

KIRIKKALE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DÜĞÜM POLİNOMLARI

MEHMET ÖZDEMİR

EYLÜL 2006

Fen Bilimleri Enstitü Müdürünün onayı.

13.10.2006

Prof. Dr. Yakup ARICA

Müdür

Bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak Matematik Anabilim Dalı standartlarına uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Kerim KOCA

Anabilim Dalı Başkanı

Bu tezi okuduğumuzu ve Yüksek Lisans tezi olarak bütün gerekliliklerini yerine getirdiğini onaylarız.

Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

Danışman

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Kerim KOCA

Yrd. Doç. Dr. Ali ARAL

Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

ÖZET

DÜĞÜM POLİNOMLARI

ÖZDEMİR, Mehmet

Kırıkkale Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi

Danışman : Yrd. Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK

Eylül 2006, 67 sayfa

Bu tez çalışmasında, düğüm teorisindeki önemli invariantlardan olan Alexander polinomu, Alexander-Conway polinomu, Jones polinomları ve Skein polinomları ve Kauffman polinomları incelenmiştir.

İlk bölüm girişe ayrılmıştır.

İkinci bölümde, temel kavramlar ve düğüm polinomlarının hesaplanması için gereken yardımcı bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, herhangi bir düğümün(veya halkanın) Alexander polinomunun nasıl elde edileceği gösterilmiştir. Bazı belli başlı düğümlerin(veya halkaların) Alexander polinomları hesaplanarak özellikleri gösterilmiştir. Sonra düğümlerin düzenli diyagramlarından Skein diyagramları oluşturularak Conway polinomları (yada Alexander-Conway polinomu) bulunup bazı özellikleri verilmiştir. Yine, Skein diyagramlarıyla Jones polinomları hesaplanmış daha sonra, Skein polinomları ve Kauffman polinomları açıklanarak örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Bir Dügümün(veya Halkanın) Düzenli Diyagramı, Skein Diyagramı, Alexander polinomu, Alexander-Conway polinomu, Jones polinomu, Skein polinomu, Kauffman polinomu.

ABSTRACT

KNOT POLYNOMIALS

ÖZDEMİR, Mehmet

Kırıkkale University

Graduate School Of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics, M. Sc. Thesis

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Hakan ŞİMŞEK

September 2006, 67 pages

In this thesis, Alexander polynomial, Alexander-Conway polynomial, Jones polynomials, Skein polynomials and Kauffman polynomials are investigated, which are important invariants in knot theory.

The first chapter is introduction.

In the second chapter, fundamental concept and necessary aid knowledges are shown for calculation of knot polynomials.

In the third chapter, how Alexander polynomial of any knot(or link) is obtained is shown. Alexander polynomials of some particular knots(or links) are calculated and their properties are shown. Then skein diagrams are drawn from regular diagrams of knots(or links) and their Conway polynomials are calculated and some properties are given. Also, Jones polynomials are calculated by skein diagrams, after that, Skein polynomials and Kauffman polynomials are explained and some examples are given.

Key Words : Regular Diagram Of A Knot(Or Link), Skein Diagram, Alexander polynomial, Alexander-Conway polynomial, Jones polynomial, Skein polynomial, Kauffman polynomial.

TEŞEKKÜR

Bana bu tez konusunu veren, alıőmalarımnda destek ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd.Doç. Dr. Hakan ŞİMŞEK'e teşekkür eder, saygılar sunarım.

Ayrıca, eőime ve aileme de manevi desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
1. GİRİŞ	1
1.1. Kaynak Özetleri.....	1
1.2. Çalışmanın amacı.....	1
2. MATERYAL VE YÖNTEM	3
2.1. Bazı Temel Kavramlar	3
2.2. Seifert Yüzeyleri	13
2.3. Bir Düğümün Cinsi	16
2.4. Seifert Matrisi	18
2.5. Alexander Matrisleri	25
2.6. Alexander Matrisinin Elemanter İdeali	28
3. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	29
3.1. Bir Düğümün Grup Temsilinden	
Alexander Polinomunun Hesaplanması	29
3.2. Alexander Polinomunun Seifert Matrisinden Hesaplanması	32
3.3. Alexander-Conway Polinomu	36
3.4. Jones Polinomları	49
3.5. Skein Polinomları	57

3.6. Kauffman Polinomları	59
4. SONUÇ.....	66
KAYNAKLAR	67

1. GİRİŞ

Düğüm teorisi çalışmaları matematiğin ilginç çalışma alanlarından birisidir. Bu konuyla ilk olarak kimlerin çalıştığını söylemek zordur. Bu çalışmalar son yüzyılda önem kazanmış ve önemli sonuçlarını ise son 50 yıl içerisinde vermiştir.

Matematiğin birçok alt anabilim dalıyla ilgili olduğu kadar, Fizik, Kimya ve Biyolojide de önemli kavramlarla ilgilidir.

Düğüm teorisi 19.yüzyılın başlarında J.W.Alexander, H.Seifert, daha sonraları J.Conway, J.Jones, J.Birman, L.Kauffman, R.Lickorish, K.Millett, J.Przytycki, W.Thurston gibi değerli matematikçilerin ilgilerini çekmiştir.

1.1. Kaynak Özetleri

Bu tez hazırlanırken, Alexander polinomunun elde edilmesinde K.Murasugi'nin 'Knot Theory and It's Applications'[1], G.Burde and H. Zeischang'ın 'Knots'[4] ve L.Kauffman'ın 'On Knots'[6] adlı eserleri, S.Moran'ın 'The Mathematical Theory of Knots and Braids'[2] adlı kitaplarından faydalanılmış olup bunlar[1-9] çerçevesinde, düğümden elde edilen çeşitli polinomların hesaplanmasındaki yollar örneklendirilmiştir.

1.2. Çalışmanın Amacı

Düğümün sınıflandırılması problemi düğüm teorisinin önemli problemlerindendir. Bu probleme ışık tutacağını düşünerek J.W.Alexander

düğümlemlerin düzenli diyagramlarından hareketle bir polinom hesaplanması metodunu geliştirmiştir.

Bu çalışmayı izleyen yıllarda çeşitli matematikçiler tarafından, düğümlerden polinom elde edilmesinin, farklı yolları ortaya konmuştur.

Bu çalışmamızda, bu polinomları ve elde etme yollarını inceleyecek ve örneklendireceğiz.

2. MATERYAL VE YÖNTEM

2.1. Bazı Temel Kavramlar

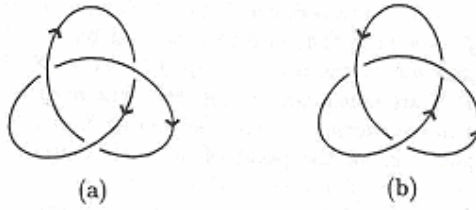
Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak temel kavramlar ve bunlarla ilgili bazı temel özellikler verilecektir.[1-9]

Tanım 2.1.1. X ve Y Hausdorff uzaylar ve $f : X \rightarrow f(X)$ bir homeomorfizm olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ dönüşümüne gömülme(embedding) dönüşümü denir.

Tanım 2.1.2. Bir düğüm, S^1 eğrisini öklidyen üç uzaya R^3 veya S^3 yuvarına gömülmesidir. Daha genel manada, S^k nın S^{n+k} ya gömülmesi işlemidir. Bu, yüksek mertebeden düğüm teorisinin çalışma alanıdır.

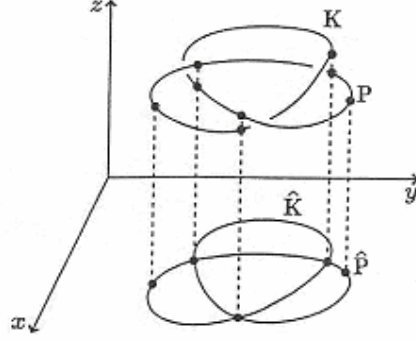
Genel manada, bir düğüm $i : S^1 \rightarrow S^3$ olmak üzere $i(S^1) = k$ dönüşümünün görüntüsüdür. Kısaca, bir düğüm basit kapalı bir eğri ya da bu tipteki eğrilerin sınıfı olarak göz önüne alınır. Literatürde en çok bilinen düğümler Şekil 2.1.17 de gösterilmiştir.

Tanım 2.1.3. Bu kapalı eğrilere bir ok işareti ile bir yönlendirme yapılabilir. Bu yönlendirme aşağıdaki örnekteki gibi iki farklı şekilde yapılabilir. Şekil 2.1.1(a) da sağ-el trefoil düğümü ve (b) de sol-el trefoil düğümü gösterilmiştir.



Şekil 2.1.1

\mathbb{R}^3 de Şekil 2.1.2 deki gibi, bir $P(x,y,z)$ noktasının xy -düzlemindeki izdüşümünü $\hat{P}(x,y,0)$ olarak veren dönüşümü p ile gösterelim.

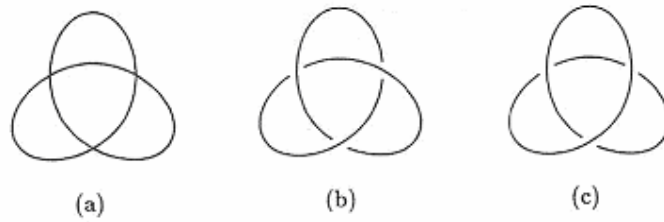


Şekil 2.1.2

Tanım 2.1.4. $p(K) = \hat{K}$ ya K düğümünün izdüşümü denir. Ayrıca \hat{K} nın yönü de K ya bağlıdır. Bununla birlikte, \hat{K} , çeşitli kesişim noktalara sahip olduğundan, düzlemde basit kapalı bir eğri değildir.

Bu şekildeki izdüşüme düzenli izdüşüm denir. Bu izdüşüm Şekil 2.1.3(a) da gösterilmiştir.

Ancak, bu izdüşümün kesişim noktalarında düğümün alttan mı üstten mi geçtiği belli değildir. Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için, düğümdeki kesişim noktaları civarında bir miktar değişiklik yapılarak, Şekil 2.1.3(a) ve (b) de olduğu gibi düğümün geçiş noktasının alttan mı yoksa üstten mi olduğu belirtilir.



Şekil 2.1.3

Tanım 2.1.5. Yukarıda olduğu gibi geçitleri belirten izdüşümlere *düzenli diyagram* denir. Düzenli diyagramlar düzlemde uzaysal bir çizim yapılmasını sağlar.

Bir K düğümünün bir D düzenli diyagramı üzerinde bir P noktası alınsın ve P noktası D etrafında bir kez döndürülsün. Eğer D nin geçiş noktalarındaki P noktası alternatif olarak bir alt bir üst geçiş noktası oluyorsa bu durumda bu düzenli diyagrama alterne düzenli diyagram denir.

Tanım 2.1.6. En az bir alterne düzenli diyagrama sahip düğümlere *alterne düğüm* denir.

Şekil 2.1.3(b) ve (c) deki düzenli diyagramlar alterne düzenli diyagramdır ve bu düğüm alterne düğümdür.

Aşıkâr düğüm (S^1) de bir alterne düğümdür. Düğüm teorisinde alterne düğümler büyük önem taşır. [1]

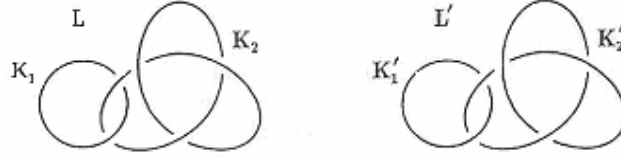
Tanım 2.1.7. Birbirini kesmeyen sonlu sayıda ve sıralı düğümlerin birleşimine *halka* denir. Her bir K_i düğümüne halkanın bileşeni denir.

Tanım 2.1.8. Aşağıdaki iki şartı sağlayan $L=\{K_1, K_2, \dots, K_m\}$ ve $L'=\{K'_1, K'_2, \dots, K'_n\}$ halkaları denktirler.(ya da eşittirler)

(1) $m = n$, yani, L ve L' nin bileşenlerinin sayısı eşittir,

(2) Sonlu sayıda basit düğüm hareketini uygulayarak L, L' ne dönüştürebilir. Yani, bu basit düğüm hareketlerini kullanarak K_i , K'_i ye dönüştürülebilir. [1]

Şekil 2.1.4 deki L ve L' halkaları denk halkalardır. Ancak, eğer bu halkanın birinin bileşenlerinin sırası değiştirilirse L ve L' (2) den dolayı denk olmazlar.



Şekil 2.1.4

Eğer yukarıdaki halkalara Şekil 2.1.5 deki gibi yönlendirme yapılırsa yine (2) den dolayı denk olmazlar.



Şekil 2.1.5

Şekil 2.1.6 de n -bileşenli aşikar halka gösterilmiştir. [1]



Şekil 2.1.6

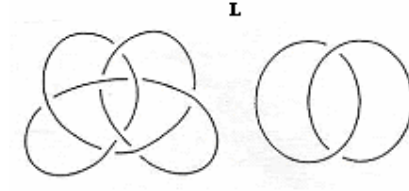
Şekil 2.1.7 deki halkaya **Hopf halkası** denir.



Şekil 2.1.7

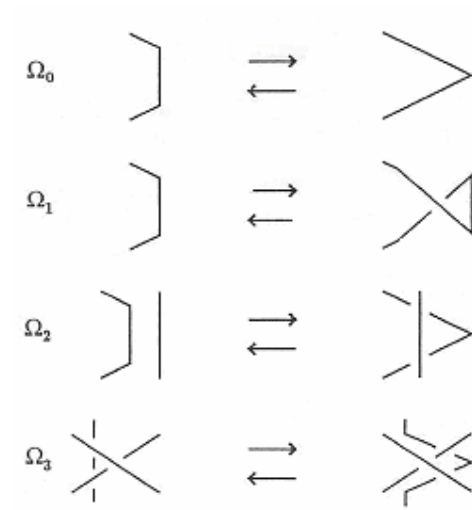
Tanım 2.1.9. Şekil 2.1.8 de görülen diyagrama *ayrık diyagram* denir. Bir ayrık düzenli diyagramı olan L halkasına da *ayrık halka* denir.

Şekil 2.1.8 deki halka 3 bileşenli ayrık halkadır.



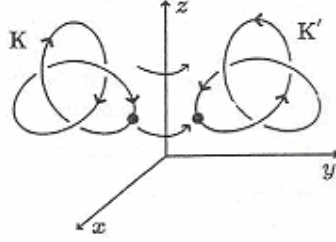
Şekil 2.1.8

Tanım 2.1.10. K ve K' düğümlerinin düzenli diyagramları D ve D' olsun. Eğer D düzenli diyagramını Şekil 2.1.9 deki Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 veya onların terslerini sonlu kez uygulayarak D' düzenli diyagramına dönüştürülebilirse, bu durumda D ve D' diyagramları denktir denir ve $D \simeq D'$ ile gösterilir.



Şekil 2.1.9

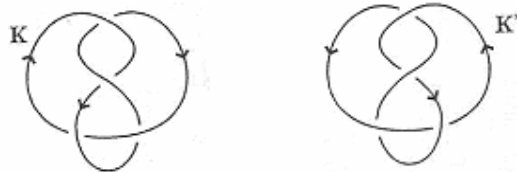
Bu dönüşümü sağlayan Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 ve onların terslerine **Reidemeister hareketleri** denir.



Şekil 2.1.10

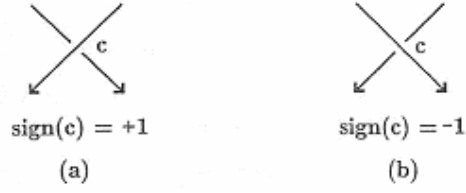
Örnek 2.1.11. Şekil 2.1.10 deki K' , K nın z -ekseni etrafında 180° döndürülmesiyle oluşmuş ve yönlenmesi K nın yönlenmesinin ters yönünde olan düğümdür. K ile K' düğümleri denk düğümlerdir.

Örnek 2.1.12. Şekil 2.1.11 deki K düğümü ve onun ayna görüntüsü olan K^* yönlendirilmeleriyle birlikte denk düğümlerdir.



Şekil 2.1.11

Tanım 2.1.13. Şekil 2.1.12 de görüldüğü gibi, yönlü bir düzenli diyagramın c geçiş noktasında iki durum söz konusudur. (a) daki ilk durum **sign(c)= +1** ve (b) deki durumda **sign(c)= -1** dir. (a) daki geçiş noktasına *pozitif*tir, (b) deki geçiş noktasına *negatif*tir denir.



Şekil 2.1.12

Tanım 2.1.14. Kabul edelim ki, D , iki bileşenli yönlü bir $L = \{ K_1, K_2 \}$ halkasının düzenli diyagramı olsun. D nin geçiş noktaları, K_1 ve K_2 nin kesişimlerinin yansımaları olan c_1, c_2, \dots, c_m dir. Bu durumda,

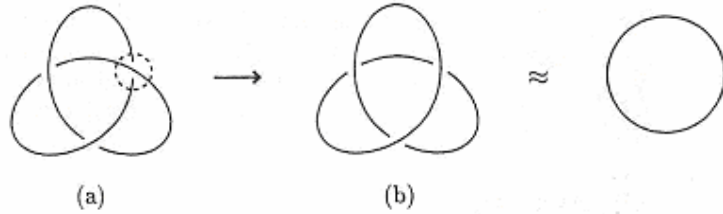
$$lk(K_1, K_2) = \frac{1}{2} \{ \text{sign}(c_1) + \text{sign}(c_2) + \dots + \text{sign}(c_m) \}$$

ifadesine, K_1 ve K_2 nin *halkalanma sayısı* denir.

Halkalanma sayısı K_1 ve K_2 nin sırasından bağımsızdır,

$$lk(K_1, K_2) = lk(K_2, K_1).$$

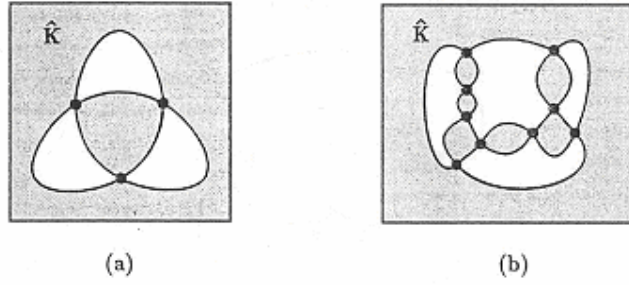
Tanım 2.1.15. Bir düğüm veya halkanın geçiş noktalarındaki alt-üst yapma veya koparma işlemlerine düğüm açma işlemi denir. Bir düğümün veya halkanın D düzenli diyagramını, aşık halkanın düzenli diyagramına dönüştürebilmek için yapılan minimum düğüm açma işleminin sayısına *düğümlememe sayısı* denir.



Şekil 2.1.13

Şekil 2.1.14 deki trefoil düğümünün düğümlememe sayısı 1 dir.

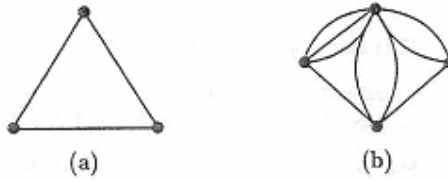
Tanım 2.1.16. Kabul edelim ki D , K nın düzenli diyagramı ve \hat{K} de K nın düzlemdeki izdüşümü olsun.



Şekil 2.1.14

Yukarıdaki şekilde görüldüğü gibi, \hat{K} düzlemde çeşitli bölgelere bölünmüştür. En dıştaki sınırsız bölgeyle başlanır ve bu alan ya siyah ya da beyaza boyanır. Buna göre ilk siyaha boyanır. Bu bölgenin komşusu olan bölge aynı renk olmamak şartıyla diğer bölgeye beyaz renk verilir. Daha sonra, her bir beyaz bölgeden bir nokta seçilir; bu noktalara bu beyaz bölgenin merkezi denilir.

Eğer \hat{K} nın W ile W' iki beyaz bölgesi arasındaki geçiş noktaları c_1, c_2, \dots, c_m ise bu durumda W ile W' nün merkezleri, c_1, c_2, \dots, c_m in içinden geçen basit yaylar ile bağlanır. Bu şekilde, \hat{K} dan bir düzlemsel G grafi elde edilir. G nin köşeleri beyaz bölgelerin merkezleridir. [1]



Şekil 2.1.15

Tanım 2.1.17. Temel düğüm hareketlerini sonlu kez uygulayarak K düğümünden K' düğümü elde edilebiliyorsa K düğümüyle K' düğümü denktir denir. Uzayda, sürekli

bir dönüşüm altında, bir düğüm bir başka düğüme dönüştürülebiliyorsa bu iki düğüm denktir.

Düğüm teorisinde denk düğümlerin birbirlerinden farklarının olmadığı kabul edilir ve bu düğümler aynı düğüm olarak düşünülür.

Tanım 2.1.18. Yönlü bir K düğümü ve bu düğümün tersi yönde yönlendirilmiş $-K$ düğümü denk ise bu K düğümüne *terslenebilen düğüm* denir.

Sağ-el trefoil düğümü terslenebilen bir düğümdür. Az sayıda geçiş noktasına sahip düğümler genellikle terslenebilen düğümlerdir.

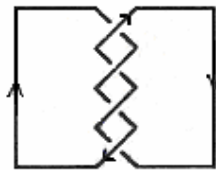
Tanım 2.1.12. Bir K düğümü ve onun ayna görüntüsü olan K^* düğümü denk ise K düğümüne *amphicherial düğüm* denir.

Sağ-el trefoil düğümü ile onun ayna görüntüsü olan sol-el trefoil düğümü denk olmadığından trefoil düğümü amphicherial düğüm değildir. Ancak, 8 şekilli düğüm Örnek 2.1.7 den amphicherial düğümdür.

Tanım 2.1.13. D , yönlü bir düğüm ya da halkanın düzenli bir diyagramı olsun. Buna göre, D nin geçiş noktalarının hepsinin işaretlerinin $w(D)$ toplamına *D nin Tait sayısı (D nin writhesi)* denir.

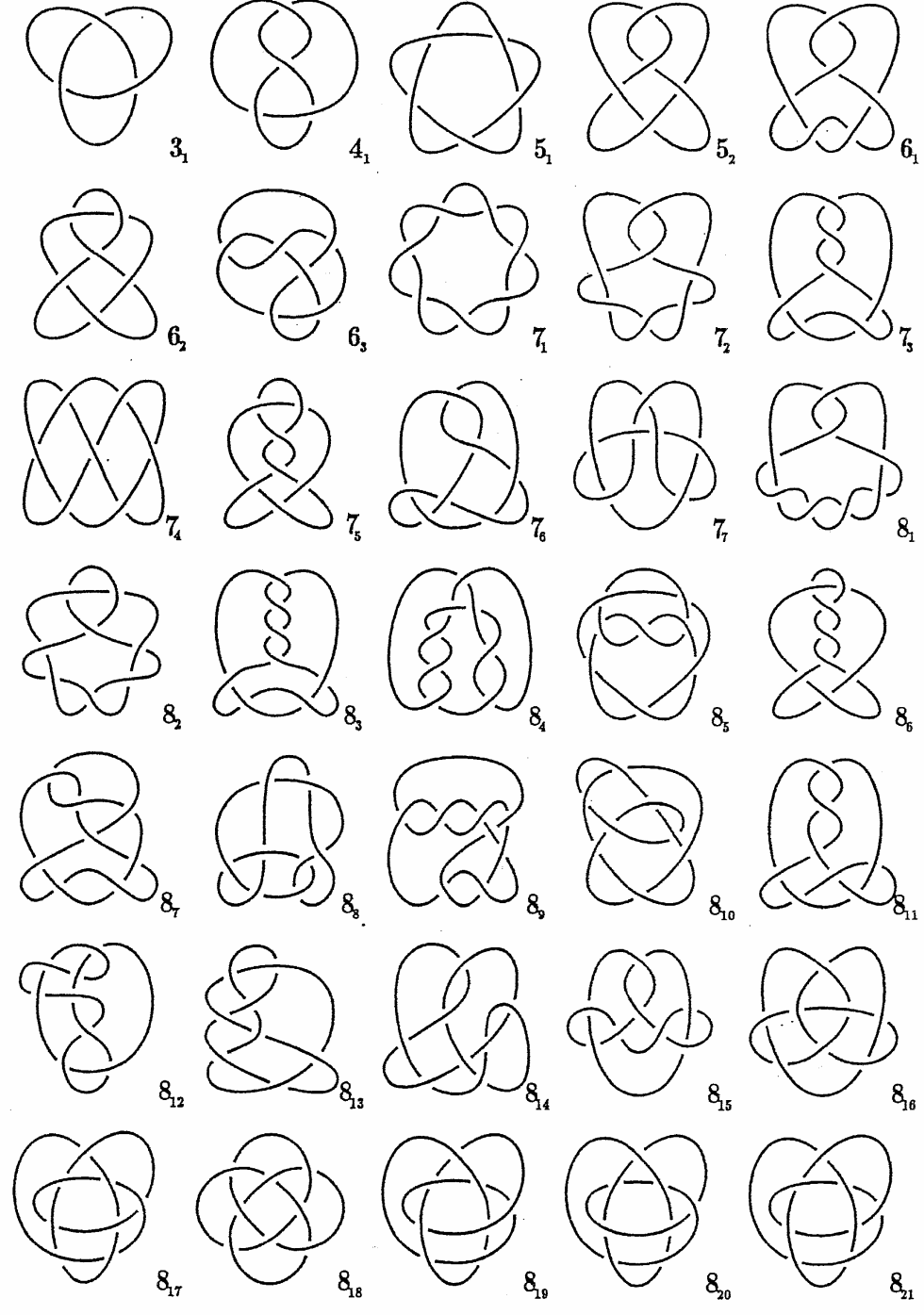
$$w(D) = \sum \text{sign}(c)$$

Şekil 2.1.18 deki düğümün tait sayısı $w(D) = -4$ dür.



Şekil 2.1.16

Bilinen Bazı Düğümler



Şekil 2.1.17

2.2. Seifert Yüzeyleri

Bu bölümde Alexander polinomunu tanımlamak için gerekli Seifert matrisini ve karakteristik özellikleri incelenecektir.

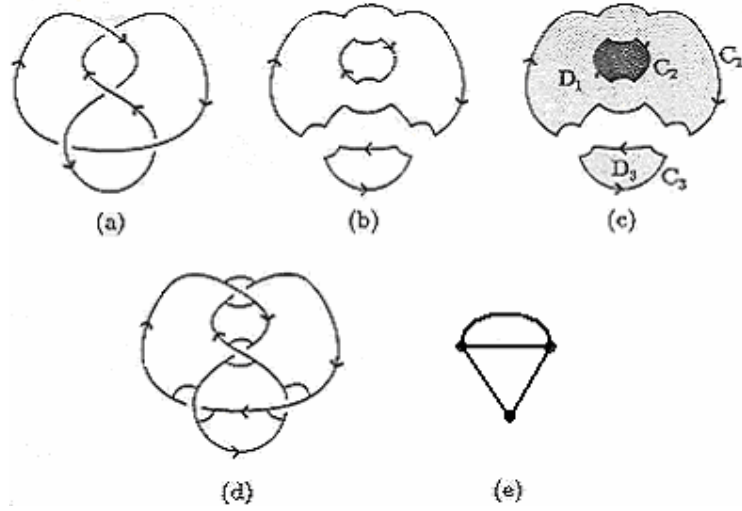
Teorem 2.2.1. Keyfi bir yönlü K düğümü(veya halkası) verilsin, o halde R^3 de sınırı K olan yönlenmiş bir F yüzeyi mevcuttur. [1]

ispat: K bir yönlü düğüm(veya halka) ve D de K için düzenli bir diyagram olsun. Amacımız D yi çeşitli basit kapalı eğrilere ayırmaktır. İlk adım, D de merkez geçiş noktaları olmak üzere bunların her birinin çevresine küçük bir çember çizmektir. Bu çember D yi dört noktada keser, bunlar Şekil 2.2.1(a) da **a,b,c** ve **d** dir. Şekil 2.2.1(b) de olduğu gibi bu geçiş noktalarının uçları birbirine eklenir, **a** ile **d** ve **b** ile **c** bağlanır.



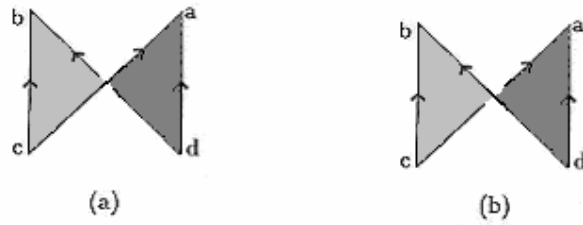
Şekil 2.2.1

Yaptığımız şey, ilk baştaki **ac** ve **bd** parçalarını **ad** ve **bc** parçalarıyla değiştirmektir. Bu yolla D nin geçiş noktalarını çemberin içine alarak sileriz. Bu işleme D nin geçiş noktalarında yukarıdaki yönlerine göre K düğümünün uçlarını birleştirme işlemi denir. Bu işlem D nin her geçiş noktasında uygulanırsa D den tüm geçiş noktaları silinir. En sonunda D , çeşitli basit kapalı eğrilere ayrılmış olur, Şekil 2.2(b). Bu eğrilere Seifert eğrileri denir. D , düzlemde geçiş noktası olmayan bir halkanın düzenli diyagramına dönüştü. (yani aşıkark halka oldu.) Bu basit kapalı eğrilerin her biri bir yüzey tarafından gerilebilir.



Şekil 2.2.2

Şekil 2.2.2(b) de uçları birleştirmek suretiyle üç yüzey ortaya çıktı, D_1 , D_2 , D_3 . D_1 in sınırı C_1 Seifert eğrisidir. Sonuçta farklı çeşit bölgelerden bir yüzey oluşur, bu bölgeler için bir tek bükümlü küçük bantlarla bağlamaya ihtiyaç vardır. Bunun için ilk olarak **abcd** kareleri alınır, bunlardan biri pozitif (Şekil 2.2.3(a)) diğeri negatif büküm(Şekil 2.2.3(b)) olarak alınır, bu bükümlü kareler ihtiyacımız olan bantlardır.



Şekil 2.2.3

Uçları birleştikten sonra D nin pozitif(negatif) geçiş noktalarına karşılık gelen pozitif(negatif) bantları bağlanırsa, Şekil 2.2.2(d) deki F yönlü yüzeyi olarak bir

bağlantı elde edilir. F yüzeyinin sınırı açıkça K orijinal düğümüdür. Bundan dolayı, yukarıda yazıldığı gibi, F aynı zamanda yönlü bir yüzeydir.



Şekil 2.2.4

Şekil 2.2.4(a) da gösterildiği gibi, açık taralı kısım yüzeyin önü ve koyu taralı kısım yüzeyin arkası olup yüzeyin önü ile arkası arasındaki kısmı ayırabiliriz.

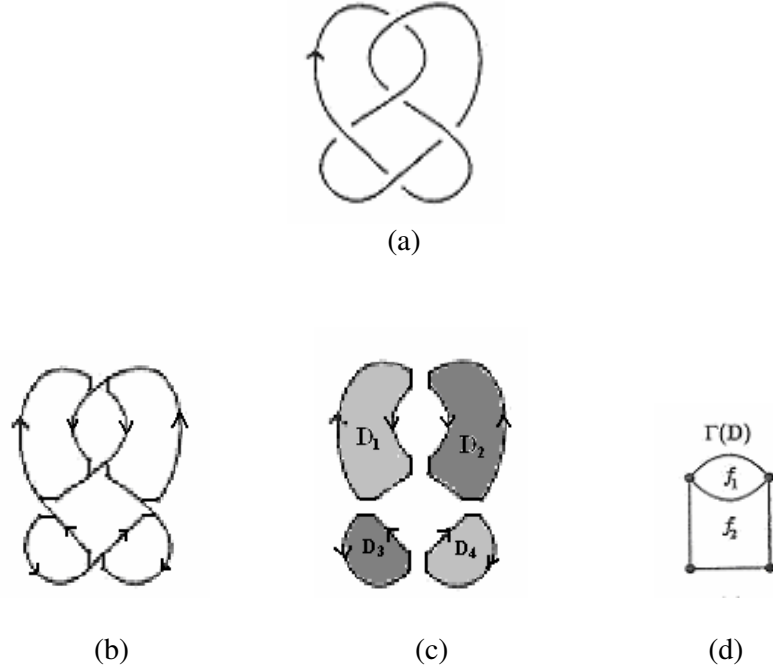
Genelde, K yönlü düğümün sınırı olacak şekildeki yönlenebilir birleşmiş yüzeye K'nın *Seifert yüzeyi* denir. (Pontrjagin-Frankl-Seifert yüzeyi)

Yukarıdaki ispatta bulunan Seifert yüzeyi K'nın D düzenli diyagramına bağlıdır.

Şimdi, F, yukarıda anlatıldığı gibi bantlar ve bölgelerden elde edilen K'nın Seifert yüzeyi olsun. Eğer, her bir bölge bir noktaya büzülürse ve aynı zamanda bantların eni de daraltılırsa, bu noktalardan ve parçalardan bir grafik oluşturulabilir. Buna K'nın D düzenli diyagramının *Seifert grafi* denir.

Şekil 2.2.2 (e), (a) daki 8 şekilli düğümün Seifert grafidir.

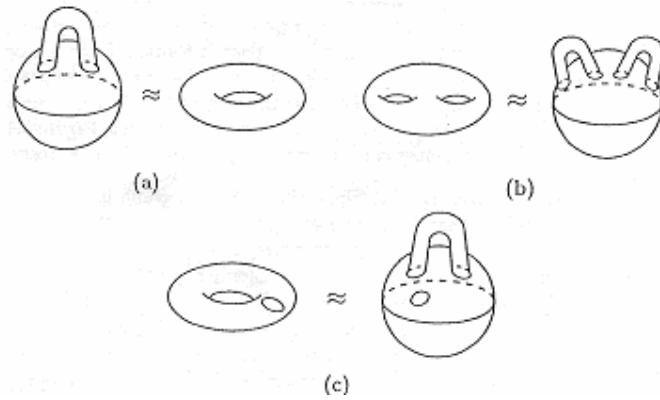
Örnek 2.2.2. Şekil 2.2.5(a) daki düğüm için düzenli diyagramlardan elde edilen Seifert yüzeyleri ve bunların Seifert grafları (b) (c) ve (d) de verilmiştir.



Şekil 2.2.5

2.3. Bir Düğümün Cinsi

F yönlendirilebilir yüzeyi, birkaç kulp ilave edilmiş küreye topolojik olarak denk ise, bu kulpların sayısına F yüzeyinin *cinsi* denir ve $g(F)$ ile gösterilir.



Şekil 2.3.1

Örnek 2.3.1. Şekil 2.3.1(a) da görülen cinsi 1 olan yüzeye *tor yüzeyi* denir ve bu yüzeyin Şekil 2.3.1(b) deki cinsi 2 olan şekli de vardır.

Verilen bir K düğümü için tüm Seifert yüzeylerinin en küçük cinsi göz önünde bulundurulmalıdır. Bu en küçük cinse K'nın *cinsi* denir ve $g(\mathbf{K})$ ile gösterilir. Cins bir düğüm invariantıdır.

Teorem 2.3.2. F bir K düğümünün yönlü bir Seifert yüzeyi olmak üzere F yi α_0 kadar noktalara, α_1 kadar kenarlara ve α_2 kadar yüzlere bölelim. $\chi(F) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ olsun. O halde $\chi(F)$ bir tamsayıdır ve F'nin kaç ve nasıl bölüldüğünden bağımsızdır. Sadece F'ye bağlıdır. Bu sayıya F'nin *Euler karakteristiği* denir. [1]

$\chi(F)$ ve $g(F)$ arasında aşağıdaki bağıntı vardır;

$$\chi(F) = 2 - 2g(F) \quad (2.3.1)$$

Buradan;

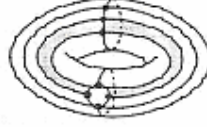
$$g(F) = \frac{2 - \chi(F)}{2}$$

F sınırlı ve bu sınır da, noktaların ve kenarların birleşiminden oluşuyor ise $\mu(F)$ de F'nin sınırı olan kapalı eğrinin sayısı olmak üzere;

$$\chi(F) = 2 - \mu(F) - 2g(F) \quad (2.3.2)$$

dir.

Örnek 2.3.3. Tor yüzeyi Şekil 2.3.2 deki gibi $\alpha_0 = 7$, $\alpha_1 = 14$, $\alpha_2 = 6$ olacak şekilde bölünebilir. Buradan $\chi(F) = -1$ ve buradan da $g(F) = 1$ olur.



Şekil 2.3.2

Eğer, $\mu(K) = 1$ alınırsa

$$2g(F) = 1 - d + b$$

olur. Diğer kısımlarda bu sayı $1 - d + b$ alınacaktır.

$\Gamma(D)$, Şekil 2.1.2(e) deki Seifert yüzeyinden oluşan Seifert grafi olsun. $\Gamma(D)$ bir düzlemsel grafik ise $\Gamma(D)$, S^2 küresini çeşitli bölgelere ayırır. (S^2 küresi, sonsuz noktalarının R^2 ye eklenmesiyle elde edilen küre olarak düşünülebilir.)

S^2 de, b noktaların sayısı, d kenarların sayısı olsun. Yüzlerin sayısı f ise Teorem 2.3.2 den ve S^2 nin karakteristiği 2 olduğundan,

$$2 = \chi(S^2) = d - b + f$$

Buradan

$$f - 1 = 1 - d + b \quad (2.3.3)$$

yazılabilir.

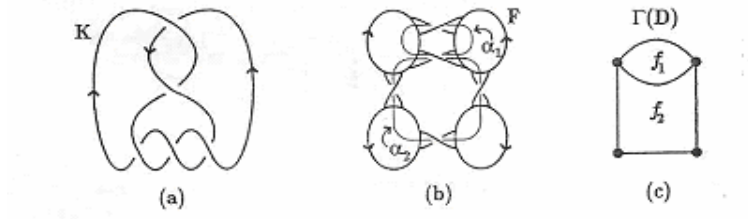
2.4. Seifert Matrisi

F , K düğümünün D düzenli diyagramından elde edilen Seifert yüzeyi ve $\Gamma(D)$, F nin Seifert grafi olsun. F üzerinde bulunan $2g(F) + \mu(F) - 2$ kapalı eğri elde edilmelidir.

$\Gamma(D)$, S^2 nin parçalanmasıysa, bu durumda

$$2g(F) + \mu(F) - 1 = 1 - d + b = f - 1$$

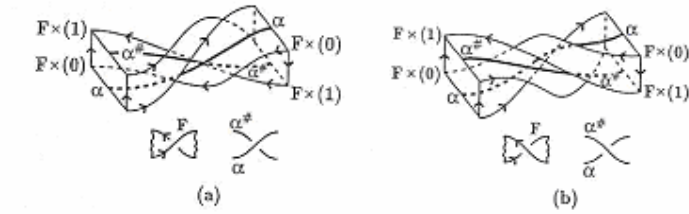
sayısı kapalı bölgelerin sayısına eşittir. Bu kapalı bölgelerin her birinin sınırı $\Gamma(D)$ nin bir kapalı eğrisidir. Bu kapalı eğrilerden Seifert yüzey üzerinde bir kapalı eğri oluşturulabilir.



Şekil 2.4.1

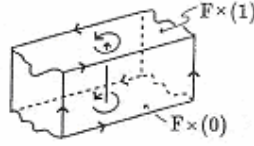
Bu $2g(F) + \mu(F) - 1 (=m)$ ifadesi kapalı eğrilerin bir koleksiyonundan başka bir şey değildir.

Örneğin, Şekil 2.4.1(a) da K düğümünün cinsi 1 olan Seifert yüzeyi vardır. Buradan, α_1 ve α_2 kapalı eğrilerini elde edilir. Bu, α_1 ve α_2 eğrilerinin geçiş noktaları olabilir. α_2 yüzeyini kaldırırsak yeni eğrimiz α_2 ye paralel $\alpha_2^\#$ eğrisidir, geçiş noktalarını bulabiliriz ve $\{\alpha_1, \alpha_2^\#\}$ bir halka olur.



Şekil 2.4.2

İlk olarak, F daha iyi görünmesi açısından biraz büyütülmelidir, yani Şekil 2.4.2 de $F \times [0,1]$ oluşturulmalıdır. Şekil 2.4.3 de, hem F hem de $[0,1]$ sağ-el kuralıyla yönlendirilmektedir.



Şekil 2.4.3

Orijinal F yüzeyi $F \times (0)$ olarak ta düşünülebilir ve α_1 ve α_2 nin her ikisi de $F \times (0)$ üzerindedir. Bu nedenle α_1 ve α_2 sırasıyla $\alpha_1 \times (0)$ ve $\alpha_2 \times (0)$ olarak yazılabilir. Benzer olarak $\alpha_1 \times (1)$ ve $\alpha_2 \times (1)$ i de $\alpha_1^\#$ ve $\alpha_2^\#$ olarak yazılır.

α_1 ve α_2 ye keyfi şekilde bir yön verilmiş olsun. Doğal olarak $\alpha_1^\#$ ve $\alpha_2^\#$ de bunlara bağlı olarak yönlenecektir. Böylece $lk(\alpha_1, \alpha_2^\#)$, $lk(\alpha_2, \alpha_1^\#)$, $lk(\alpha_1, \alpha_1^\#)$, $lk(\alpha_2, \alpha_2^\#)$ sayıları hesaplanabilir. Bu dört halkalanma sayısı 2×2 tipinde aşağıdaki matrisi oluşturur:

$$M = \begin{bmatrix} lk(\alpha_1, \alpha_1^\#) & lk(\alpha_1, \alpha_2^\#) \\ lk(\alpha_2, \alpha_1^\#) & lk(\alpha_2, \alpha_2^\#) \end{bmatrix}$$

Bu M matrisine Şekil 2.4.1(a) deki K düğümünün *Seifert matrisi* denir. Bu $i, j = 1, 2$ için $lk(\alpha_i, \alpha_j^\#)$ sayıları tamsayı olduğundan M matrisi tamsayı bir matris dir. Bu M matrisi α_1 ve α_2 nin yönlerine bağlıdır. Bu matris K nın bir invariantı değildir. [1]

$g(F)$, bir düğümün(ya da halkasının) F Seifert yüzeyinin cinsi ise, F üzerinde $2g(F) + \mu(K) - 1 (= m)$ olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ kapalı eğrileri vardır. Yukarıda

yapılan işlemler geliştirilirse, bu kapalı eğrilere keyfi yönlendirmeler verilerek değişik halkalanma sayıları hesaplanabilir. Yukarıdaki gibi, $m \times m$ tipinde matris,

$$M = \left[lk(\alpha_i, \alpha_j^\#) \right]_{i,j=1,2,3,\dots,m}$$

dir.

Bundan dolayı K nın D düzenli diyagramından bir tamsayılı matris elde edilebilir. Bu matris yine $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ lerin yönlerine bağlıdır.

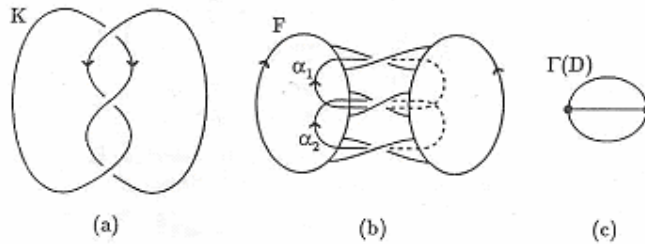
Bu matrise K nın *Seifert matrisi* denir. K nın düzenli diyagramının bir parçasından elde edilmiştir.

Genel olarak eğer M matrisi simetrik matris değilse, halkalanma sayıları $lk(\alpha_i, \alpha_j^\#)$ ve $lk(\alpha_j, \alpha_i^\#)$ eşit değildir.

Ayrıca, $g(F)=0$ olduğunda K nın Seifert matrisi boş matris olarak tanımlanır. (K aşıkâr düğümdür) [1],[4]

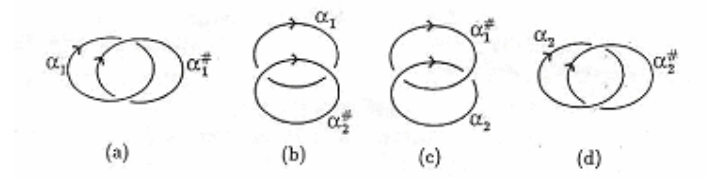
Şimdi, bir düğümün Seifert matrisinin pratik olarak nasıl hesaplandığını çeşitli örneklerde inceleyelim.

Örnek 2.4.2. Şekil 2.4.4(a) da sağ-el trefoil düğümünün düzenli diyagramı, Şekil 2.4.4(b) de Seifert yüzeyi ve bunun sonucu Seifert grafi da Şekil 2.4.4(c) de verilmiştir.



Şekil 2.4.4

Şekil 2.4.4(b) den Seifert yüzeyi üzerinde iki tane α_1 ve α_2 kapalı eğrileri vardır. α_1 , α_2 , $\alpha_1^\#$ ve $\alpha_2^\#$ aralarındaki karşılıklı ilişkiler Şekil 2.4.5 (a), (b), (c), (d) de gösterilmiştir.



Şekil 2.4.5

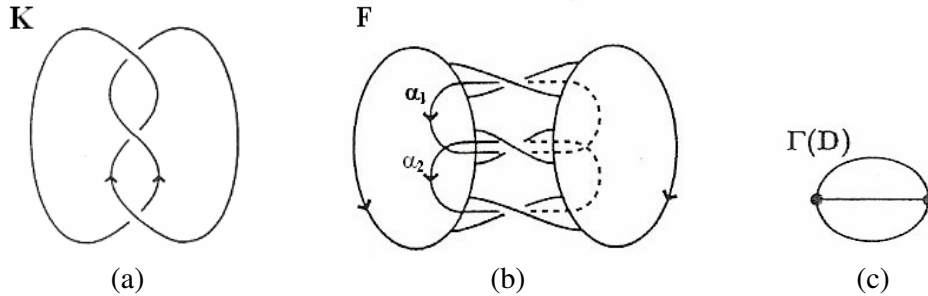
Bu dört diyagramdan $\text{lk}(\alpha_1, \alpha_1^\#) = -1$, $\text{lk}(\alpha_2, \alpha_1^\#) = 1$, $\text{lk}(\alpha_2, \alpha_2^\#) = -1$ ve $\text{lk}(\alpha_1, \alpha_2^\#) = 0$ dır.

Buradan sağ-el trefoil düğümünün Seifert matrisi

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir. [1]

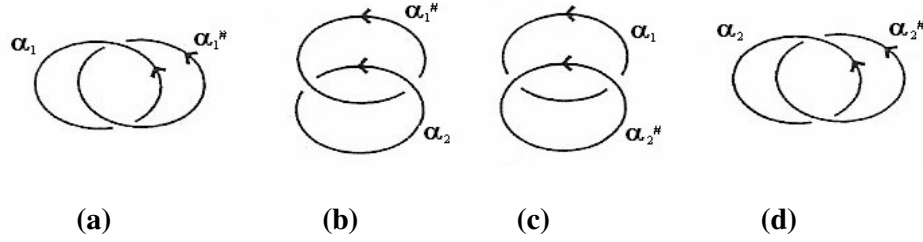
Örnek 2.4.3. Yukarıdaki örneğe benzer şekilde Şekil 2.4.6(a) daki sol-el trefoil düğümünün Seifert matrisi de bulunabilir.



Şekil 2.4.6

Şekil 2.4.6(b) den Seifert yüzeyi üzerinde iki tane α_1 ve α_2 kapalı eğrileri vardır.

α_1 , α_2 , $\alpha_1^\#$ ve $\alpha_2^\#$ aralarındaki karşılıklı ilişkiler Şekil 2.4.7 (a), (b), (c), (d) de gösterilmiştir.



Şekil 2.4.7

Bu dört diyagramdan $\text{lk}(\alpha_1, \alpha_1^\#) = 1$, $\text{lk}(\alpha_2, \alpha_1^\#) = -1$, $\text{lk}(\alpha_1, \alpha_2^\#) = 0$ ve $\text{lk}(\alpha_2, \alpha_2^\#) = 1$ dır.

Böylece sol-el trefoil düğümünün Seifert matrisi de

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Teorem 2.4.4. İki denk düğüm veya halkadan elde edilen iki Seifert matrisi Λ_1 ve Λ_2 işlemleriyle aşağıdaki şekillerde değişebilir:

$$\Lambda_1 : M_1 \rightarrow PM_1P^T$$

Burada P tersi olan tamsayı bir matristir, $\det P = \pm 1$ dir ve P^T de P nin transpozudur.

$$\Lambda_2 : M_1 \rightarrow M_2 = \begin{bmatrix} & & k & 0 \\ & M_1 & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ veya } \begin{bmatrix} & & 0 & 0 \\ & M_1 & \vdots & \vdots \\ k & \cdots & k & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Burada k keyfi bir tamsayıdır. [1]

Tanım 2.4.5. Λ_1 veya Λ_2 işlemleriyle elde edilen M ve M' kare matrislerine

S -denktir denir ve $M \stackrel{s}{\approx} M'$ ile gösterilir.

Teorem 2.4.6. K düğümünün F_1 ve F_2 Seifert yüzeylerinden elde edilen M_1 ve M_2

Seifert matrisleri S -denktir. [1],[7]

Gerçekte, Seifert matrisleri bir K düğümünün F Seifert yüzeyinden oluşturulur.

Genellikle, bu K 'nin Seifert matrisi olarak söylenir.

Şimdi Seifert matrisinin birkaç özelliği ispatlayalım. Burada M_K ile K düğümünün veya halkasının Seifert matrisi gösterilir.

Önerme 2.4.7. K yönlü bir düğüm(veya halka) ve $-K$ da K 'nin ters yönünde yönlendirilmiş olsun. Bu yönlendirme bir halkanın tüm bileşenleri üzerindeki ters yönlendirilmedir.

O halde M_K^T matrisi M_K 'nin transpozu olmak üzere $M_{-K} \stackrel{s}{\approx} M_K^T$ dir. [1]

Önerme 2.4.8. K^* , K 'nin ayna görüntüsü olsun, o halde $M_{K^*} \stackrel{s}{\approx} -M_K^T$ dir. [1]

2.5. Alexander Matrisleri

Bu başlıkta, Grup temsili verilen düğüm için Alexander matrisinin bulunmasını araştıracağız.

$\langle x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m \rangle$ G grubunun sonlu bir temsili olsun. Bu taktirde, bu temsile karşılık gelen matris

$$\left[\underline{a} \left(\theta \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right) \right]$$

şeklinde verilir. θ doğal halka homeomorfizmidir. [2],[3]

x_1, x_2, \dots, x_n grubun elemanları ve r_1, r_2, \dots, r_m de bu elemanlar arasındaki bağıntılardır. \underline{a} homeomorfizmi

$$\mathbb{Z} \langle x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m \rangle \rightarrow \mathbb{Z} \langle x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m \rangle / (\langle x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m \rangle')$$

dönüşümüne karşılık gelen doğal homeomorfizmdir. Bu dönüşüm genel manada komitatif olmayan grup halkasından, komitatif grup halkasına tanımlanan bir halka homeomorfizmidir. Sağ taraftaki grup halkası $\langle x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m \rangle'$ tarafından üretilen grup halkasıdır.

Örnek 2.5.1. $k > 1$ pozitif tamsayı, k_1 ve k_2 aralarında asal sayılar olmak üzere $k = k_1 \cdot k_2$ olsun. Bu durumda

$$\langle z; z^k \rangle \cong \langle x, y; x^{k_1}, y^{k_2}, x^{-1}y^{-1}xy \rangle = G$$

nin birinci grup temsili Alexander matrisi

$$[1 + z + z^2 + \dots + z^{k+1}]$$

dir.

ikinci grup temsili Alexander matrisi ise

$$\begin{bmatrix} 1 + x + \dots + x^{k_1-1} & 0 \\ 0 & 1 + y + \dots + y^{k_2-1} \\ x^{-1}y^{-1} - x^{-1} & x^{-1}y^{-1}x - x^{-1}y^{-1} \end{bmatrix}$$

matrisidir.[2]

Amacımız Alexander matrisinin denkleğini tanımlamaktır. Bu tanım grupların izomorfik olması esasına dayanır.

θ ve θ' dönüşümleri sırasıyla

$\mathbb{Z}F(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ den $\mathbb{Z} \langle x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m \rangle$ ye ve

$\mathbb{Z}F(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ den $\mathbb{Z} \langle x_1, \dots, x_n; r_1, \dots, r_m, r \rangle$ ye dönüşümlerdir.

Burada $r = \prod_{k=1}^q u_{i_k}^{-1} r_{i_k}^{\alpha_k} u_{i_k}$ olup u_{i_k} elemanı

$F(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ dedir (n bileşenli serbest grup) ve α_k tamsayıdır.

m x n tipindeki $A = \left[\underline{a} \left(\theta \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right) \right]$ matrisine birinci grup temsiline karşılık gelen

Alexander matrisi denir. [2],[4]

$\begin{bmatrix} A \\ * \end{bmatrix}$ formu (m+1) x n tipinde bir matristir. Bu matris aşağıdaki şekilde hesaplanır.

$$\begin{aligned} \underline{a} \left(\theta' \left(\frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \right) &= \underline{a} \theta' \frac{\partial}{\partial x_j} \prod_{k=1}^q (u_{i_k}^{-1} r_{i_k}^{\alpha_k} u_{i_k}) \\ &= \underline{a} \theta' \sum_{p=1}^q \left(\prod_{k=1}^{p-1} u_{i_k}^{-1} r_{i_k}^{\alpha_k} u_{i_k} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_{i_p}^{-1} r_{i_p}^{\alpha_p} u_{i_p}) \\ &= \sum_{p=1}^q \underline{a} \theta' \frac{\partial}{\partial x_j} (u_{i_p}^{-1} r_{i_p}^{\alpha_p} u_{i_p}) \quad \text{burada her k için } \theta'(r_{i_k}) = 1 \text{ dir. [7]} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u_{i_p}^{-1} r_{i_p}^{\alpha_p} u_{i_p}) = -u_{i_p}^{-1} \frac{\partial u_{i_p}}{\partial x_j} + u_{i_p}^{-1} \left(\frac{r_{i_p}^{\alpha_p} - 1}{r_{i_p} - 1} \right) \left(\frac{\partial r_{i_p}}{\partial x_j} \right) + u_{i_p}^{-1} r_{i_p}^{\alpha_p} \frac{\partial u_{i_p}}{\partial x_j} \quad \text{ve}$$

$$\theta' \frac{\partial}{\partial x_j} (u_{i_p}^{-1} r_{i_p}^{\alpha_p} u_{i_p}) = -\theta'(u_{i_p}^{-1}) \cdot \theta' \left(\frac{\partial u_{i_p}}{\partial x_j} \right) + \theta'(u_{i_p}^{-1}) \cdot \alpha_p \cdot \theta' \left(\frac{\partial r_{i_p}}{\partial x_j} \right) + \theta'(u_{i_p}^{-1}) \cdot \theta' \left(\frac{\partial u_{i_p}}{\partial x_j} \right)$$

olur ki burada

$$\theta' \left(\frac{r_{i_p}^{\alpha_p} - 1}{r_{i_p} - 1} \right) = \alpha_p \quad \text{ve her } p \text{ için } \theta'(r_{i_p}) = 1 \quad \text{dir.}$$

$$\underline{a} \left(\theta' \left(\frac{\partial r}{\partial x_j} \right) \right) = \sum_{p=1}^q \underline{a}(\theta'(u_{i_p}^{-1})) \cdot \alpha_p \cdot \underline{a} \left(\theta' \left(\frac{\partial r_{i_p}}{\partial x_j} \right) \right) \quad \text{matrisine de ikinci grup temsiline}$$

karşılık gelen *Alexander matrisi* denir. [2]

$$A = \left[\underline{a} \left(\theta \left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j} \right) \right) \right] \quad \text{birinci grup temsiline karşılık gelen Alexander matrisi ve}$$

$$\underline{a} \left(\theta' \left(\frac{\partial}{\partial y} y^{-1} w \right) \right) = -y^{-1} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\begin{bmatrix} A & O_{m,1} \\ * & -y^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{ikinci grup temsiline karşılık gelen Alexander matrisidir. Böylece}$$

birinci grup temsiline karşılık gelen Alexander matrisinden ikinci grup temsiline karşılık gelen Alexander matrisi elde edilmiştir.

Teorem 2.5.2.(Alexander matrisinin tekliği) Kabul edelim ki G grubu iki farklı temsile sahip olsun. Bunların matrisleri denktir.[2]

2.6. Alexander Matrisinin Elemanter İdeali

R birimi 1 olan deęişmeli bir halka olsun. A da bu halka üzerinde bir Alexander matrisi olsun.

A , $m \times n$ tipinde bir matris ise $E(A)$, A matrisinin $(n-1) \times (n-1)$ tipinde R tarafından gerilen ideali olarak tanımlanır ve bu ideale *elemanter ideal* denir. [2]

Eğer $n=1$ ise $E(A)=(1)$ dir.

Eğer $m < n-1$ ise $E(A)=(0)$ dir. [2]

Örnek 2.6.1 k bir tamsayı olsun.

$\langle x_1; x_1^k \rangle$ grup temsilinin Alexander matrisi,

$$\begin{bmatrix} 1 + x_1 + \dots + x_1^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ Alexander matrisiyle denktir ve elemanter ideali (1) dir.}$$

Teorem 2.6.2. A_1 ve A_2 denk matrisler ise bu durumda $E(A_1) = E(A_2)$ dir. [4]

3. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bir düğümün Alexander polinomu düzenli diyagram yoluyla hesaplandığı gibi, düğümün grup temsilinden hareketle de Alexander polinomu hesaplanabilir. Önce temsili verilen düğümün Alexander polinomunu elde edeceğiz. Daha sonra, esas konumuz olan düzenli diyagramı verilen düğümün polinomunu hesaplama işlemine döneceğiz.

3.1. Bir Düğümün Grup Temsilinden Alexander Polinomun Hesaplanması

σ , n -örgüsüne karşılık gelen düğüm $K(\sigma)$ olsun. Bu durumda bu düğümün grubu $\underline{G}(K(\sigma)) \cong \langle x_1, \dots, x_n; x_1 \bar{\sigma} x_1^{-1}, \dots, x_{n-1} \bar{\sigma} x_{n-1}^{-1} \rangle$ dir.

Bu grubun Alexander matrisi de $A = [a_{ij}]$ dir.

Burada $1 \leq i \leq n-1$ ve $1 \leq j \leq n$ olacak şekilde

$$a_{ij} = \left(\frac{\partial(x_i \bar{\sigma} x_i^{-1})}{\partial x_j} \right)_{x_1 = \dots = x_n = t}$$
 şeklindedir.

Bu durumda $\underline{G}(K(\sigma))$ nin Alexander matrisi $\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial(x_i \bar{\sigma} x_i^{-1})}{\partial x_j} \right)_{x_1 = \dots = x_n = t} & 0_{n,1} \\ & i, j \leq n-1 \end{bmatrix}$ dir.

Bu ideal $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ üzerinde

$$\det \left[\left(\frac{\partial(x_i \bar{\sigma} \cdot x_i^{-1})}{\partial x_j} \right)_{x_1 = \dots = x_n = t} \right]_{i,j \leq n-1}$$
 elemanı tarafından üretilen idealdir. Bu idealin

üretici olan $f(t)$, sıfırdan farklı pozitif sabitler sahip, tam katsayılı t ye bağlı bir polinomdur. Bu polinoma $K(\sigma)$ düğümünün *Alexander polinomu* denir. [2]

Örnek 3.1.1. (1) e örgüsü ile verilen aşıkâr düğümün grup temsili $\langle x_1; - \rangle$ dir.

Bunun Alexander matrisi 1×1 tipinde bir 0 matrisidir. Bu da (1) elemanter idealine karşılık gelir ve Alexander polinomu 1 dir. [2]

(2) 2_örgülü σ_1^{-3} örgüsüne karşılık gelen sağ-el trefoil düğümün grup

temsili $\langle x_1, x_2; x_1 \sigma_1^{-3} = x \rangle = \langle x_1, x_2; x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 x_2 \rangle$ dir.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 x_2) = -x_1^{-1} - x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} + x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1 x_2) = -x_1^{-1} x_2^{-1} + x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} + x_1^{-1} x_2^{-1} x_1^{-1} x_2 x_1$$

Buradan Alexander matrisi

$$\begin{bmatrix} -t^{-1} + t^{-2} - t^{-3} & t^{-1} - t^{-2} + t^{-3} \end{bmatrix}.$$

Alexander polinomu da $1 - t + t^2$ dir. [2]

(3) 3_örgülü $\sigma_1^{-3} \sigma_2^{-3}$ örgüsüne karşılık gelen Şekil 3.1.1 deki Granny

düğümünün grup temsili $\langle x_1, x_2, x_3; x_1 x_2 x_1 = x_2 x_1 x_2, x_2 x_3 x_2 = x_3 x_2 x_3 \rangle$ dir.



Şekil 3.1.1

Bunun Alexander matrisi

$$\begin{bmatrix} -t^{-1} + t^{-2} - t^{-3} & t^{-1} - t^{-2} + t^{-3} & 0 \\ 0 & -t^{-1} + t^{-2} - t^{-3} & t^{-1} - t^{-2} + t^{-3} \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} -(1-t+t^2) & 1-t+t^2 & 0 \\ 0 & -(1-t+t^2) & 0 \end{bmatrix}$$

Alexander polinomu da $(1-t+t^2)^2$ dir. [2]

(4) 3_örgülü $(\sigma_2^{-1}\sigma_1)^2$ örgüsüne karşılık gelen 8 şekilli düğümün

grup temsili $\langle x_1, x_2; x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}x_1 = x_2x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1} \rangle$ dir.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1})$$

$$= -x_1^{-1} - x_1^{-1}x_2x_1^{-1} + x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1} - x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-1} +$$

$$+ x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-1}x_2$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} (x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1})$$

$$= x_1^{-1} - x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1} + x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1 - x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-1} -$$

$$- x_1^{-1}x_2x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2x_1^{-1}x_2x_1x_2^{-1}.$$

Buradan Alexander matrisi

$$\begin{bmatrix} 1-3t^{-1}+t^{-2} & -1+3t^{-1}-t^{-2} \end{bmatrix}.$$

Alexander polinomu da $1-3t+t^2$ dir. [2]

3.2. Alexander Polinomunun Seifert Matrisinden Hesaplanması

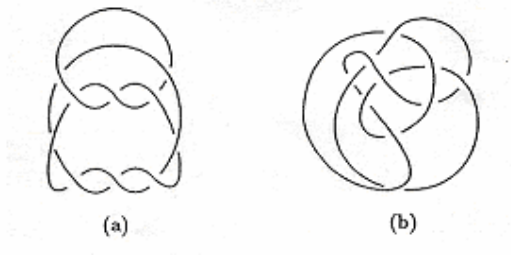
Bir Seifert matrisinden bir düğüm invaryantı bulmak için Teorem 2.4.4 de tanımlanan Λ_1 ve $\Lambda_2^{\pm 1}$ işlemleri altında değişmeyen araçlara ihtiyacımız vardır. Alexander polinomu böyle bir polinomdur. Ayrıca, Alexander polinomu sadece Seifert matrisinden çıkarabildiğimiz bir invaryant değildir.

Seifert matrisin özelliklerinden Λ_1 ve Λ_2 yoluyla bir düğüm (veya halkanın) invaryantı bulunacaktır. K düğümünün M Seifert matrisinin determinanı bir düğüm invaryantı değildir. Fakat başlangıçta M nin determinanı bir invaryant olarak düşünülürdü.

Önerme 3.2.1. M bir K düğümünün Seifert matrisi olsun. Bu durumda $|\det(M+M^T)|$ ifadesi K düğümünün bir invaryantıdır. Bu invaryanta K nin determinanı denir.[1]

Bir K düğümünün determinantının K nin yönlenmesinden tamamen bağımsız olduğu ispatlanmıştır.

Bu invaryant yani bir düğüm determinanı oldukça eski bir invaryanttır. Bir aşıkâr düğümün determinanı 1 dir. Fakat, determinanı 1 olan her düğüm de aşıkâr düğüm olmak zorunda değildir.



Şekil 3.2.1

Örnek 3.2.2. Trefoil düğümünün determinanı 3 olduğundan aşıkâr düğümüne eşit değildir. Şekil 3.2.1. (a) ve (b) determinanı 1 olan fakat aşıkâr düğüm olmayan farklı düğüm örnekleridir.

Önerme 3.2.3. M , K düğümünün (fakat K bir halka olmasın) Seifert matrisi olsun. Bu durumda

$$\det(M - M^T) = 1$$

dir. [4]

Bu aşamada K düğümünün Seifert matrisinden elde edilen polinomu yazmak için t değişkenli $\det(M - tM^T)$ determinantını göz önüne alalım ve Λ_1 ve $\Lambda_2^{\pm 1}$ dönüşümleri altında bu polinomun nasıl değişeceğini görelim.

İlk önce $\det P = \det P^T = \pm 1$ için

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_1(M - tM^T)) &= \det[P(M - tM^T)P^T] \\ &= \det(M - tM^T) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

Bu yüzden bu determinant Λ_1 işlemiyle değişmez. Bununla birlikte eğer Λ_2 işlemini uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \det(\Lambda_2(M - tM^T)) &= \det \begin{bmatrix} M - tM^T & \begin{matrix} b_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ b_m & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} -b_1t - \dots - b_mt \\ 0 \dots 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 \\ -t & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} M - tM^T & \begin{matrix} b_1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ b_m & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \dots 0 & 0 & 1 \\ 0 \dots 0 & -t & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} \\ &= t \det(M - tM^T) \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

Benzer şekilde

$$\det(\Lambda_2^{-1}(M_2 - tM_2^T)) = t^{-1} \det(M_1 - tM_1^T)$$

bulunabilir.[1]

Bu üç formül bir sonraki teoreme götürür.

Teorem 3.2.4. M_1 ve M_2 bir K düğümünün Seifert matrisi olsunlar. Ayrıca r ve s sırasıyla M_1 ve M_2 nin dereceleriye

$$t^{\frac{-r}{2}} \det(M_1 - tM_1^T) = t^{\frac{-s}{2}} \det(M_2 - tM_2^T)$$

eşitliği elde edilir.[1]

Buradan k yıncı dereceden K düğümünün bir Seifert matrisi M ise bu durumda

$$\Delta_K(t) = t^{\frac{-k}{2}} \det(M - tM^T)$$

K nin bir invaryantıdır. Bu invaryanta K nin *Alexander polinomu* denir. [1]

$\Delta_K(t)$ negatif üslü terimlere sahiptir. Fakat $\Delta_K(t)$ uygun bir çarpanla genişletilirse sadece pozitif üslere sahip bir polinom elde edilebilir. Eğer K tek

bileşenli bir halka ise k tek sayıdır. Bu yüzden $t^{\frac{1}{2}} (= \sqrt{t})$ veya $t^{-\frac{1}{2}} (= \frac{1}{\sqrt{t}})$

yazılabilir. [1]

Teorem 3.2.5. K bir düğüm olsun. O halde $\Delta_K(t)$ bir simetrik Laurent polinomudur ve bu yüzden

$$\Delta_K(t) = a_{-n} t^{-n} + a_{-(n-1)} t^{-(n-1)} + \dots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n$$

ve

$$a_{-n} = a_n, a_{-(n-1)} = a_{n-1}, \dots, a_{-1} = a_1 \quad (3.2.3)$$

ispat: M , k dereceden K nın bir Seifert matrisi olsun. K bir düğüm olduğu müddetçe k çifttir. Bu yüzden;

$$\begin{aligned}\Delta_K(t^{-1}) &= t^{\frac{k}{2}} \det(M - t^{-1}M^T) = t^{-\frac{k}{2}} \det(tM - M^T) \\ &= (-1)^k t^{\frac{k}{2}} \det(M^T - tM) = t^{-\frac{k}{2}} \det(M - tM^T)^T \\ &= t^{-\frac{k}{2}} \det(M - tM^T) = \Delta_K(t)\end{aligned}$$

dir. Bu (3.2.3) den görülür. [1]

Önerme 3.2.6. $\Delta_K(-1)$ bir K düğümünün determinantına eşittir.

ispat: $|\Delta_K(-1)| = \left| (-1)^{\frac{k}{2}} \det(M + M^T) \right| = \left| \det(M + M^T) \right|$

olur. [4]

Örnek 3.2.7. K aşıkâr düğüm ise $\Delta_K(t) = 1$ dir. [4]

Örnek 3.2.8. K , Örnek 2.4.2 deki sağ-el trefoil (yonca yaprağı) düğümü ise bu durumda

$$\begin{aligned}\Delta_K(t) &= t^{-1} \det(M - tM^T) = t^{-1} \det \begin{bmatrix} -(1-t) & -t \\ 1 & -(1-t) \end{bmatrix} \\ &= t^{-1} (-1 + t)\end{aligned}$$

olur. [1]

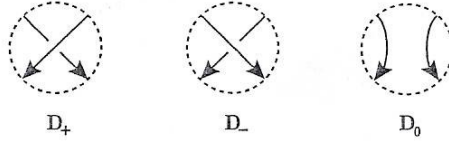
3.3. Alexander-Conway Polinomu

Alexander polinomunun Seifert yüzeyinden elde edilmesi işlemi uzun ve zahmetli bir işlemdir. 1960 lı yıllarda Conway düzenli diyagramı verilen düğümler için daha kolay ifade edilebilen bir polinom ifadesi vermiştir.

Tanım 3.3.1. Belirli bir K düğümü ile verilen bir z değişkeni için $\nabla_K(z)$ aşağıdaki iki aksiyomu sağlar:

Aksiyom 1 Eğer K aşık düğüm ise $\nabla_K(z) = 1$ dir.

Aksiyom 2 D_+ , D_- , D_0 sırasıyla K_+ , K_- , K_0 düğümlerinin düzenli diyagramları olsun. Bu düzenli diyagramlar, bir geçiş noktası komşuluğunda Şekil 3.3.1 deki tarzda gösterilir.



Şekil 3.3.1

Burada D_+ nin (veya D_- nin) bu komşuluğun içinde yalnız pozitif (veya negatif) bir geçiş noktası mevcuttur.

Bu durumda bir düğümün Laurent polinomları arasındaki bağıntı aşağıdaki gibidir:

$$\nabla_{K_+}(z) - \nabla_{K_-}(z) = z \cdot \nabla_{K_0}(z) \quad (3.3.1)$$

Yukarıda oluşturulan bu üç D_+ , D_- , D_0 düzenli şekillerine *Skein diagramı* denir ve (3.3.1) bağıntısına K_+ , K_- , K_0 Laurent polinomları arasındaki *Skein bağıntısı* denir. Ayrıca D_+ , D_- , D_0 'ın birisinin diğer ikisinden biriyle yer değiştirmesi işlemine *Skein işlemi* denir.

K_+ , K_- , K_0 düğümleri ve kendi düzenli şekilleri olan D_+ , D_- , D_0 lar arasında bir ayırım yapmaya gerek olmadığından $\nabla_{K_+}(z)$ nin yerine $\nabla_{D_+}(z)$ yazacağız.

(3.3.1) de tanımlanan $\nabla_K(z)$ polinomuna *Conway polinomu* (Alexander-Conway) denir. Bununla beraber $\nabla_K(z)$ nin temelde Alexander polinomuyla aynı olduğu görülebilir. [1]

Teorem 3.3.2.
$$\Delta_K(z) = \nabla_K\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$$

Diğer bir deyişle, Conway polinomunda z yerine $\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$ yazılırsa bu dönüşüm

Alexander polinomunu verir. Bu ilişkiden dolayı $\nabla_K(z)$ ye genellikle *Alexander-Conway polinomu* denir. [1]

Alexander polinomunu hesaplamak için Skein bağıntısını kullanmadan önce aşağıdaki önermeyi ispatlayacağız.

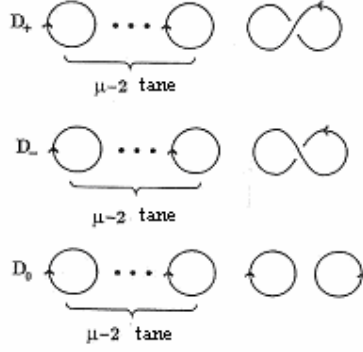
Önerme 3.3.3. $(\mu \geq 2)$ μ -bileşenli O_μ aşık halkasının Alexander polinomu 0 dır.

İspat: Şekil 3.3.5 de Skein diyagramlarına karşılık gelen Skein formülü ;

$$\nabla_{D_+}(z) - \nabla_{D_-}(z) = z\nabla_{D_0}(z)$$

dir. [1]

Her iki D_+ ve D_- $(\mu-1)$ -bileşenli aşık halkalar olduğunda $\nabla_{D_+}(z) = \nabla_{D_-}(z)$ olur. Buradan $0 = z\nabla_{D_0}(z)$ olur ve buradan da $\nabla_{D_0}(z) = 0$ olur.

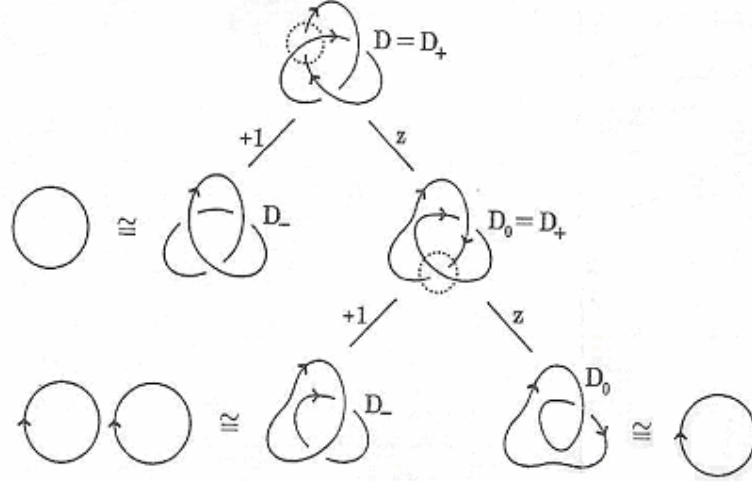


Şekil 3.3.5

Genellikle Conway polinomunu hesaplamak için en etkili yol Skein diyagramını kullanmaktır. Hesaplamaları kolaylaştırmak için (3.3.1) aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$\left. \begin{aligned} \nabla_{D_+}(z) &= \nabla_{D_-}(z) + z\nabla_{D_0}(z) \\ \nabla_{D_-}(z) &= \nabla_{D_+}(z) - z\nabla_{D_0}(z) \end{aligned} \right\} \quad (3.3.2)$$

Örnek 3.3.4. K , sağ-el trefoil düğümü ve D , K nın Şekil 3.3.6 da ki düzenli diyagramı olsun.



Şekil 3.3.6

D üzerindeki noktalı daire yardımıyla bir Skein işlemi yapacağız. Çünkü bu dairesel geçiş noktası pozitif yönlüdür, bu yüzden buna D_+ denmesi gerekir. Bu D_+ diyagramı bir Skein işlemiyle diğer iki düzenli diyagrama dönüşür:

Birisi, pozitif geçiş noktasıyla negatif geçiş noktasının değişmesiyle (alt-üst edilmesiyle) D_- düzenli diyagramı ve diğeri, pozitif geçiş noktalarının kaldırılmasıyla Şekil 3.3.6 daki gibi D_0 elde edilir. Şimdi, D_+ ve D_- yi $+1$ çizgisiyle, benzer şekilde D_+ ile D_0 ı da z çizgisiyle birleştirilir. Bu ayrımlar (3.3.2) den $\nabla_{D_-}(z)$ ve $\nabla_{D_0}(z)$ nin katsayılarıyla mümkündür. Yine Skein diyagramıyla, bir çift çizgiyle $\nabla_{D_+}(z)$ nin değerini

$$+1\nabla_{D_-}(z) + z\nabla_{D_0}(z)$$

için bulabiliriz.

D_- nin bir aşıkâr düğüm olduğu ve $\nabla_{D_-}(z) = 1$ olduğu anlaşılır. Buradan D_- yeni bir dal daha oluşturmaz. O halde bir daha Skein işlemini uygulamayız.

Bununla beraber D_0 aşıkâr düğüm (veya halka) değildir. Böylece tekrar Skein işlemi uygulanabilir. Şekil 3.3.6 da görüldüğü gibi D_0 ı yine D_+ olarak düşünerek geçiş noktası daire içine alınır. Çünkü Şekil 3.3.6 da görüldüğü gibi dairenin içinde geçiş noktası pozitiftir. Bu yüzden D_+ olarak düşünürüz. O halde öncekiler gibi sol tarafa D_- ile sağ tarafa D_0 ile simgeleyebiliriz.

Şekil 3.3.6 daki gibi , tekrar $+1$ ve z çizgilerini de çizebiliriz ve (3.3.2) anlamında katsayılarını buluruz. Bundan sonra artık D_0 ın bir aşıkâr düğüm ve D_- nin ayrılmış halkalar olduğunu görebiliriz. Buna göre bu diyagramlar yeni dallara ayrılmazlar. Böylece K için Skein diyagramı tamamlanır.

$\nabla_K(z)$, K nın orijinal D düzenli diyagramı ile başlayan, sonuçta ortaya çıkan aşıkâr düğümlerin her biri doğru parçalarının üzerindeki katsayılar ile çarpılarak elde edilen ifadenin toplamı Conway polinomu olarak bulunur.

$$\nabla_K(z) = +1\nabla_0(z) + z\nabla_{00}(z) + z^2\nabla_0(z)$$

$\nabla_0(z) = 1$ ve $\nabla_{00}(z) = 0$ olduğundan Conway polinomu

$$\nabla_K(z) = 1 + z^2$$

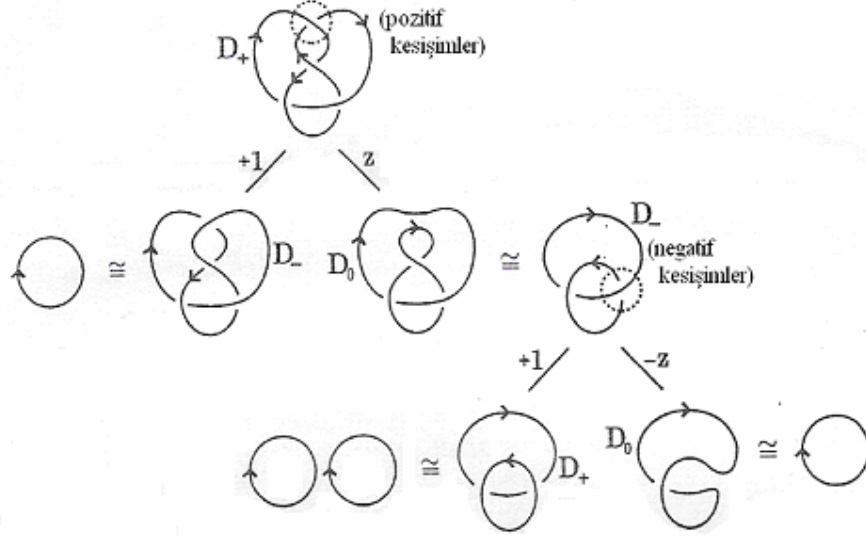
dir.

Buradan Teorem 3.3.2 uygulanırsa

$$\nabla_K(t) = 1 + \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 = t^{-1} - 1 + t$$

elde edilir. Bu ise sağ-el trefoil düğümünün Alexander polinomudur. [1],[9]

Örnek 3.3.5. 8 Şekli düğümün Conway polinomu için Skein diyagramı Şekil 3.3.7 deki gibidir.



Şekil 3.3.7

Aşağıdaki hesaplama ise Skein diyagramının sonucudur:

$$\nabla_K(z) = \nabla_0(z) + z\nabla_{00}(z) - z^2\nabla_0(z)$$

buradan Conway polinomu

$$\nabla_K(z) = 1 - z^2$$

bulunur. Alexander polinomu da

$$\nabla_K(t) = 1 - \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 = -t^{-1} + 3 - t$$

elde edilir. [1]

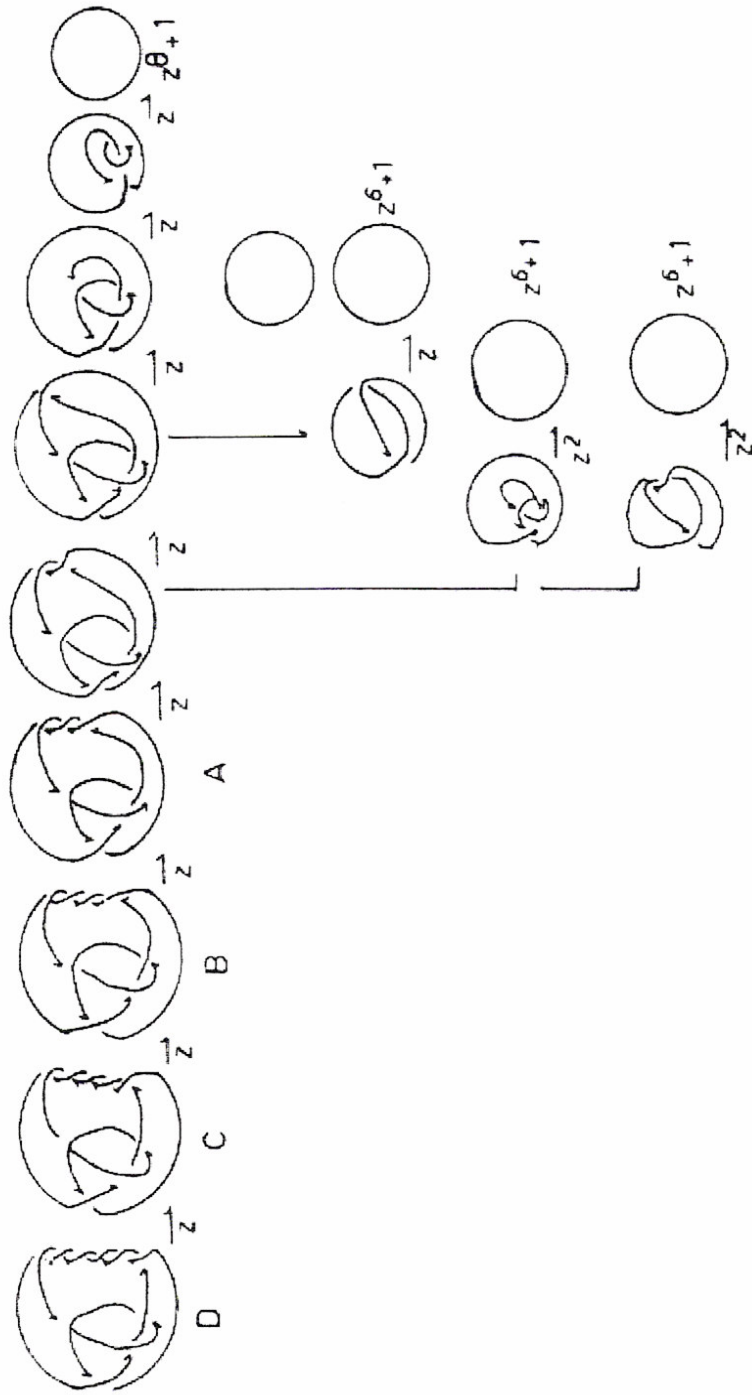
Örnek 3.3.5. Şekil 3.3.8 deki (10_5) düğümünün Conway polinomu Şekil 3.3.9 daki adımlarla,

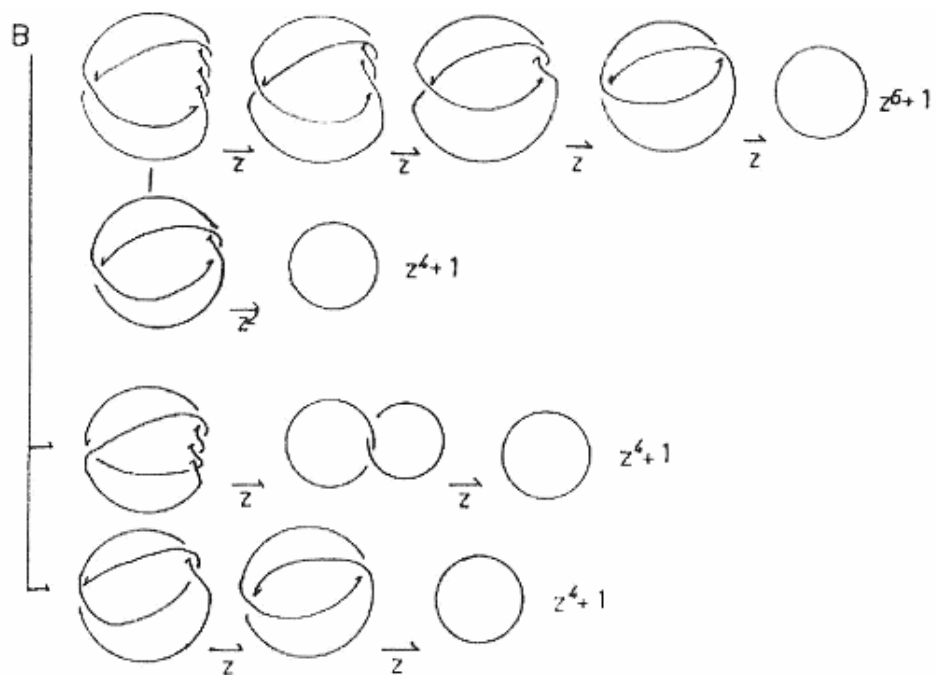
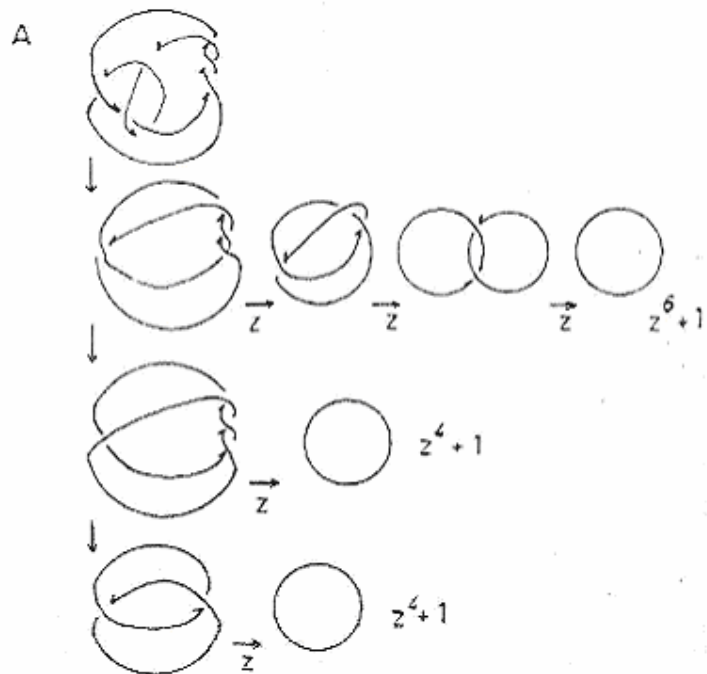
$$\nabla_K(z) = z^8 + 4z^6 + 7z^4 + 5z^2 + 1$$

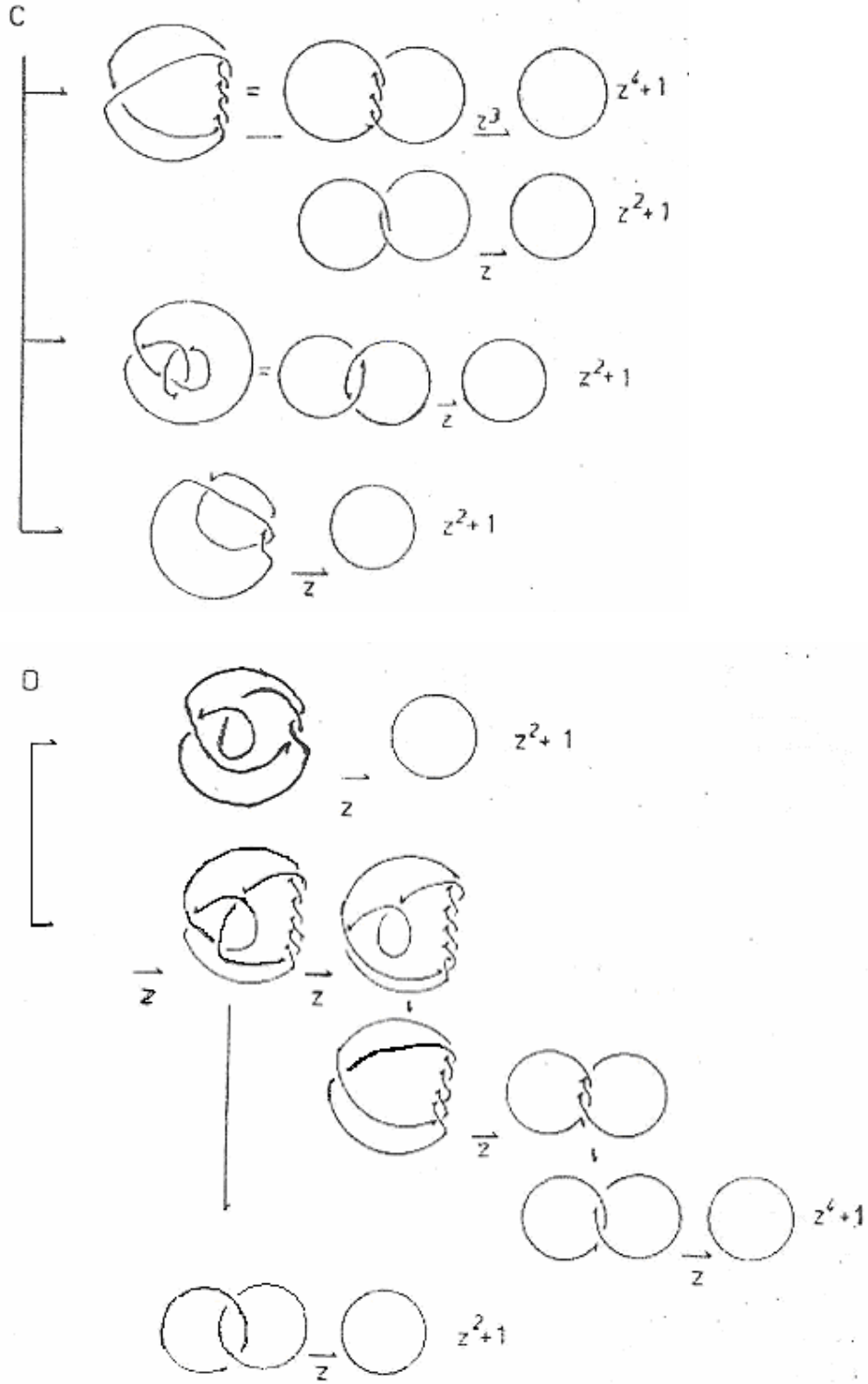
olarak hesaplanmıştır.



Şekil 3.3.8







Şekil 3.3.9

Önerme 3.3.6. Bir K düğümü için $\Delta_K(1) = 1$ dir.

İspat: Teorem 3.3.2 de $t=1$ alırsak $\Delta_K(1) = \nabla_K(0)$ dir. Diğer taraftan (3.3.1) ile $z=0$ alınırsa $\nabla_{D^+}(0) = \nabla_{D^-}(0)$ bulunur. Buradan K için bir tek düğüm çözme işlemi uygulanırsa $\nabla_K(0)$ 'ın değeri değişmez. Böylece K için bu işlem bir çok kez uygulandığında en sonunda K bir aşık düğüme dönüşür. Çünkü, daha önceden bilindiği gibi, keyfi bir düğümün düzenli diyagramını, onun geçiş noktalarını koparma ya da alt-üst yapmak suretiyle, bir aşık düğümün düzenli diyagramıyla değiştirilebilir. Sonuç olarak

$$\nabla_K(0) = \nabla_0(0) = 1$$

elde edilir. [1]

Teorem 3.3.7. $f(t)$ Laurent polinomunun aşağıdaki iki şartı sağlasın.

$$(1) f(1) = 1$$

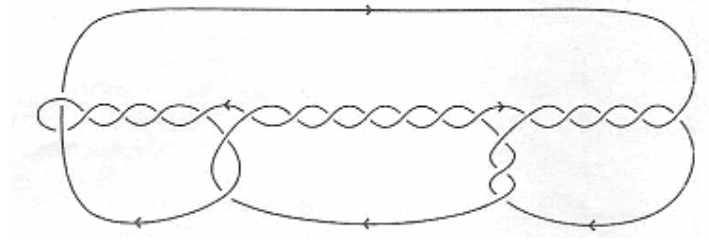
$$(2) f(t) = f(t^{-1}) \quad (3.4.1)$$

Burada Alexander polinomu $f(t)$ olan düğüm vardır. Benzer olarak $g(z)$, z^2 nin tamsayı bir polinomu ise $g(0) = 1$ olmak üzere polinomu $g(z)$ Alexander-Conway polinomu olan bir K düğümü vardır.

Bu ispatın yapılması için, F yönlendirilmiş yüzeyinde M , k -basamaktan Seifert matrisi olmak üzere

$$t^{-\frac{k}{2}} \det(tM - M^T) = f(t)$$

olması gerekir. [1]



Şekil 3.3.10

Örnek 3.3.8. Şekil 3.3.10 deki düğüm için Alexander polinomu

$$f(t)=2t^{-2} - 10t^{-1} + 17 - 10t + 2t^2 (=1 - 2z^2 + 2z^4)$$

dir. [1]

Teorem 3.3.9. K bir düğüm olsun.

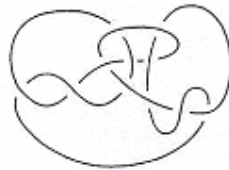
(1) $-K$, K nın yönlenmesinin tersi yönde yönlenmiş düğüm ise

$$\Delta_K(t) = \Delta_{-K}(t) \text{ dir.}$$

(2) K nın ayna görüntüsü olan düğüm K^* ise

$$\Delta_{K^*}(t) = \Delta_K(t) \text{ dir. [1]}$$

KT düğümü



Şekil 3.3.11

Aşık düğümün Alexander polinomu 1 olup Alexander polinomu 1 olan fakat aşık olmayan düğümler de vardır. Şekil 3.3.11 de gösterilen **Kinoshita-Terasako** düğümünün Alexander polinomu 1 dir, fakat bu düğüm aşık düğüm değildir.

Örnek 3.3.10. Eğer L ayırık halka ise $\Delta_L(t)=0$ dır.

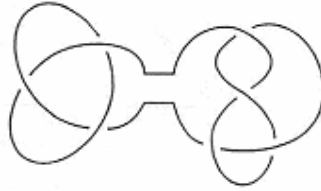
Önerme 3.3.3 den $\nabla_L(z) = 0$ dir ve böylece $\Delta_L(t) = 0$ olur. [1]

Teorem 3.3.11. $K_1 \# K_2$, K_1 ve K_2 düğümlerinin (halkalarının) direk toplamları olsun. O halde

$$\Delta_{K_1 \# K_2}(t) = \Delta_{K_1}(t) \cdot \Delta_{K_2}(t)$$

dir. [1],[4]

ispat: Öncelikle sırasıyla K_1 ve K_2 düğümlerinin F_1 ve F_2 Seifert yüzeyleri oluşturulur. Daha sonra uzun bir çizgiyle bu yüzeyleri birleştirerek oluşturulan $K_1 \# K_2$ yüzeyi de Seifert yüzeyi olur.(Şekil 3.3.12)



Şekil 3.3.12

M_1 ve M_2 , K_1 ve K_2 nin F_1 ve F_2 den elde edilen Seifert matrisleri olduğu düşünülürse, $K_1 \# K_2$ nin Seifert matrisi

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{bmatrix}$$

dir.

Böylece ,

$$\det(M - tM^T) = \det(M_1 - tM_1^T) = \det(M_2 - tM_2^T)$$

olur. [4]

3.4. Jones Polinomları

Jones polinomları, mekanik ile ilgili çalışmalarda kullanılmaktadır.

Tanım 3.4.1. K bir yönlendirilmiş düğüm ya da halka ve D de K nın düzenli diyagramı olsun. Bu durumda K nın $V_K(t)$ Jones polinomu aşağıdaki aksiyomlar yoluyla tek bir şekilde tanımlanır:

Aksiyom 1: K bir aşık düğüm ise $V_K(t) = 1$ dir.

Aksiyom 2: D_+ , D_- , D_0 Skein diyagramları ise aşağıdaki Skein dönüşümünü sağlar;

$$\frac{1}{t}V_{D_+}(t) - tV_{D_-}(t) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{D_0}(t) \quad (3.4.1)$$

Bu polinom \sqrt{t} için bir Laurent polinomu olduğundan $(\sqrt{t})^2 = t$ dir ve t negatif üslere sahip olabilir. $V_K(t)$ polinomu K nın bir invariantıdır.

Jones polinomunun hesaplanması da Alexander polinomunun hesaplanmasıyla benzerlik taşır. Fakat farklı yönleri de vardır. Bunun için de yönlü bir Skein diyagramına ihtiyaç vardır.

Skein diyagramı kullanarak, μ -bileşenli O_μ aşık halkası için Jones polinomu

$$V_K(t) = f_1(t).V_{O_1}(t) + f_2(t).V_{O_2}(t) + \dots + f_n(t).V_{O_n}(t)$$

şeklindedir.

Önerme 3.3.3 de ($\mu \geq 2$ olmak üzere) O_μ aşık halkası için Alexander polinomunun 0 olduğu gösterilmişti. Asıl fark bu halkanın Jones polinomunun 0'a eşit olmamasıdır.

Önerme 3.4.2. μ -bileşenli O_μ aşık halkası için;

$$V_{O_\mu}(t) = (-1)^{\mu-1} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-1} \quad (3.4.2)$$

İspat: μ için tümevarım yöntemini kullanırsak, $\mu = 1$ ise Aksiyom 1 sağlanır. Şimdi

$$V_{O_{\mu-1}}(t) = (-1)^{\mu-2} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-2}$$

olduğunu kabul edelim.

Şekil 3.3.5 deki Skein diyagramı göz önünde bulundurulursa $D_+ \cong D_- \cong O_{\mu-1}$ ve

$D_0 \cong O_\mu$ iken (3.4.1) Skein dönüşümü ve yukarıdaki kabulden,

$$\frac{1}{t} (-1)^{\mu-2} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-2} - t (-1)^{\mu-2} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-2} = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) V_{O_\mu}(t),$$

ve yukarıdaki formülün sol tarafı paranteze alınıp -1 ile çarpılırsa,

$$(-1)^{\mu-2} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-2} \left(\frac{1}{t} - t \right) = (-1)^{\mu-1} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-2} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

$$V_{O_\mu}(t) \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) = (-1)^{\mu-1} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-1} \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$$

$$V_{O_\mu}(t) = (-1)^{\mu-1} \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^{\mu-1}$$

sonucu doğrudan (3.4.2) yi verir. Bu da ispatı tamamlar. [1]

Alexander polinomunda olduğu gibi, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

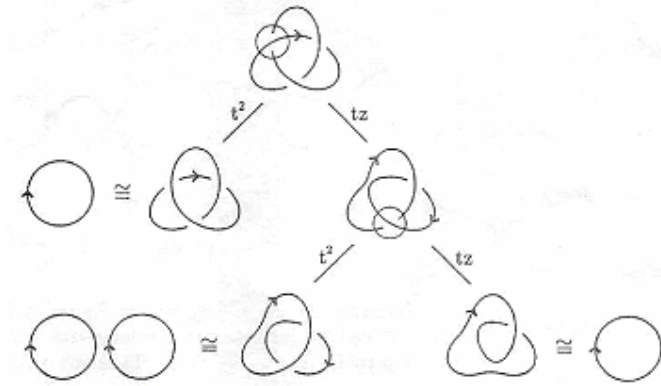
$$V_{D_+}(t) = t^2 V_{D_-}(t) + tz V_{D_0}(t)$$

$$V_{D_-}(t) = t^{-2} V_{D_+}(t) - t^{-1} z V_{D_0}(t)$$

burada $z = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)$ dir.

Şimdi Jones polinomunun nasıl hesaplandığına bir örnek verelim.

Örnek 3.4.3. Şekil 3.4.1 de sağ-el trefoil düğümünün Jones polinomunun hesaplanması için Skein diyagramı çizildi. Bu örnek Şekil 3.3.6 ile karşılaştırılması açısından çok ilginçtir.



Şekil 3.4.1

Bu Skein diyagramından dolayı

$$V_K(t) = t^2 V_0(t) + t^3 z V_{00}(t) + t^2 z^2 V_0(t)$$

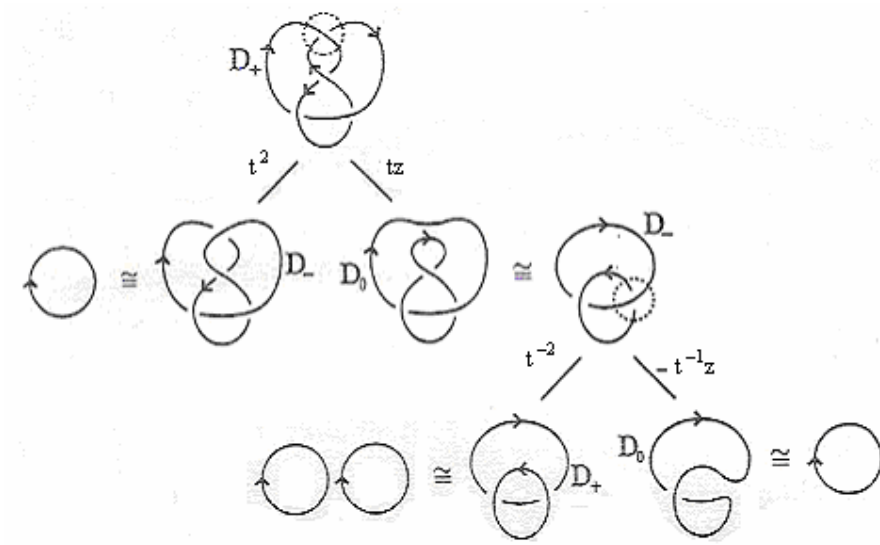
$$V_0(t) = 1 \quad , \quad V_{00}(t) = (-1)\left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad , \quad z = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \quad \text{olduğundan}$$

Jones polinomu

$$V_K(t) = t + t^3 - t^4$$

elde edilir. [1]

Örnek 3.4.4. 8 şekilli (4_1) düğümünün Jones polinomu aşağıdaki Skein diyagramı ile hesaplanır.



Şekil 3.4.2

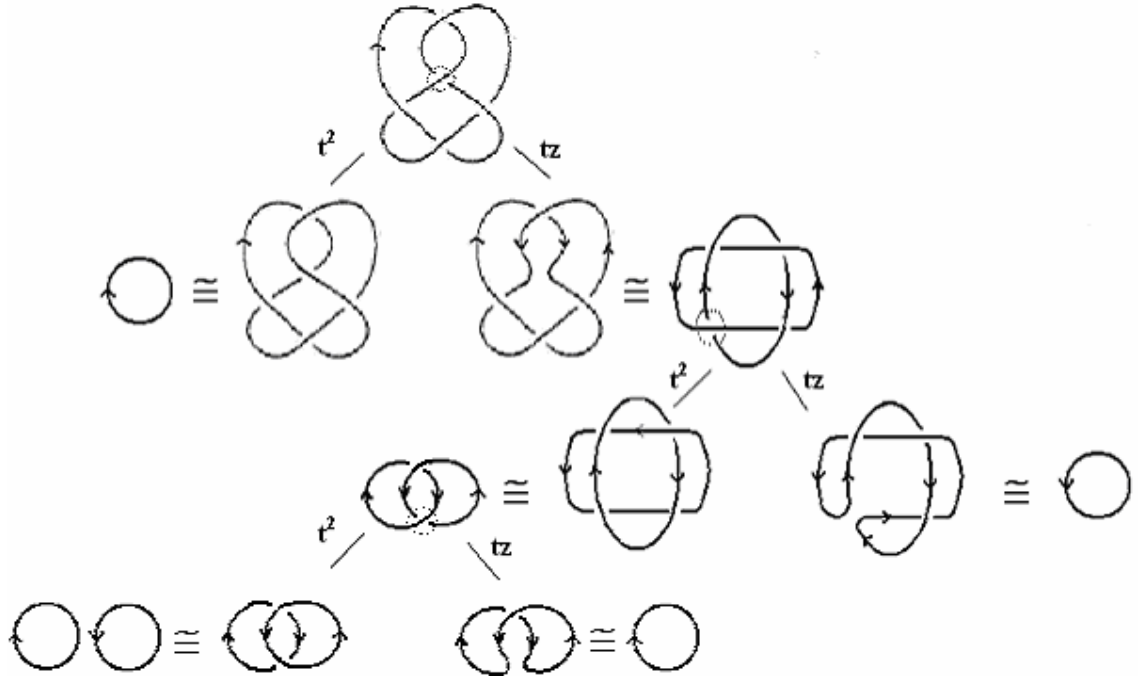
$$\begin{aligned} V_K(t) &= t^2 V_0(t) + t^{-1} z V_{00}(t) - t^0 z^2 V_0(t) \\ &= t^2 - t^{-1} \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) - \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 \\ &= t^2 - t^{-1} \left(t - \frac{1}{t}\right) - \left(t - 2 + \frac{1}{t}\right) \\ &= t^2 - 1 + t^{-2} - t + 2 - t^{-1} \\ &= t^2 - t^{-1} + 1 - t + t^2 \\ &= t^{-2} (1 - t + t^2 - t^3 + t^4) \end{aligned}$$

Böylece 8 şekilli düğümün Jones polinomu

$$V_K(t) = t^{-2}(1 - t + t^2 - t^3 + t^4)$$

elde edilir.[1]

Örnek 3.4.5. Şekil 2.2.5(a) daki (5_2) düğümünün Jones polinomunu aşağıdaki Skein diyagramı ile hesaplanır.



Şekil 3.4.3

$$\begin{aligned}
 V_K(t) &= t^2 V_0(t) + t^5 z V_{00}(t) + t^4 z^2 V_0(t) + t^2 z^2 V_0(t) \\
 &= t^2 - t^5 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} \right) + t^4 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 + t^2 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right)^2 \\
 &= t^2 - t^5 \left(t - \frac{1}{t} \right) + t^4 \left(t - 2 + \frac{1}{t} \right) + t^2 \left(t - 2 + \frac{1}{t} \right) \\
 &= t^2 - t^6 + t^4 + t^5 - 2t^4 + t^3 + t^3 - 2t^2 + t \\
 &= t - t^2 + 2t^3 - t^4 + t^5 - t^6
 \end{aligned}$$

Böylece (5_2) düğümünün Jones polinomu

$$V_K(t) = t - t^2 + 2t^3 - t^4 + t^5 - t^6$$

bulunur.

Teorem 3.4.6. $K_1 \# K_2$ iki düğüm ya da halkanın direk toplamı ise bu durumda

$$V_{K_1 \# K_2}(t) = V_{K_1}(t) \cdot V_{K_2}(t)$$

dir. [1]

Teorem 3.4.7.
$$V_{D_1 \amalg D_2}(t) = -\left(\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{D_1}(t) \cdot V_{D_2}(t)$$

dir. [7]

Teorem 3.4.8. $-K$, K nın ters yönünde yönlenmiş bir düğüm ise,

$$V_{-K}(t) = V_K(t)$$

dir. [7]

Teorem 3.4.9. K^* , K nın ayna görüntüsü olan düğüm ise,

$$V_{K^*}(t) = V_K(t^{-1})$$

dir.

Böylece, K amphicheiral bir düğüm ise $V_K(t) = V_K(t^{-1})$ olur, yani, $V_K(t)$

simetriktir. [1]

Örnek 3.4.10. K sağ-el trefoil düğümünün Jones polinomu

$$V_K(t) = t + t^3 - t^4$$

dir ve yukarıdaki teoremden, simetrik olmadığından K amphicheiral de değildir. [1]

Örnek 3.4.11. Örnek 3.4.4 deki 8 şekilli düğümün Jones polinomu simetriktir,

$$V_K(t) = t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2$$

dir. [1]

Bir düğümün Jones polinomu simetrik ise bu düğüm amphicheiral olmak zorunda değildir. Aşağıdaki örnekte, Jones polinomu simetrik olan, ancak amphicheiral olmayan bir düğüm gösterilmiştir.



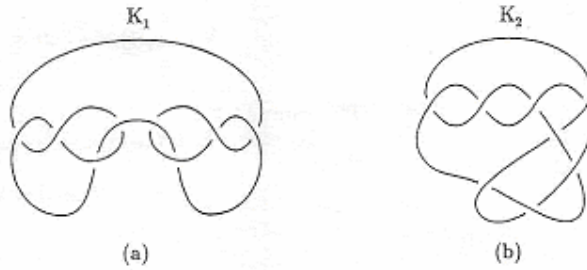
Şekil 3.4.4

Örnek 3.4.12. Şekil 3.4.4 deki K düğümünün Jones polinomu

$$V_K(t) = t^{-3} - t^{-2} + t^{-1} - 1 + t - t^2 + t^3$$

dır. [1]

Jones polinomları çok güçlü invariantlar olmasına rağmen, tam bir invariant değildir. Yani; sonsuz sayıda denk olmayan düğüm, aynı Jones polinomuna sahip olabilir.



Şekil 3.4.5

Örnek 3.4.13. Şekil 3.4.5(a) ve (b) de görülen K_1 ve K_2 düğümlerinin Jones polinomları aynıdır:

$$V_{K_1}(t) = V_{K_2}(t) = (t^{-2} - t^{-1} + 1 - t + t^2)^2 .$$

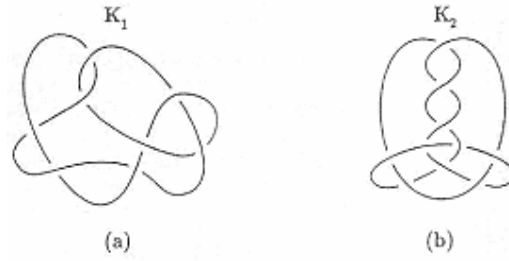
Ancak, Alexander polinomları

$$\Delta_{K_1}(t) = (t^{-1} - 3 + t)^2$$

$$\Delta_{K_2}(t) = -t^{-3} + 3t^{-2} - 5t^{-1} + 7 - 5t + 3t^2 - t^3$$

Böylece, K_1 ve K_2 denk değildir. [1]

Bu örneğe göre, Alexander polinomu aynı olmayan ama Jones polinomu aynı olan düğümler de vardır. Bunun tersi de mümkündür.



Şekil 3.4.6

Örnek 3.4.14. Şekil 3.4.6 (a) ve (b) de görülen birbirinden farklı K_1 ve K_2 düğümlerinin Alexander polinomları da, Jones polinomları da eşittir:

$$\Delta_K(t) = 2t^{-2} - 6t^{-1} + 9 - 6t + 2t^2$$

$$V_K(t) = -t^{-3} + 2t^{-2} - 3t^{-1} + 5 - 4t + 4t^2 - 3t^3 + 2t^4 - t^5$$

Önerme 3.4.15. L , μ bileşenli yönlü bir halka olsun. Bu durumda

$$V_L(1) = (-2)^{\mu-1}$$

dir.

Bu önerme, Jones polinomlarının asla 0'a eşit olmayacağı sonucunu verir. [1]

Önerme 3.4.16. K bir düğüm ya da halka ise $\mu(K)$, K nın bileşenlerinin sayısı olmak üzere,

$$V_K(-1) = (-1)^{\mu(K)-1} \Delta_K(-1)$$

dir. [1]

3.5. Skein Polinomları

Tanım 3.5.1. K bir yönlendirilmiş düğüm veya halka, D de K nın düzenli diyagramı olsun. Aşağıdaki aksiyomları sağlayan, x, y, w negatif kuvvetli de olabilen değişkenlerle $S_K(x, y, w)$, K nın bir polinomu olarak tanımlanır.

(1) K bir O aşikar düğüm ise $S_O(x, y, w) = 1$ dir.

(2) D_+, D_-, D_0 Skein diyagramları için

$$xS_{D_+}(x, y, w) - yS_{D_-}(x, y, w) = wS_{D_0}(x, y, w) \text{ dir.}$$

$S_K(x, y, w)$ polinomu K düğümü için bir invarianttır.

Yukarıdaki tanımda S_K polinomu üç değişkenli olarak verilmiştir. Aslında sadece iki değişkenlidir. Bunu göstermek için $P_K(v, z)$ yi göz önüne alalım.

(1) K bir O aşikar düğüm ise $P_O(v, z) = 1$ dir.

(2) D_+, D_-, D_0 Skein diyagramları için

$$\frac{1}{v}P_{D_+}(v, z) - vP_{D_-}(v, z) = zP_{D_0}(v, z) \text{ dir.}$$

Aşağıdaki önerme $P_K(v,z)$ ile $S_K(x,y,w)$ nin gerçekten de aynı olduğunu gösterir.

Önerme 3.5.2. (1) $S_K\left(\frac{1}{v}, v, z\right) = P_K(v, z)$

(2) $P_K\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}, \frac{w}{\sqrt{x}\sqrt{y}}\right) = S_K(x, y, w)$

dir. [1]

Genel olarak, Skein diyagramı ile tanımlanan polinomlara *Skein polinomları* denir. $P_K(v,z)$ bir Skein polinomunun en genel formudur ve buna *Homfly polinomu* da denir. Şimdi, $P_K(v,z)$ nin Skein dönüşümleriyle Alexander ve Jones polinomlarının Skein dönüşümlerinin karşılaştıralım.

Önerme 3.5.3. K yönlenmiş bir düğüm veya halka olsun.

(1) $V_K(t) = P_K\left(t, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

(2) $\Delta_K(t) = P_K\left(1, \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)$

Buradan, $V_K(t)$ ve $\Delta_K(t)$ nin $P_K(v,z)$ nin özel bir durumu olduğu söylenebilir.[7]

Örnek 3.5.4. $P_{Oo}(v,z) = \frac{1-v^2}{vz}$ dir. [1]

Örnek 3.5.5. K bir sağ-el trefoil düğümü ise Skein polinomu

$$P_K(v, z) = 2v^2 - v^4 + v^2z^2$$

dir. [1]

3.6. Kauffman Polinomları

Reidemeister Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 hareketleriyle ya da onların tersleri uygulanarak bir düğüm diyagramından diğer bir düğüm diyagramı elde edilebilirse bu düğümlere denk düğümler denildiğini biliyoruz.

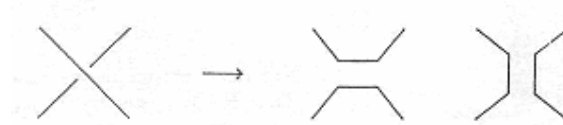
Kauffman polinomu Reidemeister hareketleriyle değişmeyen bir düğüm invaryantıdır.

Tanım 3.6.1. Ω_2 , Ω_3 Reidemeister hareketleri ve tersleri olan hareketler *düzenli hareketler* denir. O halde, D düzenli diyagramından bu düzenli hareketlerin sonlu kez uygulanmasıyla elde edilen bir D' düzenli diyagramı varsa, D ile D' diyagramlarına *düzenli olarak denktir* denir.

f , t değişkenine bağlı, düzenli hareketler altında değişmeyen bir fonksiyon olsun. Uygun bir m seçimi yapılırsa bu durumda $t^m \cdot f$ de düğümler (ya da halkalar) için bir invaryant olur. Burada m seçimi düzenli diyagrama bağlıdır. Bu prensibe Kauffman prensibi denir.

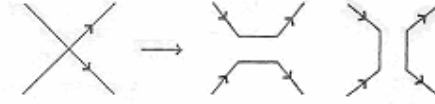
Aslında Jones polinomuna benzeyen bu invaryant özellikle alterne düğümler için önemli bir yere sahiptir.

K yönlenmemiş bir düğüm ya da halka, D de K nın düzenli diyagramı olsun. D nin geçiş noktaları Şekil 3.6.1 deki gibi iki farklı şekilde kesilebilir (splice). Bu kesme yöntemi geçiş noktalarının işaretinden bağımsız olmalıdır.



Şekil 3.6.1

Eğer D de bir yön belirtilirse yukarıdaki işlemin (splice) anlamı bozulabilir. Bu durum Şekil 3.6.2 de gösterilmiştir.



Şekil 3.6.2

Şimdi, Kauffman parantez polinomunu tanımlayalım.

Teorem 3.6.2. K düğüm veya halkasının yönlenmemiş düzenli diyagramı D olsun. Bu durumda, aşağıdaki dört şartı sağlayan tek bir $P_D(A)$ tamsayı polinomu vardır. (negatif kuvvetli de olabilir)

- (1) $P_D(A)$ düzenli denklik altında bir invarianttır.
- (2) Bir O aşık düğümün aşık diyagramı D ise

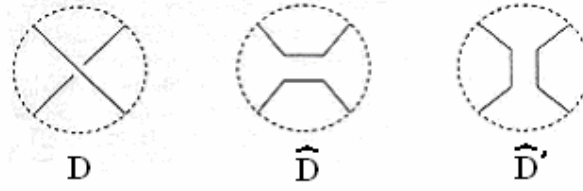
$$P_O(A) = 1 \quad (3.6.1)$$

- (3) D , iki tane D_1 , D_2 ayrık diyagramlardan oluşuyorsa; yani, $D = D_1 \amalg D_2$ ise,

$$P_D(A) = -(A^2 + A^{-2})P_{D_1}(A)P_{D_2}(A) \quad (3.6.2)$$

- (4) $D, \widehat{D}, \widehat{D}'$ Şekil 3.6.3 de verilen Skein diyagramları olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$P_D(A) = AP_{\widehat{D}}(A) + A^{-1}P_{\widehat{D}'}(A) \quad (3.6.3)$$



Şekil 3.6.3

Bu şartları sağlayan bir düğüm veya halkanın D düzenli diyagramı üzerinde tanımlanan $P_D(A)$ polinomuna **Kauffman parantez polinomu** denir. [1]

K aşık düğümünün Kauffman parantez polinomu 1 olması gerekmez. Örneğin $D = \infty$ ise $P_D(A) = -A^{-3}$ ve $D = \infty$ ise $P_D(A) = A^{-6}$ (3.6.4) dır.[5]

Buradan $P_D(A)$ polinomundan Ω_1 içinde invaryant olacak şekilde yeni bir invaryant tanımlanabilir.

Teorem 3.6.3. D , K yönlü düğümü veya halkasının yönlendirilmiş düzenli diyagramı olsun. Eğer $P_D(A)$ yönlendirilmemiş D diyagramı için Kauffman parantez polinomu ve $w(D)$, D nin tait sayısı ise

$$\hat{P}_D(A) = (-A^{-3})^{w(D)} P_D(A) \quad (3.6.5)$$

biçiminde tanımlanır. [1]

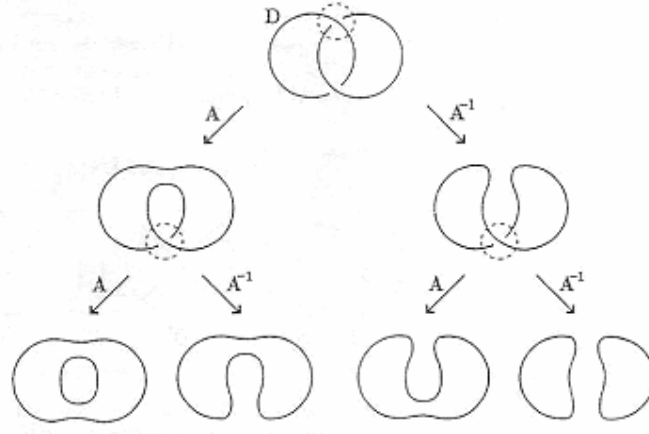
Buradan, $\hat{P}_D(A)$, yönlü bir düğümün veya halkanın invaryantıdır ve $\hat{P}_K(A)$ ile gösterilir.

$A = t^{\frac{1}{4}}$ dönüşümü yapılırsa, $\hat{P}_K(A)$ polinomu, K nin $V_K(t)$ Jones polinomuna karşılık gelir.

Yani;
$$\widehat{P}_K(t^{-\frac{1}{4}}) = V_K(t) \quad (3.6.6)$$

Örnek 3.6.4. Bir L pozitif Hopf halkasının bir düzenli diyagramından, $\widehat{P}_D(A)$ yı hesaplayalım.

$w(D) = 2$ dir.



Şekil 3.6.4

Skein diyagramındaki katsayılar alınarak,

$$\begin{aligned} P_D(A) &= A^2[-(A^2 + A^{-2})] + 1 + 1 + A^{-2}[-(A^2 + A^{-2})] \\ &= -A^4 - A^{-4} \end{aligned}$$

elde edilir. [9]

$w(D)=2$ için,

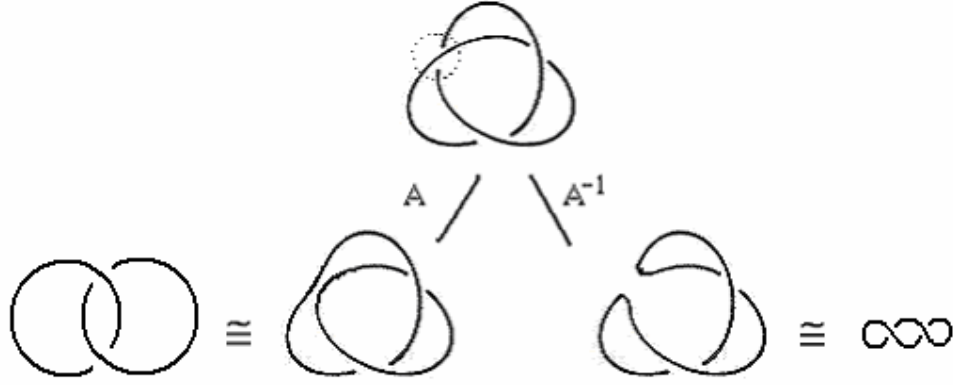
$$\widehat{P}_K(A) = (-A^{-3})^2(-A^4 - A^{-4}) = -A^{-2} - A^{-10}$$

ve buradan

$$\widehat{P}_K(t^{-\frac{1}{4}}) = -t^{\frac{1}{2}} - t^{\frac{5}{2}}$$

bulunur. [1]

Örnek 3.6.5. Sağ-el trefoil düğümün düzenli diyagramı için $P_D(A)$ yı bulalım.



Şekil 3.6.5

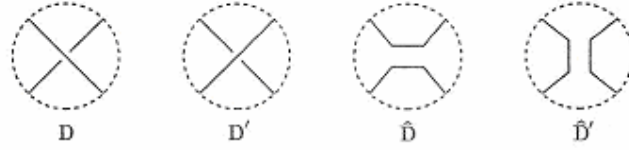
Skein diyagramındaki katsayılar alınarak (3.6.2) , (3.6.4) ve Örnek 3.6.4 den,

$$\begin{aligned} P_D(A) &= A[-A^4 - A^{-4}] + A^{-1}[A^{-6}] \\ &= -A^{-3} - A^5 + A^7 \end{aligned}$$

dir.[5]

Teorem 3.6.6. D , bir düğümün (ya da halka) yönlendirilmemiş düzenli diyagramı olsun. O halde, düzenli hareketler altında değişmeyen iki değişkenli $\Lambda_D(a, x)$ polinomu aşağıdaki üç şartı sağlar.

- (1) O aşık diyagram için $\Lambda_O(a, x) = 1$ dir.
- (2) $D, D', \widehat{D}, \widehat{D}'$ bir tek geçiş noktasının komşuluğu dışında aynı olsunlar. Bu komşuluk içinde, bu düğümün düzenli diyagramı Şekil 3.6.6 da gösterilmiştir.



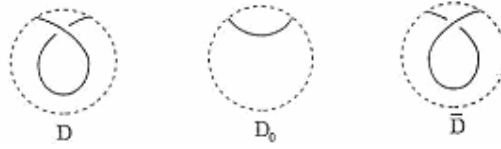
Şekil 3.6.6

Bu durumda aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$\Lambda_D(a, x) + \Lambda_{D'}(a, x) = x \{ \Lambda_{\bar{D}}(a, x) + \Lambda_{\bar{D}'}(a, x) \}$$

(3) D, \bar{D}, D_0 bir tek geçiş noktasının komşuluğu dışında aynı olsunlar.

Bu komşuluk içinde, bu düğümün düzenli diyagramı Şekil 3.6.7 de gösterilmiştir.



Şekil 3.6.7

Bu durumda aşağıdaki formüller sağlanır:

$$(i) \Lambda_D(a, x) = a \Lambda_{D_0}(a, x)$$

$$(ii) \Lambda_{\bar{D}}(a, x) = a^{-1} \Lambda_{D_0}(a, x)$$

İki değişkenli $\Lambda_D(a, x)$ polinomu bir tektir. Bu invariant da Kauffman parantez polinomu gibi düzenli diyagramdan elde edilir. Önceden olduğu gibi, K aşık düğümü için $\Lambda_K(a, x) = 1$ olarak tanımlayamayız. Gerçekten de, $\Lambda_D(a, x)$, Ω_1 Reidemeister hareketi altında değişmeden kalmaz. Bu durumda Ω_1 altında değişmeyen, $\Lambda_D(a, x)$ gibi yeni bir polinom tanımlanacaktır.

Tanım 3.6.7. K bir yönlendirilmiş bir düğüm (ya da halka) ve D , K nin düzenli diyagramı olsun. $w(D)$ D nin Tait sayısı olmak üzere,

$$F_D(a, x) = a^{w(D)} \Lambda_D(a, x)$$

dır.

Teorem 3.6.8. $F_D(a, x)$ K yönlü düğümü için bir invariantsdır, D düzenli diyagramından da bağımsızdır. Bu invariantsa iki değişkenli *Kauffman polinomu* denir. [1]

Örnek 3.6.9. $L=\{OO\}$ halkası için Kauffman polinomu

$$\Lambda(OO) = \frac{a + a^{-1}}{x} - 1$$

$$F_L(a, x) = \Lambda_L(a, x) = x^{-1}(a + a^{-1}) - 1$$

dir. [1]

Örnek 3.6.10. K , Sağ-el trefoil düğümünün Kauffman polinomu

$$F_K(a, x) = a^{-3} \{x^2(a + a^{-1}) + x(1 + a^{-2}) - (2a + a^{-1})\}$$

dir. [1]

Aşağıda, Kauffman polinomu ile Jones polinomu arasındaki bağıntı verilmiştir.

Teorem 3.6.11. K yönlü bir düğüm veya halka olsun. Bu durumda,

$$F_K(-t^{-\frac{3}{4}}, t^{\frac{1}{4}} + t^{-\frac{1}{4}}) = V_K(t)$$

dir. [1]

4. SONUÇ

Bu çalışmada, düğümlerden elde edilen Alexander, Conway, Jones, Skein ve Kauffman polinomları hesaplanmıştır.

Bu polinomların hesaplanması için Seifert yüzeyleri ve daha sonra Seifert matrisi araştırılmış ve bunlara bağlı olarak Alexander polinomu elde edilmiştir.

Daha sonra Conway'in düğümün düzenli diyagramından hareketle matrise ve Seifert yüzeylerine gerek duymadan Alexander polinomunu hesaplaması ve daha sonra da buna benzer yolla Jones polinomunun hesaplaması örneklendirilmiştir.

Yukarıdaki polinomlara ilave olarak Kauffman'ın parantez polinomu da incelenmiş ve örnekler verilmiştir.

Bu polinomlar ve elde edilme yolları Düğüm Teorisinde ve düğümlerin sınıflandırılması probleminde önemli yer tutmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] Kunio Murasugi, **Knot Theory and It's Applications**, Birkhauser Boston (1996)
- [2] S.Moran, **The Mathematical Theory of Knots and Braids**, Elsevier Science Publisher B.V. (1983)
- [3] J.S. Birman, **Braids, Links and Mapping Class Groups**, Ann. Of Math. Studies 82, Princeton Univ. Press (1974)
- [4] G. Burde and H. Zeischang, **Knots**, Studies in Math. 5, Walter de Gruyter (1985)
- [5] V.V.Prasolov and A.B.Sossinski, **Knots, Links, Braids and 3-Manifolds**, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1991)
- [6] L. Kauffman, **On Knots**, Princeton University Press (1987)
- [7] A. Kawauchi, **A Survey of Knot Theory**, Birkhauser-Verlag (1996)
- [8] W.S. Massey, **Algebraic Topology: an Introduction**, Graduate Texts in Math. 56, Springer-Verlag (1977)
- [9] C.C. Adams, **The Knot Book: An Elementary Introduction To The Mathematical Theory Of Knots**, W.H. Freeman and Company, New York