_2$ 'de birer harita olsun.



Şekil 2.3.1

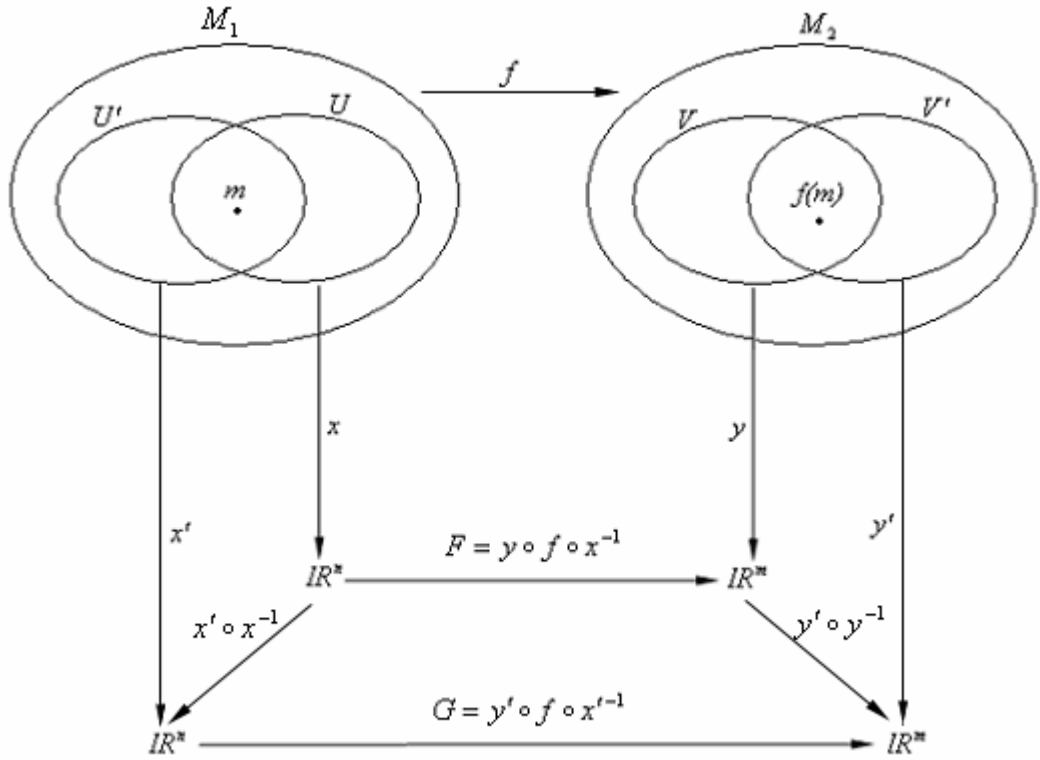
$F = y \circ f \circ x^{-1}$  fonksiyonuna  $f$  fonksiyonunun bir koordinat temsilcisi denir.

Eğer  $F$ ,  $x(m) \in \mathbb{R}^n$  de dif.bilir ise  $f$ 'ye  $m \in U \subset M_1$ 'de dif.bilirdir denir. [1]

**Teorem 2.3.1:**  $M_1$  ve  $M_2$  sırasıyla  $n$  ve  $m$ -boyutlu dif.bilir manifoldlar,  $f : M_1 \rightarrow M_2$  bir fonksiyon ve  $m \in \text{Dom}f$  olsun.  $f$ 'nin  $m$ 'deki dif.bilirliği seçilen haritalardan bağımsızdır.

**İspat:**  $(U, x), (U', x'), M_1$ 'de  $m$ 'yi kapsayan haritalar,

$(V, y), (V', y'), M_2$ 'de  $f(m)$ 'yi kapsayan haritalar olsun.



Şekil 2.3.2

$$F = y \circ f \circ x^{-1}$$

$F$ ,  $x(m)$ 'de dif.bilir ise  $G$ 'de  $x'(m)$ 'de dif.bilirdir.

$$G = (y' \circ y^{-1}) \circ F \circ (x' \circ x^{-1})$$

$(U, x)$  ve  $(U', x')$ ,  $M_1$ 'de haritalar ve  $U \cap U' \neq \emptyset$  olduğunda uyumludurlar.

O halde  $x' \circ x^{-1}$  diffeomorfizmdir. Benzer şekilde  $y' \circ y^{-1}$  de diffeomorfizmdir.

$x' \circ x^{-1}$ ,  $(y' \circ y^{-1})$  ve  $F$ , dif.bilir olduğundan

$$G = (y' \circ y^{-1}) \circ F \circ (x' \circ x^{-1})$$

de dif.bilirdir.

**Tanım 2.3.1:**  $M_1, M_2$  dif.bilir manifoldlar ve  $f : M_1 \rightarrow M_2$  bir dif.bilir fonksiyon olsun. Eğer  $f$ , 1:1 ve  $f^{-1}$  de dif.bilir ise  $f$ 'ye bir diffeomorfizm adı verilir.

Eğer  $f$  bir global diffeomorfizm (Yani  $Domf = M_1, rangef = M_2$ ) ise  $M_1$  ve

$M_2$ 'ye diffeomorfitirler denir. [1]

**Örnek 2.3.1:**  $M_1 = M_2 = IR$  olsun.

$$\begin{aligned} x : M_1 &\rightarrow IR \\ s &\rightarrow s \end{aligned}$$

$A_1 = \{(IR, id)\}$  bir atlasır. Bu atlasın oluşturduğu dif.bilir manifold  $M_1$

olsun.

$$\begin{aligned} y : M_2 &\rightarrow IR \\ s &\rightarrow s^3 \end{aligned}$$



$A_2 = \{IR, y\}$  bir atlasır. Bu atlasın oluşturduğu dif.bilir manifold  $M_2$  olsun.  $A_1$  ile  $A_2$  denk değildir. Denk olması için  $A_1 \cup A_2$  bir atlas olmalıdır. Fakat

$$\begin{aligned} x \circ y^{-1} : y(IR) = IR &\rightarrow x(IR) = IR \\ s &\rightarrow \sqrt[3]{s} \end{aligned}$$

dönüşümü  $s = 0$  da türevlenemezdir. O halde  $x \circ y^{-1}$  dif.bilir değildir.  $x \circ y^{-1}$  diffeomorfizm değildir.  $(IR, x)$  ve  $(IR, y)$  haritaları uyumlu olmayıp  $A_1 \cup A_2$ ,  $IR$  için bir atlas değildir.

Şimdi  $M_1$  ve  $M_2$  'nin diffeomorfik olduğunu göstereceğiz.

$$\begin{aligned} f : M_1 &\rightarrow M_2 \\ s &\rightarrow \sqrt[3]{s} \end{aligned}$$

$$F(s) = (y \circ f \circ x^{-1})(s) = (y \circ f)((x^{-1}(s))) = (y \circ f)(s) = y(\sqrt[3]{s}) = s$$

olduğundan  $F = id$  olup  $F$ ,  $IR$ 'de dif.bilirdir.  $f, M_1$ 'de dif.bilirdir.  $F$  1:1 olduğundan  $f$  1:1 dir.

$$G = id \circ f^{-1} \circ y^{-1} = f^{-1} \circ y^{-1}$$

olmak üzere

$$G(s) = (f^{-1} \circ y^{-1})(s) = f^{-1}(\sqrt[3]{s}) = s$$

eşitliğinden  $G = id$  olup  $G$ ,  $IR$ 'de dif.bilirdir.  $f^{-1}$  de  $M_2$  'de dif.bilirdir.  $G$ , 1:1 olduğundan  $f^{-1}$  de 1:1 dir.

Sonuç olarak  $f : M_1 \rightarrow M_2$  bir diffeomorfizmdir.  $f$ , global olduğundan  $M_1$  ve  $M_2$ , diffeomorfitirler.

## 2.4. Bir Manifold Üzerinde İndirgenmiş Topoloji

**Teorem 2.4.1:**  $(M, A)$   $n$ -boyutlu bir dif.bilir manifold olsun (Yani  $M, A$   $C^\infty$  atlasından elde edilen bir manifold).  $\forall (U, x) \in A$  için  $W \subset U \ni x(W) \subseteq \mathbb{R}^n$  açık ise  $(W, x|_W) \in A$  dır.

**İspat:**  $(U, x)$  harita olduğundan  $x, 1:1$  dir. Dolayısıyla  $x|_W$  de  $1:1$  dir. Aynı zamanda  $x(W) \subset x(U) \subset \mathbb{R}^n$  olduğundan  $x(W) \subset \mathbb{R}^n$  dir. O halde  $(W, x|_W)$ ,  $M$  de bir haritadır.

$(W, x|_W) \in A$  olduğunu göstereceğiz .Bunun için  $\forall (V, y) \in A$ ,  $V \cap W \neq \emptyset$ ,  $y \circ x|_W^{-1}$  ve  $x|_W \circ y^{-1}$  dönüşümlerinin dif.bilir olduğunu göstereceğiz.  $V \cap W \neq \emptyset$  ve  $W \subset U$  olduğundan  $U \cap V \neq \emptyset$  dır.  $(U, x), (V, y) \in A$  olduğundan  $y \circ x^{-1}$  ve  $x \circ y^{-1}$  dönüşümleri dif.bilirdir.

$y \circ x^{-1} : x(U \cap V) \rightarrow y(U \cap V)$  diffeomorfizm olduğundan

$y \circ x^{-1}|_{x(W \cap V)} : x(W \cap V) \rightarrow y(W \cap V)$  diffeomorfizmdir.

$y \circ x|_W^{-1} : x(W \cap V) \rightarrow y(W \cap V)$  diffeomorfizmdir.O halde

$(W, x|_W) \in A$  dır.

**Teorem 2.4.2:**  $M$  bir dif.bilir manifold ve  $M$ 'nin bir tam atlası  $A^t$  olsun.  $M$ 'de bu tam atladaki haritaların tanım cümlelerinden oluşan aile  $M$  cümlesi üzerinde bir topoloji için bir baz oluşturur.

**İspat:**  $A^t = \{(U_i, x_i) \mid i \in I\}$  olmak üzere  $\mathcal{B} = \{U_i \mid i \in I\}$  cümlesinin  $M$  cümlesi üzerindeki bir topoloji için baz oluşturduğunu göstereceğiz.

i)  $A^t$ ,  $M$  için bir atlas olduğundan  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$  dir.

ii)  $\forall (U, x), (V, y) \in A^t, U \cap V \neq \emptyset$  verilsin.  $\exists i \in I, (U_i, x_i) \in A^t$  için

$U \cap V = \bigcup_{i \in I} U_i$  olduğunu göstereceğiz.

$(U, x), (V, y) \in A^t$  olduğundan  $x \circ y^{-1} : y(U \cap V) \rightarrow x(U \cap V)$

diffeomorfizmdir. Aynı zamanda sürekli olduğundan  $x(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$  açıktır.

Ayrıca  $U \cap V \subset U$  ve  $x(U \cap V)$  açık olduğundan Teorem 2.3.1 gereğince

$(U \cap V, x|_{U \cap V}) \in A^t$  dir.  $U \cap V \in \mathcal{B}$  dir.

O halde  $\mathcal{B} = \{U_i \mid i \in I\}$  cümlesi  $M$  cümlesi üzerindeki bir topoloji için baz oluşturur.

**Tanım 2.4.1:**  $M$  tam atlası  $A^t$  olan bir dif.bilir manifold olsun.  $M$ 'de bu tam atladaki haritaların tanım cümlelerinden oluşan aileyi baz kabul eden topolojiye  $M$ 'nin  $A^t$ 'dan indirgediği veya  $C^\infty$  yapıdan indirgediği topoloji denir ve  $\tau_C$  yada  $\tau_A$  ile gösterilir. [1]

**Örnek 2.4.1:**  $A = \{(\mathbb{R}, id)\}$ ,  $M = \mathbb{R}$  için bir  $C^\infty$  atlasıdır.

$(a, b) \subseteq \mathbb{R}$  bir açık aralık olsun,  $x = id$  için  $x((a, b)) = (a, b)$   $\mathbb{R}$ 'de bir açık aralık olduğundan  $((a, b), id|_{(a, b)}) \in A'$  dir.

$$A' = \{(IR, id), ((a, b), id|_{(a, b)}) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$A' = \{(U, id|_U) \mid U \subseteq \mathbb{R}\} \text{ (Burada } U \subseteq \mathbb{R} \text{ açık)}$$

$$B = \{U \subset \mathbb{R} \mid (U, id|_U) \in A'\}$$

$B$ 'yi baz kabul eden topoloji  $\mathbb{R}$ 'in standart topolojisidir. Ayrıca  $B$ 'yi baz kabul eden topoloji  $\mathbb{R}$ 'in  $C^\infty$  yapısından indirgediği topolojidir.

Sonuç olarak  $\mathbb{R}$ 'in  $A = \{(IR, id)\}$  atlasından indirgediği topoloji ile  $\mathbb{R}$ 'in standart topolojisi çakışır.

**Teorem 2.4.3:**  $M, A C^\infty$  atlasıyla verilen  $n$ - boyutlu bir dif.bilir manifold olsun.  $\tau_C, M$ 'in  $C^\infty$  yapısından indirgenen topoloji olmak üzere  $\forall (U, x) \in A$  için  $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  haritası bir  $\tau_C$ -homeomorfizmdir. [1]

**Teorem 2.4.4:**  $M$  ile  $M'$  dif.bilir manifoldlar ve  $f : M \rightarrow M'$  bir fonksiyon olsun. Eğer bir  $m \in M$  noktasında  $f$  dif.bilir ise  $m \in M$ 'de  $f$  süreklidir. [1]

**Sonuç 2.3.1:**  $f : M \rightarrow M'$  sürekli ise  $f$ 'in tanım aralığı  $M$ 'de bir açık aralıktır. [1]

Bir topolojik uzay üzerinde bir manifold tanımlandığında topolojik uzaydaki topoloji ile manifoldun indirgenmiş topolojisi arasındaki ilişki aşağıdaki teoremlerle verilebilir:

**Teorem 2.4.5:**  $M, A C^\infty$  atlasıyla verilen  $n$ - boyutlu bir dif.bilir manifold olmak üzere  $(M, \tau)$  bir topolojik uzay ve  $M$  manifoldunun  $C^\infty$  yapıdan indirgediği topoloji  $\tau_C$  olsun. Bu durumda  $\tau = \tau_C$  olması gerek ve yeter şart  $M$  bir  $A$  atlasının haritaları  $\tau$ , homeomorfizmdir. [1]

**Örnek 2.4.2:**  $M$ ,  $n$ -boyutlu bir dif.bilir manifold ve  $M' \subset M$  açık olsun.  $\forall (U, x) \in A$  için

$$\begin{aligned} j : M' &\rightarrow M \\ p &\rightarrow j(p) = p \end{aligned}$$

olmak üzere  $(U \cap M', x' = x \circ j)$ ,  $M'$ 'nin bir haritasıdır.

$$x : M \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x' : M' \rightarrow \mathbb{R}^n$$

dönüşümleri ile

$$H1) x \circ j, 1:1$$

$$H2) (x \circ j)(U \cap M'), \mathbb{R}^n \text{ 'de bir açıktır.}$$

$$A' = \{(U \cap M', x') \mid (U, x) \in A\} \text{ olsun. } A' \text{ de bir atlasıdır.}$$

$$A1) \bigcup_{U \in M} U \cap M' = M'$$

$$A2) \forall x', y' \text{ haritaları için}$$

$$x' \circ (y')^{-1} = (x \circ j) \circ (y \circ j)^{-1} = (x \circ j) \circ (j^{-1} \circ y^{-1}) = x \circ y^{-1}$$

olduğundan  $x' \circ (y')^{-1}$  diffeomorfizmdir.

$$A' = \{(U \cap M', x') \mid (U, x) \in A\} \text{ bir } C^\infty \text{ atlasıdır.}$$

Buna göre aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 2.4.2:**  $A' = \{(U \cap M', x') \mid (U, x) \in A\}$ ,  $C^\infty$  atlası ile birlikte verilen  $M'$  manifolduna  $M'$ 'nin bir açık alt manifoldu denir [1].

**Teorem 2.4.6:**  $M$  bir kompakt uzay ise tek haritalı atlası ile tanımlı bir  $C^\infty$  yapısı yoktur [1].

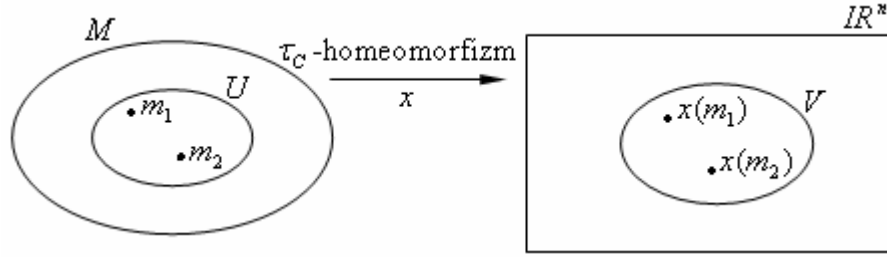
### 2.4.1. İndirgenmiş Topolojinin Bazı Özellikleri

**Teorem 2.4.1.1:** Bir dif.bilir manifold üzerinde indirgenmiş topoloji  $T_1$  aksiyomunu sağlar.

**İspat:**  $(M, \tau_C)$   $M$  manifoldu üzerinde indirgenmiş topoloji olsun.

$\tau_C, T_1$  aksiyomunu sağlar.  $\Leftrightarrow \forall m_1, m_2 \in M, m_1 \neq m_2$  için  $\exists U \in N(m_1)$  ve  $\exists V \in N(m_2) \ni m_1 \notin V, m_2 \notin U$  dir.

$\forall m_1, m_2 \in M$  için  $m_1 \neq m_2$  olmak üzere ya  $m_1$  ile  $m_2$ 'nin ikisi de aynı haritadadır ya da farklı haritalardır. Eğer  $m_1$  ile  $m_2$  aynı haritada ise  $(U, x) \in A$  için  $m_1 \in U, m_2 \in U$  dir.  $x(U) = V \subseteq \mathbb{R}^n$  diyelim.



Şekil 2.4.1.1

$x$  süreklidir.  $x$  1:1 olduğundan  $m_1 \neq m_2$  iken  $x(m_1) \neq x(m_2)$  dir.  $\mathbb{R}^n$  de  $T_2$  aksiyomu sağladığından  $\exists V_1 \in N(x(m_1)), \exists V_2 \in N(x(m_2))$  için  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$  dir.  $x$  sürekli olduğundan

$$x^{-1}(V_1) = U_1 \in \tau_C \ni m_1 \in U_1 \text{ ve } x^{-1}(V_2) = U_2 \in \tau_C \ni m_2 \in U_2$$

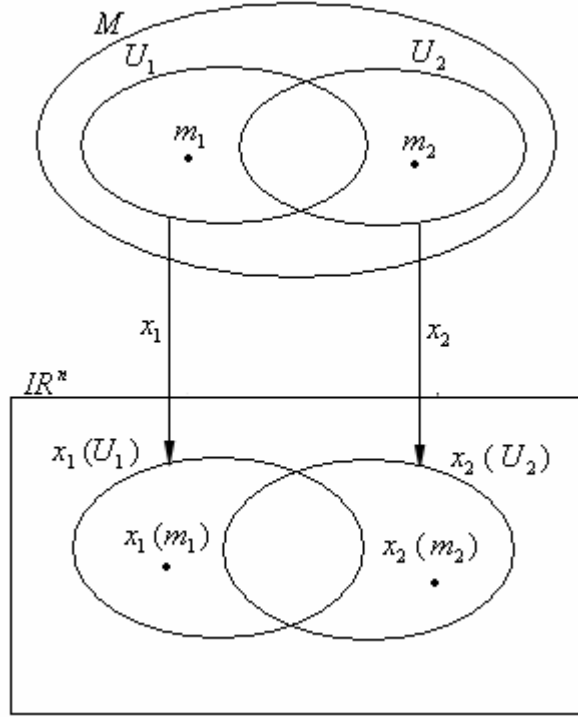
dir.

$$x^{-1}(V_1) \cap x^{-1}(V_2) = x^{-1}(V_1 \cap V_2) = x^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

$T_2$  aksiyomu sağlanır. Bu durumda  $T_1$  aksiyomu da sağlanır.

Eğer  $m_1$  ile  $m_2$  aynı harita değilse



Şekil 2.4.1.2

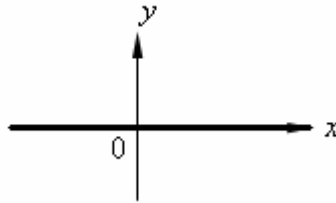
$$(U_1, x_1) \in A \ni m_1 \in U_1 \in \tau_C \Rightarrow U_1 \in N(m_1)$$

$$(U_2, x_2) \in A \ni m_2 \in U_2 \in \tau_C \Rightarrow U_2 \in N(m_2)$$

$m_2 \notin U_1$  ve  $m_1 \notin U_2$  dir. O halde  $(M, \tau_C)$  uzayında  $T_1$  aksiyomu sağlanır.

Fakat dif.bilir bir manifold üzerindeki indirgenmiş topoloji  $T_2$  aksiyomunu sağlamak zorunda değildir. Bunu aşağıdaki örnekle görebiliriz:

**Örnek 2.4.1.1:**  $U = \{(s, 0) | s \in \mathbb{R}\}$



Şekil 2.4.1.3

$$H = U \cup \{(0,1)\}$$



Şekil 2.4.1.4

cümlelerini ele alalım.

$$U_1 = \{(s,0) \mid s \in \mathbb{R}, s \neq 0\} \cup \{(0,1)\}$$

$$x : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(s,0) \rightarrow x((s,0)) = s$$

$$x_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(s,0) \rightarrow x_1((s,0)) = s \neq 0, \quad x_1((0,1)) = 0$$

dönüşümleriyle  $(U, x), (U_1, x_1)$   $H$  da iki haritadır.

$$A1) U \cup U_1 = H \text{ dir.}$$

$$A2) U \cap U_1 = \{(s,0) \mid s \in \mathbb{R}, s \neq 0\} \text{ olup}$$

$$x_1 \circ x^{-1} : x(U \cap U_1) = \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow x_1(U \cap U_1) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$s \rightarrow (x_1 \circ x^{-1})(s) = s$$

$$x_1 \circ x^{-1} = id \text{ ve } x \circ x_1^{-1} = id \text{ dönüşümleri dif.bilirdir. O halde } (U, x), (U_1, x_1)$$

haritaları uyumludur.  $\{(U, x), (U_1, x_1)\}$ ,  $H$  in bir  $C^\infty$  atlasıdır.

$H$ , bu  $C^\infty$  yapıdan indirgediği topolojiye göre Hausdorff değildir. Gerçekten,

$$m_1 = (0,0) \in U, m_2 = (0,1) \in U_1, m_1 \neq m_2 \text{ için } V \in N(m_1), W \in N(m_2) \text{ olsun.}$$



$x(V \cap U) \subset \mathbb{R}$ , açık ve  $(V \cap U, x|_{V \cap U})$ ,  $H$  için bir haritadır. Üstelik  $0 \in x(V \cap U)$  dır.

$x_1(W \cap U_1) \subset \mathbb{R}$ , açık ve  $(W \cap U_1, x_1|_{W \cap U_1})$ ,  $H$  için bir haritadır. Yine  $0 \in x_1(W \cap U_1)$  dır.

$a \neq 0$  olmak üzere  $\exists (a,0) \in V \cap U$  ve  $(a,0) \in W \cap U_1 \ni (a,0) \in W \cap V$  ve  $W \cap V \neq \emptyset$  dır. O halde  $H$ , Hausdorff değildir.

**Teorem 2.4.1.2:** Bir dif.bilir manifold üzerindeki indirgenmiş topoloji sayılabilirliğin 1. aksiyomunu sağlar.

**İspat:**  $M$  bir dif.bilir manifold olsun.  $\forall m \in M$  için  $m \in U$  olacak şekilde  $(U, x)$  haritası vardır.  $\mathbb{R}^n$  metrik uzay ve her metrik uzay sayılabilirliğin 1.aksiyomunu sağladığından,  $x(m) \in x(U) \subset \mathbb{R}^n$ 'de sayılabilir bir  $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}$  bazı vardır. Çünkü  $W, m \in M$ 'in herhangi bir komşuluğu ise  $m \in W \cap U$  açık  $x(m) \in x(W \cap U) \subset \mathbb{R}^n$  açık  $\{V_1, V_2, \dots, V_n\}, x(m)$ 'de bazı olduğundan  $\exists V_i \subset x(W \cap U)$  dır. Böyleyse

$$x^{-1}(V_i) \subset W \cap U \subset W \Rightarrow \{x^{-1}(V_1), x^{-1}(V_2), \dots, x^{-1}(V_n)\}$$

sayılabilir. O halde  $M$ , 1. sayılabilir. O halde  $M$ , 1. sayılabilir.

**Teorem 2.4.1.3:** İndirgenmiş topolojisine göre bir dif.bilir manifold lokal irtibatlıdır.

**İspat:**  $M$  bir dif.bilir manifold olsun  $\forall m \in M$  için  $m \in U$  olacak şekilde  $(U, x)$  haritası vardır.  $x(m) \in x(U) \subset \mathbb{R}^n$  açık olduğundan  $x(m) \in B(x(m), \rho) \subset x(U)$  olacak şekilde  $\rho > 0$  vardır.  $B(x(m), \rho) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x(m), y) < \rho\}$ ,  $\mathbb{R}^n$  irtibatlı olduğundan  $B(x(m), \rho), x(m)$ 'nin bir irtibatlı komşuluğudur. Böyle ise  $x$  sürekli olduğundan  $\underbrace{x^{-1}(B(x(m), \rho))}_{\in N(m)} \subset U \subset M$  irtibatlıdır.

O halde  $\forall m \in M$  noktasının bir irtibatlı komşuluğu vardır. Öyleyse  $M$  lokal irtibatlıdır.

**Tanım 2.4.1.1:** Bir  $M$  manifoldu üzerindeki indirgenmiş topoloji  $T_2$  ayırma aksiyomunu sağlar ise  $M$  manifolduna Hausdorff manifoldu denir. [1]

**Örnek 2.4.1.2:**  $\mathbb{R}^n$  bir Hausdorff manifoldudur.

**Örnek 2.4.1.3:**  $\mathbb{R}^n$ 'nin her alt manifoldu bir Hausdorff manifoldudur.

**Teorem 2.4.4:** Her bir Hausdorff manifoldu lokal kompaktır.

**İspat:**  $M$  bir Hausdorff manifoldu olsun.  $\forall m \in M$  noktasının  $m \in U$  olacak şekilde  $(U, x)$  haritası vardır.  $\mathbb{R}^n$  lokal kompakt olduğundan  $x(m)$  merkezli bir  $V_m$  açık yuvarı vardır ve  $\bar{V}_m$  kompaktır.

$$V_m = B(x(m), \rho) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x(m), y) < \rho\}$$

$$\bar{V}_m = \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x(m), y) \leq \rho\}$$

$$\bar{V}_m \subset x(U)$$

dır. O halde  $x(m) \in V_m \subset \bar{V}_m \subset x(U)$  dır.

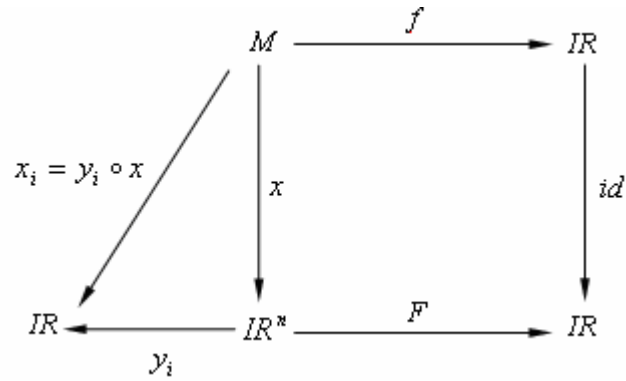
$x^{-1}(V_m) = U_m$ 'in  $m$ 'in bir komşuluğu ve  $\bar{U}_m$ 'in kompakt olduğunu göstereceğiz.

$x^{-1}$  sürekli olduğundan  $x^{-1}(\bar{V}_m) \subset \overline{x^{-1}(V_m)} = \bar{U}_m$ ,  $\bar{V}_m \subset \mathbb{R}^n$  kompakt ise  $x^{-1}(\bar{V}_m) \subset U$  dır.

$M$  Hausdorff uzayının kompakt alt cümlesi olduğundan kapalıdır.  $\bar{U}_m, U_m$ 'yi kapsayan kapalıların arakesiti olduğundan  $x^{-1}(\bar{V}_m) = \bar{U}_m$  dır.  $x^{-1}(\bar{V}_m)$  kompakt olduğundan  $\bar{U}_m$  kompaktır. Dolayısıyla  $(M, \tau_c)$  lokal kompaktır.

## 2.5. Bir Manifold Üzerinde Türev

$M$  bir difbilir manifold,  $A$   $M$ 'nin bir  $C^\infty$  atlası olmak üzere dif.bilir fonksiyonu için  $Domf=V$  ve  $(U,x) \in A$  olsun.  $U \cap V$  üzerinde  $f = F \circ x$  olacak şekilde bir  $F$  fonksiyonu (yani  $f$ 'in koordinat temsilcisi) için  $F$  difbilir ise  $f$  de difbilirdir.  $y_i$ ,  $\mathbb{R}^n$ 'nin  $i$ . koordinat fonksiyonu olmak üzere



Şekil 2.5.1

$F$  difbilir ise

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} : x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonları mevcut ve süreklidir.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \circ x : U \cap V \subset M \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} \text{ 'ler } \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ 'lerin koordinat temsilcisidir. } \forall \frac{\partial F}{\partial y_i} \text{ difbilir olduğundan}$$

$\forall \frac{\partial f}{\partial x_i}$  'de difbilirdir. O halde  $f$  de dif.bilirdir.

**Tanım 2.5.1:**  $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial F}{\partial y_i} \circ x$  fonksiyonuna  $f$  fonksiyonunun  $i$ . kısmi türevi denir [1].

**Teorem 2.5.1:**  $M$  bir difbilir manifold  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  difbilir fonksiyonlar ve  $a, b \in \mathbb{R}$  olsun. Bu durumda

$$i) \frac{\partial}{\partial x_i}(af + bg) = a \frac{\partial f}{\partial x_i} + b \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

$$ii) \frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

dır [1].

### 2.5.1. Tanjant Vektörler

$M$ ,  $n$ -boyutlu bir dif.bilir manifold ve  $m \in M$  olsun.  $M$  üzerinde tanım cümleleri  $m$ 'yi kapsayan  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  dif.bilir fonksiyonlarının cümlesi  $\mathfrak{T}(m)$  olsun

$$\mathfrak{T}(m) = \left\{ f \mid f : M \xrightarrow{\text{difbilir}} \mathbb{R}, m \in \text{Dom}f \right\}$$

şeklinde tanımlı cümle üzerinde tanımlı toplama ve skalar çarpma işlemleri ile birlikte bir reel vektör uzayı oluşturur.

$$+ : \mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{T}(m) \rightarrow \mathfrak{T}(m)$$

$$(f, g) \rightarrow f + g : M \xrightarrow{\text{difbilir}} \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow (f + g)(p) = f(p) + g(p)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathfrak{T}(m) \rightarrow \mathfrak{T}(m)$$

$$(\lambda, f) \rightarrow \lambda \cdot f : M \xrightarrow{\text{difbilir}} \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow (\lambda \cdot f)(p) = \lambda \cdot f(p)$$

Ayrıca,

$$\bullet : \mathfrak{T}(m) \times \mathfrak{T}(m) \rightarrow \mathfrak{T}(m)$$

$$(f, g) \rightarrow f \bullet g : M \xrightarrow{\text{difbilir}} \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow (f \bullet g)(p) = f(p) \cdot g(p)$$

iç işlemiyle birlikte  $\mathfrak{T}(m)$  bir reel cebirdir.

**Tanım 2.5.1.1:**  $\mathfrak{S}(m)$ 'de tanımlı bir  $IR$ -lineer fonksiyona  $\mathfrak{S}(m)$ 'de bir lineer operatör denir [1].

$$L : \mathfrak{S}(m) \xrightarrow{\text{lineer}} IR \\ f \rightarrow L(f)$$

$$\forall a, b \in IR, \forall f, g \in \mathfrak{S}(m) \text{ için } L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$$

**Teorem 2.5.1.1:**  $\Lambda, \mathfrak{S}(m)$ 'de bir lineer operatör ve  $f, g \in \mathfrak{S}(m)$  olsun.  $M$ 'nin enaz bir komşuluğunda  $f = g$  ise  $\Lambda(f) = \Lambda(g)$  dir [1].

**Tanım 2.5.1.2:**  $\Lambda : \mathfrak{S}(m) \rightarrow IR$  bir lineer operatör ve

$$\forall f, g \in \mathfrak{S}(m) \text{ için } \Lambda(f \cdot g) = \Lambda(f) \cdot g + f \cdot \Lambda(g)$$

ise  $\Lambda$ 'ye  $\mathfrak{S}(m)$ 'nin bir türevi denir [1].

**Teorem 2.5.1.2:**  $\Lambda, \mathfrak{S}(m)$ 'de bir türev ve  $f \in \mathfrak{S}(m)$  olsun.  $f, m$ 'in en az bir komşuluğunda sabit ise  $\Lambda(f) = 0$  dır [1].

**Tanım 2.5.1.3:**  $M$  bir dif.bilir manifold,  $m \in M$  olsun.

$$T_m M = \{ \Lambda \mid \Lambda, \mathfrak{S}(m) \text{'nin türevi} \}$$

cümlesini göz önüne alalım. Bu cümle üzerinde tanımlı toplama ve skalar çarpma işlemleriyle birlikte bir reel vektör uzayıdır.

$$+ : T_m M \times T_m M \rightarrow T_m M \\ (\Lambda, \Omega) \rightarrow \Lambda + \Omega : \mathfrak{S}(m) \rightarrow IR \\ f \rightarrow (\Lambda + \Omega)(f) = \Lambda(f) + \Omega(f)$$

$$\cdot : IR \times T_m M \rightarrow T_m M \\ (\lambda, \Lambda) \rightarrow \lambda \cdot \Lambda : \mathfrak{S}(m) \rightarrow IR \\ f \rightarrow (\lambda \cdot \Lambda)(f) = \lambda \cdot \Lambda(f)$$

$T_m M$  vektör uzayına  $M$ 'nin  $m$  noktasındaki tanjant uzayı denir.  $T_m M$ 'nin elemanlarına da  $m$  noktasındaki tanjant vektörleri denir [1].

**Örnek 2.5.1.1:**  $\vec{v}$ ,  $IR^3$ 'de bir  $z$  noktasında bir vektör olsun.

$$\vec{v} : \mathfrak{S}(z) \rightarrow IR$$

$$f \rightarrow \vec{v}(f) = \sum_{i=1}^3 v_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \Big|_z$$

şeklinde tanımlanan  $\vec{v}$ ,  $\mathfrak{S}(z)$ 'de türevidir. Gerçekten,

i)  $\vec{v}$ ,  $IR$ -lineerdir:

$\forall a, b \in IR, \forall f, g \in \mathfrak{S}(z)$  için

$$\begin{aligned} \vec{v}(af + bg) &= \vec{v}(af + bg) = \sum_{i=1}^3 v_i \cdot \frac{\partial (af_i + bg_i)}{\partial x_i} \Big|_z \\ &= \sum_{i=1}^3 v_i \cdot \left[ \frac{a\partial(f_i) + b\partial(g_i)}{\partial x_i} \Big|_z \right] \\ &= a \sum_{i=1}^3 v_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \Big|_z + b \sum_{i=1}^3 v_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \Big|_z \\ &= a\vec{v}(f) + b\vec{v}(g) \end{aligned}$$

ii)  $\vec{v}$ , Leibniz şartını sağlar:

$\forall f, g \in \mathfrak{S}(z)$  için

$$\begin{aligned} \vec{v}(fg) &= \sum_{i=1}^3 v_i \cdot \frac{\partial (fg)}{\partial x_i} \Big|_z \\ &= \sum_{i=1}^3 v_i \cdot \left[ \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \cdot g + f \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \right) \Big|_z \right] \\ &= \left( \sum_{i=1}^3 v_i \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \Big|_z \right) \cdot g \Big|_z + f \Big|_z \cdot \sum_{i=1}^3 v_i \cdot \frac{\partial g_i}{\partial x_i} \Big|_z \\ &= \vec{v}(f) \cdot g + f \cdot \vec{v}(g) \end{aligned}$$

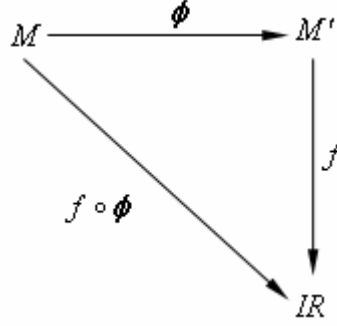
**Teorem 2.5.1.3:**  $M$   $n$ -boyutlu bir dif.bilir manifold,  $m \in U \subset M$  olmak üzere

$(U, x) \in A$  ise  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_m, \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_m, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_m \right\}$ ,  $T_m M$ 'nin bir bazıdır [1].

## 2.5.2. Türetilmiş Lineer Fonksiyonlar

$M$  ve  $M'$  dif.bilir manifoldlar  $\phi: M \rightarrow M'$  dif.bilir fonksiyon olsun.

$m \in \text{Dom}\phi$  ve  $\phi(m) = m'$  olmak üzere



Şekil 2.5.2.1

$$f \in \mathfrak{F}(m') \Rightarrow f \circ \phi \in \mathfrak{F}(m)$$

$\varphi \in T_m M$  için

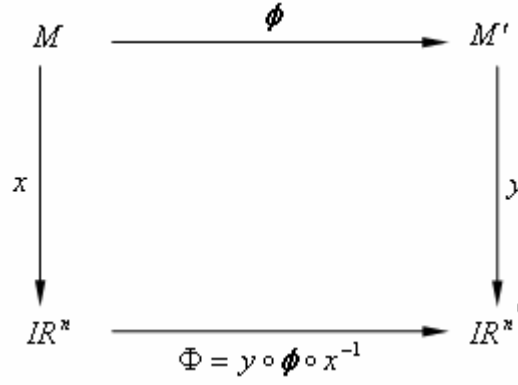
$$\begin{aligned} \varphi &: \mathfrak{F}(m) \rightarrow IR \\ f \circ \phi &\rightarrow \varphi(f \circ \phi) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm lineerdir ve Leibniz şartını sağlar. O halde  $\varphi$ ,  $\mathfrak{F}(m)$ 'de bir türevidir.

$$\begin{aligned} \phi_{*m} &: T_m M \rightarrow T_{m'} M' \\ \varphi &\rightarrow \phi_{*m}(\varphi): \mathfrak{F}(m') \rightarrow IR \\ f &\rightarrow (\phi_{*m}(\varphi))(f) = \varphi(f \circ \phi) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm de lineerdir ve Leibniz şartını sağlar. Bu  $\phi_{*m}$  dönüşümüne  $T_m M$  üzerinde “ $\phi$ 'nin türetilmiş lineer fonksiyonu” veya “ $\phi$ 'den türetilmiş  $m'$ 'deki fonksiyonu” veya “ $\phi$ 'nin  $m$ 'deki türev dönüşümü” denir.

$\phi_{*m}$  lineer olduğundan buna bir matris karşılık gelir. Şimdi bu matrisi yani Jakobiyen matrisi bulacağız.



$x, m \in M$  ve  $y, \phi(m) = m'$ 'de haritalar olmak üzere

$$\phi_{*m} : T_m M \rightarrow T_{m'} M'$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m \rightarrow \phi_{*m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m \right) = \sum_{j=1}^{n'} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m (y_j \circ \phi) \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{\phi(m)}$$

$\phi_{*m}$ 'ye karşılık gelen matris yani Jakobiyen matris  $J(\phi, m)$  ile gösterilirse

$$J(\phi, m) = \left[ \phi_{*m} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_m \right), \phi_{*m} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_m \right), \dots, \phi_{*m} \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \Big|_m \right) \right]_{n' \times n}$$

$$J(\phi, m) = \left[ \frac{\partial (y_j \circ \phi)}{\partial x_i} \Big|_m \right]_{n' \times n} \in \mathbb{R}^{n' \times n} \text{ dir.}$$

**Teorem 2.5.2.1:**  $M, M'$  ve  $M''$  dif.bilir manifoldlar,  $\phi : M \rightarrow M'$  ve  $\psi : M' \rightarrow M''$

dif.bilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$(\psi \circ \phi)_{*m} = \psi_{*\phi(m)} \circ \phi_{*m}$$

dır [1].

**Tanım 2.5.2.1:**  $M, M'$  dif.bilir manifoldlar,  $\phi : M \rightarrow M'$  dif.bilir bir fonksiyon

olsun.  $\forall m \in M$  için  $rank \phi_{*m} = rank \phi \Big|_m$  olarak tanımlanır [1].

**Teorem 2.5.2.2:**  $M, M'$  ve  $M''$  dif.bilir manifoldlar,  $\phi : M \rightarrow M'$  ve

$\psi : M' \rightarrow M''$  dif.bilir fonksiyonlar olsun.

$$1) rank \phi \Big|_m = boy M \Leftrightarrow çek \phi_{*m} = \{0\} \Leftrightarrow \phi_{*m}, 1:1 \text{ dir.}$$



2)  $\text{rank} \psi|_{\phi(m)} = \text{boy} M' \Rightarrow \text{rank}(\psi \circ \phi)|_m = \text{rank} \phi|_m$  dır.

3)  $\text{rank} \phi|_m = \text{boy} M' \Leftrightarrow \phi_*$ , örtendir [1].

**Teorem 2.5.2.3:**  $M$ ,  $M'$  ve  $M''$  dif.bilir manifoldlar,  $\phi : M \rightarrow M'$  ve  $\psi : M' \rightarrow M''$

dif.bilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\text{rank} \phi|_m = \text{boy} M' \Rightarrow \text{rank}(\psi \circ \phi)|_m = \text{rank} \psi(\phi(m))$$

dır [1].

### 3. ARAŞTIRMA BULGULARI

#### 3.1. Vektör Alanları

$M$  bir dif.bilir manifold ve  $m \in M$  olsun.

$$\mathfrak{S}(m) = \{f|f : M \xrightarrow{\text{difbilir}} \mathbb{R}, m \in \text{Dom}f\}$$

cümlesini ve bu cümle üzerindeki türevlerin oluşturduğu

$$T_m M = \{A|A, \mathfrak{S}(m)\text{'nin türevi}\}$$

vektör uzayını göz önüne alalım.

$X \in T_m M$  ise  $X, \mathfrak{S}(m)$  'de bir  $\mathbb{R}$ -lineer operatör ve  $\forall f, g \in \mathfrak{S}(m)$  için

$$X(f \cdot g) = X(f) \cdot g + f \cdot X(g)$$

dır.

$$\bigcup_{m \in M} T_m M = TM$$

şeklinde oluşturulan cümle  $M$ 'nin tanjant demeti olarak adlandırılır.

**Tanım 3.1.1:**  $M$  ile  $M'$  dif.bilir manifoldlar,  $\phi : M \rightarrow M'$  dif.bilir olsun.  $\text{Dom} \psi$  üzerinde  $\phi \circ \psi = id$  olacak şekilde bir  $\psi : M \rightarrow M'$  dif.bilir fonksiyonu varsa  $\psi$ 'ye  $\phi$ 'nin kesiti denir [1].

**Tanım 3.1.2:**  $\pi : TM \rightarrow M$  dönüşümünün bir kesiti  $X$  olsun. Öyle ki  $X : M \rightarrow TM, \pi \circ X = id$  dır.

$\forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  ve  $\text{Dom}X \cap \text{Dom}f = U \neq \emptyset$  olmak üzere

$$\begin{aligned} Xf : U \subset M &\rightarrow \mathbb{R} \\ m &\rightarrow (Xf)(m) = X_m f \end{aligned}$$

fonksiyonu her  $f$  için dif.bilir ise  $X$  kesitine  $U \subset M$  üzerinde bir vektör alanı denir [1].

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{X} & TM & \xrightarrow{\pi} & M \\
 \lrcorner & & & & \lrcorner \\
 & & \pi \circ X = id & & 
 \end{array}$$

**Şekil 3.1.1**

$\mathfrak{F}_U = \{f \mid f : U \xrightarrow{\text{difbilir}} IR\}$  üzerinde

$$\begin{aligned}
 X : \mathfrak{F}_U &\rightarrow \mathfrak{F}_U \\
 f &\rightarrow Xf : U \subset M \rightarrow IR \\
 m &\rightarrow (Xf)(m) = X_m(f)
 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan vektör alanı her noktada bir tanjant vektörü tek olarak belirler.

**Örnek 3.1.1:**  $M$  dif.bilir bir manifold,  $TM$ ,  $M$ 'nin tanjant demeti ve  $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m \in T_m M$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \pi : TM &\rightarrow M \\
 v_m &\rightarrow \pi(v_m) = m
 \end{aligned}$$

$\frac{\partial}{\partial x_i}$ ,  $\pi$ 'nin bir kesitidir.  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ , bir vektör alanıdır.

$$\pi \circ \frac{\partial}{\partial x_i} : M \rightarrow M, \quad m \rightarrow \left( \pi \circ \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (m) = m$$

$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m$ ,  $\mathfrak{F}(m)$ 'de türevdir.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m : \mathfrak{F}(m) &\rightarrow IR \\
 f &\rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_m
 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm lineerdir ve Leibniz şartını sağlar.

**Sonuç 3.1.1:**  $X$  vektör alanının tanım cümlesi açıktır [1].

**Örnek 3.1.2:**  $M$ , bir dif.bilir manifoldu üzerinde iki vektör alanı  $X, Y$  ve  $f, g$  reel değerli fonksiyonlar olsun. Tanım cümlelerinin arakesitinde olan

$$fX + gY : m \rightarrow (fX + gY)(m) = f(m) \cdot X_m + g(m) \cdot Y_m \in T_m M$$

fonksiyonu  $\pi$  nin bir kesitidir.

$$fX + gY : m \rightarrow M$$

yani

$$\pi \circ (fX + gY) = id$$

dir. Eğer  $f$  ve  $g$  dif.bilirse  $fX + gY$ ,  $M$ 'nin bir vektör alanıdır.

$boy M = n$ ,  $(U, \psi)$   $M$ 'nin bir haritası ve bu haritaya göre koordinat fonksiyonları  $u_i, 1 \leq i \leq n$  olsun.  $m \in U \subset M$  için

$$T_m M = Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_m \right\}_{1 \leq i \leq n}$$

dır.

Tanım cümlesi  $W \subset M$  olan bir  $X$  vektör alanı için  $W \cap U \neq \emptyset$  ise

$W \cap U$  üzerinde  $X$  vektör alanı

$$X = \sum_i^n A_i \frac{\partial}{\partial u_i}$$

biçiminde tek türlü yazılabilir. Bu da  $A_i$ 'lerin tek türlü ifade edilmesiyle mümkündür.

$$X(u_j) = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial u_j}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^n A_i \delta_{ij} = A_j, 1 \leq j \leq n$$

O halde  $\forall 1 \leq j \leq n$  için  $A_j = X(u_j)$  dir.  $X$  dif.bilir olduğundan  $A_j$ 'ler de dif.bilirdir.

Eğer  $(V, \psi)$ ,  $M$ 'nin bir başka haritası ise  $m \in V$  ve  $V \cap U \neq \emptyset$  için

$$\frac{\partial}{\partial v_j} \Big|_m = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u_i}{\partial v_j} \right) \frac{\partial}{\partial u_i} \Big|_m$$

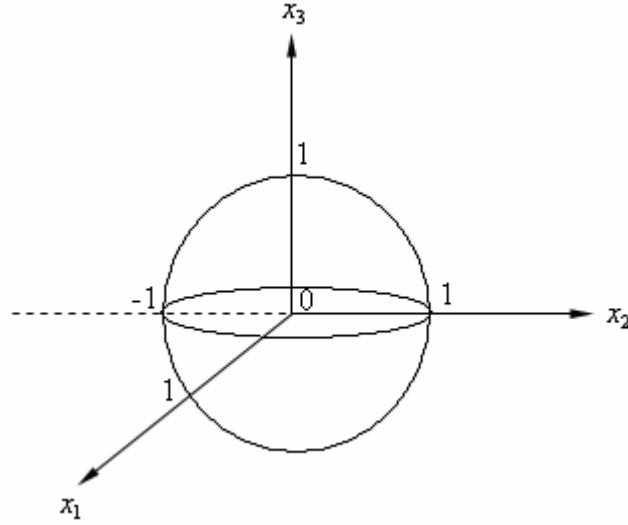
olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial v_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial v_j} \cdot \frac{\partial}{\partial u_i} \dots (*)$$

dır.

**Örnek 3.1.3:**  $S^2$  üzerinde bir vektör alanı vereceğiz. Bunun için önce  $S^2$  üzerinde stereografik izdüşüm atlasını tanımlayalım.

$S^2$ 'nin stereografik atlası:

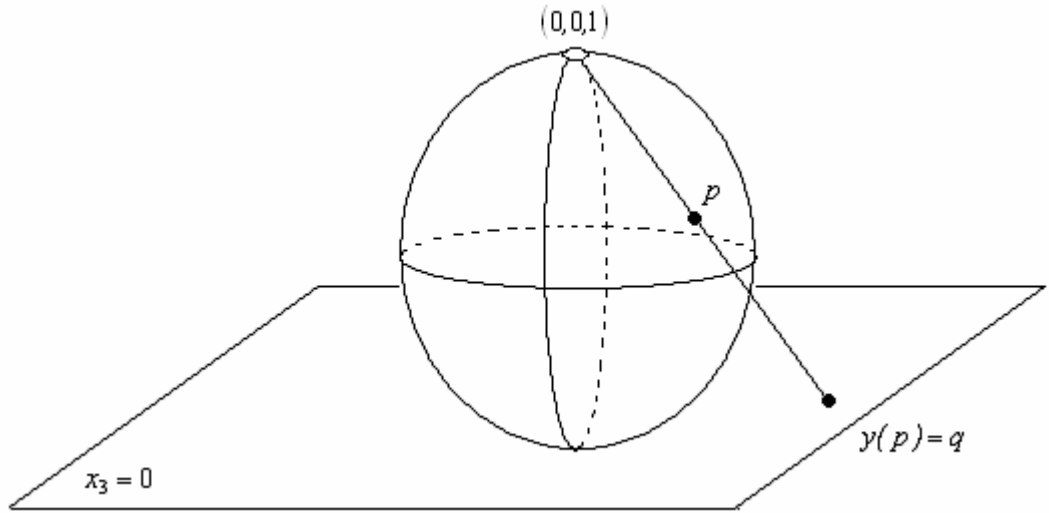


**Şekil 3.1.2**

$U = S^2 - \{(0,0,1)\}$ ,  $V = S^2 - \{(0,0,-1)\}$  olsun.

$y: U \subset S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$p = (p_1, p_2, p_3) \rightarrow y(p) = q = ?$



**Şekil 3.1.3**

$$U = S^2 - \{(0,0,1)\}, \quad V = S^2 - \{(0,0,-1)\}$$

$$q = y(p) : ((0,0,1)p \text{ doğrusu}) \cap (x_3 = 0 \text{ düzlemi})$$

$$\frac{x_1 - 0}{p_1 - 0} = \frac{x_2 - 0}{p_2 - 0} = \frac{x_3 - 1}{p_3 - 1} = t$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = p_1 t \\ x_2 = p_2 t \\ x_3 = 1 + (p_3 - 1)t \end{array} \right\} \text{ arakesiti için } x_3 = 0 \text{ ise}$$

$$1 + (p_3 - 1)t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{1 - p_3}$$

doğrunun düzlemi kestiği noktanın bileşenleri

$$x_1 = \frac{1}{1 - p_3} p_1$$

$$x_2 = \frac{1}{1 - p_3} p_2$$

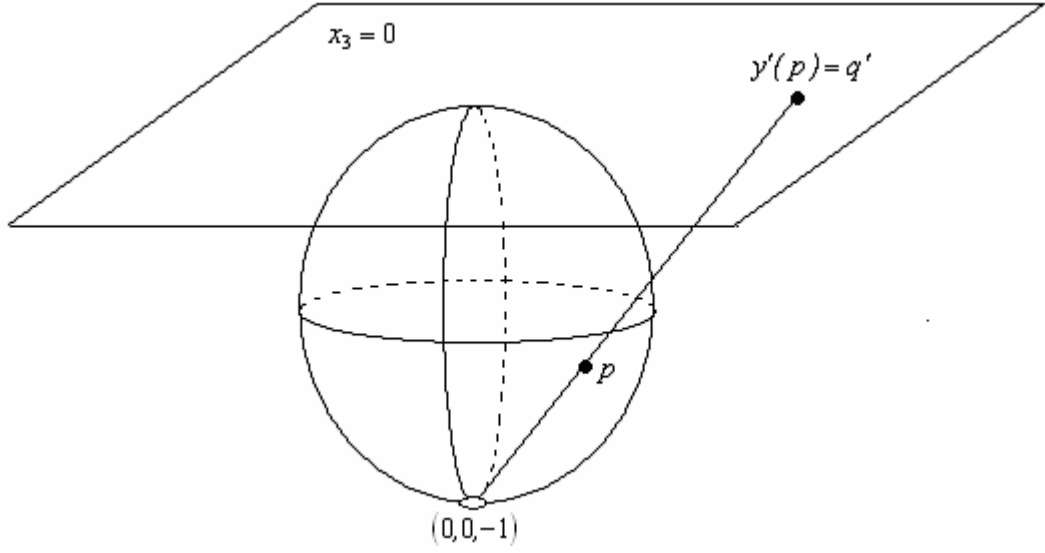
$$x_3 = 0$$

dır. O halde

$$y: U \subset S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$p = (p_1, p_2, p_3) \rightarrow y(p) = \frac{1}{1-p_3}(p_1, p_2)$$

dır. Benzer şekilde



Şekil 3.1.4

$$y': V \subset S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$p = (p_1, p_2, p_3) \rightarrow y'(p) = \frac{1}{1+p_3}(p_1, p_2)$$

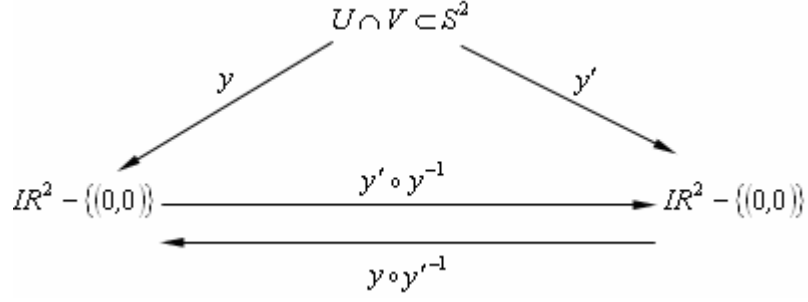
olduğu gösterilebilir. Bu şekilde tanımlanan  $(U, y)$  ve  $(V, y')$  bir haritadır. Yani

$y$  ile  $y', 1:1$  ve  $y(U) = \mathbb{R}^2$  ile  $y'(V) = \mathbb{R}^2$  dir.  $\{(U, y), (V, y')\}, S^2$ 'nin bir  $C^\infty$

atlasıdır.

$$A1) U \cup V = S^2$$

$$A2) U \cap V = S^2 - \{(0,0,1), (0,0,-1)\}$$



Şekil 3.1.5

$$y(p) = q \Leftrightarrow y^{-1}(q) = p$$

$p$  noktası ise  $(0,0,1)$  ve  $q$  dan geçen doğrunun  $S^2$  ile arakesitidir.

$$q_i = \frac{1}{1-p_3} p_i, i = 1,2 \text{ olmak üzere}$$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1 \Rightarrow p_1^2 + p_2^2 = 1 - p_3^2$$

$$q_1^2 + q_2^2 = \frac{1}{(1-p_3)^2} (p_1^2 + p_2^2) = \frac{1-p_3^2}{(1-p_3)^2} = \frac{1+p_3}{1-p_3}$$

$$(1-p_3)q_1^2 + q_2^2 = 1+p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{q_1^2 + q_2^2 - 1}{q_1^2 + q_2^2 + 1}$$

$$p_i = (1-p_3)q_i$$

$$p_i = \left(1 - \frac{q_1^2 + q_2^2 - 1}{q_1^2 + q_2^2 + 1}\right)q_i$$

$$p_i = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2 + 1} 2q_i$$

$$y^{-1}(q_1, q_2) = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2 + 1} (2q_1, 2q_2, q_1^2 + q_2^2 - 1)$$

dır. Benzer şekilde

$$y'^{-1}(q_1, q_2) = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2 + 1} (2q_1, 2q_2, 1 - q_1^2 + q_2^2)$$

dır.



$$(y' \circ y^{-1})(q_1, q_2) = y'(y^{-1}(q_1, q_2)) = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2} (q_1, q_2)$$

olup  $y' \circ y^{-1}$ ,  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  da dif.bilirdir. Benzer şekilde  $y \circ y'^{-1}$  de  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  da dif.bilirdir. Ayrıca,  $y$  ve  $y'$ , 1:1 olduğundan  $y' \circ y^{-1}$  de 1:1dir. O halde  $y' \circ y^{-1}$  bir diffeomorfizmdir. Dolayısıyla  $(U, y), (V, y')$  haritaları uyumludur.

Buradan  $A = \{(U, y), (V, y')\}$ ,  $S^2$ 'nin bir  $C^\infty$  atlasıdır. Bu atlası  $S^2$ 'nin stereografik atlası denir.  $i=1,2$  için  $y_i, y$  haritasına göre  $y'_i, y'$  haritasına göre  $S^2$ 'nin koordinat fonksiyonları olmak üzere

$$y'_i = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2} y_i$$

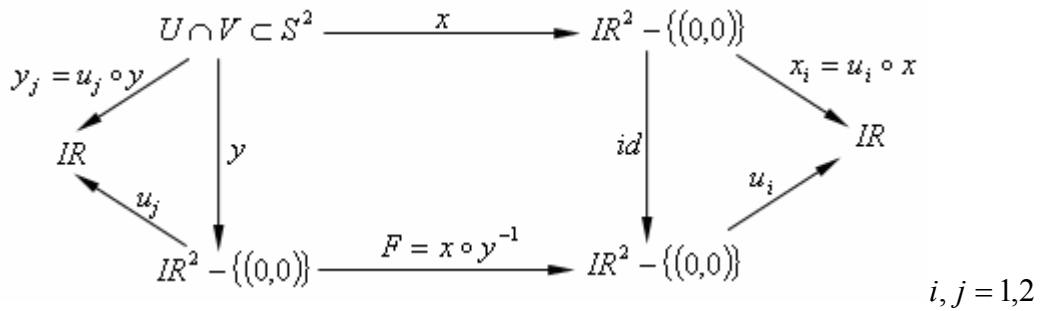
dir. Gerçekten,  $y' = x$  denirse  $y_i = \frac{1}{1-p_3} p_i$  ve  $y'_i = \frac{1}{1+p_3} p_i$  olup

$$y_1^2 + y_2^2 = \frac{p_1^2 + p_2^2}{(1-p_3)^2} = \frac{1-p_3^2}{(1-p_3)^2} = \frac{1+p_3}{1-p_3} = \frac{y_i}{x_i}$$

olduğundan

$$x_i = \frac{1}{y_1^2 + y_2^2} y_i$$

dir.



Şekil 3.1.6

$\forall p \in U \cap V \subset S^2$  için  $y(p) = q \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$  olup

$$F(q) = (x \circ y^{-1})(p) = \frac{1}{q_1^2 + q_2^2} (q_1, q_2)$$

dır.  $\mathbb{R}^2$ 'nin  $u_i$  koordinat fonksiyonları dikkate alınacak olursa

$$F(u_1, u_2) = \frac{1}{u_1^2 + u_2^2} (u_1, u_2) = (F_1(u_1, u_2), F_2(u_1, u_2))$$

elde edilir.

$$\begin{array}{ccc} U \cap V \subset S^2 & \xrightarrow{x_i} & \mathbb{R} \\ \downarrow y_j & & \downarrow id \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{F_i = x_i \circ y_j^{-1}} & \mathbb{R} \end{array} \quad i, j = 1, 2$$

Şekil 3.1.7

$$\begin{array}{ccc} U \cap V \subset S^2 & \xrightarrow{\frac{\partial x_i}{\partial y_j}} & \mathbb{R} \\ \downarrow y_j & & \downarrow id \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \circ y_j^{-1}} & \mathbb{R} \end{array} \quad i, j = 1, 2$$

Şekil 3.1.8

Şekil 3.1.7 ve Şekil 3.1.8 göz önüne alınırsa

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_j} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} \circ y_j = \frac{\partial (x_i \circ y_j^{-1})}{\partial u_i} \circ y_j$$

dır. Buradan

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1} = \frac{u_1^2 + u_2^2 - 2u_1^2}{(u_1^2 + u_2^2)^2} = \frac{u_2^2 - u_1^2}{(u_1^2 + u_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u_2} = \frac{u_1^2 + u_2^2 - 2u_2^2}{(u_1^2 + u_2^2)^2} = \frac{u_1^2 - u_2^2}{(u_1^2 + u_2^2)^2}$$

eşitliklerinden

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_2}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = -\frac{\partial x_2}{\partial y_2} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{(y_1^2 + y_2^2)^2}$$

dır.

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_2} = -\frac{2u_1 u_2}{(u_1^2 + u_2^2)^2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial u_1} = -\frac{2u_1 u_2}{(u_1^2 + u_2^2)^2}$$

eşitliklerinden

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_2} = \frac{\partial F_2}{\partial u_1}$$

elde edilir.

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_2} = \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = -\frac{2y_1 y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^2}$$

dır. Ayrıca (\*) eşitliğinden

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{y_2^2 - y_1^2}{(y_1^2 + y_2^2)^2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{2y_1 y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^2} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_2} = \frac{\partial x_1}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial x_2}{\partial y_2} \frac{\partial}{\partial x_2} = -\frac{2y_1 y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^2} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

dir.

$U$  ve  $V$  üzerinde sırasıyla  $X$  ve  $Y$  vektör alanları

$$X = (x_1 - x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$Y = (-y_1 - y_2) \frac{\partial}{\partial y_1} + (y_1 - y_2) \frac{\partial}{\partial y_2}$$

şeklinde tanımlansın.  $U \cap V$  üzerinde bu vektör alanları çakışır. Gerçekten;

$$Y = (-y_2 - y_1) \left( \frac{y_2^2 - y_1^2}{(y_1^2 + y_2^2)^2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{2y_1y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) + (y_1 - y_2) \left( -\frac{2y_1y_2}{(y_1^2 + y_2^2)^2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

ifadesi  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  ve  $\frac{\partial}{\partial x_2}$  'in parantezinde yazılacak olursa

$$Y = \frac{y_1 - y_2}{y_1^2 + y_2^2} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{y_1 + y_2}{y_1^2 + y_2^2} \frac{\partial}{\partial x_2}$$

elde edilir.  $\forall p \in U \cap V \subset S^2$  için

$$\begin{aligned} Y_p &= \frac{y_1 - y_2}{y_1^2 + y_2^2} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + \frac{y_1 + y_2}{y_1^2 + y_2^2} \Big|_p \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p = \frac{p_1 - p_2}{1 + p_3} \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + \frac{p_1 + p_2}{1 + p_3} \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p \\ &= (x_1 - x_2) \Big|_p \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p + (x_1 + x_2) \Big|_p \frac{\partial}{\partial x_2} \Big|_p \\ &= X_p \end{aligned}$$

bulunur.

### 3.2. Diferensiyel Operatör

**Tanım 3.2.1:**

$$\begin{aligned} \chi : \mathfrak{F}_U &\xrightarrow{\text{diferensiyel}} \mathfrak{F}_U \\ f &\rightarrow \chi(f) \end{aligned}$$

global  $\mathbb{R}$ -lineer fonksiyonu için

$$i) \text{Dom}(\chi f) = U \cap \text{Dom} f$$

$$ii) \chi(fg) = f \cdot \chi(g) + g \cdot \chi(f)$$

ise  $\chi$ 'e  $U$  üzerinde diferensiyel operatör denir.

**Örnek 3.2.1:**  $\chi, U$  üzerinde bir vektör alanı ise  $U$  üzerinde bir diferensiyel operatördür. Yani her vektör alanı bir diferensiyel operatördür. Tersi için aşağıdaki teorem verilebilir:

**Teorem 3.2.1:** Bir  $M$  manifoldunun bir  $U$  açığı üzerinde tanımlı herhangi bir  $\chi$  diferensiyel operatörü  $U$  üzerinde bir tek vektör alanından elde edilir [1]

**Örnek 3.2.2:**  $X, Y$  tanım cümleleri  $M$ 'in bir  $U$  açığıyla kesişecek şekilde  $M$ 'de iki vektör alanı olsun.

$$\begin{aligned} L : \mathfrak{F}_U &\rightarrow \mathfrak{F}_U \\ f &\rightarrow L(f) = X(Yf) - Y(Xf) \end{aligned}$$

global fonksiyonu bir diferensiyel operatördür.

Bunu göstermek için tanımdaki (i) ve (ii) aksiyomlarının sağlandığını göstereceğiz.

$$i) \text{Dom}(Lf) = U \cap \text{Dom}f$$

$$\begin{aligned} \text{Dom}(X(Yf)) &= U \cap (\text{Dom}(Yf)) \\ &= U \cap (U \cap \text{Dom}f) \\ &= U \cap \text{Dom}f \end{aligned}$$

Benzer şekilde

$$\text{Dom}(Y(Xf)) = U \cap \text{Dom}f$$

dir. O halde

$$\text{Dom}(Lf) = \text{Dom}(X(Yf) - Y(Xf)) = U \cap \text{Dom}f$$

dir.

$$ii) L(fg) = L(f)g + fL(g)$$

$$U \cap \text{Dom}f \neq \emptyset, U \cap \text{Dom}g \neq \emptyset \Rightarrow \text{Dom}f \cap \text{Dom}g \neq \emptyset$$

$$\begin{aligned}
X(Y(fg)) &= X(fY(g) + gY(f)) \\
&= X(fY(g)) + X(gY(f)) \\
&= Y(g)X(f) + fX(Yg) + Y(f)X(g) + gX(Yf)
\end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde

$$Y(X(fg)) = X(g)Y(f) + fY(Xg) + X(f)Y(g) + gY(Xf)$$

dır.

$$\begin{aligned}
L(fg) &= X(Y(fg)) - Y(X(fg)) \\
&= f[X(Yg) - Y(Xg)] + g[X(Yf) - Y(Xf)] \\
&= fL(g) + gL(f)
\end{aligned}$$

Ayrıca  $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall f, g \in \mathfrak{F}_U$  için

$$L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$$

dır. Yani  $L, \mathbb{R}$  lineerdir.

O halde  $L : \mathfrak{F}_U \rightarrow \mathfrak{F}_U$  diferensiyel operatördür.

$L, U$  üzerinde bir diferensiyel operatör olduğundan yukarıdaki teorem gereğince  $U$  üzerinde bir tek vektör alanı tarafından elde edilir.  $L, XY - YX$  vektör alanı ile elde edilir. Bu vektör alanı  $[X, Y]$  ile gösterilir ve  $X, Y$ 'nin Lie parantezi olarak adlandırılır.

$M$  üzerindeki bütün vektör alanlarının cümlesi  $\mathfrak{F}_M^1$  ile gösterilir.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_M^1 \times \mathfrak{F}_M^1 &\rightarrow \mathfrak{F}_M^1 \\
(X, Y) &\rightarrow [X, Y]: \mathfrak{F}_U \rightarrow \mathfrak{F}_U
\end{aligned}$$

dönüşümü  $\mathbb{R}$ -bilineerdir ve  $Dom[X, Y] = DomX \cap DomY$  dır.

Bilineerlik:  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  ve  $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{F}_M^1$  için

$$\begin{aligned}
[aX + bY, Z] &= a[X, Y] + b[Y, Z] \\
[X, aY + bZ] &= a[X, Y] + b[X, Z]
\end{aligned}$$

olduğunu göstereceğiz.  $\forall f \in \mathfrak{F}_U$  için

$$\begin{aligned}
[aX + bY, Z](f) &= (aX + bY)(Zf) - Z(aX + bY)(f) \\
&= aX(Zf) + bY(Zf) - Z(aX(f) + bY(f)) \\
&= aX(Zf) + bY(Zf) - aZ(Xf) - bZ(Yf) \\
&= a(X(Zf) - Z(Xf)) + b(Y(Zf) - Z(Yf)) \\
&= (a[X, Z] + b[Y, Z])(f)
\end{aligned}$$

Eşitlik  $\forall f \in \mathfrak{F}_U$  için doğru olduğundan fonksiyon eşitliği tanımından

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

dır. Diğeri de benzer şekilde gösterilebilir.

$[, ]$ 'nin  $\mathbb{R}$ -bilineerliği ve  $Dom[X, Y] = DomX \cap DomY$  özelliklerinden dolayı aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.2.2:**  $M$  bir dif.bilir manifold,  $U \subset M$  ( $M$ 'nin  $C^\infty$  yapısından indirgenen topolojiye göre açık)  $X, Y \in \mathfrak{F}_M^1$  için

$$[X|_U, Y|_U] = [X, Y]|_U$$

dır.

**İspat:**  $DomX = V$ ,  $DomY = W$  olsun.  $U \cap V$  üzerinde  $X|_U - X = 0$  dır.  $U \cap V \cap W$  üzerinde de  $[X|_U - X, Y] = 0$  dır. Öyleyse  $U \cap V \cap W$  üzerinde Lie parantezinin bilinearliğini kullanırsak

$$[X|_U, Y] - [X, Y] = 0$$

$$[X|_U, Y] = [X, Y]$$

dır. Buradan

$$[X|_U, Y] = [X, Y]|_U$$

yazılabilir.  $DomX \cap DomY = V \cap W$  olduğundan eşitliğin her iki yanı da  $U \cap V \cap W$  de tanımlıdır.

Benzer şekilde  $U \cap V \cap W$  üzerinde

$$[X, Y|_U] = [X, Y]|_U$$

dur.

$$[X|_U - X, Y|_U - Y] = 0$$

$$[X|_U, Y|_U] - [X|_U, Y] - [X, Y|_U] + [X, Y] = 0$$

$$[X|_U, Y|_U] - [X, Y]|_U = 0$$

$$[X|_U, Y|_U] = [X, Y]|_U$$

$\mathfrak{S}_M^{-1}$  bir vektör uzayıdır.  $\mathfrak{S}_M^{-1}$  üzerinde  $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$  işlemi  $\mathbb{R}$ -bilineerdir.

$$\begin{aligned} [, ]: \mathfrak{S}_M^{-1} \times \mathfrak{S}_M^{-1} &\rightarrow \mathfrak{S}_M^{-1} \\ (X, Y) &\rightarrow [X, Y] \end{aligned}$$

Ayrıca bu dönüşüm bir iç işlemdir. Anti-simetriktir. Dolayısıyla değişme özelliği yoktur. Yani

$$\forall X, Y \in \mathfrak{S}_M^{-1} \text{ için } [X, Y] = -[Y, X]$$

dır. Gerçekten,  $\forall f \in \mathfrak{S}_U$  için

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X(Yf) - Y(Xf) \\ &= -(Y(Xf) - X(Yf)) \\ &= -[Y, X](f) \\ \Rightarrow [X, Y] &= -[Y, X] \end{aligned}$$

Ayrıca Jacobi özdeşliğini sağlar. Bunu aşağıdaki teoremde vereceğiz.

**Teorem 3.2.3:**  $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{S}_M^{-1}$  için

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$

dır [1].

**Tanım 3.2.2:**  $(V, +, (\mathbb{R}, +, \cdot), \cdot)$  bir vektör uzayı  $x: V \times V \rightarrow V$  bir işlem olsun. Eğer çarpma işlemi bileer, anti-simetrik ve Jacobi özdeşliğini sağlarsa bu işlemle



birlikte bu vektör uzayına Lie Cebiri denir [1].

Buna göre  $\mathfrak{S}_M^1$  bir Lie cebiridir.

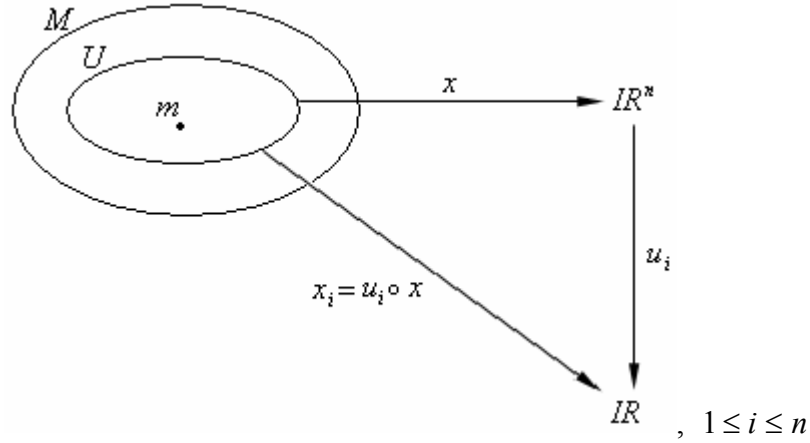
$$(\mathfrak{S}_M^1, +, (IR, +, \cdot), [ \ , \ ])$$

### 3.3. Tanjant Demeti

$M$  bir dif.bilir bir manifold olsun.  $M$ 'nin tanjant demeti üzerinde bir  $C^\infty$  yapı

tanımlayacağız.  $m \in U \subset M$  ve  $(U, x)$   $M$ 'de bir harita olsun.  $Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m\right\}_{1 \leq i \leq n} = T_m M$

ve  $Sp\{e_i\}_{1 \leq i \leq n} = IR^n$  dir.



Şekil 3.3.1

$$\varphi_m : T_m M \rightarrow IR^n$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m \rightarrow \varphi_m \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m \right) = e_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

$\{(T_m M, \varphi_m)\}$ ,  $T_m M$  'nin tek haritalı bir  $C^\infty$  atlasıdır.

$$TM = \bigcup_{m \in M} T_m M$$

üzerinde bir  $C^\infty$  yapı tanımlayacağız.

$$\begin{aligned}\pi : TM &\rightarrow M \\ V_m &\rightarrow m\end{aligned}$$

$m \in U$  olmak üzere  $(U, x), M$  'de bir harita olsun.

$$\pi^{-1}(m) = V_m \in T_m M$$

$\forall V \in \pi^{-1}(U) \in$  vektörü  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$  olmak üzere

$$V_m = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m$$

olarak tek türlü yazılabilir.

$$\begin{aligned}(\tilde{x}, y) : \pi^{-1}(U) \subset TM &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ V_m &\rightarrow (x(m), a)\end{aligned}$$

H1)  $x, 1:1$  ve  $V_m = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m$  yazılışı tek olduğundan  $(\tilde{x}, y)$  dönüşümü 1:1

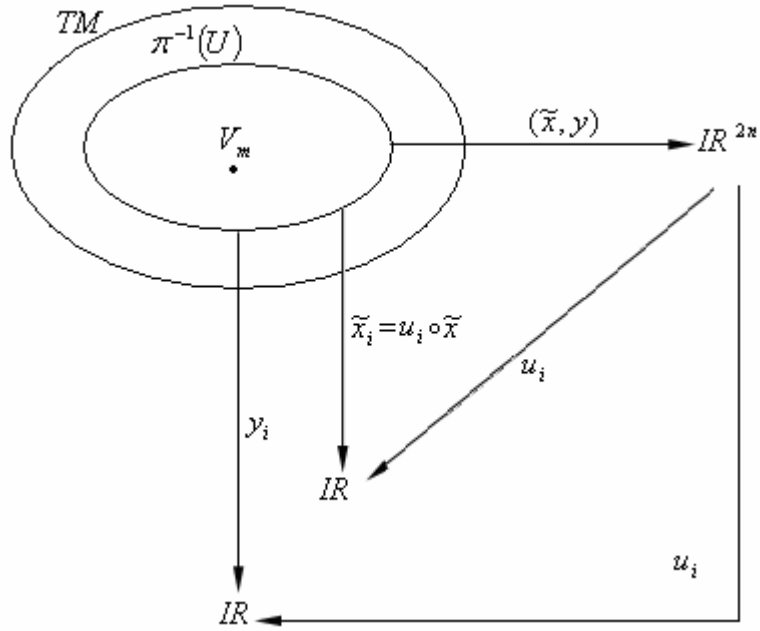
dir.

H2)  $(\tilde{x}, y)(\pi^{-1}(U)) = \underbrace{x(U)}_{\subset \mathbb{R}^n} \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{2n}$  açık

$(\pi^{-1}(U), (\tilde{x}, y)), TM$  'de bir haritadır.

Bu haritaya  $TM$  'nin  $M$  'deki  $(U, x)$  haritasına karşılık gelen standart haritası

denir.



Şekil 3.3.2

$TM$  'nin  $(\pi^{-1}(U), (\tilde{x}, y))$  haritasına göre koordinat fonksiyonlarını elde edelim.

$$x_i = u_i \circ x$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \tilde{x}_i(V_m) &= (u_i \circ \tilde{x})(V_m) \\ &= u_i \circ (\tilde{x}(V_m)) \\ &= u_i \circ (x(m)) \\ &= x_i(m) \\ &= (x_i \circ \pi)(V_m) \end{aligned}$$

elde edilir.  $\forall V_m \in T_m M$  için eşitlik sağlandığından fonksiyon eşitliği tanımlı gereğince

$$\tilde{x}_i = x_i \circ \pi$$

dır.

$$V_m = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m, y_i(V_m) = a_i$$

dir. Ayrıca  $V_m(x_i) = \sum_{j=1}^n a_j \cdot \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \Big|_m = a_i$  olduğundan  $y_i(V_m) = V_m(x_i)$

$$(\tilde{x}, y)(V_m) = (x_1(m), x_2(m), \dots, x_n(m), a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{2n}$$

dir.

$$\tilde{x}_i(V_m) = x_i(m)$$

$$y_i(V_m) = a_i$$

Burada  $(\tilde{x}_i, y_i)$ ,  $(\pi^{-1}(U), (\tilde{x}, y))$  haritasına göre  $TM$ 'nin  $i$ .nci koordinat fonksiyonudur.

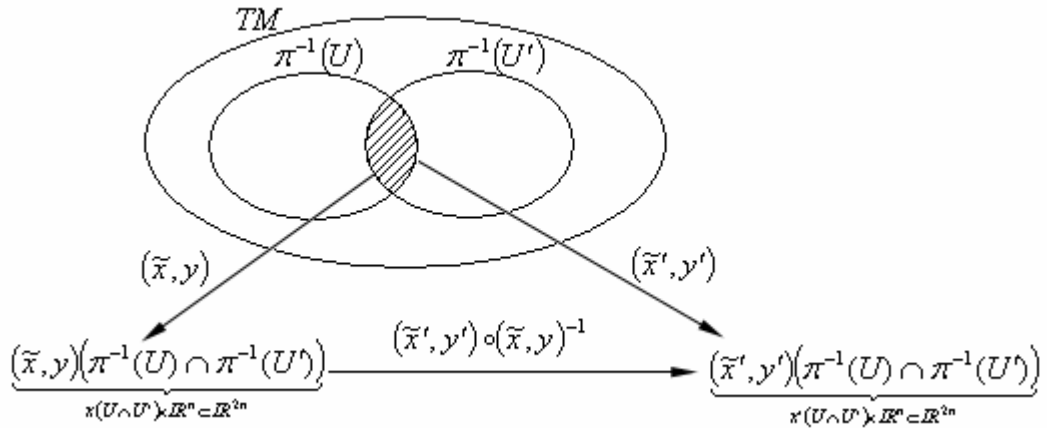
$$A1) \bigcup_{i \in I} U_i = M \text{ olmak üzere}$$

$$\bigcup_{i \in I} \pi^{-1}(U_i) = TM$$

dir.

A2)  $V_m \in TM$  noktasında  $TM$ 'nin bir diğer haritası  $(\pi^{-1}(U'), (\tilde{x}', y'))$  olsun

$\exists \pi^{-1}(U') \cap \pi^{-1}(U) \neq \emptyset$  dir.



Şekil 3.3.3

$$\begin{aligned}
(\tilde{x}, y)(V_m) &= (x(m), y(V_m)) = (z, a) \rightarrow ((\tilde{x}', y') \circ (\tilde{x}, y)^{-1})(z, a) \\
(\tilde{x}', y')((\tilde{x}, y)^{-1}(z, a)) &= (\tilde{x}', y')(V_m) = (x'(m), y'(V_m)) \\
&= (x'(x^{-1}(z)), y'(y^{-1}(a))) \\
&= ((x' \circ x^{-1})(z), (y' \circ y^{-1})(a)) \\
(\tilde{x}', y')((\tilde{x}, y)^{-1}(z, a)) &= ((x' \circ x^{-1})(z), (y' \circ y^{-1})(a)) \dots (*)
\end{aligned}$$

Şimdi (\*) ifadesindeki,  $(y' \circ y^{-1})(a)$  'yı ele alalım.

$$\begin{aligned}
(y' \circ y^{-1})(a) &= y'(y^{-1}(a)) \\
y^{-1}(a) = V_m &= \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n a_i \left[ \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \Big|_m \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_m \right] \\
&= \sum_{j=1}^n \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \Big|_m \cdot a_i \right] \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_m \\
&= \sum_{j=1}^n (J(x' \circ x^{-1}, z) \cdot a) \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_m \\
(y' \circ y^{-1})(a) &= J(x' \circ x^{-1}, z) \cdot a
\end{aligned}$$

olur.

$$(\tilde{x}', y')((\tilde{x}, y)^{-1}(z, a)) = ((x' \circ x^{-1})(z), J(x' \circ x^{-1}, z) \cdot a)$$

$(\tilde{x}', y') \circ (\tilde{x}, y)^{-1}$  dönüşümü dif.bilirdir. Çünkü  $x' \circ x^{-1}$ ,  $(U, x)$  ve  $(U', x')$  haritalarının uyumlu olduğundan dif.bilirdir ve Jakobiye matris dif.bilirdir. Ayrıca  $(\tilde{x}', y') \circ (\tilde{x}, y)^{-1}$ , 1:1 dir. Benzer şekilde  $(\tilde{x}, y) \circ (\tilde{x}', y')^{-1}$  de dif.bilirdir. Buradan  $(\tilde{x}', y') \circ (\tilde{x}, y)^{-1}$  dönüşümü diffeomorfizmdir. O halde  $(\pi^{-1}(U), (\tilde{x}, y))$  ve  $(\pi^{-1}(U'), (\tilde{x}', y'))$  haritaları uyumludur.

Sonuç olarak  $\{(\pi^{-1}(U), (\tilde{x}, y)) \mid (U, x) \in A\}$   $TM$  de bir  $C^\infty$  yapıdır (Burada  $A$ ,  $M$  nin  $C^\infty$  atlasıdır). Buna göre  $TM$ ,  $2n$ -boyutlu bir dif.bilir manifolddur.

**Teorem 3.3.1:**  $M$  bir Hausdorff manifoldu ise  $TM$  'de bir Hausdorff manifolddur [1].

**Teorem 3.3.2:**  $M$  ile  $M'$  dif.bilir manifoldlar olmak üzere  $\phi: M \rightarrow M'$  dif.bilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda  $\phi$  'nin türev dönüşümü olan  $\phi_*: TM \rightarrow TM'$  dönüşümü de dif.bilirdir [1].

**Teorem 3.3.3:**  $M$  bir dif.bilir manifold olmak üzere  $\pi: TM \rightarrow M$  dönüşümünün bir kesiti  $X: M \rightarrow TM$  olsun.

$X$ , bir vektör alanıdır  $\Leftrightarrow X$ , dif.bilirdir [1].

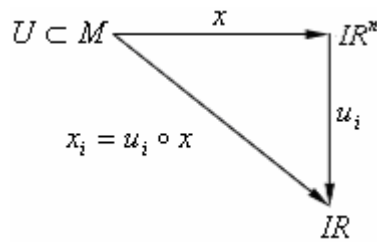
**Tanım 3.3.1:**  $M$  bir dif.bilir manifold  $U \subset M$  açık ve  $(U, x)$  bir harita olsun.

$\forall m \in U$  için  $X_1|_m, X_2|_m, \dots, X_n|_m \in T_m M$  tanjant vektörlerinin oluşturduğu cümle lineer bağımsız ise  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  cümlesine bağımsızdır denir. Burada  $\forall X_i, 1 \leq i \leq n$  bir vektör alanıdır.  $\forall X_i \in \mathfrak{F}_U^1$  dir [1].

**Sonuç 3.3.1:**  $\forall X \in \mathfrak{F}_U^1$  için  $\{X\}$  bağımsızdır  $\Leftrightarrow \forall m \in U \subset M$  için  $X_m \neq 0$  dir

**Örnek 3.3.1:**  $\text{boy} M = n$ ,  $(U, x)$  haritasına göre koordinat fonksiyonları  $x_1, x_2, \dots, x_n$

olmak üzere  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right\}$ ,  $U \subset M$  üzerinde bağımsızdır.



**Şekil 3.3.4**

$M$ 'nin  $\forall(U, x)$  haritası için bağımsız vektör alanlarından bahsedilebilir. Fakat bu vektör alanları  $M$ 'nin tamamında bağımsız olmak zorunda değildir. Eğer  $M$  tek

haritalı bir atlasla tanımlanırsa  $M$ 'nin tamamında bağımsız vektör alanlarından bahsedilebilir.

Aşağıdaki örnek, bir haritasına göre verilen bağımsız vektör alanının diğer haritasına göre de bağımsız vektör alanı olduğunu ifade eder.

**Örnek 3.3.2:**  $S^1 = \{(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

$$U = \{(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \mid 0 < s < 1\} \subset S^1$$

$$x : U \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p = (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \rightarrow x(p) = s$$

$$U' = \left\{ (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \mid -\frac{1}{2} < s < \frac{1}{2} \right\} \subset S^1$$

$$x' : U' \rightarrow \mathbb{R}$$

$$q = (\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \rightarrow x'(q) = s$$

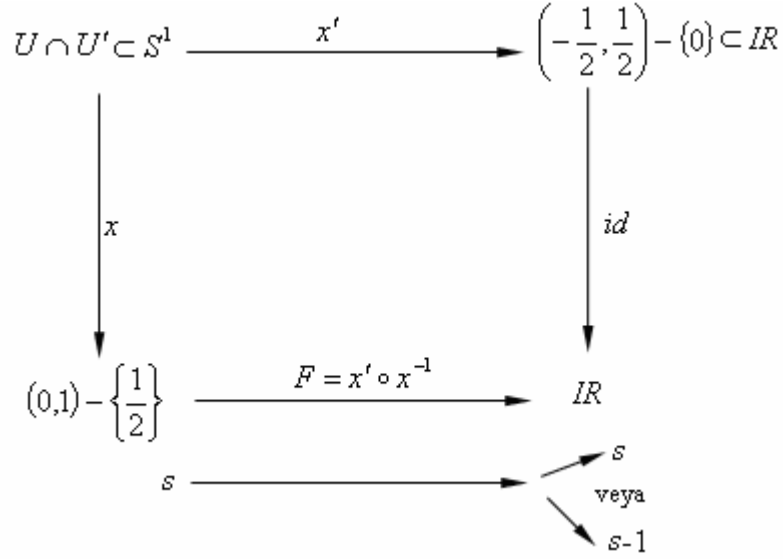
$\{(U, x), (U', x')\}$  cümlesi  $S^1$ 'in bir  $C^\infty$  atlasıdır.

$$U \cap U' = S^1 - \{(0,1), (0,-1)\}$$

$$\begin{aligned} x' \circ x^{-1} : x(U \cap U') = (0,1) - \left\{ \frac{1}{2} \right\} &\rightarrow x'(U \cap U') = \left( -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right) - \{0\} \\ s &\rightarrow (x' \circ x^{-1})(s) = x'(\sin 2\pi s, \cos 2\pi s) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} s, & 0 < s < \frac{1}{2} \\ s-1, & \frac{1}{2} < s < 1 \end{cases}$$

olduğundan  $x' \circ x^{-1}$  polinom fonksiyonu olup diffeomorfizmdir.



**Şekil 3.3.5**

O halde  $F$ ,  $x'$  fonksiyonunun  $(U, x)$  haritasına göre koordinat temsilcisidir.

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial s} = 1$$

dir. Ayrıca

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x'}$$

olduğundan  $U \cap U'$  de  $\frac{\partial}{\partial x}$  ile  $\frac{\partial}{\partial x'}$  çakışır.  $S^1$ 'de aynı vektör alanını tanımlarlar.

**Tanım 3.3.2:**  $M, M'$  dif.bilir manifoldlar olmak üzere  $\phi: M \rightarrow M'$  bir global dif.bilir fonksiyon ve  $X, X'$  sırasıyla  $M, M'$  üzerinde vektör alanları olsun. Eğer  $\phi_* \circ X = X' \circ \phi$  ise  $X, X'$  vektör alanlarına  $\phi$ -bağlı vektör alanları denir [1].



**Tanım 3.3.3:**  $M$  dif.bilir bir manifold olsun.  $M$  de kendi üzerine bir diffeomorfizme  $M$  nin bir transformasyonu denir [1].

**Tanım 3.3.4:**  $\phi$ ,  $M$  nin bir transformasyonu ve  $X$ ,  $M$  üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer  $X$  kendine  $\phi$ -bağlı ise  $X$ 'e  $\phi$  altında invaryanttır denir [1].

### 3.4. Birinci Mertebeden Diferensiyel Denklemler

**Tanım 3.4.1:** Türev yada diferensiyel kapsayan denklemlere diferensiyel denklem denir.

$M$  bir dif.bilir manifold,  $U \subset M$  açık bir cümle olsun.

$\mathfrak{F}_U = \{f \mid f : U \subset M \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R}\}$  cümlesini göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} X : \mathfrak{F}_U &\rightarrow \mathfrak{F}_U \\ f &\rightarrow Xf \end{aligned}$$

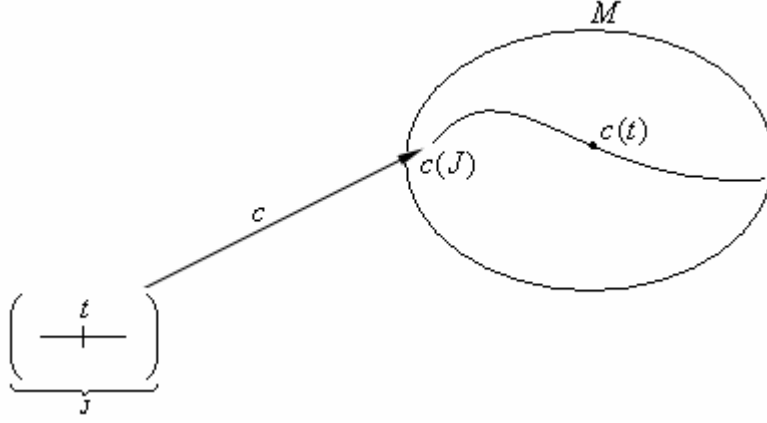
vektör alanı bir diferensiyel operatördür.

Bir  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  dif.bilir fonksiyon için

$$Xf = 0$$

şartı  $M$  manifoldu üzerinde bir kısmi diferensiyel denklemdir. Böyle bir vektör alanının bir adi diferensiyel denklem tanımladığını göstereceğiz.

**Tanım 3.4.2:**  $M$  bir dif.bilir.manifold ve  $J \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık olmak üzere  $c : J \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  dif.bilir fonksiyonuna  $M$  üzerinde bir eğri denir [1].



Şekil 3.4.1

$IR$  üzerinde  $\{(IR, t = id)\}$   $C^\infty$  atlasını ele alalım.  $IR$ 'nin bu haritasına karşılık gelen vektör alanı  $\frac{d}{dt}$  dir. Teorem 3.3.2'den  $c: J \rightarrow M$  dif.bilir ise

$c_*: T(J) \rightarrow TM$  de dif.bilirdir.  $m \in M$  olmak üzere  $T_m(J) \subset T_{c(m)}(IR) = IR$

$$c' = c_* \circ \frac{d}{dt}: J \subset IR \rightarrow TM$$

dönüşümü de dif.bilirdir. Gerçekten,

$$c: J \subset IR \rightarrow M, m \in J, c(m) = m'$$

olmak üzere

$$c_{*m}: T_m(J) \rightarrow T_{m'}M$$

$$\frac{d}{dt}|_m \rightarrow c_{*m}\left(\frac{d}{dt}|_m\right) = \left(c_{*m} \circ \frac{d}{dt}\right)|_m: \mathfrak{S}(m') \rightarrow IR$$

$$\begin{aligned} t = id \rightarrow \left(c_{*m} \circ \frac{d}{dt}\right)|_m(t) &= \frac{d}{dt}|_m(t \circ c) \\ &= \frac{d}{dt}|_m(c) \\ &= \frac{dc}{dt}|_m = c'(m) \end{aligned}$$

olduğundan

$$c' = c_* \circ \frac{d}{dt}$$

dir.  $\frac{d}{dt}$  ve  $c$  dif.bilir olduğundan  $c_*$  da dif.bilirdir. Buradan  $c' = c_* \circ \frac{d}{dt}$  da

dif.bilirdir. O halde  $c'$ ,  $TM$  üzerinde bir eğridir.

$$\pi : TM \rightarrow M$$

olmak üzere

$$c = \pi \circ c'$$

dir.  $c'$ 'ye  $c$ 'nin  $TM$  içine kanonik lifti denir.

$X$ ,  $M$  üzerinde bir vektör alanı olsun. Bu durumda

$$c' = X \circ c$$

$M$  üzerinde I. mertebeden bir diferensiyel denklemdir.

**Tanım 3.4.3:**  $X$ ,  $M$  üzerinde bir vektör alanı olmak üzere

$$\begin{cases} c' = X \circ c \\ c(0) = m \end{cases}$$

şartını sağlayan  $c$  eğrisine  $X$  vektör alanının  $m$ 'den geçen bir integral eğrisi

ya da  $m$  başlangıç şartlı bir çözümü denir.

$c : J \rightarrow M$  bir eğri olsun.  $U \subset M$  açık  $\ni U \cap c(J) \neq \emptyset$  olacak şekilde

$M$  de bir  $(U, x)$  haritası ele alalım.

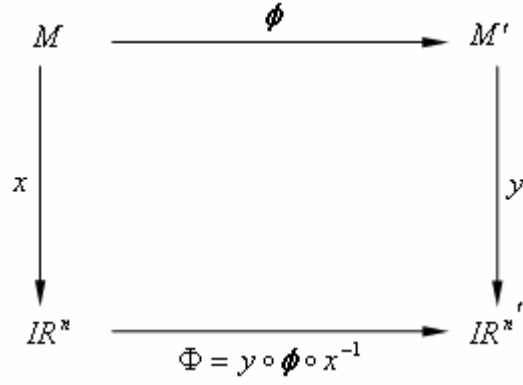
$x : U \subset M \rightarrow IR$  olmak üzere

$$C = x \circ c$$

dir. Burada  $C$ ,  $c$ 'nin koordinat temsilcisidir.  $s \in c^{-1}(U)$  ise

$$c'(s) = \sum_{i=1}^n \frac{dC_i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(s)}$$

dir. Gerçekten,



Şekil 3.4.2

$x, m \in M$  ve  $y, \phi(m) = m'$ 'de haritalar olmak üzere

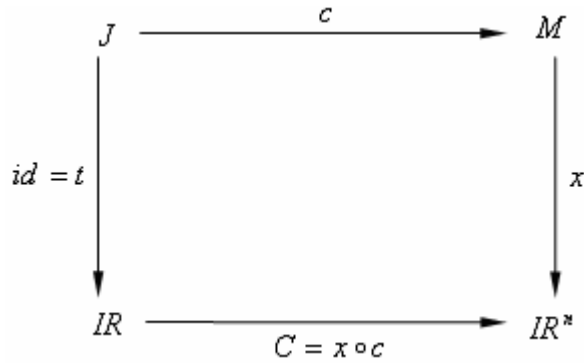
$$\begin{aligned}
 \phi_{*m} : T_m M &\rightarrow T_{m'} M' \\
 X &\rightarrow \phi_{*m}(X) = Y
 \end{aligned}$$

diyelim.

$$Y(y_i) = (\phi_{*m}(X))(y_i) = X(y_i \circ \phi)|_m$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m &\rightarrow \phi_{*m} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m \right) = \sum_{j=1}^{n'} \frac{\partial}{\partial x_i} (y_j \circ \phi) \Big|_m \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{\phi(m)} \\
 &= \sum_{j=1}^{n'} \underbrace{\frac{\partial (y_j \circ \phi)}{\partial x_i} \Big|_m}_{\left[ \frac{\partial (y_j \circ \phi)}{\partial x_i} \Big|_m \right] = J(\phi, m) \in \mathbb{R}^{n'}} \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{m'}
 \end{aligned}$$

dır. Buna göre



Şekil 3.4.3

$$c_{*s} : T_s J \rightarrow T_{c(s)} M$$

$$X_s \rightarrow c_{*s} (X_s)$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_s \rightarrow c_{*m} \left( \frac{d}{dt} \Big|_s \right) = \underbrace{\left( c_* \circ \frac{d}{dt} \right)}_{c'} (s) = c'(s) \in T_{c(s)} M$$

$$T_{c(s)} M = Sp \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(s)} \right\} \text{ olduğundan}$$

$$c_{*m} \left( \frac{d}{dt} \Big|_s \right) = \frac{d}{dt} \Big|_s \underbrace{(x_i \circ c)}_{C_i} = \frac{dC_i}{dt} \Big|_s$$

$$\frac{d}{dt} \Big|_s \rightarrow \underbrace{c_{*m} \left( \frac{d}{dt} \Big|_s \right)}_{c'} = \sum_{i=1}^n \frac{dC_i}{dt} \Big|_s \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(s)}$$

dır. Buradan

$$c'(s) = \sum_{i=1}^n \frac{dC_i}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{c(s)}$$

elde edilir.

$U$  üzerinde

$$X = \sum_i^n f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

şeklinde tanımlı bir  $X$  vektör alanının integral eğrisi  $c$  ise

$$\begin{cases} c' = X \circ c \\ c(0) = m \end{cases}$$

dir. Ayrıca yukarıdaki eşitliklerden

$$\frac{dC_i}{dt} = f_i(C_1, \dots, C_n), \quad 1 \leq i \leq n$$

elde edilir. Bu denklemler çözülerek  $U$  üzerindeki integral eğrisi bulunur.

**Örnek 3.4.1:**  $\mathbb{R}^2$ 'de  $\{( \mathbb{R}^2, id = x )\}$  atlası ile tanımlı

$$X = x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

vektör alanını ele alalım.  $\mathbb{R}^2$ 'de

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow c(t) = (c_1(t), c_2(t))$$

eğrisinin  $X$  vektör alanının bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{dc_1}{dt} = c_1, \quad \frac{dc_2}{dt} = c_2$$

olmalıdır.

$$c'(t) = X \circ c$$

ise,

$$\frac{dc_i}{dt} = c_i, i = 1, 2$$

olmalıdır. Buradan

$$\begin{aligned} \frac{dc_i}{c_i} = dt &\Rightarrow \ln c_i + \ln k = t \\ &\Rightarrow \ln(c_i \cdot k) = t \\ &\Rightarrow c_i \cdot k = e^t \\ &\Rightarrow c_i = \frac{1}{k} e^t \end{aligned}$$

olur. O halde

$$i = 1 \text{ için } \frac{1}{k} = A \text{ ve } i = 2 \text{ için } \frac{1}{k} = B$$

denirse

$$c_1 = Ae^t \text{ ve } c_2 = Be^t$$

olur.

$$c(t) = (Ae^t, Be^t) \text{''12}$$

bulunur.  $\mathbb{R}^2$ 'de verilen bir  $(a,b)$  noktasından geçen  $(c(0) = (a,b))$  integral eğrisi

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow c(t) = (ae^t, be^t)$$

elde edilir.  $(0,0)$  dan geçen integral eğrisi sabittir. Çünkü

$$X|_0 = 0 = (0,0)$$

dır. Buradan

$$c' = (c_1', c_2') = (0,0)$$

$$c_1' = 0 \wedge c_2' = 0$$

$$c_1 = \text{sabit}, c_2 = \text{sabit}$$

İntegral eğrisi sabit olduğundan bu şekildeki sabit noktalara vektör alanının bir kritik noktası denir.

Örnekte  $X$ 'in kritik noktası  $(0,0)$  dir.

**Tanım 3.4.4:** Bir vektör alanının  $\mathbb{R}^2$ 'nin her noktasından geçen ve tanım bölgesi  $\mathbb{R}^2$  olan bir integral eğrisi varsa, bu vektör alanı tamdır denir [1].

**Örnek 3.4.2:**  $\mathbb{R}^2$ 'de  $\{( \mathbb{R}^2, id = x )\}$  atlasına göre tanımlı

$$X = (e^{x_1})^{-1} \frac{\partial}{\partial x_1} + 0 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

vektör alanını alalım

$c = (c_1, c_2)$  'nin  $X$ 'in bir integral eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{dc_1}{dt} = e^{-c_1}, \frac{dc_2}{dt} = 0$$

olmasıdır.

$$\frac{dc_1}{dt} = e^{-c_1} \text{ ise}$$

$$e^{c_1} = t + A, A \text{ sabit}$$

$$c_1 = \ln(t + A)$$

$$\frac{dc_2}{dt} = 0 \text{ ise}$$

$$c_2 = B, B \text{ sabit}$$

olduğundan

$$c(t) = (\ln(t + A), B)$$

elde edilir.

$$c(0) = (a, b) \Rightarrow c(0) = (\ln A, B)$$

$$\Rightarrow \ln A = a, B = b$$

$$\Rightarrow A = e^a, B = b$$

$$c(t) = (\ln(t + e^a), b)$$

şeklinde elde edilen eğri  $X$ 'in  $(a, b)$  noktasından geçen bir integral eğrisidir.

$\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  olduğundan  $c : (-e^a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  dir.  $c$ ,  $\mathbb{R}$ 'nin tamamında tanımlı olmadığından  $X$ , tam değildir. Ayrıca  $(0,0)$ 'da

$$X|_0 = (e^{-x_1}, 0)|_{(0,0)} = (1,0) \neq (0,0)$$

olduğundan  $X$ 'in kritik noktası yoktur.

**Örnek 3.4.3:**  $S^2$ 'yi Örnek 3.1.3'te verilen  $\{(U, x), (V, y)\}$  stereografik atlası ile ele alalım. Örnek 3.1.3'te verilen  $S^2$  üzerinde bir  $X$  vektör alanını

$$U \text{ üzerinde } (x_1 - x_2) \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_1 + x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$V \text{ üzerinde } (-y_1 - y_2) \frac{\partial}{\partial y_1} + (y_1 - y_2) \frac{\partial}{\partial y_2}$$



vektör alanları yardımıyla tanımlayalım. Bu durumda  $X$ 'in kritik noktaları  $\mathbb{R}^3$ 'ün  $(0,0,\mp 1)$  noktalarıdır. Öyleyse  $X$ 'in sabit olmayan her bir integral eğrisi  $U \cap V$ 'de yatar. Ayrıca,  $X$ 'in her bir integral eğrisi  $\mathbb{R}$ 'de tanımlı olduğundan  $X$  tamdır.

Gerçekten,  $c$  bir integral eğrisi ise

$$\begin{array}{ccc}
 J & \xrightarrow{c} & U \cap V \subset S^2 - (0,0,\mp 1) \\
 \downarrow id & & \downarrow x \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{C = x \circ c} & \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}
 \end{array}$$

**Şekil 3.4.4**

$$C = x \circ c = (C_1, C_2)$$

$$\begin{cases}
 \frac{dC_1}{dt} = C_1 - C_2 \\
 \frac{dC_2}{dt} = C_1 + C_2
 \end{cases}$$

diferensiyel denklem sistemi çözümlerse

$$C(t) = (C_1(t), C_2(t)) = (e^t(A \cos t + B \sin t), e^t(A \sin t - B \cos t)), A, B \in \mathbb{R}$$

elde edilir.  $c(0) = m = (m_1, m_2, m_3) \neq (0,0,\mp 1)$  başlangıç şartı için

$$C(0) = (A, -B) = x(m) = \left( \frac{m_1}{1+m_3}, \frac{m_2}{1+m_3} \right)$$

olup

$$C(t) = \left( e^t \left( \frac{m_1}{1+m_3} \cos t - \frac{m_2}{1+m_3} \sin t \right), e^t \left( \frac{m_1}{1+m_3} \sin t + \frac{m_2}{1+m_3} \cos t \right) \right)$$

elde edilir. Burada

$$\frac{m_1}{1+m_3} = a \cos b \quad \text{ve} \quad \frac{m_2}{1+m_3} = a \sin b$$

denirse

$$(x \circ c)(t) = (a \cos(t+b)e^t, a \sin(t+b)e^t)$$

dir. Burada  $a, b \in \mathbb{R}$  sayıları  $U \cap V$  üzerinde  $c(0)$  değeri ile bellidir ve

$$x \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

dir.

$S^2$  üzerinde sabit olmayan bir  $c$  integral eğrisinin  $x \circ c$  izdüşüm eğrisi  $(0,0,1)$  noktasından  $z_3 = 0$  düzlemi üzerine bir eş açılı spiraldir. Bu eğri  $(0,0,0)$  orijin noktasından geçen düzlemin doğruları ile eşit açı altında kesişir. Stereografik dönüşüm bir konformal dönüşüm yani açı koruyan bir dönüşüm olduğundan  $c$  eğrisi de  $S^2$ 'nin  $(0,0,\mp 1)$  noktasından geçen büyük çemberleri ile sabit açı yaparlar.

### 3.5. Maximal İntegral Eğrileri

Maksimal integral eğrilerinin varlığını gösterebilmek için diferensiyellenebilir denklemler teorisinden aşağıdaki teoremlere ihtiyaç vardır.

**Teorem 3.5.1:**  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dif.bilir bir fonksiyon ve  $a \in \text{Dom} f$  olsun. Bu durumda  $\exists V \subset \mathbb{R}^n \in N(a)$  ve  $J \subset \mathbb{R}$  açığı vardır öyle ki verilen  $\forall z \in V$  için  $z$ 'den geçecek ve

$$\frac{dC_i}{dt} = f_i(C_1, \dots, C_n) = f_i \circ C, 1 \leq i \leq n$$

olacak şekilde bir tek

$$C_z : J \rightarrow \mathbb{R}^n$$

eğrisi vardır. Üstelik

$$\begin{aligned}\phi : J \times V &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (s, z) &\rightarrow \phi(s, z) = C_z(s)\end{aligned}$$

dönüşümü dif.bilirdir.

**Teorem 3.5.2:**  $M$ , dif.bilir bir manifold,  $m_0 \in M$  ve  $X, M$  üzerinde bir vektör alanı olsun. Bu durumda , bir  $V_0 \in N(m_0)$  ve  $J \subset \mathbb{R}$  açık aralığı vardır öyle ki  $X$ 'in  $J_0$ 'da tanımlı olan ve verilen bir  $m \in V_0$ 'dan başlayan bir integral eğrisi vardır.  $X$ 'in  $m$ 'den başlayan herhangi bir integral eğrisi  $0 \in J_0$ 'ın bir komşuluğunda bu eğri ile çakışır.

**İspat:**  $m_0 \in U$  olmak üzere  $(U, x)$ ,  $M$ 'de bir harita olsun.  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x(U)$  üzerinde dif.bilir bir fonksiyon olmak üzere

$$X|_U = \sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n (f_i \circ x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olsun.  $a = x(m_0)$  alınıp Teorem 3.5.2 kullanılırsa,  $\exists V_0 = x^{-1}(V) \in N(m_0)$ ,

$\exists J_0 = J \subset \mathbb{R}$  (açık aralık)  $\ni c = x^{-1} \circ C : J_0 \rightarrow M$ ,  $X$ 'in bir tek integral eğrisidir ve  $m \in V_0$ ' dan başlar.

**Lemma.3.5.1:**  $Dom c = J$  olmak üzere  $c$ ,  $X$ 'in bir integral eğrisi olsun.  $s \in J$  ve  $\lambda_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\lambda_s(a) = a + s$ ,  $\mathbb{R}$  üzerinde öteleme dönüşümü olmak üzere,  $\alpha = c \circ \lambda_s$   $X$ 'in  $c(s)$ 'den başlayan ve  $Dom \alpha = \lambda_{-s}(J) = J'$  olan bir integral eğrisidir.

**İspat:**

$$\begin{aligned}\alpha' &= \alpha_* \circ \frac{d}{dt} = c_* \circ \lambda_{s*} \circ \frac{d}{dt} \\ &= c_* \circ \frac{d}{dt} \circ \lambda_s \\ &= c' \circ \lambda_s \\ &= (X \circ c) \circ \lambda_s \\ &= X \circ \alpha\end{aligned}$$

O halde  $\alpha$ ,  $X$ 'in bir integral eğrisidir. Burada  $\frac{d}{dt}$ ,  $\lambda_s$  altında invarianttır.

**Teorem 3.5.3:**  $M$ , bir Hausdorff manifoldu ve  $X$ ,  $M$  üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer  $c_1 : J_1 \rightarrow M$  ve  $c_2 : J_2 \rightarrow M$ ,  $M$ 'nin aynı noktasından geçen iki integral eğrisi ise bu iki eğri  $J_1 \cap J_2$ 'de çakışır.

**İspat:**  $S = \{s \mid c_1(s) = c_2(s)\}$  olsun  $J_1 \cap J_2 \subset \mathbb{R}$  olduğunda  $J_1 \cap J_2$ 'de alt cümle topolojisini göz önüne alalım.  $J_1 \cap J_2$  irtibatlı olduğundan  $S \neq \emptyset$  ve  $S$ 'nin  $J_1 \cap J_2$ 'de hem açık hem de kapalı olduğunu gösterirsek  $S = J_1 \cap J_2$  olduğunu yani  $c_1$  ile  $c_2$ 'nin  $J_1 \cap J_2$ 'de çakıştığını göstermiş oluruz.

$s \in S$  olsun. Lemma.3.5.1'den  $X$ 'in  $c_1(s) = c_2(s) = m$ 'den geçen  $\alpha_1 = c_1 \circ \lambda_s$  ve  $\alpha_2 = c_2 \circ \lambda_s$  integral eğrileri vardır. Teorem 3.5.2'den  $\alpha_1$  ve  $\alpha_2$  integral eğrileri  $0$ 'ın bir komşuluğunda çakışır. Dolayısıyla  $c_1$  ve  $c_2$ ,  $s$ 'nin bir komşuluğunda çakışır. Buna göre  $\forall s \in S$ 'nin  $J_1 \cap J_2$ 'de bir komşuluğu vardır. O halde  $S$ ,  $J_1 \cap J_2$ 'de açıktır.

Şimdi  $S$ 'nin,  $J_1 \cap J_2$ 'de kapalı olduğunu göstereceğiz. Bunun için  $S$ 'nin,  $J_1 \cap J_2$ 'deki tümleyeninin  $J_1 \cap J_2$ 'de açık olduğunu göstereceğiz. Eğer  $S$ 'nin tümleyeni  $\emptyset$  ise ispat tamamdır. Aksi halde  $\exists r \in J_1 \cap J_2 \ni c_1(r) \neq c_2(r)$  dir.  $M$ , Hausdorff manifoldu olduğundan  $c_1(r)$  ve  $c_2(r)$ 'nin  $M$ 'de ayrık açık komşulukları vardır. Burada  $c_1$  ve  $c_2$  sürekli olduğundan  $\mathbb{R}$ 'de  $r$ 'nin bir komşuluğunda  $c_1 \neq c_2$  dir ve  $S$ 'nin tanımından bu komşuluk  $J_1 \cap J_2$ 'de  $S$ 'nin tümleyenine aittir. Dolayısıyla  $S$ 'nin tümleyeni açıktır. Böylece  $S$ , kapalıdır. Ayrıca  $c_1$  ile  $c_2$  aynı

noktadan geçtiğinden  $\exists 0 \in S$  dir. Böylece  $S \neq \emptyset$  dir.  $S$ , irtibatlı  $J_1 \cap J_2$  uzayında hem açık hem de kapalı ve  $S \neq \emptyset$  olduğundan  $S = J_1 \cap J_2$  dir.

$S = \{s \mid c_1(s) = c_2(s)\} = J_1 \cap J_2$  olduğundan  $c_1$  ve  $c_2$  integral eğrileri  $J_1 \cap J_2$  'de çakışır.

Teorem 3.5.3 Hausdorff olmayan manifoldlar için geçerli değildir. Bunu aşağıdaki örnekte görebiliriz.

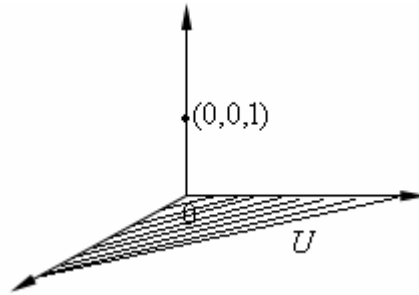
**Örnek.3.5.1:** Bir  $M$  manifoldunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$U = \{(z_1, z_2, 0) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{R}\}$$

olmak üzere

$$M = U \cup \{(0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$$

olsun.



**Şekil 3.5.1**

$$V = (U - \{(0,0,0)\}) \cup \{(0,0,1)\}$$

cümlesini ve

$$x:U \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z_1, z_2, 0) \rightarrow x(z_1, z_2, 0) = (z_1, z_2)$$

$$y:V \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z_1, z_2, 0) \rightarrow y(z_1, z_2, 0) = (z_1, z_2) \neq (0,0) \\ (0,0,1) \rightarrow x(0,0,1) = (0,0)$$

dönüşümlerini göz önüne alırsak  $\{(U, x), (V, y)\}$ ,  $M$  de bir  $C^\infty$  yapı tanımlar. Dikkat edilirse koordinat değişimi  $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 'da *id* dir.  $U$  üzerinde  $\frac{\partial}{\partial x_1}$  ve  $V$  üzerinde

$\frac{\partial}{\partial y_1}$  vektör alanları  $U \cap V$  üzerinde çakıştıklarından  $M$  de bir  $X$  vektör alanı

tanımlar.

$$c_1: \mathbb{R} \rightarrow M \\ s \rightarrow c_1(s) = (s-1, 0, 0)$$

ve

$$c_2: \mathbb{R} \rightarrow M \\ s \rightarrow c_2(s) = \begin{cases} (s-1, 0, 0) & , s \neq 1 \\ (0, 0, 1) & , s = 1 \end{cases}$$

eğrileri  $X$ 'in  $(-1, 0, 0)$  noktasından geçen birer integral eğrisidir ve  $c_1(1) \neq c_2(1)$  olduğundan  $\mathbb{R} \cap \mathbb{R}$  üzerinde  $c_1 \neq c_2$  dir.

Teorem 3.5.3 gereğince bir Hausdorff manifoldunun, bir vektör alanının verilen bir  $m$  noktasından geçen bütün integral eğrilerinin tanım bölgelerinin

birleşimi  $IR$ 'nin  $J(m)$  açık aralığı ile gösterilsin. Buna göre  $m$ 'den geçen bir maksimal integral eğrisi

$$\gamma_m : J(m) \rightarrow M$$

olarak tanımlanır.

Lemma 3.5.1'deki integral eğrisi maksimal integral eğrisi olarak alındığında bu lemma aşağıdaki şekilde genişletilebilir.

**Teorem 3.5.4:**  $\gamma_m$ , bir Hausdorff manifoldunun bir vektör alanının bir  $m$  noktasından geçen maximal integral eğrisi olsun. Eğer  $s \in J(m)$  ise  $\gamma_m \circ \lambda_s$  eğrisi tanım bölgesi  $\lambda_{-s}(J(m))$  olan ve  $\gamma_m(s)$ 'den geçen bir maximal integral eğrisidir.

**İspat:** Lemma 3.5.1'den  $\gamma_m \circ \lambda_s$ , tanım bölgesi  $\lambda_{-s}(J(m))$  olan ve  $m' = \gamma_m(s)$ 'den geçen bir integral eğrisidir.  $\gamma_m \circ \lambda_s$  integral eğrisinin maksimal olduğunu göstereceğiz.  $m'$ 'den geçen integral eğrisi  $\gamma_{m'}$  olsun.  $\gamma_m \circ \lambda_s$ , integral eğrisi  $\lambda_{-s}(J(m)) \subset J(m')$ 'de  $\gamma_{m'}$  ile çakışır. Buna göre  $0 \in J(m)$  olmak üzere  $\lambda_{-s}(0) = -s$  olduğundan  $-s \in J(m')$  dir. Lemma 3.5.1 gereğince  $\gamma_m \circ \lambda_{-s}$ , tanım cümlesi  $\lambda_s(J(m'))$  olan ve  $m = \gamma_{m'}(-s)$  den geçen bir integral eğrisidir. Dolayısıyla

$$\lambda_s(J(m')) \subset J(m)$$

dir. O halde

$$\gamma_m \circ \lambda_s : J(m') \rightarrow M$$

dir. Yani  $\gamma_m \circ \lambda_s = \gamma_{m'}$  dir. Buna göre  $\gamma_m \circ \lambda_s$ , maksimal integral eğrisidir.

**Tanım 3.5.1:**  $M$ , bir Hausdorff manifoldu ve  $X$ ,  $M$  üzerinde bir vektör alanı olsun.

$\forall m \in M$  için  $J(m) = \mathbb{R}$  ise  $X$ 'e tamdır denir.

Bir vektör alanının tam olmasıyla ilgili bir kriter aşağıdaki teoremlerle verilebilir.

**Teorem 3.5.5:** Bir  $M$ , Hausdorff manifoldu üzerinde bir vektör alanının tam olması için gerek ve yeter şart  $0 \in \mathbb{R}$ 'nin  $\mathbb{R}$ 'de bir  $I$  komşuluğu vardır öyle ki, herbir maksimal integral eğrisi  $I$  üzerinde tanımlıdır.

**İspat:** ( $\Rightarrow$ ): Tam vektör alanı  $\mathbb{R}$ 'de tanımlı olduğundan ispat aşıkardır.

( $\Leftarrow$ ):  $0 \in \mathbb{R}$ 'nin  $\mathbb{R}$ 'deki bir  $I$  komşuluğunda herbir maksimal eğrisi tanımlı olsun. Bu durumda, bir  $\varepsilon > 0$  reel sayısı vardır öyle ki herbir maksimal integral eğrisinin tanım cümlesi  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  kapalı aralığını kapsar. Kabul edelim ki  $X$  tam olmasın. Yani  $J(m) \neq \mathbb{R}$  olsun. Bir çelişki elde edeceğiz.

i)  $J(m)$  bir en küçük üst sınıra sahip olsun. Bu sınırı  $b$  ile gösterelim ve  $m' = \gamma_m(b - \varepsilon)$  diyelim. Teorem 3.5.4 gereğince  $J(m') = \lambda_{-b+\varepsilon}(J(m))$  dir.  $J(m')$ 'nin herbir elemanı  $\varepsilon$ 'dan küçüktür. O halde  $[-\varepsilon, \varepsilon] \not\subset J(m')$  dir. Bu hipotezle çelişir.

ii)  $J(m)$  bir en büyük alt sınıra sahip olsun. Bu sınırı  $a$  ile gösterelim ve  $m'' = \gamma_m(a + \varepsilon)$  diyelim. (i)'ye benzer şekilde  $[-\varepsilon, \varepsilon] \not\subset J(m'')$  dir. Bu da hipotezle çelişir.

(i) ve (ii)'den dolayı kabulümüz yanlıştır. Dolayısıyla  $J(m) = \mathbb{R}$ , yani  $X$  tam olmak zorundadır.

**Teorem 3.5.6:** Bir  $M$ , kompakt Hausdorff manifoldu üzerindeki her vektör alanı tamdır.



**İspat:** Teorem 3.5.2 gereğince  $M$ 'nin her bir  $m_0$  noktasına  $M$ 'de  $V_0$  komşuluğunu ve  $\mathbb{R}$ 'de  $0$ 'ı kapsayan bir  $J_0$  açık aralığını karşılık tutabiliriz öyle ki  $V_0$ 'ın verilen herhangi bir noktasından geçen ve tanım cümlesi  $J_0$  olan bir integral eğrisi vardır.  $M$ , kompakt olduğundan bu şekildeki sonlu sayıda  $V_0$ 'lar ile örtülebilir. Bu durumda bunlara karşılık gelen  $J_0$ 'ların arakesiti  $0$ 'ın bir komşuluğudur ve  $M$ 'nin her bir  $m$  noktası için  $J(m)$  tarafından kapsanır. Teorem 3.5.5 gereğince  $M$  üzerindeki her bir vektör alanı tamdır.

**Örnek 3.5.2:**  $S^2$  bir kompakt Hausdorff manifoldu olduğundan Teorem 3.5.6 gereğince  $S^2$  üzerindeki vektör alanları tamdır. Örneğin, Örnek 3.4.3'te verilen vektör alanları tamdır.

### 3.6. Bir Alan Vektörünün Akışı

**Tanım 3.6.1:** Bir  $M$ , Hausdorff manifoldu üzerinde verilen bir  $X$  vektör alanının  $M$ 'nin verilen herhangi bir  $m$  noktasından geçen ve tanım cümlesi  $J(m)$  olan bir  $\gamma_m$  maksimal integral eğrisi vardır.

$$D = \{(s, m) \mid s \in J(m)\} \subset \mathbb{R} \times M$$

olmak üzere tanım cümlesi  $D$  olan

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{R} \times M &\rightarrow M \\ (s, m) &\rightarrow \phi(s, m) = \gamma_m(s) \end{aligned}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.  $\phi$ , fonksiyonuna  $X$ 'in akışı denir [1].

Teorem 3.5.4 gereğince

$$\phi(r + s, m) = \phi(r, \phi(s, m))$$

dir. Bunu aşağıdaki şekilde görebiliriz:

$$\phi \text{ 'nin tanımından } \phi(r + s, m) = \gamma_m(r + s) \text{ dir... (I)}$$

Ayrıca

$$\phi(r, \phi(s, m)) = \gamma_{\phi(s, m)}(r) = \gamma_{\gamma_m(s)}(r)$$

dir. Teorem 3.5.4 gereğince

$$\gamma_m : J(m) \rightarrow M$$

$m'$ 'den geçen bir integral eğrisi ise  $s \in J(m)$  için

$$\gamma_m \circ \lambda_s : \lambda_{-s}(J(m)) \rightarrow M$$

de  $\gamma_m(s)$ 'den geçen bir integral eğrisidir. Yani  $\gamma_m(s) = m'$  ise  $\gamma_{m'} = \gamma_m \circ \lambda_s$  dir.

Buradan

$$\begin{aligned} \gamma_{\gamma_m(s)} &= \gamma_m \circ \lambda_s \\ \gamma_{\gamma_m(s)}(r) &= (\gamma_m \circ \lambda_s)(r) = \gamma_m(s + r) \end{aligned}$$

olup  $\phi(r, \phi(s, m)) = \gamma_m(s + r)$  dir... (II)

(I) ve (II) den

$$\phi(r + s, m) = \phi(r, \phi(s, m))$$

elde edilir.

Bir akışın aşağıdaki lokal özelliği Teorem 3.5.1'in ikinci kısmının bir sonucudur.

**Lemma 3.6.1:** Bir  $M$ , Hausdorff manifoldu üzerinde bir vektör alanının akışı;  $m$ ,  $M$ 'nin verilen herhangi bir noktası olmak üzere  $(0, m)$ 'nin bir komşuluğu üzerinde dif.bilirdir.

Bu lemma aşağıdaki global teoreme genişletilebilir.

**Teorem 3.6.1:** Bir  $M$ , Hausdorff manifoldu üzerinde bir vektör alanının akışı bir dif.bilir bir fonksiyondur.

**İspat:**  $m_0 \in M$  ve

$$S = \{s \in J(m_0) \mid \phi, (s, m_0)'da \text{ dif.bilir} \}$$

olsun. Lemma 3.6.1 gereğince en azından  $0 \in S$  olduğunda  $S \neq \emptyset$  dir.  $J(m_0) \subset \mathbb{R}$  olduğundan  $J(m_0)$ 'ı,  $\mathbb{R}$ 'nin alt cümle topolojisiyle ele alalım. İspat için  $S$ 'in  $J(m_0)$ 'da hem açık hem de kapalı olduğunu gösterelim.

Önce  $S$ 'nin açık olduğunu gösterelim. Lemma 3.6.1 gereğince  $s \in S$  olmak üzere  $(0, \phi(s, m))$ 'nin bir komşuluğunda  $\phi$ , dif.bilirdir.  $0$ 'ın  $V_1$ ,  $\phi(s, m) = \gamma_m(s)$ 'in  $U_1$  komşulukları  $V_1 \times U_1$ 'de  $\phi$  dif.bilir olacak şekilde seçilsin.

$$\phi(0, \phi(s, m)) = \phi(0 + s, m) = \phi(s, m)$$

ve  $s \in V_1$  dir. Yani  $V_1$ ,  $s \in S$ 'nin de bir komşuluğudur. Benzer şekilde  $\phi(s, m) \in U_1$  dir. O halde  $S$  açıktır.

Şimdi  $S$ 'nin kapalı olduğunu gösterelim.  $S$ 'nin kapanışı  $\bar{S}$  olmak üzere,  $\bar{S}$ 'de herhangi bir  $\bar{s}$  noktasını alalım.  $m_1 = \phi(\bar{s}, m_0)$  olmak üzere  $(0, m_1)$  noktasına Lemma 3.6.1'i uygulayalım.  $\phi$ ,  $J \times V$  üzerinde dif.bilir olacak şekilde  $0$ 'ın bir  $J$  komşuluğu ve  $m_1$ 'in bir  $V$  komşuluğu vardır.

$$s \rightarrow \phi(s, m_0)$$

integral eğrisi sürekli olduğundan  $\bar{s}$ 'nin bir  $N$  komşuluğu eğer  $s' \in N$  ise  $\phi(s', m_0) \in V$  olacak şekilde vardır.  $s'$  noktasını  $\bar{s} - s' \in J$  olacak şekilde seçelim ( $\bar{s} \in \bar{S}$  olduğundan bu seçim yapılabilir). Böylece  $s' \in S$  dir.

$s' \in S$  olduğundan  $Domf = D = J \times V$  olmak üzere

$$\begin{aligned} f : IR \times M &\rightarrow IR \times M \\ (s, m) &\rightarrow f(s, m) = (s - s', \phi(s', m_0)) \end{aligned}$$

fonksiyonu  $(\bar{s}, m_0)$ 'da dif.bilirdir. Buna göre  $\bar{s} - s' \in J$  ve  $\phi(s', m_0) \in V$  olduğundan  $\phi, (s - s', \phi(s', m_0))$ 'da dif.bilirdir. Ayrıca,  $\phi(r + s, m) = \phi(r, \phi(s, m))$  olduğundan

$$\phi(\bar{s} - s', \phi(s', m_0)) = \phi(\bar{s}, m_0)$$

dir. Buradan  $\phi \circ f = \phi$  ve  $\phi, (\bar{s}, m_0)$ 'da dif.bilirdir. O halde  $\bar{s} \in S$  dir. Öyleyse  $\bar{S} \subset S$  olup  $\bar{S} = S$  dir. Yani  $S$ , kapalıdır.

Sonuç olarak  $S, J(m_0)$ 'in hem açık hem de kapalı alt cümlesi olduğundan  $S = J(m_0)$  dir.

**Teorem 3.6.2:**  $X$ , bir  $M$  manifoldunda bir vektör alanı ve  $X_m \neq 0$  ise  $m$ 'de  $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$

olacak şekilde bir  $x$  haritası vardır.

**İspat:** Teorem 3.6.1'i kullanılabilmek için  $M$ 'yi bir Hausdorff manifoldu kabul edelim.  $X, M$  üzerinde bir vektör alanı olsun.

$$y(m) = 0 \text{ ve } \left\{ X_m, \frac{\partial}{\partial y_2} \Big|_m, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n} \Big|_m \right\}$$

$T_m M$ 'nin bir bazı olacak şekilde  $M$ 'nin bir  $y$  haritasını seçelim.  $\phi$ ,  $X$  vektör alanının akışı olsun.

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow M \\ (a_1, a_2, \dots, a_n) \rightarrow f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \phi(a_1, y^{-1}(0, a_2, \dots, a_n))$$

fonksiyonu  $0 \in \mathbb{R}^n$ 'in bir komşuluğunda dif.bilirdir ve  $f(0) = m$  dir. Şimdi invers fonksiyon teoremini kullanarak  $f$ 'in  $0 \in \mathbb{R}^n$ 'in bir komşuluğunda diffeomorfizm olduğunu göstereceğiz.

$\mathbb{R}^n$ 'de  $w = id$  haritasını kullanalım.  $c_1$  verilen bir  $a \in \mathbb{R}^n$  noktasından geçen  $w_1$ -koordinat eğrisi ( $w_1$ -parametre eğrisi) olsun.

$$c_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t \rightarrow c_1(t) = w^{-1}(t + a, 0, \dots, 0) = (t + a, 0, \dots, 0)$$

dır.

$$f_* \left( \frac{\partial}{\partial w_1} \Big|_a \right) = f_* \left( c_1'(0) \right) = \frac{dk_1}{dt} \Big|_0$$

dır. Burada  $k_1 = f \circ c_1$  dir.  $k_1, X$ 'in  $f(a)$ 'dan geçen bir integral eğrisidir. Gerçekten,  $X$ 'in akışı

$$\phi : J \times V \rightarrow M$$

olsun (Burada  $0 \in J$  ve  $m \in V$  dir). Biliyoruz ki

$$\phi(t + a, m) = \phi(t, \phi(a, m)) = \gamma_{\phi(a, m)}(t)$$

dir. Buna göre

$$\gamma_m : J \rightarrow M \\ t \rightarrow \gamma_m(t) = \phi(t, m)$$

$X$ 'in  $m$ 'den geçen bir integral eğrisidir. O halde

$$\gamma_m \circ \lambda_a : \lambda_{-a}(J) \rightarrow M$$

$X$ 'in  $\phi(a, m)$ 'den geçen bir integral eğrisidir. Buna göre

$$\begin{aligned} (\gamma_m \circ \lambda_a)(t) &= \gamma_m(t+a) = \phi(t+a, m) \\ &= f(t+a, y^{-1}(0, \dots, 0)) \\ &= f(t+a, 0, \dots, 0) \\ &= f(c_1(t)) \\ &= k_1(t) \end{aligned}$$

dir. O halde  $k_1$ ,  $X$ 'in  $\phi(a, m) = \phi(a, y^{-1}(0, \dots, 0)) = f(a, 0, \dots, 0)$ 'dan geçen integral eğrisidir. Bu durumda

$$f_* \left( \frac{\partial}{\partial w_1} \Big|_a \right) = X(f(a))$$

dır ve özellikle

$$f_* \left( \frac{\partial}{\partial w_1} \Big|_0 \right) = X_m$$

dir. Eğer  $c_i$  ( $i = 2, 3, \dots, n$ ),  $0$ 'dan geçen  $w_i$ -koordinat eğrisi ( $w_i$ -parametre eğrisi) ise

$$f_* \left( \frac{\partial}{\partial w_i} \Big|_0 \right) = \frac{dk_i}{dt} \Big|_0, \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

dır. Burada  $k_i = f \circ c_i$  dir. Bu durumda  $k_i$ ,  $m$ 'den geçen  $y_i$ -koordinat eğrisidir ve

$$f_* \left( \frac{\partial}{\partial w_i} \Big|_0 \right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_m, \quad (i = 2, 3, \dots, n)$$

dir. Öyleyse  $f_*$ , bazı baza dönüştüren bir izomorfizmdir. Buna göre invers fonksiyon teoremi gereğince

$$f|_V : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset M$$

bir diffeomorfizmdir. Sonuç olarak  $(U, x = (f|_V)^{-1})$ ,  $M$ 'nin bir haritasıdır.

Verilen bir  $p$  noktası için  $x(p) = a$  olmak üzere  $p$ 'den geçen  $x_1$  - parametre eğrisidir. Burada

$$\begin{aligned} s \rightarrow f(a_1 + s, a_2, \dots, a_n) &= \phi(a_1 + s, y^{-1}(0, a_2, \dots, a_n)) \\ &= \phi(s, \phi(a_1, y^{-1}(0, a_2, \dots, a_n))) \\ &= \phi(s, f(a_1, a_2, \dots, a_n)) \\ &= \phi(s, p) \end{aligned}$$

dir (Burada  $x(p) = (f|_V)^{-1}(p) = a$  dır). Buna göre  $s \rightarrow f(a_1 + s, a_2, \dots, a_n)$ ,  $X$ 'in  $p$ 'den geçen bir integral eğrisidir. Böylece,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_p = X_p$$

dir. Yani  $x$ ,  $M$ 'nin istenilen özellikteki bir haritasıdır.

Şimdi bu sonucu ,Hausdorff olmayan bir  $M$  manifolduna genişletelim. Öncelikle ,  $m$ 'nin  $X$ 'in tanım cümlesinde yatan bir  $U$  koordinat komşuluğunu seçelim.  $j: U \rightarrow M$  doğal 1:1 dönüşüm olmak üzere  $U$ , standart açık altmanifold yapısıyla bir Hausdorff manifoldudur ve  $U$  üzerinde  $X$ 'e  $j$ -bağlı olan bir  $Y$  vektör alanı vardır.  $m$ 'de  $U$ 'nun bir  $y$  haritasını  $y$ 'nin  $V$  tanım cümlesi üzerinde  $Y = \frac{\partial}{\partial y_1}$  olacak şekilde seçebiliriz ( $(V, y)$ ,  $U$ 'nun  $m$ 'de bir haritasıdır).  $U$ , Hausdorff manifoldu olduğundan bu durum yukarıda ispat edildi. Buna göre  $x \circ j = y$  olmak üzere  $(V, x)$ ,  $M$ 'nin bir haritasıdır ve  $V$  üzerinde  $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$  dir.

#### 4. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu çalıŐmada, diferensiyellenebilir manifold kavramı ele alınarak manifoldun topolojik yapısı incelenmiştir. Ayrıca manifold üzerinde türev ve vektör alanları kullanarak I. mertebeden diferensiyel denklemler ele alınmış ve örneklerle somutlaştırılmıştır.



## KAYNAKLAR

1. Clark, R. S. and Brickell F., Differentiable Manifolds, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.
2. Hacısalihoğlu, H. H., Diferensiyel Geometri I. Cilt, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 1995.
3. Hacısalihoğlu, H. H., Lineer Cebir, Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Ankara, 1982.
4. Yıldız, C., Topoloji, Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi, Ankara 1999.