KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

# LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER VE KONVEKSLİK ÖZELLİKLERİ

ALİŞAN HANÇER

KASIM 2006

# ÖZET

LİNEER POZİTİF OPERATÖRLER VE KONVEKSLİK ÖZELLİKLERİ

HANÇER, Alişan

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Ali ARAL

Kasım 2006, 42 sayfa

Bu yüksek lisans tezinin amacı operatör, lineer operatör ve sınırlı lineer operatör kavramları göz önüne alınarak bilinen bazı sonuçlar verilmiştir. Aynı zamanda iki değişkenli Shepard operatörleri ve iki değişkenli Hermite-Fejer polinomları ile kısmı şekil koruyan yaklaşımlar incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Shepard operatörü, Hermite-Fejer polinomları, konveks fonksiyon, kesin konveks fonksiyon.

# ABSTRACT


LINEAR POSITIVE OPERATORS AND CONVEXITY PROPERTIES



HANÇER, Alişan

Kırıkkale University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Ali ARAL



November 2006, 42 pages



The purpose of this thesis, considering the concept of the operator, linear operator and limited operator some known results are given. Also the partial shape preserving approximation by bivariate Shepard operators and bivariate Hermite-Fejer polynomials have been studied.



**Key Words:** Shepard operator, Hermite-Fejer polynomials, convex function, strictly convex function.

**TEŞEKKÜR**

Bu tezin hazırlanmasında görüş ve yardımlarını esirgemeyen, yol gösteren değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Ali ARAL ’a, ayrıca benden manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili eşim Hatice ASLAN HANÇER ’e en içten teşekkürlerimi sunarım.

## İÇİNDEKİLER

# SİMGELER DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $L$ | Lineer uzay |
| $T$ | Lineer operatör |
| $B(X,Y)$ | Sınırlı lineer operatörler kümesi |
| $\mathfrak{I}$ | Reel veya kompleks sayılar cismi |
| $\mathbb{N}$ | Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $\\| \\ \\|$ | Norm fonksiyonu |
| $S$ | Shepard operatörü |
| $F$ | Hermite-Fejer polinomu |
| $J$ | Jacobi polinomu |

# 1.GİRİŞ

1960 lı yıllarda Popoviciu yaptığı çalışmalarda Jakobi noktalarına dayanan tek değişkenli Hermite-Fejer polinomları sınıfı için, bir $f$ fonksiyonunun monoton olduğu nokta civarındaki bazı noktaların varlığının korunduğunu göstermiştir. Daha sonra bunlara ek olarak $f$ nin konveksliği göz önüne alınarak problemler, Shepard operatörler, Grunwald interpolation polinomları ve Kryloff-Stayermann interpolation polinomları için araştırılmıştır. Bu çalışmamızda $D \subset \mathbb{R}^2, f : D \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f$ ye bağlı iki değişkenli Shepard interpolation operatörle kısmi şekil koruyan yaklaşımları verilmiştir. Ayrıca $f$ fonksiyonunun kesin konveksliği gösterilerek, alınan komşuluklara göre $f$ ye bağlı iki değişkenli lineer operatörlerin şekil koruyan yaklaşımları incelenmiştir.Bunlara bağlı olarak bazı sonuç teoremleri ve bunların ispatları yer almıştır. Bununla birlikte iki değişkenli Hermite-Fejer polinomları tanımlanarak bu polinomlar ile kısmi şekil koruyan yaklaşımlar sunulmuştur. Çalışmada $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyonun iki boyutsal (veya hiperbolik üstten monoton) ve iki boyutsal (hiperbolik alttan monoton) olma şartları verilmiştir. Son olarak $f$ fonksiyonun kesin double konvekslik tanımı verilerek Hermite-Fejer polinomları bu başlık altında incelenmiştir.

## 1.1. Kaynak Özetleri

G. A. Anastassiou ve S. G. Gal ın 2000 yılında yapmış oldukları çalışmada iki değişkenli Shepard operatörle kısmi şekil koruyan yaklaşımları incelemişlerdir. 1960 -61 yıllarında Popoviciu [1], Jakobi noktalarına dayanan tek değişkenli Hermite-Fejer polinomlarının sınıfı için bir $f$ fonksiyonunun monoton olduğu noktanın civarındaki bazı noktaların varlığını koruduğunu göstermiştir. S. G. Gal ve J. Szabados [2] 1999 yılında interpolasyon operatörler ile kısmı şekli koruyan yaklaşımları göstermiştir. 1965 yılında O. Shisha ve B. Mond [3] bir veya çok değişkenli fonksiyonlar için Hermite-Fejer yaklaşımlarının yakınsaklık hızını vermişlerdir. S. G. Gal [4] Kryloff-Stayermann interpolasyon polinomlarıyla kısmi şekil koruyan yaklaşımları göstermiştir. D. Shepard [5] 1968 yılında düzenli uzay nıktaları için iki boyutsal interpolasyon fonksiyonu üzerine çalışma yapmıştır. R. E. Barnhill, R. P. Dube ve F. F. Little [6] 1983 yılındaki çalışmalarında Shepard yüzeyinin özelliklerini incelemişlerdir. Bununla birlikte operatörler için yaklaşım teorisi ile ilgili diğer ayrıntılara (7), (8), (9), (10), (11), (12), (13), (14), (15) ve (16) ıncı referanslara bakılabilir.

### 1.2. Çalışmanın Amacı

Bu yüksek lisans tezinde 1.1. Kaynak Özetlerinde adı geçen çalışmaların bir derlemesi ve burada verilen teoremler ilişkilendirilerek yeni çalışmaların oluşturulması amaçlanmıştır.

# 2. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde lineer uzay, normlu konveks uzay ve bunlarla ilişkili ve ileriki kısımlarda kullanılacak bazı tanım, lemma ve önermeler verilmiştir.

## 2. 1. Bazı Temel Tanım ve Teoremler

*Tanım 2.1.1*: $L$ boş olmayan bir cümle ve $\Im$, reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $L$' ye $\Im$ üzerinde lineer uzay (veya vektör uzayı) denir:

*A*) $L$, + işlemine göre değişmeli gruptur. Yani

*L1*) Her $x, y \in L$ için $x + y \in L$ dir (kapalılık özelliği).

*L2*) Her $x, y, z \in L$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ dir (birleşme özelliği).

*L3*) Her $x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır (özdeş eleman özelliği).

*L4*) Her $x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in L$ vardır(ters eleman özelliği).

*L5*) Her $x, y \in L$ için $x + y = y + x$ dir(değişme özelliği).

*B*) $x, y \in L$ ve $\alpha, \beta \in \Im$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanır:

*L1*) $\alpha \cdot x \in L$ dir (skalerle çarpmaya göre kapalılık )

*L2*) $\alpha(x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ dir.

*L3*) $(\alpha + \beta)x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ dir.

*L4*) $(\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$ dir.

*L5*) $1 \cdot x = x$ dir(Burada $1, \Im$ ' nin birim elemanıdır).

$\Im = \mathbb{R}$ olması halinde *L* ye reel; $\Im = \mathbb{C}$ olması halinde ise *L'* ye kompleks lineer uzay denir.

*Tanım 2.1.2*: *N* bir lineer uzay olsun.

$$\| \ \| : N \to \mathbb{R}$$

fonksiyonunun $x$ ' deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\| \ \|$' ye *N*' de (veya *N* üzerinde) norm denir.

*N1*) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ dır.

*N2*) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ dır ( $\alpha \in \Im$ ).

*N3*) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ dır (üçgen eşitsizliği).

lineer uzay üzerinde bir norm tarif edilmişse bu uzaya normlu lineer uzay denir.

Normlu lineer uzayları $(N, \| \ \|)$ veya *N* ile göstereceğiz. Lineer uzay olarak *N*, reel ise normlu uzaya normlu reel uzay; kompleks ise *N*' ye normlu kompleks uzay denir.

*Tanım 2.1.3*: $X, Y$ lineer normlu uzaylar olmak üzere $T : X \to Y$ dönüşümüne operatör denir.

$X$ ve $Y$ lineer (vektör) uzay ve cisim $\Im$ olmak üzere eğer

$L_1$ ) $\forall x_1, x_2 \in X$ için $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$

$L_1$ ) $\forall \alpha \in \Im$ ( $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismi) ve $\forall x \in X$ için $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

ise $T$ ' ye lineerdir denir.

*Önerme 2.1.1*: $T$ lineer operatör ise

$$T(\theta_X) = \theta_Y$$

dir.

*Tanım 2.1.4*: $T : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. $D(T)$, $T$ ' nin tanım kümesini göstersin. Eğer $\forall x \in D(T)$ için

$$\|T(x)\|_Y \leq M \|x\|_X$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sayısı varsa $T$ operatörüne sınırlıdır denir.

*Lemma 2.1.1*: $T : D(T) \subset X \to Y$ sınırlı lineer operatör $\left(X, \|\ \|_X\right)$ ve $\left(Y, \|\ \|\right)_Y$ normlu lineer uzaylar olsun.

*1*$^0$) $\|T\| = \sup\limits_{x \neq \theta_X} \dfrac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}$

şeklinde tanımlanan dönüşüm norm aksiyomlarını sağlar. Burada

$B(X,Y) = \{T \mid \ T : X \to Y$ sınırlı lineer operatör$\}$

olmak üzere $T \in B(X,Y)$ ' dir.

*2*$^0$) $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|_X = 1} \left\{\|T(x)\|_Y\right\}$

yazılabilir.

Bir operatörün sınırlı olmadığını göstermek için $\forall x \in D(T)$ için

$$\|T(x)\|_Y > M \|x\|_X$$

olacak şekilde bir $M$ bulunduğunu göstermek yeterlidir.

*Tanım 2.1.5*: $X$ ve $Y$ normlu lineer uzaylar $T : X \to Y$ bir operatör olsun.

*1*$^0$) $X$' in sınırlı bir $M$ alt kümesi için $T(M), Y$ ' de relatif kompakt ise $T$ operatörüne kompakttır denir.

$2^0$) $(x_n)$, $X$ ' de sınırlı bir dizi olsun. $(T(x_n))$ ' nin $Y$ ' de yakınsak bir alt dizisi varsa $T$ operatörüne kompakttır denir.

*Tanım 2.1.6*: $X$ bir normlu uzay, $\Im = \mathbb{R}$ veya $\Im = \mathbb{C}$ olmak üzere $F : X \to \Im$ dönüşümüne bir fonksiyonel denir.

*Tanım 2.1.7*: $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in A$ için $f(x) \geq 0$ ise ve $\Phi$ fonksiyoneli için $\Phi(f) \geq 0$ oluyorsa $\Phi$ ' ye pozitif fonksiyonel denir.

Bir lineer pozitif fonksiyonel monoton artandır.

*Önerme 2.1.2*: $\psi(x), [a,b]$ ' de sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x)\psi(x)dx$$

fonksiyonelinin pozitif olması için gerekli ve yeterli koşul $\psi(x) \geq 0$ olmasıdır.

*Tanım 2.1.8*: $x_0, x_1, ..., x_n$ ' ler $(a,b)$ aralığının keyfi noktaları olmak üzere $f(x) = [x_k]$ $k = 0,1,2,...,n$ diyelim.

$$[x_0, x_1] = \frac{[x_0] - [x_1]}{x_0 - x_1}$$

olmak üzere *f*' nin 1. bölünmüş farkı

$$[f; x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

için Ortalama Değer Teoremi' nden

$$[f; x_0, x_1] = f^{'}(\xi), \xi \in (a,b)$$

dir. *f*' nin 2. bölünmüş farkı

$$[f; x_0, x_1, x_2] = \frac{[x_0, x_1] - [x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

ise

$$\left[f;x_0,x_1,x_2\right]=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

dir ve

$$\left[f;x_0,x_1,x_2\right]=\frac{f''(\xi)}{2!},\xi\in(a,b)$$

dir. $f$' nin $n$ .bölünmüş farkı

$$\left[f;x_0,x_1,...,x_n\right]=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)...(x_0-x_n)}+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_0)...(x_1-x_n)}+...+\frac{f(x_n)}{(x_n-x_0)...(x_n-x_{n-1})}$$

ise

$$\left[f;x_0,x_1,...,x_n\right]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},\xi\in(a,b) \qquad (2.1.1)$$

eşitliği sağlanır. Burada $\xi$ noktası $x_0,x_1,...,x_n$ noktaları ile aynı aralıktadır. Diğer taraftan biliyoruz ki birinci mertebeden türevlenebilir bir $f(x)$ fonksiyonunun türevi sonlu bir aralıkta pozitif ise artan, negatif ise $f(x)$ azalan, sıfır ise basit fonksiyondur. Türevi pozitif olan fonksiyonlara birinci basamaktan konveks, negatif olanlara birinci basamaktan konkav, sıfır olanlara ise birinci basamaktan sabit fonksiyon dersek (1) formülüne göre bu tanımları türevlenemeyen fonksiyonlar için de verebiliriz.

$(a,b)$ aralığında tanımlanmış $f(x)$ fonksiyonunun bu aralıkta olan keyfi ($n$+1) noktadaki $n$. bölünmüş farkları pozitif ise $f(x)$ fonksiyonuna $n$. basamaktan konveks, negatif ise $f(x)$ fonksiyonuna $n$. basamaktan konkav, sıfır ise $f(x)$ fonksiyonuna $n$. basamaktan sabit fonksiyon denir.

# 3. ARAŞTIRMA BULGULARI

## 3. 1. İki Değişkenli Shepard Operatörle kısmi Şekil Koruyan Yaklaşımlar

Interpolation ( iç değerlendirme) koşullarından dolayı, interpolating operatörlerin bir tek değişkenli $f$ fonksiyonunun şeklini korumadığı ve interpolation noktalarının aralığın tamamı tarafından içerildiği açıktır. Çok yıllar önce Popoviciu [1, 2] niteleyici tipte olan aşağıdaki sonucu ispatladı. Jakobi knots ( noktalarına) dayanan tek değişkenli Hermite-Fejer polinomlarının sınıfı için $f$ ’ nin monoton olduğu noktanın civarındaki bazı noktaların varlığı ( $f$ fonksiyonundan bağımsız) korunur.

Bu şekildeki fikirler sürerken son [3,4] çalışmada öncelikle Popoviciu ’ nun sonuçları için niteleyici versiyonlar elde edildi. Daha sonra buna ilaveten $f$ ’ nin konvekslik durumu göz önüne alındı ve son olarak, bütün problemler Shepard operatörler, Grünwald interpolation polinomları ve Kryloff-Stayermann interpolation polinomları için incelendi. Aynı zamanda son [5] çalışmada sonuçlar iki değişkenli Hermite-Fejer polinomları için genişletildi.

Nitel tipteki sonuçların ispatı için yukarıda bahsedilen çalışmalarda kullanılan sonuç, aşağıdaki temel lemmada verilmiştir.

*Lemma 3.1.1*: $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$, $a\le x_1\le\ldots\le x_n\le b$ ve $h_i\in C^1[a,b]$ ve $\forall x\in[a,b]$ için

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(x)=1$$

olmak üzere

$$F_n(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} h_i(x) f(x_i)$$

olsun.

(*i*)

$$F_n^{'}(f)(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \left( -\sum_{j=1}^{i} h_j^{'}(x) \right) [f(x_{i+1}) - f(x_i)]$$

dir.

(*ii*) $h_1^{'}(x_0) < 0, h_n^{'}(x_0) > 0$ olacak şekilde $x_0 \in (a,b)$ var ve $h_1^{'}(x_0), h_2^{'}(x_0), ..., h_n^{'}(x_0)$ dizisi bir tek işaret değişimine sahip ise o zaman tüm $i = 1,2,...,n-1$ için

$$-\sum_{j=0}^{i} h_j^{'}(x_0) < 0$$

dır ve sonuç olarak (i) ' den $f$ ' nin monoton olduğu $x_0$ ' ın bir $V(x_0)$ komşuluğu vardır ki; bu komşulukta monotonluk korunur.

Bu çalışmada Shepard operatörler için monotonluk ve konvekslikle ilgili nitel sonuçlar elde edildi.

### 3. 2. İki Değişkenli Shepard Operatörler

$x_1 < x_2 < ... < x_n$ ve $y_1 < y_2 < ... < y_n$, $i = 1,2,...,n$, $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_i, y_i) \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$ olsun. $i = 1,2,...,n$ için $(x_i, y_i)$ noktaları üzerinde $f$ ' ye bağlı iki değişkenli Shepard interpolation operatörünün $\mu > 0$ sabit ve

$$s_{n,i}^{(\mu)}(x,y) = \frac{[(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]^{-\mu/2}}{\ell_n^{(\mu)}(x,y)}$$

$$\ell_n^{(\mu)}(x,y)=\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{-\mu/2}>0$$

olmak üzere $(x,y)\neq(x_i,y_i)$ iken

$$S_{n,\mu}(f)(x,y)=\sum_{i=1}^{n}s_{n,i}^{(\mu)}(x,y)f(x_i,y_i)$$

ve $i=1,2,...,n$ iken

$$S_{n,\mu}(f)(x_i,y_i)=f(x_i,y_i)$$

şeklinde verildiği bilinir. Bundan sonraki kısımlarda $\mu=2p, p\in\mathbb{N}$ durumunu göz önüne alacağız. Bu sebeple

$$S_{n,2p}(f)(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{-p}}{\sum_{k=1}^{n}[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2]^{-p}}\cdot f(x_i,y_i)$$

olur.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}s_{n,i}^{(2p)}(x,y)&=\sum_{i=1}^{n}\frac{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{-p}}{\sum_{k=1}^{n}[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2]^{-p}}\\&=\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2]^{-p}}\sum_{i=1}^{n}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{-p}\\&=1\end{aligned}$$

ve $s_{n,i}^{(2p)}(x,y)$ ’ nin $C^{\infty}$ sınıfından olduğu açıktır.

Öncelikle monotonluk durumunda nitel tipin bir sonucunu verelim.

*Teorem 3.2.1*: $D=[a,b]\times[c,d]$, $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x,y)$, ( her bir sabit $y$ için ) $x$ ’ in bir fonksiyonu olarak azalmayan ve $f(x,y)$, (her bir sabit $x$ için ) $y$ ’ nin bir fonksiyonu olarak azalmayan ise o zaman

$$\frac{\partial \ell_n^{(2p)}(x,y)}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial \ell_n^{(2p)}(x,y)}{\partial y}=0 \tag{3.2.1}$$

sisteminin bir çözümü olan herhangi bir $(\xi,\eta)\in(a,b)\times(c,d)$ için $S_{n,2p}(f)(x,y)$, $x$ ve $y$' nin bir fonksiyonu olarak azalmayan $(\xi,\eta)$ noktasının bir $V(\xi,\eta)$( $n$ ve $p$' ye bağlı, fakat $f$' den bağımsız ) komşuluğu vardır.

*İspat*: Lemma 3. 1. 1 (i) kullanılırsa

$$\frac{\partial S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x}=\sum_{i=1}^{n-1}\left[-\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial s_{n,j}^{(2p)}(x,y)}{\partial x}\right]\cdot[f(x_{i+1},y_{i+1})-f(x_i,y_i)],$$

$$\frac{\partial S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial y}=\sum_{i=1}^{n-1}\left[-\sum_{j=1}^{i}\frac{\partial s_{n,j}^{(2p)}(x,y)}{\partial y}\right]\cdot[f(x_{i+1},y_{i+1})-f(x_i,y_i)]$$

elde edilir. Hipotezden tüm $i=1,2,...,n-1$ için

$$f(x_{i+1},y_{i+1})-f(x_i,y_i)=f(x_{i+1},y_{i+1})-f(x_{i+1},y_i)+f(x_{i+1},y_i)-f(x_i,y_i)\geq 0$$

dir. $(\xi,\eta)\in(a,b)\times(c,d)$, (1) sisteminin bir çözümü olsun.

$$\frac{\partial s_{n,j}^{(2p)}(x,y)}{\partial x}=\frac{-2p(x-x_j)[(x-x_j)^2+(y-y_j{}^2)]^{-p-1}}{\ell_n^{(2p)}(x,y)}-\frac{\frac{\partial \ell_n^{(2p)}(x,y)}{\partial x}[(x-x_j)^2+(y-y_j)^2]^{-p}}{[\ell_n^{(2p)}(x,y)]^2}$$

ve

$$\frac{\partial s_{n,j}^{(2p)}(x,y)}{\partial y}=\frac{-2p(y-y_j)[(x-x_j)^2+(y-y_j{}^2)]^{-p-1}}{\ell_n^{(2p)}(x,y)}-\frac{\frac{\partial \ell_n^{(2p)}(x,y)}{\partial y}[(x-x_j)^2+(y-y_j)^2]^{-p}}{[\ell_n^{(2p)}(x,y)]^2}$$

olduğundan

$$\frac{\partial s_{n,1}^{(2p)}(\xi,\eta)}{\partial x} < 0, \frac{\partial s_{n,n}^{(2p)}(\xi,\eta)}{\partial x} > 0, \operatorname{sgn}\left[\frac{\partial s_{n,j}^{(2p)}(\xi,\eta)}{\partial x}\right] = \operatorname{sgn}(x_j - \xi)$$

ve

$$\frac{\partial s_{n,1}^{(2p)}(\xi,\eta)}{\partial y} < 0, \frac{\partial s_{n,n}^{(2p)}(\xi,\eta)}{\partial y} > 0, \operatorname{sgn}\left[\frac{\partial s_{n,j}^{(2p)}(\xi,\eta)}{\partial y}\right] = \operatorname{sgn}(y_j - \eta)$$

elde edilir. Lemma 3. 1. 1 (ii)' den $\forall i = 1,2,...,n-1$ için

$$-\sum_{j=1}^{i} \frac{\partial s_{n,j}^{(2p)}(\xi,\eta)}{\partial x} > 0, -\sum_{j=1}^{i} \frac{\partial s_{n,j}^{(2p)}(\xi,\eta)}{\partial y} > 0$$

olduğu kolaylıkla bulunur. Sonuç olarak $(\xi,\eta)$' nün bir $V(\xi,\eta)$ komşuluğundaki $\forall (x,y) \in V(\xi,\eta)$ için

$$\frac{\partial S_{n,2p} f(x,y)}{\partial x} > 0, \frac{\partial S_{n,2p} f(x,y)}{\partial y} > 0$$

elde edilir.

Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

*Uyarılar 3.2.1*:

*a*) (1) sisteminin $(a,b)\times(c,d)$ içine çözüme sahip olup olmadığı sorusu doğal bir sorudur. $i = 1,2,...,n$ için $x_i, y_i$ noktalarının bazı özel seçimleri için pozitif bir cevap türetilebilir.

Öncelikle $[a,b] = [c,d]$ ve $i = 1,2,...,n$ için $x_i = y_i$ durumunu göz önüne alalım.

$$\ell_n^{(2p)}(x,y) = \sum_{i=1}^{n} [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2]^{-p}$$

olmak üzere

$$\frac{\partial \ell_n^{(2p)}(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x}\left[\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right)^{-p}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[-p\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2\right)^{-p-1} 2(x-x_i)\right]$$

$$= 2p\sum_{i=1}^{n} \frac{x-x_i}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{p+1}}$$

için

$$\frac{\partial \ell_n^{(2p)}(x,y)}{\partial x} = 0$$

alınırsa

$$\frac{\partial \ell_n^{(2p)}(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x-x_i}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{p+1}}$$

elde edilir. O halde (1) denklem sisteminin

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} \frac{x-x_i}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{p+1}} = 0 \\ &\sum_{i=1}^{n} \frac{y-y_i}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{p+1}} = 0 \end{aligned} \qquad (3.2.2)$$

denklem sistemine eşdeğer olduğu görülür. $i = 1,2,...,n$ için $x_i = y_i$ alarak ve denklemleri birbirinden çıkararak $x = y$ olduğu da görülür.

(2) sisteminin ilk denkleminde $x_i = y_i$ alınırsa

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x-x_i}{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{p+1}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y-y_i}{2^{p+1}(x-x_i)^{2(p+1)}} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(x-x_i)^{2p+1}} = 0$$

$$\sum_{i=-n}^{n} \frac{1}{(x-x_i)^{2p+1}} = 0$$

elde edilir, yani bu denklem [4]' deki Teorem 3. 2' nin ispatındaki (12) denklemidir Uyarı 3. 2. 1' e göre [4]' deki Teorem 3. 2' nin ispatında $2n$ durumunda ancak (12) denklemi çözümlere sahiptir. Böylece (1) sistemi $2n$ durumunda $(\xi,\xi)$ formundaki çözümlere sahiptir.

Şimdi de $[a,b]=[c,d]=[-1,1]$ ve $i=1,2,...,n$ için $x_i=-y_i$ seçimini göz önüne alalım. Bu durumda iki denklem birbiriyle toplanırsa $x=-y$ elde edilir. Yani, bunlar (2)' nin ilk denkleminde yerine konursa

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{[(x-x_i)^2+(x-x_i)^2]^{p+1}}=0$$
$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{[x^2-2xx_i+x_i^{\,2}+x^2+2xx_i+x_i^{\,2}]^{p+1}}=0$$
$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{[2(x^2+x_i^{\,2})]^{p+1}}=0$$
$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{[(x^2+x_i^{\,2})]^{p+1}}=0$$

elde edilir.

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x-x_i}{[(x^2+x_i^{\,2})]^{p+1}}$$

ile gösterilirse $F(x_1)<0$ ve $F(x_n)>0$ bulunur. Yani, $F(\xi)=0$ olacak şekilde $\xi\in(x,x_n)$ vardır ve bunun sonucu olarak $(\xi,\xi)$ hem (1) hem de (2) sisteminin bir çözümü olur.

Son olarak $n=2$, $p\in\mathbb{N}$ $i=1,2,...,n$ için $(x_i,y_i)\in[a,b]\times[c,d]$ ise o zaman

$$\xi=(x_1+x_2)/2 \text{ ve } \eta=(y_1+y_2)/2$$

olacak şekildeki $(\xi,\eta)$, (2) ve de aynı zamanda (1) sisteminin bir çözümüdür.

*b*) Eğer Teorem I. 1. 1' de $[a,b]=[c,d]=[-1,1]$ ve $i=-n,...,0,...,n$ için $x_i=y_i=\dfrac{i}{n}$ alınırsa o zaman yukarıdaki uyarı (a)' ya göre (1) sisteminin herhangi bir çözümü $(\xi,\xi)$ şeklindedir. Bu durumda Teorem I. 1. 1' de $V(\xi,\xi)$ komşuluğunu $c>0$, $f$ ve $n$' den bağımsız olmak üzere

$$\left(\xi - c/n^4, \xi + c/n^4\right)\times\left(\xi - c/n^4, \xi + c/n^4\right)\subset(-1,1)\times(-1,1)$$

formunda alabiliriz.

Bu niteleyici tipteki sonuç, [4]' ün tek değişkenli durumunda Teorem 3. 4' ün iki değişkenlisine benzer olur.

Konvekslikle ilişkili $S_{n,2p}(f)(x,y)$' nin bazı özelliklerini tartışacağız. Bu manada $f:[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu $i=1,2,...,n$ için $x_{-i}=x_i$, $y_{-i}=y_i$, $x_0=y_0=0$ eş uzaklık interpolasyon noktalarını göz önüne alacağız.

$$s_{n,i}^{(2p)}(x,y)=\frac{(x^2+y^2)^p[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{-p}}{1+\sum\limits_{\substack{j=-n\\ j\neq 0}}^{n}(x^2+y^2)^p[(x-x_j)^2+(y-y_j)^2]^{-p}} \qquad (3.2.3)$$

formunda olmak üzere Shepard operatörü

$$S_{n,2p}(f)(x,y)=\sum_{i=-n}^{n}s_{n,i}^{(2p)}(x,y)f(x_i,y_i) \qquad (3.2.4)$$

eşitliği ile verilir.

Aşağıdaki tanımı verelim.

*Tanım 3.2.1*:

$f:[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu herhangi bir $P_1=(x_1,y_1)$ $P_2=(x_2,y_2)$ $[-1,1]\times[-1,1]$ kümesine ait olmak üzere ve herhangi bir $\lambda\in(0,1)$ için

$$\lambda P_1+(1-\lambda)P_2=(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2, \lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\in(-1,1)\times(-1,1)$$

olmak üzere

$$f(\lambda P_1+(1-\lambda)P_2)<\lambda f(P_1)+(1-\lambda)f(P_2)$$

özelliğini sağlarsa $f$ fonksiyonuna kesin konveks adı verilir.

*Uyarı 3.2.2*: $f \in C^2([-1,1]\times[-1,1])$ ve $\forall (x,y) \in [-1,1]\times[-1,1]$ için

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} > 0, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} > 0, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\right)^2$$

ise o zaman $f$, $[-1,1]\times[-1,1]$ üzerinde kesin konvekstir. Ayrıca yukarıdaki kesin iki eşitsizlik $\forall (x,y) \in ([-1,1]\times[-1,1]) - \{(0,0)\}$ ve

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$$

için geçerli ise o zaman $f$, $[-1,1]\times[-1,1]$ üzerinde kesin konvekstir ve $(0,0)$, $f$' nin global minimum noktasıdır.

*Teorem 3.2.2*: $S_{n,2p}(f)(x,y)$, $p=1$, (3) ve (4)' e göre verilsin. $f:[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu, $[-1,1]\times[-1,1]$ üzerinde kesin konveks ise, o zaman $(0,0)$' ın bir $V(0,0)$ ($f$ ve $n$' ye bağlı )komşuluğu vardır ki $S_{n,2p}(f)(x,y)$, $V(0,0)$ içinde kesin konvekstir.

*İspat*: (4) ifadesinden kolaylıkla tüm $i \neq 0$' lar için

$$\frac{\partial^i s_{n,i}^{(2p)}(0,0)}{\partial x^i} = \frac{\partial^i s_{n,i}^{(2p)}(0,0)}{\partial y^i} = \begin{cases} 0 & , \quad i = 1,2,\ldots,2p-1 \text{ ise,} \\ \dfrac{(2p)!}{(x_i^2+y_i^2)^p} & , \quad i = 2p \text{ ise} \end{cases} \tag{5}$$

elde edilir. $f$' nin kesin konveksliği

$$f(x_i,y_i) + f(x_{-i},y_{-i}) > 2f(0,0)$$

olmasını ve

$$\sum_{i=-n}^{n} s_{n,i}^{(2p)}(x,y) = 1$$

olması da

$$\sum_{i=-n}^{n} \frac{\partial^2 s_{n,i}^{(2p)}(0,0)}{\partial x^2} = 0$$

olmasını gerektireceğinden

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 S_{n,2}(f)(0,0)}{\partial x^2} &= \sum_{i=-n}^{n} \frac{\partial^2 s_{n,k}^{(2)}(0,0)}{\partial x^2} f(x_i, y_i) \\
&= \sum_{i=-n}^{n} \frac{2!}{(x_i^2 + y_i^2)^2} f(x_i, y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{(x_i^2 + y_i^2)^2} [f(x_i, y_i) + f(-x_i, -y_i)] \\
&+ f(0,0) \frac{\partial^2 s_{n,0}^{(2)}(0,0)}{\partial x^2} > f(0,0) \sum_{i=-n}^{n} \frac{\partial^2 s_{n,i}^{(2)}(0,0)}{\partial x^2} = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\frac{\partial^2 S_{n,2}(f)(0,0)}{\partial y^2} > 0$$

olduğu da gösterilebilir. Diğer bir deyişle basit hesaplamalarla $\forall i = -n, ..., 0, ..., n$ için

$$\frac{\partial^2 s_{n,2}^{(2)}(0,0)}{\partial x \partial y} > 0$$

elde edilir ki bu da

$$\frac{\partial^2 S_{n,2}(f)(0,0)}{\partial x \partial y} > 0$$

olmasını gerektirir. Böylece

$$\frac{\partial^2 S_{n,2}(f)(0,0)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 S_{n,2}(f)(0,0)}{\partial y^2} > \left( \frac{\partial^2 S_{n,2}(f)(0,0)}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

olduğu da kolayca görülür.

Bir sonuç olarak $(0,0)$' ın $V(0,0)$ ( $f$ ve $n$' ye bağlı) ile gösterilen bir komşuluğu vardır, öyle ki tüm $(x, y) \in V(0,0)$' ler için

$$\frac{\partial^2 S_{n,2}(f)(x,y)}{\partial x^2} > 0$$

ve

$$\frac{\partial^2 S_{n,2}(f)(x,y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 S_{n,2}(f)(x,y)}{\partial y^2} > \left( \frac{\partial^2 S_{n,2}(f)(x,y)}{\partial x \partial y} \right)^2$$

elde edilir, yani; $S_{n,2p}(f)(x,y)$, $V(0,0)$ içinde kesin konvekstir.

*Uyarı 3.2.3*: $p \geq 2$ olsun. Tanım 1.3' den sonraki uyarıya göre $\forall (x,y) \in V(0,0) - \{(0,0)\}$ için

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x^2} > 0, \\ &\frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial y^2} > 0, \\ &\frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial y^2} > \left( \frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

olacak şekilde $(0,0)$ ' ın bir $V(0,0)$ komşuluğunun varlığını ispatlamak yetecektir. Çünkü (5) bağıntılarından açıkca görülür ki

$$\frac{\partial S_{n,2p}(f)(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial S_{n,2p}(f)(0,0)}{\partial y} = 0$$

dir. (5)' teki bağıntılar aynı olduğundan

$$\frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(0,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(0,0)}{\partial y^2} = 0$$

elde edilir.

Bu düşünce

$$F(x,y)=\frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x^2},\, G(x,y)=\frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial y^2}$$

$$H(x,y)=F(x,y)\cdot G(x,y)-\left(\frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x \partial y}\right)^2$$

fonksiyonlarının $(0,0)$ ‘ ın bir komşuluğu üzerinde kesin konveks olduğunu ispat etmek içindir. $(0,0)$ global minimum noktadır ve bu da (6) bağıntılarını gerektirir.

Tüm $p\in\mathbb{N}, p\geq 2$ için Teorem 1. 4’ ü ispatlamada aşağıdaki üç lemma gerekli olacaktır.

*Lemma 3.2.1*: $p\in\mathbb{N}, p\geq 2$ ve $f:[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[-1,1]\times[-1,1]$ üzerinde kesin konveks ise o zaman $S_{n,2p}(f)(x,y)$, (3) ve (4) ile verilmek üzere $\forall(x,y)\in V(0,0)-\{(0,0)\}$ için

$$\frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x^2}>0, \frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial y^2}>0$$

olacak şekilde $(0,0)$ ’ ın bir $V(0,0)$ komşuluğu vardır.

*İspat*: $k\neq 0$ için

$$E(x,y)=\frac{[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]^{-p}}{1+(x^2+y^2)^p\sum\limits_{\substack{j=-n\\ j\neq 0}}^{n}[(x-x_j)^2+(y-y_j)^2]^{-p}}$$

şeklinde gösterilirse

$$\begin{aligned}P(x,y)=(x^2+y^2)^p &=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}x^{2i}y^{2p-2i}\\ &=y^{2p}+\binom{p}{1}x^2y^{2p-2}+\binom{p}{2}x^4y^{2p-4}+\binom{p}{3}x^6y^{2p-6}+\ldots\\ &\quad+\binom{p}{p-2}x^{2p-4}y^4+\binom{p}{p-1}x^{2p-2}y^2+x^{2p}\end{aligned}$$

ve $E(x,y)$, $(0,0)$ ' da herhangi mertebeden kısmi türevlere sahip olmak üzere

$$s_{n,i}^{(2p)}(x,y) = P(x,y)\cdot E(x,y)$$

şeklinde elde edilir. $k \neq 0$ için

$$R_i(x,y) = \frac{\partial^{2p-2} s_{n,i}^{(2p)}(x,y)}{\partial x^{2p-2}}$$

biçiminde gösterilsin.

Öncelikle (5)' e göre

$$\frac{\partial^2 R_i(0,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^{2p} s_{n,i}^{(2p)}(0,0)}{\partial x^{2p}} = \frac{(2p)!}{(x_i^2 + y_i^2)^p} > 0$$

bulunur. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 R_i(0,0)}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\sum_{i=0}^{2p-2}\binom{2p-2}{i}\frac{\partial^i P(x,y)}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial^{2p-2-i}E(x,y)}{\partial x^{2p-2-i}}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left[\sum_{i=0}^{2p-2}\binom{2p-2}{i}\frac{\partial^{i+1} P(x,y)}{\partial x^i \partial y}\cdot\frac{\partial^{2p-2-i}E(x,y)}{\partial x^{2p-2-i}}\right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=0}^{2p-2}\binom{2p-2}{i}\frac{\partial^i P(x,y)}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial^{2p-1-i}E(x,y)}{\partial x^{2p-2-i}\partial y}\right] \\
&= \sum_{i=0}^{2p-2}\binom{2p-2}{i}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial^i P(x,y)}{\partial x^i}\right]\cdot\frac{\partial^{2p-2-i}E(x,y)}{\partial x^{2p-2-i}} \\
&\quad + 2\sum_{i=0}^{2p-2}\binom{2p-2}{i}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^i P(x,y)}{\partial x^i}\right]\cdot\frac{\partial^{2p-1-i}E(x,y)}{\partial x^{2p-2-i}\partial y} \\
&\quad + \sum_{i=0}^{2p-2}\binom{2p-2}{i}\frac{\partial^i P(x,y)}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial^{2p+i}E(x,y)}{\partial x^{2p-2-i}\partial y^2}
\end{aligned}$$

olur.

Bu toplamda $x = y = 0$ alınırsa o zaman $x$ veya(ve) $y$ ' yi içeren bütün terimler sıfır olur, böylece $P(x,y)$ polinom formu hesaba katılırsa

$$\frac{\partial^2 R_i(0,0)}{\partial y^2} = 2p\binom{2p-2}{2p-2}(2p-2)!\frac{1}{(x_i^2+y_i^2)^p} = \frac{2p(2p-2)!}{(x_i^2+y_i^2)^p} > 0$$

elde edilir. $p=1$ durumunda $S_{n,2p}(f)(x,y)$ için de yukarıdaki ifade sağlanır ve kolaylıkla

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^{2p-2}S_{n,2p}(f)(0,0)}{\partial x^{2p-2}}\right]=\frac{\partial^{2p}S_{n,2p}(f)(0,0)}{\partial x^{2p}}>0\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial^{2p-2}S_{n,2p}(f)(0,0)}{\partial x^{2p-2}}\right]=\frac{\partial^{2p}S_{n,2p}(f)(0,0)}{\partial x^{2p-2}\partial y^2}>0$$

olduğu elde edilir. Böylece $(0,0)$ ' ın bir $V_1(0,0)$ komşuluğu vardır, öyle ki tüm $(x,y)\in V_1(0,0)$ için

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^{2p-2}S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x^{2p-2}}\right]>0,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{\partial^{2p-2}S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x^{2p-2}}\right]>0$$

elde edilir. Diğer bir deyişle yukarıdaki sebepten dolayı

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[\frac{\partial^{2p-2}s_{n,k}^{(2p)}(0,0)}{\partial x^{2p-2}}\right]=\frac{\partial^{2p}s_{n,k}^{(2p)}(0,0)}{\partial x^{2p-1}\partial y}=0$$

bulunur.

Birinci sonuç olarak,

$$\frac{\partial^{2p-2}S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x^{2p-2}}$$

$(0,0)$ ' ın bir $V_1(0,0)$ komşuluğunda kesin konvekstir ve

$$\frac{\partial^{2p-2}S_{n,2p}(f)(0,0)}{\partial x^{2p-2}}=\frac{\partial^{2p-1}S_{n,2p}(f)(0,0)}{\partial x^{2p-1}}=\frac{\partial^{2p-1}S_{n,2p}(f)(0,0)}{\partial x^{2p-2}\partial y}=0$$

olduğundan $\forall(x,y)\in V_1(0,0)-\{(0,0)\}$ için

$$\frac{\partial^{2p-2}S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x^{2p-2}}>0$$

olur. Simetriklikten dolayı $\forall(x,y)\in V_2(0,0)$ için

$$\frac{\partial^{2p-2} S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial y^{2p-2}} > 0$$

elde edilir. Şimdi $p = 2$ ise o zaman lemmadan istenilen görülür.

$p > 2$ ise o zaman yukarıdakilere benzer sebeplerden ötürü

$$\frac{\partial^{2p-4} S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x^{2p-4}} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^{2p-4} S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial y^{2p-4}}$$

nın (0,0) noktasının bir $U(0,0)$ komşuluğu üzerinde kesin konveks olduğu elde edilir ve bir sonuç olarak; $\forall (x,y) \in U(0,0) - \{(0,0)\}$ için

$$\frac{\partial^{2p-4} S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x^{2p-4}} > 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^{2p-4} S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial y^{2p-4}} > 0$$

bulunur.

$\forall (x,y) \in V(0,0) - \{(0,0)\}$ için

$$\frac{\partial^{2} S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x^{2}} > 0, \frac{\partial^{2} S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial y^{2}} > 0$$

ifadelerine varıncaya kadar bu yol sürdürülebilir.

*Lemma 3.2.2*: $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ olsun. Bu durumda

$$\frac{\partial^{r} S_{n,2p}(f)(0,0)}{\partial x^{i} \partial y^{j}} \begin{cases} = 0, & r < 2p \quad veya \quad r > 2p \quad ise \\ = 0, & r = 2p \quad ve \quad i,j \quad nin \;\; her\, ikisi \;\; tek \;\; ise \\ > 0, & r = 2p \quad ve \quad i,j \quad nin \;\; her\, ikisi \;\; çift \;\; ise \end{cases}$$

dir.

*İspat*: $P(x,y) = (x^2 + y^2)^p$ olsun. Kolaylıkla kontrol edilebilir ki;

$$\frac{\partial^{r} P(0,0)}{\partial x^{i} \partial y^{j}} \begin{cases} = 0, & r < 2p \quad veya \quad r > 2p \quad ise \\ = 0, & r = 2p \quad ve \quad i,j \quad nin \;\; her\, ikisi \;\; tek \;\; ise \\ > 0, & r = 2p \quad ve \quad i,j \quad nin \;\; her\, ikisi \;\; çift \;\; ise \end{cases}$$

dır. $E(x,y)$, Lemma 1. 5' in ispatında verildiği gibi olmak üzere $\forall k \neq 0$ için

$$S_{n,k}^{(2p)}(x,y) = P(x,y).E(x,y)$$

dir ve $\dfrac{\partial^r P(0,0)}{\partial x^i \partial y^j}$ ' nin yukarıdaki özellikleri ile Lemma 1. 5' deki ispat metodu birleştirildiğinde

$$\frac{\partial^r S_{n,k}^{(2p)}(x,y)}{\partial x^i \partial y^j} = \frac{\partial^i}{\partial x^i}\left[\sum_{q=0}^{j}\binom{j}{q}\frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^{j-p}E(x,y)}{\partial y^{j-q}}\right]$$

elde edilir.

$$\frac{\partial^r S_{n,p}(f)(0,0)}{\partial x^i \partial y^j} = \sum_{k=-n}^{n}\frac{\partial^r S_{n,k}^{(2p)}(0,0)}{\partial x^i \partial y^j}\cdot f(x_k,y_k)$$

olması da lemmayı ispatlar.

*Lemma 3.2.3*: $p \in \mathbb{N}, p \geq 2$ olsun. $V(0,0)$ , (0,0)' ın bir komşuluğu ( *f*, *n* ve *p* ye bağlı ) olmak üzere bütün $\forall (x,y) \in V(0,0) - \{(0,0)\}$ için

$$\frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

dir.

*İspat*: $H(x,y)$' yi

$$H(x,y) = \frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 S_{n,2p}(f)(x,y)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

şeklinde gösterelim. Teorem 2. 3' ün ispatından sonra ki uyarıya göre $\forall (x,y) \in V(0,0) - (0,0)$ için

$$\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x^2} > 0, \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial y^2} > 0 \quad \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0$$

olduğunu ve

$$\frac{\partial H(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial H(0,0)}{\partial y}=0 \text{ (Lemma 1.6 ya göre } H(0,0)=0 \text{ olduğundan)}$$

olduğunu ispatlamalıyız.

Lemma 1. 6' ya göre yalnızca $r=2p$ ve i, $j$ ' nin her ikisinin çift olması durumunda

$$\frac{\partial^r H(0,0)}{\partial x^i \partial y^j}>0$$

elde edilir ve $(0,0)$ ' da $H$ ' nin diğer kısmi türevleri 0 (sıfır) olur. Böylece

$$\frac{\partial^{2p} H(0,0)}{\partial x^{2p}}>0, \frac{\partial^{2p} H(0,0)}{\partial x^{2p-2}\partial y^2}>0 \quad \frac{\partial^{2p} H(0,0)}{\partial x^{2p-1}\partial y}=0$$

elde edilir, yani

$$\frac{\partial^{2p-2} H(x,y)}{\partial x^{2p-2}}$$

sıfırın bir komşuluğunda kesin konvekstir.

$$\frac{\partial^{2p-2} H(0,0)}{\partial x^{2p-2}}=0 \text{ ve } \frac{\partial^{2p-1} H(0,0)}{\partial x^{2p-1}}=\frac{\partial^{2p-1} H(0,0)}{\partial x^{2p-2}\partial y}=0$$

olduğundan $(0,0)$ ' ın bir global minimum nokta olduğu sonucuna varılır. Böylece $\forall (x,y)\in V_1(0,0)-\{(0,0)\}$ için

$$\frac{\partial^{2p-2} H(x,y)}{\partial x^{2p-2}}>0$$

dır.

Simetriklikten $\forall (x,y)\in V_2(0,0)$ için

$$\frac{\partial^{2p-2} H(x,y)}{\partial y^{2p-2}}>0$$

elde edilir.

Benzer şekilde, Lemma 1. 7’ ye göre $\forall(x,y)\in V_3(0,0)-\{(0,0)\}$ için

$$\frac{\partial^{2p-2}H(x,y)}{\partial x^{2p-4}\partial y^2}>0$$

elde edilir ve sonuç olarak $\forall(x,y)\in V_3(0,0)-\{(0,0)\}$ için

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^{2p-4}H(x,y)}{\partial x^{2p-4}}\right)>0,\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^{2p-4}H(x,y)}{\partial x^{2p-4}}\right)>0$$

dır.

$H_1(x,y)$,

$$H_1(x,y)=\frac{\partial^{2p-2}H(x,y)}{\partial x^{2p-2}}.\frac{\partial^{2p-2}H(x,y)}{\partial y^{2p-4}\partial y^2}-\left(\frac{\partial^{2p-2}H(x,y)}{\partial x^{2p-3}\partial y}\right)^2$$

şeklinde gösterilsin. Lemma 1. 7’ ye göre

$$\frac{\partial^2 H_1(0,0)}{\partial x^2}>0,\frac{\partial^2 H_1(0,0)}{\partial y^2}>0\ ,\frac{\partial^2 H_1(0,0)}{\partial x\partial y}=0$$

elde edilir. Yani $H_1(x,y)$, (0,0)’ ın bir komşuluğunda kesin konvekstir. Fakat

$$H_1(0,0)=0 \text{ ve } \frac{\partial H_1(0,0)}{\partial x}=\frac{\partial H_1(0,0)}{\partial y}=0$$

olduğundan bu , $\forall(x,y)\in V_4(0,0)-\{(0,0)\}$ için $H_1(x,y)>0$ olmasını verir.

Bir sonuç olarak,

$$\frac{\partial^{2p-4}H(x,y)}{\partial x^{2p-4}}$$

sıfırın bir komşuluğunda kesin konvekstir ve yukarıdaki sebepten $\forall(x,y)\in V_5(0,0)\setminus\{(0,0)\}$ için

$$\frac{\partial^{2p-4}H(x,y)}{\partial x^{2p-4}}>0$$

elde edilir.

Bu işleme devam edilirse sonuçta $\forall(x,y)\in V_7(0,0)-\{(0,0)\}$ için

$$\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x^2}>0$$

ifadesine ulaşılacak ve $\forall(x,y)\in V_8(0,0)-\{(0,0)\}$ için

$$\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial y^2}>0$$

daki simetriklikten $\forall(x,y)\in V_9(0,0)-\{(0,0)\}$ için

$$\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x^2}.\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x\partial y}\right)^2>0$$

elde edilir ki bu da lemmayı ispatlar.

*Sonuç Teoremi 3.2.1*: $S_{n,2p}(f)(x,y), p\in\mathbb{N}, p\geq 2$ için (3) ve (4) teki şekliyle verilsin. $f:[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[-1,1]\times[-1,1]$ üzerinde kesin konveks ise o zaman $(0,0)$' ın bir $V(0,0)$ ( $f$ , $n$ ve $p$ ye bağlı ) komşuluğu vardır öyle ki $S_{n,2p}(f)(x,y), V(0,0)$ içinde kesin konvekstir.

*İspat*: Lemma 1. 5 ve Lemma 1. 7 den hemen görülür.

*Uyarılar 3.2.3*:

*1*) Sonuç Teoremi 1.5' in ispatı, aslında tek değişkenli durum ile ( [4]' de Teorem 3.3' ün ispatına bakınız) aynıdır.

*2*) Sonuçlar, $n>2$ olmak üzere *n* değişkene genişletilebilir.

### 3. 3. İki Değişkenli Hermite-Fejer Polinomları İle Kısmi Şekil Koruyan Yaklaşım

Interpolation ( iç değerlendirme) koşullarından dolayı, interpolating operatörlerin bir tek değişkenli $f$ fonksiyonunun şeklini korumadığı ve interpolation noktalarının aralığın tamamı tarafından içerildiği açıktır. Çok yıllar önce Popoviciu [1, 3] niteleyici tipte olan aşağıdaki sonucu ispatladı. Jakobi knots ( noktalarına) dayanan tek değişkenli Hermite-Fejer polinomlarının sınıfı için $f$ ' nin monoton olduğu noktanın civarındaki bazı noktaların varlığı ( $f$ fonksiyonundan bağımsız) korunur.

Bu şekildeki fikirler sürerken son [4, 5] çalışmada öncelikle Popoviciu ' nun sonuçları için niteleyici versiyonlar elde edildi. Daha sonra buna ilaveten $f$ ' nin konvekslik durumu göz önüne alındı ve son olarak, bütün problemler Shepard operatörler, Grünwald interpolation polinomları ve Kryloff-Stayermann interpolation polinomları için incelendi.

Nitel tipteki sonuçların ispatı için yukarıda bahsedilen çalışmalarda kullanılan sonuç, aşağıdaki temel lemmada verilmiştir.

*Lemma 3.3.1*: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $a\le x_1\le ...\le x_n\le b$ ve $h_i\in C^1[a,b]$ ve $\forall x\in[a,b]$ için

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(x)=1$$

olmak üzere

$$F_n(f)(x)=\sum_{i=1}^{n} h_i(x)f(x_i)$$

olsun.

($i$)

$$F_n^{'}(f)(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(-\sum_{j=1}^{i}h_j^{'}(x)\right)[f(x_{i+1})-f(x_i)]$$

dir.

$(ii)$ $h_1^{'}(x_0)<0, h_n^{'}(x_0)>0$ olacak şekilde $x_0\in(a,b)$ var ve $h_1^{'}(x_0), h_2^{'}(x_0),..., h_n^{'}(x_0)$ dizisi bir tek işaret değişimine sahip ise o zaman tüm $i=1,2,...,n-1$ için

$$-\sum_{j=0}^{i}h_j^{'}(x_0)<0$$

dır ve sonuç olarak (i) ' den $f$ ' nin monoton olduğu $x_0$ ' ın bir $V(x_0)$ komşuluğu vardır ki; bu komşulukta monotonluk korunur.

Bu çalışmada iki değişkenli Hermite-Fejer polinomları için qualitative ve quantitative sonuçlar elde edildi.

### 3. 4. İki Değişkenli Hermite-Fejer Polinomları

Eğer $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ ve $-1<x_{n,n}<x_{n-1,n}<...<x_{1,n}<1$, $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ Jakobi polinomlarının kökleri ise o zaman bu polinom

$$\ell_{i,n}(x)=\frac{\ell_n(x)}{[(x-x_{i,n})\ell_n^{'}(x_{i,n})]}, \ell_n(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_{i,n})$$

$$h_{i,n}(x)=\ell_{i,n}^2(x)\left[1-\frac{\ell_n^{''}(x_{i,n})}{\ell_n^{'}(x_{i,n})}(x-x_{i,n})\right]$$

olmak üzere

$$F_n(g)(x)=\sum_{i=1}^{n}h_{i,n}(x)g(x_{i,n})$$

ile verilen yukarıdaki köklere dayanan tek değişkenli Hermite-Fejer polinomları olarak bilinir.

Tüm $x \in [-1,1]$ için

$$\sum_{i=1}^{n} h_{i,n}(x) = 1$$

elde edilir.

$f : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}$ ise o zaman [6]' ya göre iki değişkenli Hermite-Fejer polinomları $i = 1,2,...,n_1$ için $h_{i,n_1}^{(1)}(x), x_{i,n_1}^{(1)}$ ve $j = 1,2,...,n_2$ için $h_{j,n_2}^{(2)}(y), x_{j,n_2}^{(2)}, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ yukarıdaki tek değişkenlide olduğu gibi tanımlı olmak üzere

$$F_{n_1,n_2}(f)(x,y) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} h_{i,n_1}^{(1)}(x) h_{j,n_2}^{(2)}(y) f(x_{i,n_1}^{(1)}, x_{j,n_2}^{(2)}) \tag{3.4.1}$$

ile tanımlanır.

Kolaylıkla gösterilebilir ki $\forall i = 1,2,...,n_1$, $j = 1,2,...,n_2$ için

$$F_{n_1,n_2}(f)(x_{i,n_1}^{(1)}, x_{j,n_2}^{(2)}) = f(x_{i,n_1}^{(1)}, x_{j,n_2}^{(2)})$$

dır. Bu kısmın kullanışlı bir sonucu aşağıda verilmiştir.

*Teorem 3.4.1*: Yukarıda verilen notasyonlara göre

$$\frac{\partial^2 F_{n_1,n_2}(f)(x,y)}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^{n_1} \left[ \left( \sum_{p=1}^{i} h_{p,n_1}^{(1)'}(x) \right) \cdot \left\{ \sum_{j=1}^{n_2-1} \left( \sum_{q=1}^{i} h_{q,n_2}^{(2)'}(y) \right) \right. \right.$$
$$\left. \left. \times \left( f(x_{i,n_1}^{(1)}, x_{j,n_2}^{(2)}) - f(x_{i,n_1}^{(1)}, x_{j+1,n_2}^{(2)}) - f(x_{i+1,n_1}^{(1)}, x_{j,n_2}^{(2)}) + f(x_{i+1,n_1}^{(1)}, x_{j+1,n_2}^{(2)}) \right) \right\} \right]$$

elde edilir.

*İspat*:

$$\frac{\partial F_{n_1,n_2}(f)(x,y)}{\partial x} = \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} h_{i,n_1}^{(1)'}(x) h_{j,n_2}^{(2)'}(y) f(x_{i,n_1}^{(1)}, x_{j,n_2}^{(2)})$$

$$= \sum_{j=1}^{n_2}\left(\sum_{i=1}^{n_1} h_{i,n_1}^{(1)'}(x) f(x_{i,n_1}, x_{j,n_2})\right) h_{j,n_2}^{(2)}(y)$$

$$= \sum_{j=1}^{n_2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}\left(\sum_{p=1}^{i} h_{p,n_1}^{(1)'}(x)\right)\left(f(x_{i,n_1}^{(1)}, x_{j,n_2}^{(2)}) - f(x_{i+1,n_1}^{(1)}, x_{j,n_2}^{(2)})\right)\right] h_{j,n_2}^{(2)}(y)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1-1}\left[\left(\sum_{p=1}^{i} h_{p,n_1}^{(1)'}(x)\right)\cdot\left\{\sum_{j=1}^{n_2} h_{j,n_2}^{(2)}(y) \times\left(f(x_{i,n_1}^{(1)}, x_{j,n_2}^{(2)}) - f(x_{i+1,n_1}^{(1)}, x_{j,n_2}^{(2)})\right)\right\}\right]$$

ifadesini göz önüne alalım. Buradan hemen

$$\frac{\partial^2 F_{n_1,n_2}(f)(x,y)}{\partial x \partial y} = \sum_{i=1}^{n_1-1}\left[\left(\sum_{p=1}^{i} h_{p,n_1}^{(1)'}(x)\right)\cdot\left\{\sum_{j=1}^{n_2} h_{j,n_2}^{(2)}(y) \times\left(f(x_{i,n_1}^{(1)}, x_{j,n_2}^{(2)}) - f(x_{i+1,n_1}^{(1)}, x_{j,n_2}^{(2)})\right)\right\}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n_1-1}\left[\left(\sum_{p=1}^{i} h_{p,n_1}^{(1)'}(x)\right)\cdot\left\{\sum_{j=1}^{n_2-1}\left(\sum_{q=1}^{j} h_{q,n_2}^{(2)'}(y)\right) \times\left(f(x_{i,n_1}^{(1)}, x_{j,n_2}^{(2)}) - f(x_{i,n_1}^{(1)}, x_{j+1,n_2}^{(2)}) - f(x_{i+1,n_1}^{(1)}, x_{j,n_2}^{(2)}) + f(x_{i+1,n_1}^{(1)}, x_{j+1,n_2}^{(2)})\right)\right\}\right]$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

İleride kullanılacak bir tanım verelim.

*Tanım 3.4.1*: Eğer tüm $\alpha,\beta \geq 0$ ve $(x+\alpha, y+\beta) \in [a,b]\times[c,d]$ olacak şekildeki $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ için

$$\Delta_2(f)(x,y;\alpha,\beta) = f(x+\alpha, y+\beta) - f(x, y+\beta) - f(x+\alpha, y) + f(x,y) \geq 0$$

ise $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna $[a,b]\times[c,d]$ üzerinde iki boyutsal ( veya hiperbolik üstten monoton ) denir.

Eğer tüm $\alpha,\beta \geq 0$ ve $(x+\alpha, y+\beta) \in [a,b]\times[c,d]$ olacak şekildeki $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ için

$$\Delta_2(f)(x,y;\alpha,\beta) = f(x+\alpha, y+\beta) - f(x, y+\beta) - f(x+\alpha, y) + f(x,y) \leq 0$$

ise $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna $[a,b]\times[c,d]$ üzerinde iki boyutsal ( veya hiperbolik alttan monoton ) denir.

*Uyarı 3.4.1*: Eğer tüm $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ için $f\in C^2([a,b]\times[c,d])$ ve

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\geq 0$$

ise o zaman $f$, $[a,b]\times[c,d]$ üzerinde iki boyutsal üstten monotondur.

*Sonuç Teoremi 3.4.2*: $n_1=2p_1, n_2=2p_2$ çift sayılar olsun ve (1) ile verilen iki değişkenli Hermite-Fejer polinomlarını göz önüne alalım. Bu durumda $\lambda_1>-1$ ile $n_1$- dereceli $\lambda_1$ ultra küresel polinomlarının $i=1,2,...,n_1$ için $x^{(1)}_{i,n_1}$ köklerine ( yani, $-1<\alpha_1,\beta_1\leq 1, \alpha_1=\beta_1$, $\lambda_1=\alpha_1+\beta_1+1$ ile $J^{(\alpha,\beta)}_{n_1}$ Jakobi polinomlarına ) ve $\lambda_2>-1$ ile $n_2$- dereceli $\lambda_2$ ultra küresel polinomlarının $j=1,2,...,n_2$ için $x^{(2)}_{j,n_2}$ köklerine ( yani, $-1<\alpha_2,\beta_2\leq 1, \alpha_2=\beta_2, \lambda_2=\alpha_2+\beta_2+1$ ile $J^{(\alpha_2,\beta_2)}_{n_2}$ Jakobi polinomlarına ) dayanır. $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$, $[-1,1]\times[-1,1]$ üzerinde iki boyutsal monoton iken $F_{n_1,n_2}(f)(x,y)$, $\ell(-c/n_1^4, c/n_1^4)\times(-c/n_2^4, c/n_2^4)$ üzerinde iki boyutsal monoton ( aynı monotonluktan) olacak şekilde bir $c>0$ ( $f$ ve $n_1,n_2$' den bağımsız ) sabiti vardır.

*İspat*: [5]' deki Teorem 2.1' in ispatına göre ( oradaki (2) bağıntısına ve son bağıntıya bakınız ), $\forall i=1,2,...,n_1-1$, $\forall j=1,2,...,n_2-1$ ve $\forall x\in(-c/n_1^4, c/n_1^4)$, $\forall y\in(-c/n_2^4, c/n_2^4)$ için

$$\sum_{p=1}^{i} h^{(1)'}_{p,n_1}(x)>0,\ \sum_{q=1}^{j} h^{(2)'}_{q,n_2}(y)>0$$

elde edilir. Teorem 2.1.1' deki hesaplamalar göz önüne alındığında $\forall (x,y) \in (-c/n_1^4, c/n_1^4) \times (-c/n_2^4, c/n_2^4)$ için

$$\frac{\partial^2 F_{n_1,n_2}(f)(x,y)}{\partial x \partial y} \geq 0$$

elde edilir. Bu da Tanım 2.1.1' den sonraki uyarıya göre ispat tamamlanır.

*Sonuç Teoremi 3.4.3*: $i = 1,2$ için $\alpha_i, \beta_i \in (-1,0]$ ile sırasıyla $n_1$ ve $n_2$ dereceli $J_{n_1}^{(\alpha_1,\beta_1)}, J_{n_2}^{(\alpha_2,\beta_2)}$ Jacobi polinomlarının köklerine daylı ve (1) ile verilen $F_{n_1,n_2}(f)(x,y)$ ifadesini göz önüne alalım. Eğer $\xi, \ell_{n_1}^{(1)'}(x)$ polinomunun herhangi bir kökü ve $\eta, \ell_{n_2}^{(2)'}(y)$ polinomunun herhangi bir kökü ise o zaman

$$c_\xi = \frac{c}{(1-\xi^2)^{5/2+\delta_1}},\ c_\eta = \frac{c}{(1-\eta^2)^{5/2+\delta_2}},\ \gamma_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}, i = 1,2$$

ve

$$\delta_1 = \begin{cases} \alpha_1, & 0 \leq \xi < 1 \quad ise \\ \beta_1, & -1 < \xi \leq 0 \quad ise \end{cases}$$

$$\delta_2 = \begin{cases} \alpha_2, & 0 \leq \eta < 1 \quad ise \\ \beta_2, & -1 < \eta \leq 0 \quad ise \end{cases}$$

olmak üzere $f$, $[-1,1] \times [-1,1]$ üzerinde iki boyutsal monoton iken $F_{n_1,n_2}(f)(x,y)$

$$\left(\xi - \frac{c_\xi}{n_1^{7+2\gamma_1}}, \xi + \frac{c_\xi}{n_1^{7+2\gamma_1}}\right) \times \left(\eta - \frac{c_\eta}{n_2^{7+2\gamma_2}}, \eta + \frac{c_\eta}{n_2^{7+2\gamma_2}}\right) \subset (-1,1) \times (-1,1)$$

üzerinde iki boyutsal monoton ( aynı monotonluktan ) olacak şekilde bir $c > 0$ ( $n_1, n_2$ ve $f$ ' den bağımsız ) sabiti vardır ( Burada

$$\ell_{n_1}^{(1)}(x) = \prod_{i=1}^{n_1} (x - x_{i,n_1}^{(1)})$$

$$\ell_{n_2}^{(2)}(y) = \prod_{j=1}^{n_2} (y - x_{j,n_2}^{(2)})$$

dir ).

*İspat*: Yukarıdaki Teorem 1.1.1 ve Teorem 2.2 ( [5] )' in sonucu olarak ispat hemen görülür.

*Uyarılar 3.4.2*:

*1*) $\ell_{n_1}^{(1)'}$ ve $\ell_{n_2}^{(2)'}$ kesinlikle sırası ile $(-1,1)$ içinde $n_1 - 1$ ve $n_2 - 1$ köklerine sahiptir. Buradan hemen görülür ki sonuç Teoremi 2.4 de $(\xi, \eta)$ yi noktalayan $(n_1 - 1)(n_2 - 1)$ ' in bir koordinat sistemi vardır.

*2*) Uyarı 1 den , [5] deki Teorem 2.2 den hemen görülür ki, eğer $\xi$ ve $\eta$, ultra küresel durumda uç noktaların yakınındalar ise ( örneğin $\alpha_i = \beta_i \in (-1,0), i = 1,2$ ) o zaman iki boyutsal monotonluğu koruyan mümkün olan en iyi iki boyutsal aralık

$$\left(\xi - c/n_1^2, \xi + c/n_1^2\right) \times \left(\eta - c/n_2^2, \eta + c/n_2^2\right)$$

dir.

Şimdi [5] in tek değişkenli durumundan konvekslik problemini genişleteceğiz.

*Tanım 3.4.2*:

$$\Delta_{h_2}^{2,x} f(\alpha, \beta) = f(\alpha + h_2, \beta) - 2f(\alpha, \beta) + f(\alpha - h_2, \beta)$$

ve

$$\Delta_{h1}^{2,y} f(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta + h_1) - 2f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \beta - h_1)$$

ve $a \pm h_2, b \pm h_1 \in [-1,1]$ olmak üzere tüm $h_1, h_2 > 0$, $(a,b) \in [-1,1] \times [-1,1]$ için

$$\Delta_{h_1}^{2,y}\left[\Delta_{h_2}^{2,x} f(a,b)\right] > 0$$

ise $f:[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna $[-1,1]\times[-1,1]$ üzerinde strictly ( kesin ) double konveks denir.

*Uyarı 3.4.3*: Ortalama değer teoremine göre eğer tüm $(x,y)\in[-1,1]^2$ için

$$\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(x,y) > 0$$

ise $f$, $[-1,1]^2$ üzerinde strictly ( kesin ) double konvekstir.

$n_1, n_2 \geq 3$ tek olsun ve sırası ile $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ için, $n_1$- dereceli $P_{n_1}^{(\lambda_1)}$, $\lambda_1$ ultra küresel polinomları ve $n_2$- dereceli $P_{n_2}^{(\lambda_2)}$, $\lambda_2$ ultra küresel polinomlarının $i=1,2,...,n_1$ için $x_{i,n_1}^{(1)}$ ve $j=1,2,...,n_2$ için $x_{j,n_2}^{(2)}$ köklerine dayalı ve (1) ile verilen $F_{n_1,n_2}(f)(x,y)$ Hermite- Fejer polinomlarını ve

$$\lambda_{i,n_1}^{(1)} := 2^{2-\lambda_1}\pi\left[\Gamma(\frac{\lambda_1}{2})\right]^{-2}\frac{\Gamma(n_1+\lambda_1)}{\Gamma(n_1+1)}\left[1-(x_{i,n_1}^{(1)})^2\right]^{-1}\times\left[p_{n_1}^{(\lambda_1)'}(x_{i,n_1}^{(1)})\right]^{-2}, i=\overline{1,n_1}$$

$$\lambda_{j,n_2}^{(2)} := 2^{2-\lambda_2}\pi\left[\Gamma(\frac{\lambda_2}{2})\right]^{-2}\frac{\Gamma(n_2+\lambda_2)}{\Gamma(n_2+1)}\left[1-(x_{j,n_2}^{(2)})^2\right]^{-1}\times\left[p_{n_2}^{(\lambda_2)'}(x_{j,n_2}^{(2)})\right]^{-2}, j=\overline{1,n_2}$$

Gauss- Jakobi dördününün Cotes-Christoffel sayılarını göz önüne alalım.

*Teorem 3.4.4*: Eğer $f\in C\big([-1,1]\times[-1,1]\big)$ fonksiyonu

$$\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\lambda_{i,n_1}^{(1)}\lambda_{j,n_2}^{(2)}\Delta_{x_{j,n_2}^{(2)}}^{2,y}\frac{\left[\Delta_{x_{i,n_1}^{(1)}}^{2,x}f(0,0)\right]}{(x_{i,n_1}^{(1)}x_{j,n_2}^{(2)})^2}>0 \qquad (3.4.2)$$

koşulunu sağlıyorsa o zaman

$$\left|d_{n_1,n_2}\right|\geq c_{f,\lambda_1,\lambda_2}\frac{n_1 n_2\sum_{i=1}^{(n_1-1)/2}\sum_{j=1}^{(n_2-1)/2}\lambda_{i,n_1}^{(1)}\lambda_{j,n_2}^{(2)}\Delta_{x_{j,n_2}^{(2)}}^{2,y}\left[\Delta_{x_{i,n_1}^{(1)}}^{2,x}f(0,0)\right]/\left(x_{i,n_1}^{(1)}x_{j,n_2}^{(2)}\right)^2}{(n_1+n_2)^5}$$

olmak üzere $F_{n_1,n_2}(f)(x,y)$ polinomu

$$V(0,0)=\left\{(x,y): x^2+y^2<d^2_{n_1,n_2}\right\}$$

kümesi içinde kesin double konvekstir (Burada $c_{f,\lambda_1,\lambda_2}>0, n_1$ ve $n_2$' den bağımsızdır).

*İspat*:

$$\frac{\partial^4 F_{n_1,n_2}(f)(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2}=\sum_{j=1}^{n_2} h^{(2)'}_{j,n_2}(y)\left(\sum_{i=1}^{n_1} h^{(1)''}_{i,n_1}(x) f(x^{(1)}_{i,n_1}, x^{(2)}_{j,n_2})\right)$$

eşitliği ve [5]' deki Teorem 2. 3' ün ispatındaki sebepler göz önüne alındığında

$$\frac{\partial^4 F_{n_1,n_2}(f)(0,0)}{\partial x^2 \partial y^2}=\sum_{j=1}^{n_2} h^{(2)'}_{j,n_2}(0)\left(\sum_{i=1}^{(n_1-1)/2} h^{(1)''}_{i,n_1}(0)\Delta^{2,x}_{x^{(1)}_{i,n_1}} f(0, x^{(2)}_{j,n_2})\right)$$

elde edilir.

$$G(y)=\sum_{i=1}^{(n_1-1)/2} h^{(1)''}_{i,n_1}(0)\Delta^{2,x}_{x^{(1)}_{i,n_1}} f(0,y)$$

şeklinde gösterilirse eşitlik

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 F_{n_1,n_2}(f)(0,0)}{\partial x^2 \partial y^2}&=\sum_{j=1}^{n_2} h^{(2)''}_{j,n_2}(0) G(x^{(2)}_{j,n_2})\\ &=\sum_{j=1}^{(n_2-1)/2} h^{(2)''}_{j,n_2}(0)\Delta^{2,y}_{x^{(2)}_{j,n_2}} G(0)\\ &=\sum_{j=1}^{(n_2-1)/2}\sum_{i=1}^{(n_1-1)/2} h^{(2)''}_{j,n_2}(0) h^{(1)''}_{i,n_1}(0)\Delta^{2,y}_{x^{(2)}_{j,n_2}}\left[\Delta^{2,x}_{x^{(1)}_{i,n_1}} f(0,0)\right]\end{aligned}$$

halini alır. Bu sebeple [5]' deki (7) bağıntısı ve hipotezlerden dolayı

$$\frac{\partial^4 F_{n_1,n_2} f(0,0)}{\partial x^2 \partial y^2}\geq c_3\lambda_1\lambda_2 n_1 n_2 \sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2}\lambda^{(1)}_{i,n_1}\lambda^{(2)}_{j,n_2}\Delta^{2,y}_{x^{(2)}_{j,n_2}}\frac{\left[\Delta^{2,x}_{x^{(1)}_{i,n_1}} f(0,0)\right]}{\left(x^{(1)}_{i,n_1} x^{(2)}_{j,n_2}\right)^2}>0 \qquad (3.4.3)$$

bulunur. Böylece $F_{n_1,n_2}(f)(x,y)$, $(0,0)$' ın bir komşuluğu içinde kesin double konveks olur. $(\alpha_{n_1,n_2}, \beta_{n_1,n_2})$

$$\frac{\partial^4 F_{n_1,n_2}(f)}{\partial x^2 \partial y^2}$$

nin tüm kökleri için minimum olan

$$d_{n_1,n_2} = \sqrt{\alpha_{n_1,n_2}^2 + \beta_{n_1,n_2}^2}$$

uzaklığı anlamında $(0,0)$ için

$$\frac{\partial^4 F_{n_1,n_2}(f)}{\partial x^2 \partial y^2}$$

nın en yakın kökü olsun. Bu durumda tüm

$$(x,y) \in V(0,0) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < d_{n_1,n_2} \right\}$$

için

$$\frac{\partial^4 F_{n_1,n_2}(f)(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} > 0$$

elde edilir. İki değişkenli fonksiyonlar için ortalama değer teoremine göre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^4 F_{n_1,n_2}(f)(0,0)}{\partial x^2 \partial y^2} &= \left| \frac{\partial^4 F_{n_1,n_2}(f)(0,0)}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{\partial^4 F_{n_1,n_2}(f)(\alpha_{n_1,n_2}, \beta_{n_1,n_2})}{\partial x^2 \partial y^2} \right| \\
&\le \left| \alpha_{n_1,n_2} \right| \bullet \left| \frac{\partial^5 F_{n_1,n_2}(f)(\xi,\eta)}{\partial x^3 \partial y^2} \right| + \left| \beta_{n_1,n_2} \right| \bullet \left| \frac{\partial^5 F_{n_1,n_2}(f)(\xi,\eta)}{\partial x^2 \partial y^3} \right| \\
&\le \left| d_{n_1,n_2} \right| \bullet \left( \left| \frac{\partial^5 F_{n_1,n_2}(f)(\xi,\eta)}{\partial x^3 \partial y^2} \right| + \left| \frac{\partial^5 F_{n_1,n_2}(f)(\xi,\eta)}{\partial x^2 \partial y^3} \right| \right)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$derece(F_{n_1,n_2}(f)) \le 2n_1 - 1 + 2n_2 - 1 = 2n_1 + 2n_2 - 2$$

olduğundan

$$derece\left( \frac{\partial^5 F_{n_1,n_2}(f)}{\partial x^3 \partial y^2} \right) \le 2n_1 + n_2 - 7, derece\left( \frac{\partial^5 F_{n_1,n_2}(f)}{\partial x^2 \partial y^3} \right) \le 2n_1 + n_2 - 7$$

dir. [5]' deki Teorem 2. 3.' ün ispatında olduğu gibi

$$\left[-\frac{c_1}{n_1},\frac{c_1}{n_1}\right]\times\left[-\frac{c_2}{n_2},\frac{c_2}{n_2}\right]$$

den daha büyük olmayan bir konvekslik aralığı seçilebilir. Sonuç olarak

$$\left|d_{n_1,n_2}\right|\le\frac{c}{\min\{n_1,n_2\}}$$

olduğunu kabul edebiliriz.

[10]' daki Bernstein Teoremi' ne göre

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^5 F_{n_1,n_2}(f)(\xi,\eta)}{\partial x^3\partial y^2}\right| &\le c(2n_1+2n_2-7)(2n_1+2n_2-6)(2n_1+2n_2-5)\\ &\times(2n_1+2n_2-4)(2n_1+2n_2-3)\left\|F_{n_1,n_2}\right\|_{C([-1,1]\times[-1,1])}\\ &\le c(n_1+n_2)^5\left\|F_{n_1,n_2}\right\|_{C([-1,1]\times[-1,1])}\end{aligned}$$

elde edilir. Fakat [11]' den dolayı $\forall i=\overline{1,n_1},\forall j=\overline{1,n_2}$ , $\forall(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]$ için

$h^{(1)}_{i,n_1}(x)$ ve $h^{(2)}_{j,n_2}(y)$ asal interpolasyon polinomları pozitif tanımlı ve

$$M_f=\|f\|_{C([-1,1]\times[-1,1])}$$

şeklinde gösterilirse

$$\left|\frac{\partial^5 F_{n_1,n_2}(f)(\xi,\eta)}{\partial x^3\partial y^2}\right|\le c(n_1+n_2)^5 M_f,\left|\frac{\partial^5 F_{n_1,n_2}(f)(\xi,\eta)}{\partial x^2\partial y^3}\right|\le c(n_1+n_2)^5 M_f$$

olduğu kolaylıkla görülür, ve sonuç olarak; $c_f>0, n_1$ ve $n_2$' den bağımsız ( fakat $f$ 'ye bağlı ) olmak üzere

$$\frac{\partial^5 F_{n_1,n_2}(f)(\xi,\eta)}{\partial x^3\partial y^2}\le c_f(n_1+n_2)^5 d_{n_1,n_2}$$

bulunur.

*Uyarılar 3.4.4*:

*a*) Tek değişkenli durumda olduğu gibi $V(0,0)$ komşuluğu da $f$ ' ye bağlı kesin konveksliği korur.

*b*) İki değişkenli durumda $\left|d_{n_1,n_2}\right|$' nin tahmini, tek değişkenli durumdakinden daha zayıf gibi gözükebilir. Çünkü; henüz iki değişkenli polinomlar için bir Stechkin tipli eşitsizlik ispatlanmadı. Bu daha iyi bir tahmin için faydalı olabilir.

*c*) Eğer $f:[-1,1]\times[-1,1]\to\mathbb{R}$, $[-1,1]\times[-1,1]$ üzerinde kesin double konveks ise o zaman (2) koşulu açık bir şeklide sağlanır ve sonuç olarak $F_{n_1,n_2}(f)(x,y)$, $(0,0)$ merkezli bir disk içinde kesin double konveksliği korur. Onun ışını Teorem II. 1. 4' nın en düşük $\left|d_{n_1,n_2}\right|$ tahminine sahiptir.

*d*) $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ olmak üzere sırası ile $n_1$- dereceli $P_{n_1}^{(\lambda_1)}$, $\lambda_1$ ultra küresel polinomları ve $n_2$- dereceli $P_{n_2}^{(\lambda_2)}$, $\lambda_2$ ultra küresel polinomlarının $i=1,2,...,n_1$ için $x_{i,n_1}^{(1)}$ ve $j=1,2,...,n_2$ için $x_{j,n_2}^{(2)}$ köklerine dayalı ve (1) ile verilen $F_{n_1,n_2}(f)(x,y)$ polinomları verilsin. [11]' deki $\forall i=\overline{1,n_1},\forall j=\overline{1,n_2}$, $\forall(x,y)\in[-1,1]\times[-1,1]$ için $h_{i,n_1}^{(1)}(x)$ ve $h_{j,n_2}^{(2)}(y)\geq 0$ polinomları ve [5]' deki tek değişkenli durumdan $p=1,2$ için

$$\frac{\partial^p F_{n_1,n_2}(f)(x,y)}{\partial y^p}=\sum_{i=1}^{n_1}h_{i,n_1}^{(1)}(x)\left[\sum_{j=1}^{n_2}\frac{\partial^p h_{j,n_2}^{(2)}(y)}{\partial y^p}f(x_{i,n_1}^{(1)},x_{j,n_2}^{(2)})\right]$$

formüllerinden aşağıdaki sonuçlar hemen elde edilir.

Eğer $f(x,y)$, $y\in[-1,1]$' e göre ( tüm sabit $x\in[-1,1]$ için ) azalmayan ise o zaman $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ ve $P_{n_2}^{(\lambda_2)'}(y)$' nin $\eta$ kökü için $F_{n_1,n_2}(f)(x,y)$ tüm sabit $x\in[-1,1]$ için

$$y \in \left( \eta - \frac{c_\eta}{n_2^{7+2\gamma_2}}, \eta + \frac{c_\eta}{n_2^{7+2\gamma_2}} \right)$$

ye göre azalmayan ( burada $c_\eta$ ve $\gamma_2$, Sonuç Teoremi II. 1. 3' de verilmiş idi)' dır.

Eğer $f(x,y)$, $y \in [-1,1]$' e göre ( tüm sabit $x \in [-1,1]$ için ) kesin konveks ise o zaman tüm keyfi $n_1 \in \mathbb{N}$ ve $n_2 \geq 3$ olacak şekildeki her tek $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı ve tüm $x \in [-1,1]$ sabitleri için $F_{n_1,n_2}(f)(x,y)$, $y \in V(0)$' a göre kesin konveks olacak şekilde sıfırın bir $V(0)$ komşuluğu vardır.

Eğer $p = 1,2$ için

$$\frac{\partial^p F_{n_1,n_2}(f)(x,y)}{\partial x^p}$$

göz önüne alınırsa benzer sonuçlar bu ifade için de geçerlidir.

*e*) Yukarıdaki sonuçların hepsi $n > 2$ olacak şekildeki $n$ değişkenleri için kolaylıkla genişletilebilir.

# 4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada öncelikle Shepard operatörü ve Hermite-Fejer polinomları incelenmiştir. Bu operatör ve polinomların kısmi şekil koruyan yaklaşımları ve aynı zamanda konvekslik tanımları yardımıyla konvekslik özellikleri verilmiştir.

# KAYNAKLAR


1.T. Popoviciu, Ann. Univ. Sci. Budapestinensis, Sect. Math. III/IV, 241-246 (1960/1961).

2.S. G. Gal and J. Szabados, In Functions, Series, Operators, Proc. Alexits Memorial Int. Conf., Budapest 1999, Academic Pres, Budapest ( to appear).

3.O. Shisha and B. Mond, Proc. Amer. Math. Soc. 16, 1269-1276 (1965).

4. S. G. Gal, submitted.

5.D. Shepard, In Proceedings 1968 Assoc. Comput. Machinery National Conference, pp. 517-524.

6.R. E. Barnhill, Rocky Mount. J. Math. 11, 365-381 (1983).

7.T. Popoviciu, Ann. Stiint. Univ. Jassy VIII, 65-84 (1962).

8.G. A. Anastassiou and S. G. Gal, submitted.

9.W. Fleming, Functions of Several Variables, Second Edition, Springer-Verlag, New York, (1977).

10.S. Marcus, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1 (2), 17-36 (1956).

11.M. Nicolescu, Stud. Cerc. Matem. (Bucharest) 3 (1/2), 7-51 (1952).

12.T. Popoviciu, Mathematica (Cluj) VIII, 1-85 (1934).

13.A. Krob and S. Revesz, J. Approx. Theory 99, 139-152 (1999).

14.L. Fejer, Mathemathische Annalen, 102, 707-725 (1930).

15.T. Popoviciu, Mathematica (Cluj) 3 (26) (2), 311-329 (1962).