T.C.

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ANALİTİK FONKSİYONLAR TEORİSİNDE HILBERT SINIR DEĞER PROBLEMİ VE UYGULAMALARI

SEMİH YILMAZ

HAZİRAN 2006

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı.

09/05/2006

Prof. Dr. M. Yakup ARICA

Enstitü Müdürü

Bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans Tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Kerim KOCA

Yrd.Doç.Dr. Ali ARAL

Yrd.Doç.Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

ANALİTİK FONKSİYONLAR TEORİSİNDE

HILBERT SINIR DEĞER PROBLEMİ VE UYGULAMALARI

YILMAZ, Semih

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman: Prof. Dr. Kerim KOCA

Haziran 2006, 104 sayfa

Bu çalışmada önce analitik fonksiyonlar sınıfında önemli sınır değer problemleri arasında bulunan Hilbert Sınır-Değer Problemi tanımlanmıştır. Daha sonra bu problemin simetrik fonksiyonlar yardımıyla çözümü verilmiştir. En son olarak Hilbert çekirdekli tam lineer singüler integral denklemlerin, bu problemden faydalanılarak yapılan çözümleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hilbert Sınır Değer Problemi, Riemann Hilbert Sınır Değer Problemi.

ABSTRACT

HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM AND APPLICATIONS

IN THEORY OF HOLOMORF FUNCTIONS

YILMAZ, Semih

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Prof. Dr. Kerim KOCA

June 2006, 104 Pages

In this study, firstly we defined Hilbert Boundary Value Problems which is important boundary value problems in holomorf functions class. Then we solved this problems using symmetric functions. Finally, the solutions of the complete linear singular integral equations with Hilbert kernel is analyzed by means of this problem.

Key Words: Hilbert Boundary Value Problem, Riemann Hilbert Boundary Value Problem.

TEŞEKKÜR

Bu tezin danışmanlığını kabul eden ve çalışmalarımda bana destek olan sayın hocam Prof. Dr. Kerim KOCA ‘ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemler için sınır-değer problemleri uygulamalı matematik, mühendislik ve fizikte kullanım alanı olan temel bir konudur.

Bilindiği gibi bir bölge içinde (sınır hariç) bir diferensiyel denklemi sağlayan ve bölgenin sınırı üzerinde sürekli (problemin özelliğine göre Hölder sürekli) olan çözümün bulunması ya da çözümün varlık ve tekliğinin araştırılması problemine Dirichlet sınır-değer problemi denir. Bu tür problemlerin çözümünün varlık ve tekliğinin araştırılmasında uygun koşullar altında Banach ve Schauder Sabit Nokta Prensipleri kullanılır. Bölgenin sınırı üzerindeki dönme sayısı olan indis kavramına ihtiyaç duyulmaz. Ancak bu tezin temel konusu olan Riemann ve Riemann-Hilbert sınır-değer problemlerinin çözümlerinde indis kavramı önem kazanır ve indisin pozitif, negatif tam sayılar veya sıfır olmasına göre aynı problemin çözümünün varlığı ve tekliği değişir. Hölder-süreklilik ancak bu tür problemlerde önem kazanmaktadır.

L basit kapalı düzgün bir eğri; $\Phi(z)$, L nin dışında her yerde analitik; g(t) ve G(t) L üzerinde verilmiş Hölder sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$ (homojen hal)

$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)$ (homojen olmayan hal)

özelliğini sağlayan $\Phi(z)$ analitik fonksiyonunun bulunması problemine Riemann Problemi denir. Burada $\Phi^+(t)$ ve $\Phi^-(t)$ fonksiyonları D^+, D bölgesinin iç kısmı, D^- dış kısmı olmak üzere

$$\Phi^{+}(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^{+}}}\Phi(z)\left(=\lim_{z\to t^{+}}\Phi(z)\right)$$

$$\Phi^{-}(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in D^{-}}}\Phi(z)\left(=\lim_{z\to t^{-}}\Phi(z)\right)$$

şeklinde belirlenen fonksiyonlardır.

$a(s), b(s), c(s)$ reel fonksiyonları aynı L eğrisi üzerinde tanımlanmış Hölder – sürekli fonksiyonlar olmak üzere D^{+} da analitik ve L üzerinde

$$a(s)u(s)+b(s)v(s)=c(s)\,,\quad 0\leq s\leq 1$$

bağıntısını sağlayan $f=u+iv$ analitik fonksiyonunun bulunması problemine ise Hilbert Sınır-Değer Problemi denir.

Bu tür problemlerdeki sınır verileri, genellikle uygulamalardan direkt olarak ortaya çıkan sınır koşullarıdır.

1.1. Kaynakların Kullanımı:

Öncelikle [5] ve [6] nolu kaynaklardan analitik fonksiyonların temel özellikleri öğrenilmiştir. Daha sonra [1] ve [2] nolu kaynaklardan çeşitli sınır-değer problemleri karşılaştırmalı olarak ele alınmıştır ve tezde [1] nolu kaynak temel kaynak olarak kullanılmıştır. [3] nolu kaynaktan problemlerin incelenmesi sırasında karşılaşılan integral denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliği öğrenilmiş ve [4] nolu kaynaktan ise integral denklem sistemleri hakkında bilgi edinilmiştir.

1.2. Çalışmanın Amacı:

Sınır-değer problemleri uygulamalarda çok ilgi çeken aktüel bir konudur. Genellikle denklemleri çözmeden çözümün varlık ve tekliği hakkında teoriler geliştirilmiştir. Ayrıca denklemlerin formu değiştikçe sınır koşullarının yanında bazı ek koşullar ortaya çıkmaktadır. Ancak en zayıf koşullar altında problemi çözmek temel amaçtır.

Bilindiği gibi bu tür problemler düzgün eğriler üzerinde incelenmektedir. Eğrinin düzgün olmaması halinde benzer sonuçların nasıl elde edileceği ilgi çekici bir problemdir.

Bu tezin temel amacı Hilbert ve Riemann-Hilbert Sınır Değer problemlerinin temel özelliklerini analitik fonksiyonlar için incelemektir. Bu özelliklerden yararlanarak yeni sonuçlar ortaya koymak için bu tez iyi bir temel kaynak oluşturmaktadır.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

2.1. Kompleks Düzlemde Eğri Ve Bölge

Tanım 2.1.1: $\mathbb{C}=\{z=x+iy : x,y\in\mathbb{R}\}$ kompleks düzleminde (x,y) dik koordinat sistemi verilsin.

a) $[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$, $\varphi(t)=x(t)+iy(t)$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir *eğri* denir. Burada $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ noktalarına sırasıyla *eğrinin başlangıç ve bitim noktaları* denir.

b) Bir φ eğrisi verildiğinde $\varphi(a)=\varphi(b)$ ise, φ ye *kapalı eğri* denir.

c) Bir φ eğrisi verildiğinde her $t\in[a,b]$ için $\varphi'(t)=x'(t)+iy'(t)$ türevi ($t=a$ için $\varphi'(a^+)$ sağ ve $t=b$ için $\varphi'(b^-)$ sol türevleri) var ve sürekli ise φ *diferensiyellenebilir bir eğridir* denir.

d) φ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer $\forall t\in[a,b]$ için $\varphi'(t)\neq 0$ (veya $\forall t\in[a,b]$ için $(x'(t))^2+(y'(t))^2>0$) ise φ ye *düzgün eğri* denir.

e) Bir φ eğrisi sadece $t_1=t_2$ için $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$ oluyorsa φ ye *basit eğri* denir. Tanımından görülüyor ki basit eğri kendisini kesmeyen eğridir. Basit eğrilere *Jordan eğrileri* de denir, φ basit bir eğri ve $\varphi(a)=\varphi(b)$ ise φ ye *kapalı basit eğri (Kapalı Jordan eğri)* adı verilir.

f) Bir $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$, $\varphi(t)=x(t)+iy(t)$, $t\in[a,b]$ eğrisi verilsin. Eğer, eğri üzerindeki noktalar $\varphi(a)$ dan başlamak üzere t nin artışına karşılık geliş sırasına göre taranırsa, φ üzerinde pozitif yönde dönülmüş olur. Eğer, φ kapalı eğri ise bu eğri üzerinde hareket ettiğimiz zaman φ eğrisinin sınırladığı sınırlı bölge solda (sağda) kalıyorsa φ eğrisi *pozitif (negatif) yönlüdür* denir.

$z_0 \in \mathbb{C}$ noktası ve $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $U_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$ kümesine z_0 ın ε*-komşuluğu*, $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_0) = U_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ kümesine de z_0 ın *delinmiş* ε *- komşuluğu* denir.

Tanım 2.1.2: Bir $D \subset \mathbb{C}$ kümesi verildiğinde $\forall z \in D$ için $|z| < R$ olacak şekilde bir $R > 0$ sayısı varsa, D ye *sınırlı küme* denir.

$z_0 \in D$ noktası verildiğinde , $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_0) \subset D$ olacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına D nin *iç noktası* denir.

$z_0 \notin D$ noktasının $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_0) \cup D = \varnothing$ olacak şekilde bir komşuluğu varsa z_0 noktasına D nin *dış noktası* denir.

$z_n \in D\,(n \in \mathbb{N})$ olmak üzere yakınsak her (z_n) dizisinin limiti D nin bir *limit noktası* adını alır.

D kümesine ait noktalar sadece iç noktalar ise D ye *açık küme*, D kümesi limit noktalarının hepsini içeriyorsa D ye *kapalı küme* adı verilir.

a) Bir $D \subset \mathbb{C}$ kümesinin içindeki her P noktasını her $Q \in D$ noktasına, kümenin dışına taşmayan bir çizgiyle birleştirme olanağı varsa, D ye *irtibatlı (veya bağımlı) küme* denir. İrtibatlı bir küme içindeki P noktasını Q noktasına birleştiren bütün çizgiler sürekli kaydırmalarla, kümenin dışına taşmadan üst üste getirilebiliyorsa ve bu özellik her (P, Q) nokta çifti için varsa, söz konusu küme *basit irtibatlı (basit bağımlı) küme* adını alır.

b) Açık ve irtibatlı $D \subset \mathbb{C}$ kümesine bir *bölge*, açık ve basit irtibatlı $D \subset \mathbb{C}$ kümesine de *basit irtibatlı bölge* adı verilir.

$\varphi, \mathbb{C}$ kompleks düzleminde herhangi bir kapalı Jordan eğrisi olsun. Jordan teoremi gereğince, bu eğri $\mathbb{C}$ kompleks düzlemini, $z=\infty$ noktasını içermeyen iç D^+ ve $z=\infty$ noktasını içeren dış D^- bölgeleri olmak üzere ikiye böler. Buna göre $\mathbb{C} = D^+ \cup \varphi \cup D^-$ dir. Biz φ üzerindeki yönün (aksi söylenmedikçe), her zaman D^+ bölgesini sol tarafta bırakacak biçimde, yani φ üzerindeki pozitif yönü, seçeceğiz. φ üzerinde pozitif yönün seçildiğini açıkça belirtmek istediğimizde φ yi φ^+ şeklinde yazacağız.

2.2. Hölder Koşulunu Sağlayan Fonksiyonlar Sınıfı

Tanım 2.2.1: $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde herhangi bir kapalı φ Jordan eğrisi ve $\lambda : \varphi \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin. Eğer, herhangi $t_1, t_2 \in \varphi$ için

$$\left|\lambda(t_1) - \lambda(t_2)\right| \leq K \left|t_1 - t_2\right|^{\alpha} \tag{2.1}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $K > 0$ ve $0 < \alpha \leq 1$ sayıları varsa, $\lambda(t)$ fonksiyonunu φ üzerinde K sabiti ve α üssü ile *Hölder koşulunu* sağlar diyecek ve bunu $\lambda \in KH_{\alpha}(\varphi)$ (ya da $\lambda \in H_{\alpha}(\varphi)$) şeklinde göstereceğiz.

Uyarı(1): $C(\varphi), \varphi$ üzerinde sürekli bütün fonksiyonlar kümesi olsun. $H_{\alpha}(\varphi) \subset C(\varphi)$ olduğu açıktır.

Uyarı(2): $\alpha > 1$ halinde (2.1) bağıntısı, apaçık bir biçimde $\lambda(t)$ nin φ üzerinde türevlenebilir ve $\lambda'(t) \equiv 0$ (yani φ üzerinde $\lambda(t) \equiv \text{sabit}$) olduğunu gösterir. $\alpha > 1$ ise $H_\alpha(\varphi)$ sınıfı φ üzerinde sabit fonksiyonlar kümesidir. Buna göre her zaman $0 < \alpha \leq 1$ olduğunu varsayacağız. $\alpha = 1$ hali, özel olarak *Lipschitz koşulu* olarak da isimlendirilmektedir.

Tanım 2.2.2: $\lambda : \varphi \to \mathbb{C}$ *n.* mertebeden türevlenebilir fonksiyon olsun $(n \in \mathbb{N})$. Eğer $\lambda^{(n)}(t) \in H_\alpha(\varphi)$ ise, $\lambda(t)$ fonksiyonu φ üzerinde $H_\alpha^{(n)}(\varphi)$ sınıfındandır diyeceğiz $\left(H_\alpha^{(0)}(\varphi) = H_\alpha(\varphi)\right)$.

Hölder sınıfından olan fonksiyonların bazı özelliklerini verelim. φ nin $\mathbb{C}$ de herhangi bir Jordan eğrisi olduğunu varsayalım.

1. Özellik: Eğer $0 < \beta < \alpha \leq 1$ ise $H_\alpha(\varphi) \subset H_\beta(\varphi)$ dir.

2. Özellik: Eğer $\lambda : \varphi \to \mathbb{C}$, $\psi : \varphi \to \mathbb{C}$ ve $\lambda \in H_{\alpha_1}(\varphi)$, $\psi \in H_{\alpha_2}(\varphi)$ ise

$(\lambda \pm \psi)(t) = \lambda(t) \pm \psi(t)$, $(\lambda.\psi)(t) = \lambda(t).\psi(t)$, her $t \in \varphi$ için $\psi(t) \neq 0$

olduğunda $(\lambda / \psi)(t) = \lambda(t) / \psi(t)$ fonksiyonları $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ olmak üzere $H_\alpha(\varphi)$ sınıfındandır.

3. Özellik: $t = t(s)$, $s \in [\alpha, \beta]$ fonksiyonu $H_\alpha([\alpha, \beta])$ sınıfından, $0 < \alpha \leq 1$ ve $\lambda : t([\alpha, \beta]) \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $t([\alpha, \beta])$ üzerinde H_β, $0 < \beta \leq 1$ sınıfındansa, $Q : ([\alpha, \beta]) \to \mathbb{C}$, $Q(s) = \lambda(t(s))$, $s \in [\alpha, \beta]$ bileşik fonksiyonu $[\alpha, \beta]$ üzerinde $H_{\alpha\beta}$ sınıfındandır.

4.Özellik: t ve t_0 noktaları φ eğrisi üzerinde sırasıyla değişken ve sabit noktalar olsunlar. $\lambda(t) = |t - t_0|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ fonksiyonu $H_\alpha(\varphi)$ sınıfındandır.

Teorem 2.2.1: φ, $\mathbb{C}$ üzerinde herhangi bir kapalı Jordan eğrisi olsun. $H_\alpha(\varphi)$ vektör uzayı $\lambda \in H_\alpha(\varphi)$ için; $\|\lambda\|_{C(\varphi)} = \max\left\{\left|\lambda(t)\right| : t \in \varphi\right\}$ ve $H(\lambda,\alpha) = Sup\left\{\left|\lambda(t_1) - \lambda(t_2)\right|\left|t_1 - t_2\right|^{-\alpha} : \ t_1, t_2 \in \varphi\right\}$ olmak üzere $\|\lambda\|_\alpha = \|\lambda\|_{C(\varphi)} + H(\lambda,\alpha)$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

2.3. Analitik Fonksiyonlar

Tanım 2.3.1: Bir $B \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı $f : B \to \mathbb{C}$ fonksiyonu bu bölge üzerinde sürekli bir türeve sahip (yani $f'(z) \in C(B)$) ise, bu fonksiyon söz konusu bölge üzerinde *analitiktir(regülerdir)* denir. $B \subset \mathbb{C}$ bölgesi üzerinde analitik bütün fonksiyonlar kümesini $A(B)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.3.2: Bir $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasının bir $U_\varepsilon(z_0)$ komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer, $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının herhangi bir $U_\delta(z_0)$, $\delta \le \varepsilon$ komşuluğunda düzgün yakınsak bir $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ serisi şeklinde gösterilebiliyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 *noktasında analitik* bir fonksiyon denir. Kompleks düzlemin her bir noktasında analitik fonksiyona *tam fonksiyon* denir. İleride B nin $\mathbb{C}$ de bir bölge olduğunu varsayacağız.

Teorem 2.3.1: $f : B \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun $z_0 \in B$ noktasında analitik olması, onun z_0 noktasında diferansiyellenebilir olmasıdır.

Uyarı: Bir $f : B \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun $z_0 \in B$ noktasında analitik olması için onun z_0 noktasında diferansiyellenebilir olması yeterli değildir.

Tanım 2.3.3: Bir $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu, $z_0=\infty$ noktasının bir $U_\varepsilon(\infty)=\{z\in\mathbb{C}:|z|>\varepsilon\}(\varepsilon>0)$ komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer, $f(z)$ fonksiyonu $U_\delta(\infty)\subset U_\varepsilon(\infty)$, $\delta\geq\varepsilon$ komşuluğunda yakınsak $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^{-n}$ serisi şeklinde gösterilebiliyorsa, $f(z)$ fonksiyonu $z_0=\infty$ *noktasında analitiktir* denir.

Teorem 2.3.2: Bir $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonunun $z_0=\infty$ noktasında analitik olması için gerekli ve yeterli koşul $\phi(\xi)=f(1/\xi)$ fonksiyonunun $\xi_0=0$ noktasında analitik olmasıdır.

Bir kompleks fonksiyonun analitikliği için yeterli koşullar veren aşağıdaki üç teoremi verelim.

Teorem 2.3.3 (Morera Teoremi): $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu basit irtibatlı bir $B\subset\mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı ve B üzerinde sürekli olsun. Eğer, $f(z)$ fonksiyonunun B bölgesinin içinde kalan her kapalı Jordan eğrisi üzerinde integrali sıfırsa, $f(z)$, B üzerinde analitiktir.

Teorem 2.3.4 (Weierstrass Teoremi): $f_n(z)$, $n\in\mathbb{N}$ fonksiyonları bir $B\subset\mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ serisi B içinde kalan her kapalı bölge üzerinde düzgün yakınsaksa, $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(z)$ tanımıyla $f(z)$, B üzerinde analitiktir.

Teorem 2.3.5 (Cauchy-Riemann Teoremi): $f:B\to\mathbb{C}$ fonksiyonunun B üzerinde analitik olması için gerekli ve yeterli koşul, bu fonksiyonun reel u ve sanal v kısımlarının bu bölge üzerinde birinci dereceden sürekli, $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x}$ ve $\frac{\partial v}{\partial y}$

kısmi türevlerine sahip olması ve bu türevlerin *Cauchy - Riemann diferensiyel denklemler sistemi* adı verilen:

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$ sistemini sağlamasıdır.

Analitik fonksiyonların bazı özelliklerini verelim:

1. Bir noktada analitik fonksiyon bu noktanın belirli bir komşuluğunun her bir noktasında analitiktir.

2. $f\in A(B)$ ve $g\in A(B)$ ise

a) $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{C}$ için $\alpha f(z)+\beta g(z)\in A(B)$ dir.

b) $f\in A(B)$, $g\in A(B)$ ve $\forall z\in B$ için $g(z)\neq 0$ ise

$f(z)\,g(z),\dfrac{f(z)}{g(z)}\in A(B)$ dir.

3. $P_n(z)=a_n z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1 z+a_0$

$(a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{C}$ sabit katsayılar ve $z\in\mathbb{C})$ polinomu bir tam fonksiyondur.

4. İki analitik fonksiyonun bileşkesi de analitik bir fonksiyondur.

5. Analitik fonksiyon her mertebeden diferensiyellenebilirdir.

6. Basit irtibatlı bölge üzerinde analitik fonksiyonun ilkel fonksiyonu ve türevi de analitiktir.

7. $U_\varepsilon(z_0)$ üzerinde analitik $f(z)$ fonksiyonu $U_\varepsilon(z_0)$ üzerinde yakınsak

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_n(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0) \qquad \left(f^{(0)}(z_0)=f(z_0)\right)$$

Taylor serisinin toplamı şeklinde gösterilebilir.

8. Bir $z_0\neq\infty$ noktasının bu noktada analitik f fonksiyonunun m. dereceden sıfırı olması için gerekli ve yeterli koşul $h(z)$, $z=z_0$ noktasında analitik ve

$h(z_0) \neq 0$ olmak üzere $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$ şeklinde yazılabilmesidir.

9. Eğer $z_0 \neq \infty$ noktası, bu noktada analitik bir f fonksiyonunun m. mertebeden sıfırı ise, z_0 noktası $F(z) = \left[f(z)\right]^p$ $(p \in \mathbb{N})$ fonksiyonunun *mp.* dereceden sıfırıdır.

10. $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_0)$ komşuluğunda analitik, fakat bizzat $z = z_0$ noktasında analitik değil ise, bu noktaya $f(z)$ fonksiyonunun *izole singüler (ayrık tekil) noktası* adı verilir.

11. Eğer $z = z_0$ noktası komşuluğunda f nin Laurent serisi $a_{-n} \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$

olmak üzere $$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_0)^{n+1}} + \dots$$

şeklinde ise, $z = z_0$ noktası $f(z)$ nin *n. mertebeden bir kutbudur* denir. Bu halde $(z - z_0)^m f(z)$ fonksiyonu artık $z = z_0$ noktası komşuluğunda analitiktir.

12. Eğer $\mathbb{C}$ de tanımlı bir fonksiyonun, $\mathbb{C}$ nin her sonlu bölgesindeki singüler noktaları yalnızca kutuplardan oluşuyorsa, bu fonksiyon *meromorfiktir* denir.

Teorem 2.3.6 (Liouville Teoremi): $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $a_0 = \infty$, $a_k \in \mathbb{C}$ $(k \in \{1, \dots, n\})$ kutup noktaları hariç $\mathbb{C}$ üzerinde analitik bir fonksiyon ve f nin bu kutup noktalar komşuluğunda Laurent serisinin esas kısmı sırasıyla:

$z = a_0$ için:

$$G_0(z) = c_1^0 z + c_2^0 z^2 + \dots + c_{m_0}^0 z^{m_0}$$

$z = a_k$ için:

$$G_k\left(\frac{1}{z - a_k}\right) = \frac{c_1^k}{(z - a_k)} + \frac{c_2^k}{(z - a_k)^2} + \cdots + \frac{c_{m_k}^k}{(z - a_k)^{m_k}} \qquad (k \in \{1, \dots, n\})$$

olsun. O halde $f(z)$ fonksiyonu:

$$f(z)=e+G_0(z)+\sum_{k=1}^{n}G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$$

şeklinde yazılabilir.

Sonuç 2.3.1: Bir $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu bütün düzlemde sınırlı ve sonlu her bölgede analitik ise, bir sabitten ibarettir. Üstelik $f(\infty)=0$ ise $\mathbb{C}$ üzerinde $f(z)\equiv 0$ dır.

Sonuç 2.3.2: Bir $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ üzerinde analitik ve $z=\infty$ noktası bu fonksiyonun m. mertebeden kutup noktası ise, $f(z)$ m. dereceden bir polinomdur:

$$f(z)=c_0+c_1z+\ldots+c_mz^m$$

Tanım 2.3.4 (Analitik Devam Prensibi): $B_1\subset\mathbb{C}$ ve $B_2\subset\mathbb{C}$ bölgelerinin arakesiti düzgün bir λ eğrisi olsun. B_1 de analitik olan bir $f_1(z)$ fonksiyonu ve B_2 de analitik olan bir $f_2(z)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $t\in\lambda$ için

$$f_1(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in B_1}}f(z)\quad\text{ve}\quad f_2(t)=\lim_{\substack{z\to t\\ z\in B_2}}f(z)$$

limitleri λ üzerinde sürekli ve eşit ise $f_2(z)$ fonksiyonu $f_1(z)$ fonksiyonunun (ya da $f_1(z)$ fonksiyonu $f_2(z)$ fonksiyonunun) λ üzerinden B_2 ye (B_1e) *analitik devamıdır* denir.

2.4. İndis Ve Onun Bazı Özellikleri

λ, $\mathbb{C}$ de kapalı düzgün Jordan eğrisi ve $G:\lambda\to\mathbb{C}$, λ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $\forall t\in\lambda$ için $G(t)\neq 0$ olsun.

Tanım 2.4.1: t noktası λ üzerinde pozitif yönde bir tam dönüş yaptığında $G(t)$ nin argümentinin aldığı artımın 2π ye bölümü $G(t)$ nin λ ya göre indisi olarak adlandırılır ve $\dot{I}ndG$ ile gösterilir:

$$\dot{I}ndG = \frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t) \text{nin } \lambda \text{ üzerindeki artımı}\right]$$

$\left[\arg G(t)\text{'nin } \lambda \text{ üzerindeki artımı}\right]$ ifadesi yerine, $\left[G(t)\right]_\lambda$ notasyonunu kullanacağız. $\ln G(t) = \ln\left|G(t)\right| + i\arg G(t)$ olduğundan ve λ üzerinde pozitif yönde bir tam dönüş yapıldığında $\left|G(t)\right|$ fonksiyonu kendi başlangıç değerine döndüğünden $\left[\ln G(t)\right]_\lambda = i\left[\arg G(t)\right]_\lambda$, dolayısıyla

$$\dot{I}ndG = \frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t)\right]_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln G(t)\right]_\lambda \text{ dır.}$$

G, λ üzerinde sürekli olduğundan bu eğrinin $G(\lambda)$ görüntüsünde kapalı bir eğri ve λ üzerinde pozitif yönde bir tam dönüş yapıldığında $G(t)$nin argüment artımı 2π nin bir katı olacağından $\dot{I}ndG$, ya sıfırdır ya da (pozitif veya negatif) bir tam sayıdır.

İndisin bazı özelliklerini verelim. Burada, λ nın $\mathbb{C}$ düzleminde kapalı ve düzgün bir Jordan eğrisi, D^+ ve D^- nin de sırasıyla λ ile sınırlı iç ve dış bölgeler olduğunu düşüneceğiz.

1. $G:\lambda \to \mathbb{C}$ fonksiyonu λ üzerinde diferensiyellenebilir ve D^+da analitik ve $D^+ \cup \lambda$ üzerinde sürekli veya D^-de analitik ve $D^- \cup \lambda$ üzerinde sürekli olan bir fonksiyonun λ üzerindeki limit değeri ise,

$$\dot{I}ndG = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda} d\left(\ln G\left(t\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda} \frac{G'\left(t\right)}{G\left(t\right)}dt$$

2. G_1 ve G_2 fonksiyonları λ üzerinde sürekli ve sıfırdan farklı değerler alan fonksi- yonlar ise,

$$\dot{I}nd\left(G_1.G_2\right) = \dot{I}ndG_1 + \dot{I}ndG_2$$
$$\dot{I}nd\left(G_1 / G_2\right) = \dot{I}ndG_1 - \dot{I}ndG_2$$

elde edilir.

3. Sıfırları katlılıkları kadar farklı düşündüğümüzde;

a) D^+ da analitik ve $D^+ \cup \lambda$ üzerinde sürekli olan bir $G^+\left(z\right)$ fonksiyonunun D^+ daki sıfırlarının sayısı n ise $\dot{I}ndG = n$ dir.

b) D^- de analitik ve $D^- \cup \lambda$ üzerinde sürekli olan bir $G^-\left(z\right)$ fonksiyonunun D^- deki sıfırlarının sayısı n ise, $\dot{I}ndG = -n$ dir.

c) G^+, D^+ da analitik ve $D^+ \cup \lambda$ üzerinde sürekli, G^- , D^- de analitik ve $D^- \cup \lambda$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olsun; G^+ nın D^+ da n_+ tane, G^- nin D^- de n_- tane sıfırı bulunduğunda $\dot{I}nd\left(G^+ / G^-\right) = n_+ + n_- \geq 0$. Buradan $\dot{I}nd\left(G^+ / G^-\right) = 0$ olması için $n_+ = n_- = 0$ olması gerekir.

d) $G\left(z\right)$ nin D^+ daki singülerlikleri sadece p-tane kutup noktasından ibaret olsun (Kutuplar katlılıkları kadar farklı düşünülüyor). Bu halde, $\dot{I}ndG = n - p$ dir. Buradaki n, $G\left(z\right)$ nin D^+ daki sıfırlarının sayısıdır.

Örnek 2.4.1: $G(t) = t^n$ fonksiyonunun orijini içeren herhangi λ kapalı ve düzgün Jordan eğrisine göre indislerini hesaplayalım.

I.Yol: t^n fonksiyonu D^+ da analitik ve n katlı yalnız $z=0$ da sıfıra sahip z^n fonksiyonunun λ üzerinde limit değeri olduğundan İndt^n =n dir.

II.Yol: arg t^n =nφ olacağından

$$\text{İnd}t^n = \frac{1}{2\pi}[\arg t^n]_\lambda = \frac{1}{2\pi}2\pi n = n \qquad \text{bulunur.}$$

2.5. Simetrik Fonksiyonlar

$L=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$, $D^+=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$ ve $D^-=\{z\in\mathbb{C}:|z|>1\}$ olsun.

Tanım 2.5.1: D^+ da tanımlı bir f fonksiyonu için, D^- de tanımlı

$$f_*(z)=\overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} \tag{2.2}$$

fonksiyonuna f *nin simetrik fonksiyonu* denir. z ve $\frac{1}{\overline{z}}$, L birim çemberine göre simetrik olan kompleks sayı çifti olduğundan, simetrik noktalardaki $f(z)$ ve $f_*(z)$ kompleks sayıları birbirinin eşleniğidir. Burada, $f_*(\infty)=\overline{f(0)}$ dir. Eğer

$$\overline{f}(z)=\overline{f(\overline{z})}$$

özelliği varsa bu durumda

$$f_*(z)=\overline{f}\left(\frac{1}{z}\right) \tag{2.3}$$

yazılabilir. Benzer şekilde, eğer f fonksiyonu D^- de tanımlı olsaydı bu durumda (2.2) ile belirlenen simetrik f_* fonksiyonu D^+ da tanımlı olarak oluşturulacaktır.

Ayrıca,

$$f(z)=f_*\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)=\overline{f_*}\left(\frac{1}{z}\right) \quad , \quad f_{**}(z)=f(z)$$

dir, yani, f fonksiyonunun, L ye göre simetrik fonksiyonunun, simetrik fonksiyonu f ye eşittir. Üstelik eğer f, $D^+ \cup D^-$ de tanımlı ise bu durumda f_* da aynı bölgede tanımlıdır.

Eğer f, D^+ da analitik ise bu durumda f_*, D^- de analitiktir. Çünkü $z \neq \infty$ için

$$\frac{d}{dz} f_*(z) = \overline{\frac{d}{d\overline{z}} f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = \overline{f'\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)\left(-\frac{1}{\overline{z}^2}\right)} = -\frac{1}{z^2}\overline{f'\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$$

eşitliği vardır. Burada f_* fonksiyonu $z = \infty$ da kaldırılabilir singülerliğe sahiptir. Karşıt olarak, f, D^- de ($z = \infty$ dahil) analitik ise bu durumda f_*, D^+ da analitiktir. Eğer f, $z = 0$ da singülerliğe sahip ise bu durumda f_* da $z = \infty$ da singülerliğe sahiptir. Genel olarak, eğer f nin D^+ daki Laurent serisi

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad , z \in D^+$$

ise bu durumda f_* in, D^- de

$$f_*(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n} \quad , z \in D^-$$

şeklinde Laurent serisi vardır.

Eğer f, D^+ dan L ye sürekli olarak genişletilebilirse bu durumda $f_*(z)$ de D^- den L ye genişler, $s = \frac{1}{\overline{s}}$ olduğundan $(s \in L)$

$$f_*^-(s) = \overline{f^-\left(\frac{1}{\overline{s}}\right)} = \overline{f^+(s)}$$

dir. Dolayısıyla, eğer f, D^+ da analitik ve $D^+ \cup L$ üzerinde sürekli ise bu durumda

$$\Phi(z)=\begin{cases} f(z), & z\in D^+ \\ f_*(z), & z\in D^- \end{cases} \tag{2.4}$$

L sıçrama eğrili parçalı analitik bir fonksiyondur ve $\Phi(\infty)$ sonludur. Ayrıca, L üzerindeki sınır değerleri

$$\Phi^-(s)=\overline{\Phi^+(s)} \tag{2.5}$$

denklemini sağlar.

Simetrik fonksiyon kavramı, herhangi bir çembere veya doğruya göre, benzer şekilde genişletilebilir. Örneğin; eğer f , $\mathbb{C}^+$ üst yarı-düzleminde tanımlı ise bu durumda bunun reel eksene göre simetrik fonksiyonu, $\mathbb{C}^-$ alt yarı-düzleminde

$$f_*(z)=\overline{f(\overline{z})}$$

olur ve $\overline{f}(z)$ ile gösterilir.

2.6. Metrik Ve İntegral Kavramı, Cauchy Tipli İntegraller

Tanım 2.6.1: Boş olmayan bir X kümesi ve bir

$d: X\times X\to\mathbb{R}_+ , (x,y)\to d(x,y)$ dönüşümü verilsin. Eğer bu d dönüşümü $\forall x,y,z\in X$ için

(i) $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

(ii) $d(x,y)=d(y,x)$

(iii) $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$

özelliklerini sağlıyorsa, X üzerinde uzaklık fonksiyonu ya da metrik adını alır. Bu durumda (X,d) ikilisine bir *metrik uzay* denir.

$$u,v \in C[a,b] \quad \text{için} \quad d_\infty(u,v) = \max\{|u(t)-v(t)| : t \in [a,b]\}$$

şeklinde tanımlanan $d_\infty : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}_+$ dönüşümü $C[a,b]$ üzerinde bir metriktir.

$H_\alpha[a,b]\,(0 < \alpha \le 1)$ kümesi verilsin. $u \in H_\alpha[a,b)$ için

$$H(u,\alpha) = \sup\{|u(t_1) - u(t_2)|.|t_1 - t_2|^{-\alpha} : t_1, t_2 \in [a,b]\}$$

olsun.

$u,v \in H_\alpha[a,b]$ için $d(u,v) = d_\infty(u,v) + H(u-v,\alpha)$ şeklinde tanımlanan $d : H_\alpha[a,b] \times H_\alpha[a,b] \to \mathbb{R}_+$ dönüşümünün $H_\alpha[a,b]$ üzerinde bir metrik olduğu gösterilebilir (Muskhelishvili, 1968).

Tanım 2.6.2: (X,d) bir metrik uzay olmak üzere $f : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonuna X üzerinde bir *dizi* adı verilir ve *f(n)* = x_n ile gösterilir.

Tanım 2.6.3: (X,d)bir metrik uzay ve X in içinde bir dizi (x_n) olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $m,n > n_\varepsilon$ olduğunda $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde ε'na bağlı bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sayısı varsa (x_n) dizisine X 'in içinde bir *Cauchy dizisi* adı verilir.

Tanım 2.6.4: Bir (X,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite sahipse, bu (X,d) metrik uzayına *tam metrik uzay* adı verilir. Örneğin, $(C[a,b], d_\infty)$ metrik uzayı tamdır.

Lemma 2.6.1: $(H_\alpha[a,b], d)$ metrik uzayı tamdır.

İspat: $H_\alpha[a,b]$ içinde bir Cauchy dizisi (f_n) olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ öyle ki $n \ge n_\varepsilon$, $m \ge n_\varepsilon$ eşitsizliklerini sağlayan $\forall n,m \in \mathbb{N}$ sayıları için $d(f_n, f_m) = d_\infty(f_n, f_m) + H(f_n - f_m; \alpha) < \varepsilon$ olur. O halde $\forall n,m \ge n_\varepsilon$ için

$d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon$ olur. $(C[a,b], d_\infty)$ uzayı tam olduğundan $\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f_0) = 0$ olacak şekilde en az bir $f_0 \in C[a,b]$ elemanı vardır.

Şimdi $f_0 \in H_\alpha[a,b]$ olduğunu gösterelim. (f_n) dizisi $H_\alpha[a,b]$ içinde bir Cauchy dizisi olduğundan sınırlıdır, yani $\exists M > 0$ sayısı vardır ki, $d(f_n, \theta) \le M$, $n = 1,2,...$ dir. O zaman $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ noktaları ve $\forall n \in N$ için

$$|f_n(t_1) - f_n(t_2)| \le M.|t_1 - t_2|^\alpha$$

olduğu elde edilir. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limite geçildiğinde

$$|f_0(t_1) - f_0(t_2)| \le M.|t_1 - t_2|^\alpha$$

olduğu ve dolayısıyla $f_0 \in H_\alpha[a,b]$ elde edilir. Şimdi, $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f_0) = 0$ olduğunu görelim. $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ noktaları ve $\forall n, m \ge n_\varepsilon$ sayıları için $H(f_n - f_m; \alpha) < \varepsilon$ veya

$$\left| f_n(t_1) - f_m(t_1) - \left[f_n(t_2) - f_m(t_1) \right] \right| < \varepsilon.|t_1 - t_2|^\alpha$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte sabit $n > n_\varepsilon$ için $m \to \infty$ iken limite geçersek $\forall n \ge n_\varepsilon$ sayısı ve $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ noktaları için

$$\left| f_n(t_1) - f_0(t_1) - \left[f_n(t_2) - f_0(t_1) \right] \right| < \varepsilon.|t_1 - t_2|^\alpha$$

elde edilir. Buradan, sonuç olarak $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f_0) = 0$ olduğu ve dolayısıyla $(H_\alpha[a,b], d)$ metrik uzayının tam olduğu görülür.

$\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı reel değerli ve $\alpha \in (0,1]$ üssü ile Hölder koşulunu sağlayan bütün 2π periyotlu fonksiyonlardan oluşan küme tam metrik uzaydır. Bu uzaya kaynaklarda *Hölder uzayı* denir ve $\tilde{H}_\alpha[0,2\pi]$ (veya kısaca $\tilde{H}_\alpha$) ile gösterilir.

Tanım 2.6.5: (X,d) **ve** (X_1,d_1) metrik uzayları verilsin. Eğer, $X_1 \subset X$ ve $\forall a,b \in X_1$ için $d_1(a,b)=d(a,b)$ ise (X_1,d_1) e (X,d) nin bir *alt uzayı* denir.

Lemma 2.6.2: $H_\alpha(M)$ kümesi $(C[a,b],d_\infty)$ uzayının tam alt uzayıdır.

$$u,v \in H_\alpha(M) \quad \text{için} \quad d_2(u,v)=\left(\int_a^b |u(t)-v(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan $d_2 : H_\alpha(M) \times H_\alpha(M) \to \mathbb{R}_+$ dönüşümünün bir metrik olduğu açıktır.

Lemma 2.6.3: $(H_\alpha(M),d_2)$ metrik uzayı tamdır.

(f_n) , $(H_\alpha(M),d_2)$ içinde bir Cauchy dizisi olsun. Lemma 2.6.2 ye göre $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(f_n,f_0)=\lim\limits_{n\to\infty} d_\infty(f_n,f_0)=0$ olacak şekilde bir $f_0 \in H_\alpha(M)$ fonksiyonu vardır. Buradan $f_0 \in L_2[a,b]$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} d_2(f_n,f_0)=0$ olduğu elde edilir. Böylece $(H_\alpha(M),d_2)$ metrik uzayı tam metrik uzay olur.

Tanım 2.6.6: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Diğer taraftan, $[a,b]$ aralığını $a=t_0<t_1<\ldots<t_{n-1}<t_n=b$ özelliğini sağlayan $t_0,t_1,\ldots,t_n$ noktaları yardımıyla n tane $[t_{i-1},t_i]$ alt aralığa bölelim. O zaman, $P=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$ kümesine $[a,b]$ aralığının bir *parçalanması* denir.

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1}\,,\ \|P\| = \max\{\Delta t_k : k=1,\ldots,n\},\ \tau_k \in [\tau_{k-1}\,, t_k]\ (k=1,\ldots n)$$

olmak üzere,

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k)\Delta t_k$$

limiti sonluysa, f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında *Riemann anlamında integrallenebilirdir* denir ve bu limit, $\int_a^b f(t)dt$ ile gösterilir.

Tanım 2.6.7: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu bir $c\in(a,b)$ noktasında sınırsız ve $[a,c-\varepsilon_1]$ ve $[c+\varepsilon_2,b]$ $(\varepsilon_1\in(0,c-a),\varepsilon_2\in(0,b-c))$ aralıkları üzerinde Riemann anlamında integrallenebilir olsun. Bu durumda f nin $[a,b]$ aralığında Riemann integrali

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0,\varepsilon_2\to 0}\left(\int_0^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx\right)$$

limiti olarak tanımlanır. Eğer bu limit ε_1 ve ε_2 sayıları birbirinden bağımsız olarak sıfıra yaklaştığında mevcut ise integral yakınsaktır denir ve f fonksiyonunun bu şekildeki Riemann integraline *has olmayan integral* adı verilir. Eğer bu limit yalnızca $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon\to 0$ durumunda mevcut ise bu limite $\int_a^b f(x)dx$ integralinin *Cauchy esas değeri* adı verilir ve

$$e.d.\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx\right)$$

şeklinde gösterilir.

Örnek 2.6.1: Has olmayan $\int_0^5 \frac{dx}{x-2}$ integralinin yakınsak olup olmadığını araştıralım ve ıraksaklık durumunda, eğer varsa, Cauchy esas değerini hesaplayalım.

Riemann İntegrali tanımına göre,

$$\int_0^5 \frac{dx}{x-2}=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left[\int_0^{2-\varepsilon_1}\frac{dx}{x-2}+\int_{2+\varepsilon_2}^5\frac{dx}{x-2}\right]$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left(\ln(2-x) \Big|_0^{2-\varepsilon_1} + \ln(x-2) \Big|_{2+\varepsilon_2}^{0} \right)$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left(\ln \varepsilon_1 - \ln 2 + \ln 3 - \ln \varepsilon_2 \right)$$

$$= \ln \frac{3}{2} + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left(\ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)$$

yazabiliriz, ε_1, ve ε_2 sayıları birbirinden bağımsız olarak sıfıra yaklaştığında $\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left(\ln \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)$ limiti mevcut olmadığından $\int_0^5 \frac{dx}{x-2}$ has olmayan integrali yoktur. Bu integralin Cauchy esas değerini bulalım.

$$\int_0^5 \frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_0^{2-\varepsilon} \frac{dx}{x-2} + \int_{2+\varepsilon}^{5} \frac{dx}{x-2} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\ln(2-x) \Big|_0^{2-\varepsilon} + \ln(2-x) \Big|_{2+\varepsilon}^{0} \right)$$

$$= \lim \left(\ln 3 - \ln 2 \right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

olduğundan

$$e.d. \int_0^5 \frac{dx}{x-2} = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

olur.

Benzer şekilde

e.d. $\int_{-\pi}^{\pi} \cot \frac{s}{2} ds = 0$ ve genel olarak $\forall t \in \mathbb{R}$ ve $\forall \alpha > 0$ için e.d. $\int_{t-\alpha}^{t+\alpha} \cot \frac{s-t}{2} ds = 0$

olduğu gösterilebilir.

$x \in \tilde{H}_\alpha [0, 2\pi]$ olmak üzere, Cauchy esas değer anlamında tanımlı

$$Hx(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \cot \frac{s-t}{2} ds$$

operatörüne *Hilbert Dönüşümü* adı verilir.

Teorem 2.6.1: $x(t)$, 2π periyotlu bir fonksiyon olmak üzere her $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$

için $$\left| x(t_1) - x(t_2) \right| \le l \left| t_1 - t_2 \right|^{\alpha}$$

olacak şekilde, $l > 0$ sabiti ve $0 < \alpha < 1$ sayısı varsa, bu takdirde

$$\tilde{X}(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(s) \cot \frac{s-t}{2} ds$$

olmak üzere her $t \in [0, 2\pi]$ için

$$\left| \tilde{X}(t) \right| < \frac{2\pi}{\alpha} l$$

ve herhangi $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ için

$$\left| \tilde{X}(t_1) - \tilde{X}(t_2) \right| \le L(\alpha) l \left| t_1 - t_2 \right|^{\alpha}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada $L(\alpha) = \left\{ \frac{1 + 2^{1+\alpha} + 3^{\alpha}}{\pi\alpha} + \frac{\pi}{1-\alpha}, \frac{4}{\pi\alpha} \right\}$

dır (Privalov, 1950; Hüseynov,1980).

Teorem 2.6.2: Hilbert dönüşümü olarak tanımlanan H operatörü

$\tilde{H}_{\alpha}[0, 2\pi](0 < \alpha < 1)$ uzayında sınırlı lineer bir operatördür ve

$$D(\alpha) = L(\alpha) + \frac{2\pi}{\alpha}$$

olmak üzere, $\|H\| \le D(\alpha)$ eşitsizliği doğrudur (Gakhov, 1966; Muskhelishvili,1968).

Tanım 2.6.8: *L*, $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde tanımlı düzgün kapalı bir eğri olsun. D^{+} iç bölgeyi, D^{-} de eğrinin dışını göstersin.

Eğer $f(z)$ fonksiyonu D^{+} da analitik ve onun kapanışında $(D^{+} \cup L)$

sürekli ise, $$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^{+} \\ 0, & z \in D^{-} \end{cases}$$

ve eğer $f(z)$ fonksiyonu D^- de analitik ve $(D^- \cup L)$ de sürekli ise,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z\in D^+ \\ -f(z)+f(\infty) \quad , & z\in D^- \end{cases}$$

şeklinde gösterilen formüllere *Cauchy İntegralleri* denir.

L kapalı düzgün bir eğri, τ noktanın kompleks koordinatı ve $\varphi(\tau): L \to C$, L eğrisi üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{\tau - z}d\tau \quad , \quad z \notin L \tag{2.6}$$

integraline *Cauchy tipli integral,* $\dfrac{1}{\tau - z}$ fonksiyonuna da bu integralin *çekirdeği* denir.

(2.6) ile verilen $\Phi(z)$ fonksiyonu hem D^+ iç bölgesinde, hem de D^- dış bölgesinde analitik (yani $\mathbb{C}$ düzleminde parçalı analitik) bir fonksiyon olup $\Phi(\infty)=0$ dır. $\dfrac{\varphi(t)}{\tau - z}$ fonksiyonu L üzerinde (yani $z\in L$ iken) z ye göre analitik olmadığından $\Phi(z)$ fonksiyonunun $t\in L$ olmak üzere $z\in D^+, z\to t$ *ve* $z\in D^-, z\to t$ iken limit değerlerinin varlığı ve bu değerlerin bulunması önem taşımaktadır. Bu limitleri sırasıyla

$$\Phi^+(t) = \lim_{\substack{z\to t \\ z\in D^+}} \Phi(z) \quad \left(= \lim_{z\to t^+} \Phi(z)\right)$$

$$\Phi^-(t) = \lim_{\substack{z\to t \\ z\in D^-}} \Phi(z) \quad \left(= \lim_{z\to t^-} \Phi(z)\right)$$

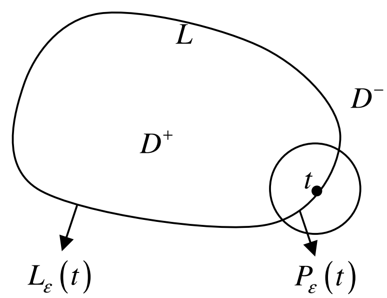
şeklinde gösterelim.

Tanım 2.6.9: $P_\varepsilon(t) = \{\tau\in L : t\in L, d(\tau,t) = |\tau - t| \le \varepsilon\}$ ve $L_\varepsilon(t) = L - P_\varepsilon(t)$

olmak üzere, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{L_\varepsilon(t)} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ limitine (eğer varsa) $\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$ *singüler integralinin Cauchy esas değeri* denir, yani Cauchy esas değeri

$$\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int\limits_{L_\varepsilon(t)} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau$$

olarak tanımlanır.



Şekil - 2.1

$\frac{1}{\tau - t}$ fonksiyonuna *Cauchy çekirdeği* denir.

Teorem 2.6.3: L basit kapalı düzgün bir eğri ve $\varphi : L \to C$ fonksiyonu $H_\alpha(L)$ sınıfından olsun. Bu durumda (2.6) ile verilen $\Phi(z)$ fonksiyonunun her $t \in L$ noktasında $\Phi^+(t) = \lim\limits_{\substack{z \to t \\ z \in D^+}} \varphi(z)$ ve $\Phi^-(t) = \lim\limits_{\substack{z \to t \\ z \in D^-}} \varphi(z)$

limitleri vardır ve

$$\begin{cases} \Phi^+(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \\ \\ \Phi^-(t) = -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau \end{cases} \tag{2.7}$$

formülleri doğrudur. Burada sağ taraftaki integral Cauchy esas değer anlamındadır (Gakhov, 1966;Muskhelishvili, 1968). (2.7) ifadelerini ilk olarak 1873 yılında Rus matematikçisi Sokhotski çıkarmıştır. Bu nedenle bu denklemler Sokhotski Formülleri olarak adlandırılır.

Sonuç 2.6.1: Teorem 2.6.3 ün hipotezi altında $\forall t \in L$ için

$$\varphi(t) = \Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t)$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(t)}{\tau - t}d\tau = \Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t)$$

ifadeleri doğrudur.

Teorem 2.6.4: L basit kapalı düzgün bir eğri $\varphi \in H_{\alpha}(L)\,(0 < \alpha \le 1)$ olsun. Bu durumda $\tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(t)}{\tau - t}d\tau$, $t \in L$ olmak üzere $\tilde{\varphi} \in H_{\alpha}(L)$ ve $\alpha = 1$ için $\varepsilon > 0$ yeterince küçük bir sayı olmak üzere $\tilde{\varphi} \in H_{1-\varepsilon}(L)$ dir (Gakhov, 1966; Muskhelishvili, 1968; Huseynov and Muhtarov, 1980).

Sonuç 2.6.2: Teorem 2.6.4 ün hipotezleri sağlandığında (2.7) formülleri yardımı ile tanımlanan $\Phi^{+}(t)$ ve $\Phi^{-}(t)$ fonksiyonları için $0 < \alpha \le 1$ ise $\Phi^{+}, \Phi^{-} \in H_{\alpha}(L)$ ve $\alpha = 1$ için $\Phi^{+}, \Phi^{-} \in H_{1-\varepsilon}(L)$ dır.

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kapalı, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dairesinde analitik fonksiyon olsun. Diğer taraftan s ve σ yi $L = \partial D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ üzerinde birer yay uzunlukları olarak tanımlayalım. $f(z)$ fonksiyonunun L üzerindeki reel kısmının limit değerini *u(s)* fonksiyonu olarak kabul edelim. Bu durumda $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} u(\sigma)\frac{e^{i\sigma} + z}{e^{i\sigma} - z}d\sigma + iv_{0} \tag{2.8}$$

Schwartz formülü biçiminde gösterilebilir (Gakhov, 1966; Muskhelishvili, 1978; Başkan, 1998). Bu formülde $z=0$ alınıp ortalama değer teoremi kullanıldığında $v(s)=\operatorname{Im} f(z)\big|_{L=\partial D}$ olmak üzere,

$$v_0 = v(0,0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\sigma)\,d\sigma$$

bağıntısını elde ederiz. Burada $\dfrac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}$ ifadesi *Schwartz çekirdeği* olarak adlandırılır.

Schwartz çekirdeği ile Cauchy çekirdeği arasında basit bir bağ vardır. Eğer L birim çemberinin bir noktasının kompleks koordinatı $\tau = e^{i\sigma}$ olmak üzere

$$\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}d\sigma = \left(-1+\frac{2e^{i\sigma}}{e^{i\sigma}-z}\right)d\sigma = \frac{2}{i}\frac{d\tau}{\tau-z} - d\sigma$$

bağıntısından,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+z}{e^{i\sigma}-z}d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{2u(\sigma)}{\tau-z}d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\,d\sigma \tag{2.9}$$

formülünü elde ederiz. Bu formül Schwartz integrali ile Cauchy tipli integral arasında bağıntı kurmaktadır.

Tanım 2.6.10: (2.9) bağıntısında $z\in D, z\to t=e^{i\sigma}$ için limite geçersek, (2.7) Sokhotski formüllerini kullanarak

$$u(s)+iv(s) = \frac{1}{2}2u(s) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2u(\sigma)}{\tau-t}d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\sigma)d\sigma + iv_0$$

buluruz. Bu eşitlikten

$$v(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} u(\sigma)\frac{e^{i\sigma}+e^{is}}{e^{i\sigma}-e^{is}}d\sigma + v_0$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{e^{i\sigma}+e^{is}}{e^{i\sigma}-e^{is}}=\frac{e^{i\frac{\sigma-s}{2}}+e^{-i\frac{\sigma-s}{2}}}{e^{i\frac{\sigma-s}{2}}-e^{-i\frac{\sigma-s}{2}}}=\frac{1}{i}\cot\frac{\sigma-s}{2}$$

olması nedeniyle, $v(s)$ fonksiyonu

$$v(s)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\sigma)cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+v_0$$

şeklinde bulunur. Bu formül analitik fonksiyonun imajiner (sanal) kısmının sınır değerini verir. $-if(z)=v-iu$ fonksiyonundan, yukarıdaki bağıntıyı da kullanarak

$$u(s)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}v(\sigma)cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+u_0$$

fonksiyonunu elde ederiz. Bu iki simetrik formüle *Hilbert dönüşüm formülleri,* $cot\,\frac{\sigma-s}{2}$ ifadesine de *Hilbert çekirdeği* adı verilir.

2.7. Operatör Denklemlerin Yaklaşık Çözüm Yöntemleri:

X ve Y herhangi normlu uzaylar, X_n ve Y_n sırasıyla X ve Y nin herhangi alt uzayları olsun.

$$Kx=y,\quad x\in X,\ y\in Y \tag{2.10}$$

denklemi ve bu denkleme uygun

$$K_nx_n=y_n,\quad x_n\in X_n,\ y_n\in Y_n \tag{2.11}$$

denklemi verilmiş olsun. Burada $K:X\to Y$ ve $K_n:X_n\to Y_n$ lineer operatörlerdir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $P_n Y = Y_n$ olacak şekilde $P_n : Y \to Y_n$ lineer operatörünün var olduğunu ve aşağıdaki şartların sağlandığını varsayacağız:

A Şartı:

X_n ve Y_n sonlu boyutlu alt uzaylar ve Boy X_n =Boy Y_n dir.

B Şartı:

$P_n^2 = P_n$, K_n-sürekli bir operatör, X_n bir Banach uzayı ve $\forall \varepsilon > 0$ ve her $x \in X$ için $\|P_n Kx - K_n X_n\| < \varepsilon$ olacak şekilde $x_n \in X_n$ elemanı vardır.

i. $\forall x_n \in X_n$ için $\|Kx_n - P_n Kx_n\| \le \varepsilon_1^{(n)} \|x_n\|$

ii. $\forall x_n \in X_n$ için $\|Kx_n - y_n\| \le \varepsilon_2^{(n)} \|x_n\|$

olacak şekilde $y_n \in Y_n$ elemanı vardır. Burada $\varepsilon_1^{(n)}$ ve $\varepsilon_2^{(n)}$, $x_n \in X_n$ den bağımsız pozitif sayılardır.

iii. $y_n \in Y_n$ olmak üzere $Kx^0 = y_n$ denkleminin $x^0 \in X$ çözümü için

$\|x^0 - x_n^0\| \le \varepsilon_3^{(n)} \|x^0\|$,

$\|P_n Kx^0 - P_n Kx_n^0\| \le \varepsilon_4^{(n)} \|x^0\|$

olacak şekilde $x^0 \in X_n$ elemanı vardır. Burada $\varepsilon_3^{(n)}$ ve $\varepsilon_4^{(n)}$, x^0 dan bağımsız pozitif sayılardır.

Teorem 2.7.1: $K : X \to Y$, $K_n : X_n \to Y_n$, $P_n : Y \to Y_n$ lineer operatörler, ayrıca $X_n \subset X_{n+1}$, $Y_n \subset Y_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için (i) ve (ii) koşulları sağlansın,

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_1^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \|P_n\| \varepsilon_2^{(n)} \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } \lim \|P_n Kx - P_n Kx_n\| = 0$$

olacak şekilde $x_n \in X_n$ elemanı var olsun. Üstelik eğer, x^* (2.10) denkleminin çözümü ve $E_n(x^*) = \inf\left\{\left\|x^* - x_n\right\| : x_n \in X_n\right\}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\left\|P_n\right\| E_n(x^*) = 0\,, \quad P_n^2 = P_n \text{ veya } \delta^{(n)} = \left\|y - y_n\right\|, \quad \lim_{n\to\infty}\delta^{(n)} = 0$$

koşullarından biri sağlandığında $n \to \infty$ için $x_n^* = K_n^{-1} y_n$ yaklaşık çözümleri x_* kesin çözümüne yaklaşır ve

$$\left\|x^* - x_n^*\right\| = 0 \quad \left(\varepsilon_1^{(n)} + \left\|P_n\right\| + E_n(x^*)\right)$$

$$\left\|x^* - x_n^*\right\| = 0 \quad \left(\varepsilon_1^{(n)} + \varepsilon_2^{(n)}\left\|P_n\right\| + \left\|y - y_n\right\|\right)$$

ifadeleri doğrudur.

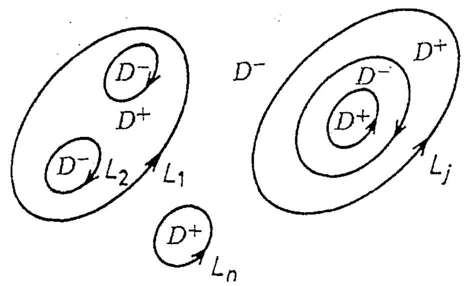
Uyarı: Lineer denklemler söz konusu ise $K_n = P_n K$ olduğundan ve bu durumda (i) koşulu, $\varepsilon_1^{(n)} = 0$ sabiti için sağlandığından Teorem 2.7.1 in yardımıyla lineer denklemlerin yaklaşık çözümü için direkt yöntemler incelenebilir.

2.8. Riemann Sınır-Değer Problemleri

Bu kesimde, sınır-değer problemlerinden biri olan Riemann sınır-değer problemi ve çeşitleri verilecek. Önce, analitik fonksiyonların sınır değerleri için iki temel şart verilerek en basit sınır-değer problemi olan sıçrama problemini ele alacağız. Sonra, homojen problemin çözümlerini, L nin bir tek kapalı eğri olduğu basit durum ve $L = \sum_{j=1}^{n} L_j \, (n > 1)$ olduğu durumda inceleyeceğiz. En sonunda, homojen olmayan Riemann problemi, sonsuz eğriler üzerinde Riemann problemi ve normal olmayan tipten Riemann problemini inceleyeceğiz.

2.8.1. Analitik Fonksiyonların Sınır-Değerlerinin İncelenmesi:

$L=\sum_{j=1}^{\infty}L_j$ sonlu sayıda, pozitif yönde yönlendirilmiş, kesişmeyen, düzgün kapalı çevrelerin bir kümesi olsun. L nin kompleks düzlemi D^+ ve D^- bölgelerine ayırdığını ve $z=\infty\in D^-$ nin sağlandığını kabul edelim,



Şekil 2.2

Her L_j nin yönü (dolayısıyla L nin yönü), her bir bağlantılı D^+ parçası L nin pozitif (sol) tarafında kalacak şekilde tanımlanır.

Açıktır ki, başlangıçta sonsuzu D^+ içinde kabul edip yukarıdaki gibi devam edersek bu durumda D^+ ve D^- yer değiştirir ve her bir L_j ve buradan L aksi yönde yönlendirilmiş olur. L üzerinde sürekli bir $f(t)$ fonksiyonu verildiğinde onun D^+ da analitik (D^+ nın her bağlantılı bileşeninde analitik) bir fonksiyonun sınır-değeri olup olmadığını nasıl anlarız? Bu soru için aşağıdaki iki teoremi verelim.

Teorem 2.8.1. $f(t)\in H(L)$ fonksiyonu verilsin. f nin D^+ daki analitik bir $F(z)$ $(\infty\in D^+ \; ise \; F(\infty)=0)$ fonksiyonunun sınır-değeri olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt=0 \quad , \quad z\in D^- \tag{2.12}$$

olmasıdır.

İspat: Eğer $\infty \in D^{-}$ ve $f(t)=F^{+}(t)$, D^{+} daki analitik bir $F(\sigma)$ fonksiyonunun sınır-değeri ise bu durumda $z \in D^{-}$ için $\dfrac{F(\sigma)}{\sigma - z}$ D^{+} da analitik ve L üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Dolayısıyla, her bir bağlantılı D^{+} bileşenine Cauchy teoremi uygulanırsa (2.12) geçerli olur. Eğer $\infty \in D^{+}$ ve $F(\infty)=0$ ise bu durumda $\dfrac{F(\sigma)}{\sigma - z}$ nin $\sigma = \infty$ da rezidüsü sıfırdır ve buradan (2.12) yine geçerlidir.

F yi

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{f(t)}{t-z}dt \quad , \quad z \notin L \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlayalım. Plemelj formülünden

$$F^{+}(t)-F^{-}(t)=f(t) \quad , \quad t \in L$$

dir. Hipotezden $z \in D^{-}$ iken $F(z)\equiv 0$ dır. Dolayısıyla, $F^{-}(t)=0$ dır. Böylece, L üzerinde $f(t)=F^{+}(t)$ dir. $\infty \in D^{+}$ ise bu durumda $F(\infty)=0$ olduğu açıktır.

(2.12) yi $z \in D^{-}$ için uygulamak çok kullanılmamaktadır, onun yerine $t_0 \in L$ olan bir şart daha kullanışlı olacaktır.

Teorem 2.8.2. Bir $f(t)\in H(L)$ fonksiyonu verilsin. f nin D^{+} daki analitik bir $F(z)$ $(\infty \in D^{+}\ ise\ F(\infty)=0)$ fonksiyonunun sınır-değeri olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{f(t)}{t-t_0}dt=\frac{1}{2}f(t_0) \quad , \quad t_0 \in L \tag{2.14}$$

olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki, $f(t)=F^{+}(t)$ dir, Bu durumda, (2.12) sağlanır. Burada Plemelj formülünü kullanarak

$$-\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt=0 \quad , \quad t_0\in L$$

elde ederiz ki bu (2.14) dir. D^+ da analitik olan (2.13) ile tanımlı F yi göz önüne alalım $(\infty \in D^+ \; ise \, F(\infty)=0)$. Bu durumda F ye Plemelj formülünü uygularsak

$$F^+(t_0)=\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt \quad , \quad t_0\in L$$

elde ederiz. Böylece, hipotezden dolayı $F^+(t_0)=f(t_0)$ olduğu görülür.

2.8.2. Riemann Sınır-Değer Problemlerine Giriş

Tanım 2.8.1: Riemann sınır-değer problemi veya kısaca *R* problemi: *L* sıçrama eğrili bir parçalı analitik f fonksiyonu bulma problemidir öyle ki

$$f^+(t)=G(t)f^-(t)+g(t) \quad , \quad t\in L \tag{2.15}$$

sınır-değer şartı sağlanır, burada $G(t)$ ve $g(t)$, *L* üzerinde tanımlı Hölder şartını sağlayan iki fonksiyondur. Eğer $f(z)$ sonsuzda en fazla *m*. mertebeden olursa bu durumda problem R_m ile gösterilir. En önemli problemler, R_0 ve R_{-1} dir ki onlar için $f(\infty)$, sırasıyla, sonlu ve sıfıra eşittir. Eğer *L* üzerinde her yerde $G(t)\neq 0$ ise bu durumda *R* problemi normal tiptendir aksi takdirde normal olmayan tiptendir denir.

2.8.3. Sıçrama Problemleri ve Çözümleri

Tanım 2.8.2. (2.15) te $G(t)\equiv 1$ alınarak elde edilen

$$f^+(t)-f^-(t)=g(t) \quad , \quad t\in L \tag{2.16}$$

problemine sıçrama problemi denir.

Bu sıçrama problemini R_m de çözeceğiz: $g(t) \in H(L)$ olduğundan ve Plemelj formülünden kolayca görülür ki,

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)}{t-z}dt \quad , \quad z \notin L \tag{2.17}$$

(2.16) şartını sağlar, yani,

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = g(t) \quad , \quad t \in L \tag{2.18}$$

dir. Bu durumda, (2.16) ve (2.18) dan

$$f^+(t) - \varphi^+(t) = f^-(t) - \varphi^-(t) \quad , \quad t \in L$$

dir. Yani, $F(z) = f(z) - \varphi(z)$ hem D^+ da hem de D^- de analitiktir öyle ki L nin farklı taraflarında aynı sınır-değerlere sahiptir. Dolayısıyla, analitik devam ilkesinden, F bir tam fonksiyondur.

İlk olarak $m > 0$ olsun, $\varphi(\infty) = 0$ olduğundan F nin $z = \infty$ da aynı f gibi en fazla *m.* mertebeden bir kutbu vardır. Liouville teoreminden F en fazla *m.* mertebeden bir polinom olmalıdır. Buradan, (2.16) in R_m deki genel çözümü

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)}{t-z}dt + P_m(z) \tag{2.19}$$

dir, burada P_m, *m.* dereceden bir keyfi polinomdur, buradaki *m.* dereceden bir keyfi polinom, aslında derecesi m yi geçmeyen ve sıfır sabitini de içeren bir keyfi polinom anlamındadır. Genel çözümde $m + 1$ keyfi (kompleks) sabit vardır. Yani, çözümün bağımsızlık derecesi $m + 1$ dir.

Eğer (2.16) R_0 da çözülürse, yani, $f(\infty)$ un sonlu ($z = \infty$ da analitik) olması istenirse bu durumda (2.19) deki $P_0(z) \equiv sabit$ tir ve çözümün bağımsızlık derecesi 1 dir.

Eğer (2.16) R_{-1} de çözülürse, yani, $f(\infty)=0$ alınırsa bu durumda problem φ tek çözümüne sahiptir (veya (2.19) de $P_{-1}(z)\equiv 0$ alınır). Bu durumda, çözümün bağımsızlık derecesi sıfırdır.

Eğer (2.16), R_{-r} de çözülürse bu durumda (2.19) deki $P_{-r}(z)\equiv 0$ alınsa bile $f(z)$ nin sonsuzda en az *r*. mertebeden bir sıfıra sahip olduğu garanti edilemez. (2.17) integralindeki $\dfrac{1}{(t-z)}$ terimi $z=\infty$ da ($|z|>|t|$ için) Laurent serisine açılırsa

$$f(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_L g(t)t^k dt\,\frac{1}{z^{k+1}}$$

bulunur ve buradan görülür ki, f nin $z=\infty$ da en az *r*. mertebeden bir sıfıra sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\int_L g(t)t^k dt=0 \quad , \quad k=0,1,\ldots,r-2 \tag{2.20}$$

olmasıdır. Bu demektir ki; R_{-r} $(m=-r)$ deki (2.16) sıçrama problemi çözülebilirdir ve bu durumda onun (2.19) tek çözümüne sahip olması ($P_{-r}(z)\equiv 0$ olması durumu) için gerek ve yeter şart g nin bu $(r-1)$-tane şartı sağlamasıdır. Yani, $m\le 2$ ise (2.16) R_m problemi, $g, r-1=-(m+1)$ şartı sağladığında tek çözüme sahiptir. Bu durumda, çözümün bağımsızlık derecesi $(m+1)$ (negatif tamsayı) dir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.8.3: (2.16) sıçrama probleminin R_m deki genel çözümü, $m+1$ bağımsızlık derecesine sahiptir-. Daha açık olarak, $m\ge 0$ olduğunda onun çözümü (2.19) ile verilir, burada $P_m(z)$, *m*. dereceden bir keyfi polinomdur; $m=-1$ olduğunda $P_0(z)\equiv 0$ olmak üzere (2.19) tek çözüme sahiptir; $m\le -2$ olduğunda onun (2.19) tek çözümüne sahip olması için gerek ve yeter şart (2.20) deki $-(m+1)$ tane çözülebilirlik şartlarının sağlanmasıdır ($r=-m$). Üstelik, Privalov teoreminden dolayı $f^{\pm}(t)\in H(L)$ dir. Bundan sonra, negatif dereceden bir $P_m(m<0)$ polinomunun daima sıfıra özdeş olduğunu kabul edeceğiz. Bu durumda, (2.16) nin R_m deki çözümü herhangi bir durumda ($m\leq -2$ için çözülebiliyorsa) (2.19) olarak yazılabilir. Şimdi, sıçrama problemine bir örnek verelim.

Örnek 2.8.1: L, $|t|=1$ pozitif yönde yönlendirilmiş birim çemberi olmak üzere parçalı analitik bir f fonksiyonu bulunuz öyle ki,

$$f^{+}(t)=f^{-}(t)+\cos\theta\,,\quad t=e^{i\theta}\,,0\leq\theta\leq 2\pi$$

ve $f(\infty)$ sonlu olsun.

Çözüm: $t=e^{i\theta}$ dan

$$\cos\theta=\frac{t+t^{-1}}{2}=\frac{t^2+1}{2t}$$

olur. $f(\infty)$ un sonlu olması istendiğinden problem R_0 da çözülecektir. Buradan, (2.19) genel çözümü

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\frac{t^2+1}{2t}}{t-z}dt+c$$

halini alır. Bu integralin değeri, $|z|>1$ için Cauchy integral formülünden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\frac{t^2+1}{2t}}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\frac{t^2+1}{2(t-z)}}{t}dt=\int_L\frac{f(t)}{t}dt=f(0)=-\frac{1}{2z}$$

dir. $|z|<1$ için, sırasıyla, $t=0$ ve $t=z$ merkezli, birbirlerini kesmeyen ve tamamen L içinde kalan L_1 ve L_2 çemberlerini seçelim. Cauchy integral formülünden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\frac{t^2+1}{2t}}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\frac{t^2+1}{2(t-z)}}{t}dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\frac{t^2+1}{2t}}{(t-z)}dt = \left.\frac{t^2+1}{2(t-z)}\right|_{t=0} + \left.\frac{t^2+1}{2t}\right|_{t=z}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{z} + \frac{z^2+1}{z}\right) = \frac{1}{2}z$$

dir. Böylece, istenen çözüm

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}z + c & , |z| < 1 \\ -\frac{1}{2z} + c\ , & |z| > 1 \end{cases}$$

olarak elde edilir.

2.8.4. Homojen Riemann Sınır-Değer Problemleri

Tanım 2.8.3: Eğer

$$f^+(t) = G(t)f^-(t) + g(t)\,, \quad t \in L$$

şartında $g(t) \equiv 0$ ise bu durumda ona bir homojen Riemann sınır-değer problemi veya kısaca homojen *R* problemi denir. Yani bu, bir f parçalı analitik fonksiyonunu bulma problemidir öyle ki *L* onun sıçrama eğrisidir ve

$$f^+(t) = G(t)f^-(t)\,, \quad t \in L \tag{2.21}$$

sağlanır, burada $G(t) \in H$ ve sıfırdan farklı verilmiştir. Basitlik için problemi R_0 da çözelim, yani, $f(\infty)$ sonlu olsun.

2.8.4.1. Homojen Riemann Probleminin Çözümü (Basit Durum)

.

Bu kısımda *L* nin pozitif yönlü, düzgün kapalı bir çevre olması durumunu göz önüne alacağız. Aksi ifade edilmedikçe, problemler R_0 da çözülecek, farklı haller *G* nin κ indisinin farklı değerlerine bağlı olarak incelenir.

1. $\kappa=0$ *durumu*: Bu durum basittir çünkü; logaritmanın belirli bir dalı alındığında log*G(t)* tek-değerlidir. Kabul edelim ki, $\Phi^{\pm}(t)$ ve *L* üzerinde tek-değerlidir. (2.21) da her iki tarafın logaritması alındığında problem

$$\log\Phi^{+}(t)=\log\Phi^{-}(t)+\log G(t) \quad , \quad t\in L \tag{2.22}$$

halini alır, bu durumda $\Gamma(z)=\log\Phi(z)$ de parçalı analitiktir. (2.17) ya göre,

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log G(t)}{t-z}dt \quad , \quad z\notin L \tag{2.23}$$

(2.22) ün bir çözümüdür ve $\Gamma(\infty)=0$ dır. Dolayısıyla, $X(z)=e^{\Gamma(z)}$ yani,

$$X(z)=e^{\Gamma(z)}=e^{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\log G(t)}{t-z}dt} \tag{2.24}$$

(2.21) probleminin bir özel çözümüdür. Gerçekten, Γ ya Plemelj formülü uygulanırsa

$$\Gamma^{\pm}(t_0)=\pm\frac{1}{2}\log G(t_0)+\Gamma(t_0) \quad , t_0\in L$$

olur. Buradan

$$X^{+}(t_0)=e^{\frac{1}{2}\log G(t_0)}e^{\Gamma(t_0)}$$

$$X^{-}(t_0)=e^{-\frac{1}{2}\log G(t_0)}e^{\Gamma(t_0)}$$

dır. Bu iki eşitliği taraf tarafa böldüğümüzde

$$\frac{X^{+}(t_0)}{X^{-}(t_0)}=e^{\log G(t_0)}=G(t_0)$$

yani,

$$X^{+}(t_0)=G(t_0)X^{-}(t_0)$$

elde ederiz. Dolayısıyla, herhangi bir $t\in L$ için

$$X^{+}(t)=G(t)X^{-}(t) \tag{2.25}$$

yazabiliriz. Üstelik, L üzerinde $X^{\pm}(t) \neq 0$ ve $X(\infty) = 1$ dir. $IndG(t) = 0$ olması şartı, çözümün varlığı için değil (2.24) formunda yazılabilir olması için gereklidir. Çünkü; $IndG(t) = 0$ iken $\Phi(z), D^{+}$ ve D^{-} de sıfırdan farklıdır. Şimdi (2.21) un R_0 daki genel çözümünü araştıralım. (2.21) ve (2.25) yi taraf tarafa böldüğümüzde

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)} = \frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)}$$

elde ederiz, yani, $F(z) = \dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ fonksiyonu tüm genişletilmiş kompleks düzlemde analitiktir. Ayrıca $\Phi(\infty)$ ve böylece $F(\infty)$ sonludur. Bu durumda, Liouville teoreminden dolayı F sabittir. Böylece, (2.21) un R_0 daki genel çözümü

$$\Phi(z) = CX(z) \tag{2.26}$$

dir, burada C, bir keyfi sabit ve X, (2.24) ile verilmiştir. Eğer (2.21) probleminde $\Phi(\infty) = 0$ alırsak bu durumda $X(\infty) = 1$ olduğundan (2.26) deki C sıfır olmalıdır. Yani, (2.21) problemi R_{-1} ve şüphesiz $R_{-r}(r > 0)$ de sadece aşikar çözüme sahiptir. Eğer Φ, $z = \infty$ da en fazla m. mertebeden bir kutba sahip olursa, yani, (2.21) $R_m(m > 0)$ de çözülürse bu durumda genel çözüm

$$\Phi(z) = P_m(z)X(z) \tag{2.27}$$

dir, burada P_m, *m.* dereceden bir keyfi polinomdur. Son olarak hatırlatalım ki, (2.24) deki $\log G(t)$ nin bir başka dalı alınırsa X değişmez kalır.

*2. $\kappa > 0$ durumu***:** Burada $\log G(t)$, L üzerinde çok-değerli bir fonksiyondur. Bu zorluğu aşmak gerekir. Bunun için, problemi indisin sıfır olduğu 1. durumuna dönüştüreceğiz. L ile sınırlı iç bölgede bir z_0 sabit noktası alalım, $(t - z_0)^{\kappa}$

fonksiyonunun L ye göre indisi κ dır ve buradan $G_0(t)=(t-z_0)^{-\kappa}G(t)$ nin indisi sıfırdır. Dolayısıyla,

$$\Phi^+(t)=G_0(t)(t-z_0)^{\kappa}\Phi^-(t)\,,\quad t\in L \qquad (2.28)$$

ile verilen problem sıfır indisli bir R problemi haline dönüştürülebilir. Bir, parçalı analitik φ fonksiyonunu

$$\varphi(z)=\begin{cases}\Phi(z) & , \quad z\in D^+\\ (z-z_0)^{\kappa}\Phi(z) & , \quad z\in D^-\end{cases} \qquad (2.29)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda (2.28), φ için sıfır indisli bir

$$\varphi^+(t)=G_0(t)\varphi^-(t) \quad , \quad t\in L \qquad (2.30)$$

R problemi olur. Fakat, $\Phi(\infty)$ sonlu olduğundan φ, $z=\infty$ da en fazla κ. mertebedendir, yani, (2.30) R_κ de çözülmelidir. Eğer

$$X_0(z)=e^{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\log G_0(t)}{t-z}dt} \quad , \quad z\notin L$$

dersek (2.30) in R_κ daki genel çözümü, (2.27) den dolayı,

$$\varphi(z)=P_\kappa(z)\,X_0(z)$$

dir, burada P_κ , κ. dereceden bir keyfi polinomdur. Şimdi, Φ ye geri dönelim, (2.21) probleminin R_0 daki genel çözümünü

$$\Phi(z)=P_\kappa(z)\,X(z) \qquad (2.31)$$

olarak elde ederiz, burada

$$X(z)=\begin{cases}X^+(z)=e^{\Gamma(z)} & , z\in D^+\\ X^-(z)=(z-z_0)^{-\kappa}e^{\Gamma(z)} & , z\in D^-\end{cases} \qquad (2.32)$$

dır ve

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\log\left[(t-z_0)^{-\kappa}G(t)\right]}{t-z}dt$$

ile verilir.

Uyarı: $\kappa = 0$ durumu bu duruma dahil edilebilir.

3. $\kappa < 0$ *durumu:* Bu durumda, $\varphi(z)$ (2.29) den dolayı sonsuzda en az $-\kappa$ mertebeden bir sıfır noktasına sahiptir. Çünkü; $\Phi(\infty)$ sonludur. Dolayısıyla, (2.30) problemi, *1.* den dolayı R_κ de yalnız bir aşikar çözüme sahiptir ve R_0 daki (2.21) problemi de böyledir. Böylece, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.8.4. (2.21) homojen problemi, indisi $\kappa > 0$ iken $\kappa + 1$ tane lineer bağımsız çözüme; $\kappa < 0$ iken sadece aşikar çözüme sahiptir, burada $\Phi(\infty)$ sonludur yani, çözümler R_0 dadır.

Bahsedilen $\kappa + 1$ ($\kappa \geq 0$ iken) çözüm, (2.31) den dolayı

$$X(z),\ zX(z), \ldots, z^\kappa X(z)$$

dir, bu çözümlerin lineer bağımsız olduğu aşikardır (katsayılar kompleks sayılar cisminden alınmaktadır). Benzer şekilde, eğer $\Phi(\infty) = 0$ ise, bu durumda R_{-1} deki (2.21), $\kappa > 0$ iken κ tane lineer bağımsız çözüme; $\kappa \leq 0$ iken sadece aşikar çözüme sahiptir.

2.8.4.2. Kanonik Fonksiyonlar

(2.32) ile tanımlı parçalı analitik X fonksiyonu indisin herhangi bir değeri için aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $X^+(t) = G(t) X^-(t)$

2. Kompleks düzlemde her yerde $X(z) \neq 0$ ve L üzerinde de $X^\pm(t) \neq 0$ dır.

3. X , $z = \infty$ da. $-\kappa$ sonlu mertebeye sahiptir.

Özellik 1: $X(z)$ nin (2.21) homojen probleminin bir özel çözümü olduğunu gösterir ki bu problem, 3. özellikten dolayı $R_{-\kappa}$ dadır. X veya CX ($C \neq 0$ bir keyfi sabittir) e homojen (2.21) probleminin kanonik çözümü veya kanonik fonksiyonu denir. Genel olarak, yukarıdaki üç özelliğe sahip parçalı analitik bir X fonksiyonuna (2.21) probleminin bir kanonik fonksiyonu denir. Burada, L nin yönlendirilmesi hakkında bir kısıtlama yapılmamıştır. Üstelik, kolayca gösterilebilir ki, herhangi bir kanonik fonksiyon CX ($C \neq 0$) biçimindedir. Ayrıca, $X^{\pm}(t) \in H(L)$ olduğu da X in yapısından ve Privalov teoreminden görülür.

(2.21) probleminde L nin pozitif yönlendirilmiş olduğunu kabul etmiştik. L negatif yönlendirildiğinde ise problemin kanonik fonksiyonu ve buradan (R_0 daki) genel çözümü benzer şekilde elde edilebilir.

2.8.4.3. Homojen Riemann Probleminin Çözümü (Genel Durum)

$L = \sum_{j=1}^{n} L_j$ $(n > 1)$ olduğu genel duruma dönelim. L_j lerin bu bölümün başında belirttiğimiz şekilde yönlendirilmiş ve $z = \infty \in D^-$ olduğunu kabul edelim (Şekil 2.2). (2.21) homojen problemini R_0 da çözeceğiz, yine $G(t) \in H(L)$ ve L üzerinde $G(t) \neq 0$ alıyoruz. Yani, her bir L_j üzerinde $G(t) = G_j(t) \in H$ ve $G_j(t) \neq 0$ dır.

Her bir L_j ($j = 1, 2, ..., n$) için (2.21) un $X_j(z)$ kanonik fonksiyonunu inşa edelim (burada z_j, L_j nin içinde alınmalıdır fakat her bir L_k nın dışı L_j ile çevrelenmektedir), bu durumda

$$X_j^+(t) = G_j(t) X_j^-(t)\,,\; t \in L_j \tag{2.33}$$

ve kompleks düzlemde $X_j(z) \neq 0$ dır, ayrıca ∞ da $-\kappa_j = Ind_L G_j(t)$ mertebedendir. X_j , L_k $(k \neq j)$ üzerinde analitiktir çünkü; L_j lerin hiçbiri diğerini kesmez ve böylece

$$X_j^+(t) = X_j^-(t) \quad t \in L_k\,, k \neq j \tag{2.34}$$

dir.

$$X(z) = \prod_{j=1}^{n} X_j(z) \tag{2.35}$$

olsun, bu durumda *X, L* sıçrama eğrili parçalı analitik bir fonksiyondur. (2.33) ve (2.34) den dolayı

$$X^+(t) = G(t) X^-(t)\,, \quad t \in L$$

ve onun sınır-değerlerini içine alan tüm düzlemde $X(z) \neq 0$ sağlanır. Üstelik, *X* in sonsuzdaki mertebesi, X_j lerin mertebeleri toplamıdır, yani,

$$-\sum_{j=1}^{n} \kappa_j = -\sum_{j=1}^{n} \dot{I}nd_{L_j} G_j(t) = -\dot{I}nd_L G(t) = -\kappa$$

dir. Böylece *X,* 1-3 özelliklerini sağlar. Bu özellikteki bir fonksiyona yine (2.21) in bir kanonik fonksiyonu veya kanonik çözümü denir. Dolayısıyla *X,* (2.21) un bir kanonik fonksiyonudur ve onun herhangi bir kanonik fonksiyonu $CX\,(C \neq 0)$ biçimindedir. Üstelik, $X^{\pm}(t) \in H(L)$ dir.

Sonuç olarak, a) da incelediğimiz κ nın üç hali burada geçerlidir, yani, Teorem 2.8.4 genel durumda geçerli kalır. (2.21) in R_0 daki genel çözümü yine (2.31) dir öyle ki, *X* (2.32) ile verilir.

Yine, (2.21) un çözümünün $\Phi^{\pm}(t)$ sınır-değerlerinin *H(L)* ye ait olduğu Privalov teoreminden aşikar olarak görülür.

2.8.5. Homojen Olmayan. Riemann Sınır-Değer Problemleri

Şimdi, (2.15) homojen olmayan Riemann problemini göz önüne alalım, burada, $g(t) \neq 0$ dır.

2.8.5.1. Homojen Olmayan Riemann Probleminin Çözümü

$L = \sum_{j=1}^{n} L_j$ yi bu bölümün başında tanımladığımız biçimde yönlendirelim. Basitlik için $\Phi(\infty)$ u sonlu kabul edeceğiz, yani, problemi R_0 da çözeceğiz. Yine, $\kappa = \dot{I}nd_L G(t)$ ye (2.15) probleminin indisi ve (2.21) homojen problemine karşılık gelen X kanonik fonksiyonuna (2.15) probleminin kanonik fonksiyonu diyeceğiz. Kısım 2.8.4.b) de X in 1. özelliğinden dolayı (2.15) problemi

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L$$

olarak yeniden yazılabilir. Bu durumda, $F(z) = \dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ de

$$F^+(t) - F^-(t) = \frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L \tag{2.36}$$

sıçrama problemini sağlayan bir parçalı analitik fonksiyondur. X in sonsuzdaki mertebesi -κ ve $\Phi(\infty)$ sonlu olduğundan F nin $z = \infty$ daki mertebesi en çok κ dır. Yani, bu sıçrama problemi R_κ da çözülecektir. Dolayısıyla, Kısım 2.8.3 deki sonuçlardan, R_0 daki (2.15) problemi için κ nın farklı değerlerine göre aşağıdaki farklı sonuçları elde ederiz.

1. $\kappa \geq 0$ *durumu*: (2.19) den dolayı (2.36) sıçrama problemi, R_κ da

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)}\frac{dt}{(t-z)}+P_\kappa(z)$$

genel çözümüne sahiptir. Bu durumda R_0 daki homojen olmayan problemin genel çözümünü

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)}\frac{dt}{(t-z)}+P_\kappa(z)X(z) \tag{2.37}$$

olarak elde ederiz, burada P_κ, κ. dereceden bir keyfi polinomdur.

2. $\kappa=-1$ *durumu*: Bu durumda *F*, $z=\infty$ da en çok 1. mertebeden bir sıfıra sahiptir ve böylece (2.15) problemi R_0 da $P_{-1}(z)\equiv 0$ olacak biçimde bir tek (2.37) çözümüne sahiptir.

3. $\kappa<-1$ *durumu*: Kısım 2.8.3 den dolayı (2.36) sıçrama probleminin R_κ da (tek olarak) çözülebilmesi için gerek ve yeter şart

$$\int_L \frac{g(t)t^k}{X^+(t)}dt=0\,,\quad k=0,1,\ldots,-\kappa-2 \tag{2.38}$$

olmasıdır. Dolayısıyla, R_0 daki (2.15) problemi için çözülebilirlik şartları, (2.38) in sağlanmasıdır ve eğer bu şartlar sağlanırsa problem $P_\kappa(z)\equiv 0$ olacak biçimde bir tek (2.37) çözümüne sahiptir. Böylece, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.8.5. $\Phi(\infty)$ sonlu olmak üzere (2.15) homojen olmayan problemi, $\kappa\geq -1$ iken daima çözülebilirdir; $\kappa<-1$ iken tek olarak çözülebilmesi için gerek ve yeter şart (2.38) da ki $-\kappa-1$ tane şartın sağlanmasıdır, $\kappa<0$ iken onun genel çözümü $P_\kappa(z)\equiv 0$ olacak biçimde (2.37) dir. Bu R_0 problemi için, çözümün bağımsızlık derecesi $\kappa+1$ dir.

R_{-1} deki (2.15) problemi çoğu kez uygulamalarda karşımıza çıkar. Bu durumda, *F(z)* nin sonsuzdaki mertebesi en çok $\kappa-1$ dir ve böylece karşılık gelen

(2.36) sıçrama problemi $R_{\kappa-1}$ de çözülmelidir. Benzer şekilde, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.8.6. $\Phi(\infty)=0$ şartu altında homojen olmayan (2.15) problemi $\kappa \geq 0$ iken daima çözülebilirdir öyle ki genel çözüm

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)}\frac{dt}{(t-z)}+P_{\kappa-1}(z)X(z) \tag{2.39}$$

dir, burada $R_{\kappa-1}$, $\kappa-1$. dereceden bir keyfi polinomdur; $\kappa<0$ iken problemin (2.39) çözümü ile (tek olarak) çözülebilmesi için ($\kappa \leq 0$ iken $P_{\kappa-1}(z)\equiv 0$ dır) gerek ve yeter şart

$$\int_L \frac{g(t)t^k}{X^+(t)}dt=0\,,\quad k=0,1,\ldots,-\kappa-1 \tag{2.40}$$

olmasıdır. Çözümün bağımsızlık derecesi κ dır. Şüphesiz, her bir durumda $\Phi^+(t)\in H(L)$ dir.

2.8.5.2. Ek Riemann Problemleri

Tanım 2.8.4. Homojen olmayan (2.15) *R* problemi veya buna karşılık gelen (2.21) homojen Riemann problemine bağlı olarak,

$$\varphi^+(t)=\frac{1}{G(t)}\varphi^-(t)\,,\quad t\in L \tag{2.41}$$

homojen *R* problemine onun ek *R* problemi denir.

(2.41) nin indisi

$$\kappa'=\dot{I}nd_L\left(\frac{1}{G(t)}\right)=-\dot{I}nd_L G(t)=-\kappa$$

dır. Kanonik fonksiyonu ise, *X* (2.15) ün kanonik fonksiyonu olmak üzere, $\frac{1}{X}$ dir.

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t)\,, \quad t \in L$$

ve (2.41) problemlerinin her ikisini de R_{-1} de göz önüne alalım. Kısım 2.8.4-c) den $\kappa' > 0$ iken ($\kappa < 0$) (2.41) nin genel çözümü

$$\varphi(z) = \frac{P_{-\kappa-1}(z)}{X(z)}$$

dir, yani, onun lineer bağımsız çözümlerinin kümesi

$$\varphi_k(z) = \frac{z^k}{X(z)}\,, k = 0,1,\ldots,-\kappa-1$$

lerden oluşur. Böylece, R_{-1} deki (2.15) için, (2.40) çözülebilirlik şartları

$$\int_L g(t)\varphi_k^+(t)dt = 0\,, \quad k = 0,1,\ldots,-\kappa-1$$

dir, yani *g,* (2.41) nin herhangi bir çözümünün pozitif taraflı sınır-değerine diktir. $\kappa' \leq 0$ iken (2.41) problemi sadece aşikar (sıfır) çözüme sahiptir, bu durumda problem R_{-1} de her zaman çözülebilirdir. Böylece, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.8.7. (2.15) R_{-1} probleminin çözülebilmesi için gerek ve yeter şart *g(t)* nin (2.41) ek R_{-1} probleminin herhangi bir çözümünün pozitif taraflı sınır-değerine dik olmasıdır.

Eğer problem, R_{-1} in dışında R_m de (örneğin R_0 da) göz önüne alınırsa yukarıdaki teorem geçerli olmaz. Ayrıca, (2.41) nin ek problemi (2.21) dur, yani, ek problemler arasında karşılıklı değişim bağıntısı vardır.

2.8.6. Sonsuz Eğriler Üzerinde Riemann Sınır-Değer Problemleri

Bu kısımda, Riemann problemlerini bir sonsuz *L* doğrusu üzerinde göz önüne alacağız, burada *L* yi *x*-ekseni olarak alıp *X* ile göstereceğiz. *X* i bir kesirli lineer dönüşüm ile w-düzlemindeki bir Γ çemberine dönüştürebiliriz öyle ki $\mathbb{C}^{\pm}$ üst ve alt yarı düzlemleri, Γ ile sınırlı, sırasıyla, iç ve dış $D^{\pm}$ bölgelerine dönüştürülür. Bu durumda problem, w-düzlemindeki Γ üzerinde bir R_0 problemine dönüşür. Bununla beraber, problemi direkt olarak incelemek de zor değildir.

Tanım 2.8.5.

$$\Phi^{+}(x) = G(x)\Phi^{-}(x) + g(x), \quad x \in X \tag{2.42}$$

Riemann problemine, *reel eksen üzerinde Riemann problemi* denir, burada $G(x) \neq 0$, $G(\infty)\big(= G(\mp\infty)\big) \neq 0$ ve $G(x)$, $g(x) \in \breve{H}(X)$ dir ve böylece $g(\infty)$ da mevcuttur. Daha belirgin olması için, problemi R_0 da çözeceğiz, yani, $\Phi(\infty)$ sınırlı ve $\Phi^{+}(+\infty) = \Phi^{+}(-\infty)$ olacaktır. X üzerinde $G(x) \in \breve{H}$, $G(x) \neq 0$ olduğundan *x*, sürekli olarak $-\infty$ dan $+\infty$ a artarken onun görüntüsü orijinden geçmeyen sürekli bir kapalı bir çevre oluşturur, böylece

$$\kappa = \dot{I}nd_X G(x) = \frac{1}{2\pi}\big[\arg G(x)\big]_X$$

tamsayısı anlamlıdır ve (2.42) nin indisi olarak tanımlanır. İlk olarak,

$$\Phi^{+}(x) = G(x)\Phi^{-}(x), \quad x \in X \tag{2.43}$$

homojen problemini göz önüne alalım.

$$G_0(x) = \left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\kappa} G(x)$$

olsun. Kolayca gösterilebilir ki, $G_0(x) \neq 0$, $G_0(x) \in \breve{H}$, $G_0(\infty) = G(\infty) \neq 0$ ve $\dot{I}nd_X G_0(x) = 0$ dir. (2.43) ü

$$\varphi^{+}(x) = G_0(x)\varphi^{-}(x), \quad x \in X$$

olarak yazabiliriz, burada

$$\varphi(z)=\begin{cases}(z+i)^{\kappa}\Phi(z)\,, & z\in\mathbb{C}^{+}\\ (z-i)^{\kappa}\Phi(z)\,, & z\in\mathbb{C}^{-}\end{cases}$$

dir ve bu fonksiyon parçalı analitiktir ve $z\to\infty$ iken $\varphi(z)=O\left(\left|z\right|^{\kappa}\right)$ dır. Bu durumda,

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\log G_0(x)}{x-z}dx$$

diyelim, burada $\log G_0(x)$ bir sabit tek-değerli dal olarak alınır, $G_0(x)$ in indisi sıfır olduğundan bu mümkündür. $\log G_0(x)\in\breve{H}$ olduğu kolayca gösterilebilir. Buradan $\Gamma^{\pm}(x)$ mevcuttur ve $\breve{H}$ sınıfına aittir, ayrıca Teorem 3.5.4 ten $\Gamma(\pm\infty)=0$ dır. X i

$$X(z)=\begin{cases}(z+i)^{-\kappa}e^{\Gamma(x)}\,, & z\in\mathbb{C}^{+}\\ (z-i)^{-\kappa}e^{\Gamma(x)}\,, & z\in\mathbb{C}^{-}\end{cases}$$

ile gösterirsek bu durumda

$$X^{+}(x)=G(x)X^{-}(x) \tag{2.44}$$

dir. Kısım 2.8.4-b) deki 2. ve 3. özellikleri X için de geçerlidir. Bu yüzden, X e (2.43) ün kanonik çözümü veya (2.42) nin kanonik fonksiyonu da denilebilir.

$$\frac{\Phi^{+}(x)}{X^{+}(x)}=\frac{\Phi^{-}(x)}{X^{-}(x)}$$

olduğundan $F(z)=\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ düzlemin tamamında analitiktir ve ∞ da en fazla κ. mertebedendir. Buradan, $\kappa\geq 0$ iken (2.43) ün genel çözümü

$$\Phi(z)=X(z)P_{\kappa}(z)$$

dir, burada P_{κ}, κ. dereceden bir keyfi polinomdur, $\kappa<0$ iken sadece aşikar çözüm vardır.

Şimdi, homojen olmayan (2.42) problemini göz önüne alalım. Bu problem, (2.44) den dolayı

$$\frac{\Phi^{+}(x)}{X^{+}(x)}=\frac{\Phi^{-}(x)}{X^{-}(x)}+\frac{g(x)}{X^{+}(x)} \tag{2.45}$$

olarak yeniden yazılabilir. Plemelj formülünü direkt olarak uygulayamayız. Çünkü, genel olarak ($\kappa \leq 0$ olmadıkça)

$$\frac{g(x)}{X^{+}(x)}=(x+i)^{\kappa}e^{-\Gamma(x)}g(x)\notin \breve{H}$$

dır. Düzgün olması için, κ nın ne olduğu önemli olmaksızın,

$$Y(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)} & , \quad z\in \mathbb{C}^{+} \\ \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{\kappa} e^{\Gamma(z)} & , \quad z\in \mathbb{C}^{-} \end{cases} \tag{2.46}$$

diyelim ve (2.45) yi $(x+i)^{-\kappa}$ ile çarpalım, bu durumda

$$\frac{\Phi^{+}(x)}{Y^{+}(x)}=\frac{\Phi^{-}(x)}{Y^{-}(x)}+\frac{g(x)}{Y^{+}(x)}$$

elde ederiz, burada $\dfrac{g(x)}{Y^{+}(x)}\in \breve{H}$ dır. Bu yüzden,

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)}{Y^{+}(x)(x-z)}dx\,, \quad z\notin X \tag{2.47}$$

alabiliriz. Dolayısıyla,

$$\frac{\Phi^{+}(x)}{Y^{+}(x)}-\varphi^{+}(x)=\frac{\Phi^{-}(x)}{Y^{-}(x)}-\varphi^{-}(x)$$

elde ederiz ve böylece $F(z)=\dfrac{\Phi(z)}{Y(z)}-\varphi(z)$ düzlemin tamamında analitiktir.

$\kappa \geq 0$ iken *F*, z = -*i* de κ. mertebedendir (yani $\kappa>0$ ise, κ. mertebeden bir kutba sahiptir). Onu sınırlı yapmak için *F* yi bir $(z+i)^{\kappa}$ çarpanı ile çarpabiliriz. Elde edilen çarpım $z=\infty$ da κ. mertebedendir, buradan o, κ. dereceden bir

$$(z+i)^{\kappa} F(z) = P_{\kappa}(z)$$

polinomudur. Böylece, (2.47) den (2.42) nin R_0 daki genel çözümünü

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{Y^{+}(x)(x-z)} dx + X(z) P_{\kappa}(z) \tag{2.48}$$

olarak elde ederiz, burada $(z+i)^{-\kappa} Y(z) = X(z)$ eşitliğini kullandık.

$\kappa < 0$ iken *F,* düzlemin tamamında sınırlıdır, bu yüzden o bir *c* sabitidir, bu durumda

$$\Phi(z) = Y(z)\left[\varphi(z) + c\right]$$

dir. Fakat böyle olduğunda, Φ genel olarak $z = -i$ de bir kutba sahiptir. Bu sorunu ortadan kaldırmak için eğer $\kappa = -1$ ise $c = -\varphi(-i)$ seçebiliriz. Bu durumda,

$$\Phi(z) = Y(z)\left[\varphi(z) - \varphi(-i)\right]$$

dir. Böylece, $\kappa = -1$ iken (2.42) nin tek çözümü

$$\Phi(z) = \frac{Y(z)}{2\pi i}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{Y^{+}(x)(x-z)} dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{Y^{+}(x)(x+i)} dx\right] \tag{2.49}$$

dir. Eğer $\kappa < 0$ ise *c* nin böyle seçiminin yanında

$$\varphi^{(k)}(-i) = 0\,, \quad k = 1, \ldots, -\kappa - 1$$

yani,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(x)}{Y^{+}(x)(x+i)^{k+1}} dx = 0\,, \quad k = 1, \ldots, -\kappa - 1 \tag{2.50}$$

şartları da sağlanmalıdır. (2.49) un (2.42) nin tek çözümü olması için gerek ve yeter şart $\kappa \leq -2$ iken (2.50) in sağlanmasıdır. Böylece, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.8.8. Reel eksen üzerinde (2.42) Riemann probleminin, eğer $\kappa \geq 0$ ise genel çözümü (2.48) dur; $\kappa = -1$ ise (2.49) tek çözümüne sahiptir; $\kappa < -1$ ise tek çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart (2.50) nin sağlanmasıdır. Çözümün bağımsızlık derecesi $\kappa + 1$ dir.

Şimdi, (2.42) problemini R_{-1} de göz önüne alalım. Açık olarak, $g(\infty)=0$ onun çözülebilirliği için gereklidir ve bu yüzden $F(\infty)=0$ dır. Buradan, $\kappa<0$ iken $(z+i)^{\kappa}F(z)$, $\kappa-1$. dereceden bir polinomdur, böylece

$$\Phi(z)=\frac{Y(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)}{Y^{+}(x)(x-z)}dx+X(z)P_{\kappa-1}(z) \tag{2.51}$$

genel çözümdür, burada $P_{\kappa-1}$, $\kappa-1$. dereceden bir keyfi polinomdur $(P_{-1}(z)\equiv 0)$. $\kappa\leq -1$ iken $F(z)\equiv 0$ ve

$$\Phi(z)=\frac{Y(z)}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)}{Y^{+}(x)(x-z)}dz \tag{2.52}$$

dir. Genel olarak Y ve buradan Φ, $z=-i$ de $-\kappa$. mertebeden bir kutba sahiptir, böyle bir durumdan kaçınmak için

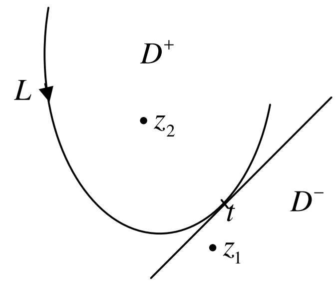
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(x)}{Y^{+}(x)(x+i)^{k}}dx=0,\ k=1,\ldots,-\kappa \tag{2.53}$$

şartlarına ihtiyaç vardır. Böylece, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.8.9. Reel eksen üzerinde (2.42) R_{-1} probleminin eğer $\kappa\geq 0$ ise genel çözümü (2.51) dir; $\kappa\leq -1$ ise onun (2.52) tek çözümüne sahip olması için gerek ve yeter şart (2.53) deki $-\kappa$ tane şartın sağlanmasıdır. Her bir durumda çözümün bağımsızlık derecesi κ dır.

Uyarı: Önceden verilen tanıma göre Y, $z=\infty$ da genellikle $-\kappa$ yerine sıfır mertebeden olduğundan (2.42) ün bir kanonik fonksiyonu değildir.

Şimdi, reel eksen üzerindeki Riemann problemi ile ilgili bazı yorumlar yapalım.



Şekil 2.3

1. (2.42) problemini çözerken yaptığımız $\pm i$ noktalarının seçimi önemli değildir, herhangi $z_1 \in \mathbb{C}^-$ ve $z_2 \in \mathbb{C}^+$, sırasıyla, -i ve +i nin yerine alınabilir.

2. Söz konusu çözüm yöntemi, (2.15) Riemann problemine genişletilebilir, burada $L = \sum_{j=1}^{n} L_j$ n tane paralel doğrudan oluşur. L_j nin denkleminin $y = c_j$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda z_1 ve z_2 yi, sırasıyla, $\operatorname{Im} z_1 < \min c_j$ ve $\operatorname{Im} z_2 > \max c_j$ olacak biçimde alabiliriz.

3. Eğer x-ekseni sonsuza uzanan, yönlendirilmiş, düzgün, her iki yönde tanımlı teğetlere sahip (Şekil 2.3), tam düzlemi D^+ ve D^- olmak üzere iki bölgeye ayıran bir L çevresi ile değiştirilirse bu durumda söz konusu çözüm yöntemi $z_1 \in D^-$ ve $z_2 \in D^+$ alındığında geçerli kalır. Problem $L = \sum_{j=1}^{n} L_j$ durumuna da genişletilebilir, burada bütün L_j 1er yukarıdaki özelliğe sahiptir ve hiçbiri diğerini kesmez.

4. Yukarıdaki problemlerin tamamı L nin bir lineer kesirli dönüşüm altındaki görüntüsü olan Γ çevresi için karşılık gelen problemlere dönüştürülebilir, burada Γ bir tek çevredir veya birbirini kesmeyen düzgün kapalı çevrelerin bir kümesidir.

2.8.7. Normal Olmayan Tipten Riemann Sınır-Değer Problemi

Bundan önce incelediğimiz Riemann problemleri normal tiptendi, yani, (2.15) de, L üzerinde $G(t) \neq 0$ idi. Bu kısımda, G veya $\frac{1}{G}$ nin L üzerinde tamsayı mertebeden sıfırlara sahip olabildiği normal olmayan tipten homojen Riemann problemlerini inceleyeceğiz. Burada, L nin bu bölümün başında belirttiğimiz özelliklere sahip olduğunu kabul edeceğiz.

Tanım 2.8.6.

$$\Phi^{+}(t) = \frac{\pi_1(t)}{\pi_2(t)} G(t)\Phi^{-}(t), \quad t \in L \tag{2.54}$$

olacak biçimde parçalı analitik bir $\Phi(z)$ fonksiyonu bulma problemine normal olmayan tipten homojen Riemann problemi denir, burada $G(t) \in H(L)$, $G(t) \neq 0$ ve $\alpha_j, \beta_k \in L, \alpha_j \neq \beta_k$ ve λ_j, μ_k pozitif tamsayılar olmak üzere

$$\pi_1(t) = \prod_{j=1}^{m} (t-\alpha_j)^{\lambda_j}, \quad \pi_2(t) = \prod_{k=1}^{n} (t-\beta_k)^{\mu_k}$$

ve

$$\lambda = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j, \quad \mu = \sum_{k=1}^{n} \mu_k$$

dır.

Kesinlik için problemi R_0 da çözeceğiz.

Kabul edelim ki, G nin L ye göre indisi κ olsun. G yi (2.25) daki gibi çarpanlarına ayıralım:

$$G(t) = \frac{X^{+}(t)}{X^{-}(t)}$$

burada X, yine (2.24) deki gibi verilmiştir, bu durumda (2.54)

$$\frac{\pi_2(t)\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\pi_1(t)\Phi^-(t)}{X^-(t)}$$

olarak yazılabilir. Eğer Ω yi

$$\Omega(z) = \begin{cases} \dfrac{\pi_2(z)\Phi(z)}{X(z)}, & z \in D^+ \\ \dfrac{\pi_1(z)\Phi(z)}{X(z)}, & z \in D^- \end{cases}$$

ile tanımlarsak bu durumda $\Omega^+(t) = \Omega^-(t)$ ve böylece Ω, düzlemin tamamında analitiktir. X, $z = \infty$ da $-\kappa$. mertebeden ve $\Phi(\infty)$ sonlu olduğundan Ω nın $z = \infty$ daki mertebesi $\kappa + \lambda$ dan büyük olamaz. Bu durumda, Liouville teoreminden Ω, $\kappa + \lambda$. dereceden bir keyfi $P_{\kappa+\lambda}$ polinomudur (eğer $\kappa + \lambda < 0$ ise özdeş olarak sıfırdır). (Hahn, Epstein 1996) Dolayısıyla, (2.54) homojen problemi R_0 da (eğer varsa)

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{X(z)P_{\kappa+\lambda}(z)}{\pi_2(z)}, & z \in D^+ \\ \dfrac{X(z)P_{\kappa+\lambda}(z)}{\pi_1(z)}, & z \in D^- \end{cases} \qquad (2.55)$$

biçiminde çözüme sahiptir. Fakat $\Phi^+(t)$ ve $\Phi^-(t)$, sırasıyla, β_k ve α_j de sonlu olduğundan

$$P_{\kappa+\lambda}(z) = \pi_1(z)\pi_2(z)P_{\kappa-\mu}(z)$$

olması gerekir, burada $P_{\kappa-\mu}(z)$, $\kappa - \mu$. dereceden bir keyfi polinomdur (eğer $\kappa - \mu < 0$ ise özdeş olarak sıfırdır). Böylece, (2.55) den dolayı (2.54) ün R_0 daki

$$\Phi(z) = \begin{cases} \pi_1(z)X(z)P_{\kappa-\mu}(z), & z \in D^+ \\ \pi_2(z)X(z)P_{\kappa-\mu}(z), & z \in D^- \end{cases} \qquad (2.56)$$

genel çözümünü elde ederiz. Dolayısıyla, aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 2.8.10: R_0 daki (2.54) homojen probleminin, eğer $\kappa \geq \mu$ ise genel çözümü (2.56) dir, burada $P_{\kappa-\mu}$, $\kappa-\mu$. dereceden bir keyfi polinomdur, $\kappa < \mu$ ise sadece sıfır çözümü vardır.

Eğer (2.54) R_{-1} de çözülürse $P_{\kappa-\mu}$ yerine, sonuçta $P_{\kappa-\mu-1}$ alınması gerekir.

3. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

3.1. Analitik Fonksiyonlar Teorisinde Hilbert Sınır Değer Problemi:

Bu kısımda Hilbert sınır değer problemini tanımlayıp çözümünü sunacağız. Kısalık için, bundan sonra "Hilbert sınır değer problemi" yerine "Hilbert problemi" ifadesini kullanacağız. Bu kesimde önce, D^+, düzgün, kapalı ve pozitif yönde yönlendirilmiş L çevresi ile sınırlı, bir basit irtibatlı bölgeyi göstermek üzere D^+ için Hilbert problemini tanımlayıp, simetrik fonksiyonlar sınıfında Hilbert problemini Riemann problemine dönüştürüp çözümünü Riemann problemiyle yapacağız.

3.1.1. Hilbert Probleminin Tanımlanması:

Tanım 3.1.1: $f(z)=u(z)+iv(z)$ fonksiyonu D^+ da analitik, $\overline{D}^+ = D^+ \cup L$ üzerinde sürekli ve

$$\operatorname{Re}\left\{\left[a(s)+ib(s)\right]f^+(s)\right\}=c(s) \quad , \quad s\in L \tag{3.1}$$

sınır değer şartını sağlayan bir fonksiyon olsun; verilen $a(s), b(s), c(s)$ reel fonksiyonları $H(L)$ sınıfından olmak üzere, $f(z)$ fonksiyonunun bulunması problemine ,*Hilbert Sınır Değer Problemi* denir. Burada. (3.1) denklemi düzenlenip

$$a(s)u(s)-b(s)v(s)=c(s)\,, \quad s\in L$$

biçiminde de gösterilebilir.

Bir konform dönüşümle, D^+ birim çemberin iç bölgesine; ve L, pozitif yönlü birim çembere dönüştürülebilir. Dolayısıyla, eğer $f(s)$, L üzerindeki s noktasının

Hölder şartını sağlayan herhangi bir fonksiyonu ise bu durumda f ‘ye karşılık gelen fonksiyon, L ‘nin görüntüsü olan birim çember üzerinde Hölder şartını (eşit Hölder mertebesiyle) sağlar; karşıtı benzer düşünceyle yine geçerlidir. Buna göre, $f^{+}(s)$ birim çemberin içinde analitik ve birim çemberin kapanışında(birim dairede) sürekli bir $f_*^{+}(s)$ fonksiyonuna ve *a, b, c* fonksiyonları birim çember üzerinde sürekli, sırasıyla, a_*, b_*, c_* fonksiyonlarına; böylece, (3.1) problemi birim çemberdeki bir Hilbert problemine dönüşür. Bu sebeple, Hilbert problemlerini, birim dairede veya ona konform eşdeğer olan yarı-düzlemde incelememiz yeterli olacaktır.

3.1.2. Birim Dairedeki Hilbert Problemi

Tanım 3.1.2: L birim çember ve D^{+}, L nin iç bölgesi olsun. $a(s), b(s), c(s) \in H(L)$ reel fonksiyonlar ve $a^2 + b^2 > 0$ olmak üzere (3.1) Hilbert problemi

$$(a+ib) f^{+}(s) + (a-ib)\overline{f^{+}(s)} = 2c\,, \quad s \in L \tag{3.2}$$

şekline gelir ve buna *birim dairede Hilbert Problemi* denir.

Bu durumda, D^{+} daki $f^{+}(z) = f(z)$ fonksiyonunun D^{-} deki simetrik fonksiyonu Φ olsun. Φ (2.4) deki gibi parçalı analitik bir fonksiyondur.

$\overline{f^{+}(s)} = f_*^{-}(s) = \Phi^{-}(s)$ olduğundan (3.2) problemini

$$(a+ib)\Phi^{+}(s) + (a-ib)\Phi^{-}(s) = 2c\,, \quad s \in L \tag{3.3}$$

veya

$$\Phi^{+}(s) = G(s)\Phi^{-}(s) + g(s)\,, \quad s \in L \tag{3.4}$$

şekillerinde Riemann problemi olarak yeniden yazılabilir. Burada

$$G(s)=\frac{a-ib}{a+ib}, \qquad g(s)=\frac{2c}{a+ib}$$

dir. $f(0)$ ın sonlu olmasından dolayı $\Phi(\infty)$ da sonludur. Böylece (3.1) problemi çözülebilir ise (3.4) problemi R_0 da çözülebilirdir. Fakat (3.4) nün R_0 daki bir Φ çözümü her zaman (3.1) in bir $f(z)\left(=\Phi(z),\quad z\in D^+\right)$ çözümü olmaz. Çünkü (3.1) in bir f çözümü olarak (2.4) de verilen genişletilmiş Φ fonksiyonu (2.5) i sağlamalıdır. (2.5) sağlandığında $\Phi^+(z)=f(z)$, çözümü (3.1) in de bir çözümüdür. Buradan (3.1) Hilbert problemi, R_0 daki (3.4) problemine (2.5) şartı altında eşdeğerdir.

Eğer (3.3) sağlanıyorsa, her iki tarafın eşleniğini alarak

$$(a-ib)\overline{\Phi^+(s)}+(a+ib)\overline{\Phi^-(s)}=2c\,, \quad s\in L$$

elde ederiz. $\overline{\Phi^+(s)}=\Phi_*^-(s)$, $\overline{\Phi^-(s)}=\Phi_*^+(s)$ olduğundan, Φ, (3.4) ün R_0 daki bir çözümü ise Φ_* da aynı şekilde bir çözümdür. Böylece,

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2}\left[\Phi(z)+\Phi_*(z)\right] \tag{3.5}$$

fonksiyonu da (2.5) şartını sağlayan benzer biçimdeki bir çözümdür. Dolayısıyla, (3.4) ün R_0 daki Φ çözümünü buluruz. Φ nin Φ_* simetrik fonksiyonunu alarak (3.1) Hilbert probleminin bir çözümü olan (3.5) deki Φ_0 ı

$$f(z)=\Phi_0(z) \quad \left(z\in D^+\right)$$

şeklinde elde ederiz.

Şimdi, bu problemi çözmeye çalışalım. İlk olarak, (3.4) ü R_0 da çözelim. Bu problemin indisi

$$\kappa=\frac{1}{2\pi i}\left[\log G(s)\right]_L=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L$$

dir. $\left[\arg(a+ib)\right]_L=-\left[\arg(a-ib)\right]_L$ olduğunu kullanırsak

$$\kappa=\frac{1}{\pi}\left[\arg(a-ib)\right]_L$$

şeklinde bir çift sayıdır ve buna (3.1) Hilbert probleminin indisi denir. Kesim 2.8.4-b de, $z_0=0$ alıp (3.4) probleminin kanonik fonksiyonunu

$$\Upsilon(z)=\begin{cases} ce^{\Lambda(z)} & , \quad |z|<1 \\ cz^{-\kappa}e^{\Lambda(z)} & , \quad |z|>1 \end{cases} \tag{3.6}$$

şeklinde elde ederiz. Burada $c\neq 0$ bir keyfi sabittir ve

$$\Lambda(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\log\left[s^{-\kappa}G(s)\right]}{s-z}ds=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\lambda(s)}{s-z}ds$$

olup

$$\lambda(s)=\arg\left\{-s^{-\kappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right\}$$

reel değerli ve H (L) sınıfından bir sabit sürekli daldır.

Şimdi Υ_* ı elde etmek için, (2.3) kullanılarak

$$\Lambda_*(z)=\overline{\Lambda}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\lambda(s)}{\overline{s}-\frac{1}{z}}d\overline{s}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{z\lambda(s)}{s(s-z)}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\lambda(s)}{(s-z)}ds-\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{\lambda(s)}{s}ds$$

elde edilir. Eğer μ reel sayısını

$$\mu = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\lambda(s)}{s}ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda(s)\,d\theta \quad , \quad s = e^{i\theta}$$

olarak tanımlarsak,

$$\Lambda_*(z) = \Lambda(z) - i\mu$$

olur. Buradan, $|z|<1$ için

$$\Upsilon_*(z) = \overline{\Upsilon}\left(\frac{1}{z}\right) = \bar{c}z^{\kappa}e^{\Lambda_*(z)} = \bar{c}e^{-i\mu}z^{\kappa}e^{\Lambda(z)}$$

ve $|z|>1$ için ise

$$\Upsilon_*(z) = \overline{\Upsilon}\left(\frac{1}{z}\right) = \bar{c}e^{\Lambda_*(z)} = \bar{c}e^{-i\mu}e^{\Lambda(z)}$$

elde edilir.

Böylece, herhangi bir durumda $|z| \neq 1$ için

$$\Upsilon_*(z) = \frac{\bar{c}}{c}e^{-i\mu}z^{\kappa}\Upsilon(z)$$

olur. Eğer

$$c = e^{\frac{-i\mu}{2}} = e^{\left[-\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi}\lambda(t)d\theta\right]} \tag{3.7}$$

alırsak

$$\Upsilon_*(z) = z^{\kappa}\Upsilon(z) \tag{3.8}$$

bağıntısı sağlanmış olacaktır.

(3.1) Hilbert problemine dönecek olursak, ilk olarak $c \equiv 0$ durumundaki homojen problemi göz önüne alalım.

Önce, $\kappa \geq 0$ olsun (κ çift idi). (3.4) homojen Riemann problemi $(g(s) \equiv 0)$, R_0 da

$$\Phi(z) = \Upsilon(z)\left(c_0 z^{\kappa} + c_1 z^{\kappa-1} + \ldots + c_{\kappa}\right) \tag{3.9}$$

genel çözümüne sahiptir. Burada $c_0,\ldots,c_\kappa$ keyfî sabitlerdir. Bu durumda, (3.8) den

$$\begin{aligned}\Phi_*(z) &= \Upsilon_*(z)\left(\overline{c}_0 z^{-\kappa}+\overline{c}_1 z^{-\kappa+1}+\ldots+\overline{c}_\kappa\right)\\ &= \Upsilon(z)\left(\overline{c}_\kappa z^{\kappa}+\overline{c}_{\kappa-1} z^{\kappa-1}+\ldots+\overline{c}_0\right)\end{aligned}$$

dır. Bu durumda, $\Phi_*(z)=\Phi(z)$ olması için gerek ve yeter şart

$$c_0=\overline{c}_\kappa\,,\ c_1=\overline{c}_{\kappa-1}\,,\ldots,c_{\frac{\kappa}{2}}=\overline{c}_{\frac{\kappa}{2}} \tag{3.10}$$

şeklindedir. Dolayısıyla, yalnız $c_0,\ldots,c_{\frac{\kappa}{2}-1}$ ler keyfi kompleks sabitler ($\kappa=0$ durumunda böyle sabitler yoktur) ve $c_{\frac{\kappa}{2}}$ bir reel sabit olmalıdır. Buradan (3.9) da

$(\kappa+1)$-tane reel sabit olduğu görülür.

Eğer $\kappa<0$ ise (3.4) homojen Riemann problemi R_0 da sadece sıfır çözümüne sahip olduğundan (3.1) sadece aşikar çözüme sahiptir.

Teorem 3.1.1.: Eğer $\kappa\geq 0$ ise (3.1) homojen Hilbert probleminin $(c\equiv 0)$ genel çözümü $\kappa+1$ tane reel sabit içeren (3.9) ifadesidir. Burada c_κ lar (3.10) u sağlar ve Υ, (3.6) da olduğu gibidir (*c*, sıfırdan farklı bir reel sabit çarpanı farkıyla, (3.7) ile verilir.); $\kappa<0$ ise problem sadece sıfır çözümüne sahiptir.

Şimdi, (3.1) Hilbert probleminin homojen olmadığı durumu inceleyelim. Problemin genel çözümü için, bir özel çözüm bulmak yeterlidir. Genel çözümü, homojen problemin genel çözümüne bulduğumuz özel çözümü ekleyip elde ederiz.

1. $\kappa\geq 0$ *durumu***:** Kesim 2.8.5 den

$$\Psi(z)=\frac{\Upsilon(z)}{\pi i}\int_L \frac{cds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)(s-z)} \tag{3.11}$$

(3.4) ün R_0 daki bir özel çözümüdür. Öyleyse,

$$f_0(z)=\frac{1}{2}\left[\Psi(z)+\Psi_*(z)\right],\quad |z|<1$$

(3.1) probleminin bir özel çözümüdür. $f_0(z)$ nin açık ifadesini bulmak için, $\Psi_*(z)$ yi açalım: (2.2) ve (3.8) den

$$\overline{\Upsilon^+(s)} = \Upsilon_*^-(s) = s^\kappa \Upsilon^-(s)$$

olur. Kanonik fonksiyonların özelliğinden

$$(a-ib)\Upsilon^-(s) = -(a+ib)\Upsilon^+(s)$$

olup, her iki tarafın eşleniğini alırsak

$$(a+ib)\overline{\Upsilon^-(s)} = -(a-ib)\overline{\Upsilon^+(s)}$$

elde edilir. Buradan

$$(a-ib)\overline{\Upsilon^+(s)} = -(a+ib)\overline{\Upsilon^-(s)} = -(a+ib)s^\kappa \Upsilon^+(s) \tag{3.12}$$

bulunur. Böylece,

$$\begin{aligned}\Psi_*(z) &= -\frac{\Upsilon_*(z)}{\pi i}\int_L \frac{c\,d\bar{s}}{(a-ib)\overline{\Upsilon^+(s)}\left(\bar{s}-\frac{1}{z}\right)} \\ &= \frac{z^\kappa \Upsilon(z)}{\pi i}\int_L \frac{czds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)s^{\kappa+1}(s-z)}\end{aligned} \tag{3.13}$$

veya

$$\Psi_*(z) = z^\kappa \Upsilon(z)\left\{\frac{1}{\pi i}\left[\int_L \frac{cs^{-\kappa}ds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)(s-z)} - \int_L \frac{cs^{-\kappa-1}ds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)}\right]\right\} \tag{3.14}$$

dir. Böylece, yukarıdaki özel çözüm

$$\begin{aligned}f_0(z) = \frac{\Upsilon(z)}{2\pi i}&\left\{\int_L \frac{cds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)(s-z)} + z^\kappa \int_L \frac{cs^{-\kappa}ds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)(s-z)}\right\} \\ &- \frac{z^\kappa \Upsilon(z)}{2\pi i}\int_L \frac{cs^{-\kappa-1}ds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)}\end{aligned} \tag{3.15}$$

olarak bulunur. Buradan genel çözüm, (3.9) a (3.15) eklenmesiyle elde edilir.

2. $\kappa < 0$ durumu: Burada, (3.4) Riemann probleminin R_0 daki çözülebilirlik şartları

$$\int_L \frac{cs^{-\kappa}d\overline{s}}{\overline{(a+ib)\Upsilon^+(s)}}=0 \quad , \quad k=0,1,\ldots,-\kappa-2 \tag{3.16}$$

olur. (3.4) nün tek (3.15) çözümüne sahip olması için gerek ve yeter şart (3.16) nın sağlanmasıdır. Bu çözümün ifadesi daha basitleştirilebilir. (3.13),

$$\Psi_*(z)=\frac{\Upsilon(z)}{\pi i}\int_L \frac{z^{\kappa+1}cs^{-\kappa-1}ds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)(s-z)}$$

$$=\frac{\Upsilon(z)}{\pi i}\int_L \frac{z^{\kappa+1}c\left(s^{-\kappa-1}-z^{-\kappa-1}\right)ds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)(s-z)}+\frac{\Upsilon(z)}{\pi i}\int_L \frac{cds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)(s-z)}$$

olarak yazılabilir. $\frac{\left(s^{-\kappa-1}-z^{-\kappa-1}\right)}{(s-z)}$, s nin $(-\kappa-2)$. dereceden bir polinomu olduğundan sağdaki ilk integral sıfırdır. Yani, $\Psi_*(z)=\Psi(z)=f_0(z)$ ($\Psi_*(z)=\Psi(z)$ dir çünkü, (3.4) R_0 da tek çözüme sahiptir), basit olarak (3.11) ile verilir. Ayrıca, eğer $k(0\le k\le -\kappa-2)$ yi sabit tutarsak, bu durumda (3.16) nın eşlenikleri alınarak

$$\int_L \frac{cs^k ds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)}=\int_L \frac{cs^{-k-\kappa-2}ds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)}$$

elde ederiz. Yani, eğer (3.16), $k=0,1,\ldots,-\left(\frac{\kappa}{2}\right)-2$ için sağlanıyorsa bu durumda $k=-\kappa-2,-\kappa-3,\ldots,-\frac{\kappa}{2}$ için de sağlanır ve $k=-\frac{\kappa}{2}-1$ için (3.16) nın sol tarafı reeldir. Dolayısıyla, (3.16) daki bağımsız şartlar

$$\int_L \frac{cs^k ds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)}=0\,, \quad k=0,1,\ldots,-\frac{\kappa}{2}-1 \tag{3.17}$$

şekline gelir ve en sonuncusu bir reel şarttır. Eğer bu şartların hepsi reel denklemler olarak kabul edilirse (3.17) de $-\kappa-1$ tane reel şart vardır. Bu, (3.1) Hilbert probleminin çözümünün reel bağımsızlık derecesi $\kappa+1$ demektir.

Buradan aşağıdaki teoremi veririz:

Teorem 3.1.2: Eğer $\kappa \geq 0$ ise (3.1) homojen olmayan probleminin genel çözümü

$$f(z) = f_0(z) + \Upsilon(z)\left(c_0 z^{\kappa} + c_1 z^{\kappa-1} + \ldots + c_{\kappa}\right)$$

dır. Burada f_0, (3.15) ile verilen fonksiyon ve $c_0, c_1, \ldots, c_{\kappa}$ lar ise (3.10) şartını sağlayan sabitlerdir. Eğer $\kappa < -2$ ise bu durumda (3.11)in (tek) çözümüne sahip olması için gerek ve yeter şart (3.17) nin sağlanmasıdır. Çözümün reel bağımsızlık derecesi $\kappa+1$ dir.

Şimdi en basit Hilbert problemi olan, birim çember için Dirichlet problemini bir örnek olarak inceleyelim.

Örnek 3.1.1: $L, |z|=1$ birim çemberi ve D^+, $|z|<1$ birim dairesi olsun. $x(s) \in H(L)$ (reel) olmak üzere, D^+ da analitik, $\overline{D}^+$ da sürekli ve

$$u^+(s) = x(s), \quad |s| = 1$$

sınır şartını sağlayan reel $u(z)$ fonksiyonunu bulalım.

Yukarıda verilen Dirichlet problemi, (3.2) de $a(s)=1$, $b(s)=0$, $c(s)=x(s)$ alınarak elde edilen, Hilbert probleminin bir özel durumu ve Hilbert problemine karşılık gelen, $(a+ib)f^+(s)+(a-ib)f^-(s)=2c$, Riemann probleminin

$$f^+(s) + f^-(s) = 2x(s) \quad , \quad s \in L$$

halidir. İlk önce, $c \equiv 0$ homojen problemini çözelim. Yani, $f^+(s)+f^-(s)=0$ olacak biçimde bir f fonksiyonu arayalım. $a(s)=1$, $b(s)=0$ için $\kappa=0$ ve $\lambda(t)=\pi$ dir. Buradan, $|z|<1$ iken $\Lambda(z)=\pi i$ ve $|z|>1$ iken $\Lambda(z)=0$ dır. Dolayısıyla (3.6) dan, $|z|<1$ için $\Upsilon(z)=ce^{\pi i}=-c$; $|z|>1$ için $\Upsilon(z)=c$ dir, burada c bir keyfi sabittir. (3.8) in sağlanması için, yani, $\Upsilon(z)=\Upsilon_*(z)$ olması için $c=e^{-\frac{i\pi}{2}}=-i$ olmalıdır. Böylece homojen problemin genel çözümü $f(z)=ic$ dir, burada c reel keyfi sabittir.

Şimdi, $f^+(s)+f^-(s)=x(s)$ homojen olmayan problemini çözelim. (3.15) özel çözümü, $\kappa=0$ iken

$$f_0(z)=\frac{\Upsilon(z)}{\pi i}\int_L \frac{cds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)(s-z)}-\frac{\Upsilon(z)}{2\pi i}\int_L \frac{cds}{(a+ib)\Upsilon^+(s)s}$$

halini alır. Bu durumda, $a(s)=1$, $b(s)=0$, $c(s)=x(s)$ için

$$f_0(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{x(s)ds}{(s-z)}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{x(s)ds}{s}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2sx(s)-sx(s)+zx(s)}{s(s-z)}ds$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L x(s)\frac{s+z}{s-z}\frac{ds}{s}$$

dır. Buradan genel çözüm, $u(z)=\operatorname{Re} f(z)$ olmak üzere

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L x(s)\frac{s+z}{s-z}\frac{ds}{s}+ic$$

olarak elde edilir. Bu formül, iyi bilinen Schwartz formülüdür.

3.1.3. Yarı-Düzlemde Hilbert Problemleri

Şimdi uygulamada çok önemli olan, yarı-düzlemdeki Hilbert problemini göz önüne alalım.

Tanım 3.1.3: $L = X$ reel eksen ve $\mathbb{C}^+$ üst yarı-düzlem olsun. $\mathbb{C}^+$ da analitik ve $\overline{\mathbb{C}^+} = \mathbb{C}^+ \cup X$ üzerinde sürekli ve

$$\operatorname{Re}\left\{\left[a(x)+ib(x)\right]f^+(x)\right\} = c(x), \quad x \in X \tag{3.18}$$

sınır-değer şartını sağlayan bir f fonksiyonunun bulunması problemine yarı düzlemdeki Hilbert problemi denir. Burada $a(x), b(x), c(x) \in \breve{H}(X)$ ve $a^2+b^2 \neq 0$ ($x=\infty$ dahil) dir.

Bu problem birim dairedeki bir Hilbert problemine dönüştürülebilir olduğundan bir önceki bölümdeki sonuçları kullanabiliriz. Ancak problemi simetrik fonksiyon bulup çözmeye çalışalım.

(2.2) yardımıyla f yi $\mathbb{C}^-$ alt yarı-düzlemine genişletelim:

$$\overline{f}(z) = \overline{f(\overline{z})} \qquad \text{ve}$$

$$\Phi^+(x) = G(x)\Phi^-(x) + g(x), \quad x \in X \tag{3.19}$$

olarak yazılabilir, burada

$$G(x) = -\frac{a-ib}{a+ib}, \quad g(x) = \frac{2c}{a+ib}$$

şeklindedir, önceki kesimde olduğu gibi, (3.18) Hilbert problemi, (3.19) R_0 problemine

$$\Phi^-(x) = \overline{\Phi^+(x)}$$

ek şartı ile eşdeğerdir.(3.19) probleminin indisi

$$\kappa = \frac{1}{\pi}\left[\arg\left(a - ib\right)\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

şeklindedir. $a, b \in \breve{H}\left(X\right)$ olduğundan $a\left(-\infty\right) = a\left(+\infty\right)$, $b\left(-\infty\right) = b\left(+\infty\right)$ olur ve buradan κ nın bir çift sayı olduğu ortaya çıkar. κ(3.18) probleminin indisidir. Kesim 2.8.6 daki gibi, Υ ve γ fonksiyonlarını

$$\Lambda\left(z\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\log G_0\left(x\right)}{x - z}dx$$

olacak şekilde

$$\Upsilon\left(z\right) = \begin{cases} \left(z + i\right)^{-\kappa} e^{\Lambda(z)}, & z \in \mathbb{C}^{+} \\ \left(z - i\right)^{-\kappa} e^{\Lambda(z)}, & z \in \mathbb{C}^{-} \end{cases}$$

$$\gamma\left(z\right) = \begin{cases} e^{\Lambda(z)}, & z \in \mathbb{C}^{+} \\ \left(\frac{z + i}{z - i}\right)^{\kappa} e^{\Lambda(z)}, & z \in \mathbb{C}^{-} \end{cases} \tag{3.20}$$

şeklinde gösterirsek, |G(x)| = 1 olduğundan

$$\Lambda\left(z\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda\left(x\right)}{x - z}dx$$

olur. Burada

$$\lambda\left(x\right) = \arg\left\{-\left(\frac{x + i}{x - i}\right)^{\kappa}\frac{a - ib}{a + ib}\right\} = \arg\left\{-\left(x + i\right)^{2\kappa}\left(a - ib\right)^{2}\right\}$$

bir reel fonksiyondur ve buradan

$$\overline{\Lambda}\left(z\right) = \Lambda\left(z\right), \quad \Lambda^{-}\left(x\right) = \overline{\Lambda^{+}\left(x\right)} \tag{3.21}$$

elde ederiz.

İlk olarak, (3.19) probleminde $g \equiv 0$ ile elde edilen (3.18) homojen problemini ($c \equiv 0$) inceleyelim. Kesim 2.8.6 daki homojen problemin genel çözümünden, eğer $\kappa \geq 0$ ise, (3.18) in genel çözümü

$$\Phi(z) = \Upsilon(z)\left(c_0 z^{\kappa} + c_1 z^{\kappa-1} + \ldots + c_{\kappa}\right) \tag{3.22}$$

olarak elde edilir. c_k 1ar keyfi sabitlerdir, $\kappa < 0$ ise problem yalnız aşikâr çözüme sahiptir. Buradan, homojen Hilbert problemi de, $\kappa < 0$ iken, yalnız sıfır çözümüne sahiptir. Bu nedenle, $\kappa \geq 0$ olarak alalım. Genel çözüm

$$f(z) = \frac{1}{2}\left[\Phi(z) + \overline{\Phi}(z)\right]$$

olmalıdır. Fakat *X* in tanımı ve (3.21) den dolayı

$$\overline{\Upsilon}(z) = \Upsilon(z)$$

dir. Bu yüzden

$$\overline{\Phi}(z) = \Upsilon(z)\left(\overline{c}_0 z^{\kappa} + \overline{c}_1 z^{\kappa-1} + \ldots + \overline{c}_{\kappa}\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla, (3.18) in genel çözümü (3.22) ile verilir. Böylece, aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.1.3: (3.18) in homojen problemi ($c \equiv 0$), $\kappa \geq 0$ iken $\Upsilon(z)\mathrm{P}_{\kappa}(z)$ genel çözümüne sahiptir, burada P_{κ}, κ. dereceden reel katsayılı bir keyfi polinomdur ve $\kappa < 0$ için problem sadece sıfır çözümüne sahiptir.

Şimdi de, (3.18) de homojen olmayan Hilbert problemini göz önüne alalım. Bunun bir özel çözümünü elde etmek yeterlidir. Bu durumda onun genel çözümü önceki teoremden de bulunabilir.

1. $\kappa \geq 0$ *durumu*: (3.19) dan dolayı

$$\Phi_0(z)=\frac{\gamma(z)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c\,dx}{(a+ib)\gamma^+(x)(x-z)}$$

(3.19) un R_0 daki bir özel çözümüdür, burada γ, (3.20) de verildiği gibidir. $z\in\mathbb{C}^+$ iken (3.21) den dolayı

$$\overline{\gamma}(z)=\overline{\gamma(\overline{z})}=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\kappa}e^{\overline{\Lambda}(z)}=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\kappa}\gamma(z)$$

dir (bu $z\in\mathbb{C}^-$ için de sağlanır). Bu nedenle

$$\overline{\gamma^+(x)}=\overline{\gamma}^-(x)=\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa}\gamma^-(x)$$

bulunur. Böylece $\gamma^+(x)=G(x)\gamma^-(x)$ den

$$\overline{\gamma^+(x)}=-\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa}\frac{a+ib}{a-ib}\gamma^+(x)$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\overline{\Phi}_0(z)=\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\kappa}\frac{\gamma(z)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\kappa}\frac{c\,dx}{(a+ib)\gamma^+(x)(x-z)}$$

olur. Buradan,

$$f_0(z)=\frac{\gamma(z)}{2\pi i}\left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c\,dx}{(a+ib)\gamma^+(x)(x-z)}\\&+\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\kappa}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^{\kappa}\frac{c\,dx}{(a+ib)\gamma^+(x)(x-z)}\end{aligned}\right\}\qquad(3.23)$$

(3.18) Hilbert probleminin bir özel çözümüdür.

*2. $\kappa<0$ durumu***:** R_0 daki (3.19) probleminin

çözülebilmesi için gerek ve yeter şart

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c\,dx}{(a+ib)\gamma^+(x)(x+i)^k}=0\,,\quad k=2,3,\ldots,-\kappa\qquad(3.24)$$

ifadesinin sağlanmasıdır. Bu durumda, problem

$$f_0(z)=\frac{\gamma(z)}{\pi i}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c\,dx}{(a+ib)\gamma^{+}(x)(x-z)}-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c\,dx}{(a+ib)\gamma^{+}(x)(x+i)}\right\} \tag{2.25}$$

tek çözümüne sahip olur. Çözümün tekliğinden dolayı, f_0 da problemin çözümü olmalıdır. Bu yüzden, $\overline{f}_0(z)=f_0(z)$ dir ve buradan (3.25) Hilbert probleminin tek çözümüdür. (2.24) ü reel formda yazmak için ilk olarak onu eşdeğer denklemler ile yeniden yazmamız gerekir.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{\kappa}\frac{c\,dx}{(a+ib)\gamma^{+}(x)(x+i)^2}=0\,,\quad k=0,1,\ldots,-\kappa-2$$

$\theta(x)=\arg(x+i)$ olsun. Bu durumda $\arg\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^{k}=-2k\theta$ dır. (3.20) den

$$\gamma^{+}(x)=e^{\Lambda^{+}(x)}=e^{\left[\frac{i}{2}\lambda(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda(\xi)}{\xi-x}d\xi\right]}$$

yazılabilir. Burada argümentin sabit bir dalını seçip $\phi(x)=\arg(a-ib)$ olmak üzere

$$\lambda(x)=\arg\left\{-(x+i)^{2\kappa}(a-ib)^{2}\right\}=\pi+2\kappa\theta+2\phi$$

elde edebiliriz. Üstelik,

$$\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{i\phi}$$

ve

$$e^{\frac{i}{2}\lambda(x)}=ie^{i(\kappa\theta+\phi)}$$

dır. Dolayısıyla, yukarıda belirtilen şartlar

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Omega(x)e^{-i(\kappa+2k+2)\theta}dx=0\,,\quad k=0,1,\ldots,-\kappa-2$$

halini alır. Burada

$$\Omega(x)=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}\left(1+x^2\right)}e^{\left[-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda(\xi)}{\xi-x}d\xi\right]}$$

şeklinde alınmıştır. Bu durumda, $-\kappa-1$ lineer bağımsız reel şartları içeren

$$\begin{cases}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Omega(x)\cos(2j\theta)\,dx=0 \quad , \quad j=0,1,\ldots,-\dfrac{\kappa}{2}-1\\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\Omega(x)\sin(2j\theta)\,dx=0 \quad , \quad j=1,\ldots,-\dfrac{\kappa}{2}-1\end{cases} \tag{3.26}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Öyleyse aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.4: Homojen olmayan (3.18) Hilbert problemi, eğer $\kappa\geq 0$ ise $f_0(z)+\Upsilon(z)\mathrm{P}_\kappa(z)$ genel çözümüne sahiptir. Burada f_0, (3.23) ile verilir ve P_κ, κ. dereceden reel katsayılı bir keyfi polinomdur; $\kappa<0$ ise, bu Hilbert probleminin (3.25) (tek) çözümüne sahip olması için gerek ve yeter şart (3.26) daki $-(\kappa+1)$ reel şartlarının sağlanmasıdır. Problemin çözümünün reel bağımsızlık derecesi $(\kappa+1)$ dir.

Şimdi, yarı-düzlemdeki Hilbert probleminin bir özel durumu olan $\mathbb{C}^+$ daki Dirichlet problemini bir örnek olarak inceleyelim.

Örnek 3.1.2: $\mathbb{C}^+$ da analitik, $\overline{\mathbb{C}}^+$ üzerinde sürekli ve x-ekseni üzerinde $\operatorname{Re} f^+(x)=s(x)$ sınır değer şartını sağlayan bir f fonksiyonu bulalım. Burada $s(x)\in \breve{H}(X)$ dir.

Çözüm. Dirichlet problemleri için, $\kappa=\dfrac{1}{\pi}\left[\arg(a-ib)\right]_{-\infty}^{+\infty}$ indisi, $a(x)=1$, $b(x)=0$ olduğundan daima sıfırdır. Buna göre, önce (3.18) probleminin $\kappa=0$ halindeki genel çözümünü elde edelim. Daha sonra $a(x)=1$, $b(x)=0$, $c(x)=s(x)$ özel durumuna karşılık gelen çözümü bulalım.

$\kappa=0$ iken (3.23) özel çözümü

$$f_0(z)=\frac{\Upsilon(z)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c\,dx}{(a+ib)\Upsilon^+(x)(x-z)}$$

dir ($\kappa=0$ ise $\Upsilon(z)=\gamma(z)$ dir). Bu durumda genel çözüm

$$f(z)=f_0(z)+c\Upsilon(z)$$

yani,

$$f(z)=\frac{\Upsilon(z)}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c\,dx}{(a+ib)\Upsilon^+(x)(x-z)}+c\Upsilon(z) \qquad (3.27)$$

dir. Burada *c* bir keyfi reel sabit ve

$$\Upsilon(z)=e^{\Lambda(z)}$$

$$\Lambda(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\lambda(x)}{x-z}dx$$

$$\lambda(x)=\arg\left(-\frac{a-ib}{a+ib}\right)$$

şeklindedir.

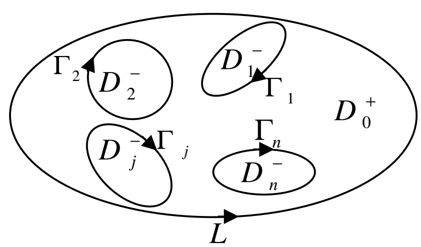
Şimdi, verilen Dirichlet problemini çözelim, $a(x)=1$, $b(x)=0$ olduğundan $\lambda(x)=\pi$ ve buradan $z\in\mathbb{C}^+$ için $\Lambda(z)=\frac{i\pi}{2}$, $z\in\mathbb{C}^-$ için $\Lambda(z)=-\frac{i\pi}{2}$ dir. Dolayısıyla, $z\in\Lambda^+$ için $\Upsilon(z)=i$ ve $z\in\mathbb{C}^-$ için $\Upsilon(z)=-i$ dir. Böylece, (3.27) den $c=s(x)$ ve $z\in\mathbb{C}^+$ için

$$f(z)=\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s(x)}{x-z}dx+ic$$

genel çözümünü elde ederiz. Burada c bir keyfi reel sabittir.

3.1.4. Riemann-Hilbert Sınır-Değer Probleminin Tanımlanması:

L, kompleks düzlemde düzgün kapalı, saatin tersi yönde yönlendirilmiş bir çevre olsun ve onun iç bölgesine D diyelim. D üzerinde birbirini kesmeyen $\Gamma_1,\Gamma_2,\ldots,\Gamma_n$ düzgün, kapalı, saat yönünde yönlendirilmiş çevrelerin bir kümesini göz önüne alalım. $\Gamma=\sum_{j=1}^{n}\Gamma_j$ olsun. Γ_j ile sınırlı iç bölgeleri D_j^-; L ve Γ arasında sınırlanmış bölgeyi D_0^+ ile gösterelim. (Şekil 3.1)



Şekil 3.1

D deki Riemann-Hilbert problemi şöyledir: D de Γ sıçrama eğrili bir f parçalı analitik fonksiyonu bulabilirmiyiz (yani $f(z)$, D_0^+ ve her bir D_j^- de analitik ayrıca hem L hem de Γ nın her iki tarafı üzerinde sürekli sınır değerlere sahiptir öyle ki

$$f^+(\tau)=G(\tau)f^-(\tau)+g(\tau) \quad , \quad \tau\in\Gamma \tag{3.28}$$

ve

$$\operatorname{Re}\{[a(s)+ib(s)]f^+(s)\}=c(s), \quad s\in L \tag{3.29}$$

sağlansın? Burada $G(\tau), g(\tau) \in H(\Gamma)$, $G(\tau) \neq 0$ ve $a^2 + b^2 \neq 0$ olmak üzere,

$a(t), b(t), c(t) \in H(L)$, reel fonksiyonlardır.

İndisleri,

$$\dot{I}nd_{\Gamma_j} G(\tau) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg G(\tau)\right]_{\Gamma_j} = \kappa_j \quad ,$$

$$\dot{I}nd_{\Gamma} G(\tau) = \kappa = \sum_{j=1}^{n} \kappa_j \qquad ve$$

$$\dot{I}nd_L \left\{a(t) - ib(t)\right\} = \frac{1}{2\pi}\left\{\arg\left[a(t) - ib(t)\right]\right\}_L = k$$

ile gösterelim. Bu durumda $K = k + \kappa$ ya söz konusu Riemann-Hilbert probleminin indisi denir.

İlk olarak, D de parçalı analitik, L üzerinde sürekli ve (3.28) şartını sağlayan bir f_1 fonksiyonu bulalım. Başlangıçta, (3.29) u göz ardı edelim. Adi Riemann problemlerinin çözümündeki gibi $\kappa - 1$ lineer bağımsız reel şartı içeren

$$\Pi(z) = \prod_{j=1}^{n} \left(z - z_j\right)^{\kappa_j}$$

çarpımını göz önüne alalım. Burada z_j, D_j^- 'de bir keyfi sabit noktadır ve

$$\Lambda(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\log\left[\Pi(\tau) G(\tau)\right]}{\tau - z} d\tau$$

$$\Upsilon(z) = \begin{cases} \dfrac{e^{\Lambda(z)}}{\Pi(z)}, & z \in D_0^+ \\ e^{\Lambda(z)} \quad , & z \in \sum\limits_{j=1}^{n} D_j^- \end{cases}$$

dir. $\Upsilon(z)$ ye (3.28) probleminin

$$\Upsilon^+(\tau) = G(\tau)\Upsilon^-(\tau), \quad \tau \in \Gamma \qquad (3.30)$$

şartını sağlayan bir kanonik fonksiyonu da denilebilir. Bu durumda,

$$f_1(z)=\Upsilon(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{\Upsilon^+(\tau).(\tau-z)}d\tau+F(z)\right\} \tag{3.31}$$

problemin genel çözümüdür. Burada F, D de analitik ve $\overline{D}$ üzerinde sürekli bir keyfi fonksiyondur. Orijinal Riemann-Hilbert problemi, sadece $\overline{D}$ üzerinde incelendiğinden buna karşılık gelen Riemann problemi daima çözülebilirdir.

f_1 bulunduktan sonra, f

$$f(z)=\Upsilon(z)\,f_0(z)+f_1(z) \tag{3.32}$$

ile D de parçalı analitik ve L üzerinde sürekli olan yeni bir f_0 fonksiyonuna dönüşür. f_1 (3.28) i sağladığından, (3.30) dan dolayı $\tau\in\Gamma$ için

$$\begin{aligned} f^+(\tau)&=f_1^+(\tau)+\Upsilon^+(\tau)\,f_0^+(\tau)\\ &=G(\tau)\left[f_1^-(\tau)+\Upsilon^-(\tau)\,f_0^+(\tau)\right]+g(\tau)\end{aligned}$$

olur. Yine (3.28) den

$$f^+(\tau)=G(\tau)\left[f_1^-(\tau)+\Upsilon^-(\tau)\,f_0^-(\tau)\right]+g(\tau)$$

bulunur. Bu iki denklemi karşılaştırırsak ($\Upsilon^-(\tau)\neq 0$ dır)

$$f_0^+(\tau)=f_0^-(\tau),\quad \tau\in\Gamma$$

elde ederiz. Buradan, $f_0(z)$ gerçekten D de analitik ve $\overline{D}$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur.

Karşıt olarak, eğer f_0 böyle bir fonksiyon ise bu durumda kolayca ispatlanabilir ki (3.32) ile verilen $f(z)$ parçalı analitik fonksiyonu L üzerinde sürekli olmak zorundadır ve (3.30) u sağlar.

Bu durumda, söz konusu Riemann-Hilbert problemi aşağıdaki probleme dönüşür:

$\overline{D}$ de analitik ve $\overline{D}$ üzerinde sürekli bir $f_0(z)$ fonksiyonu bulabilir miyiz, öyle ki (3.29) yerine, ona karşılık gelen

$$\operatorname{Re}\left\{\left[a(s)+ib(s)\right]\Upsilon(s)\,f_0^+(s)\right\}=c^*(s)\,,\quad s\in L \tag{3.33}$$

şartını sağlasın? Burada

$$c^*(s)=c(s)-\operatorname{Re}\left\{\left[a(s)+ib(s)\right]f_1^+(s)\right\}$$

şeklindedir. $\Upsilon(s)\,,\,f_1^+(s)\in H(L)$ olduğundan $c^*(s)$ ve $(a+ib)\Upsilon(s)$ de $H(L)$ sınıfındandır.

Böylece, orijinal Riemann-Hilbert problemi, D üzerinde (3.33) Hilbert problemine dönüşür. Burada hem (3.28) şartı hem de Γ kaldırılmıştır. Bu yönteme eleme yöntemi denir. (3.31) deki $F(z)$ yi nasıl seçeceğimiz önemli değildir. Çünkü, eğer aynı tipten bir $\lambda(z)$ fonksiyonu $F(z)$ ye eklenirse f_1, ek olarak $\Upsilon(z)\lambda(z)$ terimine sahip olur ve eğer $\lambda(z)$, (3.32) ile istenen f_0 dan çıkarılırsa f değişmeyecektir. Bu durum, (3.33) ün her iki tarafından

$$\operatorname{Re}\left\{\left[a(s)+ib(s)\right]\Upsilon(s)\lambda(s)\right\},\quad s\in L$$

terimini çıkarmaya eşdeğerdir, buradan $f_0(z)$ değişmez. O halde, (3.31) de $F(z)\equiv 0$ alabiliriz.

3.1.5. Riemann-Hilbert Sınır-Değer Problemlerinin Çözümü

L, $|t|=1$ birim çemberi olsun. (2.28) Riemann-Hilbert problemini çözmek için D^+ daki indisi

$$\dot{I}nd_L\left\{\left[a(s)-ib(s)\right]\overline{\Upsilon(s)}\right\}=k-\dot{I}nd_L\Upsilon(s)$$

olan (3.33) problemini çözmek yeterlidir. Fakat $s\in L$ iken

$$\Upsilon(s)=\prod_{j=1}^{n}\left(z-z_j\right)^{-\kappa_j}e^{\Lambda(s)}$$

dir. Bu durumda

$$\dot{I}nd_L\Upsilon(s)=-\kappa+\dot{I}nd_L e^{\Lambda(s)}$$

olur. Bununla beraber $\Gamma(s)$ tek-değerli ve sürekli olduğundan

$$\dot{I}nd_L e^{\Lambda(s)}=\frac{1}{2\pi i}\left[\log e^{\Lambda(s)}\right]_L=\frac{1}{2\pi i}\left[\Lambda(s)\right]_L=0$$

dır. Öyleyse,

$$\begin{aligned}\dot{I}nd_L\left\{\left[a(s)-ib(s)\right]\overline{\Upsilon(s)}\right\}&=k+\kappa=K\\&=\dot{I}nd_L\left\{\left[a(s)-ib(s)\right]\right\}+\dot{I}nd_\Gamma G(\tau)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise dönüştürülmüş Hilbert probleminin indisi, orijinal Riemann-Hilbert probleminin indisi demektir. Dolayısıyla, kesim 3.1.2 deki sonuçlardan dolayı, Riemann-Hilbert problemleri için aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

1. Kabul edelim ki, $g\equiv 0$, $c\equiv 0$ dır (homojen problem). Teorem 3.1.1 e göre, $K\geq 0$ için karşılık gelen (3.33) problemi ($c^*\equiv 0$)

$$f_0(z)=c_1\Psi_1(z)+\ldots+c_{2K+1}\Psi_{2K+1}(z)$$

genel çözümüne sahiptir. Burada $\{\Psi_j(z)\}_1^{2K+1}$, $2K+1$ tane lineer bağımsız (reel katsayı cisminde) çözümdür ve $\{c_j\}_1^{2K+1}$ ‘1er keyfi reel sabitlerdir. Bu durumda homojen Riemann-Hilbert probleminin genel çözümü

$$f(z)=\Upsilon(z)\sum_{j=1}^{2K+1} c_j \Psi_j(z) \tag{3.34}$$

dir. $K<0$ için Riemann-Hilbert problemi sadece sıfır çözümüne sahiptir çünkü karşılık gelen Hilbert problemi sadece aşikar çözüme sahiptir.

2. Kabul edelim ki, $g\equiv 0$, $c\not\equiv 0$ dır. Bu durumda, $f_1(z)\equiv 0$ alabiliriz. Bu nedenle $f(z)=\Upsilon(z)f_0(z)$ olur. Burada f_0, D de homojen olmayan

$$\mathrm{Re}\{[a(s)+ib(s)]\Upsilon(s)f_0^+(s)\}=c(s), \quad s\in L$$

probleminin çözümüdür. Teorem 3.1.2 den dolayı, $K\geq 0$ için karşılık gelen Hilbert problemi

$$f_0(z)+\sum_{j=1}^{2K+1} c_j \Psi_j(z)$$

genel çözümüne sahiptir (f_0 onun bir özel çözümüdür) ve buradan

$$f(z)=\Upsilon(z)\left[f_0(z)+\sum_{j=1}^{2K+1} c_j \Psi_j(z)\right] \tag{3.35}$$

orijinal Riemann-Hilbert probleminin genel çözümüdür. Burada c_j 1er keyfi reel sabitlerdir. $K<0$ için karşılık gelen Hilbert problemi ve dolayısıyla orijinal Riemann-Hilbert probleminin (tek olarak) çözülebilmesi için gerek ve yeter şart $c^*(t)$ nin $-2K-1$ reel şartlarını sağlamasıdır.

3. $g\not\equiv 0$ olduğunu kabul edelim. Burada $f_1(z)\not\equiv 0$ dır ve bu durumu şu şekilde inceleyelim:

(i) Eğer $c^*(s) \not\equiv 0$, yani

$$c(s) \not\equiv \mathrm{Re}\left\{\left[a(s)+ib(s)\right]f_1^+(s)\right\}$$

ise bu hal 2. nin aynısıdır. Fakat $K \geq 0$ için (3.35) in sağ tarafına genel çözümdeki gibi bir f_1 terimi eklenmelidir; $K < 0$ için onun (tek olarak) çözülebilmesi için gerek ve yeter şart $c(s)$, $a(s)+ib(s)$, $G(\tau)$ ve $g(\tau)$ nun arasındaki $-2K-1$ reel şartlarının sağlanmasıdır.

(ii) Eğer $c^*(s) \equiv 0$, yani

$$c(s) \equiv \mathrm{Re}\left\{\left[a(s)+ib(s)\right]f_1^+(s)\right\}$$

ise o halde problem yine homojen hale dönüşür. Fakat, $K \geq 0$ iken genel çözümü elde etmek için bir f_1 terimi, yine (3.34) ün sağ tarafına eklenmelidir; $K < 0$ için orijinal Riemann-Hilbert problemi f_1 tek çözümüne sahiptir. Çünkü karşılık gelen homojen problem sadece aşikar çözüme sahiptir.

3.-(ii) ye *sözde-homojen Riemann Hilbert problemi*; her iki 2. ve 3.-(i) durumuna da *gerçek-homojen olmayan Riemann Hilbert problemi* denir.

Sözde homojen Riemann Hilbert problemindeki $f_1(s)$ fonksiyonu

$$f_1(s) = \frac{\Upsilon(s)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)\,d\tau}{\Upsilon^+(\tau)(\tau-s)} \quad , \quad s \in L$$

ile verilir. Eğer başlangıçta bir keyfi $F(z)$ fonksiyonunu $F(z) \equiv 0$ yerine, D de analitik, $\overline{D}$ üzerinde sürekli ve sınır değeri L üzerinde H sınıfına ait olan bir fonksiyon olarak alırsak bu durumda sözde homojen Riemann-Hilbert probemi, f_0 için aşağıdaki homojen olmayan probleme dönüşür:

$$\mathrm{Re}\left\{\left[a(s)+ib(s)\right]\Upsilon(s)\,f_0^+(s)\right\} = -\mathrm{Re}\left\{\left[a(s)+ib(s)\right]\Upsilon(s)\,F(s)\right\}, \quad s \in L$$

$K \geq 0$ için orijinal Riemann-Hilbert problemi

$$f(z) = f_1(z) + \Upsilon(z)\left[f_0(z) + \sum_{j=1}^{2K+1} c_j \Psi_j(z)\right]$$

genel çözümüne sahiptir. Burada f_0 yukarıdaki Hilbert probleminin bir özel çözümüdür. $K < 0$ için bu Hilbert problemi, en fazla bir çözüme sahip olabilir. Açık olarak bu çözüm $F(z)$ dir. Bu durumda önceden olduğu gibi

$$f(z) = f_1(z) - F(z)\Upsilon(z)$$

fonksiyonu, orijinal Riemann-Hilbert probleminin (sıfır olmayan) tek çözümüdür. Dolayısıyla, orijinal Riemann Hilbert problemi için şart, sözde homojendir: D de parçalı analitik, L üzerinde sürekli ve (3.28) i sağlayan bir f_1 ((3.31) ile ifade edildi) fonksiyonu vardır öyle ki

$$\mathrm{Re}\left\{\left[a(s) + ib(s)\right] f_1^+(s)\right\} = c(s), \quad s \in L$$

dir. Öyleyse sonuç olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.5: D birim dairesindeki Riemann-Hilbert problemi için $K = k + \kappa > 0$ olduğunda, $2K+1$ keyfi reel sabit içeren genel çözüm vardır; $K < 0$ olduğunda ise:

i. Homojen durum ($c \equiv 0$, $g \equiv 0$) için sadece sıfır çözümüne sahiptir.

ii. Sözde homojen durum için sıfırdan farklı tek bir çözüme sahiptir.

iii. Tek bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart, fonksiyonların problemde verilen $-2K-1$ reel şartlarını sağlamasıdır.

3.2. Hilbert Çekirdekli Tam Lineer Singüler İntegral Denklemlerin Çözümleri:

Bu kısımda Hilbert sınır-değer problemini kullanarak önce karakteristik singüler integral denklemin çözümünü daha sonra bu karakteristik singüler integral denklemin adjoint denkleminin çözümlerini inceleyelim.

3.2.1. Karakteristik Denklemin Çözümü

a, b, f 2π periyotlu, Hölder sürekli, reel değerli fonksiyonlar ve $\forall s \in \mathbb{R}$ için $a^2(s)+b^2(s)>0$ olmak üzere

$$IK^0u(s)=a(s)u(s)+\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\sigma)\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma=f(s) \tag{3.36}$$

şeklinde tanımlanan karakteristik singüler integral denklemini göz önüne alalım. Bu denklem simetrik fonksiyonlar sınıfında Hilbert problemine dönüştürülerek çözülebilir.(Çibrikova, 1977).

Bu amaçla, Hölder sınıfından olan $u(\sigma)$ yoğunluk fonksiyonu yardımıyla parçalı analitik

$$V(z)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_0}u(\sigma)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau},\tau=e^{i\sigma}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Burada $\Gamma_0=\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ dir. $t=e^{is}\in\Gamma_0$ noktasında, Sokhotski formülleri gereğince

$$V^{\pm}(e^{is})=\pm\frac{1}{2}iu(s)+\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0}\frac{u(\sigma)}{\tau-t}d\tau-\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi}u(\sigma)d\sigma$$

$$\frac{d\tau}{\tau-t}=\left(\frac{1}{2}\cot\frac{\sigma-s}{2}+\frac{i}{2}\right)d\sigma$$

bağıntılarını dikkate alırsak:

$$V^{\pm}\left(e^{is}\right)=\pm\frac{1}{2}iu\left(s\right)+\frac{1}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}u\left(\sigma\right)\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma \tag{3.37}$$

elde edilir. Keyfi $z\notin\Gamma_0$ noktasında

$$V\left(z\right)=\overline{V\left(1/\overline{z}\right)} \tag{3.38}$$

olduğu açıktır. $V\left(z\right)$ sınırlıdır ve $z=0$ (ve $z=\infty$) noktasında

$$V\left(0\right)=\frac{i}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}u\left(\sigma\right)d\sigma \quad , \quad \left(V\left(\infty\right)=-\frac{i}{4\pi}\int_{0}^{2\pi}u\left(\sigma\right)d\sigma\right)$$

sanal değerini alır.

$\forall z\notin\Gamma_0$ için (3.38) koşulunu sağlayan $V\left(z\right)$ fonksiyonuna simetrik fonksiyon denir. (3.37) formüllerinden

$$iu\left(s\right)=V^{+}\left(t\right)-V^{-}\left(t\right)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}u\left(\sigma\right)\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma=V^{+}\left(t\right)+V^{-}\left(t\right)$$

buluruz. Bunları (3.36) denkleminde yerine yazarsak

$$iu\left(s\right)=V^{+}\left(t\right)-V^{-}\left(t\right)$$

$$a\left(s\right)u\left(s\right)=f\left(s\right)-b\left(s\right)\left[V^{+}\left(t\right)+V^{-}\left(t\right)\right]$$

olur. Bunlar

$$\begin{aligned}\left(a\left(s\right)+ib\left(s\right)\right)u\left(s\right)&=f\left(s\right)-2b\left(s\right)V^{-}\left(t\right)\\ \left(a\left(s\right)-ib\left(s\right)\right)u\left(s\right)&=f\left(s\right)-2b\left(s\right)V^{+}\left(t\right)\end{aligned} \tag{3.39}$$

bağıntılarına eşdeğerdir.

Buradan

$$V^{+}(t)=\frac{a(s)-ib(s)}{a(s)+ib(s)}V^{-}(t)+\frac{if(s)}{a(s)+ib(s)} \tag{3.40}$$

sınır değer problemine ulaşırız. Demek ki, (3.38) simetriklik koşulunu sağlayan $V(z)$ fonksiyonunu bulmak için (3.40) Hilbert sınır değer probleminin $z=0$ noktasında sanal değer olan çözümünün bulunması gerekir.

Kolaylıkla gösterilebilir ki, (3.40) probleminin $\operatorname{Re}V(0)=0$ şartını sağlayan her bir çözümüne, (3.36) denkleminin (3.39) formüllerinin herhangi biri yardımıyla bulunan $u(s)$ çözümü uygundur.

Gerçekten de eğer, $V(z)$ (3.40) probleminin $\operatorname{Re}V(0)=0$ şartını sağlayan herhangi çözümü ise $V^{+}(t)-V^{-}(t)$ sıçrayışı (3.38) şartına göre $iu(s)$ sanal değer alan bir fonksiyon olur. Buna göre, bilindiği gibi $V(z)$ fonksiyonu,

$$V^{+}(t)-V^{-}(t)=iu(s)$$

sıçrayış probleminin $z=0$ noktasındaki sanal değerli çözümü olduğundan tektir ve

$$V(z)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_0}u(\sigma)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}$$

formülü ile verilir. O halde (3.39) formülleri de sağlanır. V^{-}, V^{+} değerlerini (3.39) formüllerinin, örneğin birincisinde yerine yazarsak $u(s)$ fonksiyonunun (3.36) denkleminin çözümü olduğunu görürüz.

$$a(s)u(s)+ib(s)u(s)=f(s)+ib(s)u(s)-\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\sigma)\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma$$

buradan

$$a(s)u(s)+\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\sigma)\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma=f(s)$$

olur.

$$G(t)=G(s)=\frac{a(s)-ib(s)}{a(s)+ib(s)} \quad , \quad g(t)=g(s)=\frac{if(s)}{a(s)+ib(s)} \quad ,t=e^{is}$$

şeklinde gösterirsek,

$$\dot{I}ndG(s)=\dot{I}nd\,\frac{a(s)-ib(s)}{a(s)+ib(s)}=2\dot{I}nd\left(a(s)-ib(s)\right)=2x$$

$$V^{+}(t)=G(s)V^{-}(t) \quad ,t\in\Gamma_0 \tag{3.41}$$

elde edilir. Bu homojen sınır problemini

$$t^{-x}V^{+}(t)=t^{-2x}G(s)t^{x}V^{-}(t) \quad ,t\in\Gamma_0 \tag{3.42}$$

şeklinde yazalım. Buradan

$$\Phi^{+}(z)=z^{-x}V^{+}(z), \quad G_0(s)=t^{-2x}G(s) \quad ,t=e^{is}$$

ile gösterirsek. $\dot{I}ndG_0(s) = 0$ olduğu açıktır.

$$V^{-}(z)=\overline{V^{+}\left(1/\overline{z}\right)} \quad , \quad \overline{\left(1/\overline{z}\right)^{x}}=z^{-x}\ ,|z|>1$$

olduğunu dikkate alırsak:

$$\overline{\Phi^{+}\left(1/\overline{z}\right)}=\overline{\left(1/\overline{z}\right)^{-x}}.\overline{V^{+}\left(1/\overline{z}\right)}=z^{x}V^{-}(z),\ |z|>1$$

olduğu elde edilir, $|t|=1$ çemberinde $1/\overline{t}=t$ olduğundan (3.42) sınır şartını

$$\Phi^{+}(t)=G_0(s).\overline{\Phi^{+}(t)} \tag{3.43}$$

şeklinde yazabiliriz.

$$\Phi(z)=\begin{cases}\Phi^{+}(z), & |z|<1\\ \overline{\Phi^{+}\left(1/\overline{z}\right)}, & |z|>1\end{cases} \tag{3.44}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım.(3.44) yardımı ile tanımlanan $\Phi(z)$ fonksiyonunun parçalı analitik olduğu açıktır. $|t|=1$ çemberinde $\frac{1}{\overline{t}}=t$ olduğundan

$\Phi^{-}(t)=\overline{\Phi^{+}(t)}$ ve demek ki, $\Phi(z)$ fonksiyonu için sıfır indisli

$$\Phi^{+}(t)=G_0(s).\Phi^{-}(t) \quad ,t=e^{is} \tag{3.45}$$

Riemann sınır problemini buluruz. (3.45) problemi

$$\Phi^{-}(z)=\overline{\Phi^{+}\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} \quad ,|z|>1 \tag{3.46}$$

şartı altında (3.43) problemine denktir. (3.45) probleminin kanonik fonksiyonu

$$\Omega(z)=e^{\Gamma(z)}\,,\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\ln G_0(\sigma)}{\tau-z}d\tau \tag{3.47}$$

şeklindedir. (3.45) probleminin (3.46) şartını sağlayan çözümünü bulmak için,

$$\Omega_*(z)=\overline{\Omega(1/\overline{z})}=\begin{cases}\overline{\Omega^{-}(1/\overline{z})}\,,|z|<1\\ \overline{\Omega^{+}(1/\overline{z})}\,,|z|>1\end{cases}$$

fonksiyonuna bakalım. $G_0(s).\overline{G_0(s)}=1$ olduğu dikkate alınırsa, (3.45) şartından

$$\Omega_*^{-}(t)=\overline{\Omega^{+}(t)}=\overline{G_0(s)}.\overline{\Omega^{-}(t)}=\frac{1}{G_0(s)}\overline{\Omega^{-}(t)}=\frac{1}{G_0(s)}\Omega_*^{+}(t)$$

olduğunu buluruz. Buradan,

$$\Omega_*^{+}(t)=G_0(s)\Omega_*^{-}(t)\,,t=e^{is}$$

yani, $\Omega_*(z)$ fonksiyonu da (3.45) şartını sağlar.

O halde kolaylıkla gösterilebilir ki, $X_0(z)=\left(\Omega(z)\Omega_*(z)\right)^{1/2}=e^{\Gamma_0(z)}$

fonksiyonu da (3.45) sınır şartını sağlar. Burada,

$$\Gamma_0(z)=\frac{1}{2}\left[\Gamma(z)+\Gamma_*(z)\right]=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma_0}\ln G_0(\sigma)\frac{\sigma+z}{\sigma-z}\frac{d\tau}{\tau},$$

$$\Gamma_*(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\overline{\ln G_0(\sigma)}}{\bar{\tau}-\frac{1}{z}}\overline{d\tau}=\frac{z}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\ln G_0(\sigma)}{\tau(\tau-z)}d\tau \tag{3.48}$$

$X_0(z)$ fonksiyonu için (3.46) şartını da sağlar. Demek ki, $X_0(z)$ fonksiyonu (3.43) probleminin çözümüdür.

$$\begin{cases} X^+(z)=z^x X_0^+(z)=z^x.e^{\Gamma_0(z)} \\ X^-(z)=z^{-x}X_0^-(z)=z^{-x}.e^{\Gamma_0(z)} \end{cases} \tag{3.49}$$

fonksiyonları ise (3.41) homojen probleminin özel çözümüdür.

Şimdi ise (3.45) probleminin (3.46) şartını sağlayan $\Phi(z)$ özel çözümünü bulalım. Böylece (3.41) probleminin $z=\infty$ noktasında ((3.46) ya göre hem de $z=0$ noktasında) sonlu kutba sahip olan genel çözümünü buluruz. (3.45) probleminin çözümünü

$$\Phi(z)=P_n(z).X_0(z)=P_n(z).e^{\Gamma_0(z)}$$

şeklinde arayalım. Burada,

$$P_n(z)=\sum_{k=-n}^{n}c_k z^k \; ; c_k=\alpha_k+i\beta_k \text{ , } k=\overline{-n,n}$$

dir. Önce (3.46) şartının sağlandığını düşünelim. Bu şartın $X_0(z)=e^{\Gamma_0(z)}$ için sağlandığını dikkate alırsak:

$$P_n(z)e^{\Gamma_0^-(z)}=\overline{P_n(1/\bar{z})}.e^{\overline{\Gamma_0^+(1/\bar{z})}}=\overline{P_n(1/\bar{z})}.e^{\Gamma_0^-(z)}$$

olur. Demek ki,

$$P_n(z)=\overline{P_n(1/\overline{z})}\xrightarrow{t=e^{is}\in\Gamma_0}P_n(t)=\overline{P_n(t)}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \operatorname{Im} P_n=0\Rightarrow P_n(z)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}\left(c_k z^k+\overline{c_k} z^{-k}\right) \tag{3.50}$$

Dolayısıyla

$\Phi(z)=\left[\alpha_0+\sum_{k=1}^{n}\left(c_k z^k+\overline{c_k} z^{-k}\right)\right]e^{\Gamma_0(z)}$ fonksiyonu $X_0(z)=e^{\Gamma_0(z)}$ ile birlikte (3.45) probleminin çözümü olmakla beraber (3.46) şartını da sağlar. Böylece (3.41) sınır değer probleminin genel çözümü

$$V^+(z)=z^x P_n(z)e^{\Gamma_0^+(z)}$$
$$V^-(z)=z^{-x} P_n(z)e^{\Gamma_0^-(z)} \tag{3.51}$$

şeklindedir. Burada, $\Gamma_0(z)$ ve $P_n(z)$ uygun olarak (3.48) ve (3.50) formülleri yardımı ile verilir.

(3.49) yardımı ile verilen $\left(X^+(z), X^-(z)\right)$ özel çözümü genel çözüm formülünde $P_n(z)\equiv 1$ yazılmasıyla bulunur. Ayrıca $X^+(z)$ fonksiyonu $|z|\le 1$ dairesinde ($z=0$ noktası hariç) sıfır ve sonsuzluk değerlerini almaz.

$x\ge 0$ olduğunda,

$$P_n(z)\equiv P_x(z)=\alpha_0+\sum_{k=1}^{x}\left(c_k z^k+\overline{c_k} z^{-k}\right)$$

olmasıyla $|z|\le 1$ dairesinde sınırlı $(2x+1)$ sayıda reel α_0 , α_k , β_k $\left(k=\overline{1,x}\right)$ keyfi sabitlere bağımlı çözüm buluruz. Burada, $c_k=\alpha_k+i\beta_k$ $\left(k=\overline{1,x}\right)$ dir.

(3.40) homojen olmayan Riemann sınır değer probleminin incelenmesine geçelim. (3.41) probleminin kanonik çözümü:

$$X^+(t)=G(s)X^-(t), \quad t=e^{is} \tag{3.52}$$

olur. (3.52) eşitliğini dikkate almakla (3.41) sınır şartını.

$$\frac{V^+(t)}{X^+(t)}=\frac{V^-(t)}{X^-(t)}+\frac{if(s)}{\big(a(s)+ib(s)\big)X^+(t)}, \quad t=e^{is}$$

şeklinde yazalım. $\dfrac{V(z)}{X(z)}$ fonksiyonu için sıçrayış problemini bulmuş oluruz. $X(z)$ fonksiyonunun simetrikliğine göre,

$g_1(t)=\dfrac{if(s)}{\big(a(s)+ib(s)\big)X^+(t)}$ sıçrayışı yalnız sanal değer alır.

$$\overline{g_1(t)}=-\frac{if(s)}{\big(a(s)-ib(s)\big)X^+(t)}=-\frac{if(s)}{\big(a(s)-ib(s)\big)X^-(t)}=$$
$$=-\frac{if(s)}{\big(a(s)-ib(s)\big)X^+(t)}=-g_1(t).$$

İndise bağlı olarak $\dfrac{V^+(z)}{X^+(z)}$ fonksiyonunun aşağıdaki durumlarına bakalım.

$x\geq 0$ olduğunda $\dfrac{V^+(z)}{X^+(z)}$ fonksiyonunun orijinde x-inci mertebeden kutbu, $x<0$ olduğunda ise $-x$-inci mertebeden sıfırı vardır. Buna göre,

$x\geq 0$ olduğunda,

$$\frac{V^+(z)}{X^+(z)}=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{if(\sigma)}{\big[a(\sigma)+ib(\sigma)\big]X^+(\tau)}\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}+\alpha_0+\sum_{k=1}^{x}\left(c_k z^k+\overline{c_k}\,z^{-k}\right)$$

$$\frac{V^-(z)}{X^-(z)}=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{if(\sigma)}{\big[a(\sigma)+ib(\sigma)\big]X^+(\tau)}\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}+\alpha_0+\sum_{k=1}^{x}\left(c_k z^k+\overline{c_k}\,z^{-k}\right) \tag{3.53}$$

olur.

$x<0$ olduğunda ise

$$\frac{V^{+}(z)}{X^{+}(z)}=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{if(\sigma)}{\left[a(\sigma)+ib(\sigma)\right]X^{+}(\tau)}\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}$$

$$\frac{V^{-}(z)}{X^{-}(z)}=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{if(\sigma)}{\left[a(\sigma)+ib(\sigma)\right]X^{+}(\tau)}\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} \tag{3.54}$$

elde edilir. Fakat bu durumda $V^{+}(z)\left(V^{-}(z)\right)$ fonksiyonunun $z=0\left(z=\infty\right)$ noktasında sınırlı olması için eşitliğin sağ tarafındaki integralin $-x$-inci mertebeden sıfırı olmalıdır.

$$\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{1}{\tau}=\frac{1}{\tau}-\frac{2}{\tau}-\frac{2z}{\tau^2}-\cdots-\frac{2z^{-x}}{\tau^{-x+1}}-\cdots$$

olduğundan,

$$V^{+}(z)=e^{\Gamma_0(z)}z^{x}\left(-\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\Gamma(t)}{\tau}d\tau-\frac{z}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\Gamma(t)}{\tau^2}d\tau-\right.$$
$$\left.-\frac{z^2}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\Gamma(t)}{\tau^3}d\tau-\cdots-\frac{z^{-x}}{2\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{\Gamma(t)}{\tau^{-x+1}}d\tau-\cdots\right)$$

burada,

$$\Gamma(\tau)=\frac{if(\sigma)}{\left[a(\sigma)+ib(\sigma)\right]X^{+}(\tau)}$$

fonksiyonu için

$$\int_{\Gamma_0}\frac{\Gamma(\tau)}{\tau}d\tau=\cdots=\int_{\Gamma_0}\frac{\Gamma(\tau)}{\tau^{-x}}d\tau=0$$

yani $\displaystyle\int_{\Gamma_0}\frac{f(\sigma)}{\left[a(\sigma)+ib(\sigma)\right]X^{+}(\tau)}\tau^{-k-1}d\tau=0 \quad , \quad k=0,\ldots,-x-1$ şartları sağlanmalıdır. Demek ki, $x<0$ olduğunda (3.41) probleminin çözülebilmesi için gerek ve yeter şart,

$$\int_{\Gamma_0}\frac{f(\sigma)}{\left[a(\sigma)+ib(\sigma)\right]X^{+}(\tau)}\tau^{-k-1}d\tau=0 \quad , \quad k=\overline{0,-x-1} \tag{3.55}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

(3.43) şartları sağlandığında (3.52) sınır probleminin $\left(V^{+}(z), V^{-}(z)\right)$ çözümü (3.54) formülleri yardımı ile verilir. Şimdi ise (3.36) denkleminin $u(s)$ çözümünü (3.39) formüllerinden herhangi biri yardımı ile belirleyelim. $\ln G_0(s) = 2iw_x(s)$, burada $w_x(s) = -xs - \arctan\dfrac{b(s)}{a(s)}$ olduğundan

$$\Gamma_0(z) = \frac{2i}{4\pi i}\int_{\Gamma_0} w_x(\sigma)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} = 2\frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_0} w_x(\sigma)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}$$

ifadesinde $z \in D$, $z \to t = e^{is} \in \Gamma_0$ iken limite geçersek

$$\Gamma_0^{+}(t) = 2\left(\frac{1}{2}iw_x(s) + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} w_x(\sigma)\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right)$$

$$= iw_x(s) - \tilde{w}_x(s),$$

burada,

$$\tilde{w}_x(s) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_x(\sigma)\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma$$

olduğundan

$$X_0^{+}(t) = e^{\Gamma_0^{+}(t)} = e^{iw_x(s)}.e^{-\tilde{w}_x(s)}$$

olduğu elde edilir.

$x = 0$ durumu:

$$X_0^{+}(t) = e^{iw_0(s)} = e^{-\tilde{w}_0(s)} \quad ,t = e^{is} \quad ,$$

$$u(s) = \frac{f(s)}{a(s)-ib(s)} - \frac{2b(s)}{a(s)-ib(s)}V^{+}(t)$$

Eğer

$$V^{+}(z)=\frac{X_0^{+}(z)}{4\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{if(\sigma)}{\left[a(\sigma)+ib(\sigma)\right]X_0^{+}(\tau)}\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}+\alpha_0X_0^{+}(\tau)$$

$$X_0^{+}(z)=e^{\Gamma_0^{+}(z)}\quad,\quad \Gamma_0(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma_0}\ln G_0(\sigma)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau}$$

$$V^{+}(t)=X_0^{+}\left(e^{is}\right)\left(\frac{i}{2}\cdot\frac{f(s)}{\left[a(s)+ib(s)\right]X_0^{+}(t)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)}{\left[a(\sigma)+ib(\sigma)\right]X_0^{+}\left(e^{i\sigma}\right)}\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right)+\alpha_0X_0^{+}\left(e^{is}\right)$$

olduğunu dikkate alırsak,

$$u(s)=\frac{f(s)}{a(s)-ib(s)}-\frac{2b(s)}{a(s)-ib(s)}\cdot\left(\frac{i}{2}\frac{f(s)}{a(s)+ib(s)}+\right.$$
$$\left.+\frac{X_0^{+}\left(e^{is}\right)}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)}{\left(a(\sigma)+ib(\sigma)\right)X_0^{+}\left(e^{i\sigma}\right)}\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right)-\frac{2\alpha_0b(s)}{a(s)-ib(s)}X_0^{+}\left(e^{is}\right)=$$
$$=\frac{a(s)f(s)}{a^2(s)+b^2(s)}-$$
$$-\frac{b(s)\left(a(s)+ib(s)\right)X_0^{+}\left(e^{is}\right)}{a^2(s)+b^2(s)}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)}{\left[a(\sigma)+ib(\sigma)\right]X_0^{+}\left(e^{i\sigma}\right)}\cdot\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma-$$
$$-\frac{2\alpha_0b(s)}{a^2(s)+b^2(s)}\left(a(s)+ib(s)\right)X_0^{+}\left(e^{is}\right)$$

olur. Öte yandan

$$X_0^{+}\left(e^{is}\right)=e^{iw_0(s)}.e^{-i\tilde{w}_0(s)}=e^{-i\tilde{w}_0(s)}\left(\cos w_0(s)+i\sin w_0(s)\right)=$$
$$=e^{-i\tilde{w}_0(s)}\cdot\frac{a(s)-ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}$$

olduğundan,

$$X_0^{+}\left(e^{is}\right)\left(a(s)+ib(s)\right)=\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}.e^{-\tilde{w}_0(s)}$$

olur. Böylece

$$u(s)=\frac{a(s)f(s)}{a^2(s)+b^2(s)}-\frac{b(s)}{2\pi}\frac{e^{-\tilde{w}_0(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{-\tilde{w}_0(s)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\cdot\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma$$

$$-\frac{2\alpha_0 b(s)e^{-\tilde{w}_0(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} \tag{3.56}$$

bulunur. $\operatorname{Re}V(0)=0$ şartı sağlanmalıdır.

$$X_0^+(0)=e^{\Gamma_0^+(0)}=e^{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\ln G(\sigma)d\sigma}=e^{\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\arg(a(\sigma)-ib(\sigma))d\sigma}=e^{i\theta}\quad,$$

$$\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\arg\left(a(\sigma)-ib(\sigma)\right)d\sigma\quad,$$

$$V(0)=X_0^+(0)\left(\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)}{\left(a(\sigma)+ib(\sigma)\right)X_0^+\left(e^{is}\right)}d\sigma+\alpha_0\right)=$$

$$=X_0^+(0)\left(\alpha_0+\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_0(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}d\sigma\right)=e^{i\theta}\left(\alpha_0+\frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_0(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}d\sigma\right)$$

olduğundan

$$\operatorname{Re}V(0)=\alpha_0\cos\theta-\frac{\sin\theta}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_0(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}d\sigma$$

olur. Demek ki, $\operatorname{Re}V(0)=0$ şartı ile,

$$\alpha_0\cos\theta-\frac{\sin\theta}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_0(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}d\sigma=0 \tag{3.57}$$

şartının sağlanması eşdeğerdir. Bu şartın sağlanması için iki durum olabilir.

1) $\cos\theta\neq 0$ olsun.

Bu durumda (3.57) ifadesinden α_0 tek değerli olarak bulunur ve demek ki, $IK^0u=f$ denkleminin (3.56) yardımı ile verilen tek çözümü vardır. O halde

$$\alpha_0 = \tan\theta \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\sigma) e^{\tilde{w}_0(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma) + b^2(\sigma)}} d\sigma$$

olacaktır. $IK^0 u = 0$ homojen denkleminin ise (sıfırdan farklı) çözümü yoktur.

2) $\cos\theta = 0$ olsun.

Bu durumda $\sin\theta \neq 0$ olur ve (3.57) şartının sağlanması için,

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\sigma) e^{\tilde{w}_0(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma) + b^2(\sigma)}} d\sigma = 0 \tag{3.58}$$

şartının sağlanması hem gerekli hem de yeterlidir. Bu şart sağlandığında $IK^0 u = f$ denkleminin (3.56) yardımı ile bulunan tek parametreli çözüm ailesi vardır. $IK^0 u = 0$ homojen denkleminin ise,

$$u(s) = -\frac{2\alpha_0 b(s) e^{-\tilde{w}_0(s)}}{\sqrt{a^2(s) + b^2(s)}}$$

şeklinde çözümü vardır. Böylece

$$\cos\theta = \int_0^{2\pi} \frac{f(\sigma) e^{\tilde{w}_0(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma) + b^2(\sigma)}} d\sigma = 0$$

şartı sağlandığında $IK^0 u = f$ denkleminin (3.56) yardımı ile bulunan çözümü vardır. Buradaki α_0 keyfi sabittir.

$x > 0$ durumu:

$$V^+(z) = X^+(z) \left[\frac{1}{4\pi i} \int_{\Gamma_0} \frac{if(\sigma)}{\left[a(\sigma) + ib(\sigma)\right] X^+(\tau)} \frac{\tau + z}{\tau - z} \frac{d\tau}{\tau} \right] +$$

$$+\alpha_0 + \sum_{k=1}^{x} \left(c_k z^k + \overline{c_k} z^{-k} \right)$$

burada $X^+(z) = z^x X_0^+(z)$ ifadesinde $(z \in D) \to (t \in \Gamma_0)$ iken limite geçersek

$$X^+(t)=t^x X_0^+(t)=t^x e^{iw_x(s)}.e^{-\tilde{w}_x(s)}=$$
$$=e^{iw_0(s)}.e^{-\tilde{w}_x(s)}=\left(\cos w_0(s)+i\sin w_0(s)\right)e^{-\tilde{w}_x(s)}=$$
$$=\frac{a(s)-ib(s)}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}e^{-\tilde{w}_x(s)}$$

bulunur. Buradan,

$$X^+(t)\left(a(s)+ib(s)\right)=\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}\;e^{-\tilde{w}_x(s)}$$

ve

$$V^+(t)=X^+(t)\left[\frac{if(s)}{2\left(a(s)+ib(s)\right)X^+(t)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)}{\left(a(\sigma)+ib(\sigma)\right)X^+\left(e^{i\sigma}\right)}\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+\alpha_0+2\sum_{k=1}^{x}\left(\alpha_k\cos ks-\beta_k\sin ks\right)\right]=$$

$$=\frac{e^{-\tilde{w}_x(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\left(a(s)-ib(s)\right)\left[\frac{if(s)e^{\tilde{w}_x(s)}}{2\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_x(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+Q_x(s)\right]$$

bulunur. Burada $Q_x(s)=\alpha_0+2\sum_{k=1}^{x}\left(\alpha_k\cos ks-\beta_k\sin ks\right)$ dir.

Böylelikle

$$u(s)=\frac{f(s)}{a(s)-ib(s)}-\frac{2b(s)}{a(s)-ib(s)}V^+(t)=$$

$$=\frac{a(s)f(s)}{a^2(s)+b^2(s)}-\frac{e^{-\tilde{w}_x(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_x(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma-$$

$$-2Q_x(s)\frac{b(s)e^{-\tilde{w}_x(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}$$

bulunur. $\operatorname{Re} V^{+}(0)=0$ şartı sağlanmalıdır.

$$X^{+}(z)=z^{x}e^{\Gamma_0(z)}, \quad \Gamma_0(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_{\Gamma_0}\ln G_0(\sigma)\frac{\tau+z}{\tau-z}\frac{d\tau}{\tau} \quad ,$$

$$G_0(s)=t^{-2x}\frac{a(s)-ib(s)}{a(s)+ib(s)} \quad , \quad t=e^{is} \quad ,$$

$$\ln G_0(s)=\ln\left|G_0(s)\right|+i\arg G_0(s)=i\left(-2xs+2\arg\left(a(s)-ib(s)\right)\right)=$$
$$=2iw_x(s)$$

olduğundan

$$\Gamma_0(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0}w_x(\sigma)\frac{\sigma+z}{\sigma-z}\frac{d\tau}{\tau}$$

dir.

Buradan,

$$\Gamma_0(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_0}w_x(\sigma)\frac{d\tau}{\tau}=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}w_x(\sigma)d\sigma=$$

$$=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-x\sigma+\arg\left(a(\sigma)-ib(\sigma)\right)\right)d\sigma=-\pi ix+i\theta$$

yazabiliriz. Demek ki

$$e^{\Gamma_0(0)}=(-1)^{x}e^{i\theta} \quad ,$$
$$V^{+}(0)=(-1)^{x}(\alpha_x-i\beta_x)e^{i\theta}=(-1)^{x}(\alpha_x-i\beta_x)(\cos\theta+i\sin\theta) \quad .$$

$\operatorname{Re} V^{+}(0)=0$ olması için

$$\alpha_x\cos\theta+\beta_x\sin\theta=0 \tag{3.59}$$

şartı sağlanmalıdır. $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ aynı zamanda sıfır olmadıklarına göre α_x ve β_x sabitlerinden biri diğeri ile ifade edilebilir.

$\cos\theta\neq 0$ olursa, $\alpha_x=-\tan(\theta)\beta_x$, $\sin\theta\neq 0$ olursa, $\beta_x=-\cot(\theta)\alpha_x$.

Böylelikle, $x>0$ olduğunda $IK^{0}u=f$ denkleminin çözümü,

$$u(s)=\frac{a(s)f(s)}{a^2(s)+b^2(s)}-\frac{e^{-\tilde{w}_x(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_x(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma-$$

$$-\frac{2b(s)e^{-\tilde{w}_x(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\left[\alpha_0+2\sum_{k=1}^{x-1}\left(\alpha_k\cos ks-\beta_k\sin ks\right)+\right.$$

$$\left.+\begin{Bmatrix}\dfrac{-2\beta_x}{\cos\theta}\sin(\theta+xs)\,,\cos\theta\neq 0\,ise\\ \dfrac{2\alpha_x}{\sin\theta}\sin(\theta+xs)\,,\sin\theta\neq 0\,ise\end{Bmatrix}\right]$$

olur.

$IK^0u=0$ homojen denkleminin ise $(2x)$ sayıda lineer bağımsız,

$$\frac{b(s)e^{-\tilde{w}_x(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\cos ks\,,\quad k=\overline{0,x-1}\,,$$

$$\frac{b(s)e^{-\tilde{w}_x(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\sin ks\,,\quad k=\overline{1,x-1}\,,$$

$$\frac{b(s)e^{-\tilde{w}_x(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\sin(\theta+xs)$$

çözümleri vardır.

$x<0$ durumu:

Kabul edelim ki, (3.55) şartları sağlansın. Bu durumda

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_x(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\cos k\sigma d\sigma=0\quad,\quad k=\overline{0,-x-1}\\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_x(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\sin k\sigma d\sigma=0\quad,\quad k=\overline{1,-x-1}\end{cases}$$

olacaktır.

Bunlara ilave $\mathrm{Re}V^+(0)=0$ şartı sağlanmalıdır.

$$X^{+}(z)=z^{x}e^{\Gamma_0(z)} \quad , \quad e^{\Gamma_0(z)}=(-1)^{x}e^{i\theta} \quad ,$$

$$V^{+}(0)=(-1)^{x}e^{i\theta}\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_x(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}e^{ix\sigma}d\sigma=$$

$$=(-1)^{x}\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_x(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}e^{i(x\sigma+\theta)}d\sigma$$

olduğundan

$$\operatorname{Re}V^{+}(0)=\frac{(-1)^{x+1}}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_x(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\sin(x\sigma+\theta)d\sigma$$

Böylece $x<0$ olduğunda $IK^0u=f$ denkleminin çözümünün var olması için aşağıdaki şartların sağlanması gerekli ve yeterlidir.

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_x(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\cos k\sigma d\sigma=0 \quad , \quad k=\overline{0,-x-1}, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_x(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\sin k\sigma d\sigma=0 \quad , \quad k=\overline{1,-x-1}, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_x(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\sin(x\sigma+\theta)d\sigma=0 \quad .\end{cases} \tag{3.60}$$

Bu şartlar sağlandığında $IK^0u=f$ denkleminin bir tek

$$u(s)=\frac{a(s)f(s)}{a^2(s)+b^2(s)}-\frac{e^{-\tilde{w}_x(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\frac{b(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_x(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma$$

çözümü vardır.

3.2.2. Karakteristik Denkleme Adjoint Olan Denklemin Çözümü ve Karakteristik Denklemler İçin Noether Teoremleri

(3.36) karakteristik denklemine adjoint olan

$$IK^{0\prime}\nu \equiv a(s)\nu(s) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} b(\sigma)\nu(\sigma)\cot\frac{\sigma - s}{2}d\sigma = g(s) \tag{3.61}$$

denklemine bakalım. Burada $a(s)$, $b(s)$ ve $g(s)$ $\tilde{H}_\alpha[0,2\pi]$ sınıfından olan verilmiş fonksiyonlar olmak üzere $\forall s \in \Re$ için $a^2(s)+b^2(s) > 0$ dır.

(3.61) denklemini de Bölüm 3.2.1. de olduğu gibi simetrik fonksiyonlar sınıfında Riemann sınır problemine dönüştürerek çözebiliriz. Bunun için,

$$V(z) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Gamma_0} b(\sigma)\nu(\sigma)\frac{\tau + z}{\tau - z}\frac{d\tau}{\tau} \tag{3.62}$$

parçalı analitik fonksiyonunu kullanacağız. Aşağıdaki gösterimleri kabul edelim.

$$x' \equiv ind\big(a(s)+ib(s)\big) = -ind\big(a(s)-ib(s)\big) = -x \quad ,$$

$$\theta_* \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\arg\big(a(\sigma)+ib(\sigma)\big)d\sigma = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\arg\big(a(\sigma)-ib(\sigma)\big)d\sigma = -\theta \quad ,$$

$$w_{x'}^*(s) \equiv -\left(x's - \arctan\frac{b(s)}{a(s)}\right) = -w_x(s) \quad ,$$

$$\tilde{w}_{x'}^*(s) \equiv -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w_{x'}^*(\sigma)\cot\frac{\sigma - s}{2}d\sigma = -w_{x'}^*(s) \quad .$$

Bölüm 3.2.1. e benzer olarak gösterilir ki,

$x' = 0\,(x=0)$ durumunda:

1) $\cos\theta_* = \cos\theta \neq 0$ olduğunda $IK^{0\prime}\nu = g$ denkleminin

$$\nu(s) = \frac{a(s)g(s)}{a^2(s)+b^2(s)} + \frac{e^{-\tilde{w}_0^*(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{b(\sigma)g(\sigma)e^{-\tilde{w}_0^*(s)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\cot\frac{\sigma - s}{2}d\sigma +$$

$$+\frac{2\alpha_0 e^{-\tilde{w}_0^*(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} \tag{3.63}$$

formülü yardımıyla tanımlanan tek çözümü vardır. Burada,

$$\alpha_0 = \tan\theta_* \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{b(\sigma)\,g(\sigma)\,e^{\tilde{w}_0^*(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\,d\sigma$$

şeklindedir. Bu durumda $IK^{0'}\nu = 0$ homojen denkleminin çözümü yoktur.

2) $\cos\theta_* = \cos\theta = 0$ olduğunda $IK^{0'}\nu = g$ denkleminin çözümünün var olması için,

$$\int_0^{2\pi} \frac{b(\sigma)\,g(\sigma)\,e^{\tilde{w}_0^*(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\,d\sigma = 0$$

şartının sağlanması hem gerekli hem de yeterlidir. Bu şart sağlandığında denklemin (3.63) bağıntısı yardımı ile verilen tek parametreli çözüm ailesi vardır. Bu halde $IK^{0'}\nu = 0$ homojen denkleminin,

$$\nu(s) = 2\alpha_0 \frac{e^{-\tilde{w}_0^*(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}$$

şeklinde çözümü vardır.

$x' > 0 \quad (x < 0)$ durumunda:

$IK^{0'}\nu = g$ denkleminin,

$$\nu(s)=\frac{a(s)g(s)}{a^2(s)+b^2(s)}+\frac{e^{-\tilde{w}_{x'}^*(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{b(\sigma)g(\sigma)e^{-\tilde{w}_{x'}^*(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}}\cot\frac{\sigma-s}{2}d\sigma+$$

$$+\frac{2e^{-\tilde{w}_{x'}^*(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\cdot\left[\alpha_0+2\sum_{k=1}^{x'-1}(\alpha_k\cos ks-\beta_k\sin ks)+\right.$$

$$\left.+\begin{Bmatrix}\dfrac{-2\beta_{x'}}{\cos\theta_*}\sin(\theta_*+x's)\,,\ \cos\theta_*\neq 0\ ise\\ \dfrac{2\alpha_{x'}}{\sin\theta_*}\sin(\theta_*+x's)\,,\ \sin\theta_*\neq 0\ ise\end{Bmatrix}\right]$$

yardımı ile tanımlanan $(2x')$ sayıda parametreye bağımlı çözümü vardır. Bu halde, $IK^{0'}\nu=0$ homojen denkleminin $(2x')$ sayıda lineer bağımsız

$$\frac{e^{-\tilde{w}_{x'}^*(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\cos ks\,,\quad k=\overline{0,x'-1}\,,$$

$$\frac{e^{-\tilde{w}_{x'}^*(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\sin ks\,,\quad k=\overline{1,x'-1}\,,$$

$$\frac{e^{-\tilde{w}_{x'}^*(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}}\sin(\theta_*+x's)$$

çözümleri vardır.

$x'<0\quad(x>0)$ durumunda:

$IK^{0'}\nu=g$ denkleminin çözümü genellikle yoktur, denklemin çözülebilmesi için $(2x')$ sayıda

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} \frac{b(\sigma)g(\sigma)e^{\tilde{w}_{x'}^*(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}} \cos k\sigma d\sigma = 0 \quad , \quad k=\overline{0,-x'-1}, \\ \int_0^{2\pi} \frac{b(\sigma)g(\sigma)e^{\tilde{w}_{x'}^*(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}} \sin k\sigma d\sigma = 0 \quad , \quad k=\overline{1,-x'-1}, \\ \int_0^{2\pi} \frac{b(\sigma)g(\sigma)e^{\tilde{w}_{x'}^*(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}} \sin(x'\sigma+\theta_*) d\sigma = 0 \end{cases}$$

şartları sağlanmalıdır. Bu şartlar sağlandığında, denklemin

$$\nu(s) = \frac{a(s)g(s)}{a^2(s)+b^2(s)} + \frac{e^{-\tilde{w}_{x'}^*(s)}}{\sqrt{a^2(s)+b^2(s)}} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{b(\sigma)g(\sigma)e^{-\tilde{w}_{x'}^*(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}} \cot\frac{\sigma-s}{2} d\sigma$$

şeklinde tek çözümü vardır. Bu halde $IK^{0'}\nu = 0$ homojen denkleminin sıfırdan farklı çözümü yoktur.

Şimdi $x \neq 0$ durumunda $IK^0 u = f$ karakteristik denklemi ve ona adjoint olan $IK^{0'}\nu = g$ denklemleri için Noether teoremlerini verelim.

Teorem 3.2.1.: $x > 0$ ve $x = 0$, $\cos\theta \neq 0$ ise $IK^0 u = f$ denklemi keyfi f fonksiyonu için çözülebilirdir. $x = 0$, $\cos\theta = 0$ ise $IK^0 u = f$ denkleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\sigma)e^{\tilde{w}_0(\sigma)}}{\sqrt{a^2(\sigma)+b^2(\sigma)}} d\sigma = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

$x < 0$ ise $IK^0 u = f$ denkleminin çözülebilir olması için gerekli ve yeterli şart,

$$(f,\nu_j) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\nu_j(\sigma) d\sigma = 0, \quad j = 1,2,\ldots,k' \tag{3.64}$$

bağıntılarının sağlanmasıdır, burada $\nu_1(s),\ldots,\nu_{k'}(s)$ fonksiyonları $IK^{0'}\nu=0$ denkleminin lineer bağımsız tam çözümler sistemidir.

Teorem 3.2.2.: $IK^0u=0$ homojen denkleminin k-lineer bağımsız çözümlerinin sayısı ile $IK^{0'}\nu=0$ homojen denkleminin k'-lineer bağımsız çözümlerinin sayısı farkı IK^0 operatörünün indisinin iki katına eşittir:

$$k-k'=2x$$

4. SONUÇ

Hilbert Sınır-Değer Probleminin simetrik fonksiyonları kullanarak nasıl Riemann Sınır-Değer Problemine dönüşeceğini görüp, bu metotla Uygulamalı Matematikte ve esasen diğer bilim dallarında önemli bir yeri olan integral denklemlerin, bazı tiplerinin çözümünde Hilbert Sınır-Değer problemlerinin iyi bir araç olarak kullanılmasını inceledik.

Tüm bu incelemeler analitik fonksiyonlar sınıfında yapılmış olup bu çalışmaların analitik olmayan fonksiyonlar üzerinde de yapılarak genelleştirilmesi mümkündür ve konu o zaman daha önemli hale gelebilir.

KAYNAKLAR

1. J. LU , “Boundary Value Problems for Analytic Functions” World Scientific Series in Pure Math. Singapore 1993.
2. F.D. GAKHOV, “Boundary Value Problems”, Translation edited by I.N.SNEDDON, Dover Publications Inc. NewYork 1992.
3. N.I.MUSKHELISVILI, “Singular Integral Equations” Translated from the Russian by J.R.M.RADOK, Dover Publications Inc. New York 1992
4. N.P.VEKUA “System of Singular Integral Equations and Some Boundary Value Problems”, 1967
5. S.D.FISHER “Complex Variables”, Pasific Grove, California 1990
6. T.BAŞKAN “Kompleks Fonksiyonlar Teorisi” Uludağ Üniversitesi 1998